2022-2023-2 高等数学 A2 参考解答

1、（6 分） **解：** $\cos(a,b)=\dfrac{a\cdot b}{\|a\|\cdot\|b\|}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

设方程为：$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$

M_2在平面上：$-A-2C=0$

2、（6 分） **解：** 垂直于已知平面：$A+B+C=0$

解得：$A=-2C,B=C(C\neq 0)$

$2x-y-z=0$为所求.

3、（6 分） **解：** $0\le\left|\dfrac{xy}{|x|+|y|}\right|\le|y|\to 0.$ 由两边夹定理得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{|x|+|y|}=0$

4、（6 分） **解：** $dz=dx^y=yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy$

$gradu\big|_{X_0}=(yz,xz,xy)\big|_{X_0}=(1,1,1)$，沿梯度方向最大，

5、（6 分） **解：** $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

$\max\dfrac{\partial u}{\partial l}=|gradu(1,1,1)|=\sqrt{3}$

6、（6 分） 解： $\int\limits_L x^2ds=\dfrac{1}{2}\int\limits_L(x^2+y^2)ds=\dfrac{1}{2}\int\limits_L 1\cdot ds=\dfrac{1}{2}2\pi\cdot 1^2=\pi$

7、（6 分） **解：**

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{1}{x+4-3}-\frac{1}{x+4-2}=\frac{1}{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n\qquad(-6<x<-2)$$

8、(8 分) 解：

$$F_1'\cdot(1+\frac{\partial z}{\partial x})+F_2'\cdot(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x})=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'+F_2'\cdot yz}{F_1'+F_2'\cdot xy}$$

$$F_1'\cdot(1+\frac{\partial z}{\partial y})+F_2'\cdot(xz+xy\frac{\partial z}{\partial y})=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'+F_2'\cdot xz}{F_1'+F_2'\cdot xy}$$

9、(8 分) 解： $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{32}{9}$

10、(8 分) 解：

$$s(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^n\right)'$$

$$=x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

11、(8 分) 解：

$$P=2xy,Q=x^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$u=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xydx+x^2dy=x^2y$$

12、(8 分)解：

补充Σ_1：$z=1$下侧，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}\left(3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right)dxdydz$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+7\right)dxdydz=-4\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy=0$$

13、（10 分）解

设切点为（x_0,y_0,z_0）, $n=(2x,2y,2z)$,

切平面方程为：$xx_0+yy_0+zz_0=1$,

体积$V=\dfrac{1}{6x_0y_0z_0}$,问题转化为$\left(\dfrac{1}{V}\right)\max=6x_0y_0z_0$,

$F=6xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$,

$$\begin{cases}F'_x=0\\F'_y=0\Rightarrow x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\F'_z=0\end{cases}$$

$$V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

14、（8 分）解：

$$\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2=\int_0^a f(x)dx\cdot\int_0^a f(x)dx$$

$$=\int_0^a f(x)dx\int_0^a f(y)dy$$

$$=\int_0^a dx\int_0^a f(x)f(y)dy$$

$$=\int_0^a dx\int_x^a f(x)f(y)dy+\int_0^a dx\int_0^x f(x)f(y)dy$$

$$=2\int_0^a dx\int_x^a f(x)f(y)dy$$

2023 年 6 月 12 日