### Teorema

Siano $X$ un CW-complesso, $G$ un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T \colon \langle X, K(G,n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X; G)$$

naturale in $X$.

- Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G,n) \rangle$ che rende $T$ un isomorfismo di gruppi.
- $T$ è della forma
$$T(f) = f^*(\alpha)$$
dove $\alpha$ è la "classe fondamentale" di $H^n(K(G,n); G)$.

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G,n)\rangle \Longrightarrow$ definizione di $\Omega$-spettro.
2. Per ogni $\Omega$-spettro $\{K_n\}$, la famiglia di funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ è una teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW-complessi puntati.
3. Se una teoria coomologica ridotta $h^*$ soddisfa $h^n(S^0) = 0$ per $n \neq 0$, allora esistono isomorfismi naturali $h^n(X) \simeq \widetilde{H}^n(X; h^0(S^0))$.

Lavoreremo nella categoria **Top$_\bullet$** e nella sua sottocategoria **CW$_\bullet$**.

- Gli oggetti sono gli spazi topologici (o CW-complessi) puntati $(X, x_0)$.
- I morfismi sono
$$\mathrm{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle,$$
funzioni continue $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ a meno di omotopia che fissa il punto base.
- La composizione
$$\circ : \langle Y, Z \rangle \times \langle X, Y \rangle \longrightarrow \langle X, Z \rangle$$
è ben definita.

### Esempio

Abbiamo l'uguaglianza (per ora solo insiemistica)

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle.$$

- La sospensione $SX$ di uno spazio topologico $X$ è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato $(X, x_0)$, è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad\qquad \text{con punto base } [x_0].$$

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$:

$$\Sigma f(x,t) = (f(x), t).$$

- La sospensione ridotta è dunque un funtore

$$\Sigma \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet$$

che si restringe a

$$\Sigma \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{CW}_\bullet.$$

Dati due spazi topologici puntati $X, Y$, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t-1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f \colon Y \to Z$, la composizione

$$f \circ - \colon \langle \Sigma X, Y \rangle \longrightarrow \langle \Sigma X, Z \rangle$$

  è un omomorfismo di gruppi.
- Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle \Sigma X, - \rangle \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}.$$

- Dato uno spazio topologico puntato $(X, x_0)$, definiamo lo spazio di lacci

$$\Omega X = \left\{ g \in X^{[0,1]} : g(0) = g(1) = x_0 \right\}$$

con punto base il cammino costante in $x_0$. La topologia è quella compatta-aperta.

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Omega f \in \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$ per composizione:

$$\Omega f(g) = f \circ g.$$

- Lo spazio di lacci è dunque un funtore

$$\Omega \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet.$$

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati $X, Y$, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle X, \Omega Y\rangle$.

- Per $f, g \in \langle X, \Omega Y\rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x)(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x)(2t-1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f \colon X \to Z$, la composizione

$$- \circ f \colon \langle Z, \Omega Y\rangle \longrightarrow \langle X, \Omega Y\rangle$$

  è un omomorfismo di gruppi.
- Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle -, \Omega Y\rangle \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}^{\mathrm{op}}.$$

- Con la struttura di gruppo che abbiamo definito, l'uguaglianza
$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle$$
è un isomorfismo di gruppi.
- Le due strutture di gruppo su $\langle \Sigma X, \Omega Y \rangle$ coincidono.
- $\Omega^2 Y$ può essere interpretato come lo spazio delle funzioni
$$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow Y$$
che assumono il valore $y_0$ sul bordo. Con lo stesso ragionamento usato per il $\pi_2$, si dimostra che $\langle X, \Omega^2 Y \rangle$ è abeliano.

### Proposizione

I funtori $\Sigma$ e $\Omega$ sono aggiunti. In altre parole, esistono biiezioni

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturali in $X$ e $Y$. Inoltre queste biiezioni sono isomorfismi di gruppi.

### Osservazioni

- Prendendo $X = S^{n-1}$, otteniamo che

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle \simeq \langle S^{n-1}, \Omega X \rangle = \pi_{n-1}(\Omega X).$$

- In particolare, se $X$ è un $K(G, n)$, allora $\Omega X$ è un $K(G, n-1)$.
- Per ogni $n \geq 1$, sia $K_n$ un CW-complesso che è anche un $K(G, n)$; per unicità dei $K(G, n)$, abbiamo equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n \colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

### Definizione

Un $\Omega$-*spettro* è una famiglia di CW-complessi $\{K_n\}_{n\geq 1}$ dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n \colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

- È possibile estendere la famiglia anche a indici $n \leq 0$: è sufficiente considerare come $K_{n-1}$ un'approssimazione CW di $\Omega K_n$.

### Proposizione

Siano $f \colon Y \to Z$ un'equivalenza omotopica debole, $X$ un CW-complesso. Allora la composizione

$$f \circ - \colon \langle X, Y\rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, Z\rangle$$

è una biiezione.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a $\langle X, K_n \rangle$ una struttura di gruppo imponendo che

$$\theta_n \circ - \colon \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$

  sia un isomorfismo di gruppi.

- In questo modo, $\langle X, K_n \rangle$ risulta essere un gruppo abeliano:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \Sigma X, K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\theta_{n+1}\circ -", "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] & \langle \Sigma X, \Omega K_{n+2} \rangle \arrow[d, "\simeq"] \\
\langle X, K_n \rangle \arrow[r, "\theta_n \circ -", "\simeq"'] & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\Omega\theta_{n+1}\circ -"] & \langle X, \Omega^2 K_{n+2} \rangle .
\end{tikzcd}$$

- Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ otteniamo il funtore

$$\langle -, K_n \rangle \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}.$$

### Teorema

Sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un $\Omega$-spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n \rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

### Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ è una famiglia di funtori

$$h^n \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}, \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

1. Per ogni coppia $(X, A)$ con $x_0 \in A$ esiste una successione esatta lunga

$$\dots \xrightarrow{\delta} h^n(X/A) \xrightarrow{q^*} h^n(X) \xrightarrow{i^*} h^n(A) \xrightarrow{\delta} h^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

   naturale nella coppia $(X, A)$.

2. Per ogni famiglia $\{X_\alpha\}_\alpha$, le inclusioni inducono un isomorfismo

$$h^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \longrightarrow \prod_\alpha h^n(X_\alpha).$$

superfluo Per ogni $f\colon X \to Y$,

$$h^n(f) = (- \circ f)\colon \langle Y, K_n\rangle \longrightarrow \langle X, K_n\rangle$$

è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{tikzcd}
\langle Y, K_n\rangle \arrow[r, "- \circ f"] \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, K_n\rangle \arrow[d, "\simeq"] \\
\langle Y, \Omega K_{n+1}\rangle \arrow[r, "- \circ f"] & \langle X, \Omega K_{n+1}\rangle .
\end{tikzcd}$$

- L'assioma 2. è soddisfatto: nella categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ un morfismo

$$\bigvee_\alpha X_\alpha \longrightarrow K_n$$

è precisamente una collezione di morfismi

$$\{X_\alpha \longrightarrow K_n\}_\alpha .$$

Costruiamo la successione esatta lunga associata a una coppia $(X, A)$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \arrow[d, "\simeq"] \\
A \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X/A \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma A \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d] \\
B \arrow[r, hook] & Y \arrow[r] & Y/B \arrow[r] & \Sigma B \arrow[r, hook] & \Sigma Y
\end{tikzcd}
$$

Applicando il funtore $h^n$, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta.

Applicando il funtore $h^n$, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta. Sia $f\colon X \to K_n$. Allora

$$\begin{aligned} & f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n \rangle \longrightarrow \langle A, K_n \rangle \\ \iff & f|_A \text{ è omotopicamente banale (fissando il punto base)} \\ \iff & f \text{ si estende a una mappa } X \cup \mathcal{C}A \longrightarrow K_n \\ \iff & f \text{ appartiene all'immagine di } \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle \longrightarrow \langle X, K_n \rangle. \end{aligned}$$

Applicando il funtore $h^n$, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n, K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle A, K \rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, K \rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & \langle X/A, K \rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K \rangle \arrow[l] \\
 & & \langle A, K' \rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, K' \rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & & \\
\langle X, K' \rangle & \langle X/A, K' \rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K' \rangle \arrow[l] & \langle \Sigma X, K' \rangle \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

Otteniamo così la successione esatta lunga

$$\ldots \longleftarrow \langle X/A, K_{n+1} \rangle \longleftarrow \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \ldots$$

naturale in $(X, A)$.

### Teorema

Siano $h^*, \bar{h}^*$ teorie coomologiche ridotte sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ tali che

$$\begin{cases} h^n(S^0) = \bar{h}^n(S^0) = 0 & \text{per } n \neq 0, \\ h^0(S^0) \simeq \bar{h}^0(S^0) = G. \end{cases}$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ i funtori $h^n$ e $\bar{h}^n$ sono isomorfi.

### Osservazione

Se $h$ è una teoria coomologica ridotta, è facile verificare che esiste un isomorfismo di funtori

$$h^n \simeq h^{n+1} \circ \Sigma \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}.$$

Di conseguenza possiamo limitarci a considerare CW complessi senza 1-celle (infatti $\Sigma^2 X$ ha una struttura di CW complesso senza 1-celle).

- La coomologia di $S^n$ è banale in ogni dimensione, tranne per
$$h^n(S^n) = G.$$
- Sia $X$ un CW-complesso. Componendo le mappe
$$h^n(X^n/X^{n-1}) \longrightarrow h^n(X^n) \longrightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n)$$
si ottengono le applicazioni di bordo di un complesso "cellulare"
$$\ldots \to h^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \to h^n(X^n/X^{n-1}) \to h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \to \ldots,$$
il cui $n$-esimo gruppo di coomologia è precisamente $h^n(X)$.
- Le mappe caratteristiche
$$\varphi_\alpha \colon (D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$$
inducono isomorfismi
$$h^n(X^n/X^{n-1}) \xrightarrow{\simeq} \prod_\alpha h^n(D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha) \simeq \prod_\alpha G_\alpha.$$

Dunque il complesso cellulare è della forma

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \prod_\alpha G_\alpha \arrow[r] \arrow[d, dash, "\simeq"] & \prod_\beta G_\beta \arrow[r] \arrow[d, dash, "\simeq"] \arrow[dr] & \dots \\
G_\alpha \arrow[ur] \arrow[d, dash, "\simeq"] & & & G_\beta \arrow[d, dash, "\simeq"] \\
h^n(D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha) \arrow[r] & h^n(X^n/X^{n-1}) \arrow[r] & h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \arrow[r] & h^{n+1}(D^{n+1}_\beta/\partial D^{n+1}_\beta) \arrow[d, dash, "\simeq"] \\
& & & h^n(\partial D^{n+1}_\beta)\,.
\end{tikzcd}$$

La mappa $G_\alpha \to G_\beta$ è indotta dall'applicazione continua

$$S^n \simeq \partial D^{n+1}_\beta \longrightarrow X^n \longrightarrow D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \simeq S^n.$$

Mostriamo ora che l'applicazione

$$f^*\colon h^n(S^n) \longrightarrow h^n(S^n)$$

indotta in coomologia da una funzione continua

$$f\colon S^n \longrightarrow S^n$$

è la moltiplicazione per il grado di $f$.

- Sappiamo che due mappe $S^n \to S^n$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado.
- L'enunciato è vero per $\deg(f) = 0, 1$ (funzione costante e identità).
- È sufficiente mostrare che $(f \cdot g)^* = f^* + g^*$.

**Lemma**
Siano $X, Y$ CW complessi, $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$. Allora

$$(f \cdot g)^* = f^* + g^*.$$

Un omomorfismo

$$\prod_\alpha G_\alpha \longrightarrow \prod_\beta G_\beta$$

non è determinato dai valori che assume sui singoli fattori $G_\alpha$. Tuttavia per ogni $\beta$ la composizione

$$\begin{tikzcd}
\prod_\alpha G_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \prod_\beta G_\beta \arrow[r] & G_\beta \simeq h^n(\partial D^{n+1}_\beta) \\
\prod_\gamma G_\gamma \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

è indotta da

$$\begin{tikzcd}
X^n/X^{n-1} & X^n \arrow[l] & \partial D^{n+1}_\beta \arrow[l] \arrow[dl] \\
X^n_\beta/X^{n-1} \arrow[u, hook] & X^n_\beta, \arrow[l] \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

dove $X^n_\beta$ si ottiene attaccando a $X^{n-1}$ le $n$-celle che intersecano l'immagine di $\partial D^{n+1}_\beta$ (sono in numero finito).

Riassumendo:

- possiamo calcolare i gruppi $h^n(X)$ a partire dal complesso cellulare

$$\dots \longrightarrow \prod_\alpha G_\alpha \longrightarrow \prod_\beta G_\beta \longrightarrow \dots;$$

- i gruppi di questo complesso dipendono solo dalla struttura di CW-complesso di $X$;
- le mappe di bordo sono determinate dal grado di certe funzioni continue

$$\partial D_\beta^{n+1} \longrightarrow D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n$$

che dipendono dalle mappe caratteristiche delle celle.

Di conseguenza, teorie coomologiche diverse hanno lo stesso complesso cellulare, dunque per ogni $X$ abbiamo un isomorfismo

$$h^n(X) \simeq \bar{h}^n(X).$$

Per verificare la naturalità, sia $f\colon X \to Y$, cellulare a meno di omotopia.

- Vale $f(X^n) \subseteq Y^n$, dunque $f$ induce un morfismo fra i complessi cellulari

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & h^n(Y^n/Y^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & h^{n+1}(Y^{n+1}/Y^n) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & h^n(X^n/X^{n-1}) \arrow[r] & h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

- Come accadeva per le mappe di bordo, i morfismi $f^*$ sono determinati dal grado delle applicazioni

$$D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \longrightarrow X^n/X^{n-1} \xrightarrow{f} Y^n/Y^{n-1} \longrightarrow D^n_\beta/\partial D^n_\beta.$$

Di conseguenza, a meno dell'isomorfismo che abbiamo stabilito fra i complessi cellulari di $h^*$ e $\bar{h}^*$, $f$ induce lo stesso morfismo di complessi nelle due teorie coomologiche. Pertanto l'isomorfismo

$$h^n(X) \simeq \bar{h}^n(X)$$

è naturale in $X$.

### Teorema

Siano $X$ un CW-complesso, $G$ un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T \colon \langle X, K(G,n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X; G)$$

naturale in $X$.

- Poniamo $K_n = K(G, n)$; sappiamo che è un $\Omega$-spettro.
- Estendendo la successione a $n \leq 0$, otteniamo la famiglia di funtori

  $$h^n = \langle -, K_n \rangle \colon \mathbf{CW}_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$$

  che definisce una teoria coomologica ridotta.
- Vale

  $$h^n(S^0) = \widetilde{H}^n(S^0; G) = \begin{cases} 0 & n \neq 0, \\ G & n = 0. \end{cases}$$

- Di conseguenza, per ogni $n$ abbiamo un isomorfismo di funtori

  $$h^n \simeq \widetilde{H}^n(-; G).$$

Per il lemma di Yoneda, l'isomorfismo

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha) \in \widetilde{H}^n(X;G)$$

dove

$$\alpha = T(\mathrm{id}_{K(G,n)}) \in \widetilde{H}^n(K(G,n);G).$$

- Se prendiamo $K(G,n)$ in modo che abbia come $(n-1)$-scheletro un punto, $\alpha$ è rappresentata dal cociclo cellulare che a ogni $n$-cella associa l'elemento

  $$[\varphi_\alpha\colon D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \longrightarrow K(G,n)] \in \pi_n(K(G,n)) \simeq G$$

  indotto dalla mappa caratteristica.
- Analogamente, per ogni $f\colon X \to K(G,n)$, $T(f)$ è rappresentato in coomologia dal cociclo cellulare che a ogni $n$-cella di $X$ associa l'elemento di $\pi_n(K(G,n))$ indotto dalla composizione

  $$D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^n/X^{n-1} \xrightarrow{f} K(G,n).$$