湖南大学理工类必修课程

大 学 数 学 AII

—— 多元元微积分学

1.5　曲面、曲线及其方程

- 主讲：于红香

向量代数与空间解析几何

第五节 空间曲面、曲线及其方程

一. 空间曲面及其方程

二. 空间曲线及其方程

第一章 向量代数与空间解析几何

第五、六节 空间曲面、曲线及其方程

学习要求:

- ▲ 了解空间曲面、空间曲线的概念。
- ▲ 熟悉球面方程、柱面方程、旋转曲面方程。
- ▲ 了解空间曲线的一般方程、参数方程。
- ▲ 能计算空间曲线在坐标面上的投影。
- ▲ 熟悉常见二次曲面的方程、图形、特性。
- ▲ 能画出常见曲面曲线的图形

第五节 空间曲面、曲线及其方程

一. 曲面及其方程

1. 曲面及其方程
2. 球面及其方程
3. 柱面及其方程
4. 二次柱面
5. 旋转曲面及其方程

曲面方程

在空间R^3中，点$M(x, y, z)$位于一张曲面Σ上的充要条件是点M的坐标x, y, z满足方程

$$F(x, y, z) = 0\text{。}$$

方程 $F(x, y, z) = 0$ 称为Σ的曲面方程。

R^3中的曲面Σ是指空间中的点集:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in R^3\}\text{。}$$

1. 曲面及其方程

对于空间中曲面的研究，主要解决两个问题：

- 已知作为具有某种性质的点的几何轨迹的曲面，建立该曲面的方程
- 已知曲面方程，研究曲面的几何形状和性质

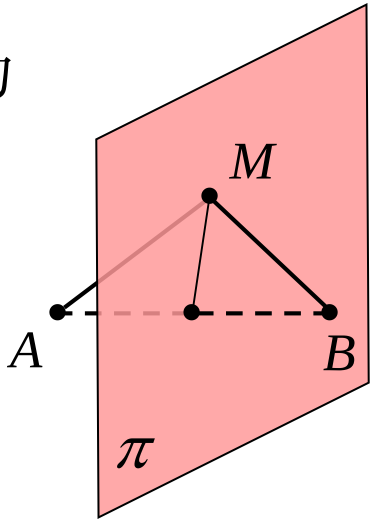
例 已知动点$M(x,y,z)$恒保持与两定点$A(2,-3,2)$，$B(1,4,-2)$等距，求动点的轨迹方程。

解 动点M应满足条件：$\|\overline{MA}\|=\|\overline{MB}\|$，即有

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-(-3))^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2+(z-(-2))^2}。$$

两边平方，整理后得动点M的轨迹方程为

$$x-7y+4z+2=0。$$



这是线段$\overline{AB}$的垂直平分平面。

球面及其方程

在空间R^3中，到定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的距离等于r的点的集合，称为一个以点M_0为中心，以r为半径的球面。该球面的方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2。$$

球心位于坐标原点，半径等于r的球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=r^2。$$

2. 球面及其方程

将球面方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ 展开，得

$$x^2+y^2+z^2-2xx_0-2yy_0-2zz_0+x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2=0。$$

由此发现:

1. 球面方程是一个关于x, y, z的二次方程, 其二次项系数相等。

2. 球面方程不含二次混合项 xy，yz，xz 。

3. 任何一个满足上述两条的三元二次方程必为球面方程?

设有满足条件 1 和 2 的三元二次方程

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0, \quad (A \neq 0)$$

则 $$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A}z + \frac{G}{A} = 0,$$

配方后，得

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 + \left(z + \frac{F}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 + F^2 - 4AG}{4A^2},$$

当 $D^2 + E^2 + F^2 - 4AG > 0$ 时，为一球面;

当 $D^2 + E^2 + F^2 - 4AG = 0$ 时，为一点;

例 方程 $x^2+y^2+z^2+6x-8y=0$ 表示什么曲面？

解 将方程配方后，得

$$(x+3)^2+(y-4)^2+z^2=25,$$

故原方程表示以点$M(-3,4,0)$为中心，半径等于5 的球面。

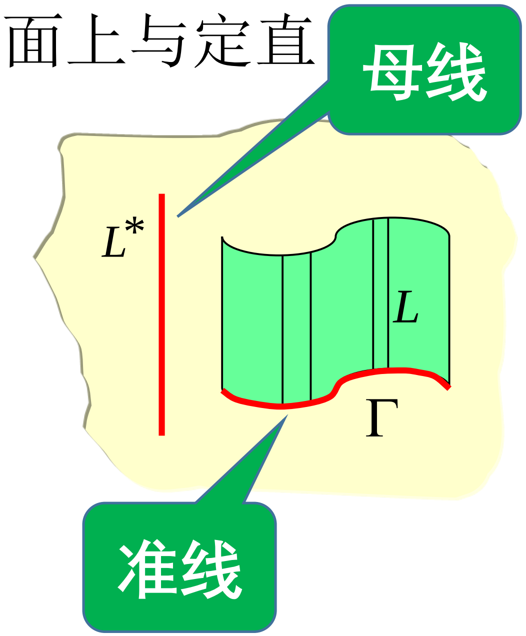
柱面的概念

在空间 R^3 中, 与某定直线 L^* 平行的直线 L,

沿已知曲线 Γ 平行移动所生成的曲面, 称为柱面。

已知曲线 Γ 称为柱面的准线; 柱面上与定直线 L^* 平行的直线称为柱面的母线。

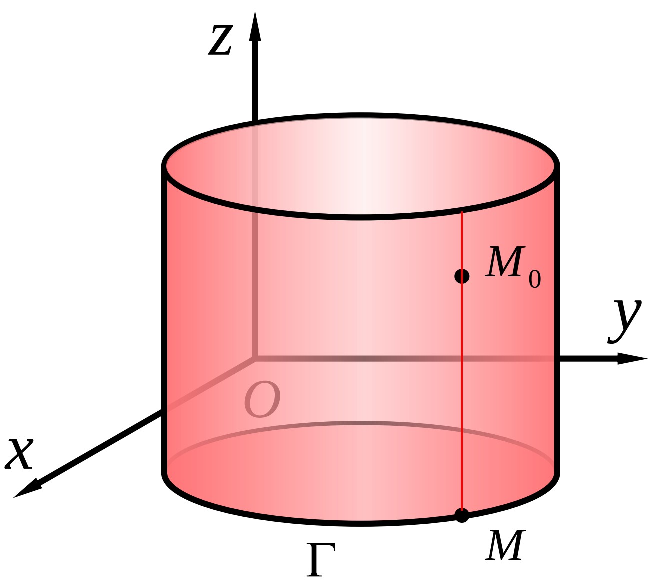
柱面通常以其准线的名称来命名。



问题

设柱面S的准线为xy平面上的曲线Γ：$F(x,y)=0$，柱面的母线平行于z轴，求此柱面的方程。

准线位于坐标面
母线平行坐标轴



在柱面上任取一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，过点M_0作直线平行于z轴，交xy平面于点$M(x_0, y_0, 0)$。

点M必在准线Γ上，其坐标满足

$$F(x_0, y_0)=0。$$

故点M_0的坐标满足方程$F(x_0, y_0)=0$.

在空间R^3中，只含变量 x，y 而缺少变量 z 的方程

$$F(x,y)=0,$$

缺谁（母线）平行谁

为母线平行于 z 轴，准线为 xy 平面上的曲线

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

的柱面的方程。（柱面方程）

类似地:

$F(y,z)=0$ 为母线平行于 x 轴的柱面方程。

$F(x,z)=0$ 为母线平行于 y 轴的柱面方程。

缺谁（母线）平行谁

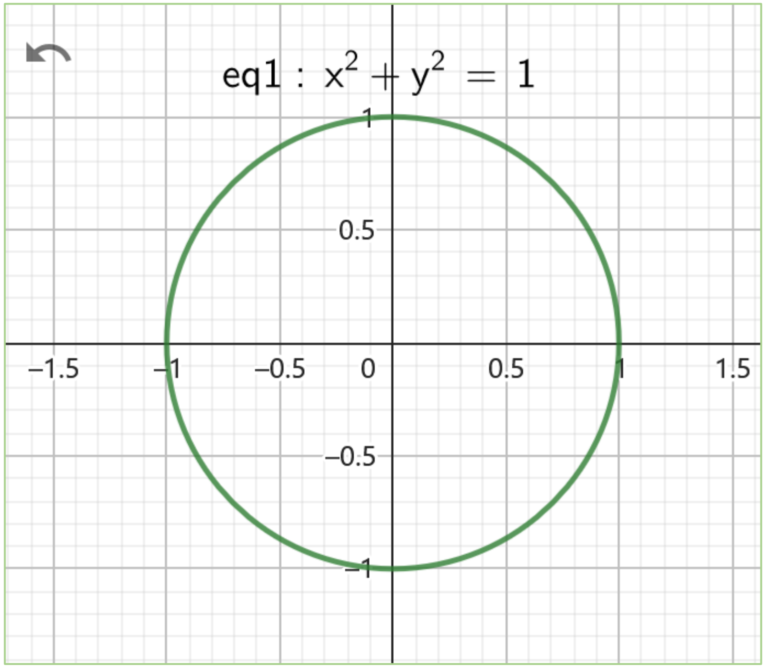
3. 柱面及其方程

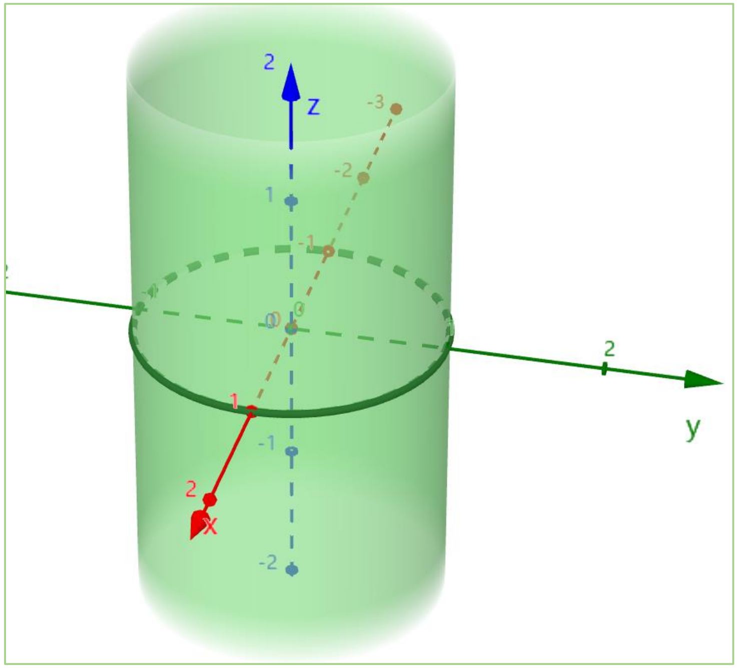
例

在R^2和R^3中，下列方程分别表示什么图形？

1. $x^2+y^2=1$。　　圆周和圆柱面

母线平行于z轴, 准线为xy平面上的单位圆: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$。



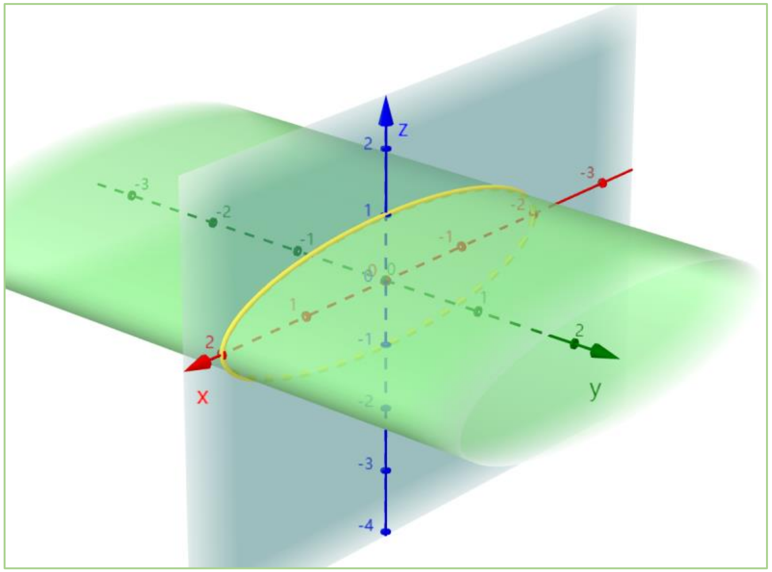


例

在R^2和R^3中，下列方程分别表示什么图形？

2. $\dfrac{x^2}{4}+z^2=1$。 椭圆柱面

母线平行于y轴, 准线为xz平面上的椭圆: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$。

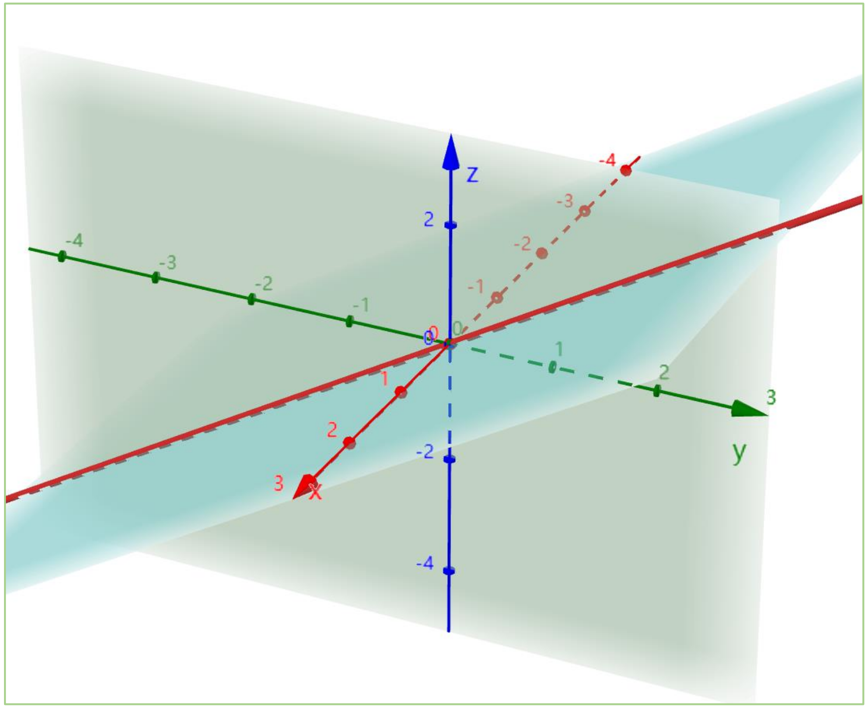


例

在R^2和R^3中，下列方程分别表示什么图形？

3. $z-y=0$。 实际上是平行于 x 轴的平面。

母线平行于x轴, 准线为yz平面上的直线: $\begin{cases} z-y=0 \\ x=0 \end{cases}$。



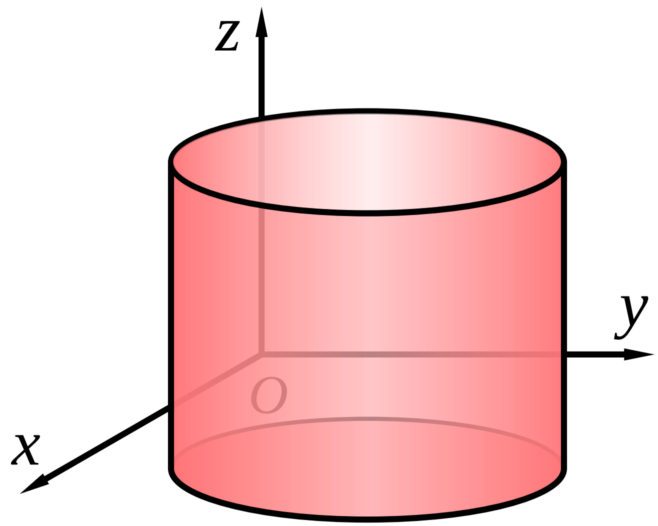
准线为坐标面上的二次曲线的柱面，称为二次柱面。

1. 圆柱面:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2。$$

$$(y-a)^2+(z-b)^2=r^2。$$

$$(x-a)^2+(z-b)^2=r^2。$$



$\Gamma:\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

R^2中的二次曲线

R^3中的二次柱面

缺谁平行谁

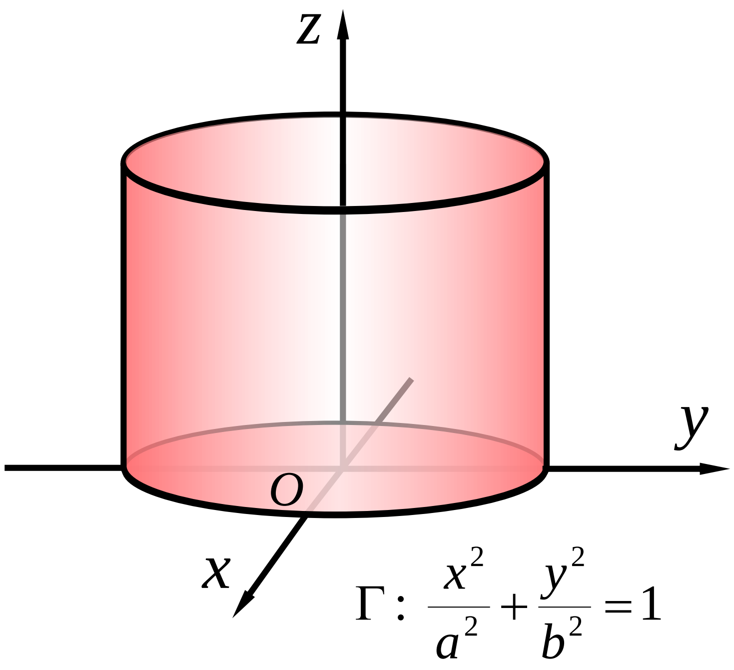
准线为坐标面上的二次曲线的柱面, 称为二次柱面。

2. 椭圆柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1。$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1。$$



准线为坐标面上的二次曲线的柱面，称为二次柱面。

3. 抛物柱面:

$$y^2 = 2px。$$

$$z^2 = 2px。$$

$$x^2 = 2pz。$$

…………

4. 双曲柱面:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1。$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1。$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1。$$

…………

消去z

例　求母线平行于z轴，准线为平面$z=2$ 与曲面

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$$ 的交线的柱面方程。

解　准线方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-z^2=1\\ z=2\end{cases}$ 即为平面 $z=2$ 上的曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=5\\ z=2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=5\\ z=0\end{cases}$$ 均可作为准线。

故所求柱面方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=5。$$ (母线平行于 z 轴的椭圆柱面)

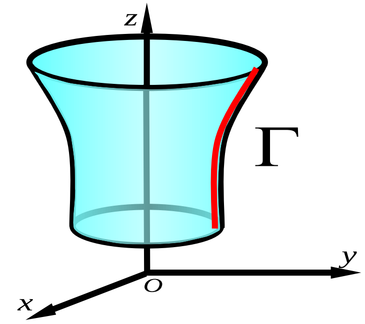
拓展思考：　当母线不是坐标轴，而是任意方向时

求准线为C: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=h \end{cases}$，母线方向为$\vec{q}=(a,b,c)$的柱面方程。

答案：$f(x-\dfrac{a}{c}(z-h), y-\dfrac{b}{c}(z-h))=0$

旋转曲面的概念

在空间R^3中, 由一条曲线Γ绕某一定直线L旋转一周所生成的曲面，称为旋转曲面。

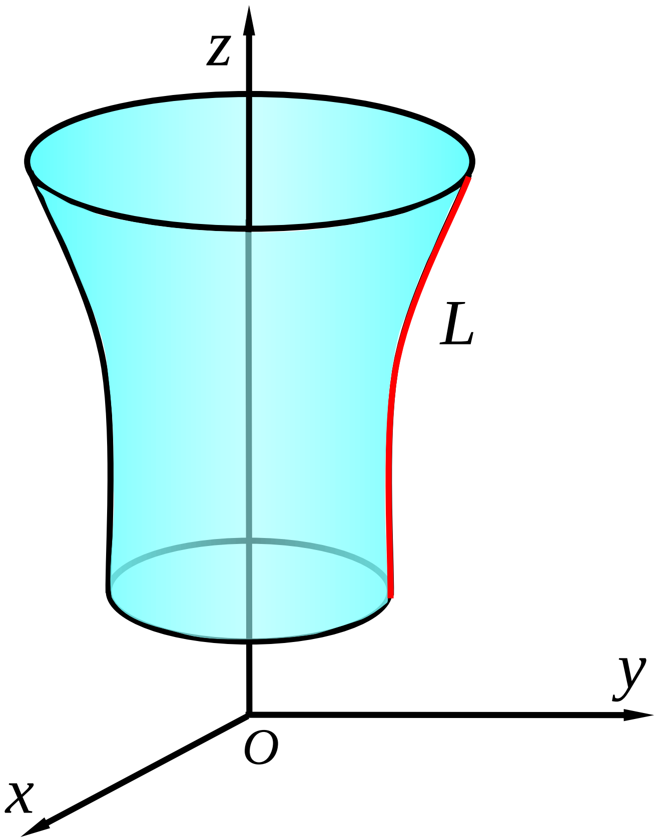


直线L称为旋转曲面的旋转轴。

旋转曲面通常以曲线Γ的名称来命名。

垂直于旋转轴的平面与旋转曲面的交线为一圆周。

旋转曲面的方程



问题

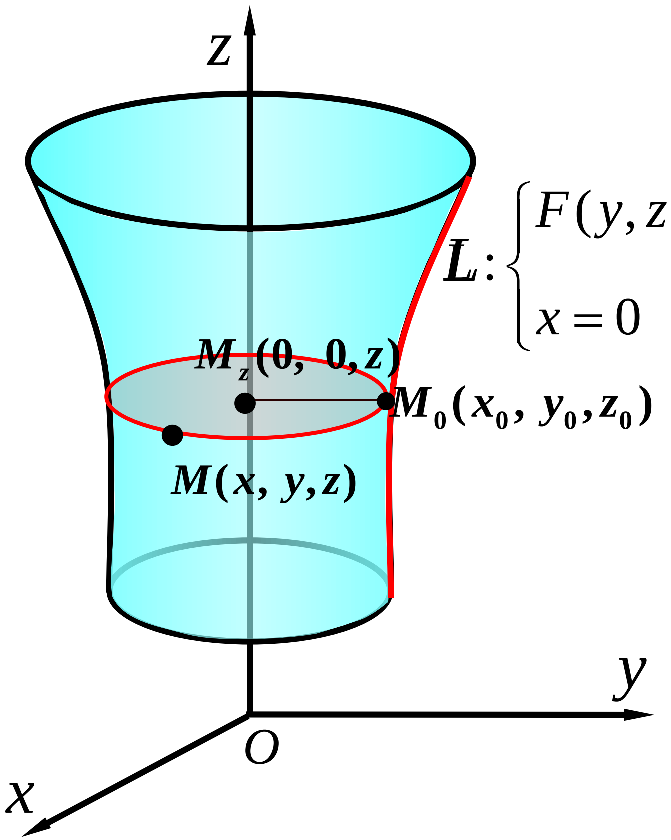
坐标面上的曲线
绕坐标轴旋转

求将 yz 平面上的曲线

$$L:\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程。

旋转曲面及其方程



$L:\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

在曲面上**任取**一点$M(x,y,z)$，过点M做旋转轴Z轴的垂直平面，与曲面的交线为圆周，与曲线L的交点为$M(x_0,y_0,z_0)$，与Z轴的交点为$M_z(0,0,z)$，则有：

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_0} \perp \vec{k} \text{ 即：} \quad z=z_0 \\ M_0 \in \mathrm{L}\text{即：} \; F(y_0,z_0)=0, x_0=0 \\ \|\overrightarrow{M_zM}\| = \|\overrightarrow{M_zM_0}\| \text{即：} \; x^2+y^2=y_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ z_0 = z \end{cases}$$

将上述关系式代入方程$F(x_0,y_0)=0$得到旋转曲面方程：

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0。$$

旋转曲面的方程

yz 平面上的曲线 L: $\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周

所生成的旋转曲面的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0。$$

绕谁，谁不变
另一，做代换

$\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴，z 不动，y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替。

$\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴，y 不动，z 用 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替。

旋转曲面的方程

xy 平面上的曲线 L: $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周

所生成的旋转曲面的方程为

$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0。$$

绕谁，谁不变
另一，做代换

$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴，x 不动，y 用 $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ 代替。

$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴，y 不动，x 用 $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ 代替。

旋转曲面的方程

xz 平面上的曲线 $L:\begin{cases}F(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周

绕谁，谁不变
另一，做代换

所生成的旋转曲面的方程为

$$F(x,\ \pm\sqrt{y^2+z^2})=0\text{。}$$

$\begin{cases}F(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴，x 不动，z 用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替。

$\begin{cases}F(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴，z 不动，x 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替。

例 求 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的曲 面方程。

解 所生成的曲面方程为

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

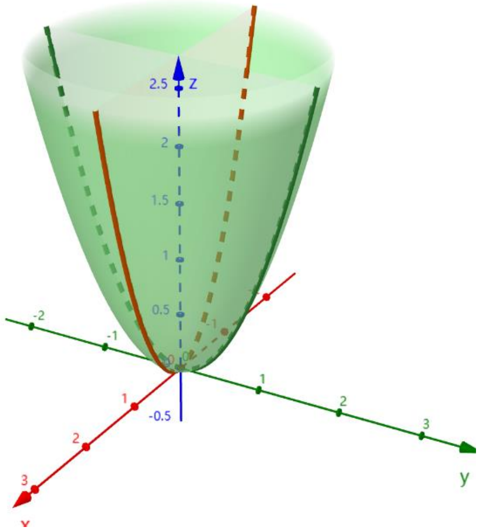
即 $$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1。$$ (旋转椭球面)

绕 y 轴旋转一周所生成的曲面方程 $\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$。

例 下列方程是否表示旋转曲面？

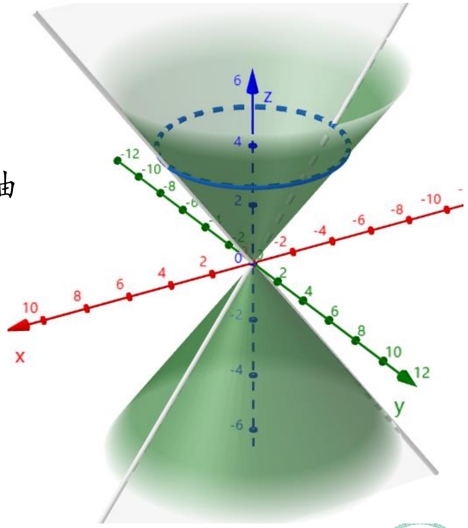
如果是，请说明它是如何产生的。

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$。 是 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0\\ y=0\end{cases}$ 绕z轴



2. $x^2+y^2-z=0$。 是 $\begin{cases}x^2-z=0\\ y=0\end{cases}$ 绕z轴

3. $x^2+y^2-z^2=0$。 是 $\begin{cases}x^2-z^2=0\\ y=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}z=\pm x\\ y=0\end{cases}$ 绕z轴



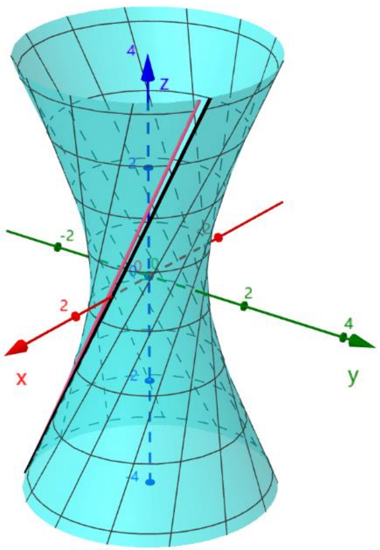
4. $-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{7}=1$。 不是

研究空间曲线

$$l:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$$

绕Z轴旋转一周而成的旋转曲面方程

及其图形.



研究空间曲线 $l_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$绕直线$l_1:\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

旋转一周而成的旋转曲面方程.

1.空间曲线的一般方程

2. 空间曲线的参数方程

3. 空间曲线在坐标面上的投影

1. 空间曲线的一般方程

曲面　　曲线

在 R^3 空间中，相交的两平面确定一条直线。

相交的两曲面 $\Sigma_1: F(x,y,z)=0$ 与 $\Sigma_2: G(x,y,z)=0$

所确定的曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

该方程组称为空间 R^3 中曲线的一般方程。

注意

空间 R^3 中的一条曲线可以作为不止一对曲面的交线。

1. 空间曲线的一般方程

例 写出R^3空间中,

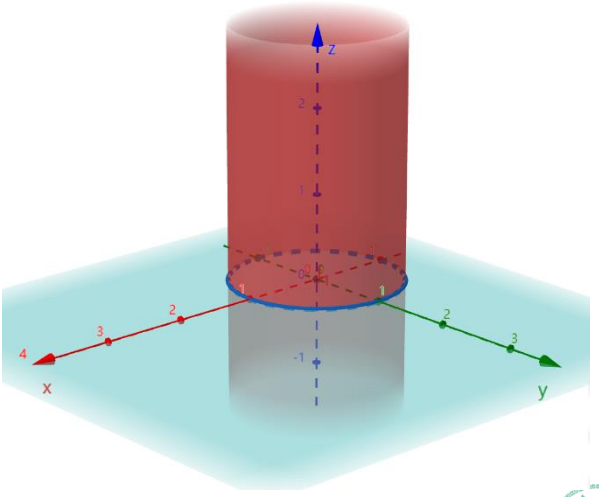
xy平面上以坐标原点为圆心的单位圆的方程。

解

看成母线平行于z轴的圆柱面$x^2+y^2=1$与

xy坐标面的交线，则所求方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0\text{。} \end{cases}$$



1. 空间曲线的一般方程

例 写出R^3空间中,

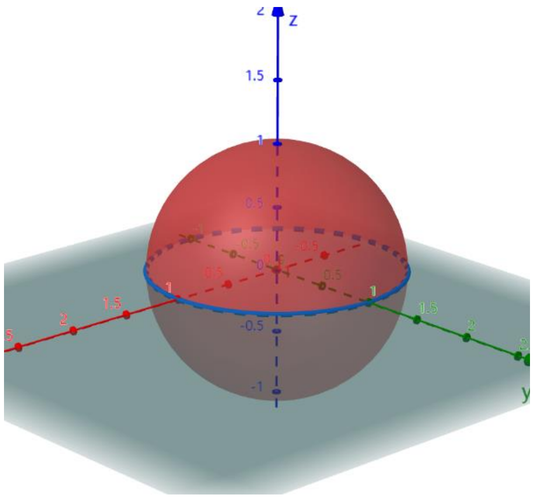
xy平面上以坐标原点为圆心的单位圆的方程。

解

看成以坐标原点为中心的单位球面$x^2+y^2+z^2=1$与

xy坐标面的交线，则所求方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=0\text{。} \end{cases}$$



1. 空间曲线的一般方程

例

写出R^3空间中,

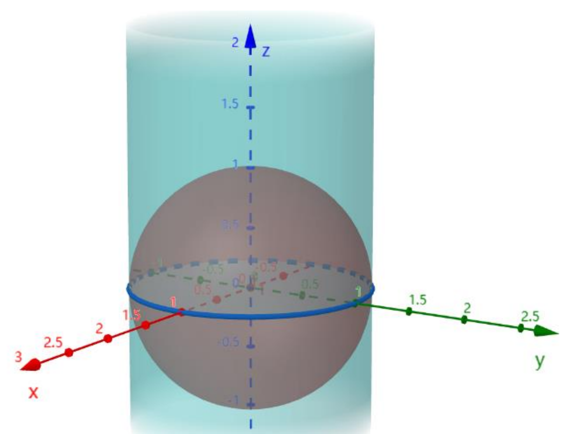
xy平面上以坐标原点为圆心的单位圆的方程。

解

看成圆柱面$x^2+y^2=1$与球面$x^2+y^2+z^2=1$的交线

则所求方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+y^2+z^2=1。 \end{cases}$$



尽管这三个方程组的代数解相同,

但它们的几何意义却不相同。

2. 空间曲线的参数方程

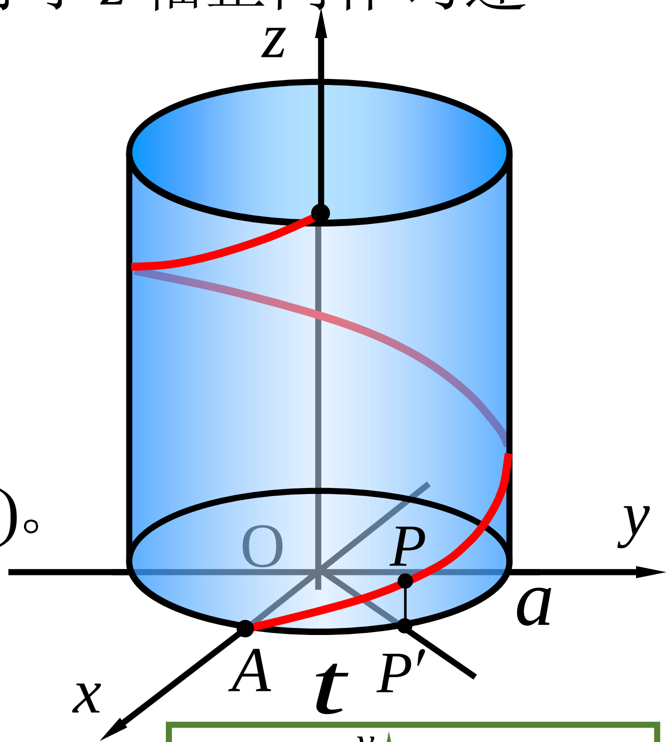
直线有参数方程，曲线也有。

用参数 t 来表示空间 R^3 中的曲线 Γ 上的任意一点 $M(x,y,z)$ 的坐标：

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad a \le t \le b, \\ z = z(t), \end{cases}$$

则称该方程组为空间曲线 Γ 的参数方程。

例 若点 P 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴匀速旋转，同时又以速度 v 沿平行于 z 轴正向作匀速直线运动，求点 P 的运动方程。



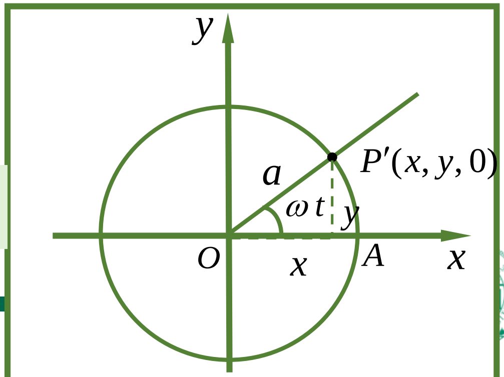
解 设点 P 由 x 轴上点 A 处开始运动，

在时刻 t 时运动到点 $P(x,y,z)$ 处。

点 P 在 xy 平面上的投影为 $P'(x,y,0)$。

则 $\angle AOP'=\omega t$，（转动）

$\|\overline{P'P}\|=vt$，（上升）



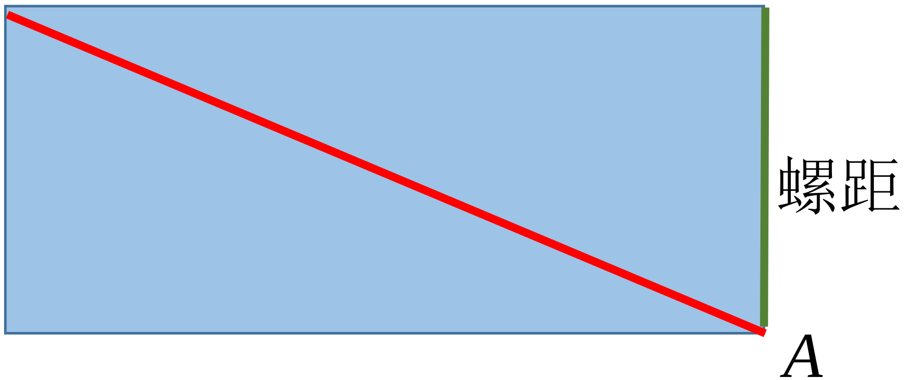
故 $x=a\cos\omega t$，$y=a\sin\omega t$，$z=vt$，$t\ge 0$。

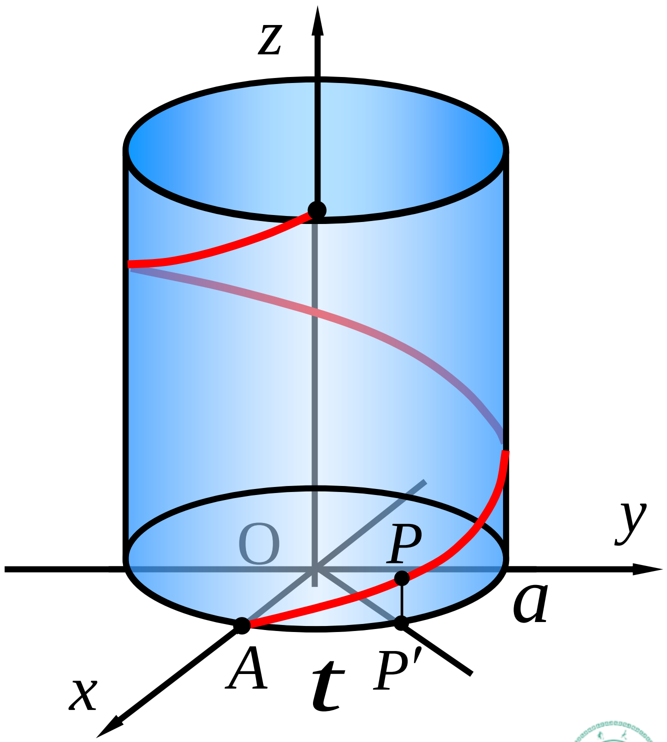
该方程表示的曲线称为螺旋线。

例 若点 P 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴匀速旋转，同时又以速度 v 沿平行于 z 轴正向作匀速直线运动，求点 P 的运动方程。

解

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \quad , \quad t \ge 0. \\ z = v t \end{cases}$$

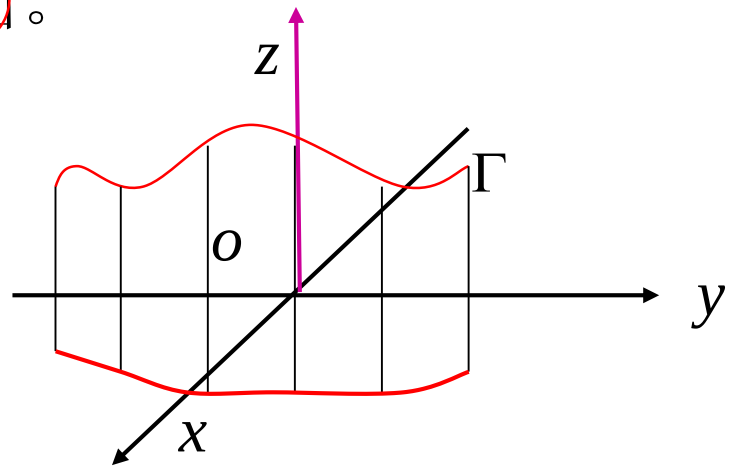




空间曲线在坐标面上的投影

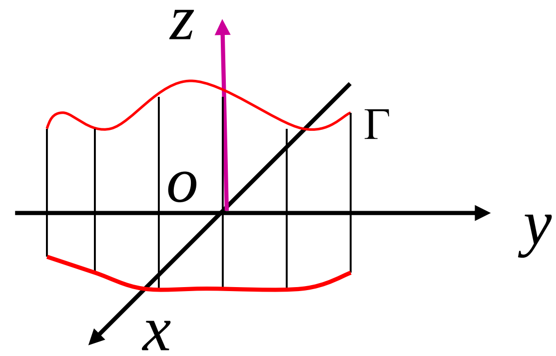
以空间曲线Γ为准线，作母线平行于z轴的柱面Σ_{xy}，称柱面Σ_{xy}与xy平面的交线为曲线Γ在xy平面上的投影。

此时，称柱面Σ称为投影柱面。



3. 空间曲线在坐标面上的投影

设 R^3 中曲线 Γ 的方程为



$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

由方程组消去变量 z 便得到母线平行于 z 轴的柱面 Σ_{xy} 的方程

$$F(x,y)=0\text{。}$$

曲线 Γ 位于柱面 Σ_{xy} 上，柱面 Σ_{xy} 即为投影柱面。

投影柱面 Σ_{xy} 与坐标面 xy 的交线就是曲线 Γ 在 xy 坐标面上的投影:

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0\text{。} \end{cases}$$

3. 空间曲线在坐标面上的投影

同理，

由方程组 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 消去变量 x，可得往 yz 坐标面上的投影柱面 Σ_{yz} 的方程

$$F(y,z)=0\,,$$

则曲线 Γ 在 yz 坐标面上的投影为

$$\begin{cases} F(y,z)=0\,, \\ x=0\,。 \end{cases}$$

3. 空间曲线在坐标面上的投影

同理，

由方程组 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 消去变量 y，可得往 xz 坐标面上的投影柱面Σ_{xz} 的方程

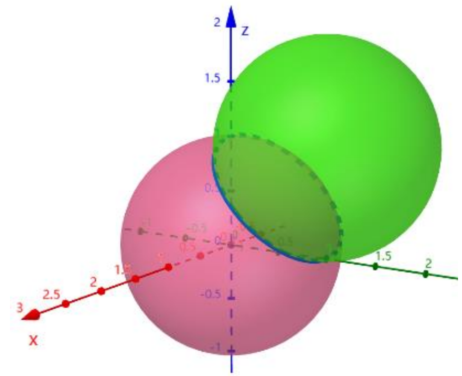
$$F(y,z)=0,$$

则曲线Γ在 xz 坐标面上的投影为

$$\begin{cases} F(x,z)=0, \\ y=0。 \end{cases}$$

3. 空间曲线在坐标面上的投影

例 求球面：$x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线在三个坐标面上的投影。

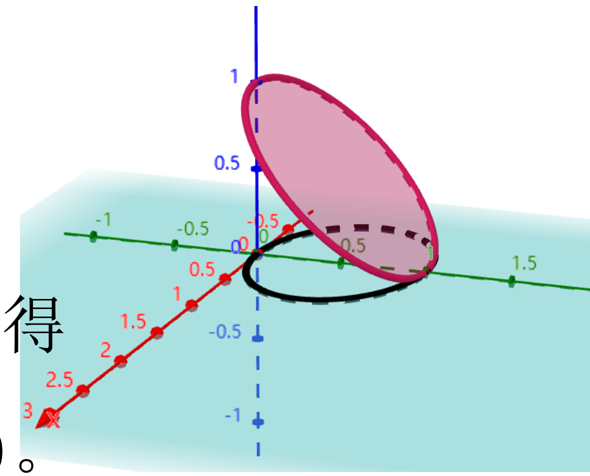


解 1. 在 xy 坐标面上的投影　消去变量 z

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$

$$y^2-(y-1)^2+z^2-(z-1)^2=0,$$

即　$y+z=1$。



以 $z=1-y$ 代入两个球面方程的任一个中，得

投影柱面方程 Σ_{xy}：　$x^2+2y^2-2y=0$。

从而，所求投影为 $\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0。\end{cases}$　（xy 平面上的椭圆）

例 求球面：$x^2+y^2+z^2=1$与 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$的交线在三个坐标面上的投影。

解 2. 在 xz 坐标面上的投影 消去变量 y

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$

$$y^2-(y-1)^2+z^2-(z-1)^2=0,\quad \text{即} \quad y+z=1。$$

以 $y=1-z$ 代入两个球面方程的任一个中，得

投影柱面方程Σ_{xz}： $x^2+2z^2-2z=0$。

从而，所求投影为 $\begin{cases} x^2+2z^2-2z=0, \\ y=0。 \end{cases}$ (xz 平面上的椭圆)

例 求球面：$x^2+y^2+z^2=1$与 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$的交线在三个坐标面上的投影。

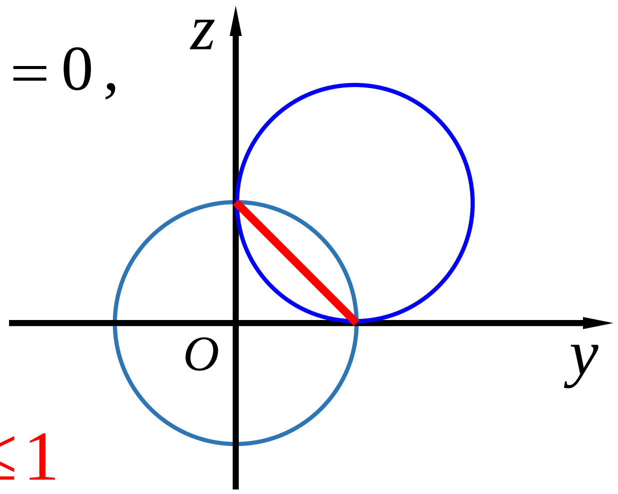
解 3. 在 yz 坐标面上的投影 消去变量 x

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 两式相减

$$y^2-(y-1)^2+z^2-(z-1)^2=0,$$

即 $y+z=1$。

投影柱面方程Σ_{yz}： $y+z=1$。



从而，所求投影为 $\begin{cases} y+z=1, & 0\le y\le 1 \\ x=0。 \end{cases}$

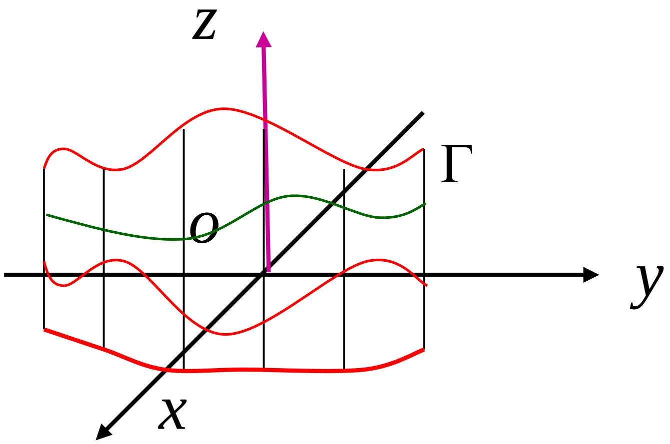
(yz 平面上的直线段)

3. 空间曲线在坐标面上的投影

请注意：

一条曲线在一个坐标面上的投影是**唯一**的。

坐标面上的一条曲线可以是**无穷多条**曲线的.



理解柱面方程的建立过程及逻辑；
理解旋转曲面的建立过程及逻辑。

熟悉球面方程；
母线平行于坐标轴的柱面方程及二次柱面方程；
旋转曲面方程的解构；