Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T \colon \langle X, K(G,n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X.

- Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G,n) \rangle$ che rende T un isomorfismo di gruppi.
- T è della forma
  $$T(f) = f^*(\alpha)$$
  dove α è la "classe fondamentale" di $\widetilde{H}^n(K(G,n); G)$.

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G,n)\rangle \implies$ definizione di Ω-spettro.
2. Per ogni Ω-spettro $\{K_n\}$, la famiglia di funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ è una teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW-complessi puntati.
3. Se una teoria coomologica ridotta h^* soddisfa $h^n(S^0) = 0$ per $n \neq 0$, allora esistono isomorfismi naturali $h^n(X) \simeq \widetilde{H}^n(X; h^0(S^0))$.

Lavoreremo nella categoria **Top$_\bullet$** e nella sua sottocategoria **CW$_\bullet$**.

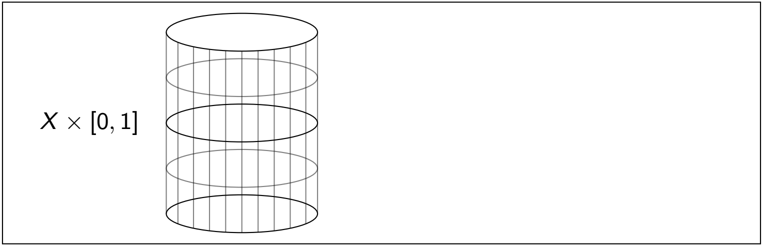
- Gli oggetti sono gli spazi topologici (o CW-complessi) puntati (X, x_0).
- I morfismi sono
$$\mathrm{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle,$$
funzioni continue $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ a meno di omotopia che fissa il punto base.
- La composizione
$$\circ : \langle Y, Z \rangle \times \langle X, Y \rangle \longrightarrow \langle X, Z \rangle$$
è ben definita.

Esempio

Abbiamo l'uguaglianza (per ora solo insiemistica)
$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle.$$

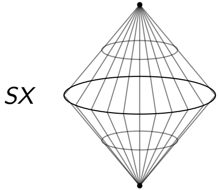
- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$



- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$



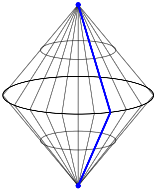
- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato (X, x_0), è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad \text{con punto base } [x_0].$$

ΣX



- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

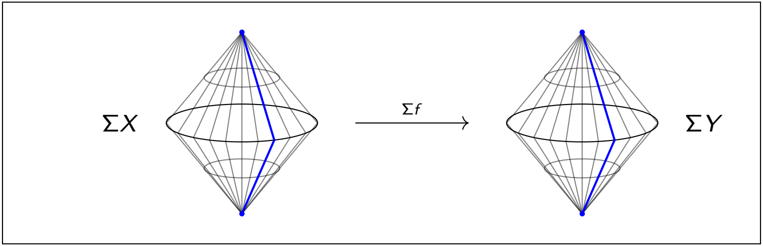
$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato (X, x_0), è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad \text{con punto base } [x_0].$$

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$:

$$\Sigma f(x,t) = (f(x), t).$$



- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato (X, x_0), è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad \text{con punto base } [x_0].$$

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$:

$$\Sigma f(x,t) = (f(x), t).$$

- La sospensione ridotta è dunque un funtore

$$\Sigma \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet$$

che si restringe a

$$\Sigma \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{CW}_\bullet.$$

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

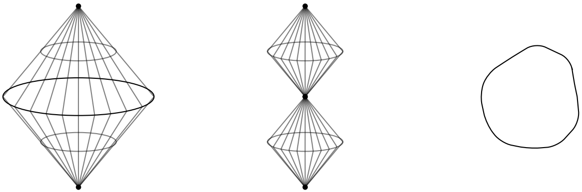
Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Sospensione

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$\Sigma X \longrightarrow \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} Y$$



Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \dfrac{1}{2}, \\ g(x, 2t-1) & t \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x,2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x,2t-1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \dfrac{1}{2}, \\ g(x, 2t-1) & t \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f\colon Y \to Z$, la composizione

$$f \circ -\colon \langle \Sigma X, Y \rangle \longrightarrow \langle \Sigma X, Z \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t-1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f \colon Y \to Z$, la composizione

$$f \circ - \colon \langle \Sigma X, Y \rangle \longrightarrow \langle \Sigma X, Z \rangle$$

  è un omomorfismo di gruppi.
- Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle \Sigma X, - \rangle \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}.$$

- Dato uno spazio topologico puntato (X, x_0), definiamo lo spazio di lacci

$$\Omega X = \left\{ g \in X^{[0,1]} : g(0) = g(1) = x_0 \right\}$$

  con punto base il cammino costante in x_0. La topologia è quella compatta-aperta.

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Omega f \in \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$ per composizione:

$$\Omega f(g) = f \circ g.$$

- Lo spazio di lacci è dunque un funtore

$$\Omega \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet.$$

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle X, \Omega Y\rangle$.

- Per $f, g \in \langle X, \Omega Y\rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x)(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x)(2t-1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f\colon X \to Z$, la composizione

$$- \circ f\colon \langle Z, \Omega Y\rangle \longrightarrow \langle X, \Omega Y\rangle$$

  è un omomorfismo di gruppi.
- Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle -, \Omega Y\rangle\colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}^{\mathrm{op}}.$$

- Con la struttura di gruppo che abbiamo definito, l'uguaglianza

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle$$

  è un isomorfismo di gruppi.
- Le due strutture di gruppo su $\langle \Sigma X, \Omega Y \rangle$ coincidono.
- $\Omega^2 Y$ può essere interpretato come lo spazio delle funzioni

$$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow Y$$

  che assumono il valore y_0 sul bordo. Con lo stesso ragionamento usato per il π_2, si dimostra che $\langle X, \Omega^2 Y \rangle$ è abeliano.

Proposizione

I funtori Σ e Ω sono aggiunti. In altre parole, esiste una biiezione

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturale in X e Y. Inoltre queste biiezioni sono isomorfismi di gruppi.

Osservazioni

- Considerando S^{n-1}, otteniamo che

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle \simeq \langle S^{n-1}, \Omega X \rangle = \pi_{n-1}(\Omega X).$$

- In particolare, se X è un $K(G, n)$, allora ΩX è un $K(G, n-1)$.
- Per ogni $n \geq 1$, sia K_n un CW-complesso che è anche un $K(G, n)$; per unicità dei $K(G, n)$, abbiamo equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n \colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

Definizione

Un Ω-*spettro* è una famiglia di CW-complessi $\{K_n\}_{n\geq 1}$ dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n \colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

- È possibile estendere la famiglia anche a indici $n \leq 0$: è sufficiente considerare come K_{n-1} un'approssimazione CW di ΩK_n.

Proposizione

Siano $f \colon Y \to Z$ un'equivalenza omotopica debole, X un CW-complesso. Allora la composizione

$$f \circ - \colon \langle X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, Z \rangle$$

è una biiezione.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a $\langle X, K_n \rangle$ una struttura di gruppo imponendo che

$$\theta_n \circ - \colon \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$

sia un isomorfismo di gruppi.

- In questo modo, $\langle X, K_n \rangle$ risulta essere un gruppo abeliano:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \Sigma X, K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\theta_{n+1} \circ -", "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] & \langle \Sigma X, \Omega K_{n+2} \rangle \arrow[d, "\simeq"] \\
\langle X, K_n \rangle \arrow[r, "\theta_n \circ -", "\simeq"'] & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\Omega \theta_{n+1} \circ -"] & \langle X, \Omega^2 K_{n+2} \rangle .
\end{tikzcd}$$

- Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ otteniamo il funtore

$$\langle -, K_n \rangle \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}.$$

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un Ω-spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ è una famiglia di funtori

$$h^n \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}, \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

1. Per ogni coppia (X, A) con $x_0 \in A$ esiste una successione esatta lunga

$$\dots \xrightarrow{\delta} h^n(X/A) \xrightarrow{q^*} h^n(X) \xrightarrow{i^*} h^n(A) \xrightarrow{\delta} h^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

   naturale nella coppia (X, A).

2. Per ogni famiglia $\{X_\alpha\}_\alpha$, le inclusioni inducono un isomorfismo

$$h^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \xrightarrow{\simeq} \prod_\alpha h^n(X_\alpha).$$

- L'assioma 2. è soddisfatto: nella categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ dare un morfismo

$$\bigvee_\alpha X_\alpha \longrightarrow K_n$$

  è equivalente a dare una collezione di morfismi

$$\{X_\alpha \longrightarrow K_n\}_\alpha .$$

- Per quanto riguarda l'assioma 1., sia (X, A) una coppia di CW-complessi; vediamo come costruire la successione esatta lunga associata.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \arrow[d, "\simeq"] \\
A \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X/A \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma A \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d] \\
B \arrow[r, hook] & Y \arrow[r] & Y/B \arrow[r] & \Sigma B \arrow[r, hook] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta.

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta. Sia $f\colon X \to K_n$. Allora

$$\begin{aligned} & f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n \rangle \longrightarrow \langle A, K_n \rangle \\ \iff & f|_A \text{ è omotopicamente banale (fissando il punto base)} \\ \iff & f \text{ si estende a una mappa } X \cup \mathcal{C}A \longrightarrow K_n \\ \iff & f \text{ appartiene all'immagine di } \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle \longrightarrow \langle X, K_n \rangle. \end{aligned}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n, K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle A, K\rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, K\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & \langle X/A, K\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K\rangle \arrow[l] \\
 & & \langle A, \Omega K'\rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, \Omega K'\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & & \\
\langle X, K'\rangle & \langle X/A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma X, K'\rangle \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

Otteniamo così la successione esatta lunga

$$\ldots \longleftarrow \langle X/A, K_{n+1}\rangle \longleftarrow \langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \ldots$$

naturale in (X, A).

Teorema

Siano $h^*, \bar{h}^*$ teorie coomologiche ridotte sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ tali che

$$\begin{cases} h^n(S^0) = \bar{h}^n(S^0) = 0 & \text{per } n \neq 0, \\ h^0(S^0) \simeq \bar{h}^0(S^0) = G. \end{cases}$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ i funtori h^n e $\bar{h}^n$ sono isomorfi.

Osservazione

Se h è una teoria coomologica ridotta, è facile verificare che esiste un isomorfismo di funtori

$$h^n \simeq h^{n+1} \circ \Sigma \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}.$$

Di conseguenza possiamo limitarci a considerare CW complessi senza 1-celle (infatti $\Sigma^2 X$ ha una struttura di CW complesso senza 1-celle).

- La coomologia di S^n è banale in ogni dimensione, tranne per

$$h^n(S^n) = G.$$

- Sia X un CW-complesso. Componendo le mappe

$$h^n(X^n/X^{n-1}) \longrightarrow h^n(X^n) \longrightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n)$$

  si ottengono le applicazioni di bordo di un complesso "cellulare"

$$\ldots \to h^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \to h^n(X^n/X^{n-1}) \to h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \to \ldots,$$

  il cui n-esimo gruppo di coomologia è precisamente $h^n(X)$.

- Le mappe caratteristiche

$$\varphi_\alpha \colon (D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$$

  inducono isomorfismi

$$h^n(X^n/X^{n-1}) \xrightarrow{\simeq} \prod_\alpha h^n(D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha) \simeq \prod_\alpha G_\alpha.$$

Dunque il complesso cellulare è della forma

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \prod_\alpha G_\alpha \arrow[r, "d"] \arrow[dd, dash, "\simeq"] & \prod_\beta G_\beta \arrow[r] \arrow[dd, dash, "\simeq"] \arrow[dr] & \dots \\
G_\alpha \arrow[ur] \arrow[d, dash, "\simeq"] & & & G_\beta \arrow[d, dash, "\simeq"] \\
h^n(D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha) \arrow[r] & h^n(X^n/X^{n-1}) \arrow[r, "d"] & h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \arrow[r] & h^{n+1}(D^{n+1}_\beta/\partial D^{n+1}_\beta) \arrow[d, dash, "\simeq"] \\
& & & h^n(\partial D^{n+1}_\beta)\,.
\end{tikzcd}$$

La mappa $G_\alpha \to G_\beta$ è indotta dall'applicazione continua

$$S^n \simeq \partial D^{n+1}_\beta \longrightarrow X^n \longrightarrow D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \simeq S^n.$$

Mostriamo ora che l'applicazione

$$f^*\colon h^n(S^n) \longrightarrow h^n(S^n)$$

indotta in coomologia da una funzione continua

$$f\colon S^n \longrightarrow S^n$$

è la moltiplicazione per il grado di f.

- Sappiamo che due mappe $S^n \to S^n$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado.
- L'enunciato è vero per $\deg(f) = 0, 1$ (funzione costante e identità).
- È sufficiente mostrare che $(f+g)^* = f^* + g^*$.

Lemma

Siano X, Y CW complessi, $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$. Allora

$$(f \cdot g)^* = f^* + g^*.$$

Un omomorfismo

$$\prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta$$

non è determinato dai valori che assume sui singoli fattori G_α. Tuttavia per ogni β la composizione

$$\begin{tikzcd}
\prod_\alpha G_\alpha \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \prod_\beta G_\beta \arrow[r] & G_\beta \simeq h^n(\partial D_\beta^{n+1}) \\
\prod_\gamma G_\gamma \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

è indotta da

$$\begin{tikzcd}
X^n/X^{n-1} & X^n \arrow[l] & \partial D_\beta^{n+1} \arrow[l] \arrow[dl] \\
X^n_\beta/X^{n-1} \arrow[u, hook] & X^n_\beta, \arrow[l] \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

dove X^n_β si ottiene attaccando a X^{n-1} le n-celle che intersecano l'immagine di ∂D_β^{n+1} (sono in numero finito).

Riassumendo:

- possiamo calcolare i gruppi $h^n(X)$ a partire dal complesso cellulare

$$\dots \longrightarrow \prod_\alpha G_\alpha \longrightarrow \prod_\beta G_\beta \longrightarrow \dots;$$

- i gruppi di questo complesso dipendono solo dalla struttura di CW-complesso di X;
- le mappe di bordo sono determinate dal grado di certe funzioni continue

$$\partial D_\beta^{n+1} \longrightarrow D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n$$

  che dipendono dalle mappe caratteristiche delle celle.

Di conseguenza, teorie coomologiche diverse hanno lo stesso complesso cellulare, dunque per ogni X abbiamo un isomorfismo

$$h^n(X) \simeq \bar{h}^n(X).$$

Per verificare la naturalità, sia $f\colon X \to Y$, cellulare a meno di omotopia.

- Vale $f(X^n) \subseteq Y^n$, dunque f induce un morfismo fra i complessi cellulari

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & h^n(Y^n/Y^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & h^{n+1}(Y^{n+1}/Y^n) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & h^n(X^n/X^{n-1}) \arrow[r] & h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

- Come accadeva per le mappe di bordo, i morfismi f^* sono determinati dal grado delle applicazioni

$$D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \longrightarrow X^n/X^{n-1} \xrightarrow{f} Y^n/Y^{n-1} \longrightarrow D^n_\beta/\partial D^n_\beta.$$

Di conseguenza, a meno dell'isomorfismo che abbiamo stabilito fra i complessi cellulari di h^* e $\bar{h}^*$, f induce lo stesso morfismo di complessi nelle due teorie coomologiche. Pertanto l'isomorfismo

$$h^n(X) \simeq \bar{h}^n(X)$$

è naturale in X.

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Poniamo $K_n = K(G,n)$; sappiamo che è un Ω-spettro.
- Estendendo la successione a $n \leq 0$, otteniamo la famiglia di funtori

  $$h^n = \langle -, K_n\rangle \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$$

  che definisce una teoria coomologica ridotta.
- Vale

  $$h^n(S^0) = \widetilde{H}^n(S^0;G) = \begin{cases} 0 & n \neq 0, \\ G & n = 0. \end{cases}$$

- Di conseguenza, per ogni n abbiamo un isomorfismo di funtori

  $$h^n \simeq \widetilde{H}^n(-;G).$$

Per il lemma di Yoneda, l'isomorfismo

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha) \in \widetilde{H}^n(X;G)$$

dove

$$\alpha = T(\mathrm{id}_{K(G,n)}) \in \widetilde{H}^n(K(G,n);G).$$

- Se prendiamo $K(G,n)$ in modo che abbia come $(n-1)$-scheletro un punto, α è rappresentata dal cociclo cellulare che a ogni n-cella associa l'elemento

  $$[\varphi_\alpha\colon D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \longrightarrow K(G,n)] \in \pi_n(K(G,n)) \simeq G$$

  indotto dalla mappa caratteristica.
- Analogamente, per ogni $f\colon X \to K(G,n)$, $T(f)$ è rappresentato in coomologia dal cociclo cellulare che a ogni n-cella di X associa l'elemento di $\pi_n(K(G,n))$ indotto dalla composizione

  $$D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^n/X^{n-1} \xrightarrow{f} K(G,n).$$