Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \boxed{\langle X, K(G,n)\rangle} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G,n)\rangle$ che rende T un isomorfismo di gruppi.

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T \colon \langle X, K(G,n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X; G)$$

naturale in X.

- Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G,n) \rangle$ che rende T un isomorfismo di gruppi.
- T è della forma

  $$T(f) = f^*(\alpha)$$

  dove α è la "classe fondamentale" di $\widetilde{H}^n(K(G,n); G)$.

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G,n)\rangle \Longrightarrow$ definizione di Ω-spettro.

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G,n)\rangle \Longrightarrow$ definizione di Ω-spettro.
2. Per ogni Ω-spettro $\{K_n\}$, la famiglia di funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ è una teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW-complessi puntati.

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G,n)\rangle \Longrightarrow$ definizione di Ω-spettro.
2. Per ogni Ω-spettro $\{K_n\}$, la famiglia di funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ è una teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW-complessi puntati.
3. Se una teoria coomologica ridotta h^* soddisfa $h^n(S^0) = 0$ per $n \neq 0$, allora esistono isomorfismi naturali $h^n(X) \simeq \widetilde{H}^n(X; h^0(S^0))$.

Definizione

Un Ω-*spettro* è una famiglia di CW-complessi $\{K_n\}_{n\geq 1}$ dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n\colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

Definizione

Un Ω-*spettro* è una famiglia di CW-complessi $\{K_n\}_{n\geq 1}$ dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n \colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

- È possibile estendere la famiglia anche a indici $n \leq 0$: è sufficiente considerare come K_{n-1} un'approssimazione CW di ΩK_n.

Definizione

Un Ω-*spettro* è una famiglia di CW-complessi $\{K_n\}_{n\geq 1}$ dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n \colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

- È possibile estendere la famiglia anche a indici $n \leq 0$: è sufficiente considerare come K_{n-1} un'approssimazione CW di ΩK_n.

Proposizione

Siano $f \colon Y \to Z$ un'equivalenza omotopica debole, X un CW-complesso. Allora la composizione

$$f \circ - \colon \langle X, Y\rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, Z\rangle$$

è una biiezione.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a $\langle X, K_n \rangle$ una struttura di gruppo imponendo che

$$\theta_n \circ - \colon \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$

sia un isomorfismo di gruppi.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a $\langle X, K_n \rangle$ una struttura di gruppo imponendo che

$$\theta_n \circ - \colon \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$

  sia un isomorfismo di gruppi.
- In questo modo, $\langle X, K_n \rangle$ risulta essere un gruppo abeliano:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \Sigma X, K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\theta_{n+1}\circ -", "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] & \langle \Sigma X, \Omega K_{n+2} \rangle \arrow[d, "\simeq"] \\
\langle X, K_n \rangle \arrow[r, "\theta_n \circ -", "\simeq"'] & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\Omega\theta_{n+1}\circ -"] & \langle X, \Omega^2 K_{n+2} \rangle .
\end{tikzcd}$$

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a $\langle X, K_n \rangle$ una struttura di gruppo imponendo che
$$\theta_n \circ - \colon \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$
sia un isomorfismo di gruppi.
- In questo modo, $\langle X, K_n \rangle$ risulta essere un gruppo abeliano:
$$\begin{tikzcd} & \langle \Sigma X, K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\theta_{n+1}\circ -", "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] & \langle \Sigma X, \Omega K_{n+2} \rangle \arrow[d, "\simeq"] \\ \langle X, K_n \rangle \arrow[r, "\theta_n \circ -", "\simeq"'] & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\Omega\theta_{n+1}\circ -"] & \langle X, \Omega^2 K_{n+2} \rangle . \end{tikzcd}$$
- Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ otteniamo il funtore
$$\langle -, K_n \rangle \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}.$$

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un Ω-spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n \rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un Ω-spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ è una famiglia di funtori

$$h^n\colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}, \qquad\qquad n\in\mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un Ω-spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ è una famiglia di funtori

$$h^n \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

1. Per ogni coppia (X, A) esiste una successione esatta lunga

$$\dots \xrightarrow{\delta} h^n(X/A) \xrightarrow{q^*} h^n(X) \xrightarrow{i^*} h^n(A) \xrightarrow{\delta} h^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

naturale in (X, A).

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un Ω-spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ è una famiglia di funtori

$$h^n\colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}, \qquad\qquad n\in\mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

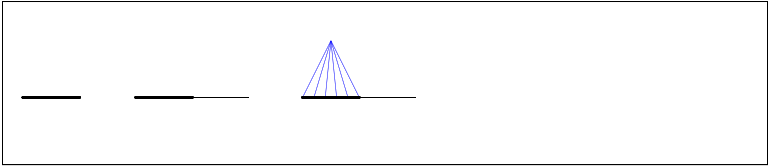
1. Per ogni coppia (X, A) esiste una successione esatta lunga
$$\dots \xrightarrow{\delta} h^n(X/A) \xrightarrow{q^*} h^n(X) \xrightarrow{i^*} h^n(A) \xrightarrow{\delta} h^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$
naturale in (X, A).
2. Per ogni famiglia $\{X_\alpha\}_\alpha$, le inclusioni inducono un isomorfismo
$$h^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \xrightarrow{\simeq} \prod_\alpha h^n(X_\alpha).$$

- L'assioma 2. è soddisfatto: nella categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ dare un morfismo
$$\bigvee_\alpha X_\alpha \longrightarrow K_n$$
è equivalente a dare una collezione di morfismi
$$\{X_\alpha \longrightarrow K_n\}_\alpha .$$

- L'assioma 2. è soddisfatto: nella categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ dare un morfismo
$$\bigvee_\alpha X_\alpha \longrightarrow K_n$$
è equivalente a dare una collezione di morfismi
$$\{X_\alpha \longrightarrow K_n\}_\alpha .$$
- Per quanto riguarda l'assioma 1., sia (X, A) una coppia di CW-complessi; vediamo come costruire la successione esatta lunga associata.

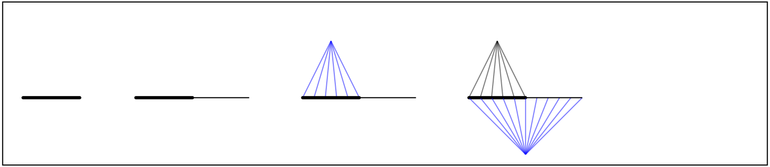
1. $A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup \mathcal{C}A$

2.



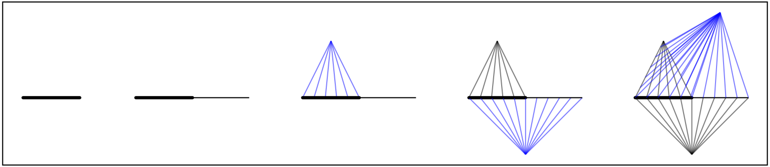
1. $A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup \mathcal{C}A \hookrightarrow (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X$

2.

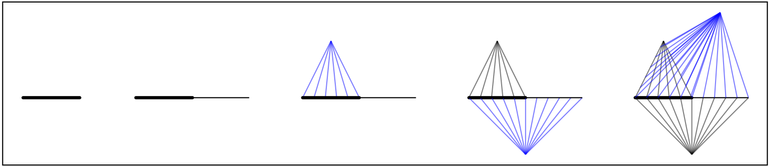


1. $A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup \mathcal{C}A \hookrightarrow (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \hookrightarrow \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A)$

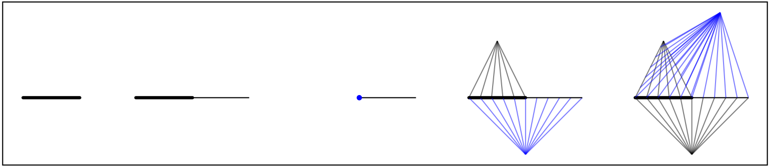
2.



$$\begin{tikzcd} \text{1} & A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \\ \text{2} & A \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

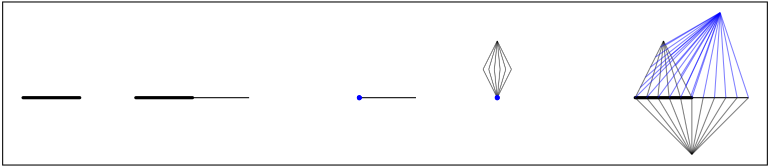


$$\begin{tikzcd}
\text{1} & A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] & ((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \\
\text{2} & A \arrow[r, hook] & X & X/A & &
\end{tikzcd}$$



Ω-spettri e coomologia
Dimostrazione

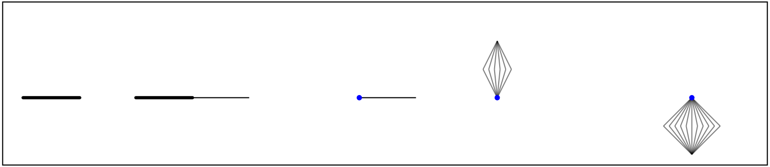
$$
\begin{tikzcd}
1 & A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & ((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \\
2 & A \arrow[r, hook] & X & X/A & \Sigma A &
\end{tikzcd}
$$



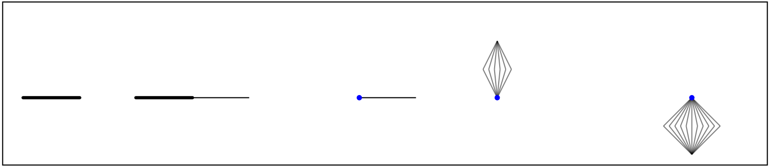
Ω-spettri e coomologia

Dimostrazione

$$
\begin{tikzcd}
1 & A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \arrow[d, "\simeq"] \\
2 & A \arrow[r, hook] & X & X/A & \Sigma A & \Sigma X
\end{tikzcd}
$$

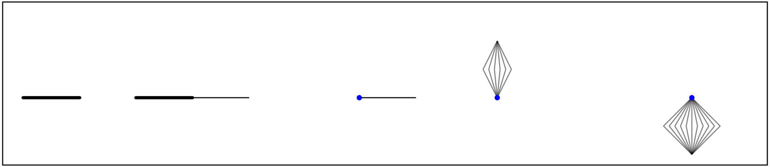


$$
\begin{tikzcd}
① & A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \arrow[d, "\simeq"] \\
② & A \arrow[r, hook] & X \arrow[r] & X/A \arrow[r] & \Sigma A \arrow[r, hook] & \Sigma X
\end{tikzcd}
$$



Ω-spettri e coomologia
Dimostrazione

$$
\begin{tikzcd}
\textcircled{1} & A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \arrow[d, "\simeq"] \\
\textcircled{2} & A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X/A \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & \Sigma A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Sigma f"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\
 & B \arrow[r, hook] & Y \arrow[r] & Y/B \arrow[r] & \Sigma B \arrow[r, hook] & \Sigma Y
\end{tikzcd}
$$



$$
\begin{tikzcd}
\textcircled{1} & A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \arrow[d, "\simeq"] \\
\textcircled{2} & A \arrow[r, hook] & X \arrow[r] & X/A \arrow[r] & \Sigma A \arrow[r, hook] & \Sigma X
\end{tikzcd}
$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle .$$

$$
\begin{tikzcd}
① & A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \arrow[d, "\simeq"] \\
② & A \arrow[r, hook] & X \arrow[r] & X/A \arrow[r] & \Sigma A \arrow[r, hook] & \Sigma X
\end{tikzcd}
$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta.

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n\rangle$$

è esatta. Sia $f\colon X \to K_n$. Allora

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n\rangle$$

è esatta. Sia $f\colon X \to K_n$. Allora

$$f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n\rangle \longrightarrow \langle A, K_n\rangle$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n\rangle$$

è esatta. Sia $f\colon X \to K_n$. Allora

$$\begin{aligned} & f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n\rangle \longrightarrow \langle A, K_n\rangle \\ \iff\ & f|_A \text{ è omotopicamente banale (fissando il punto base)} \end{aligned}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n\rangle$$

è esatta. Sia $f\colon X \to K_n$. Allora

$$\begin{aligned} & f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n\rangle \longrightarrow \langle A, K_n\rangle \\ \iff & f|_A \text{ è omotopicamente banale (fissando il punto base)} \\ \iff & f \text{ si estende a una mappa } X \cup \mathcal{C}A \longrightarrow K_n \end{aligned}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n\rangle$$

è esatta. Sia $f\colon X \to K_n$. Allora

$$\begin{aligned}
& f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n\rangle \longrightarrow \langle A, K_n\rangle \\
\iff\ & f|_A \text{ è omotopicamente banale (fissando il punto base)} \\
\iff\ & f \text{ si estende a una mappa } X \cup \mathcal{C}A \longrightarrow K_n \\
\iff\ & f \text{ appartiene all'immagine di } \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n\rangle \longrightarrow \langle X, K_n\rangle.
\end{aligned}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n, K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

Ω-spettri e coomologia
Dimostrazione

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n$, $K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle A, K\rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, K\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & \langle X/A, K\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K\rangle \arrow[l] \\
 & & \langle A, \Omega K'\rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, \Omega K'\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & & \\
\langle X, K'\rangle & \langle X/A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma X, K'\rangle \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n$, $K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle A, K\rangle \arrow[d, "\simeq"] \arrow[ddl, bend right] & \langle X, K\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & \langle X/A, K\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K\rangle \arrow[l] \\
 & & \langle A, \Omega K'\rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, \Omega K'\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & & \\
\langle X, K'\rangle & \langle X/A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma X, K'\rangle \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

Ω-spettri e coomologia
Dimostrazione

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle .$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto $K = K_n$, $K' = K_{n+1}$, le due successioni corrispondenti si possono incollare.

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle A, K\rangle \arrow[d, "\simeq"] \arrow[ddl, bend right] & \langle X, K\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & \langle X/A, K\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K\rangle \arrow[l] \\
 & & \langle A, \Omega K'\rangle \arrow[d, "\simeq"] & \langle X, \Omega K'\rangle \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & & \\
\langle X, K'\rangle & \langle X/A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma X, K'\rangle \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

Otteniamo così la successione esatta lunga

$$\ldots \longleftarrow \langle X/A, K_{n+1}\rangle \longleftarrow \langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \ldots$$

naturale in (X, A).

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione
$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$
naturale in X.

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Poniamo $K_n = K(G,n)$; sappiamo che è un Ω-spettro.

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Poniamo $K_n = K(G,n)$; sappiamo che è un Ω-spettro.
- Estendendo la successione a $n \leq 0$, otteniamo la famiglia di funtori

  $$h^n = \langle -, K_n \rangle \colon \mathbf{CW}_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$$

  che definisce una teoria coomologica ridotta.

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T \colon \langle X, K(G,n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Poniamo $K_n = K(G,n)$; sappiamo che è un Ω-spettro.
- Estendendo la successione a $n \leq 0$, otteniamo la famiglia di funtori

  $$h^n = \langle -, K_n \rangle \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$$

  che definisce una teoria coomologica ridotta.
- Vale

  $$h^n(S^0) = \widetilde{H}^n(S^0;G) = \begin{cases} 0 & n \neq 0, \\ G & n = 0. \end{cases}$$

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Poniamo $K_n = K(G,n)$; sappiamo che è un Ω-spettro.
- Estendendo la successione a $n \leq 0$, otteniamo la famiglia di funtori

  $$h^n = \langle -, K_n\rangle \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$$

  che definisce una teoria coomologica ridotta.
- Vale

  $$h^n(S^0) = \widetilde{H}^n(S^0;G) = \begin{cases} 0 & n \neq 0, \\ G & n = 0. \end{cases}$$

- Di conseguenza, per ogni n abbiamo un isomorfismo di funtori

  $$h^n \simeq \widetilde{H}^n(-;G).$$

Per il lemma di Yoneda, l'isomorfismo

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha) \in \widetilde{H}^n(X;G)$$

dove

$$\alpha = T(\mathrm{id}_{K(G,n)}) \in \widetilde{H}^n(K(G,n);G).$$

Per il lemma di Yoneda, l'isomorfismo

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha) \in \widetilde{H}^n(X;G)$$

dove

$$\alpha = T(\mathrm{id}_{K(G,n)}) \in \widetilde{H}^n(K(G,n);G).$$

- Se prendiamo $K(G,n)$ in modo che abbia come $(n-1)$-scheletro un punto, α è rappresentata dal cociclo cellulare che a ogni n-cella associa l'elemento

$$[\varphi_\alpha\colon D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \longrightarrow K(G,n)] \in \pi_n(K(G,n)) \simeq G$$

indotto dalla mappa caratteristica.

Per il lemma di Yoneda, l'isomorfismo

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha) \in \widetilde{H}^n(X;G)$$

dove

$$\alpha = T(\mathrm{id}_{K(G,n)}) \in \widetilde{H}^n(K(G,n);G).$$

- Se prendiamo $K(G,n)$ in modo che abbia come $(n-1)$-scheletro un punto, α è rappresentata dal cociclo cellulare che a ogni n-cella associa l'elemento

  $$[\varphi_\alpha\colon D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \longrightarrow K(G,n)] \in \pi_n(K(G,n)) \simeq G$$

  indotto dalla mappa caratteristica.
- Analogamente, per ogni $f\colon X \to K(G,n)$, $T(f)$ è rappresentato in coomologia dal cociclo cellulare che a ogni n-cella di X associa l'elemento di $\pi_n(K(G,n))$ indotto dalla composizione

  $$D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^n \xrightarrow{f} K(G,n).$$