

Université de Montpellier

M1 MANU

ÉTUDE D'UNE EDP

Devoir Maison

Delfín Calles Fantova

Table des matières

1	Introduction	2
2	Étude théorique	3
2.1	Étape 1 : Obtention de la formulation variationnelle	3
2.2	Étape 2 : Preuve de l'existence et unicité de la solution	4
2.3	Étape 3 : Verification de que la solution du (PV) est aussi la solution du (PL)	6
3	Approximation par une une Méthode d'Éléments Finis avec $\mathbb{P}^1 - Lagrange$ en 1D	8
3.1	Discrétisation du problème	8
3.2	Preuve de l'existence d'une solution à l'équation matricielle . .	11
3.3	Passage aux fonctions de base locales, Méthode d'Éléments Finis	11
3.4	Calcul des matrices A_T et B_T	13
3.5	Assemblage de la matrice A et la matrice B , exemple pratique.	14
3.6	Cas pratique	15
4	Implementation sur FEniCSx pour un problème en 1D et 2D	17
4.1	Problèmes polynômiales en 1D et 2D	17
4.2	Problèmes sans polynômes en 1D et 2D	19

1 Introduction

Dans ce rapport on effectuera un étude complet pour le problème aux limites :

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f, & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n = g, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{PL})$$

où $f, g \in L^2(\Omega) := \{h \in C^0(\Omega) \mid -\int_{\Omega} (|h|)^2 dx < +\infty\}$, des fonctions, et $a \in \mathbb{R}$, une constante, sont données.

Pour faire ça, on commencera par faire un étude plus théorique du problème, où on cherche à obtenir une formulation variationnelle du problème dont on veut étudier l'existence et unicité d'une solution, pour après vérifier que cette solution est bien une solution du problème variationnel et du problème originel (1).

Après on implementara ce problème en des exemples en $1D$ et $2D$ avec des solutions connues où on effectuera un étude numérique pour bien vérifier que le problème est bien implementé et qu'on obtient les convergences pour les erreurs désirées.

2 Étude théorique

2.1 Étape 1 : Obtention de la formulation variationnelle

Avant de commencer cette étape on va mentionner un résultat qui nous sera très utile pour obtenir la formulation variationnelle.

Première identité de Green.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dX = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n dS - \int_{\Omega} v \Delta u dX$$

avec n le vecteur normal unitaire sur $\partial\Omega$.

Maintenant on va prendre l'équation dans (PL) et on va multiplier les deux côtés de l'équation par une fonction assez régulière v et après on effectuera une integration sur le domaine Ω dans les deux côtés. En obtenant :

$$- \int_{\Omega} \Delta u v dx + a \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (1)$$

En appliquant la première identité de Green sur le terme $-\int_{\Omega} \Delta u v dx$ de l'équation (1), on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n ds + a \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

En plus, dans cette nouvelle équation on peut utiliser les conditions aux limites imposées dans le problème original pour obtenir, en organisant les termes :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + a \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \quad (2)$$

Dans l'équation (2) et d'après le fait que $f \in L^2(\Omega)$, on peut conclure que :

- $v \in L^2(\Omega)$
- $\nabla v \in L^2(\Omega)$
- $\nabla u \in L^2(\Omega)$
- $u \in L^2(\Omega)$

Avec ces observations on peut conclure que cette formulation variationnelle est bien posé si on prend u et v dans $H^1(\Omega)$ qui est l'espace définie par :

$$H^1(\Omega) := \{w \in C^1(\Omega) \mid w \in L^2(\Omega) \text{ et } \nabla w \in L^2(\Omega)\}$$

Et donc finalement on peut définir le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (\text{PV})$$

Avec :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + a \int_{\Omega} uv dx \\ l(v) &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \end{aligned}$$

2.2 Étape 2 : Preuve de l'existence et unicité de la solution

Pour cette étape on aura besoin des théorèmes suivants :

Théorème de la trace. Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . On définit l'application trace $\gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ telle que $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$. Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue (notée γ_0) de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, ayant :

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.

Théorème de de Lax-Milgram. Soit V un espace de Hilbert. Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur V . Soit $l(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V . Alors le problème variationnel admet une unique solution $u \in V$.

Théorème. $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

Donc c'est évident que pour prouver l'existence et unicité de la solution on doit s'assurer que notre espace $H^1(\Omega)$ et les applications $a(\cdot, \cdot)$ et $l(\cdot)$ vérifient les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

D'après le théorème ci-dessus on a bien que $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2)}$ est bien un espace de Hilbert. Donc maintenant passons à vérifier les hypothèses sur les applications du problème variationnel.

Bilinéarité de a : On va commencer par montrer la symétrie de cette forme. Soient $u, v \in H^1(\Omega)$ on observe que par symétrie du produit scalaire entre deux vecteurs on a :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + a \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx + a \int_{\Omega} v u dx = a(v, u)$$

Donc a est bien une forme symétrique. Maintenant si on arrive à prouver la linéarité à gauche de a , on aura montré grâce à sa symétrie qu'elle est bilinéaire. Soient $u, v, w \in H_m^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a bien que en utilisant la linéarité du gradient, celle du produit entre deux gradients, et finalement la linéarité de l'intégrale on a :

$$\begin{aligned}
a(u, v + \lambda w) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v + \lambda w) dx + a \int_{\Omega} u(v + \lambda w) dx = \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v + \lambda \nabla w) dx + a \int_{\Omega} (uv + \lambda uw) dx = \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \nabla u \cdot \nabla w dx + a \int_{\Omega} uv dx + \lambda a \int_{\Omega} uw dx = \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + a \int_{\Omega} uv dx + \lambda \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx + a \int_{\Omega} uw dx \right) = \\
&= a(u, v) + \lambda a(u, w)
\end{aligned}$$

Donc on a bien que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire.

Continuité de a : Pour montrer la continuité de a on va utiliser l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui nous dit que la valeur absolue du produit scalaire entre deux éléments d'un espace est inférieure au produit des normes de ces deux éléments, et on finira avec le fait que, par définition, $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Alors, soient $a, u \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| + \left| a \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |a| \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + |a|) \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est continue.

Coercivité de a : La preuve est assez directe car on va juste utiliser la définition de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et une choix judicieuse d'une constante, et on aura :

$$\begin{aligned}
\forall u \in H^1(\Omega), \quad a(u, u) &= \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \\
&\geq \min(1, a) (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) = \min(1, a) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Donc on a montré que $a(\cdot, \cdot)$ est coercive.

Linéarité de l : On va prouver directement la linéarité de l en utilisant la linéarité du produit de deux fonctions et la linéarité de l'intégrale.

Soient $u, v \in H_m^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} l(u + \lambda v) &= \int_{\Omega} f(u + \lambda v) dx + \int_{\partial\Omega} g(u + \lambda v) ds = \\ &= \int_{\Omega} f u dx + \lambda \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g u ds + \lambda \int_{\partial\Omega} g v ds = \\ &= l(u) + \lambda l(v) \end{aligned}$$

Donc $l(\cdot)$ est linéaire.

Continuité de l : En utilisant l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le théorème de la trace qu'on a énoncé plus haut et la propre définition de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall v \in H_m^1(\Omega), \quad |l(v)| &\leq \left| \int_{\Omega} f v dx \right| + \left| \int_{\partial\Omega} g v ds \right| \leq \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} = \\ &= (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Et donc on a bien montré la continuité de $l(\cdot)$

Alors, on a bien que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire, continue et coercive et que $l(\cdot)$ est une forme linéaire continue. Donc on a bien vérifié les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. Ce qui implique que le problème variationnel (PV) admet une solution et que cette solution est unique.

2.3 Étape 3 : Verification de que la solution du (PV) est aussi la solution du (PL)

Soit $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ solution du (PV). On remarque que dans ce cas on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + a \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds$$

Qui au début peut donner l'impression qu'il n'y a pas forme de retourner vers le problème initial (PL), mais on remarque que en remplaçant g par $\nabla u \cdot n$ et en la changeant de côté on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v ds + a \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

On reconnaît la première identité de Green dans le terme à gauche et donc en l'appliquant à l'inverse on retrouve :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx + a \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

Et alors en regroupant tous les termes dans un côté on obtient

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + au - f) v dx = 0$$

Et donc on peut conclure que $-\Delta u + au = f$, *presque partout dans* Ω . Mais avec la condition extra de demander que u soit dans $C^2(\Omega)$ on peut alors conclure que $-\Delta u + au = f$, *dans* Ω . En plus, on doit se rappeler qu'on a forcé que $g = \nabla u \cdot n$. Donc finalement on peut conclure que si u est solution du (PV) il est bien aussi solution du (PL).

3 Approximation par une Méthode d'Éléments Finis avec $\mathbb{P}^1 - Lagrange$ en 1D

Dans cette section on implementera à la main une Méthode d'Éléments Finis (MEF) avec $\mathbb{P}^1 - Lagrange$ en 1 dimension. Pour faire ça on définira $\Omega = [0, 1]$ et donc notre problème aux limites deviendra :

$$\begin{cases} u''(x) + au(x) = f(x), \text{ dans } [0, 1] \\ -u'(0) = u'(1) = \alpha \end{cases} \quad (PL_1)$$

On aura donc le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1([0, 1]) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in H^1([0, 1]) \end{cases} \quad (PV_1)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + a \int_0^1 u(x)v(x)dx \\ l(v) &= \int_0^1 f(x)v(x)dx + \alpha(v(1) + v(0)) \end{aligned}$$

3.1 Discrétisation du problème

On va commencer par enoncer quelques résultats qui nous seront utiles dans cette section.

Lemma. Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 , soit $(T_i)_{i=1, \dots, N}$ une partition de Ω telle que T_i est de classe $C^1, \forall i = 1, \dots, N, T_i \cap T_j = \emptyset$ si $i \neq j, \bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^N \bar{T}_i$. Soit u telle que $u|_{T_i} \in H^1(T_i)$ et $u \in C^0(\Omega)$, alors $u \in H^1(\Omega)$.

Dans cette première étape on va chercher redéfinir notre problème variationnel qui est défini de manière "continue" comme un problème variationnel défini de manière "discrète". Pour faire ça, le première pas sera définir un maillage $(x_k)_{k=0, \dots, N+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ de façon que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$. Pour faciliter tout ça on va choisir un maillage uniforme. C'est à dire que :

$$\forall i = 0, \dots, N+1, \quad x_i = ih, \quad \text{avec } h = \frac{1}{N+1}, \quad \text{avec } N \in \mathbb{N}$$

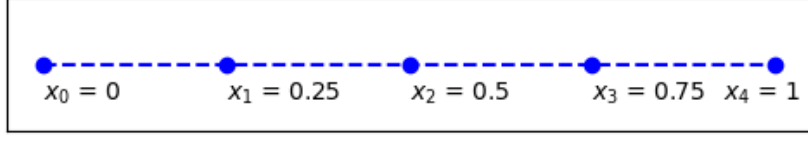


FIGURE 1 – Exemple d'un maillage uniforme sur $[0, 1]$ avec $h = 0.25$

Une fois qu'on a défini un maillage sur $[0, 1]$, on posera $T_j = [x_j, x_{j+1}] \forall j = 0, \dots, N$. Et maintenant on doit définir un nouveau espace vectoriel "discret" pour les fonction, pour notre problème on va choisir l'espace V_h définie par :

$$V_h := \{v \in C^0([0, 1]) \mid v|_{T_j} \in \mathbb{P}^1[x], j = 0, \dots, N\}$$

Avec $\mathbb{P}^1[x] := \{ax + b \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré 1. On doit remarquer que $V_h \subset H^1(\Omega)$ grâce au lemma énoncé ci dessus. De plus, la dimension de V_h vient donnée par le nombre des points dans le maillage, dans notre cas on obtient donc $\dim(V_h) = N + 2$. Ce qui nous intéresse maintenant c'est trouver une base de V_h , pour faire ça on proposera une famille de fonctions et on montrera qu'elle est bien une base de V_h . On va définir la famille de fonctions chapeau $(\varphi_i)_{i=0, \dots, N+1}$, définie par :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, N \\ \varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{h} & \text{si } x \in [x_N, x_{N+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

C'est évident que ces fonctions appartiennent à V_h et en plus c'est une famille avec $N + 2$ éléments donc elle est maximale, si on arrive à montrer qu'elle est libre, on aura trouvé une base de V_h . Pour faire ça on va considérer $\sum_{i=0}^{N+1} \beta_i \varphi_i(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$. C'est facile à observer que grâce à la définition qu'on a choisi pour les fonctions chapeau, si on pose $x = x_k$ on a que $\beta_k \varphi_k(x_k) = 0$ si et seulement si $\beta_k = 0$. Et on obtient le même résultat pour tous les points de notre maillage. Donc on a conclut que $(\varphi_i)_{i=0, \dots, N+1}$ est bien une famille maximale et libre et donc elle est une base de V_h .

Comme on a une base de V_h ça veut dire qu'on peut exprimer tout élément de V_h comme une combinaison linéaire de cette base. C'est à dire :

$$\forall u \in V_h, \quad u(x) = \sum_{i=0}^{N+1} u_i \varphi_i(x), \quad \text{avec } u_i = u(x_i), \quad x_i \text{ les points du maillage}$$

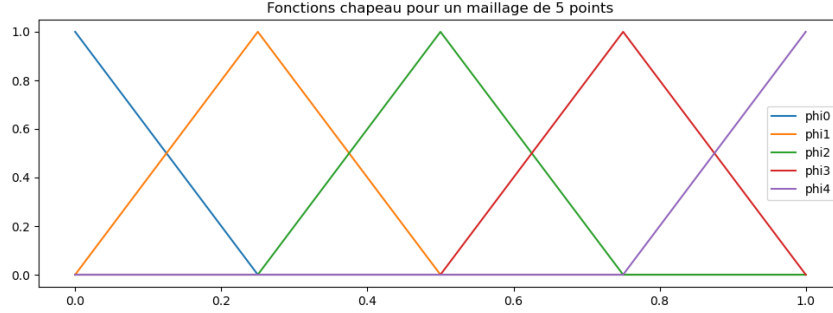


FIGURE 2 – Exemple de famille de fonctions chapeau pour un maillage de 5 points

Du coup on pourra réécrire nos formes linéaires et bilinéaires du problème variationnel (PV_1) telle que $\forall u_h \in V_h$, si on prend les $\varphi_j, \forall j = 0, \dots, N + 1$ comme des fonctions-test, on obtient :

$$\begin{aligned}
 a(u_h, \varphi_j) &= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{N+1} u_i \varphi'_i(x) \right) \varphi'_j(x) dx + a \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{N+1} u_i \varphi_i(x) \right) \varphi_j(x) dx = \\
 &= \sum_{i=0}^{N+1} \left(u_i \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx \right) + a \sum_{i=0}^{N+1} \left(u_i \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right) = \\
 &= \sum_{i=0}^{N+1} (u_i a(\varphi_i, \varphi_j)) \\
 l(\varphi_j) &= \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx + \alpha(\varphi_j(1) + \varphi_j(0))
 \end{aligned}$$

Donc finalement on obtiendra un nouveau problème variationnel discret dérivée du (PV_1) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, \varphi_j) = l(\varphi_j), \forall j = 0, \dots, N + 1 \end{cases} \quad (PVD_1)$$

Avec cette nouvelle notation on observe qu'on a obtenu un système d'équations linéaire $AU + BU = L$. Avec la matrice $A \in \mathcal{M}_{N+2}(\mathbb{R})$ définie telle que $\forall i, j = 0, \dots, N + 2, A_{ij} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx$, la matrice $B \in \mathcal{M}_{N+2}(\mathbb{R})$ définie telle que $\forall i, j = 0, \dots, N + 2, B_{ij} = a \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$, le vecteur $U \in \mathbb{R}^{N+2}$ défini tel que $\forall i = 0, \dots, N + 2, U_i = u_i = u(x_i)$ et le vecteur $L \in \mathbb{R}^{N+2}$ défini tel que $\forall i = 0, \dots, N + 2, L_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx + \alpha(\varphi_i(1) + \varphi_i(0))$

3.2 Preuve de l'existence d'une solution à l'équation matricielle

Dans cette section on prouvera que l'équation matricielle issue du problème variationnel (PVD_1) $AU + MU = L$ admet bien une unique solution.

Pour faire ça on utilisera le fait qu'une matrice symétrique définie positive est inversible. D'abord, montrons que B est définie positive. Soit $x \in \mathbb{R}^{N+2}$ non nul. On a :

$$x^T Bx = a \sum_{i=0}^{N+2} \sum_{j=0}^{N+2} x_i x_j \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx = a \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{N+2} x_i \varphi_i(x) \right) \left(\sum_{j=0}^{N+2} x_j \varphi_j(x) \right) dx$$

Si on pose $X = \sum_{i=0}^{N+2} x_i \varphi_i$, on a alors $x^T Bx = a \int_0^1 |X|^2 dx = a \|X\|_{L^2([0,1])}^2$, qui est strictement positive si on impose que $a \in \mathbb{R}_*^2$. Donc avec cette nouvelle hypothèse on a bien que B est une matrice définie positive, et symétrique aussi.

Pour la matrice A on utilisera la même méthode. Soit $x \in \mathbb{R}^{N+2}$ non nul. On a :

$$x^T Ax = \sum_{i=0}^{N+2} \sum_{j=0}^{N+2} x_i x_j \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{N+2} x_i \varphi_i'(x) \right) \left(\sum_{j=0}^{N+2} x_j \varphi_j'(x) \right) dx$$

Si on pose $X = \sum_{i=0}^{N+2} x_i \varphi_i'$, on a alors $x^T Ax = \int_0^1 |X|^2 dx = a \|X\|_{L^2([0,1])}^2$ qui est toujours positive mais on ne peut pas assurer la stricte positivité car les dérivées des fonctions chapeau peuvent éventuellement être nulles. Donc on conclut que A est symétrique semi-définie positive.

Grâce à ces deux résultats on peut conclure que la matrice $A + B$ est symétrique définie positive et donc elle est inversible, ce qui implique que l'équation matricielle $(A + B)U = L$ admet une unique solution $U \in \mathbb{R}^{N+2}$ définie par $U = (A + B)^{-1}L$.

3.3 Passage aux fonctions de base locales, Méthode d'Éléments Finis

Maintenant on va noter les matrices A_T et B_T les matrices élémentaires définies sur un des maillages $T = [x_k, x_{k+1}]$ par :

$$(A_T)_{ij} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx$$

$$(B_T)_{ij} = a \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_i(x) \phi_j(x) dx, \quad i, j = 1, 2$$

Où les fonctions $(\phi_j)_{j=1,2}$ sont des fonctions de base locales définies sur chaque maille de $[0, 1]$.

Pour trouver ces fonctions de base on va définir le triplet $(T_k, \mathbb{P}^1, \Sigma)$, avec :

- $T_k = [x_k, x_{k+1}]$
- $\mathbb{P}^1 := \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(1, X)\}$
- $\Sigma := \{\sigma_1(p) = p(x_k); \sigma_2(p) = p(x_{k+1})\}$

On doit remarquer que $\dim(\mathbb{P}^1) = 2$ et que $\text{card}(\Sigma) = 2$, donc on a bien que $\dim(\mathbb{P}^1) = \text{card}(\Sigma)$ qui est une condition nécessaire pour que notre triplet soit un élément fini. Maintenant passons à montrer l'unisolvance de Σ , qui dans cette situation revient à montrer que l'unique polynôme $p \in \mathbb{P}^1$ qui vérifie $\sigma_1(p) = \sigma_2(p) = 0$ est le polynôme nul. On observe que dans ce cas on obtiendra un système de 2 équations et deux inconnues tel que :

$$\begin{cases} ax_k + b = 0 \\ ax_{k+1} + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ce système est facile à résoudre en utilisant par exemple la méthode de réduction sur nos deux premières équations. Donc finalement on est arrivés à la conclusion de que le seul polynôme qui vérifie ce système est le polynôme nul, donc on a bien montré l'unisolvance de Σ , ce qui implique que $(T_k, \mathbb{P}^1, \Sigma)$ est bien un élément fini.

Passons maintenant à trouver une base canonique $(\phi_j)_{j=1,2}$ au triplet. Par définition on doit avoir que :

$$\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{P}^1 \text{ telles que } \sigma_1(\phi_1) = 1; \sigma_2(\phi_1) = 0; \sigma_1(\phi_2) = 0; \sigma_2(\phi_2) = 1$$

Et donc pour trouver cette base on doit juste résoudre ces deux systèmes d'équations :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1 x_k + b_1 = 1 \\ a_1 x_{k+1} + b_1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -1/h \\ b_1 = x_{k+1}/h \end{cases} \\ \begin{cases} a_2 x_k + b_2 = 0 \\ a_2 x_{k+1} + b_2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 1/h \\ b_2 = -x_k/h \end{cases} \end{aligned}$$

Ces deux systèmes sont faciles à résoudre avec une des méthodes typiques comme par exemple la réduction. Et donc on conclut que les fonctions $\phi_1(x) = \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}$ et $\phi_2(x) = \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$, définissent bien une base canonique de l'élément fini $(T_k, \mathbb{P}^1, \Sigma)$.

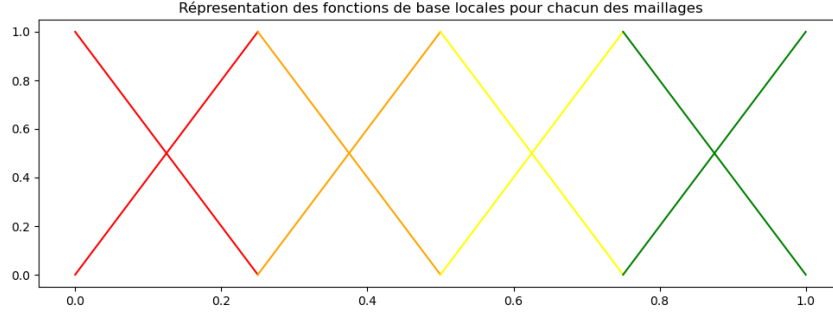


FIGURE 3 – Fonctions de base locales pour un maillage de 5 points. Par exemple en rouge on a ϕ_1 et ϕ_2 pour $[0, 0.25]$

3.4 Calcul des matrices A_T et B_T

Alors maintenant on peut calculer les éléments des matrices A_T et B_T , pour faire ça on doit voir les dérivées de ϕ_1 et ϕ_2 qui sont définies par :

$$\phi_1'(x) = \frac{-1}{h}; \quad \phi_2'(x) = \frac{1}{h}$$

Et donc pour la matrice A_T on trouve que :

$$\begin{aligned} A_T &= \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1'(x) \phi_1'(x) dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2'(x) \phi_1'(x) dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2'(x) \phi_2'(x) dx \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx & \frac{-1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \\ \frac{-1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx & \frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour la matrice B_T on doit d'abord calculer les termes de la partie triangulaire supérieure de cette matrice, alors on fera :

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1(x) \phi_1(x) dx &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} -(x_{k+1} - x)^2 dx = \frac{-1}{h^2} \left(\frac{(x_{k+1} - x)^3}{3} \right) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{-1}{h^2} \left(-\frac{h^3}{3} \right) = \frac{h}{3} \\
\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1(x) \phi_2(x) dx &= \frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)(x - x_k) dx = \\
&= \frac{1}{h^2} \left((x_{k+1} - x) \frac{(x - x_k)^2}{2} \right) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)^2 dx = \\
&= \frac{1}{2h} \left(\frac{(x - x_k)^3}{3} \right) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{h}{6} \\
\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2(x) \phi_2(x) dx &= \frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)^2 dx = \frac{1}{h^2} \left(\frac{(x - x_k)^3}{3} \right) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{h}{3}
\end{aligned}$$

Et donc pour la matrice B_T on trouve que :

$$B_T = \frac{ah}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 Assemblage de la matrice A et la matrice B , exemple pratique.

Dans cette section on effectuera un assemblage pour les matrices A et B avec un maillage sur $[0, 1]$ de 5 points comme montré dans la figure 1. On notera $x_1 = 0$; $x_2 = 0.25$; $x_3 = 0.5$; $x_4 = 0.75$; $x_5 = 1$ les sommets qui définissent notre MEF, avec $[1, 0] = \bigcup_{i=1}^4 T_i = [x_i, x_{i+1}]$, on notera T cette partition du domaine. Donc on aura que $A, B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, de coefficients définis par :

$$\begin{aligned}
\forall i, j = 1, \dots, 5, \quad A_{ij} &= \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \sum_{T_k \in T} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \\
&= \sum_{T_k \in T | (x_j, x_j) \in T} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi'_{T_i}(x) \phi'_{T_j}(x) dx \\
B_{ij} &= a \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \sum_{T_k \in T} a \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \\
&= \sum_{T_k \in T | (x_j, x_j) \in T} a \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_{T_i}(x) \phi_{T_j}(x) dx
\end{aligned}$$

Ici on utilise T_i , T_j pour indiquer qu'on parle des indices correspondants aux fonctions de base locales nécessaires. De façon un peu approximée, ce qu'on

veut dire c'est que si on identifie les lignes et colonnes de la matrice A , avec les coordonnées globales des sommets de notre maillage (si $i = j$) et avec des segments (si $i \neq j$), calculer la valeur de A_{ij} revient à sommer la valeur des matrices locales A_T pour les maillages qui contiennent ces points/segments. Et donc finalement on aura, dans notre exemple :

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{ah}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

3.6 Cas pratique

Ici on va chercher une solution numériquement par une MEF avec $\mathbb{P}^1 - Lagrange$ pour le problème.

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x^2 - x - 2, \text{ dans } [0, 1] \\ u'(0) = u'(1) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

On a que $a = 1$, $\alpha = 1$ et le terme à droite est bien de carré intégrable sur $[0, 1]$. Donc on est bien posées sur les critères établis dans les sections précédentes pour l'étude de cette type de problèmes.

Pour la FEM, on va utiliser un maillage uniforme sur $[0, 1]$, de taille $h = 0.25$. D'après les calculs ci-dessus et une fois appliqué l'algorithme d'assemblage implementé dans le code . On doit obtenir les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Une fois on a obtenu les matrices, on doit maintenant calculer le vecteur $L \in \mathbb{R}^5$, qu'on avait défini plus haut par $L_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx + \alpha(\varphi_i(1) + \varphi_i(0)), \forall i = 1, \dots, 5$. Donc on trouve en substituant chaque chose par sa valeur correspondant :

$$L = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx + 1 \\ \int_0^1 f(x)\varphi_2(x)dx \\ \int_0^1 f(x)\varphi_3(x)dx \\ \int_0^1 f(x)\varphi_4(x)dx \\ \int_0^1 f(x)\varphi_5(x) + 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de ces intégrales est assez facile de faire, car il s'agit des polynômes, le seule problème c'est la longueur pour faire ce calcul à la main. Alors on va utiliser une méthode numérique pour les calculer. Plus précisément on va utiliser la méthode du trapeze, qui est déjà implementé dans la bibliothèque de Python `scipy.integrate`. En l'utilisant on obtient des valeurs pour le vecteur L et donc maintenant notre système est déjà bien défini. On peut résoudre $(A + B)U = L$, pour faire ça et car la taille des matrices est encore assez petite dans cet exemple on utilisera directement la méthode implementé dans la bibliothèque de Python `numpy.linalg`. Dans la figure suivante on peut observer la solution exacte de notre problème (3) et deux solutions approchées par une MEF de maillages de taille $h = 0.25$ et $h = 0.1$

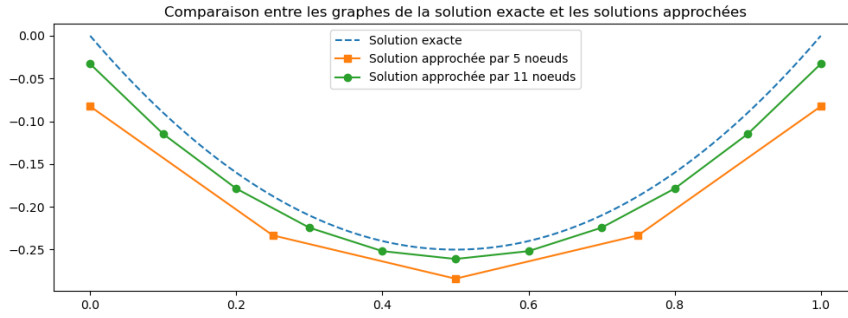


FIGURE 4 – Comparation des graphes de la solution exacte et les solutions approchées obtenues par la MEF décrite dans cette section.

4 Implementation sur FEniCSx pour un problème en 1D et 2D

4.1 Problèmes polynômiales en 1D et 2D

On va utiliser le même problème (3) utilisé dans la section précédente pour effectuer son implementation sur le logiciel de calcul des EDP par méthode d'éléments finis FEniCSx. On rappelle que le problème était :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = x^2 - x - 2, \text{ dans } [0, 1] \\ u'(0) = u'(1) = 1 \end{cases}$$

Pour le cas 2D on va étudier le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + u(x, y) = x^2 + y^2 - 4, \text{ dans }]0, 1[^2 \\ \nabla u \cdot n(x, y) = g(x, y), \text{ sur } \partial([0, 1]^2) \end{cases} \quad (4)$$

Avec $g(x, y) = 2$ si $x = 1$ ou $y = 1$ et $g(x, y) = 0$ si $x = 0$ ou $y = 0$. Dans les deux cas on connaît la solution et on a donc que :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - x \\ u(x, y) &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Sont les solutions des problèmes (3) et (4) respectivement. En effet dans les figures suivantes on pourra observer une comparaison entre les graphiques de la solution exacte et celles obtenues par la MEF. En regardant les graphiques

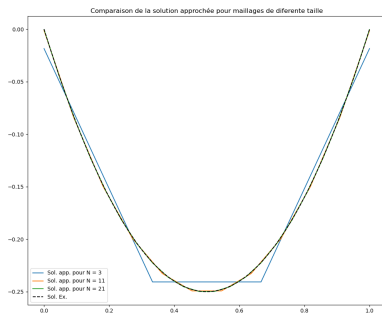


FIGURE 5 – Graphique des solutions approchées pour le problème (3) par une MEF avec $\mathbb{P}^1 - \text{Lagrange}$ pour maillages différentes.

des solutions exactes et celles des solutions approchées on peut avoir l'impression de que les solutions approchées convergent vers la solution exacte,

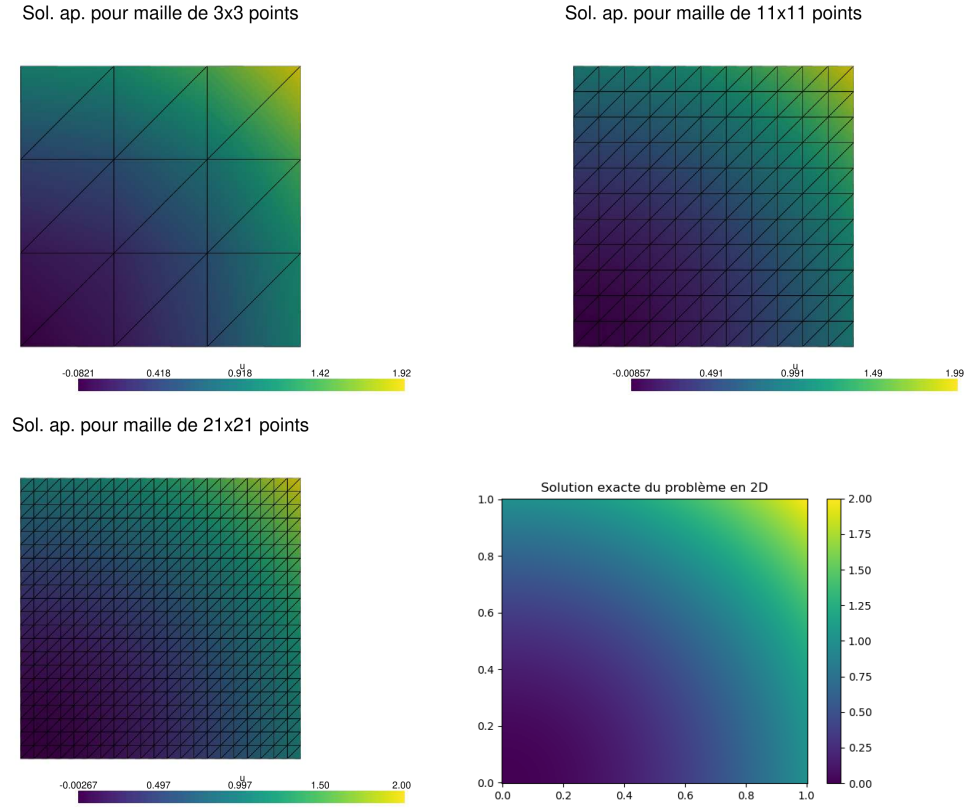


FIGURE 6 – Graphique des solutions approchées par une pour le problème (4) MEF avec \mathbb{P}^1 –*Lagrange* pour maillages différents. Et la solution exacte dans la dernière image.

ce qui est bien le cas. Mais dans les figures suivantes on pourra observer que les droites de convergence des erreurs semblent indiquer le contraire quand on utilise un espace polynômiale supérieur à \mathbb{P}^1 . On observe dans les figures 7 et 8 que si notre espace de polynômes est supérieur à 1, l'erreur ne semble pas converger, ce qui devrait indiquer qu'il y a, bien un erreur dans le code où dans l'étude théorique du problème plus général. Mais une fois on observe de plus proche les valeurs de l'erreur, on verra que dans les deux cas l'erreur plus petit comis dans l'espace \mathbb{P}^2 est de l'ordre $1 \cdot 10^{-14}$, et on rapelle que c'est erreur est calculé sur la racine carrée de l'intégrale de la différence entre la solution approchée et la solution exacte, donc ça implique qu'on parle d'une difference plus petite que quelque chose de l'ordre $1 \cdot 10^{-28}$ ce qui dépasse la précision de la machine et donc qui cause que les pentes des erreurs ne soient pas celles qu'on attend.

On peut expliquer une telle précision en observant que pour les deux problèmes,

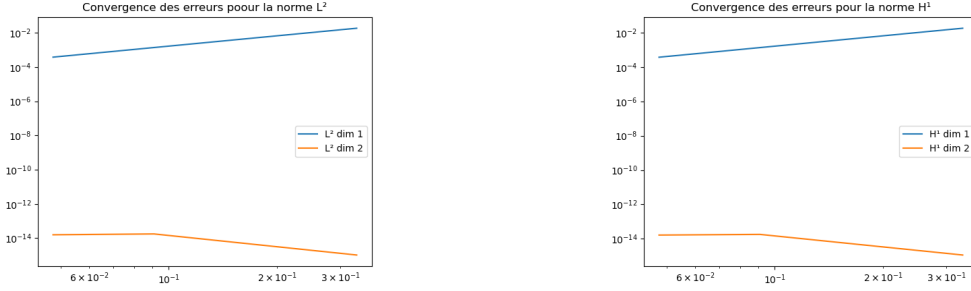


FIGURE 7 – Convergence des erreurs du problème (3) pour les normes $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{H^1}$, avec $\mathbb{P}^1 - Lagrange$ et $\mathbb{P}^2 - Lagrange$

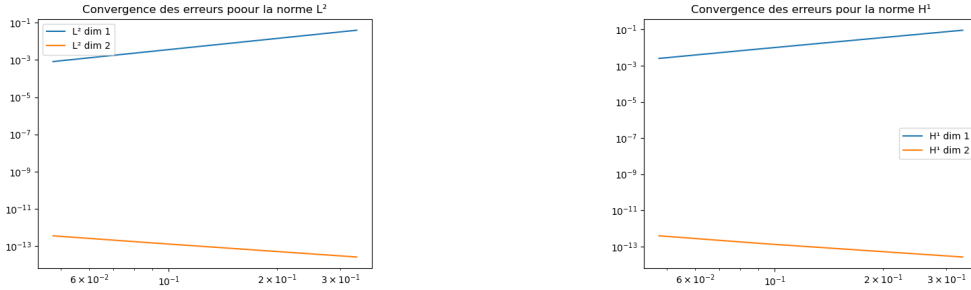


FIGURE 8 – Convergence des erreurs du problème (4) pour les normes $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{H^1}$, avec $\mathbb{P}^1 - Lagrange$ et $\mathbb{P}^2 - Lagrange$

leurs solutions habitent dans l'espace \mathbb{P}^2 , et donc une fois on applique une MEF avec $\mathbb{P}^i - Lagrange, i \geq 2$, on est en train de chercher la propre solution dans cette espace.

4.2 Problèmes sans polynômes en 1D et 2D

Vu les facilités que posent les solutions polynômiales maintenant on va essayer de résoudre numériquement deux nouveaux problèmes, un en 1D et un autre en 2D dont leur solution n'est pas un polynôme. Ils sont définies par :

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = 2 \exp(x)(\sin(x) - \cos(x)), \text{ dans }]\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi[\\ -u'(\frac{3}{4}\pi) = u'(\frac{7}{4}\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + 4\pi^2 u(x, y) = 0, \text{ dans } \Omega =]-2, -1.7[\times]1, 2.3[\\ \nabla u \cdot n(x, y) = g(x, y), \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

Avec la fonction g définie telle que :

$$g(x, y) = \begin{cases} 2\pi \exp(-3, 4\pi), & \text{si } x = -1.7 \\ 2\pi \exp(-4.6\pi), & \text{si } y = 2.3 \\ -2\pi \exp(-4\pi), & \text{si } x = -2 \\ -2\pi \exp(-2\pi), & \text{si } y = 1 \end{cases}$$

On connaît les solutions à ces deux problèmes qui sont données par :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin(x) \exp(x) \\ u(x, y) &= \exp(2\pi x) - \exp(-2\pi y) \end{aligned}$$

Et une autre fois en observant les graphiques des solutions approchées et celles des solutions exactes, on a aussi l'intuition de que la méthode est bien implémenté et que elle converge et cette fois on peut vraiment le vérifier avec les graphes de convergence des erreurs avec différents dimensions de l'espace de polynômes choisi.

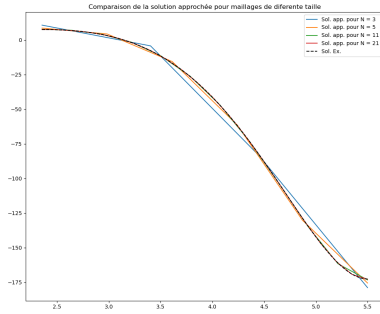


FIGURE 9 – Graphique des solutions approchées pour le problème (5) par une MEF avec $\mathbb{P}^1 - \text{Lagrange}$ pour maillages différentes.

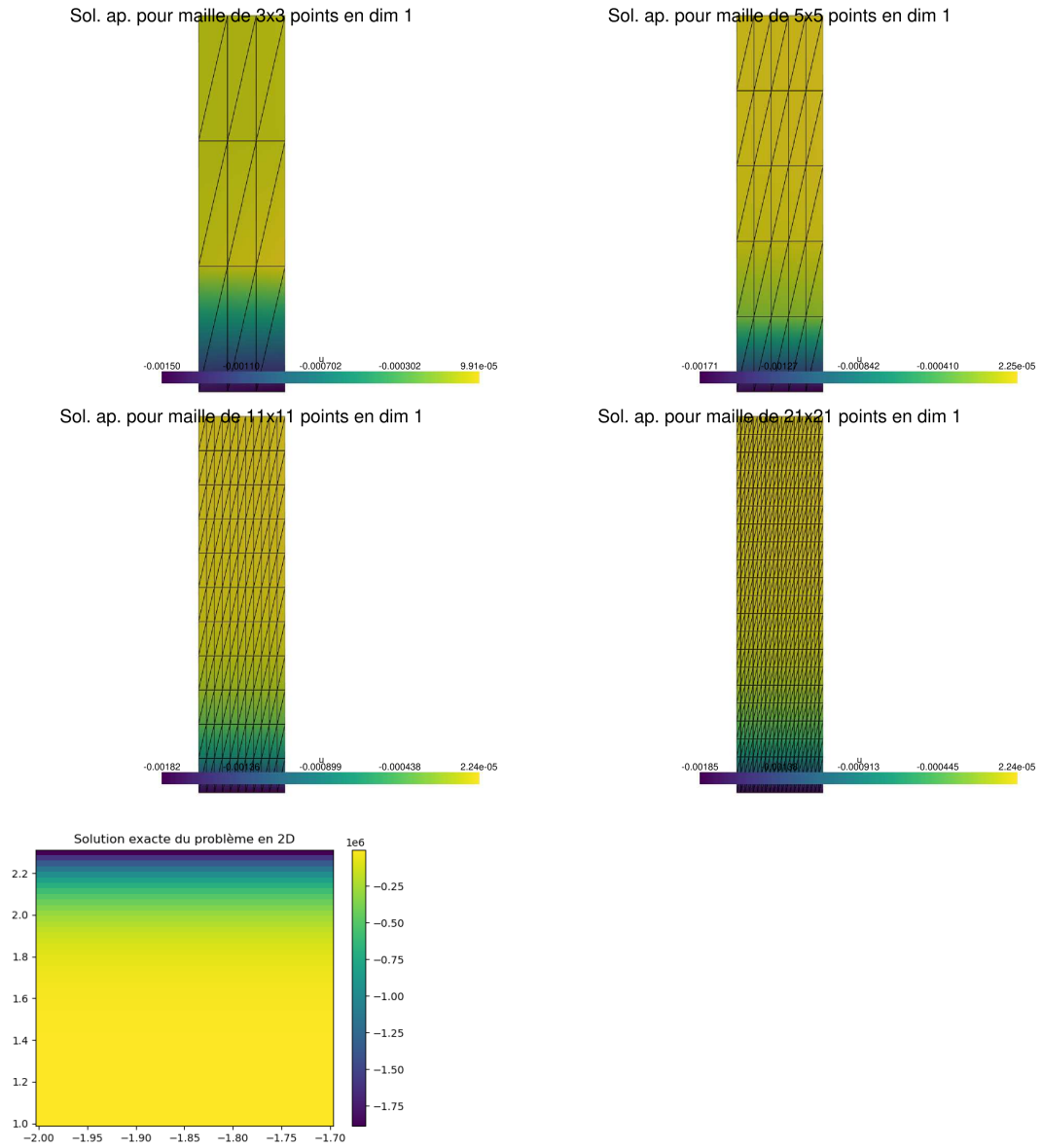


FIGURE 10 – Graphique des solutions approchées par une pour le problème (6) MEF avec \mathbb{P}^1 –*Lagrange* pour maillages différents. Et la solution exacte dans la dernière image.

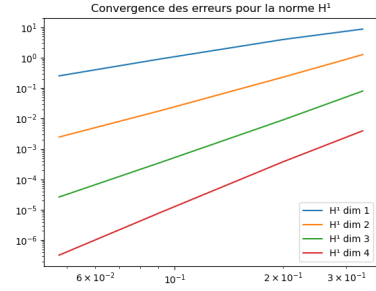
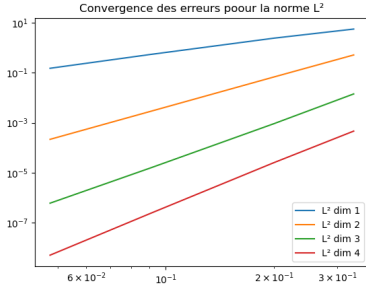


FIGURE 11 – Convergence des erreurs du problème (5) pour les normes $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{H^1}$, avec $\mathbb{P}^1 - Lagrange$ et $\mathbb{P}^2 - Lagrange$

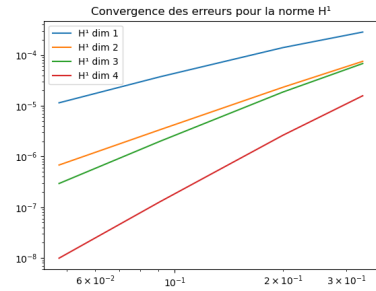
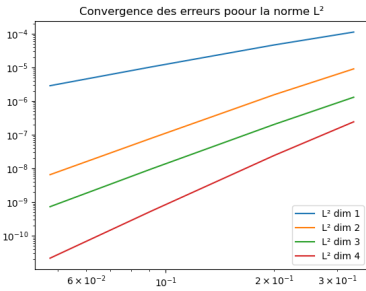


FIGURE 12 – Convergence des erreurs du problème (6) pour les normes $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{H^1}$, avec $\mathbb{P}^1 - Lagrange$ et $\mathbb{P}^2 - Lagrange$