Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G,n) \rangle$ che rende T un isomorfismo di gruppi.
- T è della forma
$$T([f]) = f^*(\alpha)$$
dove α è la “classe fondamentale” di $H^n(K(G,n);G)$.

1. Struttura di gruppo su $\langle X, K(G,n)\rangle \Longrightarrow$ definizione di Ω-spettro.
2. Per ogni Ω-spettro $\{K_n\}$, la famiglia di funtori $h^n = \langle -, K_n\rangle$ è una teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW-complessi puntati.
3. Se una teoria coomologica ridotta h^* soddisfa $h^n(S^0) = 0$ per $n \neq 0$, allora esistono isomorfismi naturali $h^n(X) \simeq \widetilde{H}^n(X; h^0(S^0))$.

Lavoreremo nella categoria **Top$_\bullet$** e nella sua sottocategoria **CW$_\bullet$**.

- Gli oggetti sono gli spazi topologici (o CW-complessi) puntati (X, x_0).
- I morfismi sono
$$\mathrm{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle,$$
funzioni continue $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ a meno di omotopia che fissa il punto base.
- La composizione
$$\circ : \langle Y, Z \rangle \times \langle X, Y \rangle \longrightarrow \langle X, Z \rangle$$
è ben definita.

Esempio

Abbiamo l'uguaglianza (per ora solo insiemistica)

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle.$$

- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per uno spazio puntato (X, x_0), è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad\qquad \text{con punto base } [x_0].$$

- Ogni $f \in \langle X, Y\rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y\rangle$:

$$\Sigma f(x,t) = (f(x), t).$$

- La sospensione ridotta è dunque un funtore

$$\Sigma \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet$$

che si restringe a

$$\Sigma \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{CW}_\bullet.$$

Dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle \Sigma X, Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \dfrac{1}{2}, \\ g(x, 2t-1) & t \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f \colon Y \to Z$, la composizione

$$f \circ - \colon \langle \Sigma X, Y \rangle \longrightarrow \langle \Sigma X, Z \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.
- Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle \Sigma X, - \rangle \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}.$$

- Dato uno spazio topologico puntato (X, x_0), definiamo lo spazio di lacci

$$\Omega X = \left\{ g \in X^{[0,1]} : g(0) = g(1) = x_0 \right\}$$

  con punto base il cammino costante in x_0. La topologia è quella compatta-aperta.
- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Omega f \in \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$ per composizione:

$$\Omega f(g) = f \circ g.$$

- Lo spazio di lacci è dunque un funtore

$$\Omega \colon \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet.$$

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati X, Y, esiste una struttura di gruppo canonica su $\langle X, \Omega Y \rangle$.

- Per $f, g \in \langle X, \Omega Y \rangle$, il prodotto $f \cdot g$ è così definito:

$$f \cdot g(x)(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & t \leq \dfrac{1}{2}, \\ g(x)(2t-1) & t \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

- Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- Per ogni $f \colon X \to Z$, la composizione

$$- \circ f \colon \langle Z, \Omega Y \rangle \longrightarrow \langle X, \Omega Y \rangle$$

  è un omomorfismo di gruppi.
- Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle -, \Omega Y \rangle \colon \mathbf{Top}_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Grp}^{\mathrm{op}}.$$

- Con la struttura di gruppo che abbiamo definito, l'uguaglianza
$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle$$
è un isomorfismo di gruppi.
- Le due strutture di gruppo su $\langle \Sigma X, \Omega Y \rangle$ coincidono.
- $\Omega^2 Y$ può essere interpretato come lo spazio delle funzioni
$$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow Y$$
che assumono il valore y_0 sul bordo. Con lo stesso ragionamento usato per il π_2, si dimostra che $\langle X, \Omega^2 Y \rangle$ è abeliano.

Proposizione

I funtori Σ e Ω sono aggiunti. In altre parole, esistono biiezioni

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturali in X e Y. Inoltre queste biiezioni sono isomorfismi di gruppi.

- Prendendo $X = S^{n-1}$, otteniamo che

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle \simeq \langle S^{n-1}, \Omega X \rangle = \pi_{n-1}(\Omega X).$$

- In particolare, se X è un $K(G, n)$, allora ΩX è un $K(G, n-1)$.
- Per ogni $n \geq 1$, sia K_n un CW-complesso che è anche un $K(G, n)$; per unicità dei $K(G, n)$, abbiamo equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n \colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

Definizione

Un Ω-*spettro* è una famiglia di CW-complessi $\{K_n\}_{n\geq 1}$ dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n \colon K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

- È possibile estendere la famiglia anche a indici $n \leq 0$: è sufficiente considerare come K_{n-1} un'approssimazione CW di ΩK_n.

Proposizione

Siano $f \colon Y \to Z$ un'equivalenza omotopica debole, X un CW-complesso. Allora la composizione

$$f \circ - \colon \langle X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, Z \rangle$$

è una biiezione.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a $\langle X, K_n \rangle$ una struttura di gruppo imponendo che
$$\theta_n \circ - \colon \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$
sia un isomorfismo di gruppi.
- In questo modo, $\langle X, K_n \rangle$ risulta essere un gruppo abeliano:
$$\begin{tikzcd}
& \langle \Sigma X, K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\theta_{n+1} \circ -", "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] & \langle \Sigma X, \Omega K_{n+2} \rangle \arrow[d, "\simeq"] \\
\langle X, K_n \rangle \arrow[r, "\theta_n \circ -", "\simeq"'] & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle \arrow[r, "\Omega\theta_{n+1} \circ -"] & \langle X, \Omega^2 K_{n+2} \rangle .
\end{tikzcd}$$
- Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ otteniamo il funtore
$$\langle -, K_n \rangle \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}.$$

Teorema

Sia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un Ω-spettro. Allora i funtori $h^n = \langle -, K_n \rangle$ definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ è una famiglia di funtori

$$h^n \colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}, \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

1. Per ogni coppia (X, A) con $x_0 \in A$ esiste una successione esatta lunga

   $$\dots \xrightarrow{\delta} h^n(X/A) \xrightarrow{q^*} h^n(X) \xrightarrow{i^*} h^n(A) \xrightarrow{\delta} h^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

   naturale nella coppia (X, A).

2. Per ogni famiglia $\{X_\alpha\}_\alpha$, le inclusioni inducono un isomorfismo

   $$h^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \longrightarrow \prod_\alpha h^n(X_\alpha).$$

- Per ogni $f\colon X \to Y$,

$$h^n(f) = (- \circ f)\colon \langle Y, K_n \rangle \longrightarrow \langle X, K_n \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{array}{ccc} \langle Y, K_n \rangle & \xrightarrow{\;-\circ f\;} & \langle X, K_n \rangle \\ \big\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \big\downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ \langle Y, \Omega K_{n+1} \rangle & \xrightarrow{-\circ f} & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle \,. \end{array}$$

- L'assioma 2. è soddisfatto: nella categoria $\mathbf{CW}_\bullet$ un morfismo

$$\bigvee_\alpha X_\alpha \longrightarrow K_n$$

è precisamente una collezione di morfismi

$$\{X_\alpha \longrightarrow K_n\}_\alpha .$$

Costruiamo la successione esatta lunga associata a una coppia (X, A).

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \cup \mathcal{C}A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & \big((X \cup \mathcal{C}A) \cup \mathcal{C}X\big) \cup \mathcal{C}(X \cup \mathcal{C}A) \arrow[d, "\simeq"] \\
A \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X/A \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma A \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d] \\
B \arrow[r, hook] & Y \arrow[r] & Y/B \arrow[r] & \Sigma B \arrow[r, hook] & \Sigma Y
\end{tikzcd}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n \rangle$$

è esatta.

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n\rangle$$

è esatta. Sia $f\colon X \to K_n$. Allora

$$\begin{aligned} & f \text{ appartiene al nucleo di } \langle X, K_n\rangle \longrightarrow \langle A, K_n\rangle \\ \iff & f|_A \text{ è omotopicamente banale (fissando il punto base)} \\ \iff & f \text{ si estende a una mappa } X \cup \mathcal{C}A \longrightarrow K_n \\ \iff & f \text{ appartiene all'immagine di } \langle X \cup \mathcal{C}A, K_n\rangle \longrightarrow \langle X, K_n\rangle. \end{aligned}$$

Applicando il funtore h^n, otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n\rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n\rangle.$$

Tale successione è esatta. Posto $K = K_n$, $K' = K_{n+1}$, le due successioni ottenute si possono incollare.

$$\begin{tikzcd}
 & & \langle A, K\rangle & \langle X, K\rangle \arrow[l] & \langle X/A, K\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K\rangle \arrow[l] \\
 & & \langle A, K'\rangle \arrow[from=u, "\simeq"] & \langle X, K'\rangle \arrow[l] \arrow[from=u, "\simeq"] & & \\
\langle X, K'\rangle & \langle X/A, K'\rangle \arrow[l] & \langle \Sigma A, K'\rangle \arrow[l] \arrow[from=u, "\simeq"] & \langle \Sigma X, K'\rangle \arrow[l] \arrow[from=u, "\simeq"] & &
\end{tikzcd}$$

Otteniamo così la successione esatta lunga

$$\ldots \longleftarrow \langle X/A, K_{n+1}\rangle \longleftarrow \langle A, K_n\rangle \longleftarrow \langle X, K_n\rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n\rangle \longleftarrow \ldots$$

naturale in (X, A).