

Costruzione omotopica della coomologia

Enunciato

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X .

Costruzione omotopica della coomologia

Enunciato

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X .

Costruzione omotopica della coomologia

Enunciato

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X .

- Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G, n) \rangle$ che rende T un isomorfismo di gruppi.

Costruzione omotopica della coomologia

Enunciato

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X .

- ▶ Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G, n) \rangle$ che rende T un isomorfismo di gruppi.
- ▶ T è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha)$$

dove α è la “classe fondamentale” di $\tilde{H}^n(K(G, n); G)$.

Costruzione omotopica della coomologia

Strategia dimostrativa

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G, n) \rangle \implies$ definizione di Ω -spettro.

Costruzione omotopica della coomologia

Strategia dimostrativa

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G, n) \rangle \implies$ definizione di Ω -spettro.
2. Per ogni Ω -spettro $\{K_n\}$, la famiglia di funtori $h^n = \langle -, K_n \rangle$ è una teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW-complessi puntati.

Costruzione omotopica della coomologia

Strategia dimostrativa

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G, n) \rangle \implies$ definizione di Ω -spettro.
2. Per ogni Ω -spettro $\{K_n\}$, la famiglia di funtori $h^n = \langle -, K_n \rangle$ è una teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW-complessi puntati.
3. Se una teoria coomologica ridotta h^* soddisfa $h^n(S^0) = 0$ per $n \neq 0$, allora esistono isomorfismi naturali $h^n(X) \simeq \tilde{H}^n(X; h^0(S^0))$.

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Categorie **Top $_{\bullet}$** e **CW $_{\bullet}$** .

Lavoreremo nella categoria **Top $_{\bullet}$** e nella sua sottocategoria **CW $_{\bullet}$** .

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Categorie **Top $_{\bullet}$** e **CW $_{\bullet}$** .

Lavoreremo nella categoria **Top $_{\bullet}$** e nella sua sottocategoria **CW $_{\bullet}$** .

- Gli oggetti sono gli spazi topologici (o CW-complessi) puntati (X, x_0) .

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Categorie **Top $_{\bullet}$** e **CW $_{\bullet}$**

Lavoreremo nella categoria **Top $_{\bullet}$** e nella sua sottocategoria **CW $_{\bullet}$** .

- ▶ Gli oggetti sono gli spazi topologici (o CW-complessi) puntati (X, x_0) .
- ▶ I morfismi sono

$$\text{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle,$$

$$\left\{ f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \right\} / \text{omotopia che fissa il punto base}$$



Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Categorie **Top $_{\bullet}$** e **CW $_{\bullet}$** .

Lavoreremo nella categoria **Top $_{\bullet}$** e nella sua sottocategoria **CW $_{\bullet}$** .

- ▶ Gli oggetti sono gli spazi topologici (o CW-complessi) puntati (X, x_0) .
- ▶ I morfismi sono

$$\text{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle,$$

$$\left\{ f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \right\} / \text{omotopia che fissa il punto base}$$


- ▶ La composizione

$$\circ : \langle Y, Z \rangle \times \langle X, Y \rangle \longrightarrow \langle X, Z \rangle$$

è ben definita.


Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Categorie **Top_{*}** e **CW_{*}**.

Lavoreremo nella categoria **Top_{*}** e nella sua sottocategoria **CW_{*}**.

- ▶ Gli oggetti sono gli spazi topologici (o CW-complessi) puntati (X, x_0) .
- ▶ I morfismi sono

$$\text{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle,$$

$$\left\{ f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \right\} / \text{omotopia che fissa il punto base}$$


- ▶ La composizione

$$\circ : \langle Y, Z \rangle \times \langle X, Y \rangle \longrightarrow \langle X, Z \rangle$$

è ben definita.

Esempio

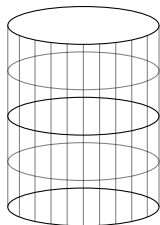
Abbiamo l'uguaglianza (per ora solo insiemistica)

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle.$$

- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

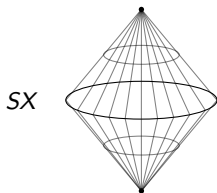
$SX = X \times [0, 1] / \sim$, $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$ collassati a due punti.

$X \times [0, 1]$



- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$SX = X \times [0, 1] / \sim$, $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$ collassati a due punti.



Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

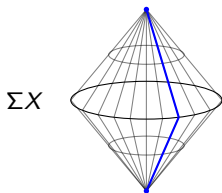
Sospensione

- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0, 1] / \sim, \quad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato (X, x_0) , è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX / \{x_0\} \times [0, 1], \quad \text{con punto base } [x_0].$$



Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Sospensione

- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

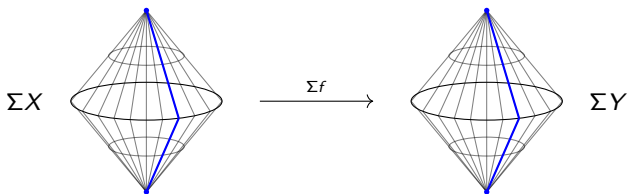
$$SX = X \times [0, 1] / \sim, \quad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato (X, x_0) , è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX / \{x_0\} \times [0, 1], \quad \text{con punto base } [x_0].$$

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$:

$$\Sigma f(x, t) = (f(x), t).$$



Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Sospensione

- ▶ La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0, 1] / \sim, \quad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- ▶ Per uno spazio puntato (X, x_0) , è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX / \{x_0\} \times [0, 1], \quad \text{con punto base } [x_0].$$

- ▶ Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$:

$$\Sigma f(x, t) = (f(x), t).$$

- ▶ La sospensione ridotta è dunque un funtore

$$\Sigma: \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet$$

che si restringe a

$$\Sigma: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{CW}_\bullet.$$

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Sospensione

Dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

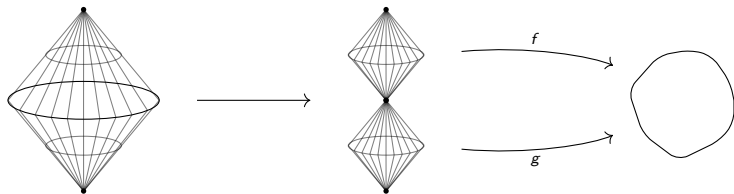
Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Sospensione

Dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

► Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$\Sigma X \longrightarrow \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} Y$$



Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Sospensione

Dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

► Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x, t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x, t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Sospensione

Dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- ▶ Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x, t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- ▶ Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- ▶ Per ogni $f: Y \rightarrow Z$, la composizione

$$f \circ -: \langle \Sigma X, Y \rangle \longrightarrow \langle \Sigma X, Z \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.

Dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- ▶ Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x, t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- ▶ Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- ▶ Per ogni $f: Y \rightarrow Z$, la composizione

$$f \circ -: \langle \Sigma X, Y \rangle \longrightarrow \langle \Sigma X, Z \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.

- ▶ Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle \Sigma X, - \rangle: \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}.$$

- Dato uno spazio topologico puntato (X, x_0) , definiamo lo spazio di lacci

$$\Omega X = \left\{ g \in X^{[0,1]} : g(0) = g(1) = x_0 \right\}$$

con punto base il cammino costante in x_0 . La topologia è quella compatta-aperta.

- Dato uno spazio topologico puntato (X, x_0) , definiamo lo spazio di lacci

$$\Omega X = \left\{ g \in X^{[0,1]} : g(0) = g(1) = x_0 \right\}$$

con punto base il cammino costante in x_0 . La topologia è quella compatta-aperta.

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Omega f \in \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$ per composizione:

$$\Omega f(g) = f \circ g.$$

- Dato uno spazio topologico puntato (X, x_0) , definiamo lo spazio di lacci

$$\Omega X = \left\{ g \in X^{[0,1]} : g(0) = g(1) = x_0 \right\}$$

con punto base il cammino costante in x_0 . La topologia è quella compatta-aperta.

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Omega f \in \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$ per composizione:

$$\Omega f(g) = f \circ g.$$

- Lo spazio di lacci è dunque un funtore

$$\Omega: \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet.$$

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Spazio di lacci

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle X, \Omega Y \rangle$.

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Spazio di lacci

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle X, \Omega Y \rangle$.

► Per $f, g \in \langle X, \Omega Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x)(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x)(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Spazio di lacci

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle X, \Omega Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle X, \Omega Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x)(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x)(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Spazio di lacci

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle X, \Omega Y \rangle$.

- ▶ Per $f, g \in \langle X, \Omega Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x)(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x)(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- ▶ Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- ▶ Per ogni $f: X \rightarrow Z$, la composizione

$$- \circ f: \langle Z, \Omega Y \rangle \longrightarrow \langle X, \Omega Y \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.

Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Spazio di lacci

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati X, Y , esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle X, \Omega Y \rangle$.

- ▶ Per $f, g \in \langle X, \Omega Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x)(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x)(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- ▶ Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- ▶ Per ogni $f: X \rightarrow Z$, la composizione

$$- \circ f: \langle Z, \Omega Y \rangle \longrightarrow \langle X, \Omega Y \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.

- ▶ Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle -, \Omega Y \rangle: \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}^{\text{op}}.$$

- Con la struttura di gruppo che abbiamo definito, l'uguaglianza

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle$$

è un isomorfismo di gruppi.

- ▶ Con la struttura di gruppo che abbiamo definito, l'uguaglianza

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle$$

è un isomorfismo di gruppi.

- ▶ Le due strutture di gruppo su $\langle \Sigma X, \Omega Y \rangle$ coincidono.

- Con la struttura di gruppo che abbiamo definito, l'uguaglianza

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle$$

è un isomorfismo di gruppi.

- Le due strutture di gruppo su $\langle \Sigma X, \Omega Y \rangle$ coincidono.
- $\Omega^2 Y$ può essere interpretato come lo spazio delle funzioni

$$[0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

che assumono il valore y_0 sul bordo. Con lo stesso ragionamento usato per il π_2 , si dimostra che $\langle X, \Omega^2 Y \rangle$ è abeliano.

Proposizione

I funtori Σ e Ω sono aggiunti. In altre parole, esiste una biiezione

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\cong} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturale in X e Y . Inoltre questa biiezione è un isomorfismo di gruppi.

Proposizione

I funtori Σ e Ω sono aggiunti. In altre parole, esiste una biiezione

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\cong} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturale in X e Y . Inoltre questa biiezione è un isomorfismo di gruppi.


$$Y^{X \times [0,1]} \longleftrightarrow (Y^{[0,1]})^X$$

Proposizione

I funtori Σ e Ω sono aggiunti. In altre parole, esiste una biiezione

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturale in X e Y . Inoltre questa biiezione è un isomorfismo di gruppi.

Osservazioni

► Considerando S^{n-1} , otteniamo che

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle \simeq \langle S^{n-1}, \Omega X \rangle = \pi_{n-1}(\Omega X).$$

Proposizione

I funtori Σ e Ω sono aggiunti. In altre parole, esiste una biiezione

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\cong} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturale in X e Y . Inoltre questa biiezione è un isomorfismo di gruppi.

Osservazioni

- Considerando S^{n-1} , otteniamo che

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle \simeq \langle S^{n-1}, \Omega X \rangle = \pi_{n-1}(\Omega X).$$

- In particolare, se X è un $K(G, n)$, allora ΩX è un $K(G, n-1)$.

Proposizione

I funtori Σ e Ω sono aggiunti. In altre parole, esiste una biiezione

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturale in X e Y . Inoltre questa biiezione è un isomorfismo di gruppi.

Osservazioni

- Considerando S^{n-1} , otteniamo che

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle \simeq \langle S^{n-1}, \Omega X \rangle = \pi_{n-1}(\Omega X).$$

- In particolare, se X è un $K(G, n)$, allora ΩX è un $K(G, n-1)$.
- Per ogni $n \geq 1$, sia K_n un CW-complesso che è anche un $K(G, n)$; per unicità dei $K(G, n)$, abbiamo equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n: K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

Definizione

Un Ω -spettro è una famiglia di CW-complessi $\{K_n\}_{n \geq 1}$ dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n: K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

Definizione

Un Ω -spettro è una famiglia di CW-complessi $\{K_n\}_{n \geq 1}$ dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n: K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

- È possibile estendere la famiglia anche a indici $n \leq 0$: è sufficiente considerare come K_{n-1} un'approssimazione CW di ΩK_n .

Definizione

Un Ω -spettro è una famiglia di CW-complessi $\{K_n\}_{n \geq 1}$ dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n: K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

- È possibile estendere la famiglia anche a indici $n \leq 0$: è sufficiente considerare come K_{n-1} un'approssimazione CW di ΩK_n .

Proposizione

Siano $f: Y \rightarrow Z$ un'equivalenza omotopica debole, X un CW-complesso. Allora la composizione

$$f \circ -: \langle X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, Z \rangle$$

è una biiezione.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a $\langle X, K_n \rangle$ una struttura di gruppo imponendo che

$$\theta_n \circ -: \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\cong} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$

sia un isomorfismo di gruppi.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a $\langle X, K_n \rangle$ una struttura di gruppo imponendo che

$$\theta_n \circ - : \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$

sia un isomorfismo di gruppi.

- In questo modo, $\langle X, K_n \rangle$ risulta essere un gruppo abeliano:

$$\begin{array}{ccccc} \langle \Sigma X, K_{n+1} \rangle & \xrightarrow[\simeq]{\theta_{n+1} \circ -} & \langle \Sigma X, \Omega K_{n+2} \rangle \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \langle X, K_n \rangle & \xrightarrow[\simeq]{\theta_n \circ -} & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle & \xrightarrow{\Omega \theta_{n+1} \circ -} & \langle X, \Omega^2 K_{n+2} \rangle . \end{array}$$

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a $\langle X, K_n \rangle$ una struttura di gruppo imponendo che

$$\theta_n \circ - : \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$

sia un isomorfismo di gruppi.

- In questo modo, $\langle X, K_n \rangle$ risulta essere un gruppo abeliano:

$$\begin{array}{ccccc} \langle \Sigma X, K_{n+1} \rangle & \xrightarrow[\simeq]{\theta_{n+1} \circ -} & \langle \Sigma X, \Omega K_{n+2} \rangle \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \langle X, K_n \rangle & \xrightarrow[\simeq]{\theta_n \circ -} & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle & \xrightarrow{\Omega \theta_{n+1} \circ -} & \langle X, \Omega^2 K_{n+2} \rangle \end{array}$$

- Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ otteniamo il funtore

$$\langle -, K_n \rangle : \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}.$$

Ω -spettri e coomologia

Teorie coomologiche

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un Ω -spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n \rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria **CW** $_{\bullet}$.

Ω -spettri e coomologia

Teorie coomologiche

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un Ω -spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n \rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria \mathbf{CW}_\bullet .

Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria \mathbf{CW}_\bullet è una famiglia di funtori

$$h^n: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

Ω -spettri e coomologia

Teorie coomologiche

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un Ω -spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n \rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria \mathbf{CW}_\bullet .

Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria \mathbf{CW}_\bullet è una famiglia di funtori

$$h^n: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

1. Per ogni coppia (X, A) esiste una successione esatta lunga

$$\dots \xrightarrow{\delta} h^n(X/A) \xrightarrow{q^*} h^n(X) \xrightarrow{i^*} h^n(A) \xrightarrow{\delta} h^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

naturale in (X, A) .

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un Ω -spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n \rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria **CW** $_{\bullet}$.

Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria **CW** $_{\bullet}$ è una famiglia di funtori

$$h^n: \mathbf{CW}_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

1. Per ogni coppia (X, A) esiste una successione esatta lunga

$$\dots \xrightarrow{\delta} h^n(X/A) \xrightarrow{q^*} h^n(X) \xrightarrow{i^*} h^n(A) \xrightarrow{\delta} h^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

naturale in (X, A) .

2. Per ogni famiglia $\{X_{\alpha}\}_{\alpha}$, le inclusioni inducono un isomorfismo

$$h^n \left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \right) \xrightarrow{\cong} \prod_{\alpha} h^n(X_{\alpha}).$$

- L'assioma 2. è soddisfatto: nella categoria **CW**, dare un morfismo

$$\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \longrightarrow K_n$$

è equivalente a dare una collezione di morfismi

$$\{X_{\alpha} \longrightarrow K_n\}_{\alpha}.$$

- L'assioma 2. è soddisfatto: nella categoria **CW**, dare un morfismo

$$\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \longrightarrow K_n$$

è equivalente a dare una collezione di morfismi

$$\{X_{\alpha} \longrightarrow K_n\}_{\alpha}.$$

- Per quanto riguarda l'assioma 1., sia (X, A) una coppia di CW-complessi; vediamo come costruire la successione esatta lunga associata.

Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

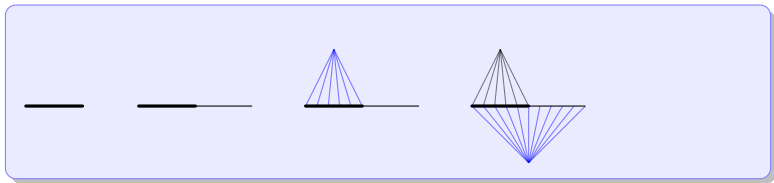
$$A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA$$



Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

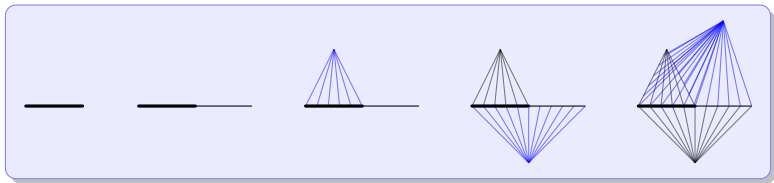
$$A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX$$



Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

$$\textcircled{1} \quad A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX \hookrightarrow ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA)$$

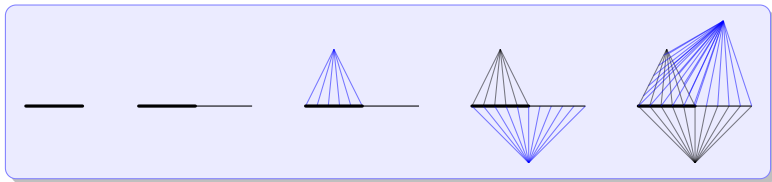


Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

① $A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX \hookrightarrow ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA)$

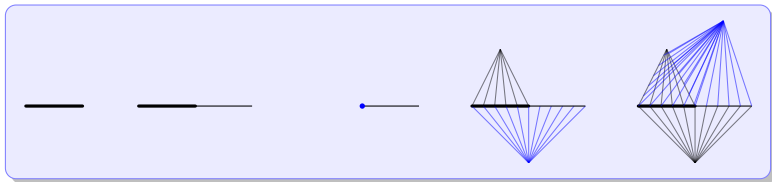
$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ A & \hookrightarrow & X \end{array}$



Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

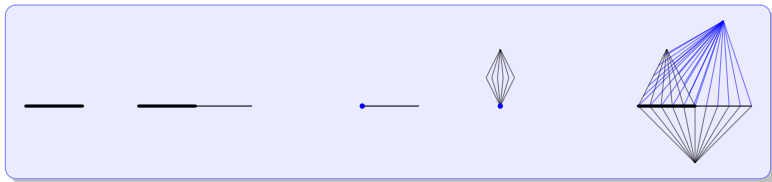
$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \quad A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX \hookrightarrow ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \\
 \begin{array}{ccc}
 \parallel & \parallel & \downarrow \simeq \\
 A \hookrightarrow X & & X/A
 \end{array}
 \end{array}$$



Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

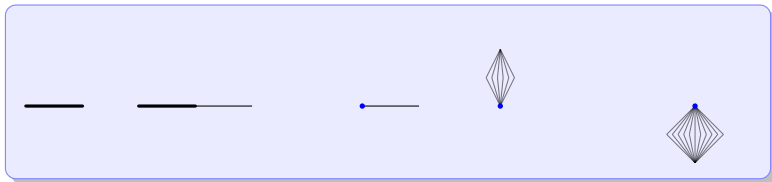
$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{1} & A \hookrightarrow X & \hookrightarrow & X \cup \mathcal{C}A & \hookrightarrow & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X & \hookrightarrow & ((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \\ & \parallel & & \parallel & & & & \\ & A & \hookrightarrow & X & & & & \\ & & & \downarrow \simeq & & & & \\ & & & X/A & & & & \\ & & & & & & & \downarrow \simeq \\ & & & & & & & \Sigma A \end{array}$$



Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

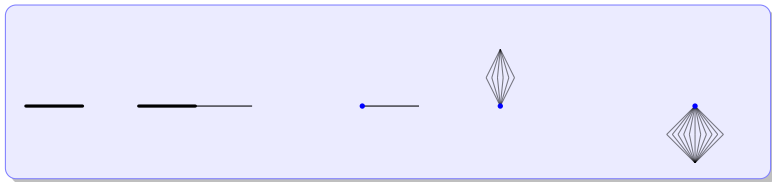
$$\begin{array}{ccccccc}
 \textcircled{1} & A \hookrightarrow X & \hookrightarrow X \cup CA & \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX & \hookrightarrow ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \\
 \parallel & \parallel & \downarrow \simeq & \downarrow \simeq & \downarrow \simeq \\
 & A \hookrightarrow X & X/A & \Sigma A & \Sigma X
 \end{array}$$



Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

$$\begin{array}{ccccccc}
 \textcircled{1} & A & \hookrightarrow & X & \hookrightarrow & X \cup CA & \hookrightarrow & (X \cup CA) \cup CX & \hookrightarrow & ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \\
 & \parallel & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \textcircled{2} & A & \hookrightarrow & X & \longrightarrow & X/A & \longrightarrow & \Sigma A & \longrightarrow & \Sigma X
 \end{array}$$



Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \textcircled{1} & A & \hookrightarrow & X & \hookrightarrow & X \cup CA & \hookrightarrow & (X \cup CA) \cup CX & \hookrightarrow & ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \\
 & \parallel & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \textcircled{2} & A & \hookrightarrow & X & \longrightarrow & X/A & \longrightarrow & \Sigma A & \hookrightarrow & \Sigma X \\
 & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \Sigma f & & \downarrow \Sigma f \\
 & B & \hookrightarrow & Y & \longrightarrow & Y/B & \longrightarrow & \Sigma B & \hookrightarrow & \Sigma Y
 \end{array}$$



Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

$$\begin{array}{ccccccc}
 \textcircled{1} & A & \hookrightarrow & X & \hookrightarrow & X \cup \mathcal{C}A & \hookrightarrow & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X & \hookrightarrow & ((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \\
 & \parallel & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \textcircled{2} & A & \hookrightarrow & X & \longrightarrow & X/A & \longrightarrow & \Sigma A & \longrightarrow & \Sigma X
 \end{array}$$

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Ω -spettri e coomologia

Dimostrazione

$$\begin{array}{ccccccc}
 \textcircled{1} & A & \hookrightarrow & X & \hookrightarrow & X \cup \mathcal{C}A & \hookrightarrow & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X & \hookrightarrow & ((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \\
 & \parallel & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \textcircled{2} & A & \hookrightarrow & X & \longrightarrow & X/A & \longrightarrow & \Sigma A & \longrightarrow & \Sigma X
 \end{array}$$

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta.

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta. Sia $f: X \rightarrow K_n$. Allora

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta. Sia $f: X \rightarrow K_n$. Allora

$$f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n \rangle \longrightarrow \langle A, K_n \rangle$$

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta. Sia $f: X \rightarrow K_n$. Allora

$$\begin{aligned} & f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n \rangle \longrightarrow \langle A, K_n \rangle \\ \iff & f|_A \text{ è omotopicamente banale (fissando il punto base)} \end{aligned}$$

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup CA, K_n \rangle$$

è esatta. Sia $f: X \rightarrow K_n$. Allora

f appartiene al nucleo di $\langle X, K_n \rangle \longrightarrow \langle A, K_n \rangle$

$\iff f|_A$ è omotopicamente banale (fissando il punto base)

$\iff f$ si estende a una mappa $X \cup CA \rightarrow K_n$

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup CA, K_n \rangle$$

è esatta. Sia $f: X \rightarrow K_n$. Allora

f appartiene al nucleo di $\langle X, K_n \rangle \longrightarrow \langle A, K_n \rangle$

$\iff f|_A$ è omotopicamente banale (fissando il punto base)

$\iff f$ si estende a una mappa $X \cup CA \rightarrow K_n$

$\iff f$ appartiene all'immagine di $\langle X \cup CA, K_n \rangle \longrightarrow \langle X, K_n \rangle$.

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n$, $K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n$, $K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

$$\langle A, K \rangle \longleftarrow \langle X, K \rangle \longleftarrow \langle X/A, K \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K \rangle \quad \textcircled{3}$$

$$\downarrow \simeq \quad \downarrow \simeq$$

$$\langle A, \Omega K' \rangle \longleftarrow \langle X, \Omega K' \rangle$$

$$\downarrow \simeq \quad \downarrow \simeq$$

$$\textcircled{3'} \quad \langle X, K' \rangle \longleftarrow \langle X/A, K' \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K' \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K' \rangle$$

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n$, $K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \langle A, K \rangle & \longleftarrow & \langle X, K \rangle & \longleftarrow & \langle X/A, K \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K \rangle & \textcircled{3} \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & & \\
 & & \langle A, \Omega K' \rangle & \longleftarrow & \langle X, \Omega K' \rangle & & & \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & & \\
 \textcircled{3'} & \langle X, K' \rangle & \longleftarrow & \langle X/A, K' \rangle & \longleftarrow & \langle \Sigma A, K' \rangle & \longleftarrow & \langle \Sigma X, K' \rangle
 \end{array}$$

Applicando il funtore h^n , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\textcircled{3} \quad \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n$, $K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \langle A, K \rangle & \longleftarrow & \langle X, K \rangle & \longleftarrow & \langle X/A, K \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K \rangle & \textcircled{3} \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & & \\
 & & \langle A, \Omega K' \rangle & \longleftarrow & \langle X, \Omega K' \rangle & & & \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & & \\
 \textcircled{3'} & \langle X, K' \rangle & \longleftarrow & \langle X/A, K' \rangle & \longleftarrow & \langle \Sigma A, K' \rangle & \longleftarrow & \langle \Sigma X, K' \rangle
 \end{array}$$

Otteniamo così la successione esatta lunga

$$\dots \longleftarrow \langle X/A, K_{n+1} \rangle \longleftarrow \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \dots$$

naturale in (X, A) .

Teorema

Siano h^*, \bar{h}^* teorie coomologiche ridotte sulla categoria **CW**, tali che

$$\begin{cases} h^n(S^0) = \bar{h}^n(S^0) = 0 & \text{per } n \neq 0, \\ h^0(S^0) \simeq \bar{h}^0(S^0) = G. \end{cases}$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ i funtori h^n e \bar{h}^n sono isomorfi.

Teorie coomologiche

Enunciato

Teorema

Siano h^*, \bar{h}^* teorie coomologiche ridotte sulla categoria \mathbf{CW}_\bullet tali che

$$\begin{cases} h^n(S^0) = \bar{h}^n(S^0) = 0 & \text{per } n \neq 0, \\ h^0(S^0) \simeq \bar{h}^0(S^0) = G. \end{cases}$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ i funtori h^n e \bar{h}^n sono isomorfi.

Osservazione

Se h è una teoria coomologica ridotta, è facile verificare che esiste un isomorfismo di funtori

$$h^n \simeq h^{n+1} \circ \Sigma: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}.$$

Teorie coomologiche

Enunciato

Teorema

Siano h^*, \bar{h}^* teorie coomologiche ridotte sulla categoria \mathbf{CW}_\bullet tali che

$$\begin{cases} h^n(S^0) = \bar{h}^n(S^0) = 0 & \text{per } n \neq 0, \\ h^0(S^0) \simeq \bar{h}^0(S^0) = G. \end{cases}$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ i funtori h^n e \bar{h}^n sono isomorfi.

Osservazione

Se h è una teoria coomologica ridotta, è facile verificare che esiste un isomorfismo di funtori

$$h^n \simeq h^{n+1} \circ \Sigma: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}.$$

Di conseguenza possiamo limitarci a considerare CW complessi senza 1-celle (infatti $\Sigma^2 X$ ha una struttura di CW complesso senza 1-celle).

- ▶ La coomologia di S^n è banale in ogni dimensione, tranne per

$$h^n(S^n) = G.$$

- ▶ La coomologia di S^n è banale in ogni dimensione, tranne per

$$h^n(S^n) = G.$$

- ▶ Sia X un CW-complesso. Componendo le mappe

$$h^n(X^n/X^{n-1}) \longrightarrow h^n(X^n) \longrightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n)$$

si ottengono le applicazioni di bordo di un complesso “cellulare”

$$\dots \rightarrow h^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \rightarrow h^n(X^n/X^{n-1}) \rightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \rightarrow \dots,$$

il cui n -esimo gruppo di coomologia è precisamente $h^n(X)$.

- La coomologia di S^n è banale in ogni dimensione, tranne per

$$h^n(S^n) = G.$$

- Sia X un CW-complesso. Componendo le mappe

$$h^n(X^n/X^{n-1}) \longrightarrow h^n(X^n) \longrightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n)$$

si ottengono le applicazioni di bordo di un complesso “cellulare”

$$\dots \rightarrow h^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \rightarrow h^n(X^n/X^{n-1}) \rightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \rightarrow \dots,$$

il cui n -esimo gruppo di coomologia è precisamente $h^n(X)$.

- Le mappe caratteristiche

$$\varphi_\alpha: (D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$$

inducono isomorfismi

$$h^n(X^n/X^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha h^n(D_\alpha^n/\partial D_\alpha^n) \simeq \prod_\alpha G_\alpha.$$

Dunque il complesso cellulare è della forma

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \prod_{\alpha} G_{\alpha} & \xrightarrow{d} & \prod_{\beta} G_{\beta} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ & & h^n(X^n/X^{n-1}) & \xrightarrow{d} & h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) & & \end{array}$$

Dunque il complesso cellulare è della forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \prod_{\alpha} G_{\alpha} & \xrightarrow{d} & \prod_{\beta} G_{\beta} & \longrightarrow & \dots \\
 & \nearrow & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
 G_{\alpha} & & & & & & \\
 \downarrow \simeq & & & & & & \\
 h^n(D_{\alpha}^n / \partial D_{\alpha}^n) & \rightarrow & h^n(X^n / X^{n-1}) & \xrightarrow{d} & h^{n+1}(X^{n+1} / X^n) & &
 \end{array}$$

Dunque il complesso cellulare è della forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \prod_{\alpha} G_{\alpha} & \xrightarrow{d} & \prod_{\beta} G_{\beta} & \longrightarrow & \dots \\
 & \nearrow & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & \searrow & \\
 G_{\alpha} & & & & & & G_{\beta} \\
 \downarrow \simeq & & & & & & \downarrow \simeq \\
 h^n(D_{\alpha}^n / \partial D_{\alpha}^n) & \rightarrow & h^n(X^n / X^{n-1}) & \xrightarrow{d} & h^{n+1}(X^{n+1} / X^n) & \rightarrow & h^{n+1}(D_{\beta}^{n+1} / \partial D_{\beta}^{n+1}) \\
 & & & & & & \downarrow \simeq \\
 & & & & & & h^n(\partial D_{\beta}^{n+1}).
 \end{array}$$

Dunque il complesso cellulare è della forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \prod_{\alpha} G_{\alpha} & \xrightarrow{d} & \prod_{\beta} G_{\beta} & \longrightarrow & \dots \\
 & \nearrow & & & & \searrow & \\
 G_{\alpha} & & & & & & G_{\beta} \\
 \downarrow \simeq & & & & & & \downarrow \simeq \\
 h^n(D_{\alpha}^n / \partial D_{\alpha}^n) & \longrightarrow & h^n(X^n / X^{n-1}) & \xrightarrow{d} & h^{n+1}(X^{n+1} / X^n) & \longrightarrow & h^{n+1}(D_{\beta}^{n+1} / \partial D_{\beta}^{n+1}) \\
 & & & & & & \downarrow \simeq \\
 & & & & & & h^n(\partial D_{\beta}^{n+1}).
 \end{array}$$

La mappa $G_{\alpha} \rightarrow G_{\beta}$ è indotta dall'applicazione continua

$$\partial D_{\beta}^{n+1} \longrightarrow X^n \longrightarrow D_{\alpha}^n / \partial D_{\alpha}^n$$

Dunque il complesso cellulare è della forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \prod_{\alpha} G_{\alpha} & \xrightarrow{d} & \prod_{\beta} G_{\beta} & \longrightarrow & \dots \\
 & \nearrow & & & & \searrow & \\
 G_{\alpha} & & & & & & G_{\beta} \\
 \downarrow \simeq & & & & & & \downarrow \simeq \\
 h^n(D_{\alpha}^n / \partial D_{\alpha}^n) & \longrightarrow & h^n(X^n / X^{n-1}) & \xrightarrow{d} & h^{n+1}(X^{n+1} / X^n) & \longrightarrow & h^{n+1}(D_{\beta}^{n+1} / \partial D_{\beta}^{n+1}) \\
 & & & & & & \downarrow \simeq \\
 & & & & & & h^n(\partial D_{\beta}^{n+1}).
 \end{array}$$

La mappa $G_{\alpha} \rightarrow G_{\beta}$ è indotta dall'applicazione continua

$$S^n \simeq \partial D_{\beta}^{n+1} \longrightarrow X^n \longrightarrow D_{\alpha}^n / \partial D_{\alpha}^n \simeq S^n.$$

Teorie coomologiche

Dimostrazione

Mostriamo ora che l'applicazione

$$f^* : h^n(S^n) \longrightarrow h^n(S^n)$$

indotta in coomologia da una funzione continua

$$f : S^n \longrightarrow S^n$$

è la moltiplicazione per il grado di f .

Mostriamo ora che l'applicazione

$$f^* : h^n(S^n) \longrightarrow h^n(S^n)$$

indotta in coomologia da una funzione continua

$$f : S^n \longrightarrow S^n$$

è la moltiplicazione per il grado di f .

- Sappiamo che due mappe $S^n \rightarrow S^n$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado.

Mostriamo ora che l'applicazione

$$f^* : h^n(S^n) \longrightarrow h^n(S^n)$$

indotta in coomologia da una funzione continua

$$f : S^n \longrightarrow S^n$$

è la moltiplicazione per il grado di f .

- ▶ Sappiamo che due mappe $S^n \rightarrow S^n$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado.
- ▶ L'enunciato è vero per $\deg(f) = 0, 1$ (funzione costante e identità).

Mostriamo ora che l'applicazione

$$f^* : h^n(S^n) \longrightarrow h^n(S^n)$$

indotta in coomologia da una funzione continua

$$f : S^n \longrightarrow S^n$$

è la moltiplicazione per il grado di f .

- ▶ Sappiamo che due mappe $S^n \rightarrow S^n$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado.
- ▶ L'enunciato è vero per $\deg(f) = 0, 1$ (funzione costante e identità).
- ▶ È sufficiente mostrare che $(f + g)^* = f^* + g^*$.

Mostriamo ora che l'applicazione

$$f^* : h^n(S^n) \longrightarrow h^n(S^n)$$

indotta in coomologia da una funzione continua

$$f : S^n \longrightarrow S^n$$

è la moltiplicazione per il grado di f .

- ▶ Sappiamo che due mappe $S^n \rightarrow S^n$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado.
- ▶ L'enunciato è vero per $\deg(f) = 0, 1$ (funzione costante e identità).
- ▶ È sufficiente mostrare che $(f + g)^* = f^* + g^*$.

Lemma

Siano X, Y CW complessi, $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$. Allora

$$(f \cdot g)^* = f^* + g^*.$$

$$G_\alpha \longrightarrow \prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta$$

Un omomorfismo

$$G_\alpha \longrightarrow \prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta$$

non è determinato dalle restrizioni ai singoli fattori G_α .

Un omomorfismo

$$G_\alpha \longrightarrow \prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta$$

non è determinato dalle restrizioni ai singoli fattori G_α . Tuttavia per ogni β la composizione

$$\prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta \simeq h^n(\partial D_\beta^{n+1})$$

Un omomorfismo

$$G_\alpha \longrightarrow \prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta$$

non è determinato dalle restrizioni ai singoli fattori G_α . Tuttavia per ogni β la composizione

$$\prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta \simeq h^n(\partial D_\beta^{n+1})$$

è indotta da

$$X^n/X^{n-1} \longleftarrow X^n \longleftarrow \partial D_\beta^{n+1}$$

Un omomorfismo

$$G_\alpha \longrightarrow \prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta$$

non è determinato dalle restrizioni ai singoli fattori G_α . Tuttavia per ogni β la composizione

$$\prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta \simeq h^n(\partial D_\beta^{n+1})$$

è indotta da

$$\begin{array}{ccccc} X^n/X^{n-1} & \longleftarrow & X^n & \longleftarrow & \partial D_\beta^{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow & & \swarrow \\ X_\beta^n/X^{n-1} & \longleftarrow & X_\beta^n, & & \end{array}$$

dove X_β^n si ottiene attaccando a X^{n-1} le n -celle che intersecano l'immagine di ∂D_β^{n+1} (sono in numero finito).

Un omomorfismo

$$G_\alpha \longrightarrow \prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta$$

non è determinato dalle restrizioni ai singoli fattori G_α . Tuttavia per ogni β la composizione

$$\begin{array}{ccccc} \prod_\alpha G_\alpha & \xrightarrow{d} & \prod_\beta G_\beta & \longrightarrow & G_\beta \simeq h^n(\partial D_\beta^{n+1}) \\ \downarrow & & \nearrow & & \\ \prod_\gamma G_\gamma & & & & \end{array}$$

è indotta da

$$\begin{array}{ccccc} X^n/X^{n-1} & \longleftarrow & X^n & \longleftarrow & \partial D_\beta^{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow & & \nearrow \\ X_\beta^n/X^{n-1} & \longleftarrow & X_\beta^n, & & \end{array}$$

dove X_β^n si ottiene attaccando a X^{n-1} le n -celle che intersecano l'immagine di ∂D_β^{n+1} (sono in numero finito).

Un omomorfismo

$$G_\alpha \longrightarrow \prod_\alpha G_\alpha \xrightarrow{d} \prod_\beta G_\beta \longrightarrow G_\beta$$

non è determinato dalle restrizioni ai singoli fattori G_α . Tuttavia per ogni β la composizione

$$\begin{array}{ccccc} \prod_\alpha G_\alpha & \xrightarrow{d} & \prod_\beta G_\beta & \longrightarrow & G_\beta \simeq h^n(\partial D_\beta^{n+1}) \\ \downarrow & & \nearrow & & \\ \prod_\gamma G_\gamma & & & & \end{array}$$

è indotta da

$$\begin{array}{ccccc} X^n/X^{n-1} & \longleftarrow & X^n & \longleftarrow & \partial D_\beta^{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow & & \nearrow \\ X_\beta^n/X^{n-1} & \longleftarrow & X_\beta^n, & & \end{array}$$

dove X_β^n si ottiene attaccando a X^{n-1} le n -celle che intersecano l'immagine di ∂D_β^{n+1} (sono in numero finito).

Riassumendo:

Riassumendo:

- possiamo calcolare i gruppi $h^n(X)$ a partire dal complesso cellulare

$$\dots \rightarrow h^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \rightarrow h^n(X^n/X^{n-1}) \rightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \rightarrow \dots;$$

Riassumendo:

- possiamo calcolare i gruppi $h^n(X)$ a partire dal complesso cellulare

$$\dots \rightarrow h^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \rightarrow h^n(X^n/X^{n-1}) \rightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \rightarrow \dots;$$

- i gruppi di questo complesso dipendono solo dalla struttura di CW-complesso di X ;

Riassumendo:

- ▶ possiamo calcolare i gruppi $h^n(X)$ a partire dal complesso cellulare

$$\dots \rightarrow h^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \rightarrow h^n(X^n/X^{n-1}) \rightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \rightarrow \dots;$$

- ▶ i gruppi di questo complesso dipendono solo dalla struttura di CW-complesso di X ;
- ▶ le mappe di bordo sono determinate dal grado di certe funzioni continue

$$\partial D_\beta^{n+1} \longrightarrow D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n$$

che dipendono dalle mappe caratteristiche delle celle.

Riassumendo:

- ▶ possiamo calcolare i gruppi $h^n(X)$ a partire dal complesso cellulare

$$\dots \rightarrow h^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \rightarrow h^n(X^n/X^{n-1}) \rightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \rightarrow \dots;$$

- ▶ i gruppi di questo complesso dipendono solo dalla struttura di CW-complesso di X ;
- ▶ le mappe di bordo sono determinate dal grado di certe funzioni continue

$$\partial D_\beta^{n+1} \longrightarrow D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n$$

che dipendono dalle mappe caratteristiche delle celle.

Di conseguenza, teorie coomologiche diverse hanno lo stesso complesso cellulare, dunque per ogni X abbiamo un isomorfismo

$$h^n(X) \simeq \bar{h}^n(X).$$

Teorie coomologiche

Dimostrazione

Per verificare la naturalità, sia $f: X \rightarrow Y$, cellulare a meno di omotopia.

Per verificare la naturalità, sia $f: X \rightarrow Y$, cellulare a meno di omotopia.

- Vale $f(X^n) \subseteq Y^n$, dunque f induce un morfismo fra i complessi cellulari

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & h^n(Y^n/Y^{n-1}) & \longrightarrow & h^{n+1}(Y^{n+1}/Y^n) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\ \dots & \longrightarrow & h^n(X^n/X^{n-1}) & \longrightarrow & h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Per verificare la naturalità, sia $f: X \rightarrow Y$, cellulare a meno di omotopia.

- Vale $f(X^n) \subseteq Y^n$, dunque f induce un morfismo fra i complessi cellulari

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & h^n(Y^n/Y^{n-1}) & \longrightarrow & h^{n+1}(Y^{n+1}/Y^n) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\ \dots & \longrightarrow & h^n(X^n/X^{n-1}) & \longrightarrow & h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

- Come accadeva per le mappe di bordo, i morfismi f^* sono determinati dal grado delle applicazioni

$$D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n \longrightarrow X^n / X^{n-1} \xrightarrow{f} Y^n / Y^{n-1} \longrightarrow D_\beta^n / \partial D_\beta^n.$$

Per verificare la naturalità, sia $f: X \rightarrow Y$, cellulare a meno di omotopia.

- Vale $f(X^n) \subseteq Y^n$, dunque f induce un morfismo fra i complessi cellulari

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & h^n(Y^n/Y^{n-1}) & \longrightarrow & h^{n+1}(Y^{n+1}/Y^n) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\
 \dots & \longrightarrow & h^n(X^n/X^{n-1}) & \longrightarrow & h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

- Come accadeva per le mappe di bordo, i morfismi f^* sono determinati dal grado delle applicazioni

$$D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n \longrightarrow X^n / X^{n-1} \xrightarrow{f} Y^n / Y^{n-1} \longrightarrow D_\beta^n / \partial D_\beta^n.$$

Di conseguenza, a meno dell'isomorfismo che abbiamo stabilito fra i complessi cellulari di h^* e \bar{h}^* , f induce lo stesso morfismo di complessi nelle due teorie coomologiche. Pertanto l'isomorfismo

$$h^n(X) \simeq \bar{h}^n(X)$$

è naturale in X .

Costruzione omotopica della coomologia

Dimostrazione

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X .

Costruzione omotopica della coomologia

Dimostrazione

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X .

- Poniamo $K_n = K(G, n)$; sappiamo che è un Ω -spettro.

Costruzione omotopica della coomologia

Dimostrazione

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X .

- ▶ Poniamo $K_n = K(G, n)$; sappiamo che è un Ω -spettro.
- ▶ Estendendo la successione a $n \leq 0$, otteniamo la famiglia di funtori

$$h^n = \langle -, K_n \rangle: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}$$

che definisce una teoria coomologica ridotta.

Costruzione omotopica della coomologia

Dimostrazione

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X .

- Poniamo $K_n = K(G, n)$; sappiamo che è un Ω -spettro.
- Estendendo la successione a $n \leq 0$, otteniamo la famiglia di funtori

$$h^n = \langle -, K_n \rangle: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}$$

che definisce una teoria coomologica ridotta.

- Vale

$$h^n(S^0) = \tilde{H}^n(S^0; G) = \begin{cases} 0 & n \neq 0, \\ G & n = 0. \end{cases}$$

Costruzione omotopica della coomologia

Dimostrazione

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X .

- Poniamo $K_n = K(G, n)$; sappiamo che è un Ω -spettro.
- Estendendo la successione a $n \leq 0$, otteniamo la famiglia di funtori

$$h^n = \langle -, K_n \rangle: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}$$

che definisce una teoria coomologica ridotta.

- Vale

$$h^n(S^0) = \tilde{H}^n(S^0; G) = \begin{cases} 0 & n \neq 0, \\ G & n = 0. \end{cases}$$

- Di conseguenza, per ogni n abbiamo un isomorfismo di funtori

$$h^n \simeq \tilde{H}^n(-; G).$$

Costruzione omotopica della coomologia

Classe fondamentale

Per il lemma di Yoneda, l'isomorfismo

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(X; G)$$

è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha) \in \tilde{H}^n(X; G)$$

dove

$$\alpha = T(\text{id}_{K(G, n)}) \in \tilde{H}^n(K(G, n); G).$$

Costruzione omotopica della coomologia

Classe fondamentale

Per il lemma di Yoneda, l'isomorfismo

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \tilde{H}^n(X; G)$$

è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha) \in \tilde{H}^n(X; G)$$

dove

$$\alpha = T(\text{id}_{K(G, n)}) \in \tilde{H}^n(K(G, n); G).$$

- Se prendiamo $K(G, n)$ in modo che abbia come $(n-1)$ -scheletro un punto, α è rappresentata dal cociclo cellulare che a ogni n -cella associa l'elemento

$$[\varphi_\alpha: D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n \longrightarrow K(G, n)] \in \pi_n(K(G, n)) \simeq G$$

indotto dalla mappa caratteristica.

Costruzione omotopica della coomologia

Classe fondamentale

Per il lemma di Yoneda, l'isomorfismo

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \tilde{H}^n(X; G)$$

è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha) \in \tilde{H}^n(X; G)$$

dove

$$\alpha = T(\text{id}_{K(G, n)}) \in \tilde{H}^n(K(G, n); G).$$

- Se prendiamo $K(G, n)$ in modo che abbia come $(n-1)$ -scheletro un punto, α è rappresentata dal cociclo cellulare che a ogni n -cella associa l'elemento

$$[\varphi_\alpha: D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n \longrightarrow K(G, n)] \in \pi_n(K(G, n)) \simeq G$$

indotto dalla mappa caratteristica.

- Analogamente, per ogni $f: X \rightarrow K(G, n)$, $T(f)$ è rappresentato in coomologia dal cociclo cellulare che a ogni n -cella di X associa l'elemento di $\pi_n(K(G, n))$ indotto dalla composizione

$$D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^n \xrightarrow{f} K(G, n).$$