湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 积 分 学

4.3 反常二重积分

• 主 讲： 于 红 香

第四章　多元函数积分学

第三节　反常二重积分

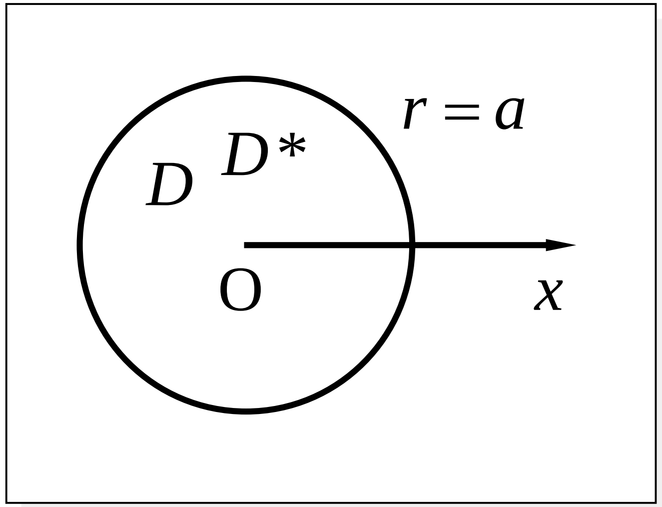
一. 无界区域上的二重积分

二. 二重暇积分

- 正确理解反常二重积分的概念。
- 掌握处理两类反常二重积分的思想。

【练】 计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$。

【解】 运用极坐标进行计算： $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,



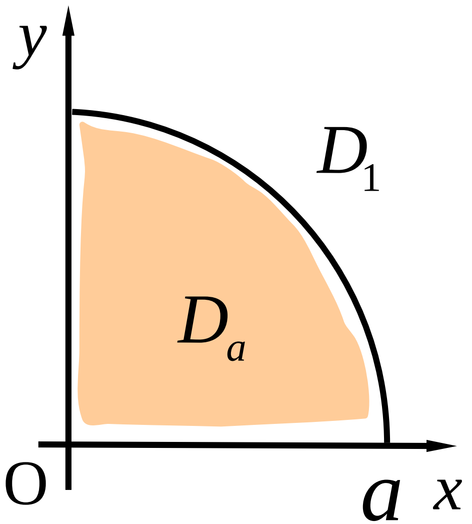
圆 $x^2+y^2=a^2$ 的方程为 $r=a$ 。

$$D\to D^*=\{(r,\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le a\}$$

故 $$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D^*} e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r=\cdots=\pi(1-e^{-a^2})。$$

利用你学过的知识证明：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$



此一元函数积不出，必须想别的办法。

二重积分与二次积分间的转换，

是否可以为我们提供思路？

怎么办？

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

不是一般的二重积分

$$= \lim_{a\to+\infty} \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

极限工具

其中 D_1 为第一象限, 不是有界区域。

D_a 为第一象限中半径为a的圆形区域。

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\boldsymbol{f(x,y)}$ 是有界闭区域$\boldsymbol{D}$上的有界函数.

区域无界
函数有界

区域有界
函数无界

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$D_1=\{(x,y)\mid x\ge 0, y\ge 0\}$$

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$$

无界区域上的二重积分　含瑕点的二重积分

反常二重积分

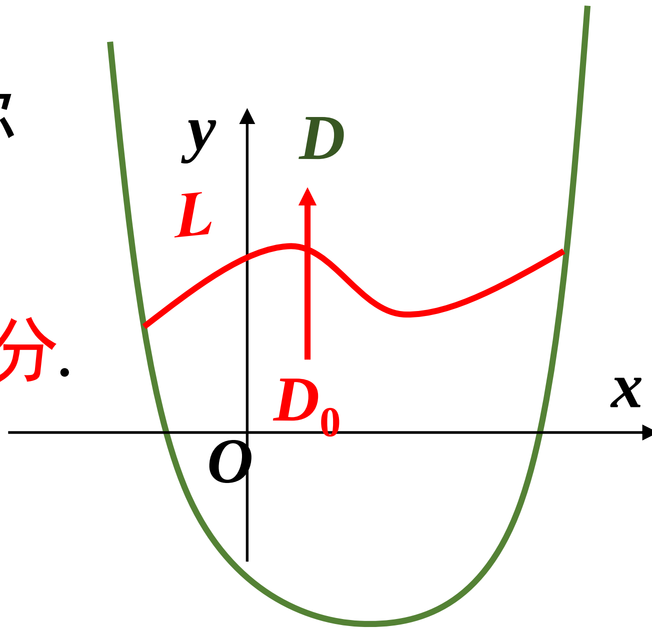
一、无界区域上的二重积分

设D是平面上的无界区域,函数$f(x,y)$在D中有定义且有界.

用任意一条光滑曲线 L 在D 中划出有界区域D_0(可求面积),

若$\iint\limits_{D_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$存在,且当曲线$L$连续变动时,$D_0 \to D$.则称

$\lim\limits_{D_0\to D}\iint\limits_{D_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$为函数$f(x,y)$在无界区域$D$上的反常积分.



记作 $$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{D_0\to D}\iint\limits_{D_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

极限思想

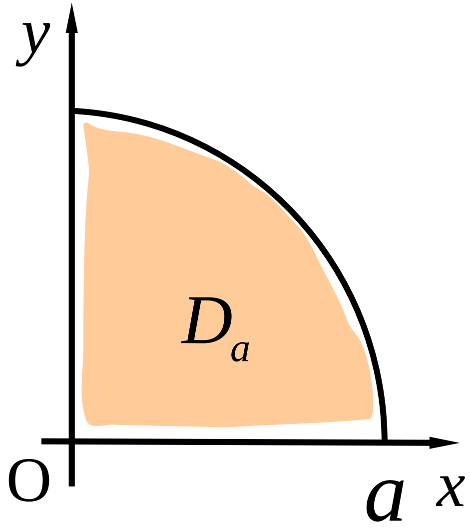
一、无界区域上的二重积分

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{D_0\to D}\iint_{D_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若不论曲线L 的形状如何，也不论D_0 的扩展过程如何，上式右端有唯一的极限I 存在，则称反常二重积分收敛，极限值I 称为反常二重积分值。此时也称$f(x,y)$在D上反常可积。

若上式右端的极限I 不存在，或者极限值依赖于曲线L的形状及D_0 的扩展过程，则称反常二重积分发散，也称$f(x,y)$在D上不可积。

【例】 利用你学过的知识证明：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。



【解】

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{a\to+\infty}\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

$$D_a{*} = \{(r,\theta) \mid \ 0 \le \theta \le \pi/2\,,\ \ 0 \le r \le a\,\}\,,$$

故 $$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_a{*}} e^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

其中 D_1 为第一象限, 不是有界区域。

D_a 为第一象限中半径为a的圆形区域

$$= \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a e^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}r \ = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^a\right) = \frac{\pi}{4}\,(1-e^{-a^2})\ 。$$

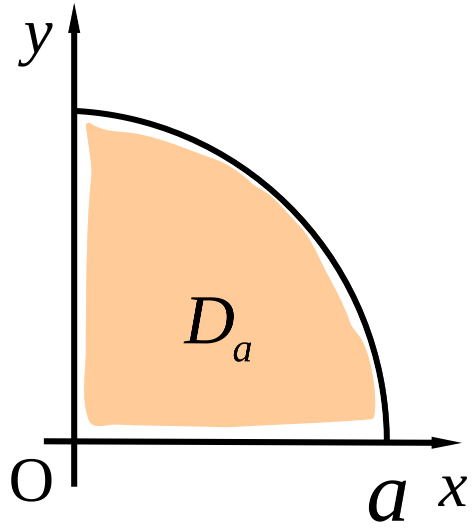
【例】 利用你学过的知识证明：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。

【解】 由定积分与积分变量符号无关，有

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{a\to+\infty} \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ .$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad\Longrightarrow\quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



其中 D_1 为第一象限, 不是有界区域。

D_a 为第一象限中半径为a的圆形区域

【练1】 计算$\iint_D e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 2x, x\ge 0\}$

【练2】 计算$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^x(1+x^2+y^2)^{-2}\,\mathrm{d}y.$

思考题

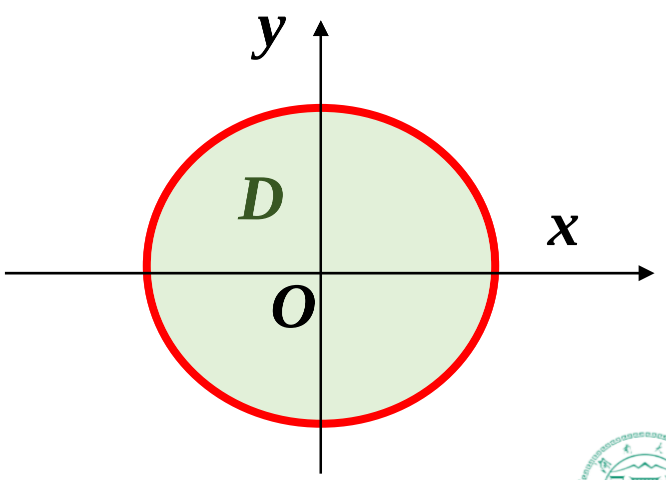
计算$\iint_D \exp\{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1\}$.

设D是平面上的有界区域，点$M_0(x_0,y_0)\in D$，函数$f(x,y)$

在D上有定义.$\forall M\in D, M\neq M_0$，若$\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=\infty$，

称点$M_0(x_0,y_0)$为函数$f(x,y)$在区域D上的一个瑕点.

如$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$



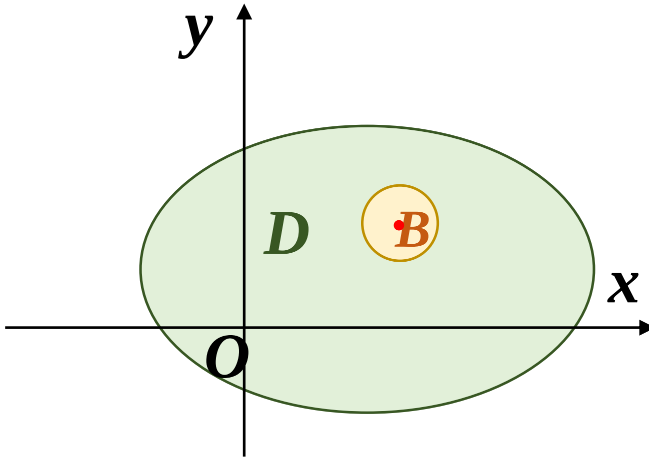
圆周上的所有点均为被积函数的瑕点

二、含瑕点的二重积分

设函数$f(x,y)\in R(D\setminus M_0)$，以$M_0$为中心，以$\varepsilon>0$为半径

作一个小圆$B(M_0,\varepsilon)$,则$f(x,y)$在$D-B$内黎曼可积,此时称

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint\limits_{D-B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



为函数 $f(x,y)$ 在区域D的**含瑕点的反常二重积分**.

1.若极限存在，称含瑕点的反常二重积分收敛,

极限值称为函数含瑕点的反常二重积分值。

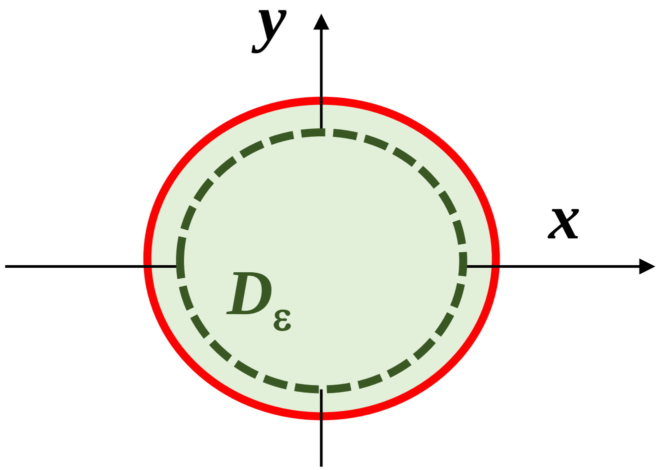
2.若极限不存在,称含瑕点的反常二重积分发散。

3.若瑕点不止一个,可作类似的讨论。

二、含瑕点的二重积分

【例】 计算$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，其中$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$

【解】 在极坐标系下D变为 $D^*=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi\}$



$D_\varepsilon=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1-\varepsilon\}$

原式= $\iint_{D^*}\frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-r^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-r^2}}$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-\varepsilon}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}2\pi(-\sqrt{1-r^2})\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

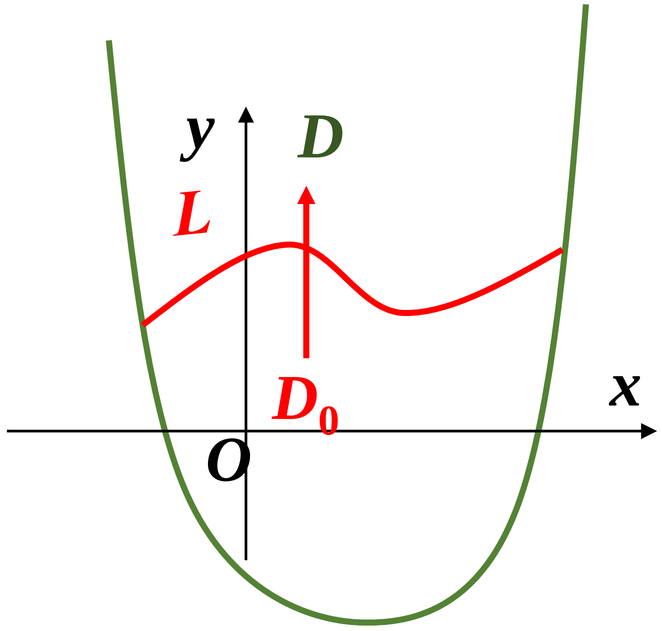
$$=-2\pi\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}-1)=2\pi.$$

本节小结

反常积分=黎曼积分+极限

区域无界　　无界区域上的二重积分

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{D_0\to D}\boxed{\iint\limits_{D_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$



函数无界　　含瑕点的二重积分

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\boxed{\iint\limits_{D-B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$