Teorema

Siano X un CW-complesso, G un gruppo abeliano, $n \geq 0$ un intero. Allora esiste una biiezione

$$T\colon \langle X, K(G,n)\rangle \longrightarrow \widetilde{H}^n(X;G)$$

naturale in X.

- Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su $\langle X, K(G,n)\rangle$ che rende T un isomorfismo di gruppi.
- T è della forma
  $$T([f]) = f^*(\alpha)$$
  dove α è la "classe fondamentale" di $H^n(K(G,n);G)$.

Lavoreremo prevalentemente nella categoria $\mathbf{CW}_\bullet$.

- Gli oggetti sono i CW-complessi puntati (X, x_0).
- I morfismi sono
$$\mathrm{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle ,$$
funzioni continue $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ a meno di omotopia che fissa il punto base.
- La composizione
$$\circ : \ \langle Y, Z \rangle \times \langle X, Y \rangle \longrightarrow \langle X, Z \rangle$$
è ben definita.

Esempio

Abbiamo l'uguaglianza (per ora solo insiemistica)
$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle .$$

Definizione

Una funzione $f\colon X \to Y$ si dice *equivalenza omotopica debole* se per ogni $n \geq 0$ la mappa indotta

$$f_*\colon \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$$

è un isomorfismo.

Proposizione

Siano X un CW-complesso, $f\colon Y \to Z$ un'equivalenza omotopica debole di spazi topologici. Allora

$$f \circ -\colon \langle X, Y\rangle \longrightarrow \langle X, Z\rangle$$

è una biiezione.

Teorema (Approssimazione CW)

Per ogni spazio topologico X esistono un CW-complesso Z e un'equivalenza omotopica debole $f\colon Z \to X$.

- La sospensione SX di uno spazio topologico X è

$$SX = X \times [0,1]/\sim, \qquad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- Per un CW-complesso puntato (X, x_0), è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX/\{x_0\} \times [0,1], \qquad\qquad \text{con punto base } [x_0].$$

- Ogni $f \in \langle X, Y \rangle$ induce $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$; la sospensione ridotta è dunque un funtore

$$\Sigma\colon \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{CW}_\bullet.$$

content...