湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 积 分 学

4.2 三重积分

• 主 讲： 于 红 香

第四章 多元函数积分学

第二节 三重积分

一. 三重积分的定义

二. 三重积分的性质

三. 三重积分的计算

(直角坐标系)

四. 三重积分的换元法

(柱面坐标系，球面坐标系)

正确理解三重积分的概念。

知道三重积分的性质。

掌握直角坐标系下二重积分的计算。

掌握柱面坐标系下二重积分的计算。

掌握球面坐标系下二重积分的计算。

了解重积分的换元法。

引例：质量非均匀分布的立体质量　隐去背景，抽象为数学概念：三重积分

设有一质量非均匀分布的立体状物体置于空间R^3内，Ω表示在空间中物体所占据的有界闭区域，$\mu(x,y,z)$表示Ω中点(x,y,z)处的体密度，求该物体的质量m。

解

分割取近似

将Ω进行任意分割，

Ω_i 表示第i个小区域，

其体积记为$\Delta v_i, i=1,\dots,n$

$\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Omega_i$

$\Delta m \approx f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$

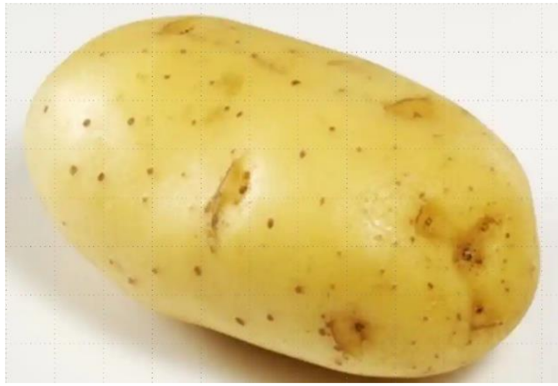
以常代变

求和取极限

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i,$$

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i,$$

即 $$m = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v \text{ 。}$$



一. 三重积分的定义

设 $f(x,y,z)$ 是定义在有界闭区域 $\Omega \subset R^3$ 的有界函数。

将 Ω 任意分割为 n 个无公共内点的小区域 Ω_i （$i=1,\ 2,\cdots,\ n$），

则 $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$ ，并记 Ω_i 的体积为 Δv_i。若 $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Omega_i$，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

存在，则称该极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上的三重积分，

其中，$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \mathrm{d}(\Omega_i)$，$\mathrm{d}(\Omega_i)$ 为 Ω_i 的直径。

此时称函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上可积，记为 $f(x,y,z)\in R(\Omega)$。

三重积分记为：

积分元素：立体体积元素

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i\,,$$

积分区域　　被积函数　　黎曼和；积分和

$\iiint$ —— 三重积分号；　x, y, z —— 积分变量；

三重积分的几点说明:

(1) 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 存在与否,取决于函数f在Ω 上是否可积。

与对区域 Ω 的分割方式 以及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的选择无关。

(2) 有界闭区域上的连续函数可积。

(3) 若函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上有界，且仅在 Ω 内有限条曲线或有限张曲面上不连续，则 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积。

两个有界:

被积函数，积分区域

两个无关:

区域分法，点的取法

（4）在直角坐标系中，通常用平行于坐标面的平面划分区域Ω，

故直角坐标系下积分元素 (几何体体积元素) $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

相应地，直角坐标系下，三重积分写为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ 。}$$

(5) 三重积分是一个数，它取决于被积函数和积分区域，而与积分变量的记号（字母）无关：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} f(u,v,w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\cdots$$

二. 三重积分的性质

假设以下出现的三重积分均存在

性质1 立体体积

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = |\Omega|,$$ $|\Omega|$ 为区域 Ω 对应的体积。

（ $f(x,y,z) \equiv 1$，$(x,y,z) \in \Omega$ 的情形。）

性质2 线性性质

$$\iiint_{\Omega} [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \alpha \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \beta \iiint_{\Omega} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z。$$

性质3 积分区域的可加性

若$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ （Ω_1与Ω_2除边界点外无公共部分），则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z。$$

二. 三重积分的性质

性质4 若 $f(x,y,z)\ge 0 \quad (x,y,z)\in\Omega$，则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \ge 0$。

保号性

推论1 若 $f(x,y,z)\le g(x,y,z) \quad (x,y,z)\in\Omega$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \le \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z。$$

保序性

推论2

$$\left|\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right| \le \iiint\limits_{\Omega} |f(x,y,z)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z。$$

绝对值性质

性质5

估值定理

设 $M=\max\limits_{\Omega} f(x,y,z)$，$m=\min\limits_{\Omega} f(x,y,z)$，则

$$m|\Omega| \le \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \le M|\Omega|。$$

性质6

中值定理

设 $\Omega\subset R^3$ 为有界闭区域，$f(x,y,z)\in C(\Omega)$，则至少存在一点 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，使得

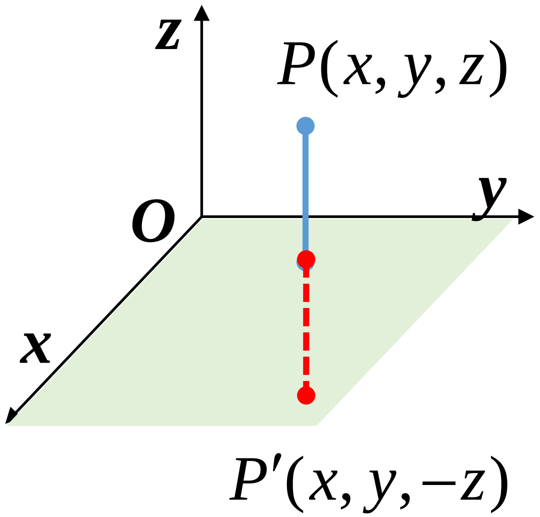
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = f(\xi,\eta,\zeta)|\Omega|。$$

性质7 设Ω_1 与 Ω_2 关于xoy坐标面对称,$\Omega=\Omega_1+\Omega_2$，则有

对称奇偶性

偶倍奇零

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, & 若f(x,y,-z)=f(x,y,z)\\ 0, & 若f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\end{cases}。$$



设Ω_1 与 Ω_2 关于xoz坐标面对称,且$f(x,y,z)$关于y具有奇偶性

设Ω_1 与 Ω_2 关于yoz坐标面对称,且$f(x,y,z)$关于x具有奇偶性

$\Omega=\Omega_1+\Omega_2$,则对应的三重积分有偶倍奇零性质。

二. 三重积分的性质

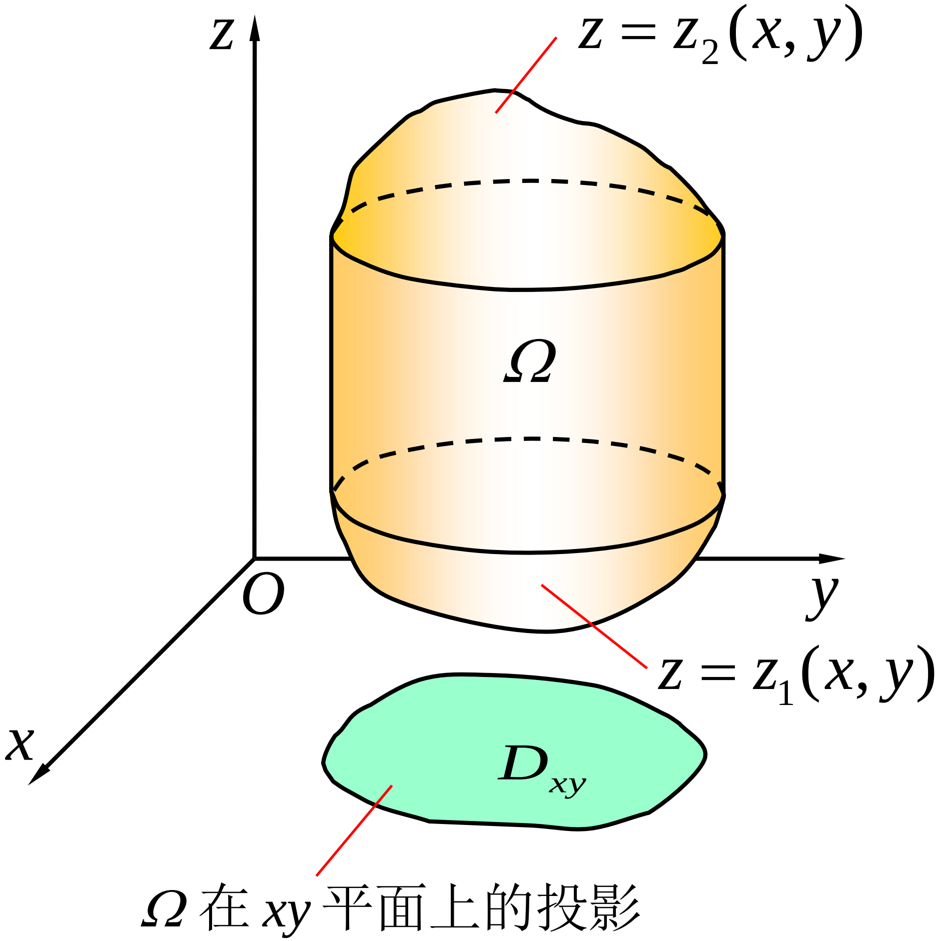
【例】 计算$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$。其中$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$

【解】 因为被积函数是z的奇函数,

且积分区域关于xoy坐标面对称(即**上下对称**),

故由对称奇偶性知:所求积分值为0.

三. 直角坐标系下三重积分的计算



设有界闭区域 Ω (双曲顶柱体)是

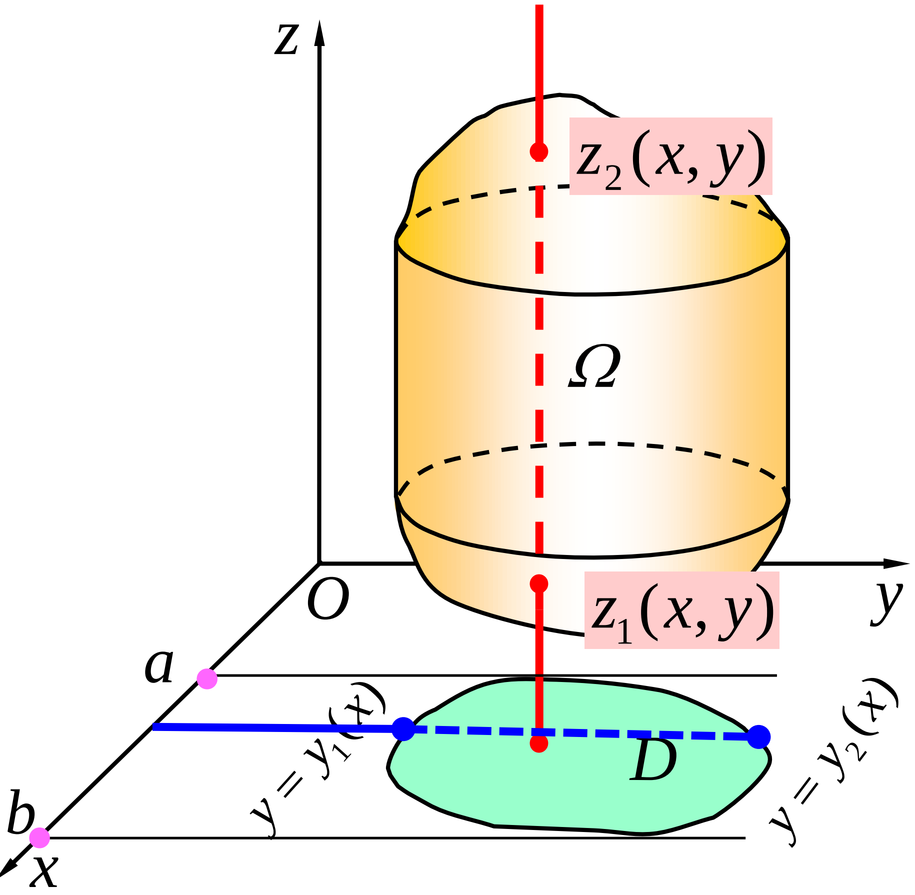
由曲面 $z = z_1(x, y)$ 和 $z = z_2(x, y)$,

以及母线平行于 z 轴的柱面围成。

Ω 在 xy 平面上的投影为平面区域 D_{xy} 。

$z_1(x, y),\ \ z_2(x, y) \in C(D_{xy})$ 且

$z_1(x, y) \le z_2(x, y) \quad (x, y) \in D_{xy}$ 。



Ω 在 xy 平面上的投影D

$z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$

投影 (1)将区域 Ω 投影到 xy 平面上得到 D ：

$$D=\{(x,y)\mid\ a\le x\le b\ ,\ \ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}.$$

穿线 (2)在 D 内任取一点(x,y)，作平行于 z 轴的直线穿过 Ω 且与 Ω 的上下曲面相交 .

(3)三重积分化为先一后二的积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

点-线-面 $$=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\ 。$$

若区域 Ω 在 xz 平面上的投影区域为 D_{xz} ，且

$$\Omega=\{(x,y,z)|\ \ y_1(x,y)\le y\le y_2(x,y),\ \ (x,z)\in D_{xz}\},$$

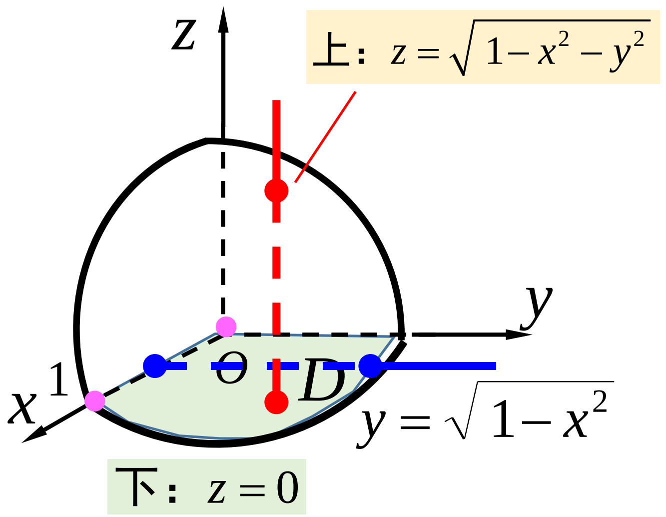
则 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xz}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\ 。$$

若区域 Ω 在 yz 平面上的投影区域为 D_{yz} ，且

$$\Omega=\{(x,y,z)|\ \ x_1(x,y)\le x\le x_2(x,y),\ \ (y,z)\in D_{yz}\},$$

则 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\ 。$$

【例】 求 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与三个坐标面所围成的第一卦限中的区域。



【解】 将Ω投影 到xy 平面上得到区域D

$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$。

在 D 内任取一点作平行于 z 轴的直线

穿过 Ω 的上下曲面 .满足 $0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$

故 $$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}xyz\,\mathrm{d}z$$

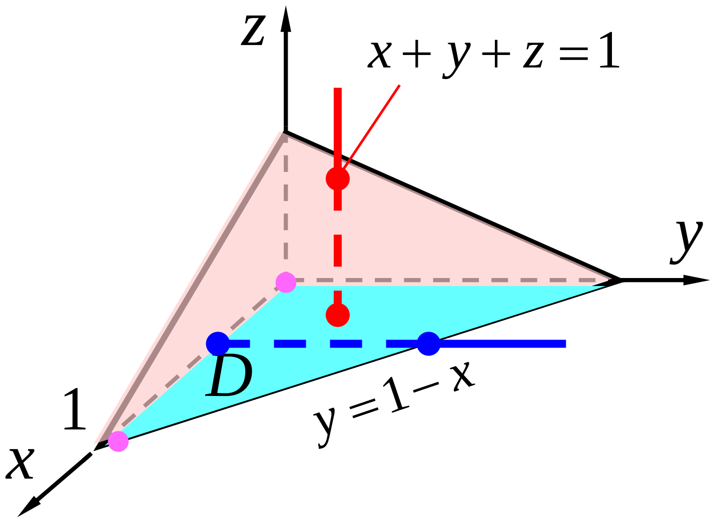
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}xy(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$。

1.作图定域

2.投影定界

3.穿线定界

【练】计算 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 是由三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体。



【解】Ω 在 xy 平面上的投影区域为

$$D=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}.$$

在 D 内任取一点作平行于 z 轴的直线

穿过 Ω 的上下曲面 .满足 $0\le z\le 1-x-y$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

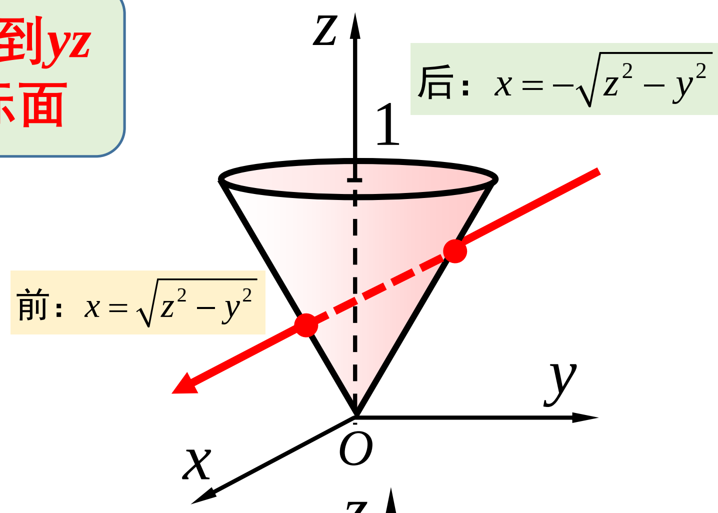
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)。$$

三. 直角坐标系下三重积分的计算

【例】 将积分 $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ 换成先对 x，再对 y，最后对 z 变量的积分。

投影到yz坐标面

【解】 由原积分可知 Ω 由面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成。



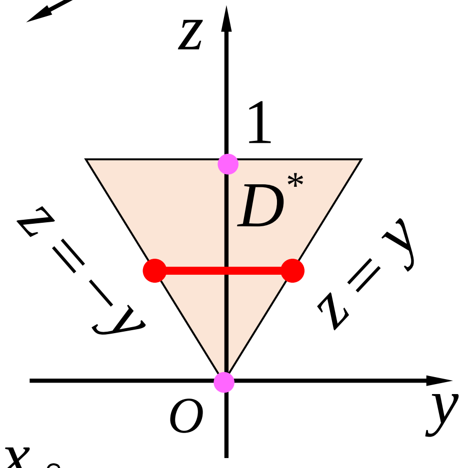
将 Ω 往 yz 平面上投影，得

$$D^* = \{(y,z) \mid \ 0 \le z \le 1,\ -z \le y \le z\}。$$

在D*上任取点做平行于x轴的直线穿过锥体的前后曲面，

即有：$-\sqrt{z^2-y^2} \le x \le \sqrt{z^2-y^2}$

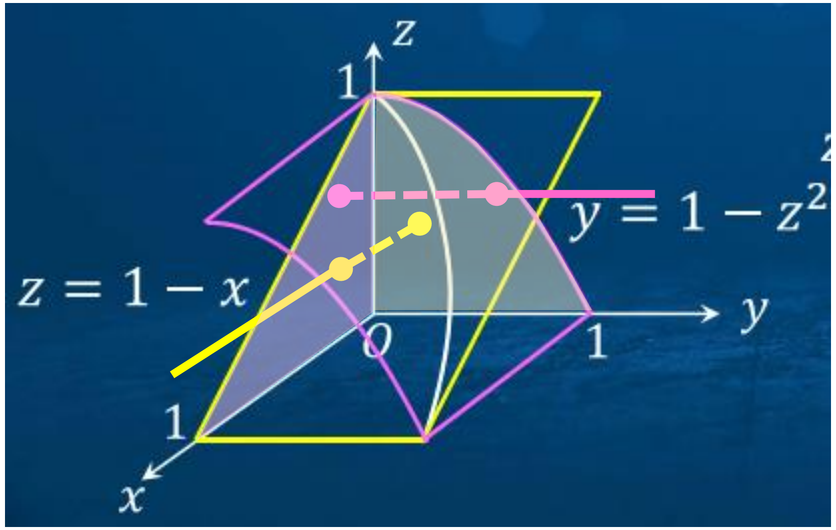
$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 1,\ -z \le y \le z,\ -\sqrt{z^2-y^2} \le x \le \sqrt{z^2-y^2}\},$$



$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_{-z}^{z} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x。$$

【练】 将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$ 化为三次积分，其中Ω 是由平面$z=1-x$, 抛物柱面$y=1-z^2$ 及坐标面$x=0$, $y=0$, $z=0$ 所围成的空间闭区域.

【解】 将积分区域作图如下：

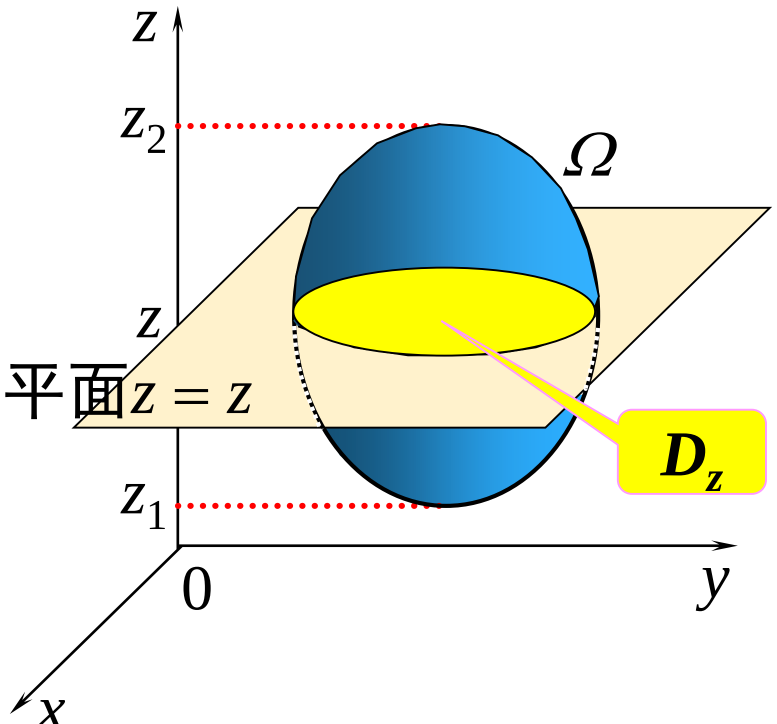


$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_0^{1-z^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y$$

或: $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z^2}\mathrm{d}y\int_0^{1-z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x$$

三重积分也可化为一个二重积分和一个定积分

平面$z=z$切区域Ω得平面区域D_z.



$\Omega:(x,y)\in D_z,\ z_1\le z\le z_2$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

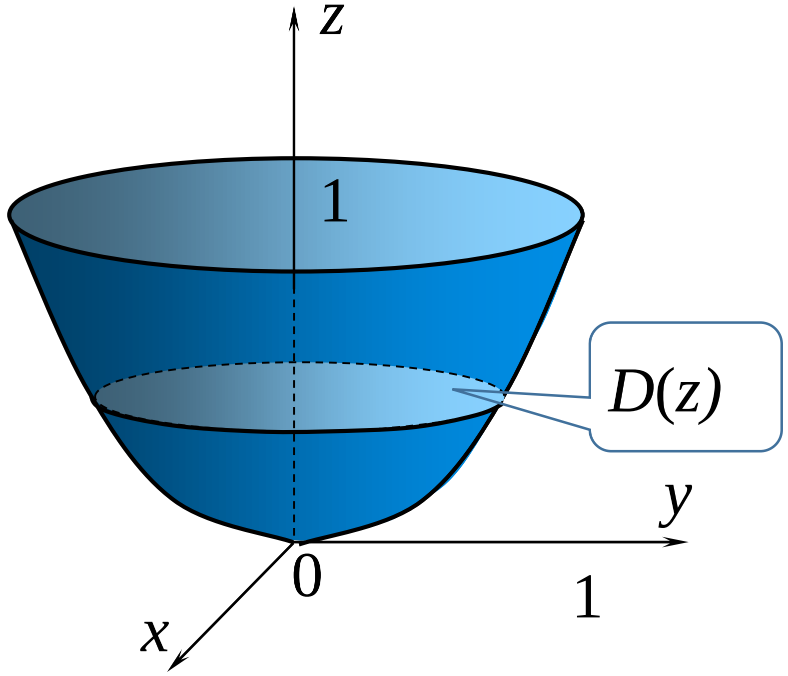
$$=\int_{z_1}^{z_2}\Big[\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}z$$

$$=\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

三. 直角坐标系下三重积分的计算

【例】 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中Ω是由 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 1$ 所围成的闭区域.

【解】 用平面z=z去切区域Ω，得到的切片区域为圆形区域：



$$D(z): x^2 + y^2 \le z, \quad z \in [0, 1]$$

$$\pi(\sqrt{z})^2 = \pi z$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 z\mathrm{d}z \boxed{\iint\limits_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \int_0^1 z \cdot \pi z\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}$$

先二后一：
被积函数只含变量z，
且用 z = z 切片形状为规则图形(求面积方便)

1.作图定域

2.截面定界

3.移动定界

三. 直角坐标系下三重积分的计算

【练】 设Ω是由椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所围成的闭区域, 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

【解】 由对称奇偶性得 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{y^2}{b^2},-b\le y\le b\}\qquad D_{xz}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{y^2}{b^2}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}y^2\mathrm{d}y\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-c}^{c}y^2\left(\pi ac(1-\frac{y^2}{b^2})\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

定理 设 $\Omega \subset R^3$ 为有界闭区域，$f(x,y,z) \in R(\Omega)$ 。

设变换 T ：$x = x(u,v,w)$ ，$y = y(u,v,w)$ ，$z = z(u,v,w)$ 将 uvw 空间中的闭区域 Ω^* 一对一地变成 xyz 空间中的闭区域 Ω，且满足：

1. $x(u,v,w)$，$y(u,v,w)$，$z(u,v,w) \in C^1(\Omega^*)$；

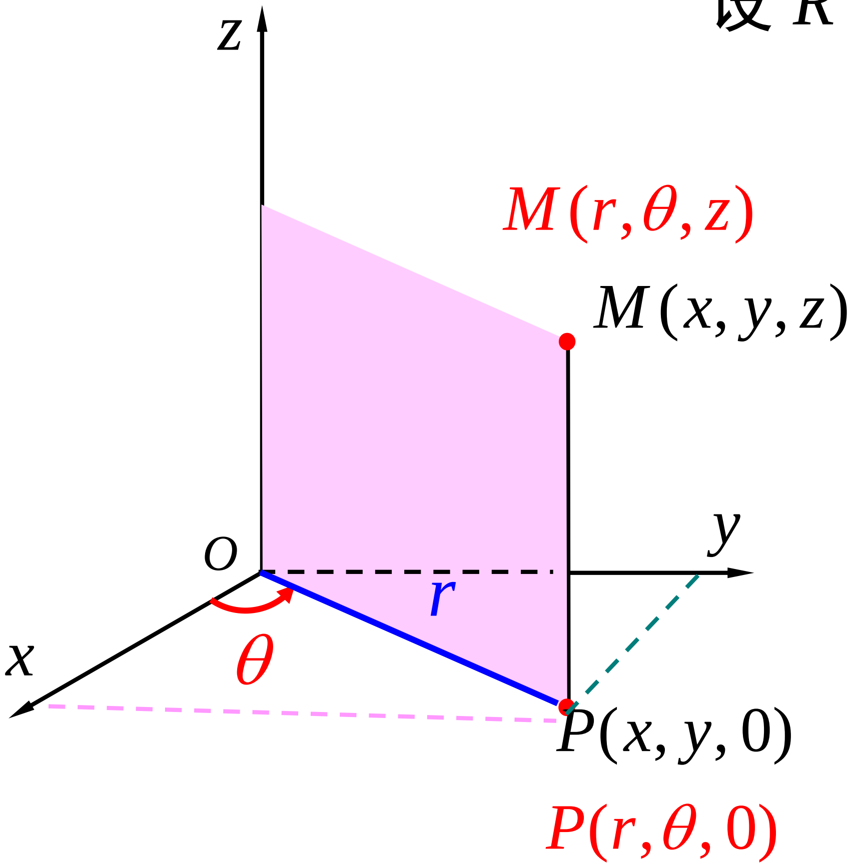
2. $J \overset{\Delta}{=} \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$， $(u,v,w) \in \Omega^*$，

则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

雅可比行列式的绝对值

$$\iiint_{\Omega^*} f(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w))\,|J|\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

四. 三重积分的换元法



设 R^3 中点 $M(x,y,z)$ 在 xy 平面上的投影点为 $P(x,y,0)$.

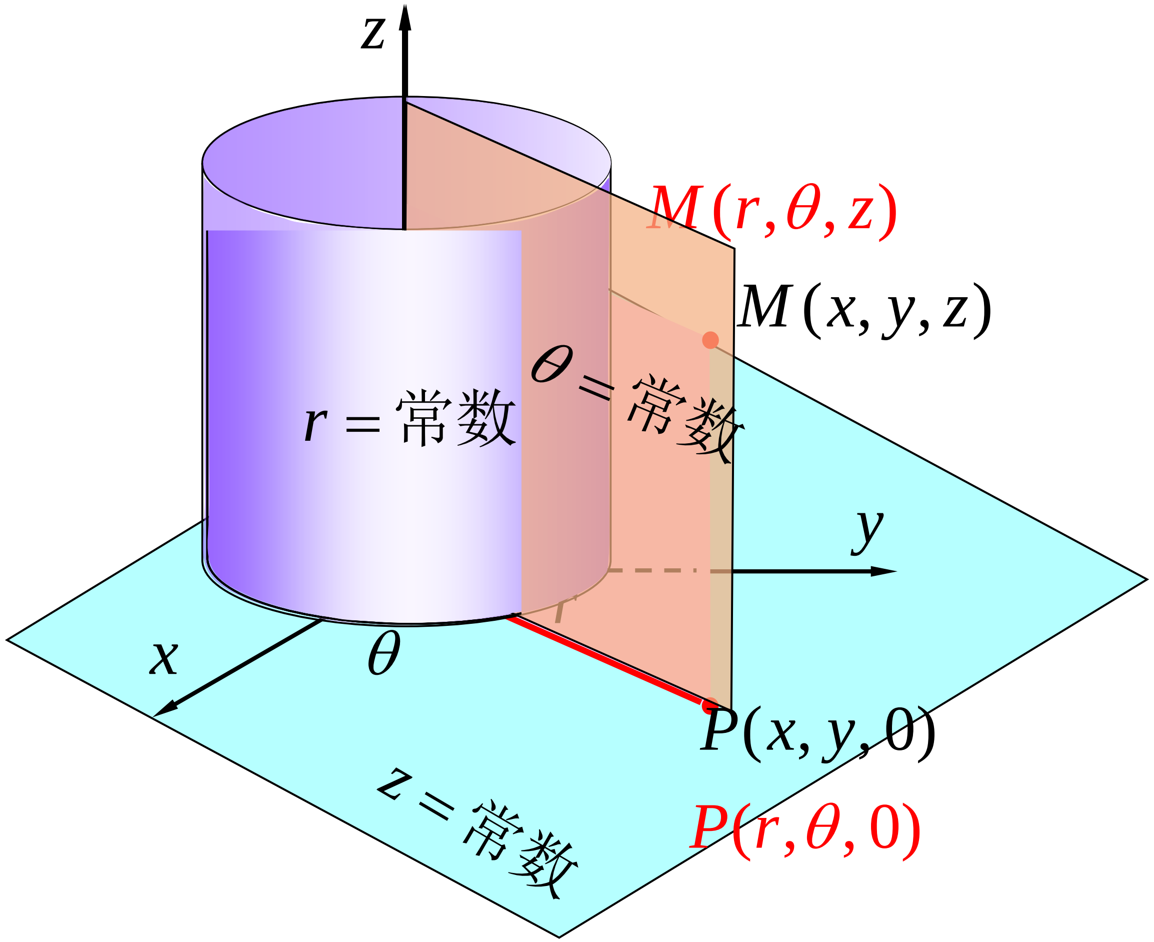
若点 $P(x,y)$ 在 xy 平面上的极坐标为 $P(r,\theta)$，

则称 (r,θ,z) 为点 $M(x,y,z)$ 的柱面坐标 。

点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系式为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z 。\end{cases}$$

柱面坐标系



柱面坐标系的坐标面：

$r=$常数　　以 z 轴为中心轴的圆柱面；

$\theta=$常数　　过 z 轴的半平面；

$z=$常数　　与 xy 平面平行的平面。

三个坐标面之间，两两正交。

由于 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z\ \in C^1$， 且除 $r=0$ 外，

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\text{。}$$

$|J|=|r|=r\neq 0$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega^*} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

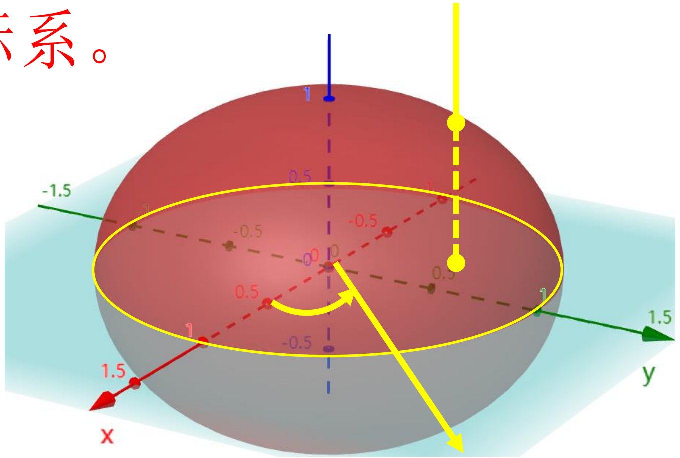
在柱面坐标下，体积元素为 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$，故有

$$|\Omega|=\iiint\limits_{\Omega} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\text{。}$$ （$|\Omega|$ 为 Ω 的体积）

【例】计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$， $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}$.

【解1】Ω 在 xy 平面上的投影区域为

运用柱面坐标系。



$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}。$$

此时， $0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-r^2}$， 故

$$\Omega^*=\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ 0\le z\le\sqrt{1-r^2}\}。$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega^*} z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2}r(1-r^2)\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big]\Big|_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}.$$

别的方法?

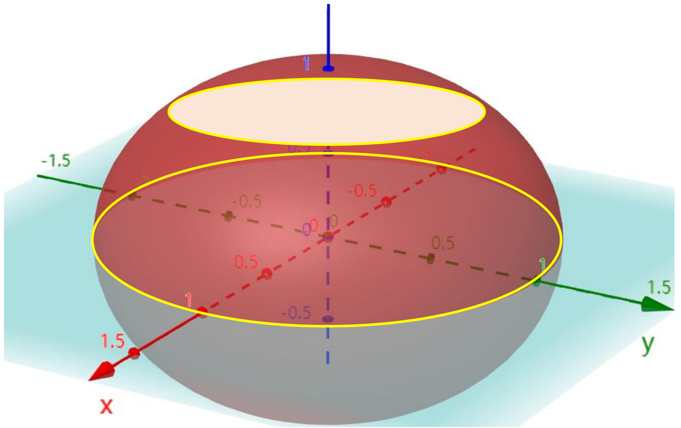
先二后一

【例】计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$， $\Omega=\{(x,y,z)\mid\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}$.

【解2】先二后一

用平面$z=z(0\le z\le 1)$去截上半球，得到截面

$$D_z=\{(x,y)\mid\ x^2+y^2\le 1-z^2\}$$



$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z\cdot\pi(1-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}.$$

【练】 设 Ω 是由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域，计算 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{x^2+y^2+1}$.

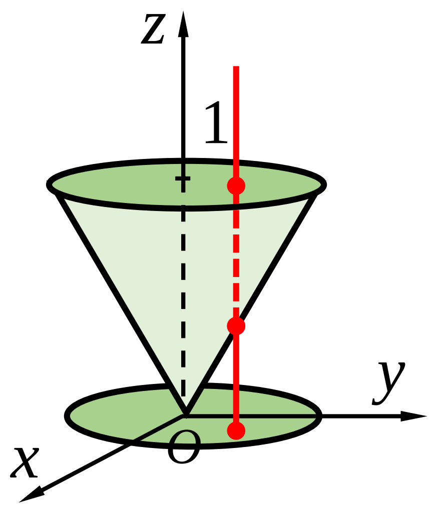
【解】 Ω 在 xy 平面上的投影区域为

运用柱面坐标系。

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}\text{。}$$

而 $0\le\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，即 $r\le z\le 1$，故

$$\Omega^*=\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ r\le z\le 1\}\text{。}$$



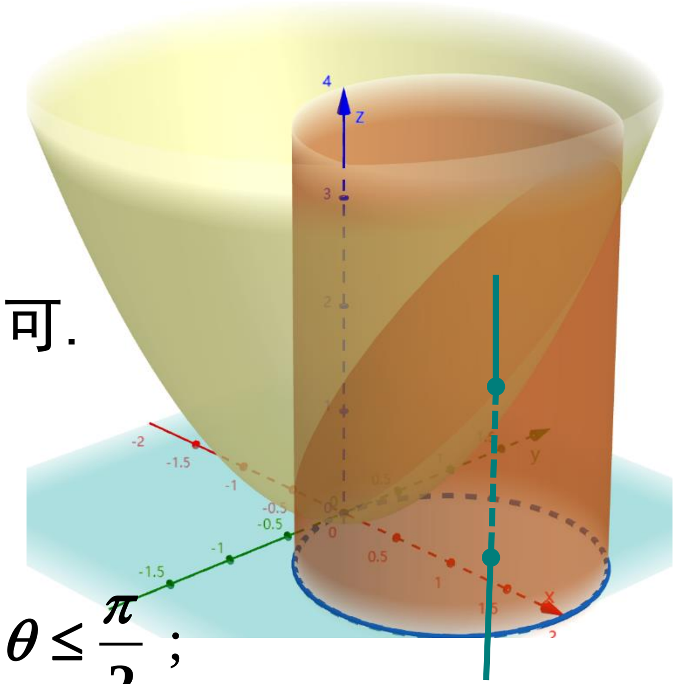
$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{x^2+y^2+1}=\iiint\limits_{\Omega^*}\frac{r\,dr\,d\theta\,dz}{r^2+1}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{r^2+1}dr\int_r^1 dz$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{r(1-r)}{r^2+1}dr=2\pi\int_0^1\frac{r}{r^2+1}dr-2\pi\int_0^1\frac{r^2+1-1}{r^2+1}dr$$

$$=\pi\ln(r^2+1)\Big|_0^1-2\pi(r-\arctan r)\Big|_0^1=\pi\left(\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\right).$$

【例】 求曲面 $x^2+y^2=2ax$，$x^2+y^2=az$ 及平面 $z=0$

所围成的几何体的体积，其中 $a>0$.



【解】 因所求体积左右对称，只需计算右侧部分的体积后乘 2 即可.

根据柱面坐标可得：

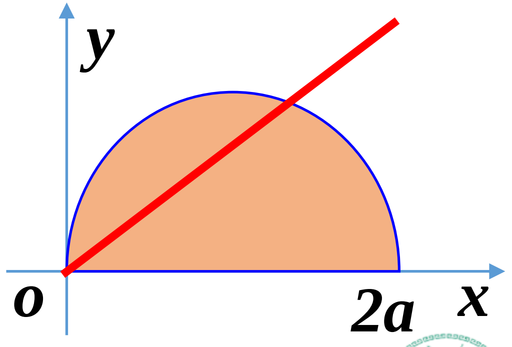
$$x^2+y^2=2ax \quad \Rightarrow r^2=2ar\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r=2a\cos\theta$$

右侧几何体投影到坐标面上的区域D：$0\le r\le 2a\cos\theta$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$；

几何体顶面：$x^2+y^2=az \ (a>0)\Rightarrow z=\dfrac{r^2}{a}$；

$$\Omega^*=\{(r,\theta,z)\mid\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le z\le\frac{r^2}{a}\},$$

$$V=2\iiint\limits_{\Omega^*} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{r^2}{a}}\mathrm{d}z$$



【例】 求曲面 $x^2+y^2=2ax$，$x^2+y^2=az$ 及平面 $z=0$ 所围成的几何体的体积，其中 $a>0$.

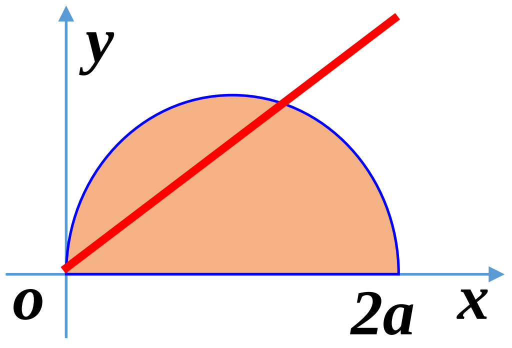
【解】

$$V=2\iiint_{\Omega^*} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{r^2}{a}}\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\frac{r^3}{a}\mathrm{d}r=\frac{1}{2a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\theta)^4\,\mathrm{d}\theta$$

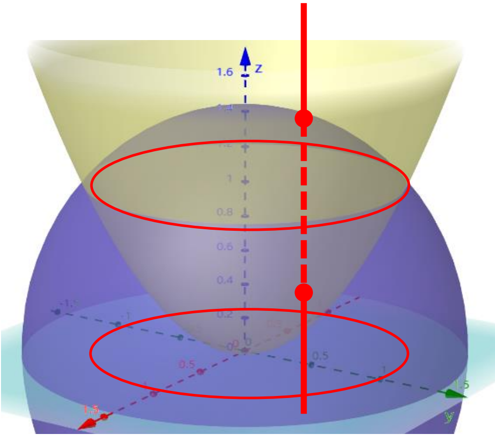
$$=8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=8a^3\frac{(4-1)\,!!}{4\,!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^3}{2}\text{。}$$



【练】 计算$\iiint\limits_{\Omega} z dv$. 其中Ω是由两曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$和$z=x^2+y^2$所围成的闭区域.

【解】 法1: (柱面坐标)



$$\Omega^* = \{(r,\theta,z) \mid \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ 0 \le r \le 1,\ \ r^2 \le z \le \sqrt{2-r^2}\ \}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z dv = \iiint\limits_{\Omega^*} zr dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\,\mathrm{d}z$$

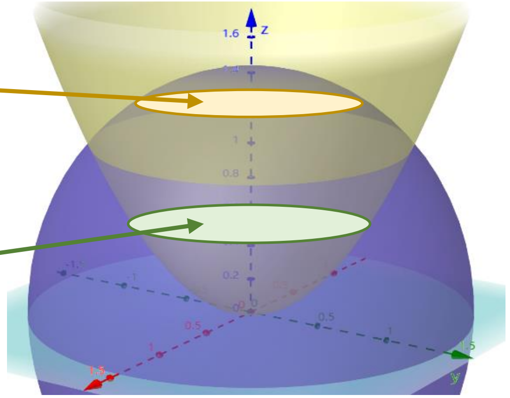
$$= 2\pi \int_0^1 \frac{r(1-r)}{r^2+1} \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{2}(2-r^2-r^4)\,\mathrm{d}r = \frac{7}{12}\pi.$$

【练】计算$\iiint\limits_{\Omega} z dv$. 其中Ω是由两曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$和$z=x^2+y^2$所围成的闭区域.

【解】法2: (先二后一)

$D_{xy2}: x^2+y^2 \le 2-z^2$

$D_{xy1}: x^2+y^2 \le z$



$$\iiint\limits_{\Omega} zdv = \iiint\limits_{\Omega_1} zdv + \iiint\limits_{\Omega_2} zdv$$

$$= \int_0^1 z\mathrm{d}z \iint\limits_{D_{xy1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{2}} z\mathrm{d}z \iint\limits_{D_{xy2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 z\cdot(\pi z)\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{2}} z\cdot\pi(2-z^2)\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{12}\pi$$

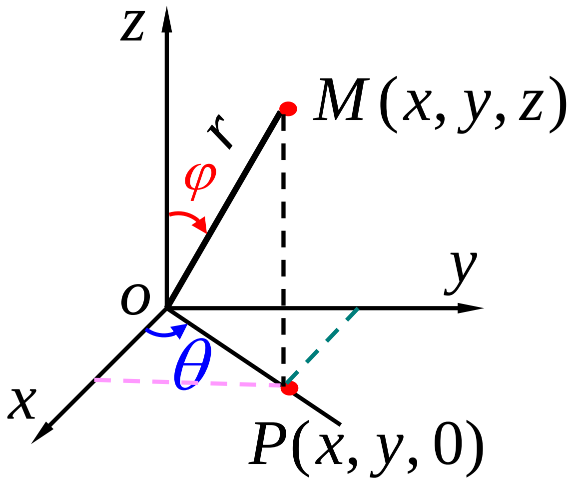
一般说来,当积分区域Ω的投影D为圆形区域,

或被积函数中出现(x^2+y^2) 时, 则可考虑采用柱面坐标.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z 。\end{cases}$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

球面坐标系



球面坐标系又称为空间极坐标系 。

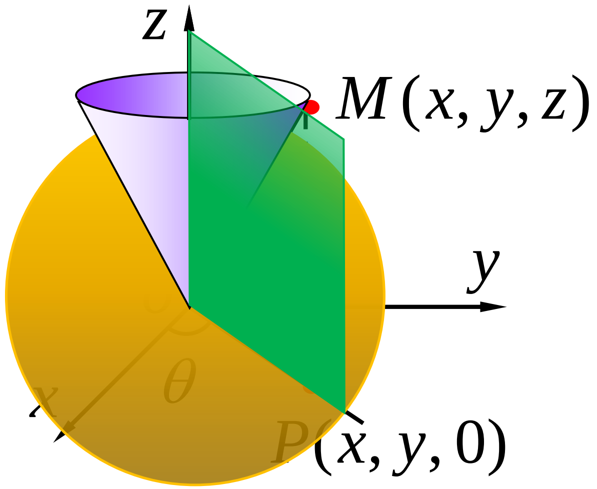
r — 坐标原点到点 M 的距离 .

φ— $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向间的夹角 .

θ — $\overrightarrow{OM}$ 在 xy 平面上的投影向量$\overrightarrow{OP}$与x 轴正向的夹角.

点 M 的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (r, φ, θ) 间的关系:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ z = r\cos\varphi. & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$



$r =$ 常数：原点为中心，半径为 r 的球面 .

$\varphi =$ 常数：以原点为顶点，锥顶角为 2φ 的圆锥面

$\theta =$ 常数：过 z 轴的半平面 .

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta , \\ y = r\sin\varphi\sin\theta , \\ z = r\cos\varphi . \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi .$$

$$\boxed{|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi.\theta)}\right| = |r^2\sin\varphi| = r^2\sin\varphi .}$$

球面坐标系

将直角坐标系下的三重积分换成球面坐标系下的积分：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

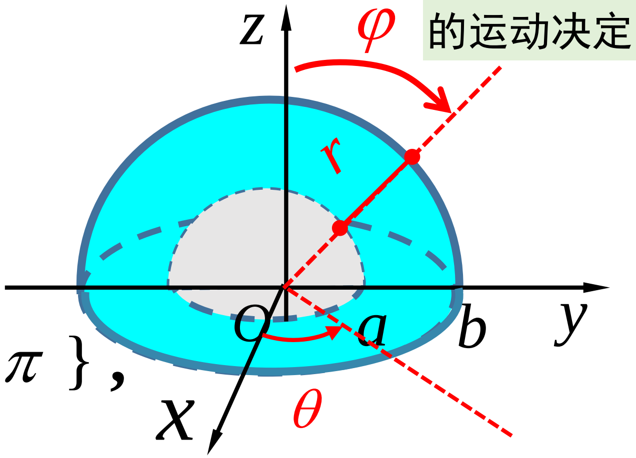
$$=\iiint_{\Omega^*} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,.$$

在球面坐标系中，体积元素为 $r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$，故

$$|\Omega| = \iiint_{\Omega} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,.$$ （$|\Omega|$ 为 Ω 的体积）

【例】 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中，$\Omega$ 为两个上半球面$z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 xy 平面所围成的区域，其中，$b>a>0$.

r,φ的范围由此参考线的运动决定



【解】 运用球面坐标系 .

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2\ ,\ z\ge 0\}$$

转换为 $\Omega^*=\{(r,\varphi,\theta)\mid a\le r\le b\ ,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$,

故 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega^*}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_a^b r^4\,\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{(3-1)\,!!}{3\,!!}\cdot\frac{1}{5}(b^5-a^5)=$$

1. 作图定域

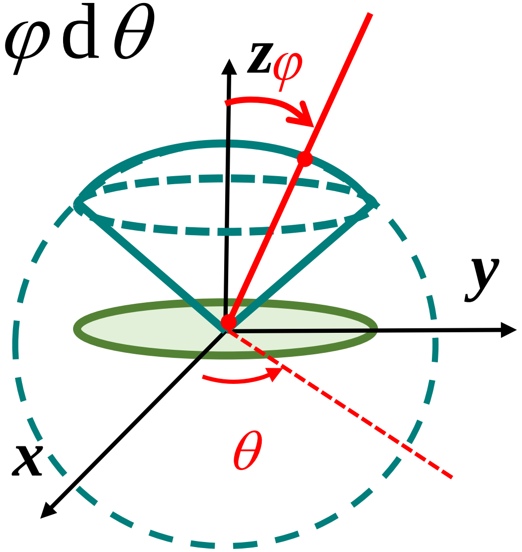
2.空间射线定界$-r,\varphi$

3. 平面射线定界$-\theta$

【例】 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v$.$\Omega$由两个曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成.

【解1】 因Ω关于yz坐标面对称,且$f(x,y,z)=x$为x的奇函数,故$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=0.$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega^*}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$



其中 $\Omega^*=\{(r,\varphi,\theta)\mid\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$,

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}.$$

利用球坐标系进行计算

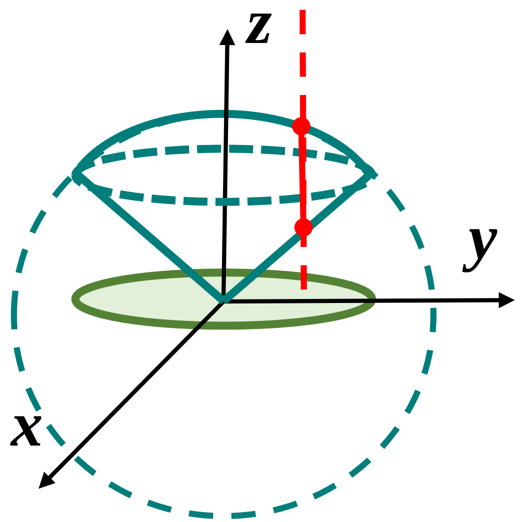
【例】 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$.$\Omega$由两个曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成.

【解2】 利用柱面坐标计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v \overset{\text{对称}}{=} \iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r\,\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{1-r^2}} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\ldots=\frac{\pi}{8}.$$



【例】 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$.$\Omega$由两个曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成.

【解3】 先二后一

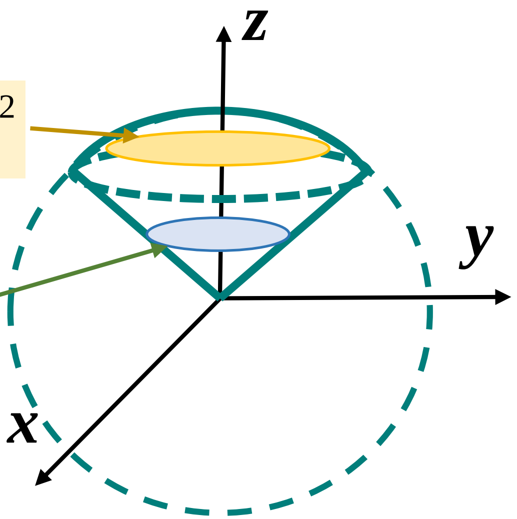
$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,\mathrm{d}v \overset{\text{对称}}{=} \iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{1/\sqrt{2}} z\mathrm{d}z \iint\limits_{D_{xy1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} z\mathrm{d}z \iint\limits_{D_{xy2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{1/\sqrt{2}} z\cdot(\pi z^2)\mathrm{d}z + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} z\cdot\pi(1-z^2)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{8}.$$

$D_{xy2}: x^2+y^2\le 1-z^2$

$D_{xy1}: x^2+y^2\le z^2$



【练】 计算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1.$

✓ 球坐标

柱坐标

先二后一

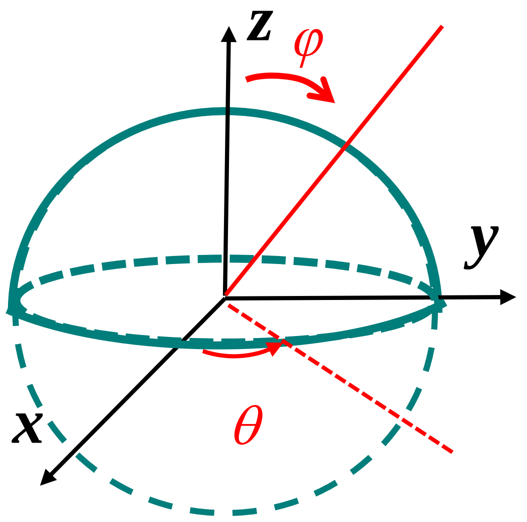
【解1】 由对称奇偶性知：

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv = 2\iiint\limits_{\Omega_{上}} e^{z}\,\mathrm{d}v$$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega^*_{上}} e^{r\cos\varphi}\cdot r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 e^{r\cos\varphi}\cdot r^2\,\mathrm{d}r$$

$$= \ldots = 2\pi.$$



【练】 计算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv$, 其中$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1.$

球坐标

柱坐标

✓ 先二后一

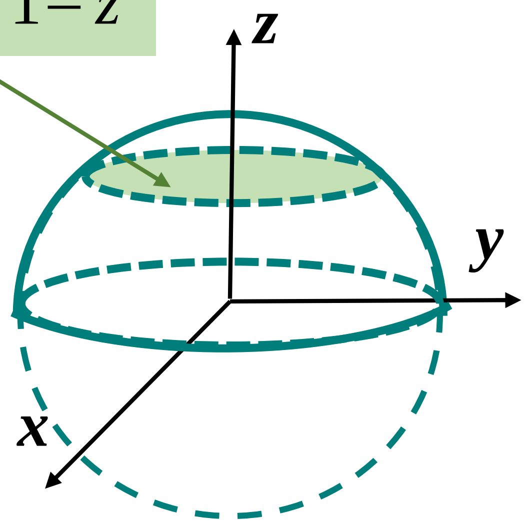
【解2】 由对称奇偶性知：

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv = 2\iiint\limits_{\Omega_上} e^{z}\,\mathrm{d}v$$

$$= 2\int_0^1 e^z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 \pi(1-z^2)e^z dz \; = 2\pi.$$

$D_z: x^2+y^2\le 1-z^2$



一般说来,当积分区域Ω的边界为**球形**区域或为其局部,且被积函数中出现$(x^2+y^2+z^2)$ 时,采用**球面坐标**更优。

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta\,, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\,, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \to \quad r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

【例】 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 V.

$$\begin{cases} \frac{x}{a}=r\sin\varphi\cos\theta\,, \\ \frac{y}{b}=r\sin\varphi\sin\theta\,, \\ \frac{z}{c}=r\cos\varphi\,. \end{cases}$$

【解1】 令 $x=ar\sin\varphi\cos\theta,\ \ y=br\sin\varphi\sin\theta,\ \ z=cr\cos\varphi$

则 $J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=abcr^2\sin\varphi.$

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'}|J|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

$$\Omega':\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$=abc\iiint_{\Omega'}r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

$$=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi abc$$

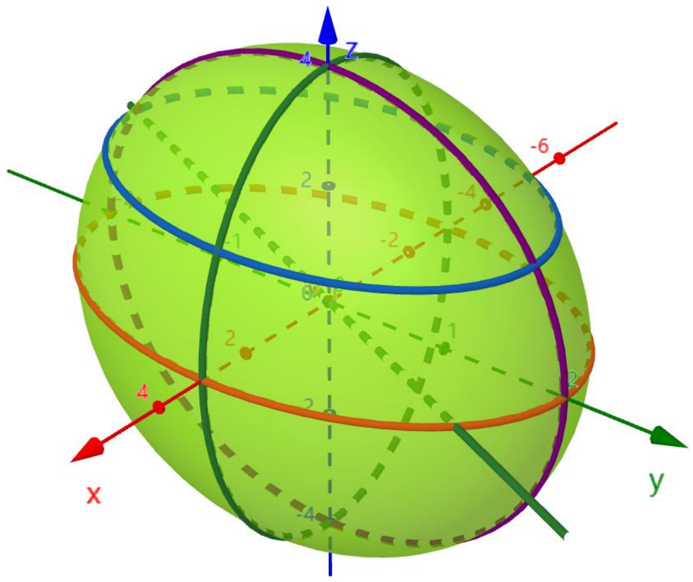
【例】 试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 V.

【解2】 利用“先二后一”计算.

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^c \mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$=\int_0^c \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc$$



拓展题1

计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}v$,其中$\Omega$是$x^2+y^2+z^2\le R^2$的球体.

【解】

$$\iiint\limits_{\Omega}(ax+by+cz)^2\,\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)\,\mathrm{d}v$$

奇偶对称性

$$\iiint\limits_{\Omega}2xy\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}2yz\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}2xz\,\mathrm{d}v=0$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}x^2dv+\iiint\limits_{\Omega}y^2dv+\iiint\limits_{\Omega}z^2dv+0$$

$$\boxed{=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv}=\iiint\limits_{\Omega^*}r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\,\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi R^5.$$

定理 (轮换对称性)

设函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续,

Ω 对坐标 x, y, z 具有轮换对称性, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(y,z,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(z,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

拓展题2

【例】 求$\iiint\limits_{\Omega}(ax+by+cz)^2dv$,其中Ω为：$x^2+y^2+z^2\le r^2$。

奇偶对称性

【解】 $$\iiint\limits_{\Omega}(ax+by+cz)^2dv$$

$$\iiint\limits_{\Omega}2abxydv=\iiint\limits_{\Omega}2bcyzdv=\iiint\limits_{\Omega}2acxzdv=0$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz)dv$$

$$=a^2\iiint\limits_{\Omega}x^2dv+b^2\iiint\limits_{\Omega}y^2dv+c^2\iiint\limits_{\Omega}z^2dv+0$$

轮换对称性

$$\boxed{=(a^2+b^2+c^2)\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv}=(a^2+b^2+c^2)\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega^*}r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}v$$

$$=(a^2+b^2+c^2)\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{r}r^4\,\mathrm{d}r=\frac{4}{15}\pi r^5(a^2+b^2+c^2).$$

拓展题3

设$f(u)\in C^1$, $f(0)=0$,计算$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}v$,其中$\Omega$: $x^2+y^2+z^2\le t^2$.

【解】 $$\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega^*} f(r)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\,\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r)r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}v=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi\int_0^t f(r)r^2\,\mathrm{d}r}{\pi t^4}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=f'(0).$$