Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Tim Hartmann, Daniel Neuen

WS 2017/18
19.02.2018

Klausur
Berechenbarkeit und Komplexität

Weißes Papier

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie deutlich. Unleserliches wird nicht korrigiert und als fehlerhaft gewertet.
- Streichen Sie Konzeptrechnungen, die nicht gewertet werden sollen, durch oder machen Sie sie anderweitig kenntlich. Bei mehreren Lösungsversuchen pro Aufgabe wird der schlechteste gewertet.
- Bitte verwenden Sie einen dokumentenechten Stift mit blauer oder schwarzer Tinte und verwenden Sie keinen Tintenkiller oder Ähnliches. Benutzen Sie ausschließlich das zur Verfügung gestellte Papier.
- Halten Sie bitte Ihren Studierendenausweis und einen Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.
- Bitte schalten Sie Ihre Mobiltelefone aus!

Ich versichere, die Klausur selbstständig bearbeitet zu haben, und mir ist bekannt, dass die Klausur bei einem Täuschungsversuch mit "nicht bestanden" bewertet wird.

....
(Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	4	Gesamt
Punkte	20	20	20	20	80
erreicht					

(Name/Matrikelnummer)

Aufgabe 1:

(a) Eine (deterministische, 1-Band) Turingmaschine ist durch das 7-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \bar{q}, \delta)$ definiert. Geben Sie Definitionsmenge und Bildmenge der Überführungsfunktion δ an. **(3 Punkte)**

(b) Definieren Sie die Laufzeitkosten für einen Rechenschritt auf der RAM im logarithmischen Kostenmaß. **(3 Punkte)**

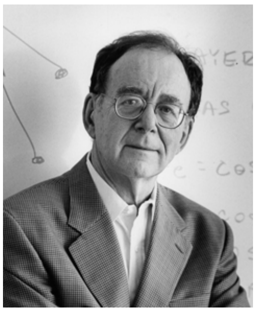
(c) Formulieren Sie das zehnte Hilbert'sche Problem. **(3 Punkte)**

(d) Formulieren Sie das Entscheidungsproblem **SUBSET-SUM**. **(3 Punkte)**

(Name/Matrikelnummer)

(e) Wie heißen die folgenden drei Superstars der BuK? **(2 Punkte)**





(f) Geben Sie (ohne weitere Begründung) ein Entscheidungsproblem an, das entweder in **EXPTIME** oder in der Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen liegt (aber nicht in beiden). **(3 Punkte)**

(g) Definieren Sie die Komplexitätsklasse **coNP**. **(3 Punkte)**

(Name/Matrikelnummer)

Aufgabe 2:

(a) Wir betrachten ein rechteckiges Schachbrett der Höhe n und Breite m. Jedes der $n \cdot m$ Felder ist entweder mit einem schwarzem Spielstein belegt, oder mit einem weißem Spielstein belegt, oder leer. Ein gegebenes Schachbrett mit Spielsteinen ist in **Mondrian-Konstellation**, **(2 Punkte)**

- falls jede (vertikale) Spalte mindestens einen Spielstein enthält, und
- falls keine (horizontale) Zeile zwei verschieden-farbige Spielsteine enthält.

Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem MONDRIAN:

Eingabe: Ein $\boldsymbol{n \times m}$ Schachbrett und eine Belegung mit schwarzen und weißen Spielsteinen.

Frage: Kann man durch das Entfernen von Spielsteinen vom Schachbrett eine Mondrian-Konstellation erreichen?

Betrachten Sie die folgende Instanz des MONDRIAN Problems, die aus **12** weißen und **12** schwarzen Spielsteinen auf einem $\mathbf{3 \times 8}$ Schachbrett besteht. (Diese spezielle Instanz enthält keine leeren Felder.)

○	○	○	○	●	●	●	●
○	○	●	●	○	○	●	●
○	●	○	●	○	●	○	●

Ist diese Instanz eine JA-Instanz? Tragen Sie Ihre Antwort in das Kästchen ein:

(b) Formulieren Sie die Zertifikat-Charakterisierung von NP. **(4 Punkte)**

(Name/Matrikelnummer)

(c) Zeigen Sie, dass MONDRIAN die Zertifikat-Charakterisierung von NP erfüllt. Beschreiben Sie Ihr Zertifikat und analysieren Sie seine Länge. Beschreiben Sie das Verhalten Ihres Verifizierers und analysieren Sie seine Laufzeit. **(6 Punkte)**

(d) Beweisen Sie durch eine polynomielle Reduktion: MONDRIAN ist NP-schwer. **(8 Punkte)**

(Name/Matrikelnummer)

Zusätzliches Papier

(Name/Matrikelnummer)

Aufgabe 3:

(a) Formulieren Sie den Satz von Rice. **(4 Punkte)**

(b) Über einige der folgenden sieben Sprachen $L_A, \dots, L_G$ sagt der Satz von Rice nichts aus, da seine Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Tragen Sie eine der aufgelisteten Sprachen in das Kästchen ein, für die alle Voraussetzungen des Satzes von Rice erfüllt sind: **(2 Punkte)**

$$\begin{aligned}
L_A &= \{\ \langle M \rangle \ \mid\ L(M) \text{ ist unentscheidbar } \} \\
L_B &= \{\ \langle M \rangle \ \mid\ L(M) \text{ ist semi-entscheidbar } \} \\
L_C &= \{\ \langle M \rangle \ \mid\ L(M) = H_{tot}\ \} \\
L_D &= \{\ \langle M \rangle \ \mid\ L(M) \neq H_{tot}\ \} \\
L_E &= \left\{\ \langle M \rangle \ \mid\ L(M) = \overline{H}_{tot}\ \right\} \\
L_F &= \{\ \langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \ \mid\ L(M_1) = L(M_2)\ \} \\
L_G &= \{\ \langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \ \mid\ L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\ \}
\end{aligned}$$

Anmerkung: $H_{tot} = \{\ \langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe } \}$ bezeichnet das totale Halteproblem.

(Name/Matrikelnummer)

(c) Wenden Sie nun den Satz von Rice auf die von Ihnen im Aufgabenteil (b) gewählte Sprache an: Definieren Sie die entsprechende Menge $\mathcal{S}$. **(7 Punkte)**

Zeigen Sie insbesondere, dass $\mathcal{S}$ alle vom Satz von Rice geforderten Eigenschaften besitzt.

(Name/Matrikelnummer)

(d) Beweisen oder widerlegen Sie: **(7 Punkte)**

Die Sprache $L_G = \{\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle \mid L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}$ aus Aufgabenteil (b) ist rekursiv aufzählbar.

(Name/Matrikelnummer)

Zusätzliches Papier

Aufgabe 4:

(a) **(8 Punkte)**

Beantworten Sie für jede ganze Zahl $m \geq 0$:

Wenn das folgende LOOP-Programm mit der Eingabe $x_1 = m$ gestartet wird, welchen Wert hat dann die Variable x_2 bei Terminierung? Geben Sie eine geschlossene Form an.

Beweisen Sie Ihre Antwort. (Sie können das Verhalten von LOOP-Programmen, die in der Vorlesung besprochen wurden, als bekannt annehmen.)

```
x2 := 3;
LOOP x1 DO
   x3 := 0;
   LOOP x2 DO
      LOOP x2 DO x3 := x3 + 1 ENDLOOP
   ENDLOOP;
   x2 := x3
ENDLOOP
```

(b) **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie (mit Beweis) alle Zahlen $b \in \mathbb{N}$, für die die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = b^{(2^n)}$ primitiv rekursiv ist.

(c) **(8 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie:

Wenn das LOOP-Programm im Aufgabenteil (a) auf einer Eingabe $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$ mit $a_1 + a_2 + a_3 = s$ gestartet wird und mit einer Ausgabe $(x_1, x_2, x_3) = (b_1, b_2, b_3)$ terminiert, dann gilt $b_1 + b_2 + b_3 \leq A(3, s + 20)$.

Anmerkung: $A(\cdot, \cdot)$ bezeichnet hier die Ackermann Funktion.

(Name/Matrikelnummer)

Zusätzliches Papier