

Faculté des Sciences

Université de Montpellier

**Master Modélisation et Analyse
Numérique (MANU)**

La méthode ϕ -FEM

Présenté par :

**Feriel Messaoudi
Delfin Calles Fantova**

Sous la direction de :

Vanessa Lleras

Mai 2024

Résumé

Dans le présent travail, Nous proposons une nouvelle méthode éléments finis de type domaine fictif: la méthode ϕ -FEM , qui ne nécessite pas un maillage s'ajustant à la frontière. Pour imposer les conditions aux limites de Dirichlet, nous cherchons l'approximation de la solution sous la forme d'un produit d'une fonction d'éléments finis avec la fonction de niveau donnée, qui est également approximée par des éléments finis.

Nous détaillons la méthode ϕ -FEM pour le problème de Poisson Dirichlet, en examinant les deux formulations de cette méthode : la formulation directe et la formulation duale. Nous illustrons ces formulations à l'aide de cas test en dimension deux, implémentés en utilisant FenicsX et on vérifie la convergence optimale de notre méthode pour les normes H^1 et L^2 .

1 Introduction

La mécanique computationnelle, un domaine crucial de l'ingénierie moderne, est constamment confrontée au défi de représenter avec précision des géométries complexes. Diverses approches ont été développées pour relever ce défi, chacune présentant ses avantages et ses limites. Parmi ces avancées se distingue la méthode ϕ -FEM (Finite Element Method), qui utilise la fonction de niveau ϕ pour représenter les géométries.

La méthode ϕ -FEM se démarque des méthodes traditionnelles en décrivant la géométrie du domaine physique à l'aide de la fonction de niveau ϕ , représentée par $\{\Omega := \{\phi < 0\}\}$. Cette méthode étend les équations du domaine physique Ω à un domaine étendu Ω_h , où une formulation variationnelle est utilisée pour résoudre le problème. Elle permet une intégration efficace des conditions aux limites et ajoute une stabilisation pour assurer la coercivité et la stabilité au niveau discret.

Un des principaux avantages de la ϕ -FEM est sa capacité à offrir une précision optimale tout en simplifiant la modélisation des géométries complexes. Contrairement à d'autres méthodes, elle permet l'utilisation d'éléments finis (FE) de tout ordre, augmentant ainsi l'adaptabilité aux exigences spécifiques de chaque problème. De plus, elle génère des matrices de problèmes discrétisés bien conditionnées, garantissant une efficacité computationnelle élevée.

Ce rapport se concentre sur l'étude de l'efficacité de la ϕ -FEM pour résoudre le problème de Poisson Dirichlet. À travers des analyses comparatives, il explore comment cette méthode peut améliorer la précision et l'efficacité computationnelle dans la résolution de ce problème fondamental.

2 Problème de Poisson Dirichlet:

On considère le problème de poisson tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

où :

- Ω est un domaine ouvert borné dans \mathbb{R}^d (avec $d = 2$ ou $d = 3$),
- Δ est l'opérateur laplacien,
- f est une fonction donnée,
- Γ est une partie de la frontière de Ω où les conditions de Dirichlet sont spécifiées,
- g est une fonction donnée décrivant la valeur de la solution sur la frontière Γ ,

Supposons que Ω et Γ soient définis par une fonction de niveau ϕ :

$$\Omega = \{\phi < 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma = \{\phi = 0\}$$

Nous considérons maintenant la situation où un maillage adapté de Ω n'est pas disponible. Supposons que Ω soit à l'intérieur d'un domaine simplement fermé O (typiquement une boîte dans \mathbb{R}^d) et introduisons un maillage quasi-uniforme \mathcal{T}_h^O sur O .

Nous introduisons ensuite le maillage \mathcal{T}_h obtenu en éliminant les éléments de maillages situé entièrement à l'extérieur de Ω .

En conséquence, nous supposons que nous disposons d'une fonction FE ϕ_h , le domaine couvert par le maillage \mathcal{T}_h (de sorte que Ω_h n'est que légèrement supérieur à Ω) est :

$$\mathcal{T}_h := \{T \in \mathcal{T}_h^O : T \cap \{\phi_h < 0\} \neq \emptyset\}$$

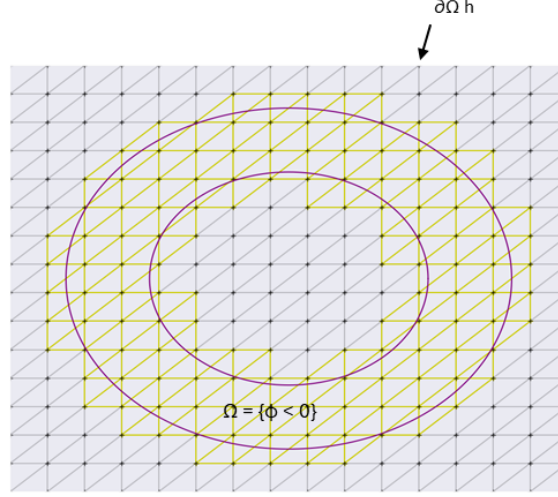


Figure 1: Représentation des domaines Ω et Ω_h

Le point de départ de toutes les variantes de la méthode des éléments finis par fonction de niveau ϕ est une formulation variationnelle du problème (1) étendue à Ω_h (voir le problème (2)). En supposant le terme de droite f est effectivement bien défini sur Ω_h et que la solution u peut être étendue de Ω à Ω_h , comme solution de l'équation (1), maintenant posée sur Ω_h au lieu de Ω tel que : $\Omega_h = (\bigcup_{T \in T_h} T)^o$

Au niveau continu, nous voulons ainsi imposer $u = g$ sur $\Gamma = \{\phi = 0\}$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega_h, \\ u = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2)$$

Pour cela nous prenons ensuite v fonction test sur Ω_h , multiplions l'équation principale par v et l'intégrons sur Ω_h . Cela donne la formulation suivante : trouver u sur Ω_h tel que :

$$\int_{\Omega_h} \nabla(u) \cdot \nabla(v) - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v = \int_{\Omega_h} f \cdot v, \quad \forall v \in H^1(\Omega_h) \quad (3)$$

Cette formulation est différente de la formulation standard. Tout d'abord, aucune condition limite n'est incorporée, de sorte que nous ne pouvons pas attendre qu'elle admette une solution unique, voir [2].

De plus, si nous ajoutons les conditions aux limites sur $\partial\Omega_h$ (nous ferons ça lors de la construction de nos variantes de ϕ -FEM) la solution au niveau continu n'existe pas ou n'est pas unique. Cependant, nous serons en mesure de transformer ces problèmes en schémas numériques bien définis en ajoutant une stabilisation appropriée au niveau discret.

Nous envisageons ici deux options pour y parvenir :

- 1) la méthode ϕ -FEM Direct Dirichlet .
- 2) la méthode ϕ -FEM Dual Dirichlet .

2.1 Direct Dirichlet:

On introduit une nouvelle inconnue w et on redéfinit u à travers le produit ϕw qui s'annule automatiquement sur Γ . Supposant que g est en fait donné sur tout Ω_h pas que sur Γ , c'est à dire :

$$u = g + \phi w \text{ sur } \Omega_h \quad (4)$$

On remplace dans (3), et pour rendre la formulation plus symétrique, nous remplaçons également les fonctions test v par ϕv . Cela donne :

Trouver w sur Ω_h tel que :

$$\int_{\Omega_h} \nabla(\phi w + g) \cdot \nabla(\phi v) - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial(\phi w + g)}{\partial n} \cdot \phi v = \int_{\Omega_h} f \cdot (\phi v), \quad \forall v \in H^1(\Omega_h) \quad (5)$$

2.2 Dual Dirichlet:

Nous aurons besoin d'un sous-maillage de T_h appelé T_h^Γ constitué des cellules intersectées avec la courbe $\{\phi_h = 0\}$ approximant Γ :

$$T_h^\Gamma := \{T \in \mathcal{T}_h^O : T \cap \{\phi_h = 0\} \neq \emptyset\}$$

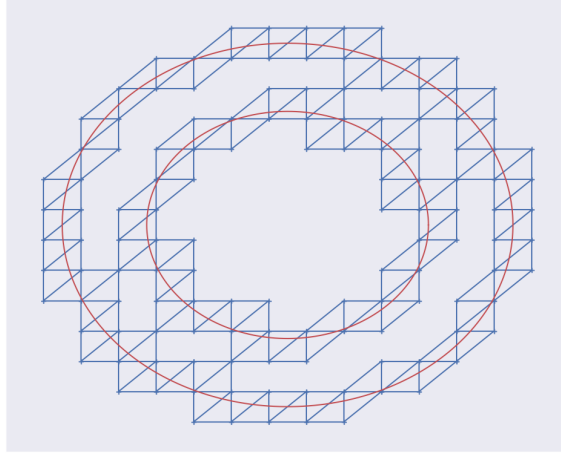


Figure 2: Maillages actifs pour la méthode ϕ -FEM (avec des cellules de T_h^Γ en bleu)

Nous supposons maintenant que g est défini sur Ω_h^Γ plutôt que sur tout Ω_h , Nous conservons l'inconnue principale u et on impose :

$$u = g + \phi p \text{ sur } \Omega_h^\Gamma \quad (6)$$

En plus de cela , on introduit une nouvelle inconnue p sur Ω_h^Γ qui cohabite avec u à l'intérieur d'une formulation variationnelle qui combine (3) et (6), cela donne:

Trouver u sur Ω_h et p sur Ω_h^Γ tels que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v + \gamma \int_{\Omega_h^\Gamma} (u - \phi p) \cdot (v - \phi q) \\ &= \int_{\Omega_h} f \cdot v + \gamma \int_{\Omega_h^\Gamma} g \cdot (v - \phi q), \quad \forall v \text{ sur } \Omega_h, q \text{ sur } \Omega_h^\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

avec un paramètre γ positif, en comparant les variantes directe et duale, nous observons que les expressions (4) et (6) sont bien similaires, mais leur rôles sont assez différents dans les méthodes correspondantes.

La variable w remplace u dans (5) tandis que p coexiste avec u dans (7).

L'introduction de la variable supplémentaire p rend la méthode duale légèrement plus coûteuse que la méthode directe, mais cette nouvelle variable n'est introduite que sur une bande étroite autour de Γ .

Ainsi l'avantage réside dans le fait que ϕ et g doivent être connu uniquement localement autour de Γ puisqu'ils entrent dans (7) uniquement sur Ω_h^F . Cela facilite la construction de ϕ et g . Plus important encore, la méthode duale peut être adaptée à diverses configurations de plus en plus complexes.

2.3 Stabilisation et le résultat au niveau complètement discret:

Comme mentionné précédemment, les problèmes variationnels (5) et (7) sont dérivés de manière très formelle et ne sont pas mathématiquement rigoureux. En effet, il n'est pas possible d'avoir des problèmes aux limites significatifs sur un domaine Ω_h sans conditions aux limites sur $\partial\Omega_h$, tout en imposant des conditions sur une courbe (ou surface) Γ à l'intérieur de Ω_h . Cependant, ces formulations peuvent servir de point de départ pour formuler des problèmes d'éléments finis, qui deviennent bien posés lorsqu'une stabilisation appropriée est ajoutée.

Nous commençons par introduire les espaces d'éléments finis (FE):

Considérons, pour un entier $l \geq 1$, l'espace des éléments finis

$$V_{h,O}^{(l)} = \{v_h \in H^1(O) : v_h|_T \in P_l(T) \ \forall T \in T_h^O\}$$

où $P_l(T)$ désigne l'espace des polynômes en d variables de degré $\leq l$ vus comme des fonctions sur T .

Introduisons une fonction de niveau approximative $\phi_h \in V_{h,O}^{(l)}$ par

$$\phi_h := I_{h,O}^{(l)}(\phi)$$

où $I_{h,O}^{(l)}$ est l'opérateur d'interpolation de Lagrange standard sur $V_{h,O}^{(l)}$. Nous utiliserons cela pour approximer le domaine physique $\Omega = \{\phi < 0\}$ avec une frontière lisse $\Gamma = \{\phi = 0\}$ par le domaine $\{\phi_h < 0\}$ avec la frontière polynomiale par morceaux $\Gamma_h = \{\phi_h = 0\}$. Nous employons ϕ_h plutôt que ϕ dans notre méthode numérique afin de simplifier sa mise en œuvre (tous les intégrales dans la formulation des éléments finis à venir n'impliqueront que des polynômes par morceaux). Cette caractéristique s'avérera également cruciale dans notre analyse théorique.

Nous introduisons maintenant le maillage computationnel T_h comme le sous-ensemble de T_h^O composé des triangles/tétraèdres ayant une intersection non vide avec le domaine approximatif $\{\phi_h < 0\}$. Nous désignons le domaine occupé par T_h par Ω_h , c'est-à-dire

$$T_h := \{T \in T_h^O : T \cap \{\phi_h < 0\} \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad \Omega_h = \left(\bigcup_{T \in T_h} T \right)^o.$$

Notez que nous n'avons pas nécessairement $\Omega \subset \Omega_h$. En effet, certains éléments du maillage peuvent être coupés par la frontière exacte $\{\phi = 0\}$ mais pas par la frontière approximative $\{\phi_h = 0\}$. Dans de telles occasions rares, un élément de maillage contenant une petite portion de Ω ne sera pas inclus dans T_h .

Fixons un entier $k \geq 1$ (le même k et considérons l'espace des éléments finis

$$V_h^{(k)} = \{v_h \in H^1(\Omega_h) : v_h|_T \in P_k(T) \quad \forall T \in T_h\}.$$

Pour référence future, nous introduisons la version locale de cet espace pour tout sous-maillage M_h de T_h et degré polynomial $l \geq 0$:

$$Q_l^h(M_h) := \{q_h : M_h \rightarrow \mathbb{R}^d : q_h|_T \in P_l(T)^d \quad \forall T \in M_h\}$$

où q_h est continu sur M_h si $l \geq 0$. En particulier, nous aurons besoin de l'espace $Q_k^h(\Omega_\Gamma^h)$ sur le sous-maillage Ω_Γ^h dans la version duale de Dirichlet de ϕ -FEM.

L'approximation ϕ -FEM à (1) est introduite comme suit :
trouver $u_h \in V_h^{(k)}$ tel que :

$$a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h^{(k)},$$

où la forme bilinéaire a_h et la forme linéaire l_h sont définies par

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &:= \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_h u) \cdot \nabla(\phi_h v) - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h u) \phi_h v + G_h(u, v) \\ l_h(v) &:= \int_{\Omega_h} f \phi_h v + G_h^{\text{rhs}}(v), \end{aligned}$$

Où $G_h^{\text{rhs}}(v)$ et $G_h(u, v)$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} G_h(u, v) &:= \sigma h \sum_{E \in F_h^\Gamma} \int_E \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h u) \right] \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v) \right] + \sigma_h^2 \sum_{T \in T_h^\Gamma} \int_T \Delta(\phi_h u) \Delta(\phi_h v), \\ G_h^{\text{rhs}}(v) &:= -\sigma h^2 \sum_{T \in T_h^\Gamma} \int_T f \Delta(\phi_h v). \end{aligned}$$

Où :

- σ : Paramètre de stabilisation indépendant de h ,
- T_h^Γ : Sous-ensemble de T_h contenant les éléments du maillage coupés par la frontière approximative $\Gamma_h = \{\phi_h = 0\}$,
défini comme $T_h^\Gamma = \{T \in T_h : T \cap \Gamma_h \neq \emptyset\}$,
- F_h^Γ : Collection des facettes intérieures du maillage T_h soit coupées par Γ_h soit appartenant à un élément de maillage coupé,
définie comme $F_h^\Gamma = \{E \text{ (une facette interne de } T_h) \text{ telle qu'il existe } T \in T_h : T \cap \Gamma_h \neq \emptyset \text{ et } E \in \partial T\}$,
- $\Delta(\cdot)$: Opérateur de Laplace, généralement défini comme la divergence du gradient d'une fonction scalaire.

Les deux variantes de $\phi - FEM$ introduites ci-dessus peuvent maintenant être exprimées au niveau entièrement discret comme suit :

• **Direct Dirichlet $\phi - FEM$:**

Posons $u_h = g_h + \phi_h w_h$. Ici, ϕ_h et g_h sont des approximations FE pour ϕ et g sur tout Ω_h , et G_h, G_h^{rhs} représentent les termes de stabilisation.

Trouver $w_h \in V_h$ tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_h w_h + g_h) \cdot \nabla(\phi_h v_h) dx - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial(\phi_h w_h + g_h)}{\partial n} \phi_h v_h ds \\ + G_h(\phi_h w_h + g_h, \phi_h v_h) \\ = \int_{\Omega_h} f \cdot (\phi_h v_h) dx + G_h^{\text{rhs}}(\phi_h v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

- **Dual Dirichlet $\phi - FEM$:**

Trouver $u_h \in V_h$, $p_h \in Q_k^h(\Omega_\Gamma^h)$ tels que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial u_h}{\partial n} \cdot v_h \, ds + \frac{\gamma}{h^2} \int_{\Omega_\Gamma^h} \left(u_h - \frac{\phi_h p_h}{h}\right) \cdot \left(v_h - \frac{\phi_h q_h}{h}\right) \, dx \\ & \quad + G_h(u_h, v_h) \\ & = \int_{\Omega_h} f \cdot v_h \, dx + \frac{\gamma}{h^2} \int_{\Omega_\Gamma^h} g_h \cdot \left(v_h - \frac{\phi_h q_h}{h}\right) \, dx + G_h^{\text{rhs}}(v_h), \\ & \quad \forall v_h \in V_h, q_h \in Q_k^h(\Omega_\Gamma^h) \end{aligned}$$

On ajoute $\frac{1}{h}$ et $\frac{1}{h^2}$ pour aider au conditionnement , voir [2] et [1].

Théorème

Soit $\Omega \subset \Omega_h$ et $f \in H^k(\Omega_h)$. Soit $u \in H^{k+2}(\Omega)$ la solution continue et u_h la solution discrète. À condition que les constantes dans la formulation discrète soient suffisamment grandes, on a les inégalités suivantes :

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch^k \|f\|_{k,\Omega_h}$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|f\|_{k,\Omega_h}$$

où $C > 0$ dépend de la régularité du maillage et de la régularité de ϕ mais est indépendant de h , f et u , voir [2].

3 Application (test)

Soit O le carré $(0, 1)^2$ et T_h^O un maillage uniforme sur O . Soit Ω un anneau centré au point $(0.5, 0.5)$ de rayon $2/5$ pour le grand cercle et de rayon $1/4$ pour le petit cercle. La fonction de niveau ϕ est ainsi donnée par

$$\phi(x, y) = [(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 - 0.16][(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 - 0.065]$$

Nous prenons les paramètres du schéma $\gamma = \sigma_D = 20.0$. Nous utilisons des polynômes de Lagrange P_2 pour les deux espaces FE V_h et Q_h , c'est-à-dire que nous fixons $k = 2$ dans V_h et Q_h . Enfin, nous choisissons une solution exacte construite $u = u_{ex} := \phi(x, y)(\exp(x) \sin(2\pi y))$, donnant le second membre f par substitution dans (2) et les conditions aux limites $g = 0$ sur Γ .

Pour mettre en place les deux schémas ϕ -FEM ci-dessus, nous devons étendre g de Γ à Ω_h (dans le cas de la méthode directe) ou à Ω_h^Γ (dans le cas de la méthode duale). Pour imiter la situation réaliste où g est connu uniquement sur Γ .

Remarque :

Bien que la convergence pour la norme L^2 soit théoriquement sous-optimale, les résultats numériques obtenus dans cette étude ont montré une convergence optimale. Cette observation suggère que la méthode des éléments finis avec fonction de forme (ϕ -FEM) peut offrir des performances numériques meilleures que prévu dans certaines situations pratiques.

Ce résultat souligne l'importance de valider les prédictions théoriques par des expériences numériques, et met en évidence la robustesse et l'efficacité de la méthode dans des conditions réelles, notamment sur des maillages non adaptés et en présence de découpes de maillage avec la frontière du domaine.

- Erreur d'approximation pour Direct Dirichlet:

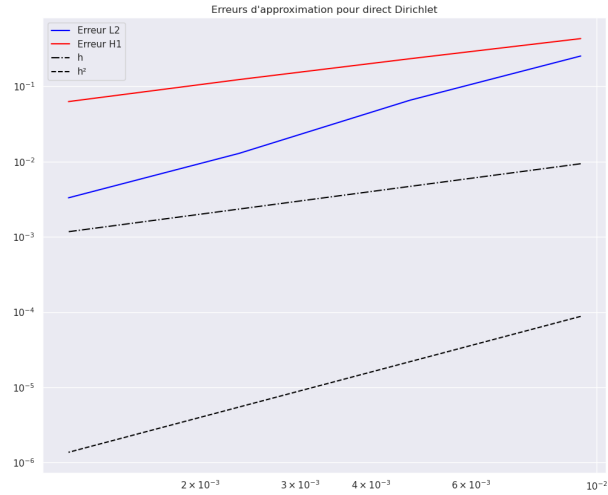


Figure 3: Ordre de convergence pour des éléments finis P1

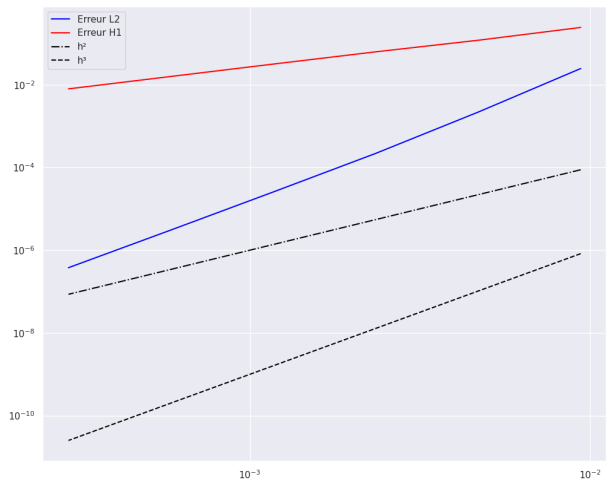


Figure 4: Ordre de convergence pour des éléments finis P2

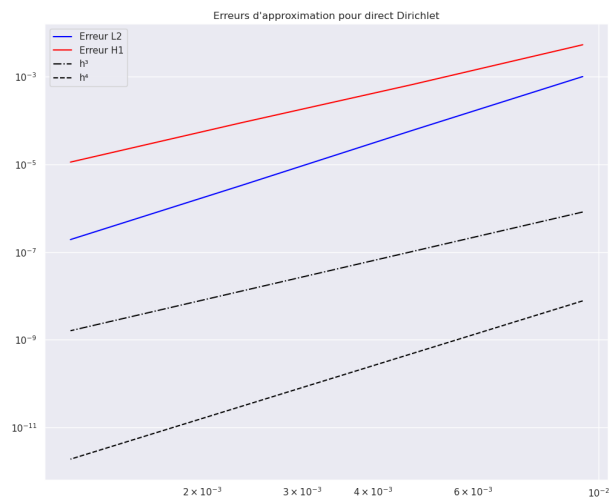


Figure 5: Ordre de convergence pour des éléments finis P3

- Erreur d'approximation pour Dual Dirichlet:

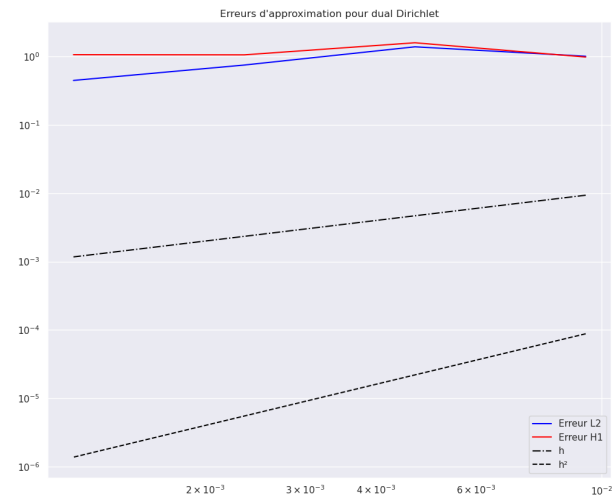


Figure 6: Ordre de convergence pour des éléments finis P1

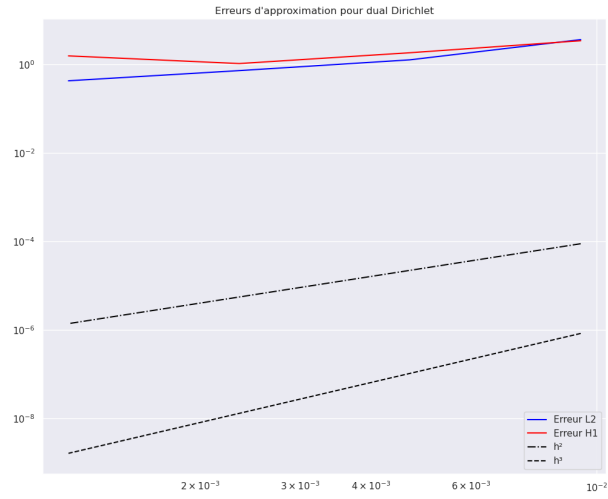


Figure 7: Ordre de convergence pour des éléments finis P2

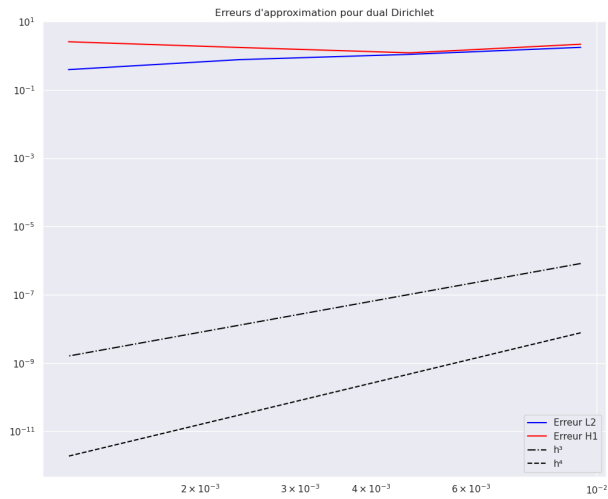


Figure 8: Ordre de convergence pour des éléments finis P3

4 Conclusion:

La méthode ϕ -FEM se révèle être une technique robuste et adaptable, capable de relever les défis posés par la modélisation des géométries complexes dans la mécanique computationnelle. Son application au problème de Poisson-Dirichlet démontre non seulement sa pertinence théorique, mais aussi son efficacité pratique. Les résultats obtenus montrent une convergence optimale dans les normes H^1 et L^2 avec les conditions aux bords de Dirichlet directes, confirmant ainsi la validité et la précision de la méthode. Mais malheureusement, nous n'avons pas obtenu les résultats espérés avec les conditions aux bords de dual Dirichlet en raison d'une erreur dans notre code. Cette étude ouvre la voie à de futures recherches et développements, notamment dans l'extension de la méthode à d'autres types de problèmes aux limites et à des configurations géométriques encore plus complexes. En résumé, la méthode ϕ -FEM constitue une avancée prometteuse pour le calcul scientifique et l'ingénierie, offrant de nouvelles perspectives pour la simulation numérique précise et efficace.

References

- [1] S. Cotin, M. Duprez, V. Lleras, A. Lozinski, and K. Vuillemot. Phi-fem: an efficient simulation tool using simple meshes for problems in structure mechanics and heat transfer. *Computational Mechanics*, 45(3):201–219, 2010.
- [2] Michel Duprez and Alexei Lozinski. Phi-fem: A finite element method on domains defined by level-sets. *Communications in Computational Physics*, 9(4):1022–1046, 2011.