Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G,n)\rangle$ che rende T un isomorfismo di gruppi.
- T è della forma
$$T(f) = f^*(\alpha)$$
dove α è la "classe fondamentale" di $\widetilde{H}^n(K(G,n);G)$.

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G,n)\rangle \Longrightarrow$ definizione di Ω-spettro.
2. Per ogni Ω-spettro $\{K_n\}$, la famiglia di funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ è una teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW-complessi puntati.
3. Se una teoria coomologica ridotta h^* soddisfa $h^n(S^0) = 0$ per $n \neq 0$, allora esistono isomorfismi naturali $h^n(X) \simeq \widetilde{H}^n(X; h^0(S^0))$.

Lavoreremo nella categoria $\mathbf{Top}_\bullet$ e nella sua sottocategoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

- Gli oggetti sono gli spazi topologici (o CW-complessi) puntati (X, x_0).
- I morfismi sono
$$\mathrm{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle,$$
funzioni continue $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ a meno di omotopia che fissa il punto base.
- La composizione
$$\circ : \langle Y, Z \rangle \times \langle X, Y \rangle \longrightarrow \langle X, Z \rangle$$
è ben definita.

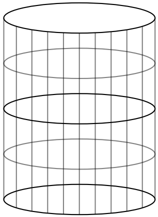
Esempio

Abbiamo l'uguaglianza (per ora solo insiemistica)
$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle.$$

- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

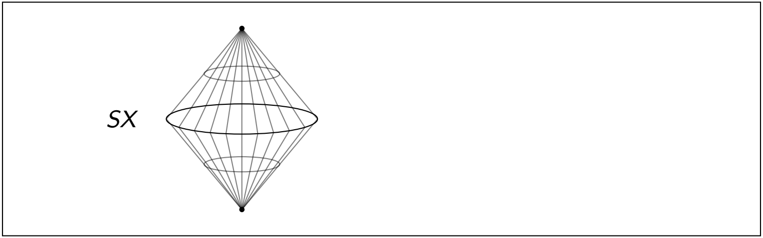
$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

$X \times [0,1]$



- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$



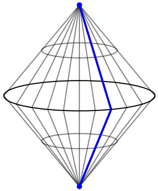
- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato (X, x_0), è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad \text{con punto base } [x_0].$$

ΣX



- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

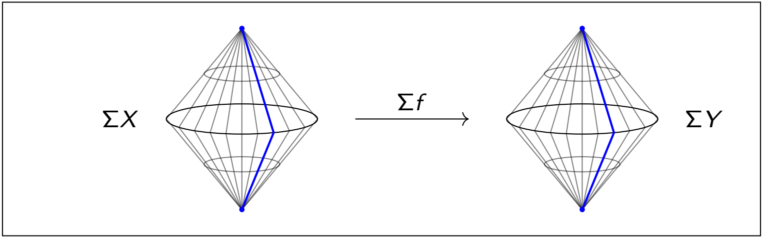
$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato (X, x_0), è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad \text{con punto base } [x_0].$$

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$:

$$\Sigma f(x,t) = (f(x), t).$$



- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato (X, x_0), è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad \text{con punto base } [x_0].$$

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$:

$$\Sigma f(x,t) = (f(x), t).$$

- La sospensione ridotta è dunque un funtore

$$\Sigma \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet$$

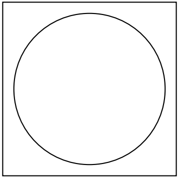
che si restringe a

$$\Sigma \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{CW}_\bullet .$$

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:



Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \dfrac{1}{2}, \\ g(x, 2t-1) & t \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \dfrac{1}{2}, \\ g(x, 2t-1) & t \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \dfrac{1}{2}, \\ g(x, 2t-1) & t \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f \colon Y \to Z$, la composizione

$$f \circ - \colon \langle \Sigma X, Y \rangle \longrightarrow \langle \Sigma X, Z \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t-1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f \colon Y \to Z$, la composizione

$$f \circ - \colon \langle \Sigma X, Y \rangle \longrightarrow \langle \Sigma X, Z \rangle$$

  è un omomorfismo di gruppi.
- Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle \Sigma X, - \rangle \colon \mathbf{Top}_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Grp}.$$

- Dato uno spazio topologico puntato (X, x_0), definiamo lo spazio di lacci

$$\Omega X = \left\{ g \in X^{[0,1]} : g(0) = g(1) = x_0 \right\}$$

con punto base il cammino costante in x_0. La topologia è quella compatta-aperta.

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Omega f \in \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$ per composizione:

$$\Omega f(g) = f \circ g.$$

- Lo spazio di lacci è dunque un funtore

$$\Omega \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet.$$

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle X, \Omega Y\rangle$.

- Per $f, g \in \langle X, \Omega Y\rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x)(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x)(2t-1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f\colon X \to Z$, la composizione

$$- \circ f\colon \langle Z, \Omega Y\rangle \longrightarrow \langle X, \Omega Y\rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.
- Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle -, \Omega Y\rangle\colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}^{\mathrm{op}}.$$

- Con la struttura di gruppo che abbiamo definito, l'uguaglianza

  $$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle$$

  è un isomorfismo di gruppi.
- Le due strutture di gruppo su $\langle \Sigma X, \Omega Y \rangle$ coincidono.
- $\Omega^2 Y$ può essere interpretato come lo spazio delle funzioni

  $$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow Y$$

  che assumono il valore y_0 sul bordo. Con lo stesso ragionamento usato per il π_2, si dimostra che $\langle X, \Omega^2 Y \rangle$ è abeliano.

Proposizione

I funtori Σ e Ω sono aggiunti. In altre parole, esiste una biiezione

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturale in X e Y. Inoltre queste biiezioni sono isomorfismi di gruppi.

Osservazioni

- Considerando S^{n-1}, otteniamo che

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle \simeq \langle S^{n-1}, \Omega X \rangle = \pi_{n-1}(\Omega X).$$

- In particolare, se X è un $K(G, n)$, allora ΩX è un $K(G, n-1)$.
- Per ogni $n \geq 1$, sia K_n un CW-complesso che è anche un $K(G, n)$; per unicità dei $K(G, n)$, abbiamo equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n \colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione
$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$
naturale in X.

- Poniamo $K_n = K(G,n)$; sappiamo che è un Ω-spettro.
- Estendendo la successione a $n \leq 0$, otteniamo la famiglia di funtori
$$h^n = \langle -, K_n\rangle\colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$$
che definisce una teoria coomologica ridotta.
- Vale
$$h^n(S^0) = \widetilde{H}^n(S^0;G) = \begin{cases} 0 & n \neq 0, \\ G & n = 0. \end{cases}$$
- Di conseguenza, per ogni n abbiamo un isomorfismo di funtori
$$h^n \simeq \widetilde{H}^n(-;G).$$

Per il lemma di Yoneda, l'isomorfismo

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

è della forma

$$T(f) = f^*(\alpha) \in \widetilde{H}^n(X;G)$$

dove

$$\alpha = T(\mathrm{id}_{K(G,n)}) \in \widetilde{H}^n(K(G,n);G).$$

- Se prendiamo $K(G,n)$ in modo che abbia come $(n-1)$-scheletro un punto, α è rappresentata dal cociclo cellulare che a ogni n-cella associa l'elemento

$$[\varphi_\alpha\colon D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \longrightarrow K(G,n)] \in \pi_n(K(G,n)) \simeq G$$

  indotto dalla mappa caratteristica.
- Analogamente, per ogni $f\colon X \to K(G,n)$, $T(f)$ è rappresentato in coomologia dal cociclo cellulare che a ogni n-cella di X associa l'elemento di $\pi_n(K(G,n))$ indotto dalla composizione

$$D^n_\alpha/\partial D^n_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^n/X^{n-1} \xrightarrow{f} K(G,n).$$