湖南大学理工类必修课程

大 学 数 学 AII

—— 多元微积分学

2.1 多元函数的概念

- 主讲：于红香

第二章　多元函数微分学

第一节 多元函数的概念

一、 平面区域

二、多元函数及其图形

第一节 多元函数的概念

本节教学要求：

- 正确理解集合的连通性的概念。
- 正确理解开区域、闭区域、区域边界的概念。
- 正确理解区域的有界性概念。
- 正确理解 n 维空间中点的邻域的概念。
- 正确理解集合的聚点的概念。
- 正确理解多元函数及其图形的概念。

一元函数微分学

框架逻辑

多元函数微分学

新问题

新工具　新手段　新视角

点、向量

【例】

长方形面积 S 依赖于其长 x，宽 y：

$$S = xy$$ 2个自变量，二元函数

长方体体积 V 依赖于其长度 x，宽度 y 及高 z：

$$V = xyz$$ 3个自变量，三元函数

这里 x, y, z 各自独立变化且都大于0.

若有 $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ n个自变量，n元函数

研究函数要涉及到它的定义域，

二元函数的定义域是平面点集，

故先介绍关于平面点集的相关知识。

一元：	二元：
区间	平面区域

一、 平面区域

1.邻域

2. 内点、外点、边界点

3. 集合的孤立点

4. 集合的聚点

5. 开集、闭集

6. 集合的连通性

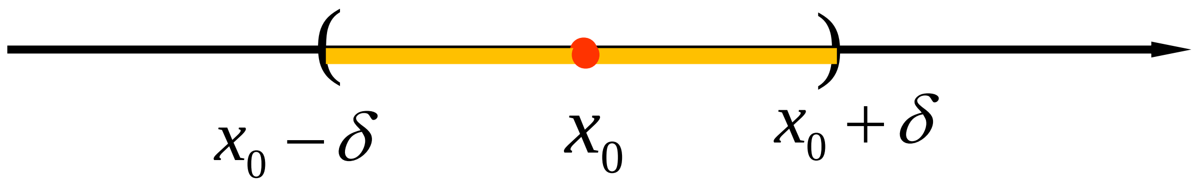
7. 开区域、闭区域

8. 有界集

9. 集合的连通性

1. 邻域

点 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$：$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$



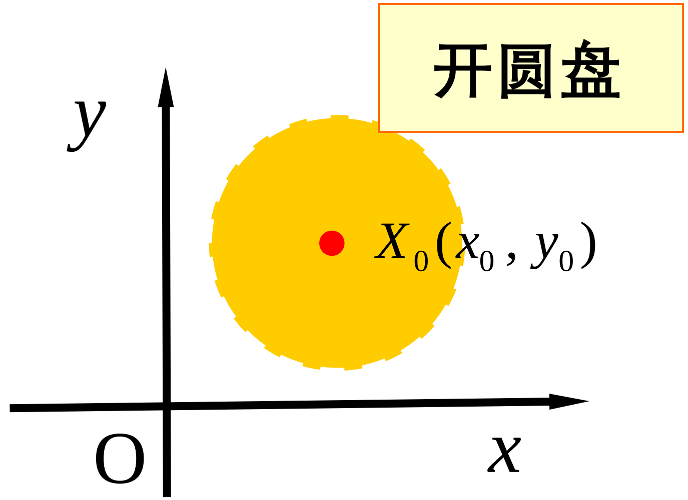
$$U(x_0,\delta)=\{x \mid d(x,x_0)<\delta\}$$

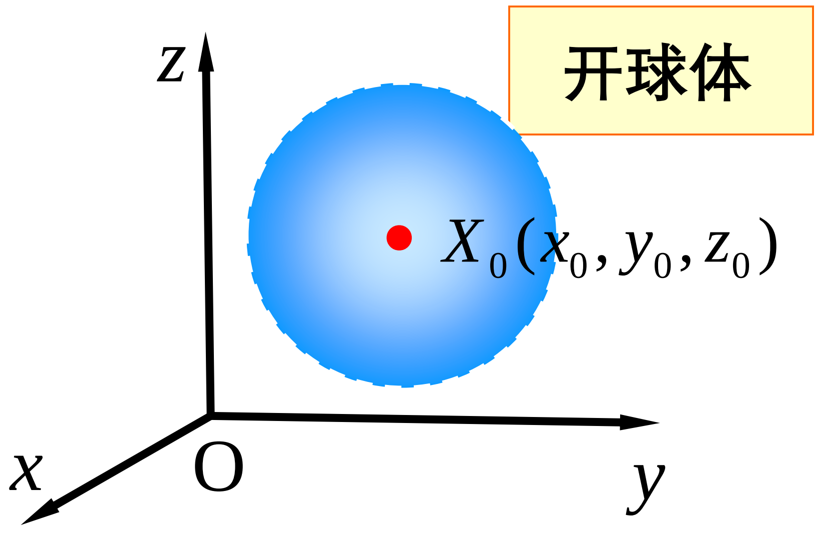
利用“点”、“距离”将邻域概念推广到高维空间

1. 邻域

在 R^2 中：$\mathrm{U}(X_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$

在 R^3 中：$\mathrm{U}(X_0,\delta)=\{(x,y,z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$





1. 邻域

设 $X_0 \in R^n$ （$n=2,\ 3,\cdots$ ），$\delta>0$ 为实数，则称集合

$$\boxed{\mathrm{U}(X_0,\delta)=\{X\mid \mathrm{d}(X,X_0)<\delta\}}$$

为 R^n 中点 X_0 的 δ 邻域，记为 $\mathrm{U}(X_0,\delta)$ 。

1. 邻域

空间 R^n 中去心邻域的定义

设 $X_0 \in R^n$ （$n = 2, 3, \cdots$），$\delta > 0$ 为实数，则称集合

$$\hat{U}(X_0, \delta) = \{X \mid 0 \boxed{<} d(X, X_0) < \delta\}$$

为 R^n 中点 X_0 的 去心δ 邻域，记为 $\hat{U}(X_0, \delta)$ 。

在 R^2 中：$\hat{U}(X_0, \delta) = \{(x, y) \mid 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$

在 R^3 中：$\hat{U}(X_0, \delta) = \{(x, y, z) \mid 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta\}$

2. 集合的内点、外点、边界点

$R^2\backslash E = E^c$(余集或补集)

$\forall U(X_0)$

其内既有 E的点

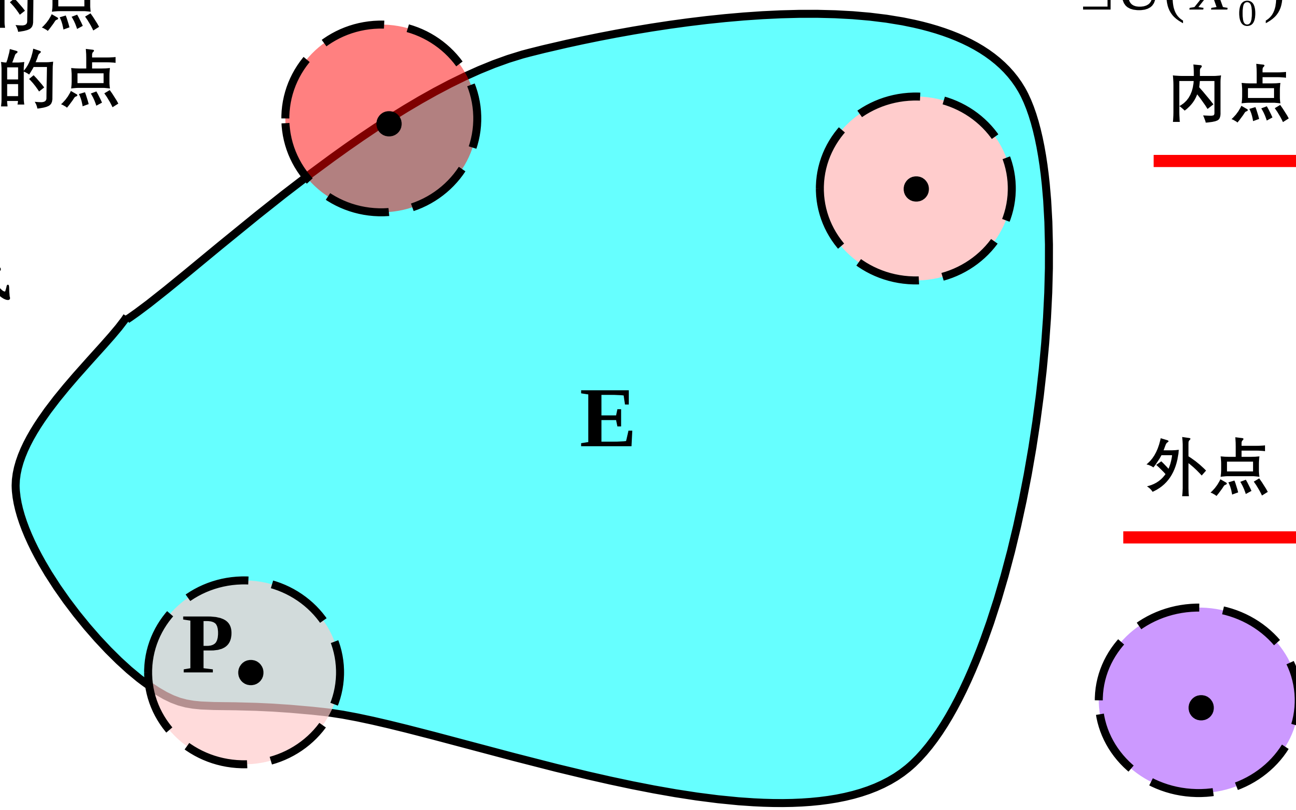
也有属于E^c 的点

边界点

$\exists U(X_0)\subset E$

内点

全体边界点构成的集合称为E的边界，记为∂E.

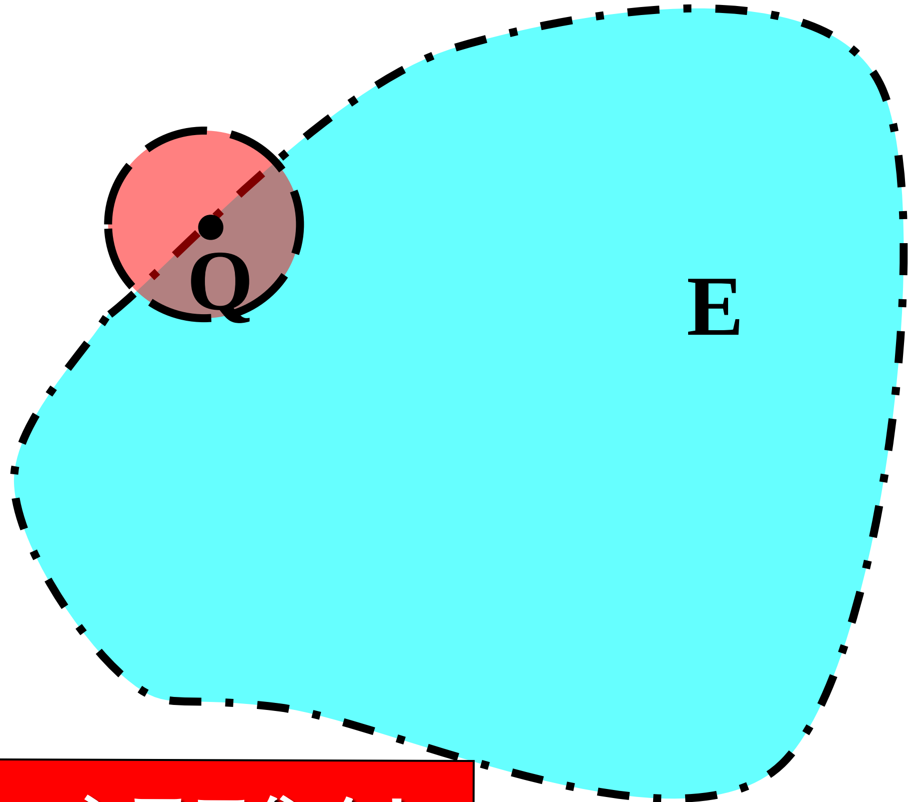


外点

$\exists U(X_0)\subset E^c$

点P是边界点吗？

点Q是边界点吗？



边界点不一定属于集合！

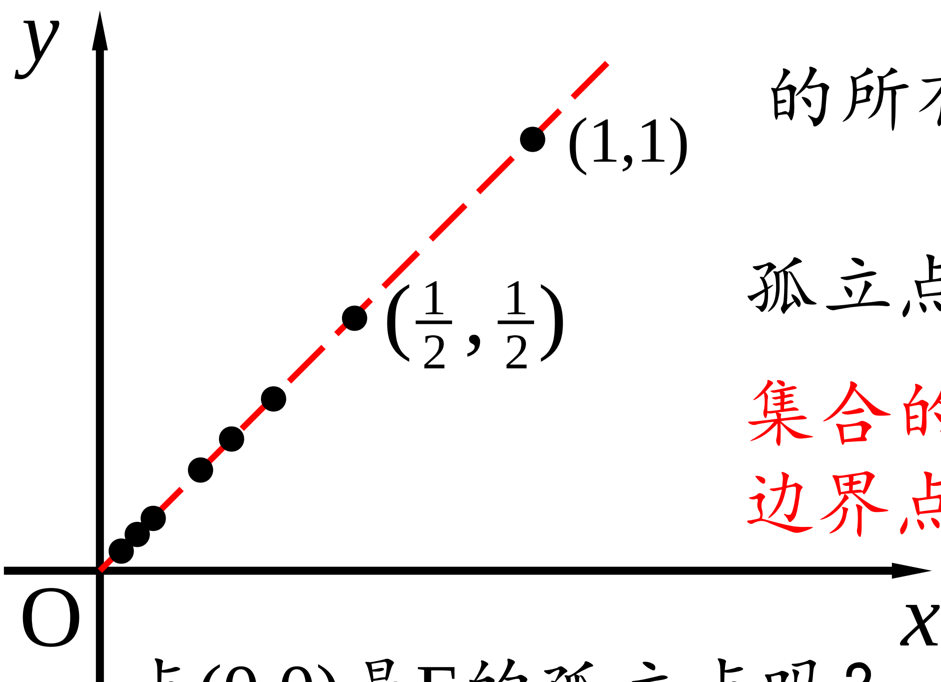
3. 集合的孤立点

若点 $X_0 \in \mathrm{E}$ ，但 $\exists \hat{U}(X_0) \cap \mathrm{E} = \varnothing$ ，

则称 X_0 为集合 E 的孤立点 。

集合 $\mathrm{E} = \{(x, y) \mid x = y = \dfrac{1}{n}, \ n \in N_+\}$

的所有点均为 E 孤立点。



孤立点是否为集合的边界点？

集合的孤立点一定是集合的边界点！

点(0,0)是E的孤立点吗？

4. 集合的聚点

设有集合 E，若 $\forall U(X_0)$有无限多个点属于E

则称点 X_0 为集合 E 的一个聚点。

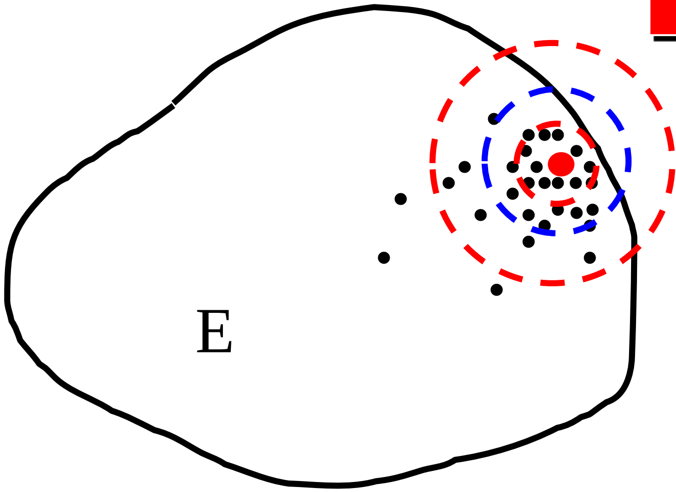
或：设有集合 E，若 $\forall \delta > 0$，$\hat{U}(X_0, \delta) \cap E \neq \varnothing$

则称点 X_0 为集合 E 的一个聚点。

点 X_0 附近“聚集”了

无限多个E中的点！

聚点



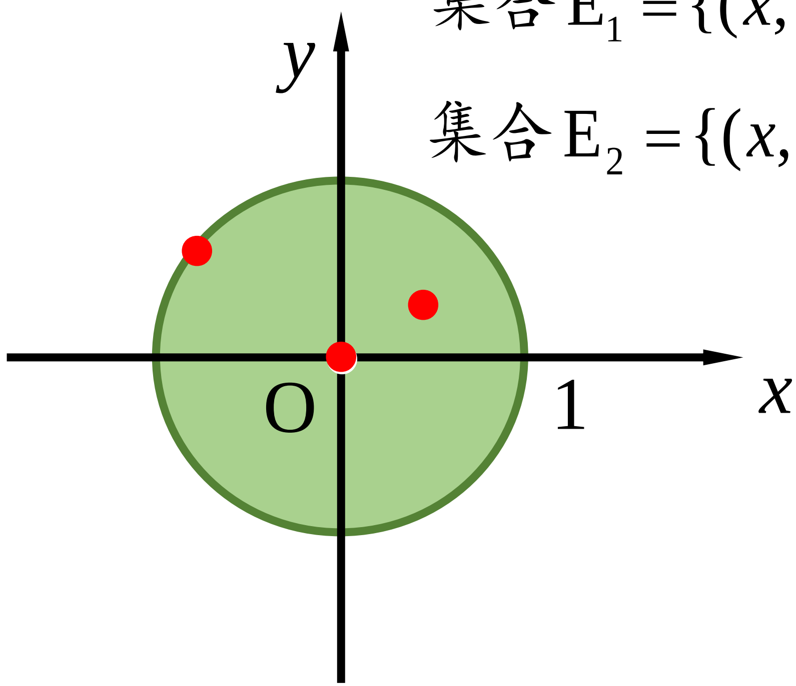
4. 集合的聚点

【例】 找出集合 $E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\le 1\}$ 的所有内点、边界点和聚点。

【解】圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点、以及点 (0, 0) 都是 E 的边界点。

集合 $E_1=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 的所有点均为内点。

集合 $E_2=\{(x,y)\mid 0\le x^2+y^2\le 1\}$ 的所有点均为聚点。



内点一定是聚点，

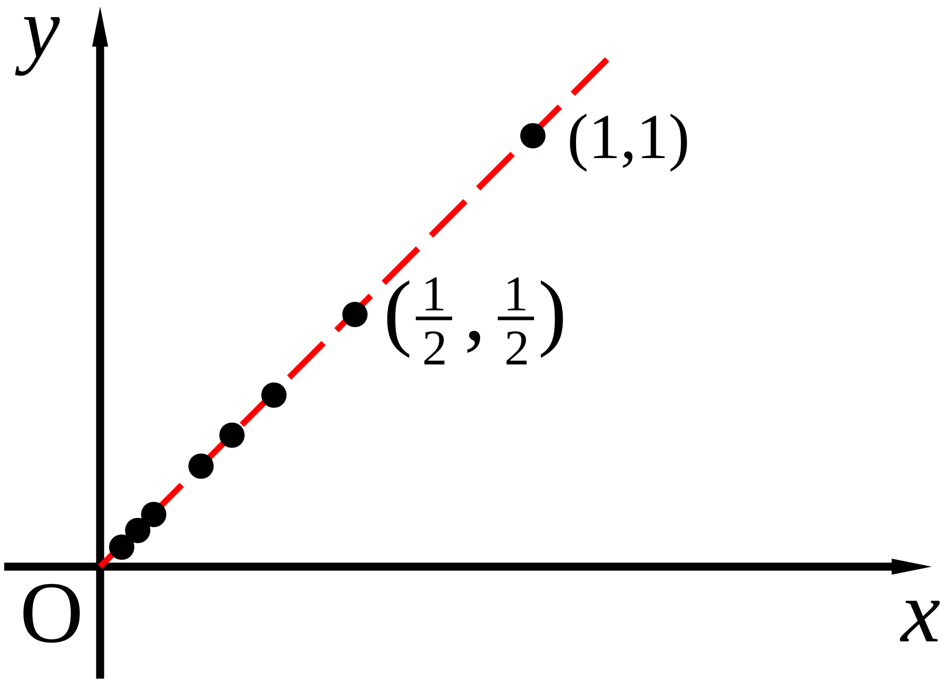
不是孤立点的边界点一定是聚点。

聚点可能属于集合 E，

也可能不属于集合 E。

【例】 集合 $E=\{(x,y) \mid x=y=\dfrac{1}{n},\ n\in N_+\}$

的所有点均为 E 孤立点。



点(0,0)是E的孤立点还是聚点?

点 (0, 0) 为其聚点!

5. 开集、闭集

若集合 E 中的每一点均为它的内点，

则称集合 E 为 R^2 中的开集。

若集合 E的余集E^c 是开集，则称E是闭集。

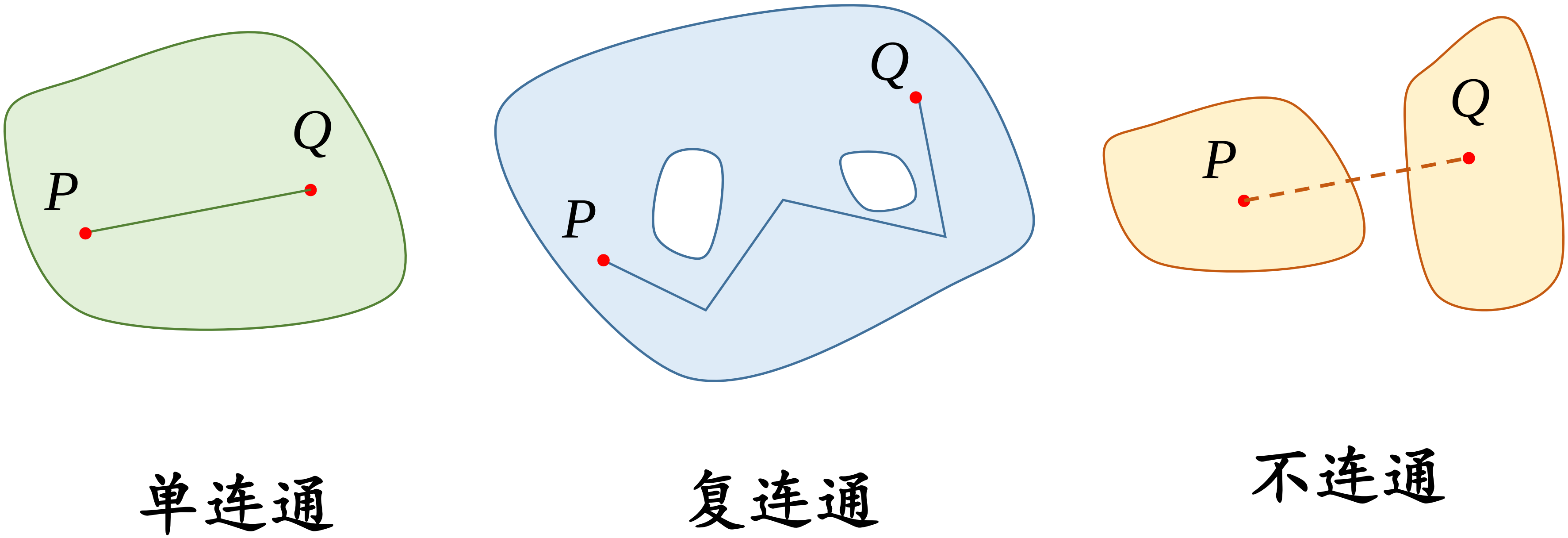
$\boxed{\text{非空平面点集E为开集} \Leftrightarrow \text{E不含E的边界点}}$

$\boxed{\text{非空平面点集E为闭集} \Leftrightarrow \text{E包含E的边界点}}$

规定:空间中的空集与全集既是开集又是闭集.

6. 集合的连通性

若非空点集E 中的任意两点均可用完全位于 E 内的折线连接起来，则称 E 为连通集 .



7. 开区域、闭区域

对比开区间，闭区间

若非空点集 E为连通的开集，则称E为开区域

若E是开区域，记$\bar{E}=E\bigcup\partial E$，称$\bar{E}$为闭区域。

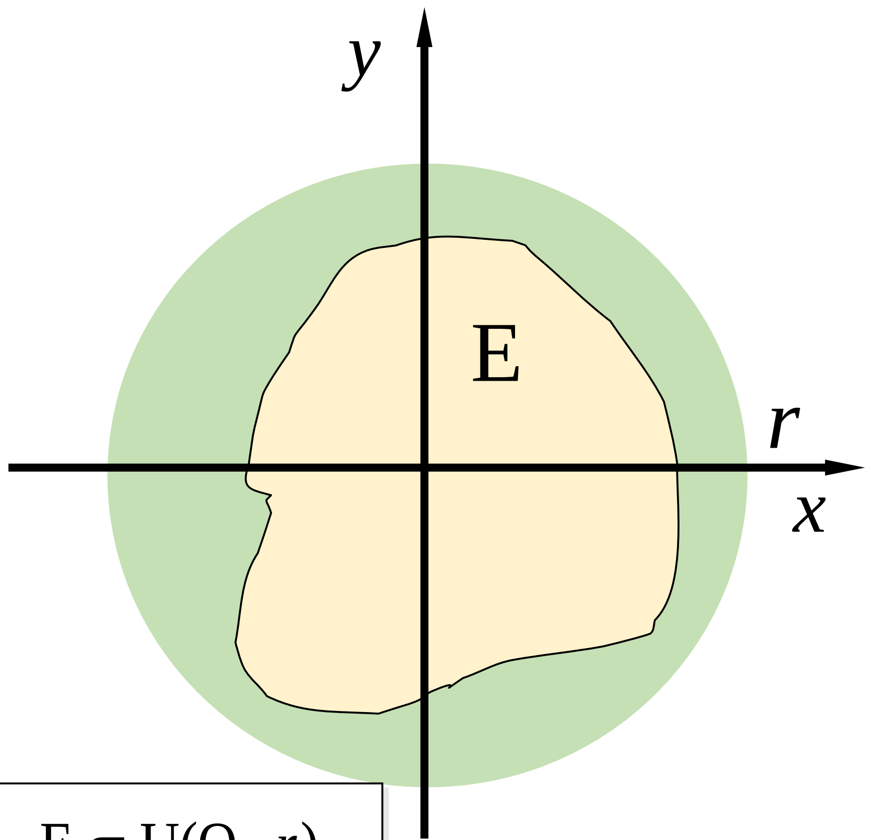
开区域是连通开集.

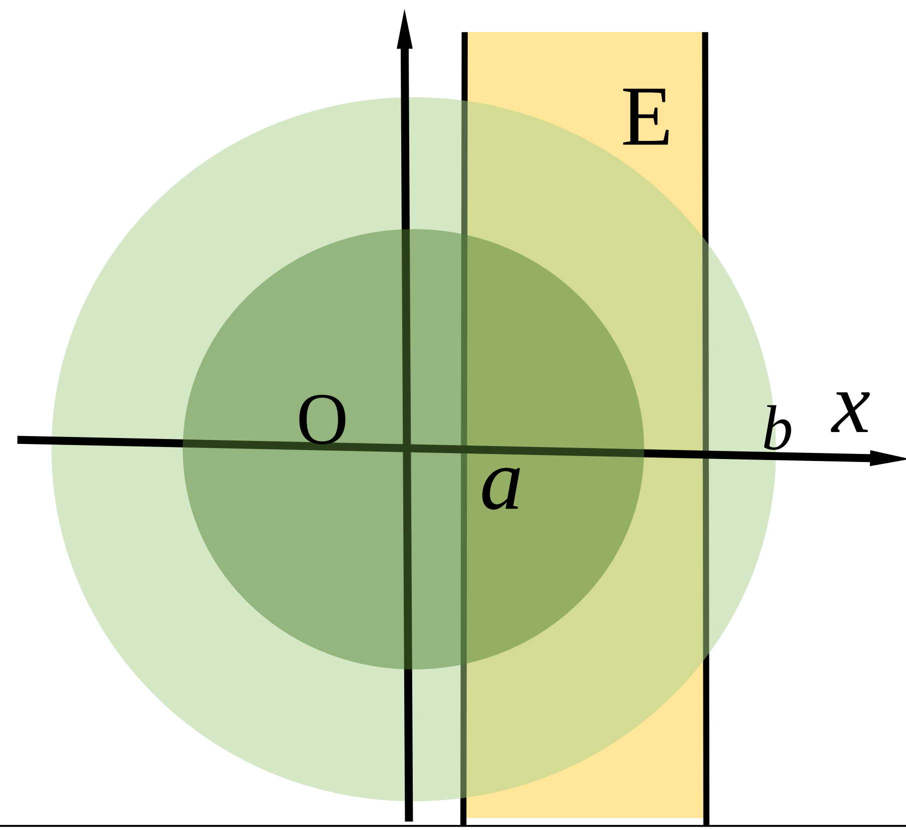
开区域 Ω 的内点及边界点都是它的聚点.

8. 有界集

若 $\exists\, r > 0$，使非空点集 $\mathrm{E} \subset \mathrm{U}(\mathrm{O}, r)$，

则称 E 为有界集，否则称 E 为无界集。





$\mathrm{E} \subset \mathrm{U}(\mathrm{O},\ r)$

R^2中的有界集

无界集 $\mathrm{E} = \{(x, y) \mid a \le x \le b\,,\ -\infty < y < +\infty\}$

9. 集合的连通性

【例】 判别下列集合的有界性、连通性及开闭:

$E_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$ 是有界 连通 开集

$E_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ 是无界 连通 闭集

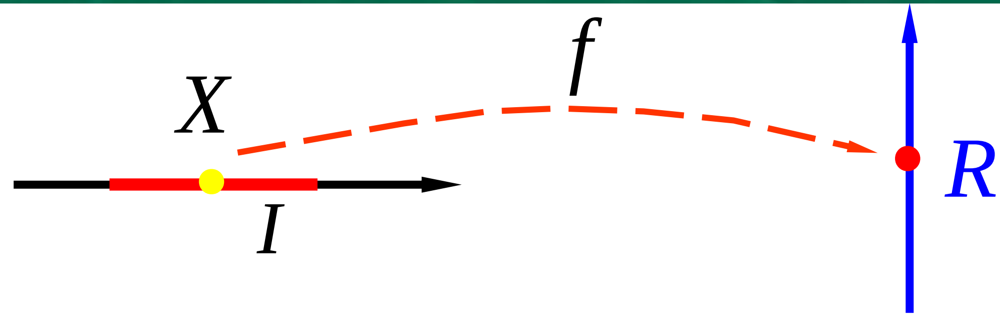
$E_3 = \{(x,y,z) \mid 4 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$

是有界 连通 非开非闭集

二、多元函数及其图形

一元函数

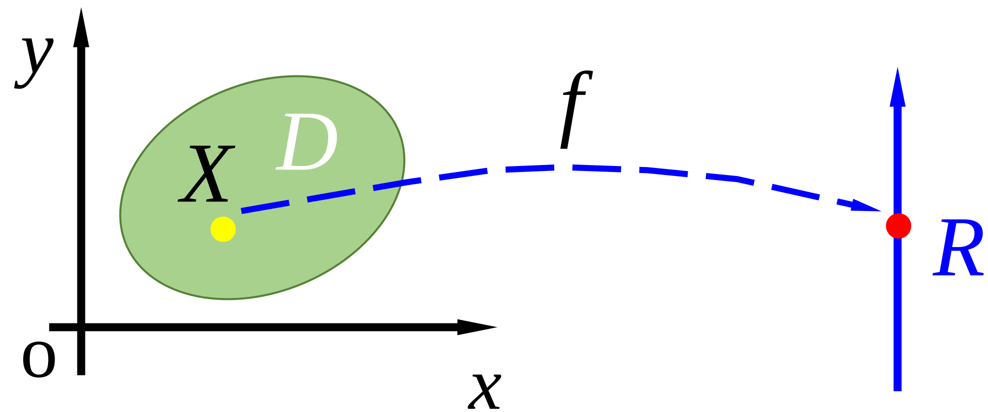
$y = f(x)$



二元函数

$z = f(x, y)$

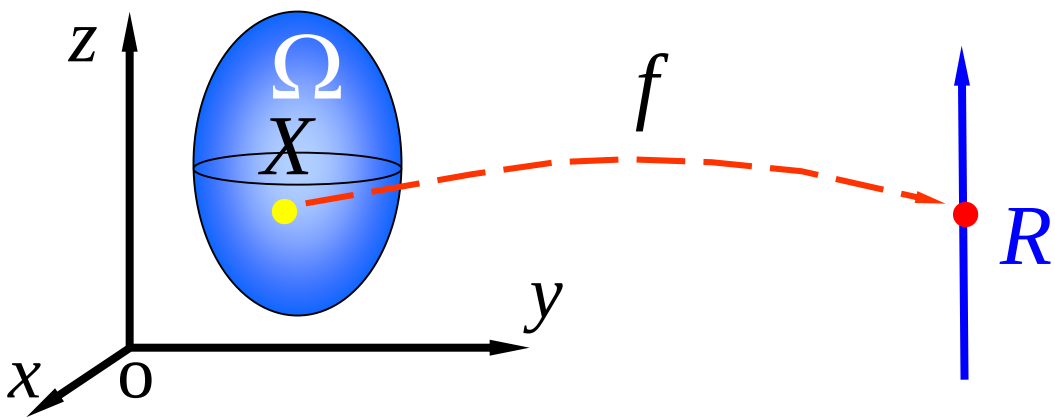
$S = x \times y$



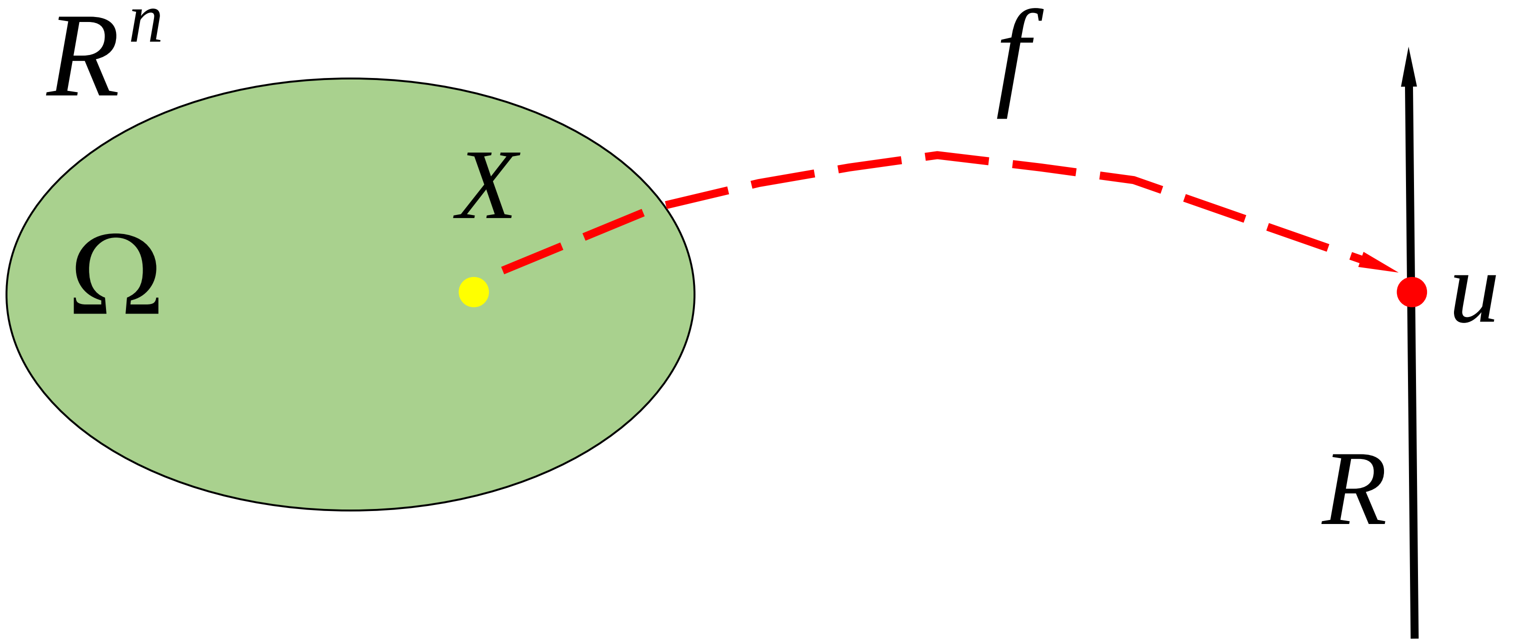
三元函数

$u = f(x, y, z)$

$V = x \times y \times z$



二、多元函数及其图形



$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$$

$$u \in R$$

$$u = f(X) = f(x_1, \cdots, x_n)$$

二、多元函数及其图形

定义

若f是xOy面上的非空点集D到R的映射，即 $f: D \to R$

则称 f 为定义在D 上的 二元（实）函数（简称函数）

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

D称为函数f的定义域，记为 $D(f)$。

$z = f(P) = f(x, y)$ 称为点$P(x, y)$所对应的函数值，

定义域 D 在 f 下的像集 $f(D) = \{z | z = f(P), P \in D\}$

称为 f 的值域，记为$R(f)$

定义

设非空集 $\Omega \subset R^n$。若有映射 $f:\Omega \to R$

则称 f 为 Ω 上的 n 元函数，记为

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Ω 称为函数的定义域，记为 $D(f)$。

$u = f(X) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为函数 f 在点 X 处的函数值，$f(\Omega)$ 称为函数的值域。记为$R(f)$。

二、多元函数及其图形

二元函数 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ 的图形为集合

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D\},$$

它表示为三维空间 R^3 中的几何图形 (曲面、曲线等) 。

前面学过的一些二次曲面就是

相应的一些二元函数的图形。

二、多元函数及其图形

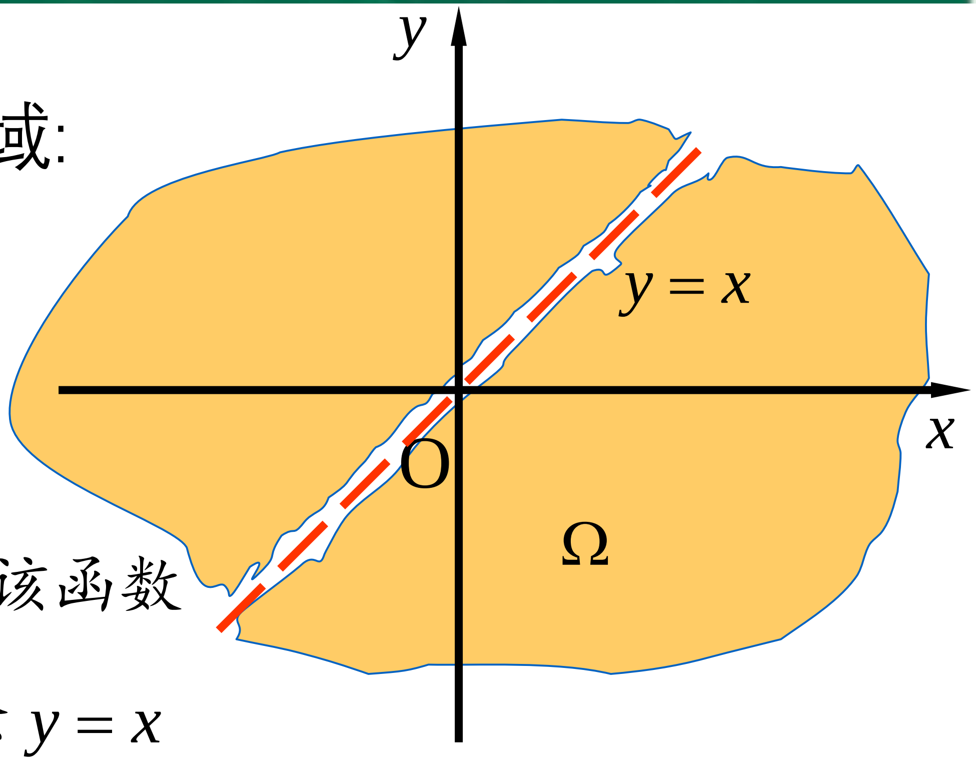
n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$， $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega$ 的图形为集合

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, u) \mid u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega\}。$$

三元及三元以上的函数不能画出几何图形。

【例】 求下列函数的定义域:

$$z=\frac{x^2+3y^2}{x-y}$$



【解】由分母不能为零可知，该函数的定义域为 xy 平面上除 $y=x$ 以外的所有点:

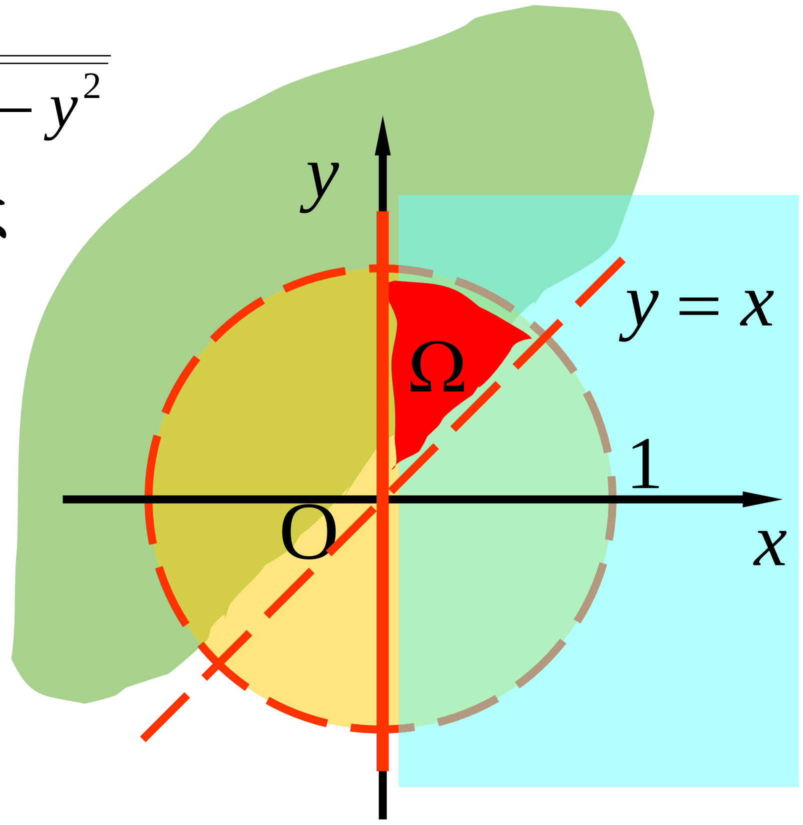
$$\Omega=\{(x,y)\mid\ (x,y)\in R^2\ \text{且}\ x\neq y\ \}$$

【例】求函数的定义域:

$$f(x,y)=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

【解】**由对数函数知识、分母不能为零、负数不能开偶次方得**

$$\begin{cases} y-x>0 \\ 1-x^2-y^2>0 \\ x\ge 0 \end{cases}$$



故原函数的定义域为

$$\Omega=\{(x,y)\mid\ y-x>0,\ x\ge 0,\ 1-x^2-y^2>0\}$$

本节小结

1. 空间 R^n 中邻域的定义

2. 内点、外点、边界点、聚点、孤立点、开集、闭集、有界集、连通性

概念的理解和判别

3. 开区域、闭区域

区域内点的特点

4. 多元函数及其图形

N元函数是n+1维空间中的几何图形。

多元函数有复合函数和隐函数；

求多元函数的定义域。