Trabajo en teoría de Gráficas

Definiciones

En este trabajo se consideran gráficas simples, finitas, sin lazos.

Definición 0.1. Una gráfica G consta de dos conjuntos $G = (V, E)$, donde V es un conjunto cualquiera y $E \subset \{\{u, v\} \subset V \mid u \neq v\}$. El conjunto V o $V(G)$ es llamado conjunto de vértices de la gráfica G. Los elementos de E o $E(G)$ se llaman aristas de la gráfica G.

Definición 0.2. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Si $u, v \in V(G)$ son tal que $\{u, v\} \in E(G)$, decimos que u y v son adyacentes. Se denota tal adyacencia por $u \sim v$.

Definición 0.3. Sea G una gráfica. Una subgráfica de G es una gráfica H tal que $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$.

Definición 0.4. Sea G una gráfica y H una subgráfica de G. H es una subgráfica inducida si para todo $u, v \in V(H)$ tales que $u \sim v$ en G entonces $u \sim v$ en H.

Se entiende que una subgráfica completa H_n tiene cada par de sus n vértices adyacentes. Dicha gráfica completa es maximal si no existe otro vértice en la gráfica tal que forme una completa más grande. Lo anterior da paso a la siguiente definición.

Definición 0.5 (Harary 1969)**.** Un clan de G es una subgráfica completa maximal.

Definición 0.6 (Roberts and Spencer 1971)**.** Dado G una gráfica, sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sus clanes. Definimos H' mediante $V(H') = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ y $\left\{C_i, C_j\right\} \in E(H')$ si y solo si $i \neq j$ y $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Entonces, llamamos a H' como la gráfica de clanes de G y escribimos $H' = K(G)$.

Definición 0.7 (Alcón 2006)**.** Sea G una gráfica y $v \in V(G)$. Como es habitual, $G - v$ denota la gráfica inducida por $V(G) \setminus \{v\}$.

El vértice v es clan crítico si $K(G) \neq K(G - v)$. Una gráfica G es clan crítica si cada uno de sus vértices es crítico.

Resultados

En el siguiente teorema se consideran las gráficas $G(4, 3, 3)$, que denota a la gráfica con 4 vértices, 3 aristas, número 3; y la gráfica $G(5, 7, 1)$, que denota la gráfica de 5 vértices, 7 aristas, número 1. Dichas gráficas son extraídas del apéndice de gráficas en Harary (1969).

Teorema 0.8. Sea G una gráfica clan crítica tal que su gráfica de clanes es K_3, entonces G es la gráfica $G(4, 3, 3)$ ó $G(5, 7, 1)$.

Demostración. Sea G una gráfica clan crítica tal que $K(G) = K_3$. Al ser $K(G) = K_3$ entonces existen C_1, C_2, C_3 clanes de G, representados como los vértices de K_3, tal que se intersecan de alguna manera, más aún, cada par de clanes se interseca en al menos un vértice de G, es decir

$$C_i \cap C_j \neq \emptyset, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j.$$

Sea u_1 el vértice de G en el que se intersecan necesariamente los tres clanes de G, es decir $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{u_1\}$, veamos que esto es así.

Supongamos que no existe un vértice u_1 que pertenezca simultáneamente a los tres clanes, es decir $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \emptyset$. Bajo este supuesto, cada intersección $C_i \cap C_j$ contiene al menos un vértice, pero no hay un vértice común a todos. Esto significa que podemos elegir un vértice v en una de estas intersecciones y eliminarlo sin afectar la estructura de $K(G)$, ya que los otros clanes seguirán intersecándose en otros vértices. Esto contradice la propiedad de clan crítica, pues existiría un vértice cuya eliminación no cambiaría la gráfica de clanes. Por lo tanto, necesariamente debe existir al menos un vértice u_1 tal que

$$C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{u_1\}.$$

Para dichas intersecciones, resultan los siguientes casos a considerar.

- Caso 1. Los clanes de G se intersecan únicamente en el vértice u_1, es decir $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{u_1\}$ y $(C_1 \cap C_3) \setminus C_2 = \{\emptyset\}$ y $(C_2 \cap C_3) \setminus C_1 = \{\emptyset\}$, como se muestra en la figura 1.

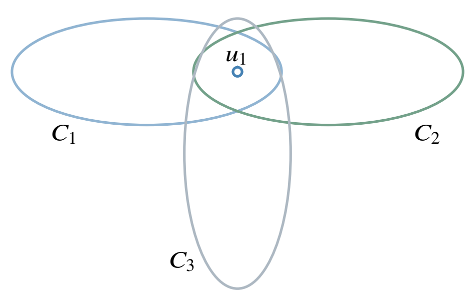

Figura 1. Esquema de los clanes de la gráfica G correspondiente al caso 1.

  De primera instancia, los tres clanes pueden ser tales que $|C_i| = n$ con $i = 1, 2, 3$, considerando el vértice u_1 claramente; sin embargo, de considerar un $n > 2$, la gráfica G no cumpliría la condición de ser clan crítica, pues resultaría que $K(G) = K(G - \hat{u})$, para cualquier $\hat{u} \in V(C_i)$ y $\hat{u} \neq u_1$. Por lo tanto cada clan consta únicamente de dos vértices, uno de ellos u_1, con lo cual la gráfica $G = G(4, 3, 3)$, la cual cumple que $K(G) = K_3$.

- Caso 2. Existe una intersección dos a dos entre los clanes, de más de un vértice, considerando el vértice u_1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el clan C_3

interseca al clan C_1 en un vértice $u_2 \in V(G)$, así como a C_2 en un vértice $u_3 \in V(G)$, esto es

$$\{u_2\} = (C_1 \cap C_3) \setminus C_2 \quad \text{y} \quad \{u_3\} = (C_2 \cap C_3) \setminus C_1.$$

Como se muestra en la figura 2.

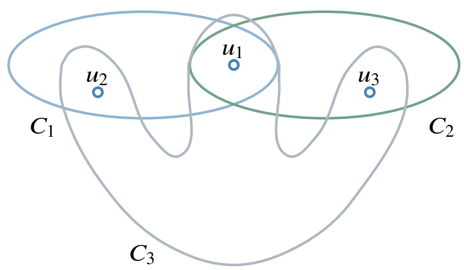

Figura 2. Esquema de los clanes de la gráfica G correspondiente al caso 2.

Los clanes C_1 y C_2 no pueden ser tales que están constituidos únicamente de dos vértices, veamos que esto es así. Supongamos que $|C_1| = 2$ y $|C_2| = 2$, con lo cual $\{\{u_2, u_1\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}\} \subset E(G)$, de esta manera, las únicas aristas de G entre los clanes serían aquellas en C_3 que conectan u_1 con u_2 y u_3. Sin embargo, en este caso al eliminar cualquier vértice en C_3 que no sea u_1, u_2, u_3, la gráfica de clanes seguiría siendo K_3, lo que contradice la propiedad de G de ser clan crítica. Como los clanes C_1 y C_2 no pueden tener solo dos vértices, deben tener al menos tres. Siguiendo este razonamiento, se puede concluir que $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 3$, lo que da lugar a la gráfica $G = G(5, 7, 1)$ y es claro que $K(G) = K_3$.

- Caso 3. Los clanes de G se intersecan en el vértice u_1 y sólo existe otra intersección entre dos de estos clanes. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los clanes C_1 y C_3 se intersecan en un vértice u_2 de G y $(C_2 \cap C_3) \setminus C_1 = \{\emptyset\}$, como se muestra en la figura 3.

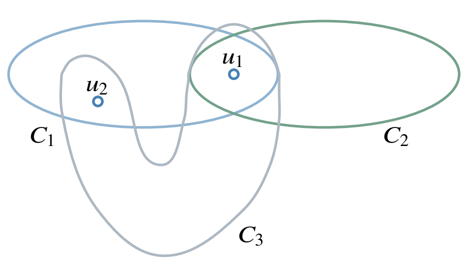

Figura 3. Esquema de los clanes de la gráfica G correspondiente al caso 3.

Dado que G es clan crítica, se sigue que la eliminación de cualquier vértice de G cambia la estructura de su gráfica de clanes $K(G)$. Utilizando un argumento similar al del caso anterior, se concluye que $C_1 = C_3 = K_3$, pues de no ser así, no se satisface la hipótesis de ser G clan crítica. Si alguno de estos clanes tuviera menos de tres vértices, entonces existiría un vértice $\hat{u}$ en C_1 ó C_3 cuya eliminación no cambiaría la estructura de $K(G)$, lo que contradice la definición de clan crítica.

Sea $u_3 \in V(C_3)$ tal que $u_3 \neq u_1, u_2$ y que satisface la inclusión $\{\{u_2, u_1\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}\} \subset E(G)$. El clan C_2 debe estar constituido de más de dos vértices, pues de no ser así, consideremos un nuevo vértice $\hat{u} \neq u_1$ en C_2, ver figura 4.

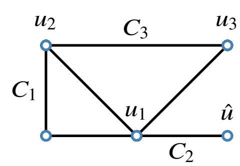

Figura 4. Esquema de los vértices y clanes de la gráfica G correspondiente al caso 3, suponiendo que C_2 cuenta únicamente con dos vértices.

En tal caso se cumple que $K(G - u_2) = K(G)$, situación que no es válida. Con lo cual $|C_2| > 2$ y se consideran los siguientes dos casos.

- Caso 3.1. El vértice $u_3 \notin V(C_2)$, entonces para todo $\overline{u} \in V(C_2) \setminus \{u_1\}$ se tiene que $K(G - \overline{u}) = K(G)$, lo que implica que este caso no es posible, pues la eliminación de cualquier vértice de C_2, excepto u_1, no provoca un cambio en la estructura de K_3, lo que contradice la hipótesis de clan crítica.
- Caso 3.2. El vértice $u_3 \in V(C_2)$. Este caso se reduce al caso 2, con lo cual $G = G(5, 7, 1)$ y por lo tanto $K(G) = K_3$.

Resulta entonces que G es la gráfica $G(4, 3, 3)$ ó $G(5, 7, 1)$. $\square$

Bibliografía

Alcón, L. (2006). Clique-critical graphs: Maximum size and recognition. *Discrete applied mathematics*, 154(13):1799–1802.

Harary, F. (1969). *Graph theory*. CRC Press, Boca Raton. `https://doi.org/10.1201/9780429493768`.

Roberts, F. S. and Spencer, J. H. (1971). A characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 10(2):102–108.