Tema 3 Seminar

Dumitrescu Delia Ioana

January 2020

Exercitiul 1

1.1

Pentru a rezolva problema inmultirii matricelor, vom construi un graf in care fiecare matrice reprezinta un nod. De asemenea, pentru fiecare matrice M_i care se poate inmulti cu matricea M_j, vom trage muchia $i \to j$. Gasirea unei ordini prin care sa putem realiza inmultirea intre matrice este echivalenta cu gasirea unui *lant hamiltonian*.

Un mod de a gasi un lant hamiltonian este sa parcurgem toate permutarile posibile ale nodurilor si sa verificam daca permutarea aleasa constituie un lant hamiltonian. Complexitatea este $O(k * k!)$. Alta varianta este sa folosim un algoritm ce foloseste programare dinamica descris de Bellman, Held si Karp, care ruleaza in $O(k^2 * 2^k)$.

1.2

Exercitiul 2

Raspunsul problemei este , $\chi(G) >= c(G)$. Observam:

- Este imposibil ca $\chi(G) < c(G)$. Asta se intampla deoarece un graf G este o simpla "completare" a unui subgraf al sau cu cateva muchii. Ele nu dispar, deci nu pot elimina din numarul de culori necesare pentru a colora graful.

- Este posibil ca $\chi(G) = c(G)$. Consideram graful G ca fiind subgraful lui complet la care mai adaugam un nod pe care il legam printr-o muchie de un nod din subgraf. Daca subgraful are n noduri ($n > 1$), atunci il vom pute colora cu cel putin $n - 1$ culori deja folosite, deci numarul sau cromatic va fi egal cu cel al subgrafului sau.

- Este posibil ca $\chi(G) > c(G)$. Consideram graful G ca fiind un ciclu de lungime 5. Subgraful maxim complet are lungime 2, insa e nevoie de minim 3 culori pentru a colora ciclul(considerand c1 si c2 culori, vom avea $c1 \to c2 \to c1 \to c2 \to (c1/c2 imposibil; \Rightarrow c3)$.

Exercitiul 3

Fie $G = (V, E)$ un graf. Pentru G, vom nota cu VC cea mai mica acoperire cu noduri si C un cuplaj maxim. O acoperire cu noduri ne garanteaza faptul ca, pentru orice muchie din E, cel putin o extremitate se afla in acoperire. Astfel, pentru fiecare muchie din C, cel putin o extremitate se afla in VC. De asemenea, intr-un cuplaj, fiecare nod are o singura muchie in cuplaj, astfel ca fiecare nodurile din C care apar in VC vor fi distincte. Prin urmare,
$MIN - VC(G) >= MAX - MTC(G)$.

Exercitiul 4

Numar minim

Pentru oricare 2 culori utilizate in colorarea grafului, stim cu certitudine ca trebuie sa existe o muchie intre 2 noduri colorate prin aceste culori. Acest lucru se intampla deoarece inexistenta unei astfel de muchii ar insemna ca, pentru o colorare minima, am folosi aceeasi culoare pentru a colora aceste noduri care nu impart nicio muchie. Prin urmare, vom avea un minim de $C(k, 2)$ muchii.

Numar maxim

Pentru oricare 2 noduri colorate diferit, vom adauga cate o muchie. Numarul maxim de muchii va fi $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1, i \neq j}^{k} c_i * c_j$, unde c_i, c_j reprezinta numarul de noduri colorate prin culoarea i, respectiv j.

Exercitiul 5

5.1

Graful G nu este planar. Spre exemplu, pentru orice numar prim p ¿ 1, va exista un subgraf complet format din nodurile $p^0, p^1, p^2, ...p^i$, cu proprietatea ca $p^i <= 10^5$. In mod evident, aceste subgrafuri nu sunt planare, deci graful G nu este nici el planar.

5.2

Pentru a colora in mod corect graful, trebuie sa ne asiguram ca intr-o multime colorata cu o anume culoare nu exista 2 numere astfel incat 1 numar sa divida alt numar. Bazandu-ne pe ideea e mai sus, trebuie sa ne asiguram ca numerele din subgraful complet maxim sunt colorate in mod diferit. Subgraful complet maxim va fi cel generat de puterile lui 2, adica $2^0, 2^1, ..2^(16)$. Astfel, va fi nevoie de 17 culori pentru a colora graful. Mai trebuie doar sa ne asiguram ca folosim aceste 17 culori in mod optim:

- Culoarea data lui 2^0: 1

- Culoarea data lui 2^1: 2 3
- Culoarea data lui 2^2: 4 5 6 7
- Culoarea data lui 2^3: 8 9 10 11 12 13 14 15 si asa mai departe.

Avem certitudinea ca graful este colorat corect deoarece toate puterile lui 2 se afla in multimi separate si nu exista alte posibile puteri care sa ne genereze probleme. Intr-o multime descrisa de 2^i si $2^{(}i + 1)$, nu putem avea, in mod evident, si 3^i si $3^{(}i + 1)$ sau alte valori mai mari decat 3 care sa strice colorarea.