# Trabajo en teoría de Gráficas

# Capítulo 1

# Gráficas clan críticas y gráficas de clanes

## 1.1. Definiciones

En este trabajo se consideran gráficas simples, finitas, sin lazos y conexas.

**Definición 1.1.** Una gráfica $G$ consta de dos conjuntos $G = (V, E)$, donde $V$ es un conjunto cualquiera y $E \subset \{\{u, v\} \subset V \mid u \neq v\}$. El conjunto $V$ o $V(G)$ es llamado conjunto de vértices de la gráfica $G$. Los elementos de $E$ o $E(G)$ se llaman aristas de la gráfica $G$.

**Definición 1.2.** Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Si $u, v \in V(G)$ son tal que $\{u, v\} \in E(G)$, decimos que $u$ y $v$ son adyacentes. Se denota tal adyacencia por $u \sim v$.

**Definición 1.3** (Harary 1969)**.** Un camino de una gráfica $G$, es una sucesión de vértices $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n$, tales que existe una adyacencia de cada uno de los vértices con el vértice inmediato anterior y el inmediato siguiente. Se suele denotar tal camino como $u_0u_n-$camino.

**Definición 1.4** (Harary 1969)**.** Una gráfica es conexa si cada par de vértices está unido por un camino.

Se define una gráfica disconexa, a la gráfica que no es conexa.

**Definición 1.5.** Sea $G$ una gráfica. Un ciclo de G es un $uv-$camino que es cerrado, es decir, que se satisface que $u = v$.

**Definición 1.6** (Harary 1969)**.** Una gráfica es acíclica si no tiene ciclos. Un árbol es una gráfica acíclica conexa.

**Definición 1.7.** Sea $G$ una gráfica. Una subgráfica de $G$ es una gráfica $H$ tal que $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$.

**Definición 1.8.** Sea $G$ una gráfica y $H$ una subgráfica de $G$. $H$ es una subgráfica inducida si para todo $u, v \in V(H)$ tales que $u \sim v$ en $G$ entonces $u \sim v$ en $H$.

Se entiende que una subgráfica completa $H_n$ tiene cada par de sus $n$ vértices adyacentes. Dicha gráfica completa es maximal si no existe otro vértice en la gráfica tal que forme una completa más grande. Lo anterior da paso a la siguiente definición.

**Definición 1.9** (Harary 1969)**.** Un clan de $G$ es una subgráfica completa maximal.

**Definición 1.10** (Roberts and Spencer 1971)**.** Dado $G$ una gráfica, sean $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sus clanes. Definimos $H'$ mediante $V(H') = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ y $\left\{q_i, q_j\right\} \in E(H')$ si y solo si $i \neq j$ y $q_i \cap q_j \neq \emptyset$. Entonces, llamamos a $H'$ como la gráfica de clanes de $G$ y escribimos $H' = K(G)$.

**Definición 1.11** (Alcón 2006)**.** Sea $G$ una gráfica y $v \in V(G)$. Como es habitual, $G - v$ denota la gráfica inducida por $V(G) \setminus \{v\}$.

**Definición 1.12** (Escalante and Toft 1974)**.** El vértice $v$ es clan crítico si $K(G) \neq K(G-v)$. Una gráfica $G$ es clan crítica si cada uno de sus vértices es crítico.

## 1.2. Resultados

En el siguiente teorema se consideran las gráficas $G(4, 3, 3)$, que denota a la gráfica con 4 vértices, 3 aristas, número 3; y la gráfica $G(5, 7, 1)$, que denota la gráfica de 5 vértices, 7 aristas, número 1. Dichas gráficas son extraídas del apéndice de gráficas en Harary (1969).

**Teorema 1.13.** Sea $G$ una gráfica clan crítica tal que su gráfica de clanes es $K_3$, entonces $G$ es la gráfica $G(4, 3, 3)$ ó $G(5, 7, 1)$.

*Demostración.* Sea $G$ una gráfica clan crítica tal que $K(G) = K_3$. Al ser $K(G) = K_3$ entonces existen $q_1, q_2, q_3$ clanes de $G$, representados como los vértices de $K_3$. Cada par de clanes se interseca en al menos un vértice de $G$, es decir

$$q_i \cap q_j \neq \emptyset, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j.$$

A continuación se muestra que existe un vértice $u_1$ de $G$, en el que se intersecan necesariamente los tres clanes de $G$, es decir $\{u_1\} \subset q_1 \cap q_2 \cap q_3$.

Supongamos que no existe un vértice $u_1$ que pertenezca simultáneamente a los tres clanes, es decir $q_1 \cap q_2 \cap q_3 = \emptyset$. Bajo este supuesto, cada intersección $q_i \cap q_j, i \neq j$, contiene al menos un vértice, pero no hay un vértice común a todos. Esto significa que podemos elegir un vértice en una de estas intersecciones y eliminarlo sin afectar la estructura de $K(G)$ , ya que los otros clanes seguirán intersecándose en otros vértices. Esto contradice la propiedad de clan crítica, pues existiría un vértice cuya eliminación no cambiaría la gráfica de clanes. Por lo tanto, necesariamente debe existir al menos un vértice $u_1$ tal que

$$\{u_1\} \subset q_1 \cap q_2 \cap q_3.$$

Para mostrar una igualdad estricta entre dichos conjuntos se sigue el siguiente argumento.

Supongamos existen $n$ vértices en dicha intersección de los tres clanes, con $n > 1$. Con lo cual estos $n$ vértices pertenecen a cada uno de los clanes, es decir $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset q_i$ con $i \in \{1, 2, 3\}$. Sin embargo, esto implicaría que dichos vértices son adyacentes entre sí, formando un clan en $G$, lo que contradice el hecho de que solo existen tres clanes en $G$, por lo tanto se satisface

$$\{u_1\} = q_1 \cap q_2 \cap q_3.$$

En busca de saber que gráfica es $G$, consideramos las intersecciones que pueden tener los clanes, con lo cual, resultan los siguientes casos a tratar, los cuales están considerando el hecho de la existencia del vértice $u_1$.

- Caso 1. Los clanes de $G$ se intersecan únicamente en el vértice $u_1$, es decir $q_1 \cap q_2 \cap q_3 = \{u_1\}$, $(q_1 \cap q_3) \setminus q_2 = \emptyset$, $(q_2 \cap q_3) \setminus q_1 = \emptyset$ y $(q_1 \cap q_2) \setminus q_3 = \emptyset$, como se muestra en la figura 1.1.

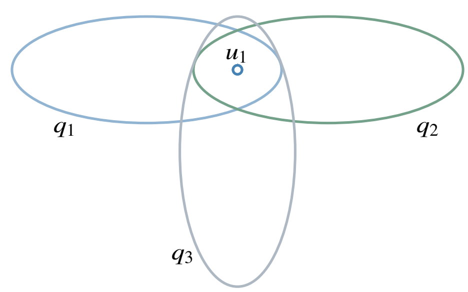


**Figura 1.1.** Esquema de los clanes de la gráfica $G$ correspondiente al caso 1.

De primera instancia, los tres clanes pueden estar constituidos por $n$ vértices (no necesariamente la misma $n$ para cada uno de los clanes), sin embargo, de considerar un $n > 2$, la gráfica $G$ no cumpliría la condición de ser clan crítica, pues resultaría que $K(G) = K(G - \hat{u})$, para cualquier $\hat{u} \in V(q_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ y $\hat{u} \neq u_1$. Por lo tanto cada clan consta únicamente de dos vértices, con lo cual la gráfica $G = G(4, 3, 3)$.

- Caso 2. Existe una intersección dos a dos entre los clanes, de más de un vértice, considerando el vértice $u_1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el clan $q_3$ interseca al clan $q_1$ en un vértice $u_2 \in V(G)$, así como a $q_2$ en un vértice $u_3 \in V(G)$, esto es

$$\{u_2\} = (q_1 \cap q_3) \setminus q_2 \quad \text{y} \quad \{u_3\} = (q_2 \cap q_3) \setminus q_1. \tag{1.1}$$

Como se muestra en la figura 1.2.

El argumento de que no exista más de un vértice en cada uno de los conjuntos en (1.1), es análogo al razonamiento expuesto al inicio de la prueba, es decir, de existir más de un vértice, éstos formarían un nuevo clan de $G$, lo que contradice la hipótesis de que $K(G) = K_3$, por lo tanto, es correcta la expresión (1.1).

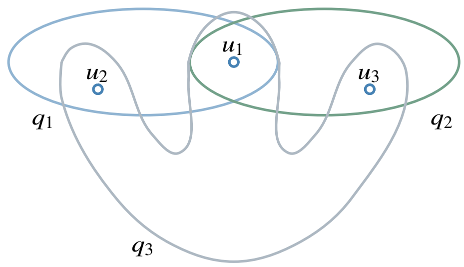


**Figura 1.2.** Esquema de los clanes de la gráfica $G$ correspondiente al caso 2.

A continuación demostraremos que los clanes $q_1$ y $q_2$ no pueden ser tales que están constituidos únicamente de dos vértices. Supongamos que $|q_1| = 2$ y $|q_2| = 2$, con lo cual $\{\{u_2, u_1\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}\} \subset E(G)$, de esta manera, se formaría un nuevo clan distinto a $q_1, q_2$ y $q_3$, lo que contradiría la hipótesis de $K(G) = K_3$, pues existirían cuatro vértices en $K(G)$ y no tres. Como los clanes $q_1$ y $q_2$ no pueden tener solo dos vértices, deben tener al menos tres y no más pues se busca que la gráfica sea clan crítica, con lo cual se buscan clanes con menor cantidad de vértices posibles. Siguiendo este razonamiento, se puede concluir que $|q_1| = |q_2| = |q_3| = 3$, lo que da lugar a la gráfica $G = G(5, 7, 1)$.

- Caso 3. Los clanes de $G$ se intersecan en el vértice $u_1$ y sólo existe otra intersección entre dos de estos clanes. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los clanes $q_1$ y $q_3$ se intersecan en un vértice $u_2$ de $G$ y $(q_2 \cap q_3) \setminus q_1 = \emptyset$, como se muestra en la figura 1.3.

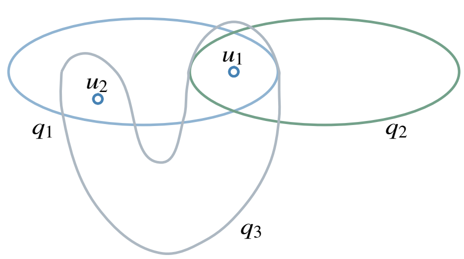


**Figura 1.3.** Esquema de los clanes de la gráfica $G$ correspondiente al caso 3.

Veamos que los clanes $q_1, q_3$ están constituidos únicamente por tres vértices. Pues si alguno de estos clanes tuviera menos de tres vértices, entonces existiría un vértice

$\hat{u}$ en $q_1$ ó $q_3$ cuya eliminación no cambiaría la estructura de $K(G)$, lo que contradice la definición de clan crítica.

Por otro lado, consideremos $u_3 \in V(q_3)$ tal que $u_3 \neq u_1, u_2$. El clan $q_2$ debe estar constituido de más de dos vértices, pues de no ser así, consideremos un nuevo vértice $\hat{u} \neq u_1$ en $q_2$, ver figura 1.4.

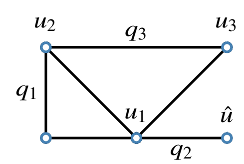


**Figura 1.4.** Esquema de los vértices y clanes de la gráfica $G$ correspondiente al caso 3, suponiendo que $q_2$ cuenta únicamente con dos vértices.

En tal caso se cumple que $K(G - u_2) = K(G)$, situación que no es válida. Con lo cual $|q_2| > 2$ y se consideran los siguientes dos casos.

- Caso 3.1. El vértice $u_3 \notin V(q_2)$, entonces para todo $\overline{u} \in V(q_2) \setminus \{u_1\}$ se tiene que $K(G - \overline{u}) = K(G)$, lo que implica que este caso no es posible, pues la eliminación de cualquier vértice de $q_2$, excepto $u_1$, no provoca un cambio en la estructura de $K_3$, lo que contradiría la hipótesis de clan crítica.
- Caso 3.2. El vértice $u_3 \in V(q_2)$. Este caso se reduce al caso 2, con lo cual $G = G(5, 7, 1)$.

Resulta entonces que $G$ es la gráfica $G(4, 3, 3)$ ó $G(5, 7, 1)$. $\square$

En el siguiente teorema se consideran las gráficas $G(3)$ y $G(4)$ que denotan el camino compuesto de tres y cuatro vértices respectivamente, ver figura 1.5.

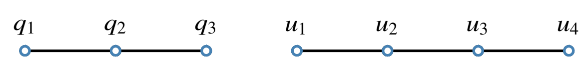


**Figura 1.5.** Esquema de las gráficas $G(3)$ (izquierda) y $G(4)$ (derecha), con sus respectivas etiquetas de acuerdo a sus vértices.

**Teorema 1.14.** Sea $G$ una gráfica clan crítica tal que su gráfica de clanes es $G(3)$, entonces $G$ es la gráfica $G(4)$.

*Demostración.* Sea $G$ una gráfica clan crítica tal que $K(G) = G(3)$. La igualdad anterior implica directamente que existen únicamente tres clanes $q_1$, $q_2$ y $q_3$ tal que $q_1 \cap q_3 = \emptyset$. Dichos clanes están representados como los vértices de $G(3)$, ver figura 1.5. Notemos que el clan $q_2$ tiene intersección no vacía con $q_1$ y $q_3$. A continuación se muestra un argumento con el cual es posible afirmar que en las intersecciones $q_1 \cap q_2$ y $q_3 \cap q_2$ constan únicamente de un vértice $u_2$ y $u_3$ de $G$, respectivamente.

Supongamos que existen $n$ vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ en $q_1 \cap q_2$ con $n > 1$, con lo cual se cumplen las siguientes contenciones $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset q_1$ y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset q_2$, lo que implica que los vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son mutuamente adyacentes entre sí, lo que formaría un nuevo clan de $G$, de esta manera no se cumpliría que su gráfica de clanes fuese $G(3)$, pues tendría más de tres vértices su gráfica de clanes, esta contradicción viene del hecho de suponer la existencia de $n$ vértices en $q_1 \cap q_2$ con $n > 1$, con lo cual tiene que ser $n = 1$. Por lo tanto se satisface que

$$\{u_2\} = q_1 \cap q_2.$$

Con un razonamiento análogo, se demuestra que de igual manera se satisface que

$$\{u_3\} = q_3 \cap q_2.$$

Por otra parte, lo que sigue es un razonamiento que demuestra que el clan $q_1$ está constituido de solo dos vértices, el ya mencionado $u_2$ y uno más en G; de igual manera el clan $q_3$ está constituido por el mencionado vértice $u_3$ y uno más en $G$. Demostraremos estos hechos para el caso del clan $q_1$, pues como anteriormente sucedió, el caso para la demostración del clan $q_3$ resultará análogo a la prueba del $q_1$.

Así pues, consideremos que el clan $q_1$ está constituido por más de dos vértices, digamos $V(q_1) = \{v_1, \ldots v_n\}$. Por ser un clan $q_1$, resulta que $q_1 - v_i$ es un clan también, para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, con lo cual, cualquier eliminación de $V(q_1)$, excepto $u_2$, no provoca un cambio en la estructura de su gráfica de clanes, lo que contradiría la hipótesis de clan crítica. Por lo tanto se requiere que $q_1$ tenga la menor cantidad de vértices posibles y que siga siendo un clan, por lo tanto sólo consta de dos vértices, $u_2$ y uno más llamemosle $u_1$. De esta manera, también $q_3$ consta únicamente de dos vértices, $u_3$ y uno más, llamemosle $u_4$.

De acuerdo con el razonamiento planteado anteriormente, el clan $q_2$ también debe de constar únicamente de dos vértices, pues de ser más, se contradice la hipótesis de ser $G$ clan crítica. Con lo cual, se puede concluir que $G$ es un camino de cuatro vértices, es decir, $G = G(4)$. □

El siguiente teorema es una generalización del teorema anterior, se consideran las gráficas $G(n-1)$ y $G(n)$, que denotan el camino compuesto por $n-1$ vértices y $n$ vértices, respectivamente. Ver figura 1.6.


**Figura 1.6.** Esquema de las gráficas $G(n-1)$ (izquierda) y $G(n)$ (derecha), con sus respectivas etiquetas de acuerdo a sus vértices.

**Teorema 1.15.** Sea $G$ una gráfica clan crítica tal que su gráfica de clanes es $G(n-1)$, entonces $G$ es la gráfica $G(n)$.

*Demostración.* Por hipótesis $K(G) = G(n-1)$, lo que implica que en $G$ existen $n-1$ clanes diferentes, que satisfacen $q_{k-1} \cap q_{k+1} = \emptyset$ para $k \in \{2, \dots n-2\}$; que representan los vértices de $G(n-1)$, como se muestra en la figura 1.6 (izquierda).

Notemos que cada vértice en $G(n-1)$, que representa un clan de $G$, es adyacente con el vértice inmediato anterior y el inmediato siguiente. En el caso del primer vértice, adyacente con el inmediato siguiente; y en el caso del último vértice, adyacente con el inmediato anterior. Esto es que las intersecciones $q_1 \cap q_2$, $q_2 \cap q_3$, $\dots$ , $q_{n-3} \cap q_{n-2}$, $q_{n-2} \cap q_{n-1}$ son no vacías. Utilizando el mismo razonamiento expuesto en el teorema 1.14, se muestra que cada una de estas intersecciones es un único vértice, es decir

$$\begin{aligned} q_1 \cap q_2 &= \{u_2\} \\ q_2 \cap q_3 &= \{u_3\} \\ &\vdots \\ q_{n-3} \cap q_{n-2} &= \{u_{n-2}\} \\ q_{n-2} \cap q_{n-1} &= \{u_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, de igual manera como se hizo en el teorema 1.14, se demostrará que el clan $q_1$ está constituido de solo dos vértices, el ya mencionado $u_2$ y uno más en G; de igual manera el clan $q_{n-1}$ está constituido por el mencionado vértice $u_{n-1}$ y uno más en $G$. Demostraremos estos hechos para el caso del clan $q_1$, pues el caso para la demostración del clan $q_{n-1}$ resultará análogo a la prueba del $q_1$.

Consideremos que el clan $q_1$ está constituido por más de dos vértices, digamos $V(q_1) = \{v_1, \dots v_n\}$. Por ser un clan $q_1$, resulta que $q_1 - v_i$ es un clan también, para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, con lo cual, cualquier eliminación de $V(q_1)$, excepto $u_2$, no provoca un cambio en la estructura de su gráfica de clanes, lo que contradiría la hipótesis de clan crítica, por lo tanto sólo consta de dos vértices, $u_2$ y uno más llamemosle $u_1$, pues de esta manera la eliminación de dicho vétice $u_1$ provoca un cambio en la estructura de la gráfica de clanes de $G$, cumpliendo las hipótesis de ser clan crítica. De esta manera, también $q_{n-1}$ consta únicamente de dos vértices, $u_{n-1}$ y uno más, llamemosle $u_n$.

De acuerdo con el razonamiento planteado anteriormente, los clanes $q_2, q_3, \dots , q_{n-3}$, $q_{n-2}$ también deben de constar únicamente de dos vértices, pues de ser más, se contradice la hipótesis de ser $G$ clan crítica, como se mostró. Con lo cual, se puede concluir que $G$ es un camino de $n$ vértices, es decir, $G = G(n)$. □

El siguiente teorema hace referencia la relación que existe entre la gráfica $G(6, 6, 18)$ y el árbol $T(4, 2)$, extraídos del apéndice de gráficas y de diagramas de árbol en Harary (1969), respectivamente. Dichas gráficas pueden verse en la figura 1.7

**Teorema 1.16.** Sea $G$ una gráfica clan crítica tal que su gráfica de clanes es $T(4, 2)$, entonces $G$ es la gráfica $G(6, 6, 18)$.

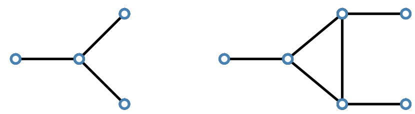

**Figura 1.7.** Esquema de las gráficas $T(4,2)$ (izquierda) y $G(6,6,18)$ (derecha).

*Demostración.* Sea $G$ una gráfica clan crítica tal que su gráfica de clanes es $T(4,2)$. Con lo cual, la gráfica $G$ debe tener cuatro clanes, $\square$

# Bibliografía

Alcón, L. (2006). Clique-critical graphs: Maximum size and recognition. *Discrete applied mathematics*, 154(13):1799–1802.

Escalante, F. and Toft, B. (1974). On clique-critical graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 17(2):170–182.

Harary, F. (1969). *Graph theory*. CRC Press, Boca Raton. `https://doi.org/10.1201/9780429493768`.

Roberts, F. S. and Spencer, J. H. (1971). A characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 10(2):102–108.