湖南大学理工类必修课程

大 学 数 学 AII

—— 多元元微积分学

1.4 空间直线及其方程

- 主讲：于红香

向量代数与空间解析几何

第四节　空间直线及其方程

一．空间直线的方程

二．与直线有关的几个问题

三．平面束方程

第四节 直线及其方程

本节教学要求：

▲ 理解直线的方向向量的概念。

▲ 熟悉直线的点向式方程、两点式方程、标准方程、参数方程和一般方程以及它们间的转化。

▲ 熟悉直线间的夹角、点到直线的距离的计算。

▲ 掌握直线共面的条件。

▲ 理解直线与平面相交的关系。

▲ 了解平面束方程及其应用。

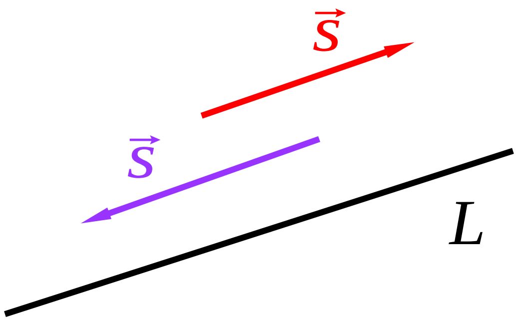
一. 空间直线的方程

1.直线的一般方程

2. 直线的点向式方程

3. 直线的参数方程

4. 直线的两点式方程



与已知直线 L 平行的任一非零向量，均称为该直线的方向向量，记为

$$\vec{s}=(m,\ n,\ p)。$$

$(m,\ n,\ p$ 不全为零$)$

若 $\vec{s}$ 是直线 L 的方向向量，则 $\forall\lambda\in R$，$\lambda\vec{s}$ 也是 L 的方向向量。

若 $\vec{s}$ 是直线 L 的方向向量，$L_1 /\!/ L$，则 $\vec{s}$ 也是 L_1 的方向向量。

直线的方向数

直线 L 的任何一个方向向量 $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$ 的坐标 $m,\ n,\ p$ 称为直线 L 的一组方向数。

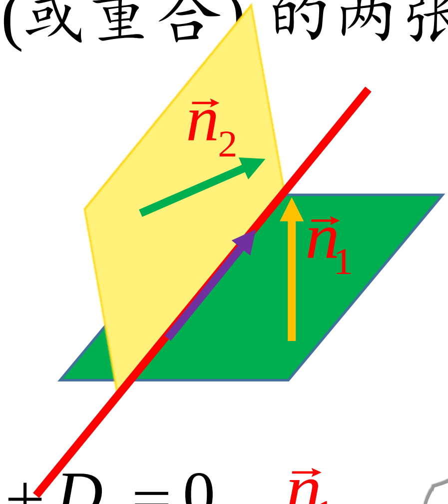
直线的方向余弦

直线 L 的任何一个方向向量 $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$ 的方向余弦，称为直线 L 的方向余弦。

1. 直线的一般方程

相交的两平面确定一条直线

R^3 空间中，任何不相互平行（或重合）的两张平面的交线为一条直线。



设有平面 π_1 和 π_2：

$$\pi_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad \vec{n}_1$$

$$\pi_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \quad \vec{n}_2$$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$$

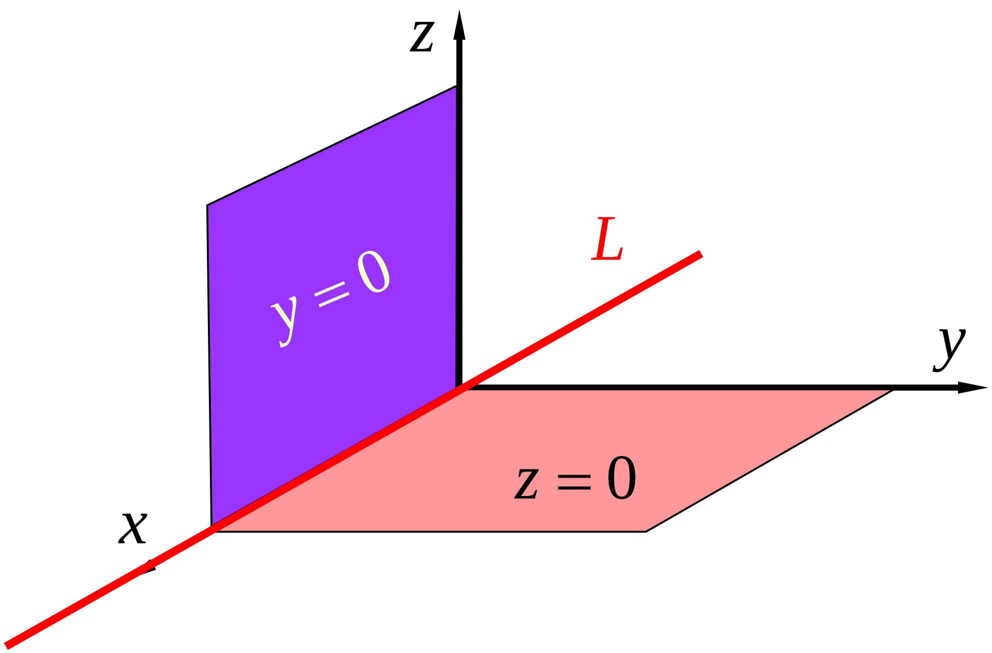
其中相应的系数不成比例，则由 π_1 和 π_2 所确定的直线 L 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0。\end{cases} \quad \text{(一般方程)}$$

例

$$L:\begin{cases} z=0, \\ y=0。\end{cases}$$

表示坐标面xy与坐标面xz的交线(x轴)。



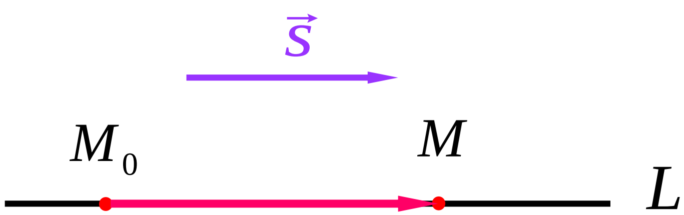
$\vec{s}\perp\vec{k}$， $\vec{s}\perp\vec{j}$，

$\vec{s}=\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ 。

2. 直线的点向式方程

问题 已知一非零向量 $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$ 和点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,

求过点 M_0 且以 $\vec{s}$ 为方向向量的直线 L 的方程。



在 L 上任取一点 $M(x,y,z)$,

而 M_0 也在直线上，故

$\overrightarrow{M_0M}\,/\!/\,\vec{s}$,

从而

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

(点向式方程)

点向式方程可以写成一般方程吗?

2. 直线的点向式方程

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}\text{。}$$

(1) $m\neq 0, n\neq 0, p\neq 0$ $\quad\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}\\[2ex]\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}\end{cases}$

(2) $m=0, n\neq 0, p\neq 0$ $\quad\begin{cases}x-x_0=0\\[1ex]\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}\end{cases}$

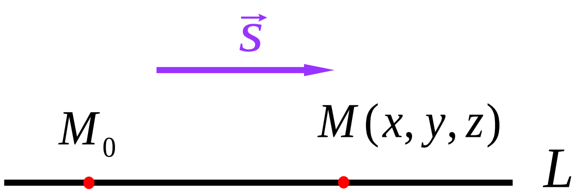
(3) $m=n=0, p\neq 0$ $\quad\begin{cases}x-x_0=0\\[1ex]y-y_0=0\end{cases}$

3. 直线的参数式方程

过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量

$\vec{s}=(m,\ n,\ p)$的直线L的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=x_0+mt, \\ z=z_0+pt, \\ y=y_0+nt, \end{cases}$$



$$t=0 \leftrightarrow M_0$$

$$t\in R \leftrightarrow \text{直线}$$

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \quad (t\in R) \quad (\text{参数式}) \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$

两点确定一条直线

若直线过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ 为直线的方向向量。

得到该的直线点向式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}。\qquad \text{(两点式)}$$

小结

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0。 \end{cases}$$ (一般方程)

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}。$$ (点向式方程)

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad (t \in R) \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$ (参数式)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}。$$ (两点式)

例 直线 L 过点 $M(1,\ 0,-2)$ 且与平面 $\pi:\ 2x-y+3z=0$ 垂直，求直线 L 的点向式方程，参数方程，一般方程。

解 因为 $L\perp\pi$，故可取 $\vec{s}=\vec{n}=(2,-1,\ 3)$。

又直线过点 $M(1,\ 0,-2)$，故直线 L 的

点向式方程：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$。 参数方程：$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-t, \\ z=-2+3t, \end{cases}$ $t\in R$。

对称方程

一般方程：$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}, \\ \dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}。 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+2y-1=0, \\ 3y+z+2=0, \end{cases}$

练

直线L过点$M(0,0,1)$且平行于向量$\vec{i}+\vec{j}$，求直线 L 的点向式方程 (对称方程) 。

解 因为 $L // \left(\vec{i}+\vec{j}\right)$，所以，可取方向向量

$$\vec{s}=\vec{i}+\vec{j}=(1,\ 1,\ 0)\text{。}$$

又直线过点 $M(0,\ 0,\ 1)$，故直线 L 的点向式方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}\text{。}$$

或者写为

$$x=y=\frac{z-1}{0}\text{。}$$

例 求直线 $L:\begin{cases}2x-3y+z-5=0\\3x+y-2z-2=0\end{cases}$ 的点向式方程。

解 两个平面的法向量分别为 $\vec{n}_1=(2,-3,1)$，$\vec{n}_2=(3,1,-2)$。

故取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-3&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=5\vec{i}+7\vec{j}+11\vec{k}.$

为求直线 L 上的一点，不妨令 $z=0$，得到方程组

$$\begin{cases}2x-3y=5,\\3x+y=2,\end{cases}\longrightarrow$$

$x=1,\quad y=-1,$

L 过点 $M(1,-1,0)$。

L 的点向式方程为 $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{11}$。

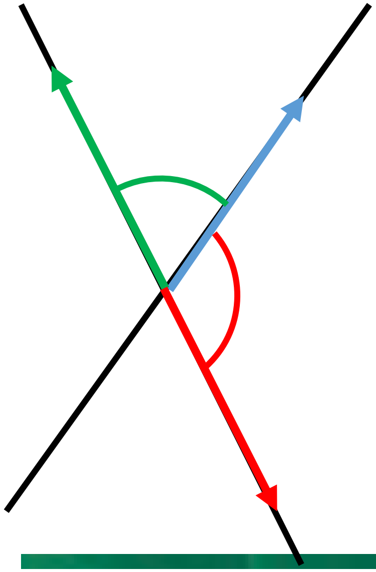
二. 与直线有关的几个问题

1. 两直线间的夹角
2. 直线与平面间的夹角
3. 直线共面的条件
4. 直线与平面相交的交点 坐标
5. 点到直线的距离

定 义

两直线的**方向向量**间的夹角，称为这两条直线间的夹角。

设直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s}_1$，直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2$，则



$$<L_1, L_2> = <\vec{s}_1, \vec{s}_2>，或 <L_1, L_2> = \pi - <\vec{s}_1, \vec{s}_2>$$

$$\boxed{\cos <L_1, L_2> = |\cos <\vec{s}_1, \vec{s}_2>| = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\| \; \|\vec{s}_2\|}\text{。}}$$

常指锐角

两直线平行和垂直的条件

设有直线

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

则

$$L_1 /\!/ L_2 \iff \vec{s}_1 /\!/ \vec{s}_2 \iff \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}$$

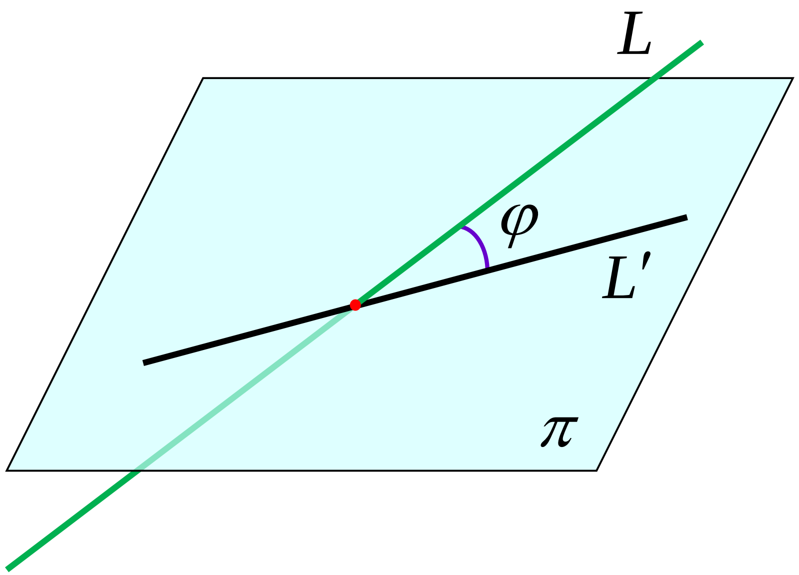
$$\iff \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2},$$

$$L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \iff \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$$

$$\iff m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0。$$

定 义

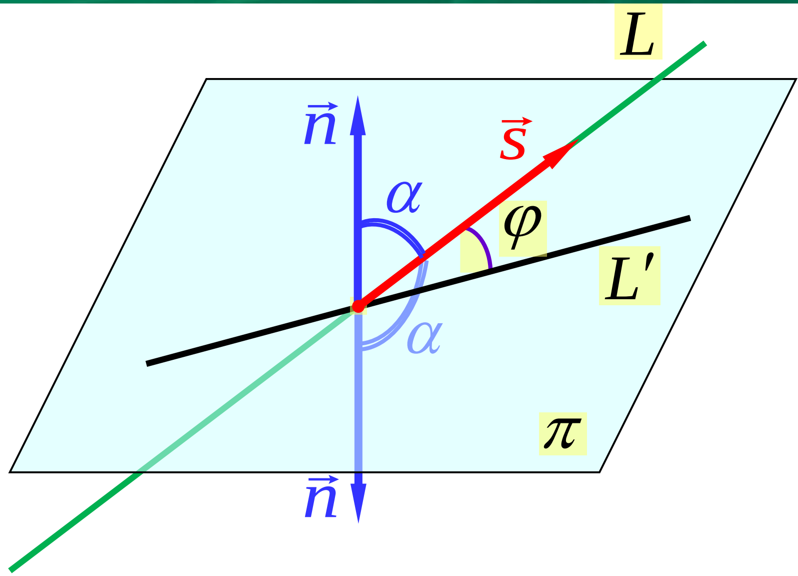
直线与它在平面上的投影直线间所夹的小于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角，称为直线与平面间的夹角。



若 $L \perp \pi$, 则规定 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$;

若 $L // \pi$, 则规定 $\varphi = 0$。

2. 直线与平面间的夹角



在直线与平面的交点处，作平面的法向量 $\vec{n}$ 和直线的方向向量 $\vec{s}$，记

$$\alpha = <\vec{s}, \vec{n}>,$$

则 $\alpha = <\vec{s}, \vec{n}> = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$。

而 $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$， $\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin\varphi$，

$$\sin\varphi = |\cos(\frac{\pi}{2} \pm \varphi)| = |\cos\alpha| = |\cos<\vec{s}, \vec{n}>|$$

$$= \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\|\vec{n}\|}, \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})。$$

定理 1

设直线 $L: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}\quad (\vec{s}=(m,\ n,\ p))$

与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0\quad (\vec{n}=(A,\ B,\ C))$ 的交角

为 φ，则

$$\sin\phi=|\cos<\vec{s}\cdot\vec{n}>|=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\ \|\vec{n}\|},\quad \left(0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\right)。$$

2. 直线与平面间的夹角

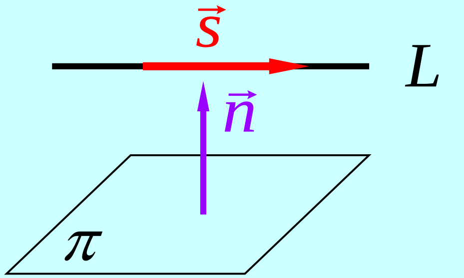
直线与平面平行和垂直的条件

设有直线 $L:\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}\quad (\vec{s}=(m,\ n,\ p))$,

平面 $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0\quad (\vec{n}=(A,\ B,\ C))$, 则

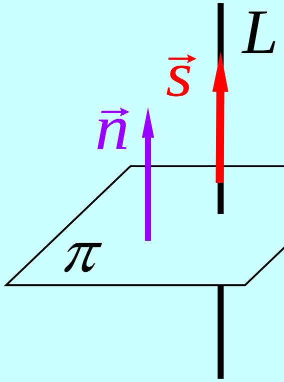
$L \,/\!/\, \pi \iff \vec{s}\perp\vec{n} \iff \vec{s}\cdot\vec{n}=0$

$\iff mA+nB+pC=0$。



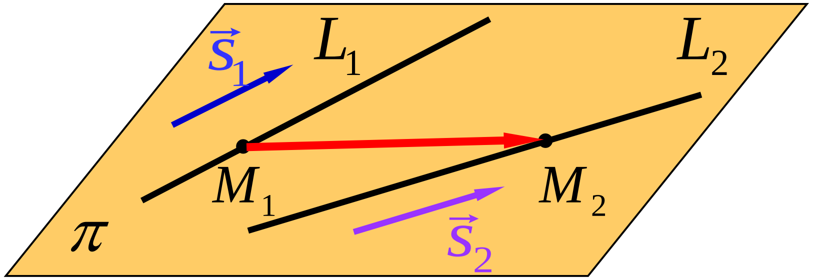
$L\perp\pi \iff \vec{s}\,/\!/\,\vec{n} \iff \vec{s}\times\vec{n}=\vec{0}$

$\iff \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$,



设直线 L_1 过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 方向向量为 $\vec{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1)$),

直线 L_2 过点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$, 方向向量为 $\vec{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$)。



引入向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 则

L_1 与 L_2 共面 $\Longleftrightarrow$ $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ $(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

定理 2

过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 方向向量为 $\vec{s}_1 = (m_1,\ n_1,\ p_1)$ 的直线 L_1 与过点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 方向向量为 $\vec{s}_2 = (m_2,\ n_2,\ p_2)$ 的直线 L_2 共面的充要条件为

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0。$$

4. 直线与平面相交的交点坐标

计算直线与平面相交的交点坐标的方法：

1. 写出直线 L 的参数方程 $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0。\end{cases}$

若直线为一般方程，直线与平面的交点如何求？

2. 将 L 的方程代入平面 π 的方程中

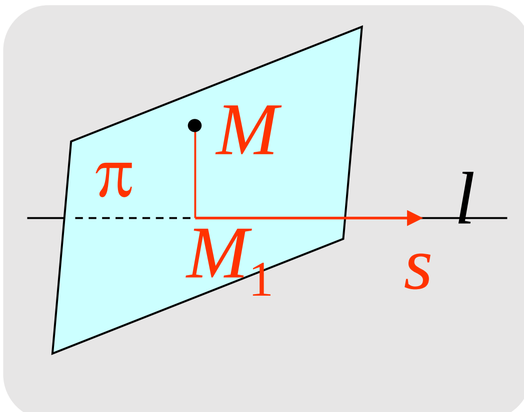
$$A(mt + x_0) + B(nt + y_0) + C(pt + z_0) + D = 0。$$

3. 当 $Am + Bn + Cp \neq 0$ 时，$t = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$，唯一一个交点。

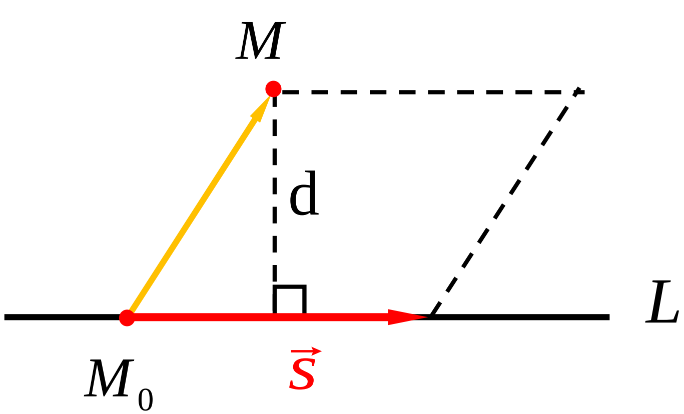
当 $Am + Bn + Cp = 0$，$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ 时，$L // \pi$ 且无交点。

当 $Am + Bn + Cp = 0$，$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ 时，L 位于 π 上。

空间中任意一点 $M(x, y, z)$ 到已知直线 L 的距离



$$d = \left\| \overrightarrow{MM_1} \right\|$$



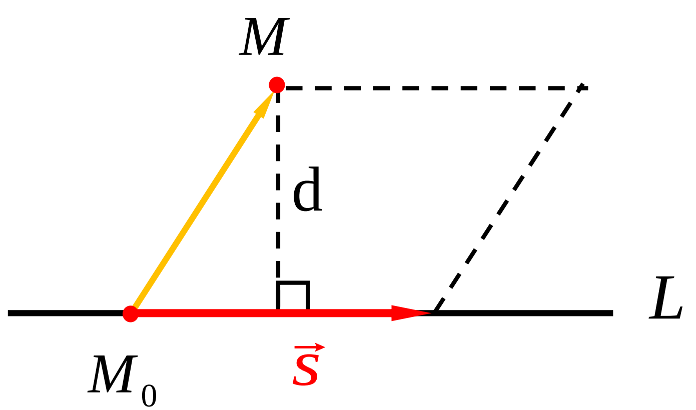
$$d = \frac{\text{平行四边形的面积}}{\text{底边长}}$$

$$= \frac{\| \overrightarrow{M_0M} \times \vec{s} \|}{\| \vec{s} \|}\text{。}$$

定理 3

设直线 L 通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$，则空间中任意一点 $M(x,y,z)$ 到直线 L 的距离为

$$\mathrm{d}=\frac{\|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}。$$



$$\mathrm{d}=\frac{\text{平行四边形的面积}}{\text{底边长}}$$

$$=\frac{\|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}。$$

点线面位置关系举例

例　求直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角.

解　直线 L_1, L_2 的方向向量

$$\vec{s}_1=(1,-4,1)\quad \vec{s}_2=(2,-2,-1)$$

有: $\cos\langle L_1, L_2\rangle=\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\|\|\vec{s}_2\|}$。

$$=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以: $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

例　求过点 $M(-3,\ 2,\ 5)$ 且与直线 $L_1: \begin{cases} x-4z=3 \\ 2x-y-5z=1 \end{cases}$ 平行的直线 L 的方程。

解　直线 L_1 的方向向量 $\vec{s}_1$ 为

$$\vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \mathbf{0} & -4 \\ \mathbf{2} & -1 & -5 \end{vmatrix} = -4\,\vec{i} - 3\vec{j}\ -1\vec{k}\ .$$

因为 $L \,/\!/\, L_1$，所以，可取 $\vec{s} = -\vec{s}_1$，即取 $\vec{s} = (4,\ 3,\ 1)$。

故所求直线 L 的方程为

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}。$$

例　求直线 $L: x-2=y-3=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $\pi: 2x-y+z-6=0$ 的夹角。

解　因为 $\vec{s}=(1,1,2)$，$\vec{n}=(2,-1,1)$，所以，

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\|\vec{n}\|}=\frac{|1\cdot 2+1\cdot(-1)+2\cdot 1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

故直线 L 与平面 π 的夹角 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$。

例 判定下列各组直线与平面的关系.

$$(1)L:\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}\text{和}\pi:4x-2y-2z=3.$$

解 L的方向向量 $\boldsymbol{s}=(-2,-7,3)$

π的法向量 $\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$

$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=(-2)\times4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)=0$

又$M_0(-3,-4,0)$在直线 L上, 但不满足平面方程,

所以L与π平行, 但L不在π内.

$$(2)L:\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}\text{和}\pi:6x-4y+14z=8$$

解 L的方向向量 $\boldsymbol{s}=(3,-2,7)$

π的法向量 $\boldsymbol{n}=(6,-4,14)$

s//n $\therefore$ L 与 π 垂直.

(3) $L: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$ 和 $\Pi: x+y+z=3.$

解 L的方向向量 $\boldsymbol{s}=(3, 1, -4)$

Π的法向量 $\boldsymbol{n}=(1, 1, 1)$

$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n} = 3\times 1 + 1\times 1 + (-4)\times 1 = 0$，所以 $L /\!/ \Pi$

又L上的点 $M_0(2, -2, 3)$满足平面方程,

所以， L 在Π 内.

例 设直线 L 过点 $M_0(2, 1, 3)$，且与直线 $L_1: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = -z$ 垂直相交，求直线 L 的方程。

解 设直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$。

由于 L 与 L_1 垂直相交，所以，L 与 L_1 共面，故有

$$\begin{vmatrix} 2-(-1) & 1-1 & 3-0 \\ 3 & 2 & -1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = m - 2n - p = 0,$$

及由垂直有 $3m + 2n - p = 0$。

从而，m, n, p 满足方程组 $\begin{cases} m - 2n - p = 0, \\ 3m + 2n - p = 0. \end{cases}$

令 $p = 1$ 即可解

$m = \dfrac{1}{2}, \ n = -\dfrac{1}{4}$。

从而直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(2,\ -1,\ 4)$ 。

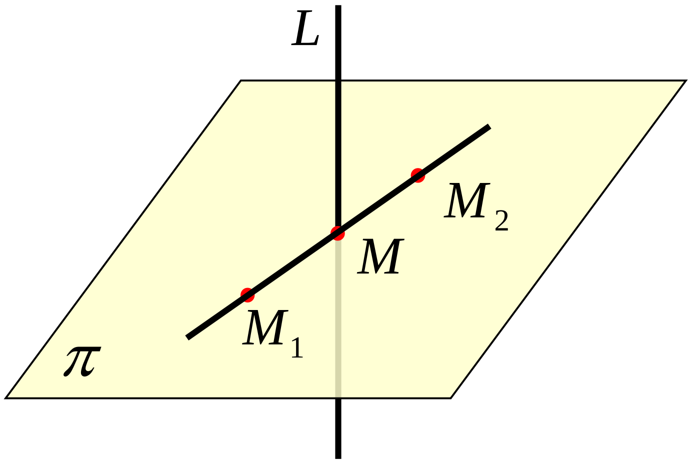
$\boxed{\text{已知} L \text{ 过点 } M_0(2,\ 1,\ 3)}$

所以直线 L 的点向式方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}。$$

例

设点 $M_1(4,\ 3,\ 10)$ 与点 M_2 关于直线 $L:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ 对称，求点 M_2 的坐标。



解 过点 M_1 作平面 $\pi\perp L$，其交点为 M，且 M 为连接点 M_1 和 M_2 的线段的中点。

因为 $L\perp\pi$，所以，

$$\vec{n}=\vec{s}=(2,\ 4,\ 5)。$$

又平面 π 过点 $M_1(4,\ 3,\ 10)$，故它的方程为

$$2x+4y+5z-70=0。$$

我们利用直线的参数方程来求直线与平面的交点的坐标。

直线 $L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=4t+2, \\ z=5t+3。\end{cases}$

将它代入平面 π 的方程中，得 (交点既在 L 上，也在 π 上)

$$2(2t+1)+4(4t+2)+5(5t+3)-70=0,$$

从而， $t=-\dfrac{2\times1+4\times2+5\times3-70}{2\times2+4\times4+5\times5}=1$。

$\pi: 2x+4y+5z-70=0$

故直线 L 与平面 π 的交点的坐标为 $M(3, 6, 8)$。

由于点 $M(3, 6, 8)$ 是 $M_1(4, 3, 10)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的中点，故

$$3=\frac{4+x_2}{2}, \quad 6=\frac{3+y_2}{2}, \quad 8=\frac{10+z_2}{2},$$

从而，所求点为 $M_2(2, 9, 6)$。

例 求点 $M(2,-1,1)$ 到直线 $L:\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ x+2y-z+3=0 \end{cases}$ 的距离d。

解 直线的方向向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\vec{j}+4\vec{k}$.

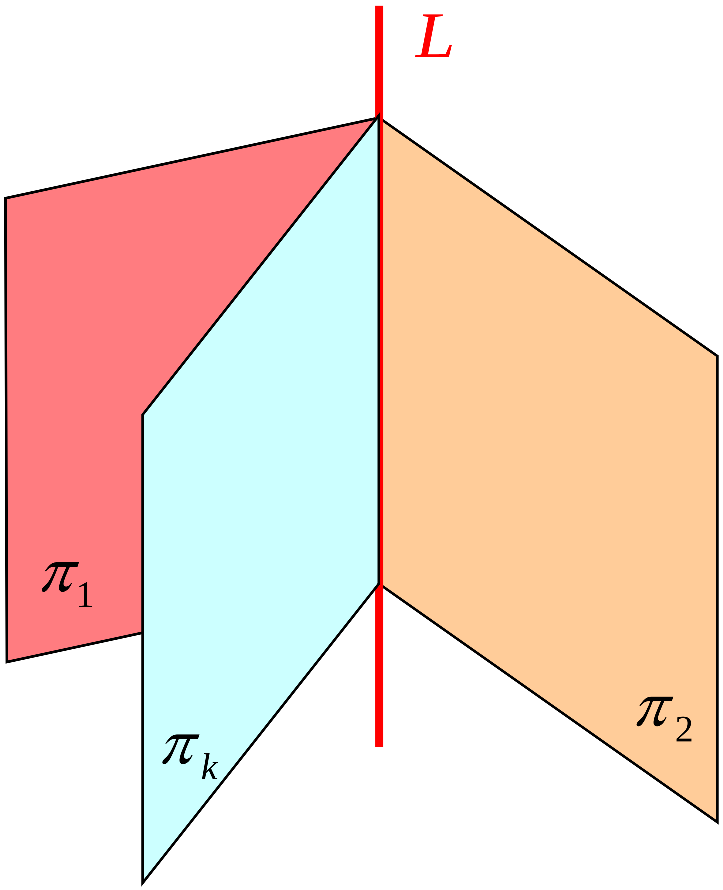
令 $y=0$，得方程组 $\begin{cases} x+z=1, \\ x-z=3, \end{cases}$ 解之得 L 上一点 $M_0(-1,0,2)$。

$$\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-12\vec{j}+6\vec{k},$$

故 $$\mathrm{d}=\frac{\|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-12)^2+6^2}}{\sqrt{0^2+2^2+4^2}}=\sqrt{\frac{46}{5}}。$$

三. 平面束方程

设直线 L:



$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0。 & \pi_2 \end{cases}$$

则通过直线 L 的平面将有无穷多个。

如何表示平面 π_k 的方程?

$(k=1,2,\cdots)$

三. 平面束方程

设直线 L: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0。 & \pi_2 \end{cases}$

以下的平面均通过直线 L:

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

$$\cdots\cdots$$

$$\lambda\,(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

该式不含平面π_1。

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda\,(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

该式不含平面π_2。

$(\lambda\in R)$

三. 平面束方程

定 义

设直线 L: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$ 则称

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (1)$$

和

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (2)$$

为过直线 L 的平面束方程，其中，$\lambda\in R$。

注意

方程 (1) 不包含平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$。

方程 (2) 不包含平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$。

例 求通过直线 $L:\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和点 $M(1,1,-1)$ 的平面方程。

优点：
只需确定参数 λ
即可确定平面！

解1：求点法式方程

解2 通过直线 L 的平面束方程为

$$(x+y-z)+\lambda(x-y+z-1)=0 。$$

因为平面过点 $M(1,1,-1)$，所以，有

$$(1+1-(-1))+\lambda(1-1+(-1)-1)=0 ,$$

即 $\lambda=\dfrac{3}{2}$。将它代入平面束方程后，得所求平面方程为

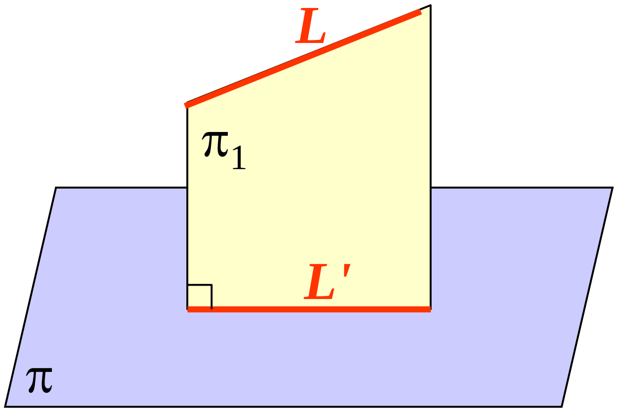
$$5x-y+z-3=0 。$$

例 求直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$

在平面 $\pi:\ 4x-y+z-1=0$ 上的投影直线。

解 求出过直线 L 且与平面 π 垂直的平面 π_1，则 π_1 与 π 的交线

即为直线 L 在平面 π 上的投影直线。



过直线 L 的平面束方程为

$$(2x-4y+z)+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

即为 $$(2+3\lambda)x-(4+\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0。$$

三. 平面束方程

$$(2+3\lambda)x-(4+\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$$

$$\pi: \quad 4x-y+z-1=0$$

由平面相互垂直的充要条件，得

$$4\cdot(2+3\lambda)+(-1)\cdot[-(4+\lambda)]+1\cdot(1-2\lambda)=0,$$

解此方程得 $\lambda=-\dfrac{13}{11}$，代入平面束方程得平面 π_1 的方程

$$\pi_1: \quad 17x+31y-37z-117=0。$$

从而所求投影直线方程为

$$\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0 \\ 4x-y+z-1=0 \end{cases}$$

直线方程的形式

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0。\end{cases}$$ (一般方程)

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}。$$ (点向式方程)

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \quad (t\in R) \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$ (参数式)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}。$$ (两点式)

与直线有关的几个问题

1. 两直线间的夹角 $\cos\langle L_1, L_2\rangle = \dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\|\|\vec{s}_2\|}$。

2. 直线与平面间的夹角 $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\|\vec{n}\|}$, $(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2})$。

3. 直线共面的条件 $\Longleftrightarrow (\vec{s}_1\times\vec{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = 0$

4. 直线与平面相交的交点 坐标 由直线的参数方程代入平面方程求得

5. 点到直线的距离 $d = \dfrac{\|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}$。

平面束方程

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (2)$$

思1：考虑两种方法

求直线 L： $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$

在平面 π： $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线L_1。

思2：

设两直线 $L_1:\begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x-4y+z+1=0 \end{cases}$ 和 $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$

(1)证明L_1与L_2是异面直线；

(2)求L_1与L_2之间的距离；

(1)求过L_1且平行于L_2的平面方程。