Trabajo en teoría de Gráficas

Capítulo 1

Gráficas clan críticas y gráficas de clanes

1.1. Definiciones

En este trabajo se consideran gráficas simples, finitas, sin lazos y conexas.

Definición 1.1. Una gráfica G consta de dos conjuntos $G = (V, E)$, donde V es un conjunto cualquiera y $E \subset \{\{u, v\} \subset V \mid u \neq v\}$. El conjunto V o $V(G)$ es llamado conjunto de vértices de la gráfica G. Los elementos de E o $E(G)$ se llaman aristas de la gráfica G.

Definición 1.2. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Si $u, v \in V(G)$ son tal que $\{u, v\} \in E(G)$, decimos que u y v son adyacentes. Se denota tal adyacencia por $u \sim v$.

Definición 1.3 (Harary 1969)**.** Un camino de una gráfica G, es una sucesión de vértices $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n$, tales que existe una adyacencia de cada uno de los vértices con el vértice inmediato anterior y el inmediato siguiente. Se suele denotar tal camino como u_0u_n-camino.

Definición 1.4 (Harary 1969)**.** Una gráfica es conexa si cada par de vértices está unido por un camino.

Se define una gráfica disconexa si no es conexa.

Definición 1.5. Sea G una gráfica. Una subgráfica de G es una gráfica H tal que $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$.

Definición 1.6. Sea G una gráfica y H una subgráfica de G. H es una subgráfica inducida si para todo $u, v \in V(H)$ tales que $u \sim v$ en G entonces $u \sim v$ en H.

Se entiende que una subgráfica completa H_n tiene cada par de sus n vértices adyacentes. Dicha gráfica completa es maximal si no existe otro vértice en la gráfica tal que forme una completa más grande. Lo anterior da paso a la siguiente definición.

Definición 1.7 (Harary 1969)**.** Un clan de G es una subgráfica completa maximal.

Definición 1.8 (Roberts and Spencer 1971)**.** Dado G una gráfica, sean $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sus clanes. Definimos H' mediante $V(H') = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ y $\left\{q_i, q_j\right\} \in E(H')$ si y solo si $i \neq j$ y $q_i \cap q_j \neq \emptyset$. Entonces, llamamos a H' como la gráfica de clanes de G y escribimos $H' = K(G)$.

Definición 1.9 (Alcón 2006)**.** Sea G una gráfica y $v \in V(G)$. Como es habitual, $G - v$ denota la gráfica inducida por $V(G) \setminus \{v\}$.

Definición 1.10 (Escalante and Toft 1974)**.** El vértice v es clan crítico si $K(G) \neq K(G-v)$. Una gráfica G es clan crítica si cada uno de sus vértices es crítico.

1.2. Resultados

En el siguiente teorema se consideran las gráficas $G(4,3,3)$, que denota a la gráfica con 4 vértices, 3 aristas, número 3; y la gráfica $G(5,7,1)$, que denota la gráfica de 5 vértices, 7 aristas, número 1. Dichas gráficas son extraídas del apéndice de gráficas en Harary (1969).

Teorema 1.11. Sea G una gráfica clan crítica tal que su gráfica de clanes es K_3, entonces G es la gráfica $G(4,3,3)$ ó $G(5,7,1)$.

Demostración. Sea G una gráfica clan crítica tal que $K(G) = K_3$. Al ser $K(G) = K_3$ entonces existen q_1, q_2, q_3 clanes de G, representados como los vértices de K_3. Cada par de clanes se interseca en al menos un vértice de G, es decir

$$q_i \cap q_j \neq \emptyset, \quad \forall i, j \in \{1,2,3\}, \quad i \neq j.$$

A continuación se muestra que existe un vértice u_1 de G, en el que se intersecan necesariamente los tres clanes de G, es decir $\{u_1\} \subset q_1 \cap q_2 \cap q_3$.

Supongamos que no existe un vértice u_1 que pertenezca simultáneamente a los tres clanes, es decir $q_1 \cap q_2 \cap q_3 = \emptyset$. Bajo este supuesto, cada intersección $q_i \cap q_j, i \neq j$, contiene al menos un vértice, pero no hay un vértice común a todos. Esto significa que podemos elegir un vértice en una de estas intersecciones y eliminarlo sin afectar la estructura de $K(G)$, ya que los otros clanes seguirán intersecándose en otros vértices. Esto contradice la propiedad de clan crítica, pues existiría un vértice cuya eliminación no cambiaría la gráfica de clanes. Por lo tanto, necesariamente debe existir al menos un vértice u_1 tal que

$$\{u_1\} \subset q_1 \cap q_2 \cap q_3.$$

Para mostrar una igualdad estricta entre dichos conjuntos se sigue el siguiente argumento.

Supongamos existen n vértices en dicha intersección de los tres clanes, con $n > 1$. Con lo cual estos n vértices pertenecen a cada uno de los clanes, es decir $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset q_i$

con $i \in \{1, 2, 3\}$. Sin embargo, esto implicaría que dichos vértices son adyacentes entre sí, formando un clan en G, lo que contradice el hecho de que solo existen tres clanes en G, por lo tanto se satisface

$$\{u_1\} = q_1 \cap q_2 \cap q_3.$$

En busca de saber que gráfica es G, consideramos las intersecciones que pueden tener los clanes, con lo cual, resultan los siguientes casos a tratar, los cuales están considerando el hecho de la existencia del vértice u_1.

- Caso 1. Los clanes de G se intersecan únicamente en el vértice u_1, es decir $q_1 \cap q_2 \cap q_3 = \{u_1\}$, $(q_1 \cap q_3) \setminus q_2 = \emptyset$, $(q_2 \cap q_3) \setminus q_1 = \emptyset$ y $(q_1 \cap q_2) \setminus q_3 = \emptyset$, como se muestra en la figura 1.1.

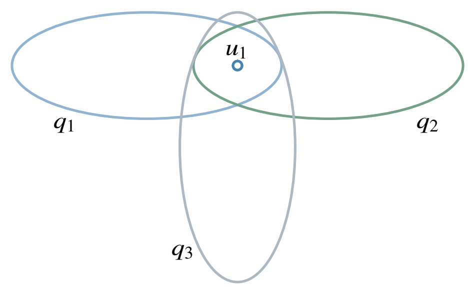

Figura 1.1. Esquema de los clanes de la gráfica G correspondiente al caso 1.

De primera instancia, los tres clanes pueden estar constituidos por n vértices (no necesariamente la misma n para cada uno de los clanes), sin embargo, de considerar un $n > 2$, la gráfica G no cumpliría la condición de ser clan crítica, pues resultaría que $K(G) = K(G - \hat{u})$, para cualquier $\hat{u} \in V(q_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ y $\hat{u} \neq u_1$. Por lo tanto cada clan consta únicamente de dos vértices, con lo cual la gráfica $G = G(4, 3, 3)$.

- Caso 2. Existe una intersección dos a dos entre los clanes, de más de un vértice, considerando el vértice u_1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el clan q_3 interseca al clan q_1 en un vértice $u_2 \in V(G)$, así como a q_2 en un vértice $u_3 \in V(G)$, esto es

$$\{u_2\} = (q_1 \cap q_3) \setminus q_2 \quad \text{y} \quad \{u_3\} = (q_2 \cap q_3) \setminus q_1. \tag{1.1}$$

Como se muestra en la figura 1.2.

El argumento de que no exista más de un vértice en cada uno de los conjuntos en (1.1), es análogo al razonamiento expuesto al inicio de la prueba, es decir, de existir más de un vértice, éstos formarían un nuevo clan de G, lo que contradice la hipótesis de que $K(G) = K_3$, por lo tanto, es correcta la expresión (1.1).

A continuación demostraremos que los clanes q_1 y q_2 no pueden ser tales que están constituidos únicamente de dos vértices. Supongamos que $|q_1| = 2$ y $|q_2| = 2$, con lo cual $\{\{u_2, u_1\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}\} \subset E(G)$, de esta manera, se formaría un

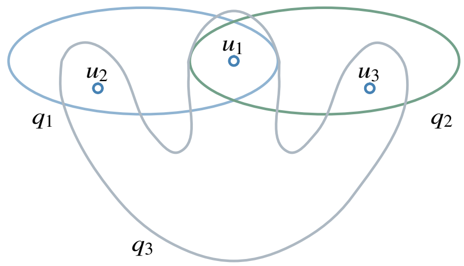

Figura 1.2. Esquema de los clanes de la gráfica G correspondiente al caso 2.

nuevo clan distinto a q_1, q_2 y q_3, lo que contradiría la hipótesis de $K(G) = K_3$, pues existirían cuatro vértices en $K(G)$ y no tres. Como los clanes q_1 y q_2 no pueden tener solo dos vértices, deben tener al menos tres y no más pues se busca que la gráfica sea clan crítica, con lo cual se buscan clanes con menor cantidad de vértices posibles. Siguiendo este razonamiento, se puede concluir que $|q_1| = |q_2| = |q_3| = 3$, lo que da lugar a la gráfica $G = G(5, 7, 1)$.

- Caso 3. Los clanes de G se intersecan en el vértice u_1 y sólo existe otra intersección entre dos de estos clanes. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los clanes q_1 y q_3 se intersecan en un vértice u_2 de G y $(q_2 \cap q_3) \setminus q_1 = \emptyset$, como se muestra en la figura 1.3.

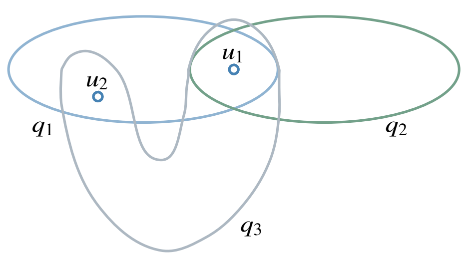

Figura 1.3. Esquema de los clanes de la gráfica G correspondiente al caso 3.

Veamos que los clanes q_1, q_3 están constituidos únicamente por tres vértices. Pues si alguno de estos clanes tuviera menos de tres vértices, entonces existiría un vértice $\hat{u}$ en q_1 ó q_3 cuya eliminación no cambiaría la estructura de $K(G)$, lo que contradice la definición de clan crítica.

Por otro lado, consideremos $u_3 \in V(q_3)$ tal que $u_3 \neq u_1, u_2$. El clan q_2 debe estar constituido de más de dos vértices, pues de no ser así, consideremos un nuevo vértice $\hat{u} \neq u_1$ en q_2, ver figura 1.4.

En tal caso se cumple que $K(G - u_2) = K(G)$, situación que no es válida. Con lo cual $|q_2| > 2$ y se consideran los siguientes dos casos.

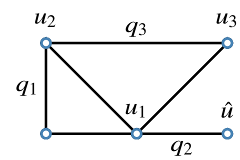

Figura 1.4. Esquema de los vértices y clanes de la gráfica G correspondiente al caso 3, suponiendo que q_2 cuenta únicamente con dos vértices.

- Caso 3.1. El vértice $u_3 \notin V(q_2)$, entonces para todo $\overline{u} \in V(q_2) \setminus \{u_1\}$ se tiene que $K(G - \overline{u}) = K(G)$, lo que implica que este caso no es posible, pues la eliminación de cualquier vértice de q_2, excepto u_1, no provoca un cambio en la estructura de K_3, lo que contradiría la hipótesis de clan crítica.
- Caso 3.2. El vértice $u_3 \in V(q_2)$. Este caso se reduce al caso 2, con lo cual $G = G(5, 7, 1)$.

Resulta entonces que G es la gráfica $G(4, 3, 3)$ ó $G(5, 7, 1)$. □

En el siguiente teorema se consideran las gráficas $G(3)$ y $G(4)$ que denotan el camino compuesto de tres y cuatro vértices respectivamente, ver figura 1.5.

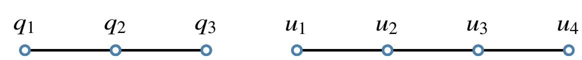

Figura 1.5. Esquema de las gráficas $G(3)$ (izquierda) y $G(4)$ (derecha), con sus respectivas etiquetas de acuerdo a sus vértices.

Teorema 1.12. Sea G una gráfica clan crítica tal que su gráfica de clanes es $G(3)$, entonces G es la gráfica $G(4)$.

Demostración. Sea G una gráfica clan crítica tal que $K(G) = G(3)$. La igualdad anterior implica directamente que existen únicamente tres clanes q_1, q_2 y q_3 tal que $q_1 \cap q_3 = \emptyset$. Dichos clanes están representados como los vértices de $G(3)$, ver figura 1.5. Notemos que el clan q_2 tiene intersección no vacía con q_1 y q_3. A continuación se muestra un argumento con el cual es posible afirmar que en las intersecciones $q_1 \cap q_2$ y $q_3 \cap q_2$ constan únicamente de un vértice u_2 y u_3 de G, respectivamente.

Supongamos que existen n vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ en $q_1 \cap q_2$ con $n > 1$, con lo cual se cumplen las siguientes contenciones $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset q_1$ y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset q_2$, lo que implica que los vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son mutuamente adyacentes entre sí, lo que forma un nuevo clan de G, de esta manera no se cumpliría que su gráfica de clanes fuese $G(3)$, pues tendría más de tres vértices su gráfica de clanes. Por lo tanto se satisface que

$$\{u_2\} = q_1 \cap q_2.$$

Con un razonamiento análogo, se demuestra que de igual manera se satisface que

$$\{u_3\} = q_3 \cap q_2.$$

Por otra parte, lo que sigue es un razonamiento que demuestra que el clan q_1 está constituido de solo dos vértices, el ya mencionado u_2 y uno más u_1 en G; de igual manera el clan q_3 está constituido por el mencionado vértice u_3 y uno más u_4 en G. Demostraremos estos hechos para el caso del clan q_1, pues como anteriormente sucedió, el caso para la demostración del clan q_3 resultará análogo a la prueba del q_1. Así pues, consideremos que el clan q_1 está constituido por más de dos vértices, digamos $V(q_1) = \{v_1, \ldots v_n\}$. Por ser un clan q_1, resulta que $q_1 - v_i$ es un clan también, para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, con lo cual, cualquier eliminación de $V(q_1)$, excepto u_2, no provoca un cambio en la estructura de su gráfica de clanes, lo que contradiría la hipótesis de clan crítica. Por lo tanto se requiere que q_1 tenga la menor cantidad de vértices posibles y que siga siendo un clan, por lo tanto sólo consta de dos vértices, u_2 y uno más llamemosle u_1, como se quería. De esta manera, también q_3 consta únicamente de dos vértices, u_3 y uno más, llamemosle u_4.

De acuerdo con el razonamiento planteado anteriormente, el clan q_2 también debe de constar únicamente de dos vértices, pues de ser más, se contradice la hipótesis de ser G clan crítica. Con lo cual, se puede concluir que G es un camino de cuatro vértices, es decir, $G = G(4)$. □

El siguiente teorema es una generalización del teorema anterior, se consideran las gráficas $G(n-1)$ y $G(n)$, que denotan el camino compuesto por $n-1$ vértices y n vértices, respectivamente. Ver figura 1.6.

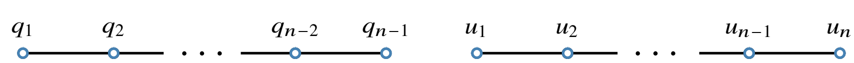

Figura 1.6. Esquema de las gráficas $G(n-1)$ (izquierda) y $G(n)$ (derecha), con sus respectivas etiquetas de acuerdo a sus vértices.

Teorema 1.13. Sea G una gráfica clan crítica tal que su gráfica de clanes es $G(n-1)$, entonces G es la gráfica $G(n)$.

Bibliografía

Alcón, L. (2006). Clique-critical graphs: Maximum size and recognition. *Discrete applied mathematics*, 154(13):1799–1802.

Escalante, F. and Toft, B. (1974). On clique-critical graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 17(2):170–182.

Harary, F. (1969). *Graph theory*. CRC Press, Boca Raton. `https://doi.org/10.1201/9780429493768`.

Roberts, F. S. and Spencer, J. H. (1971). A characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 10(2):102–108.