Universidad de San Andrés

Práctica 5: Polinomio de Taylor

Recordar: Sea f una función n veces derivable en $x = x_0$. El polinomio de Taylor de f de orden n desarrollado en $x = x_0$ está dado por la fórmula

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

---

1. Escribir los siguientes polinomios en potencias de $(x - x_0)$ para los x_0 indicados.
   (a) $p(x) = -3x^4 + x^2 + x$; para $x_0 = 1$ y $x_0 = -2$.
   (b) $p(x) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2$; para $x_0 = -1$ y $x_0 = 0$.

2. (a) Reconstruir el polinomio $p(x)$ de grado 3 del que se sabe que $p(0) = 2$, $p'(0) = 3$, $p''(0) = 6$ y $p'''(0) = -4$.
   (b) Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2 tal que $q(2) = -1$, $q'(2) = 3$ y $q''(2) = 4$. Expresar dicho polinomio en potencias de $(x - 2)$.
   (c) Expresar el polinomio $q(x)$ del ítem anterior en la forma habitual, es decir en potencias de x.

3. Sea $q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.
   (a) Hallar los polinomios de Taylor de q en $x = 0$ de orden 1 a 5.
   (b) Hacer lo mismo, sin hacer las cálculos, para $p(x) = x^{10} + x^7 + x^3 + x^2 + 3$.

4. Hallar el polinomio de Taylor de las siguientes funciones hasta el orden indicado en el punto dado.
   (a) $f(x) = (1+x)^3$, orden 4, $x = 0$.
   (b) $f(x) = \ln(x)$, orden 5, $x = 1$.
   (c) $f(x) = \ln(1+x)$, orden 5, $x = 0$.
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, orden 4, $x = 0$.
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, orden 3, $x = 0$.
   (f) $f(x) = \sin(2x)$, orden 4 y 5, $x = 0$.
   (g) $f(x) = \cos(3x)$, orden 4, $x = 0$.
   (h) $f(x) = \sqrt{2x}$, orden 3, $x = 2$.
   (i) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, orden 3, $x = 0$.
   (j) $f(x) = e^{3x-3}$, orden 3, $x = 1$.
   (k) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \frac{2}{x-4}$, orden 2, $x = 5$.

5. En cada caso, aproximar el valor pedido usando del ejercicio anterior el polinomio Taylor calculado para una f adecuada. Elegir un $\tilde{x}$ apropiado para la evaluación. Por ejemplo, para el ítem (i) toma el polinomio de $f(x) = (1+x)^3$ desarrollado en $x = 0$ y evaluarlo en $\tilde{x} = 0.02$. Comparar en cada caso con el valor que arroja la calculadora.
   (i) $(1.02)^3$
   (ii) $\ln(1.1)$
   (iii) $\sin(0.5)$
   (iv) $\sqrt{4.2}$
   (v) $\sqrt[3]{0.5}$
   (vi) e^{-1}

6. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 2$ es $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x + 3$.
   (a) Calcular $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$.
   (b) Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2 f(x^4 + 1)$. Calcular $h(-1)$, $h'(-1)$ y $h''(-1)$.
   (c) Dar el polinomio de taylor de orden 2 de h en $x = -1$.

7. Sea f una función tres veces derivable tal que su polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $x = 1$ es
$$p_3(x) = -1 + (x-1) - 2(x-1)^2 + (x-1)^3.$$
Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 1$ de $g(x) = (3f(x) + 1)x^2$.

8. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 0$ es $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7$.
   (a) Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.
   (b) ¿Se puede conocer el valor de $f^{iv}(0)$? Si se sabe que $p(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 4 de f desarrollado en $x = 0$, ¿cuánto vale $f^{iv}(0)$?
   (c) Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x^2 - 3x + 2)$. Asumiendo que $p(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 4 de f en $x = 0$, dar el polinomio de Taylor de orden 4 de $h(x)$ desarrollado en $x = 2$.

9. Sea $p(x) = x^3 - 3x^2 + x$, el polinomio de Taylor de orden 3 de una función f alrededor de $x_0 = 2$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $g(x) = e^{f(x)+2}$ alrededor de $x_0 = 2$.

10. Sean p y q los polinomios de Taylor de orden 2 de f y g respectivamente, desarrollados en $x = -1$:
$$p(x) = 3(x+1)^2 - 2(x+1) + 4, \qquad q(x) = 2(x+1)^2 - 1.$$
Hallar el polinomio de Taylor de orden 2, desarrollado en $x = -1$ de
    (a) $f(x) + 3g(x)$,
    (b) $f(x)g(x)$,
    (c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$,
    (d) $f(2x+1) - g(4x+3)$.

11. Sean f y g dos funciones 3 veces derivables tales que el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de $x = 2$ es
$$p(x) = -x^2 + 6x - 7$$
y el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de $x = 1$ es
$$q(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}.$$
Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $h(x) = (g \circ f)(x)$ alrededor de $x_0 = 2$.

12. Sea $p(x) = x^2 - 3x + 3$, el polinomio de Taylor de orden 2 de una función f alrededor de $x_0 = 2$. Sea g una función dos veces derivable tal que $(g \circ f)(x) = -x^2$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de $x = 1$.

13. Hallar todos los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = (1 + bx)e^{ax}$ en $x = 0$ sea $p(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2$.

14. Determine los valores de a y b para que el polinomio de Taylor de $f(x) = \ln(1+x)+ax^2+bx$ desarrollado en $x = 0$ empiece con la potencia de x de exponente lo más grande posible. ¿Con qué potencia empieza el polinomio buscado?

15. Determinar $a, b > 0$ para que $p(x) = 4x^2 - \frac{1}{6}x^4$ sea el polinomio de Taylor de orden 4 en $x = 0$ de la función $f(x) = a\sin^2(bx)$.

16. Determinar todos los valores de $a \neq 0$ para que el polinomio de Taylor centrado en $x = 1$ de la función $f(x) = ae^{a(x-1)^2} + a(x-1)^2 - a$ comience con la potencia más alta posible. ¿Cuál es dicha potencia?

17. Hallar a y b para que los polinomios de Taylor de orden 2 centrados en $x = 0$ de las funciones
$$f(x) = \ln(ax^2 + 1) + \frac{x}{2},$$
$$g(x) = \frac{x^2 - 2}{x + b} + \frac{2}{b}$$
sean iguales.