

# Costruzione omotopica della coomologia

Enunciato

## Teorema

Siano  $X$  un CW-complesso,  $G$  un gruppo abeliano,  $n \geq 0$  un intero. Allora esiste una biiezione

$$T: \langle X, K(G, n) \rangle \xrightarrow{\simeq} \tilde{H}^n(X; G)$$

naturale in  $X$ .

- ▶ Esiste una struttura canonica di gruppo abeliano su  $\langle X, K(G, n) \rangle$  che rende  $T$  un isomorfismo di gruppi.
- ▶  $T$  è della forma

$$T([f]) = f^*(\alpha)$$

dove  $\alpha$  è la “classe fondamentale” di  $H^n(K(G, n); G)$ .

# Costruzione omotopica della coomologia

Strategia dimostrativa

1. Struttura di gruppo su  $\langle X, K(G, n) \rangle \implies$  definizione di  $\Omega$ -spettro.
2. Per ogni  $\Omega$ -spettro  $\{K_n\}$ , la famiglia di funtori  $h^n = \langle -, K_n \rangle$  è una teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW-complessi puntati.
3. Se una teoria coomologica ridotta  $h^*$  soddisfa  $h^n(S^0) = 0$  per  $n \neq 0$ , allora esistono isomorfismi naturali  $h^n(X) \simeq \tilde{H}^n(X; h^0(S^0))$ .

# Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

Categorie **Top $_{\bullet}$**  e **CW $_{\bullet}$** .

Lavoreremo nella categoria **Top $_{\bullet}$**  e nella sua sottocategoria **CW $_{\bullet}$** .

- ▶ Gli oggetti sono gli spazi topologici (o CW-complessi) puntati  $(X, x_0)$ .
- ▶ I morfismi sono

$$\text{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \langle X, Y \rangle,$$

funzioni continue  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  a meno di omotopia che fissa il punto base.

- ▶ La composizione

$$\circ : \langle Y, Z \rangle \times \langle X, Y \rangle \longrightarrow \langle X, Z \rangle$$

è ben definita.

## Esempio

Abbiamo l'uguaglianza (per ora solo insiemistica)

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle.$$

- ▶ La sospensione  $SX$  di uno spazio topologico  $X$  è

$$SX = X \times [0, 1] / \sim, \quad X \times \{0\} \text{ e } X \times \{1\} \text{ collassati a due punti.}$$

- ▶ Per uno spazio puntato  $(X, x_0)$ , è conveniente considerare la sospensione ridotta

$$\Sigma X = SX / \{x_0\} \times [0, 1], \quad \text{con punto base } [x_0].$$

- ▶ Ogni  $f \in \langle X, Y \rangle$  induce  $\Sigma f \in \langle \Sigma X, \Sigma Y \rangle$ :

$$\Sigma f(x, t) = (f(x), t).$$

- ▶ La sospensione ridotta è dunque un funtore

$$\Sigma: \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet$$

che si restringe a

$$\Sigma: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{CW}_\bullet.$$

Dati due spazi topologici puntati  $X, Y$ , esiste una struttura di gruppo canonica su  $\langle \Sigma X, Y \rangle$ .

- ▶ Per  $f, g \in \langle \Sigma X, Y \rangle$ , il prodotto  $f \cdot g$  è così definito:

$$f \cdot g(x, t) = \begin{cases} f(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- ▶ Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- ▶ Per ogni  $f: Y \rightarrow Z$ , la composizione

$$f \circ -: \langle \Sigma X, Y \rangle \longrightarrow \langle \Sigma X, Z \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.

- ▶ Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle \Sigma X, - \rangle: \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}.$$

# Aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$

## Spazio di lacci

- Dato uno spazio topologico puntato  $(X, x_0)$ , definiamo lo spazio di lacci

$$\Omega X = \left\{ g \in X^{[0,1]} : g(0) = g(1) = x_0 \right\}$$

con punto base il cammino costante in  $x_0$ . La topologia è quella compatta-aperta.

- Ogni  $f \in \langle X, Y \rangle$  induce  $\Omega f \in \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$  per composizione:

$$\Omega f(g) = f \circ g.$$

- Lo spazio di lacci è dunque un funtore

$$\Omega: \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Top}_\bullet.$$

In modo duale a quanto accade per la sospensione, dati due spazi topologici puntati  $X, Y$ , esiste una struttura di gruppo canonica su  $\langle X, \Omega Y \rangle$ .

- ▶ Per  $f, g \in \langle X, \Omega Y \rangle$ , il prodotto  $f \cdot g$  è così definito:

$$f \cdot g(x)(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x)(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- ▶ Si verifica facilmente che questa operazione definisce una struttura di gruppo, avente la funzione costante come elemento neutro.
- ▶ Per ogni  $f: X \rightarrow Z$ , la composizione

$$- \circ f: \langle Z, \Omega Y \rangle \longrightarrow \langle X, \Omega Y \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi.

- ▶ Di conseguenza, otteniamo il funtore

$$\langle -, \Omega Y \rangle: \mathbf{Top}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Grp}^{\text{op}}.$$

- Con la struttura di gruppo che abbiamo definito, l'uguaglianza

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle$$

è un isomorfismo di gruppi.

- Le due strutture di gruppo su  $\langle \Sigma X, \Omega Y \rangle$  coincidono.
- $\Omega^2 Y$  può essere interpretato come lo spazio delle funzioni

$$[0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

che assumono il valore  $y_0$  sul bordo. Con lo stesso ragionamento usato per il  $\pi_2$ , si dimostra che  $\langle X, \Omega^2 Y \rangle$  è abeliano.



## Proposizione

I funtori  $\Sigma$  e  $\Omega$  sono aggiunti. In altre parole, esistono biiezioni

$$\langle \Sigma X, Y \rangle \xrightarrow{\cong} \langle X, \Omega Y \rangle$$

naturali in  $X$  e  $Y$ . Inoltre queste biiezioni sono isomorfismi di gruppi.

## Osservazioni

- Prendendo  $X = S^{n-1}$ , otteniamo che

$$\pi_n(X) = \langle S^n, X \rangle = \langle \Sigma S^{n-1}, X \rangle \simeq \langle S^{n-1}, \Omega X \rangle = \pi_{n-1}(\Omega X).$$

- In particolare, se  $X$  è un  $K(G, n)$ , allora  $\Omega X$  è un  $K(G, n-1)$ .
- Per ogni  $n \geq 1$ , sia  $K_n$  un CW-complesso che è anche un  $K(G, n)$ ; per unicità dei  $K(G, n)$ , abbiamo equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n: K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

## Definizione

Un  $\Omega$ -spettro è una famiglia di CW-complessi  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  dotata di equivalenze omotopiche deboli

$$\theta_n: K_n \longrightarrow \Omega K_{n+1}.$$

- È possibile estendere la famiglia anche a indici  $n \leq 0$ : è sufficiente considerare come  $K_{n-1}$  un'approssimazione CW di  $\Omega K_n$ .

## Proposizione

Siano  $f: Y \rightarrow Z$  un'equivalenza omotopica debole,  $X$  un CW-complesso. Allora la composizione

$$f \circ -: \langle X, Y \rangle \xrightarrow{\simeq} \langle X, Z \rangle$$

è una biiezione.

D'ora in poi, tutti gli spazi di cui parleremo saranno CW-complessi puntati.

- Possiamo dare a  $\langle X, K_n \rangle$  una struttura di gruppo imponendo che

$$\theta_n \circ - : \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\cong} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$

sia un isomorfismo di gruppi.

- In questo modo,  $\langle X, K_n \rangle$  risulta essere un gruppo abeliano:

$$\begin{array}{ccccc} \langle \Sigma X, K_{n+1} \rangle & \xrightarrow[\cong]{\theta_{n+1} \circ -} & \langle \Sigma X, \Omega K_{n+2} \rangle \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \langle X, K_n \rangle & \xrightarrow[\cong]{\theta_n \circ -} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle & \xrightarrow{\Omega \theta_{n+1} \circ -} & \langle X, \Omega^2 K_{n+2} \rangle \end{array}$$

- Di conseguenza, per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  otteniamo il funtore

$$\langle -, K_n \rangle : \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}.$$

## Teorema

Sia  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  un  $\Omega$ -spettro. Allora i funtori  $h^n = \langle -, K_n \rangle$  definiscono una teoria coomologica ridotta sulla categoria **CW**<sub>•</sub>.

## Richiamo

Una *teoria coomologica ridotta* sulla categoria **CW**<sub>•</sub> è una famiglia di funtori

$$h^n : \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

che soddisfa i seguenti assiomi.

1. Per ogni coppia  $(X, A)$  con  $x_0 \in A$  esiste una successione esatta lunga

$$\dots \xrightarrow{\delta} h^n(X/A) \xrightarrow{q^*} h^n(X) \xrightarrow{i^*} h^n(A) \xrightarrow{\delta} h^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

naturale nella coppia  $(X, A)$ .

2. Per ogni famiglia  $\{X_\alpha\}_\alpha$ , le inclusioni inducono un isomorfismo

$$h^n \left( \bigvee_\alpha X_\alpha \right) \longrightarrow \prod_\alpha h^n(X_\alpha).$$

- Per ogni  $f: X \rightarrow Y$ ,

$$h^n(f) = (- \circ f): \langle Y, K_n \rangle \longrightarrow \langle X, K_n \rangle$$

è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{array}{ccc} \langle Y, K_n \rangle & \xrightarrow{- \circ f} & \langle X, K_n \rangle \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \langle Y, \Omega K_{n+1} \rangle & \xrightarrow{- \circ f} & \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle. \end{array}$$

- L'assioma 2. è soddisfatto: nella categoria **CW**• un morfismo

$$\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \longrightarrow K_n$$

è precisamente una collezione di morfismi

$$\{X_{\alpha} \longrightarrow K_n\}_{\alpha}.$$

Costruiamo la successione esatta lunga associata a una coppia  $(X, A)$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX \hookrightarrow ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \\
 \parallel \quad \parallel \quad \downarrow \simeq \quad \downarrow \simeq \quad \downarrow \simeq \\
 A \hookrightarrow X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A \longleftarrow \Sigma X \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 B \hookrightarrow Y \longrightarrow Y/B \longrightarrow \Sigma B \longleftarrow \Sigma Y
 \end{array}$$

Applicando il funtore  $h^n$ , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup CA, K_n \rangle$$

è esatta.

Applicando il funtore  $h^n$ , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Per verificarne l'esattezza, è sufficiente mostrare che

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X \cup CA, K_n \rangle$$

è esatta. Sia  $f: X \rightarrow K_n$ . Allora

$f$  appartiene al nucleo di  $\langle X, K_n \rangle \rightarrow \langle A, K_n \rangle$

$\iff f|_A$  è omotopicamente banale (fissando il punto base)

$\iff f$  si estende a una mappa  $X \cup CA \rightarrow K_n$

$\iff f$  appartiene all'immagine di  $\langle X \cup CA, K_n \rangle \rightarrow \langle X, K_n \rangle$ .

Applicando il funtore  $h^n$ , otteniamo una successione di gruppi abeliani:

$$\langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma A, K_n \rangle \longleftarrow \langle \Sigma X, K_n \rangle.$$

Tale successione è esatta e naturale. Posto  $K = K_n$ ,  $K' = K_{n+1}$ , le due successioni ottenute si possono incollare.

$$\begin{array}{ccccccc} \langle A, K \rangle & \longleftarrow & \langle X, K \rangle & \longleftarrow & \langle X/A, K \rangle & \longleftarrow & \langle \Sigma A, K \rangle \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & & & \\ \langle A, K' \rangle & \longleftarrow & \langle X, K' \rangle & & & & \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & & & \\ \langle X, K' \rangle & \longleftarrow & \langle X/A, K' \rangle & \longleftarrow & \langle \Sigma A, K' \rangle & \longleftarrow & \langle \Sigma X, K' \rangle \end{array}$$

Otteniamo così la successione esatta lunga

$$\dots \longleftarrow \langle X/A, K_{n+1} \rangle \longleftarrow \langle A, K_n \rangle \longleftarrow \langle X, K_n \rangle \longleftarrow \langle X/A, K_n \rangle \longleftarrow \dots$$

naturale in  $(X, A)$ .



### Teorema

Siano  $h^*$ ,  $\bar{h}^*$  teorie coomologiche ridotte sulla categoria **CW**<sub>•</sub> tali che

$$\begin{cases} h^n(S^0) = \bar{h}^n(S^0) = 0 & \text{per } n \neq 0, \\ h^0(S^0) \simeq \bar{h}^0(S^0) = G. \end{cases}$$

Allora per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  i funtori  $h^n$  e  $\bar{h}^n$  sono isomorfi.

### Osservazione

Se  $h$  è una teoria coomologica ridotta, è facile verificare che esiste un isomorfismo di funtori

$$h^n \simeq h^{n+1} \circ \Sigma: \mathbf{CW}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}^{\text{op}}.$$

Di conseguenza possiamo limitarci a considerare CW complessi senza 1-celle (infatti  $\Sigma^2 X$  ha una struttura di CW complesso senza 1-celle).

- ▶ La coomologia di  $S^n$  è banale in ogni dimensione, tranne per

$$h^n(S^n) = G.$$

- ▶ Sia  $X$  un CW-complesso. Componendo le mappe

$$h^n(X^n/X^{n-1}) \longrightarrow h^n(X^n) \longrightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n)$$

si ottengono le applicazioni di bordo di un complesso “cellulare”

$$\dots \rightarrow h^{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \rightarrow h^n(X^n/X^{n-1}) \rightarrow h^{n+1}(X^{n+1}/X^n) \rightarrow \dots,$$

il cui  $n$ -esimo gruppo di coomologia è precisamente  $h^n(X)$ .

- ▶ Le mappe caratteristiche

$$\varphi_\alpha: (D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$$

inducono isomorfismi

$$h^n(X^n/X^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha h^n(D_\alpha^n/\partial D_\alpha^n) \simeq \prod_\alpha G_\alpha.$$

# Teorie coomologiche

## Dimostrazione

Dunque i gruppi del complesso cellulare non dipendono da  $h$ . Calcoliamo ora le applicazioni di bordo.

La mappa  $G_\alpha \rightarrow G_\beta$  data dalla composizione

$$\begin{array}{ccccccc} G_\alpha & \longrightarrow & \prod_\alpha G_\alpha & \longrightarrow & \prod_\beta G_\beta & \longrightarrow & G_\beta \\ \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. & & \left| \simeq \right. \\ h^n(D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n) & \longrightarrow & h^n(X^n / X^{n-1}) & \longrightarrow & h^{n+1}(X^{n+1} / X^n) & \longrightarrow & h^{n+1}(D_\beta^{n+1} / \partial D_\beta^{n+1}) \\ & & & & & & \left| \simeq \right. \\ & & & & & & h^n(\partial D_\beta^{n+1}) \end{array}$$

è indotta dall'applicazione continua

$$S^n \simeq \partial D_\beta^{n+1} \hookrightarrow X^n \longrightarrow D_\alpha^n / \partial D_\alpha^n \simeq S^n.$$