2020年9月高数A(2)期末考试题参考答案

1. 设 $z(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$, $z(1,y)=\sin y$, 求 $z(x,y)$.

解 将 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$ 两边同时对 x 积分，得

$$z(x,y)=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+\varphi(y),$$

又由 $z(1,y)=\sin y$ 知 $-\sin y-\dfrac{1}{y}\ln|1-y|+\varphi(y)=\sin y$, 则

$$\varphi(y)=2\sin y+\frac{1}{y}\ln|1-y|,$$

故

$$z(x,y)=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+2\sin y+\frac{1}{y}\ln|1-y|$$

$$=(2-x)\sin y+\frac{1}{y}\ln\left|\frac{1-y}{1-xy}\right|.$$

2. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^4}{x^2+y^4}$. (8分)

解 因为 $$0\le\frac{x^2y^4}{x^2+y^4}\le\frac{x^2y^4}{y^4}=x^2,$$

又 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2=0,$$

由夹逼定理知 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^4}{x^2+y^4}=0.$$

3. 求经过直线 $L:\begin{cases}x+1=0,\\ 3y+2z+2=0,\end{cases}$ 而且与点 $A(4,1,2)$ 的距离等

P34，P28类似例题

于 3 的平面方程.

解　过直线 $L:\begin{cases} x+1=0, \\ 3y+2z+2=0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$$(x+1)+\lambda(3y+2z+2)=0,$$

即　$$x+3\lambda y+2\lambda z+1+2\lambda=0,$$

由点到~~直线~~平面的距离公式及已知条件知

$$d=\frac{|4+3\lambda+4\lambda+1+2\lambda|}{\sqrt{1+9\lambda^2+4\lambda^2}}=\frac{|5+9\lambda|}{\sqrt{1+13\lambda^2}}=3,$$

解得　$$\lambda_1=-\frac{1}{6},\ \lambda_2=\frac{8}{3},$$

故所求平面方程为　$6x-3y-2z+4=0$ 及 $3x+24y+16z+19=0.$

P89.原习题14　4. 设 $u=f(x,y,z)$, 其中 $x=r\cos\theta\sin\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,$ $z=r\cos\varphi$, f 可微，若 $\dfrac{f_x'}{x}=\dfrac{f_y'}{y}=\dfrac{f_z'}{z}$, 证明 u 仅为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数.

证　由于 $u=f(x,y,z)=f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)$,

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=f_x'\cdot(-r\sin\theta\sin\varphi)+f_y'\cdot r\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=f_x'\cdot r\cos\theta\cos\varphi+f_y'\cdot r\sin\theta\cos\varphi-f_z'\cdot r\sin\varphi,$$

由 $\dfrac{f_x'}{x}=\dfrac{f_y'}{y}=\dfrac{f_z'}{z}$ 得

$$\frac{f_x'}{r\cos\theta\sin\varphi}=\frac{f_y'}{r\sin\theta\sin\varphi}=\frac{f_z'}{r\cos\varphi}=\lambda,$$

代入 $\frac{\partial u}{\partial\theta},\frac{\partial u}{\partial\varphi}$, 得 $\frac{\partial u}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}=0,$

故 u 仅为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数.

5.已知曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5,\end{cases}$ 求 L 上距离 xoy 平面最远的点和最近的点.

练习册原题 习题3.3七

解 令 $L=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5),$

由 $\begin{cases}L_x'=2\lambda x+\mu=0,\\ L_y'=2\lambda y+\mu=0,\\ L_z'=2z-4\lambda z+3\mu=0,\\ L_\lambda'=x^2+y^2-2z^2=0,\\ L_\mu'=xy+3z-5=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5,\\ y=-5,\\ z=5.\end{cases}$

故 L 上距离 xoy 平面最远的点为$(-5,-5,5)$,最近的点为$(1,1,1)$.

6.证明平面$lx+my+nz=p$与二次曲面 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ 相切的条件为 $\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}=p^2.$

证 设切点为 $P(x_0,y_0,z_0),$

则二次曲面在点P处的法向量为$b=(2Ax_0,2By_0,2Cz_0),$

由 $b\,//\,(l,m,n)$ 得

$$\frac{2Ax_0}{l}=\frac{2By_0}{m}=\frac{2Cz_0}{n}=k\Rightarrow x_0=\frac{lk}{2A},y_0=\frac{mk}{2B},z_0=\frac{nk}{2C},$$

又切点在平面及二次曲面上，则 $\begin{cases}lx_0+my_0+nz_0=p,\\Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2=1,\end{cases}$

将 $x_0=\frac{lk}{2A},y_0=\frac{mk}{2B},z_0=\frac{nk}{2C}$代入上方程组并消$k$，得

$$\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}=p^2.$$

7.计算下列二重积分：$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y.$

解　$D_1:\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\le y\le\sqrt{x},\ D_2:\frac{1}{2}\le x\le 1,\ x\le y\le\sqrt{x},$

作图可知　$D:\frac{1}{2}\le y\le 1,\ y^2\le x\le y,$

故　　原式 $=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y$

$$=\cdots=\frac{3}{8}\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}.$$

8. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是两球体：

$x^2+y^2+z^2\le 1$　与　$x^2+y^2+z^2\le 2z$的公共部分.

原题，练习册4.2（1）四（1），三重积分PPT题7

解 法 1 用柱面坐标. 由于

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}.$$

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$

则 $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1-\sqrt{1-r^2} \le z \le \sqrt{1-r^2},$

故 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r\,\mathrm{d}r \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} z^2 \,\mathrm{d}z$

$$= \cdots = \frac{59}{480}\pi.$$

法 2 用截面法. 由于

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2}.$$

则 $D_{z1} : x^2 + y^2 \le 2z - z^2,\ 0 \le z \le \dfrac{1}{2};$

$D_{z2} : x^2 + y^2 \le 1 - z^2,\ \dfrac{1}{2} \le z \le 1,$

故 原式 $\displaystyle= \int_0^{\frac{1}{2}} z^2 \,\mathrm{d}z \iint_{D_{z1}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{1} z^2 \,\mathrm{d}z \iint_{D_{z2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} z^2 \cdot \pi(2z - z^2)\,\mathrm{d}z + \int_{\frac{1}{2}}^{1} z^2 \cdot \pi(1 - z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \cdots = \frac{59}{480}\pi.$$

9. 计算曲线积分 $\displaystyle\int_L (12xy + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^y - \cos y)\,\mathrm{d}y$, 其中 L

是由点$A(-1,1)$沿曲线$y=x^2$到点$O(0,0)$，再沿 x轴到点$B(2,0)$的路径.（8 分）

解 因为 $P=12xy+\mathrm{e}^y, Q=x\mathrm{e}^y-\cos y,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12y+\mathrm{e}^y, \frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^y, \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$$

法 1：补充 $L_1: x=2, y:0\to 1;\ L_2: y=2, x:2\to -1,$

则 $$\int_{L+L_1+L_2} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D -12x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^2 -12x\,\mathrm{d}x=\cdots=-21.$$

又 $$\int_{L_1+L_2} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 (2\mathrm{e}^y-\cos y)\,\mathrm{d}y+\int_2^{-1} (12x+\mathrm{e})\,\mathrm{d}x$$

$$=\cdots=-\mathrm{e}-\sin 1-20,$$

故 $$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=-21+\mathrm{e}+\sin 1+20=\mathrm{e}+\sin 1-1.$$

法 2 令 $P_1=\mathrm{e}^y$ 时，$\dfrac{\partial P_1}{\partial y}=\mathrm{e}^y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，记

$$I_1=\int_L 12xy\,\mathrm{d}x=\int_{L_1} 12xy\,\mathrm{d}x+\int_{L_2} 12xy\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^0 12x\cdot x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^2 0\,\mathrm{d}x=-3;$$

$$I_2=\int_L \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-\cos y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_L \mathrm{d}(x\mathrm{e}^y-\sin y)=(x\mathrm{e}^y-\sin y)\Big|_{(-1,1)}^{(2,0)}=2+\mathrm{e}+\sin 1,$$

则　原式 $=I_1+I_2=-3+2+\mathrm{e}+\sin 1=\mathrm{e}+\sin 1-1.$

10.计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 其中 Σ 为下半球

$z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$ ，取上侧.

解 补充 $\Sigma_1: z=0,\ x^2+y^2\le 2,$ 　取下侧,

则由高斯公式有

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}[2+2(z+2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=-\int_{-2}^{0}(6+2z)\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 4-z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-24\pi.$$

又 $$\iint\limits_{\Sigma_1} 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\le 4}2^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-4\cdot 4\pi=-16\pi,$$

故原式 $=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1-\Sigma_1} 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-24\pi+16\pi=-8\pi.$

11.求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}x^n$ 的收敛区间与和函数.几乎原题。P336例6

解 因为 $a_n=\frac{n^2}{(n+1)!}$,

则 $$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1)^2}=+\infty,$$

从而幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}x^n$ 的收敛区间为 $(-\infty,\infty)$.

由于

$$\frac{n^2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n-(n+1)+1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\quad (n\geq 2),$$

故 $x\neq 0$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}x^n=\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}]x^n$$

$$=\frac{1}{2}x+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$=\frac{1}{2}x+x(\mathrm{e}^x-1)-(\mathrm{e}^x-1-x)+\frac{1}{x}(\mathrm{e}^x-1-x-\frac{1}{2}x^2)$$

$$=(x-1)\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}.$$

从而和函数为 $S(x)=\begin{cases}(x-1)\mathrm{e}^x+\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

12.（1）判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$ 的敛散性；

（2）若记 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛；

（3）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$.

解 $(1)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\dfrac{1}{2},$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$ 收敛.

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})] = \sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k} + \ln k - \ln(1+k)]$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(1+n) = x_n,$$

由级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})]$收敛知数列$\{x_n\}$收敛.

(3) 不妨设数列$\{x_n\}$收敛于A,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n + \ln(n+1)}{\ln n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{A}{\ln n} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 0 + 1 = 1.$$