Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \longrightarrow \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G,n)\rangle$ che rende T un isomorfismo di gruppi.
- T è della forma
$$T([f]) = f^*(\alpha)$$
dove α è la "classe fondamentale" di $H^n(K(G,n);G)$.

Lavoreremo prevalentemente nella categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

- Gli oggetti sono i CW-complessi puntati (X, x_0).
- I morfismi sono
$$\mathrm{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle ,$$
funzioni continue $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ a meno di omotopia che fissa il punto base.
- La composizione
$$\circ : \langle Y, Z \rangle \times \langle X, Y \rangle \longrightarrow \langle X, Z \rangle$$
è ben definita.

Esempio

Abbiamo l'uguaglianza (per ora solo insiemistica)
$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle .$$

Definizione

Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice *equivalenza omotopica debole* se per ogni $n \geq 0$ la mappa indotta
$$f_*\colon \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$$
è un isomorfismo.

Proposizione

Siano X un CW-complesso, $f\colon Y \to Z$ un'equivalenza omotopica debole di spazi topologici. Allora
$$f \circ -\colon \langle X, Y\rangle \longrightarrow \langle X, Z\rangle$$
è una biiezione.

Teorema (Approssimazione CW)

Per ogni spazio topologico X esistono un CW-complesso Z e un'equivalenza omotopica debole $f\colon Z \to X$.

- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per un CW-complesso puntato (X, x_0), è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad \text{con punto base } [x_0].$$

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$; la sospensione ridotta è dunque un funtore

$$\Sigma \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{CW}_\bullet.$$

content...

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un Ω-spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ è una famiglia di funtori

$$h^n\colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}, \qquad\qquad n\in\mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

1. Per ogni coppia (X, A) con $x_0 \in A$ esiste una successione esatta lunga

$$\dots \xrightarrow{\delta} h^n(X/A) \xrightarrow{q^*} h^n(X) \xrightarrow{i^*} h^n(A) \xrightarrow{\delta} h^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

   naturale nella coppia (X, A).

2. Per ogni famiglia $\{X_\alpha\}_\alpha$, le inclusioni inducono un isomorfismo

$$h^n\left(\bigvee\nolimits_\alpha X_\alpha\right) \longrightarrow \prod\nolimits_\alpha h^n(X_\alpha).$$

- Per ogni $f\colon X \to Y$,

$$h^n(f) = (- \circ f)\colon \langle Y, K_n \rangle \longrightarrow \langle X, K_n \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{array}{ccc} \langle Y, K_n \rangle & \xrightarrow{-\circ f} & \langle X, K_n \rangle \\ \downarrow{\scriptstyle\simeq} & & \downarrow{\scriptstyle\simeq} \\ \langle Y, \Omega K_{n+1} \rangle & \xrightarrow{-\circ f} & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle \end{array} .$$

- L'assioma 2. è soddisfatto: nella categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ un morfismo

$$\bigvee_\alpha X_\alpha \longrightarrow K_n$$

è precisamente una collezione di morfismi

$$\{X_\alpha \longrightarrow K_n\}_\alpha .$$

Costruiamo la successione esatta lunga associata a una coppia (X, A).

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \arrow[d, "\simeq"] \\
A \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X/A \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma A \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d] \\
B \arrow[r, hook] & Y \arrow[r] & Y/B \arrow[r] & \Sigma B \arrow[r, hook] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle \, .$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle \, .$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta. Sia $f \colon X \to K$. Allora

$$\begin{aligned} & f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n \rangle \longrightarrow \langle A, K_n \rangle \\ \iff & f|_A \text{ è omotopicamente banale (fissando il punto base)} \\ \iff & f \text{ si estende a una mappa } X \cup \mathcal{C}A \longrightarrow K_n \\ \iff & f \text{ appartiene all'immagine di } \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle \longrightarrow \langle X, K_n \rangle. \end{aligned}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle \,.$$

Tale successione è esatta. Posto $K = K_n$, $K' = K_{n+1}$, le due successioni ottenute si possono incollare.

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle A, K\rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, K\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & \langle X/A, K\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K\rangle \arrow[l] \\
 & & \langle A, K'\rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, K'\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & & \\
\langle X, K'\rangle & \langle X/A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma X, K'\rangle \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

Otteniamo così la successione esatta lunga

$$\ldots \leftarrow \langle X/A, K_{n+1}\rangle \leftarrow \langle A, K_n\rangle \leftarrow \langle X, K_n\rangle \leftarrow \langle X/A, K_n\rangle \leftarrow \ldots$$

naturale in (X, A).