



大学物理

蒋英

湖南大学物理与微电子科学学院



第二篇 振动和波动

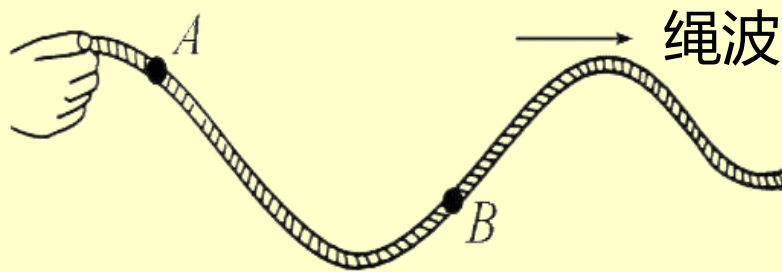
振动和**波动**是物质的两种运动形式。

振动：任何物理量在某一定值附近做来回往复变化的现象。

——**波动产生的根源**。

波动：振动在空间的传播。

——**振动传播的过程**。



振动形式：机械振动、电磁振动.....

波动类型：机械波、电磁波、物质波.....

机械振动和**机械波**是研究其他形式振动与波动的基础。

本课程机械振动部分：主要研究简谐振动的基本规律及其合成问题。

本课程机械波动部分：主要讨论机械波的传播、特征、描述、能量、干涉、衍射等。



第4章 机械振动

一条大河波浪宽
风吹稻花香两岸





第4章 机械振动

§4.1 简谐振动的描述

§4.2 简谐振动的动力学方程

§4.3 简谐振动的能量

§4.4 简谐振动的合成

§4.5 阻尼振动、受迫振动、共振



简谐振动——简谐振动的描述

一、简谐振动 (simple harmonic motion)

(1) **简谐振动的定义**：物体运动时，离开平衡位置的**位移**(或**角位移**)按余弦(或正弦)规律随时间变化。

(2) **简谐振动的表达式——简谐振动的运动方程**:

位移

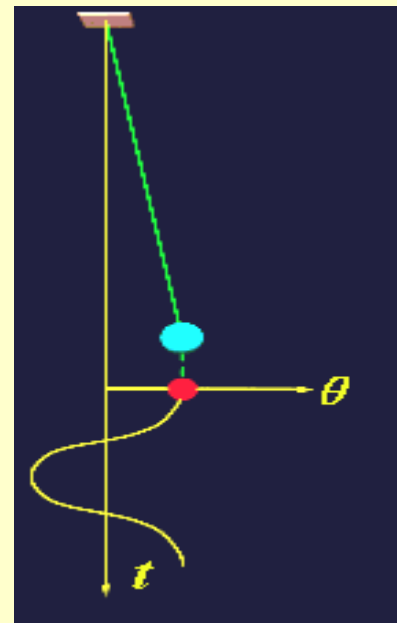
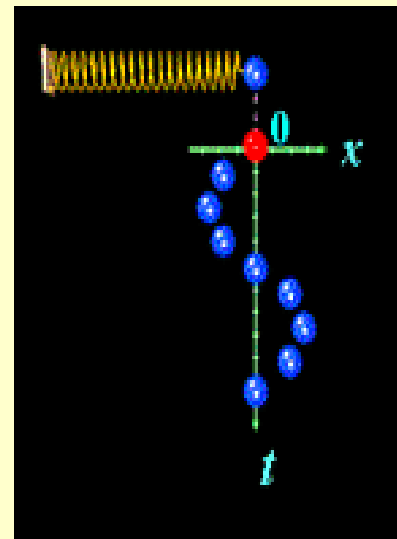
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

速度

$$v = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

加速度

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0)$$





简谐振动——简谐振动的描述

(3) 简谐振动的特征量 (振幅、周期、频率和相位)

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ 简谐振动完全由三个参量 A, ω, φ_0 决定。

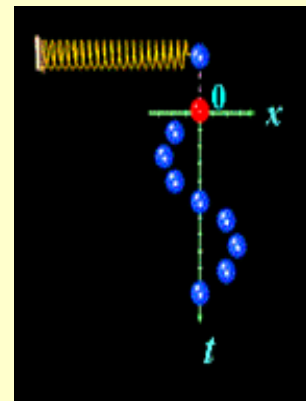
振幅 A : 物体/质点偏离平衡位置的最大位移

周期 T : 完成一次全振动所需要的时间

频率 ν : 单位时间内物理完成全振动的次数(赫兹, Hz) $\nu = \frac{1}{T}$

角频率 ω : 2π 秒内物体完成全振动的次数 $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$

相位 φ : $\varphi = \omega t + \varphi_0$ φ_0 : 初相位, $t=0$ 时刻的相位



物体在某一时刻的运动状态, 可用**位矢**和**速度**来描述。

$$\text{简谐振动运动状态} \left\{ \begin{array}{l} \text{位置 } x = A \cos(\omega t + \phi_0) \\ \text{速度 } v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) \end{array} \right.$$

简谐振动: 给定 A, ω

振动状态 $\longleftrightarrow (\omega t + \phi_0)$

相位($\varphi = \omega t + \varphi_0$)是决定简谐振动物体运动状态的物理量。



简谐振动——简谐振动的描述

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad v = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

(x, v) : 周期性

$(\omega t + \phi_0)$: 单调性

相位概念可用于比较两个简谐振动之间在振动步调上的差异,
设有两个同频率的简谐振动, 表达式分别为:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$$

相位差 $\Delta\phi = (\omega t + \phi_{20}) - (\omega t + \phi_{10}) = \phi_{20} - \phi_{10}$

$\Delta\phi = 0$ (或 2π 的整数倍): x_1 和 x_2 同相

$\Delta\phi = \pi$ (或 π 的奇数倍): x_1 和 x_2 反相

$\Delta\phi > 0$: x_2 的相位超前于 x_1 的相位 $\Delta\phi$

$\Delta\phi < 0$: x_2 的相位滞后于 x_1 的相位 $|\Delta\phi|$



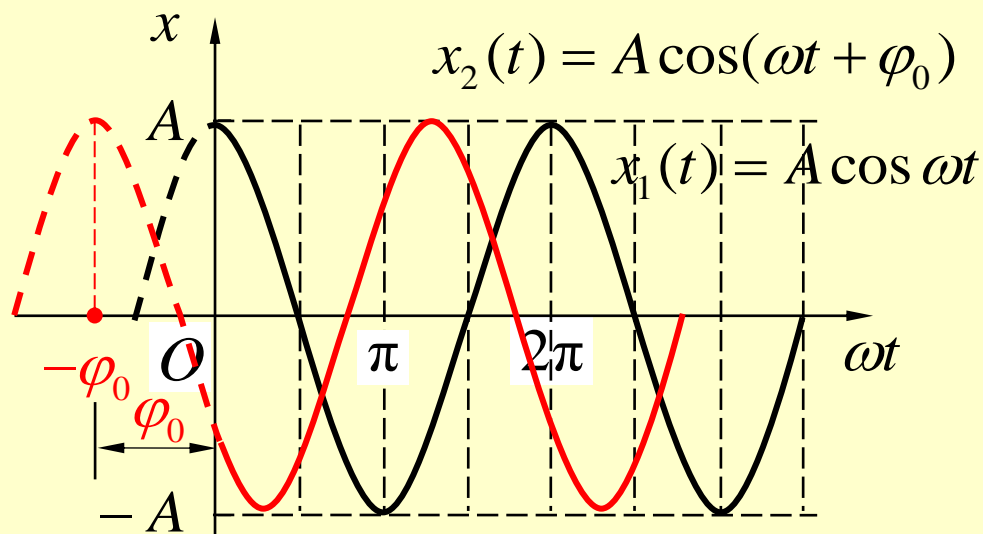
简谐振动——简谐振动的描述

二、简谐振动的描述方法

(1) 解析法

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ a = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

(2) 曲线图法

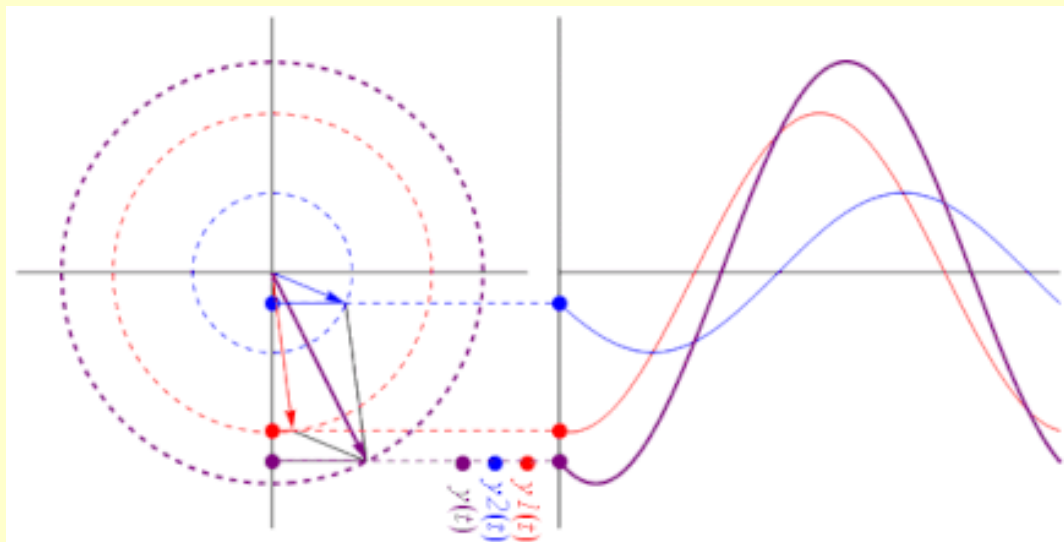
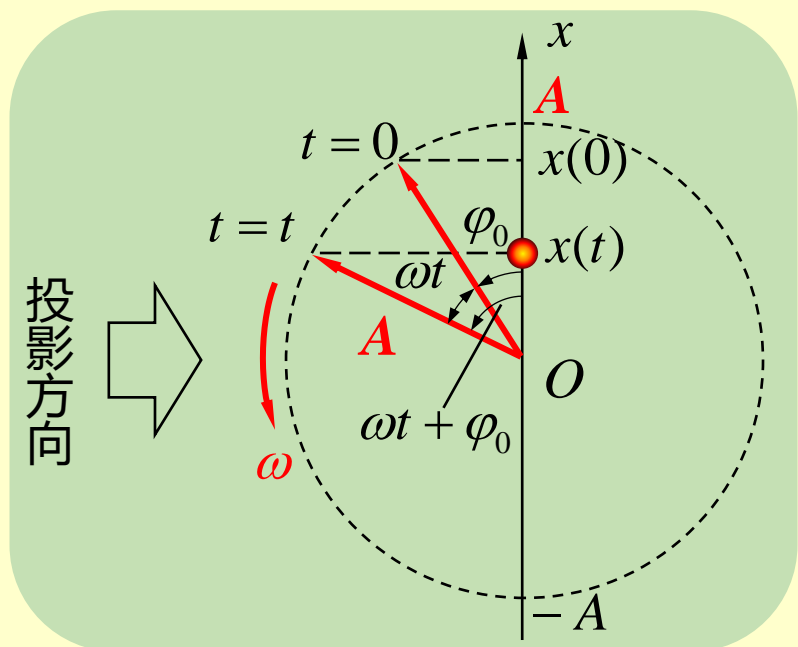




简谐振动——简谐振动的描述

(3) 旋转矢量图法 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

简谐振动可以用一个在圆周上旋转的矢量 \vec{A} 在 x 轴上的投影来表示。



以坐标原点 O 为始端作一矢量 \vec{A} ，该矢量以角速度 ω 绕 O 点逆时针匀速转动。

★ $t = 0$ 时刻，旋转矢量 \vec{A} 与 x 轴正方向的夹角等于 φ_0 。

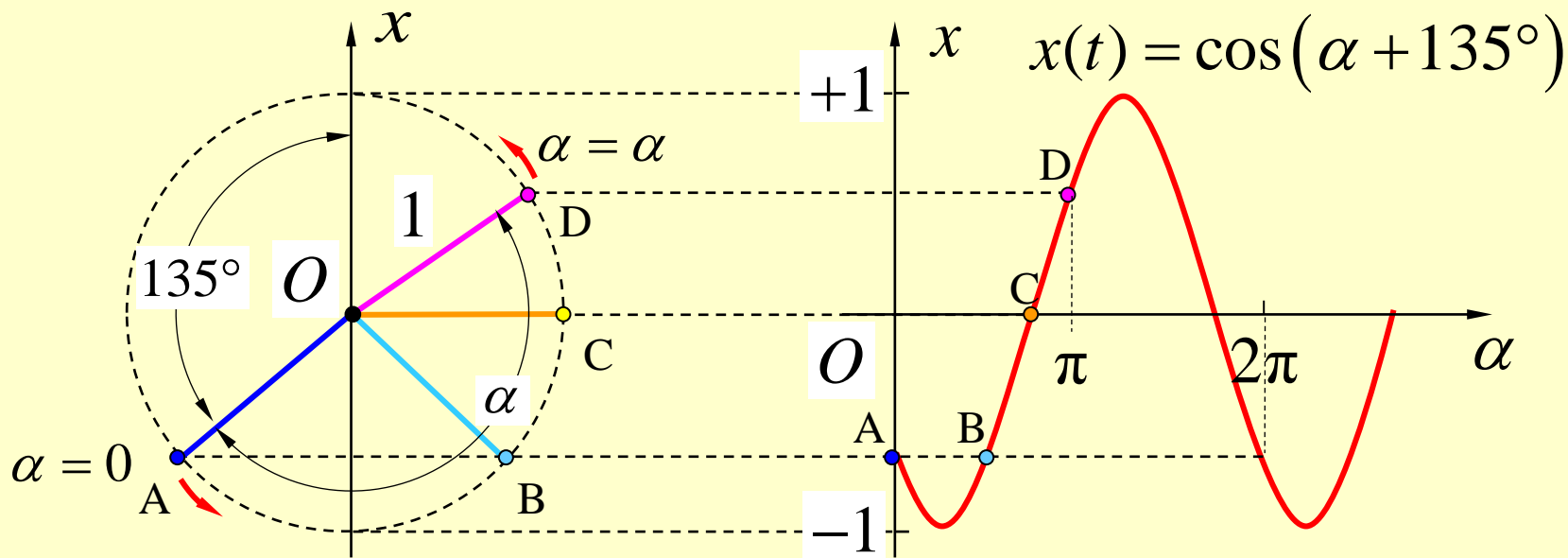
★ $t \neq 0$ 转动时刻，旋转矢量 \vec{A} 与 x 轴正方向的夹角等于 $\omega t + \varphi_0$ ，此时旋转矢量 \vec{A} 其末端在 x 轴上的投影点坐标为： $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ 投影点的运动是简谐振动

★**旋转矢量法**：把复杂的变速直线运动与简单的匀速圆周运动联系起来。



简谐振动——简谐振动的描述

(3) 旋转矢量图法 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

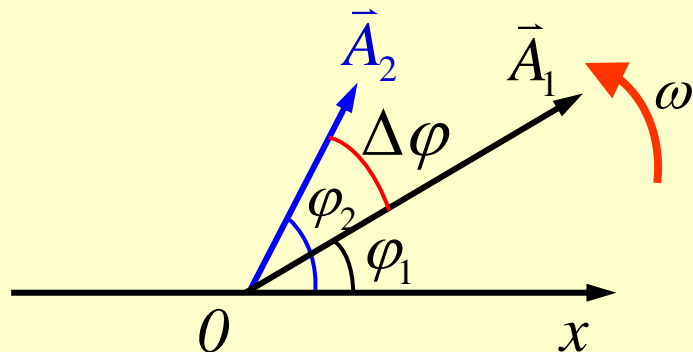




简谐振动——简谐振动的描述

旋转矢量图法优点：

- (1) 初位相直观明确。
- (2) 比较两个简谐振动的相位差直观明确。



若有两个同频率的简谐振动 $\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$

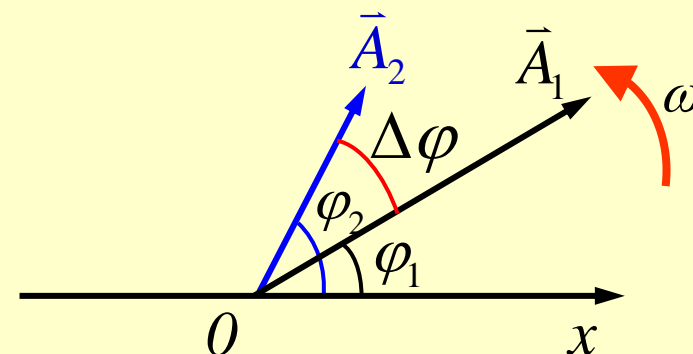
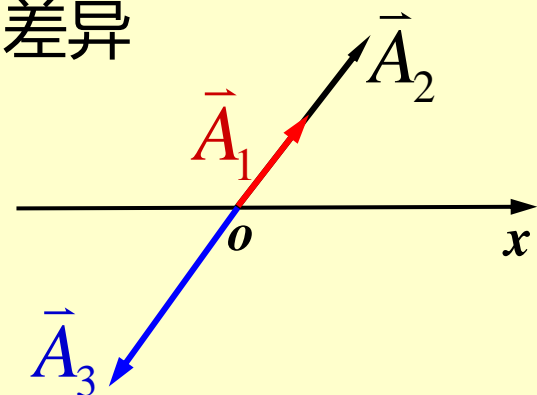
相位差可以反映两个简谐振动在振动步调上的差异

$\Delta\varphi = 2k\pi$ (A_1 、 A_2)两个振动为同相

$\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ (A_1 、 A_3)两个振动为反相

$\Delta\varphi > 0$ A_2 相位超前于 A_1 相位

$\Delta\varphi < 0$ A_2 相位滞后于 A_1 相位



$\Delta\varphi$ 的周期是 2π ，一般取： $-\pi \leq \Delta\varphi \leq \pi$



简谐振动——简谐振动的描述

例4.1：一物体沿 x 轴作简谐振动，振幅 $A = 0.12\text{m}$ ，周期 $T = 2\text{s}$ 。当 $t = 0$ 时，物体的位移 $x = 0.06\text{m}$ ，且向 x 轴正向运动。求：

- (1) 简谐振动表达式；
- (2) $t = T/4$ 时物体的位置、速度和加速度；
- (3) 物体从 $x = -0.06\text{m}$ 向 x 轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间。

解：(1) 取平衡位置为坐标原点，简谐振动表达式写为：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中 $A=0.12\text{m}$, $T=2\text{s}$, $\omega = 2\pi/T = \pi \text{ rad/s}$

$$\text{初始条件: } t = 0, x_0 = 0.06\text{m} \quad \Rightarrow \quad 0.12 \cos \varphi_0 = 0.06$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \pm \pi/3$$

$$v_0 = -\omega A \sin \varphi_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = -\pi/3$$

$$x = 0.12 \cos(\pi t - \pi/3)$$



简谐振动——简谐振动的描述

简谐振动表达式: $x = 0.12 \cos(\pi t - \pi/3)$

(2) 由(1)求得的简谐振动表达式得:

$$v = \frac{dx}{dt} = -0.12\pi \sin(\pi t - \pi/3) \quad a = \frac{dv}{dt} = -0.12\pi^2 \cos(\pi t - \pi/3)$$

在 $t = T/4 = 0.5\text{s}$ 时, 代入所列的表达式 $\Rightarrow v, a$

(3) 物体从 $x = -0.06\text{m}$ 向 x 轴负方向运动, 第一次回到平衡位置所需时间。

当 $x = -0.06\text{m}$ 且向 x 轴负方向运动时, 该时刻设为 t_1 , 相位是 $2\pi/3$

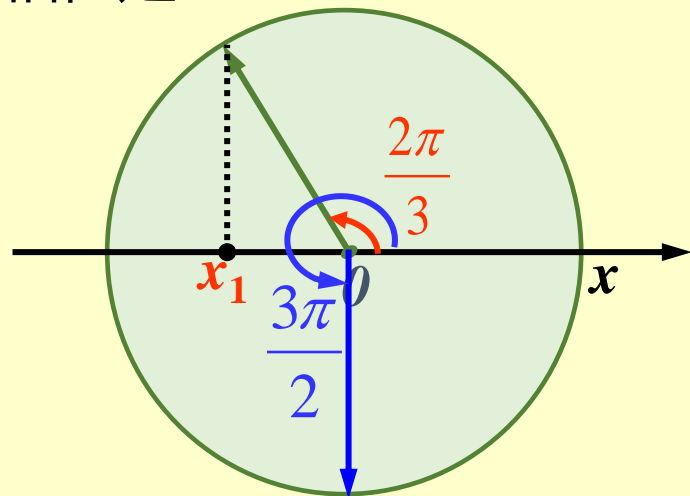
设物体在 t_2 时刻第一次回到平衡位置 ($x=0$), 相位是 $3\pi/2$

从 t_1 时刻到 t_2 时刻所对应的相差为:

$$\Delta\varphi = 3\pi/2 - 2\pi/3 = 5\pi/6$$

振幅矢量的角速度 ω , $\omega\Delta t = \Delta\varphi$

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{T}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{5}{6} = 0.83\text{s}$$





简谐振动——简谐振动的动力学方程

本节从动力学角度来分析物体做简谐振动的内在原因及其所遵循的动力学规律。

平衡位置：

机械平衡 (mechanical equilibrium) {

- 平动平衡 (mechanical equilibrium) $\sum_i \vec{F}_i = 0$
- 转动平衡 (rotational equilibrium) $\sum_i \vec{M}_i = 0$

回复力或回复力矩：

使物体回到平衡位置的力或力矩——回复力 (restoring force)
或回复力矩 (restoring torque)

常见力：弹力、重力、分子间作用力.....

物体做简谐振动的动力学原因：受到线性回复力的作用。



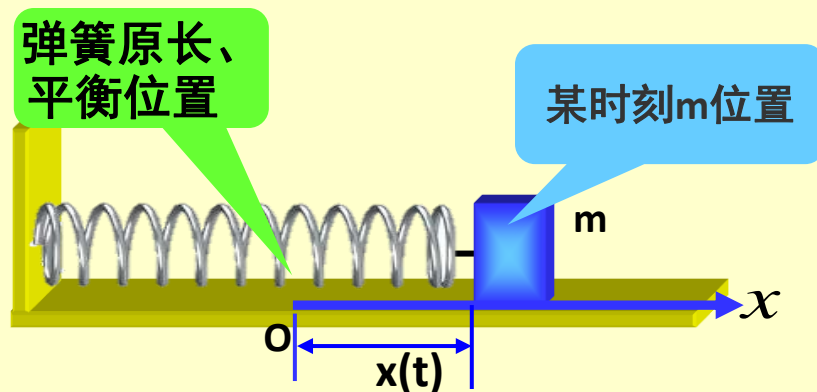
简谐振动——简谐振动的动力学方程

一、水平放置的弹簧振子

1、线性回复力(受力特点)

当物体离开平衡位置的位移为 x 时，根据胡克定律，在弹性限度内，物体所受的弹性力为： $F = -kx$ 。

线性回复力： $F = -kx$ ，与位移大小成正比，方向与位移相反，且始终指向平衡位置的力。



2、简谐振动的微分方程

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$\omega = \sqrt{k/m} \rightarrow$ 固有角频率, 决定于系统的内在性质(弹性、惯性质量)

微分方程的通解为： $x = A \cos(\omega t + \phi_0)$ 位移经O点做简谐振动

判断物体或物理量是否做简谐振动的关键是：基于该物理量的动力学方程是否满足上述微分方程的形式。



简谐振动——简谐振动的动力学方程

简谐振动的微分方程：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

简谐振动的运动方程：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- ★ 振动系统的角频率 ω ：由系统本身的因素(k, m)决定。
- ★ 振动系统的振幅和初相位(A, φ_0)：由系统以外的因素(初始条件)确定。

初始条件： $t = 0$ 时, $x = x_0$, $v = v_0$

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v &= -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \right\} t = 0 \left\{ \begin{aligned} x_0 &= A \cos \varphi_0 \\ v_0 &= -A \omega \sin \varphi_0 \end{aligned} \right.$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$
$$\tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

自主学习教材P100&101：例5.1和例5.2

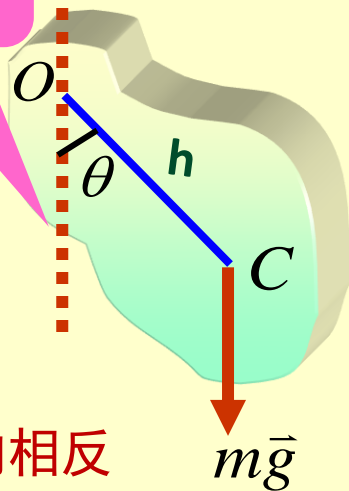


简谐振动——简谐振动的动力学方程

二、复摆

刚体的质心为 C ，在重力矩作用下绕过 O 点的光滑固定转轴做微小摆动，这样的系统称为**复摆**。

平衡位置
(合力和合力矩
均为零)



设刚体绕 O 轴逆时针转过的摆角为 θ ，按照右手螺旋定则，取垂直纸面向外为轴线的参考正方向。

若刚体对 O 轴的**转动惯量为 I** ， O 、 C 两点间的距离为 h ，则：

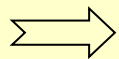
★刚体所受的重力矩为： $M = -mgh\sin\theta$ **力矩方向与规定方向相反**

若 θ 角度较小时($\theta < 5^\circ$)， $M = -mgh\sin\theta \approx -mgh\theta$ **线性回复力矩**

★刚体的转动定律： $M = I\beta$ ，复摆的角加速度 $\beta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

★根据上述两条可得： $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\theta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0$

$$\text{令 } \omega^2 = \frac{mgh}{I}$$



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

简谐振动的微分方程

因此：复摆作小角度摆动，也是简谐振动（角谐振动）。“分析单摆”



简谐振动——简谐振动的能量

物体做机械振动时，振动的能量由两部分构成：**动能**和**势能**。

本节以水平弹簧振子为例来讨论简谐振动的能量问题。

设系统的平衡位置为弹性势能零点， t 时刻物体离开平衡位置的位移为 x ，速度为 v ，则振动系统的：

★**动能**

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

$$E_{k\max} = \frac{1}{2}kA^2, E_{k\min} = 0 \quad \overline{E_k} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_k dt = \frac{1}{4}kA^2$$

★**势能**

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) \quad x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$E_{p\max} = \frac{1}{2}kA^2, E_{p\min} = 0 \quad \overline{E_p} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_p dt = \frac{1}{4}kA^2$$

★**总机械能**

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

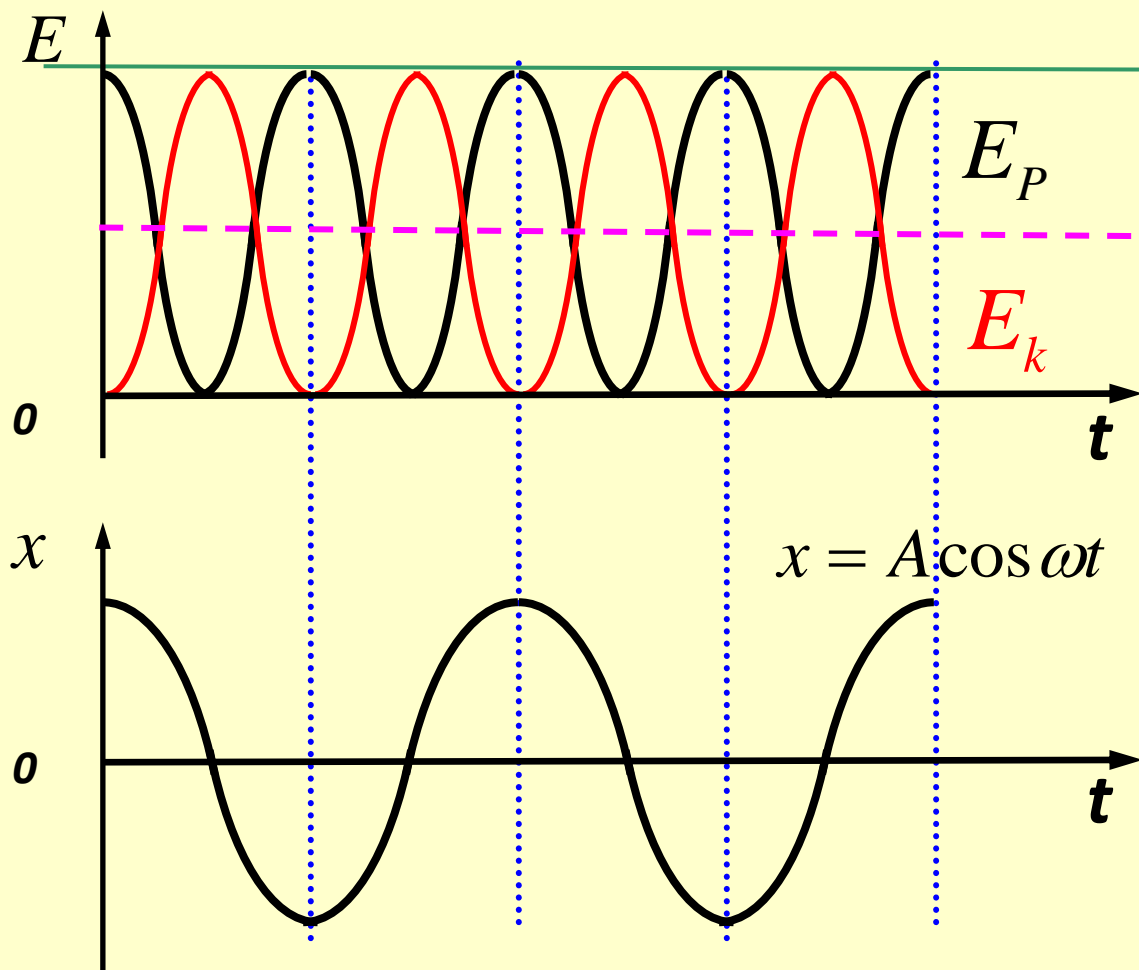
简谐振动系统的机械能守恒



简谐振动——简谐振动的能量

谐振子的动能、势能和总能量随时间的变化曲线:

$$E_k = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad E_p = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad E = E_k + E_p = \frac{1}{2} kA^2$$



$$E = E_{k \max} = E_{p \max} = \frac{1}{2} kA^2$$

$$\overline{E_k} = \overline{E_p} = \frac{E}{2} = \frac{1}{4} kA^2$$

★动能和势能此消彼长，任意时刻总能量守恒。

★动能和势能的变化频率是弹簧振子振动频率的两倍。

★总能量与振幅的平方成正比，适用所有简谐振动系统。

★动能和势能在一周期内平均值相等且等于总能量的一半。



简谐振动——简谐振动的动力学问题求解

简谐振动的动力学解法

1. 由分析受力出发 (由牛顿定律列方程)
2. 由分析能量出发 (将能量 弹簧原长 导出)

例4.2：弹簧竖直放置时物体的振动。

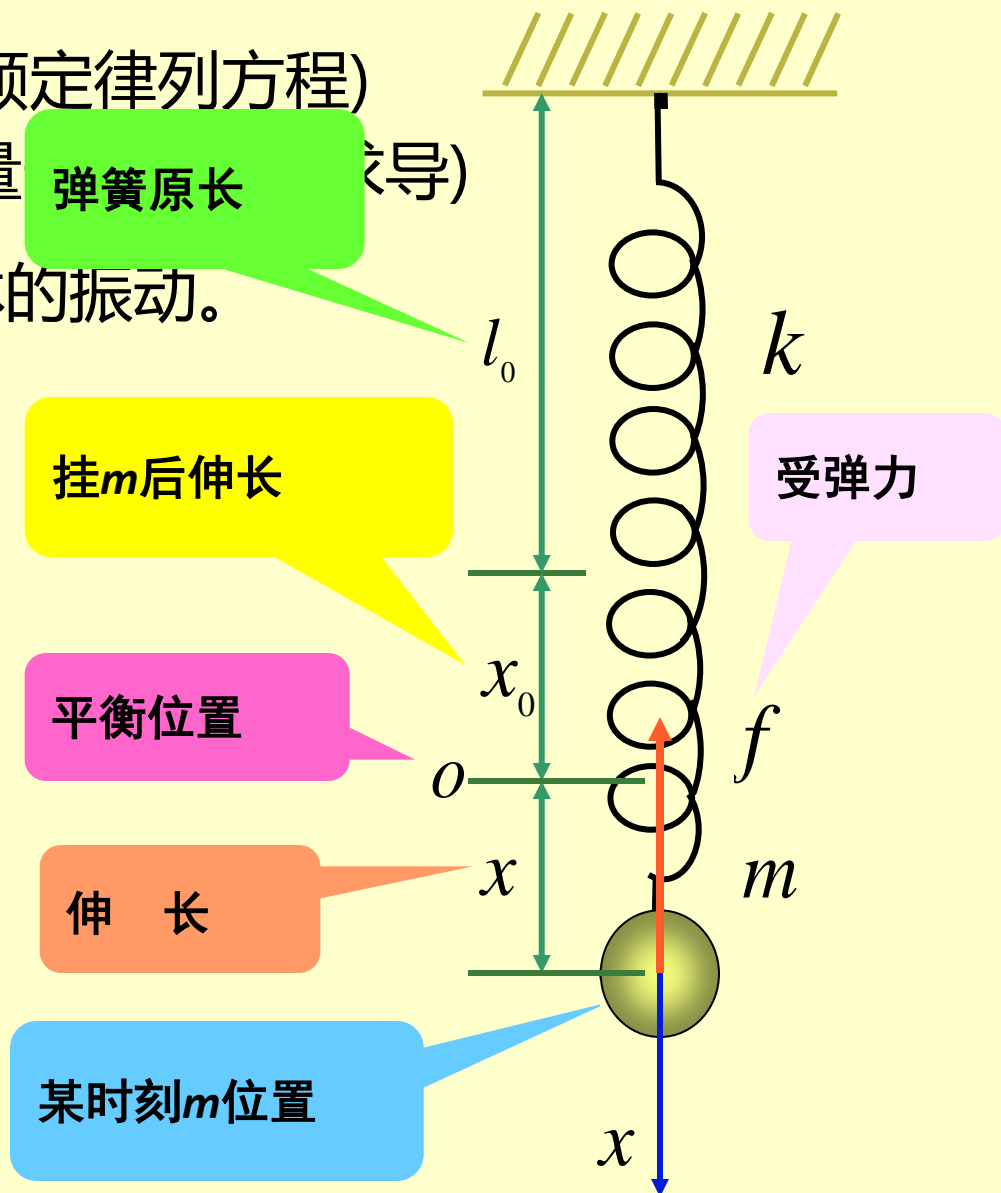
解：求平衡位置

$$kx_0 = mg \quad x_0 = \frac{mg}{k}$$

以平衡位置 O 为原点

$$\begin{aligned} F &= mg - k(x_0 + x) \\ &= mg - kx_0 - kx \\ &= -kx \quad \text{线性回复力} \end{aligned}$$

因此, 此振动为简谐振动。





简谐振动——简谐振动的动力学问题求解

以平衡位置 O 为原点

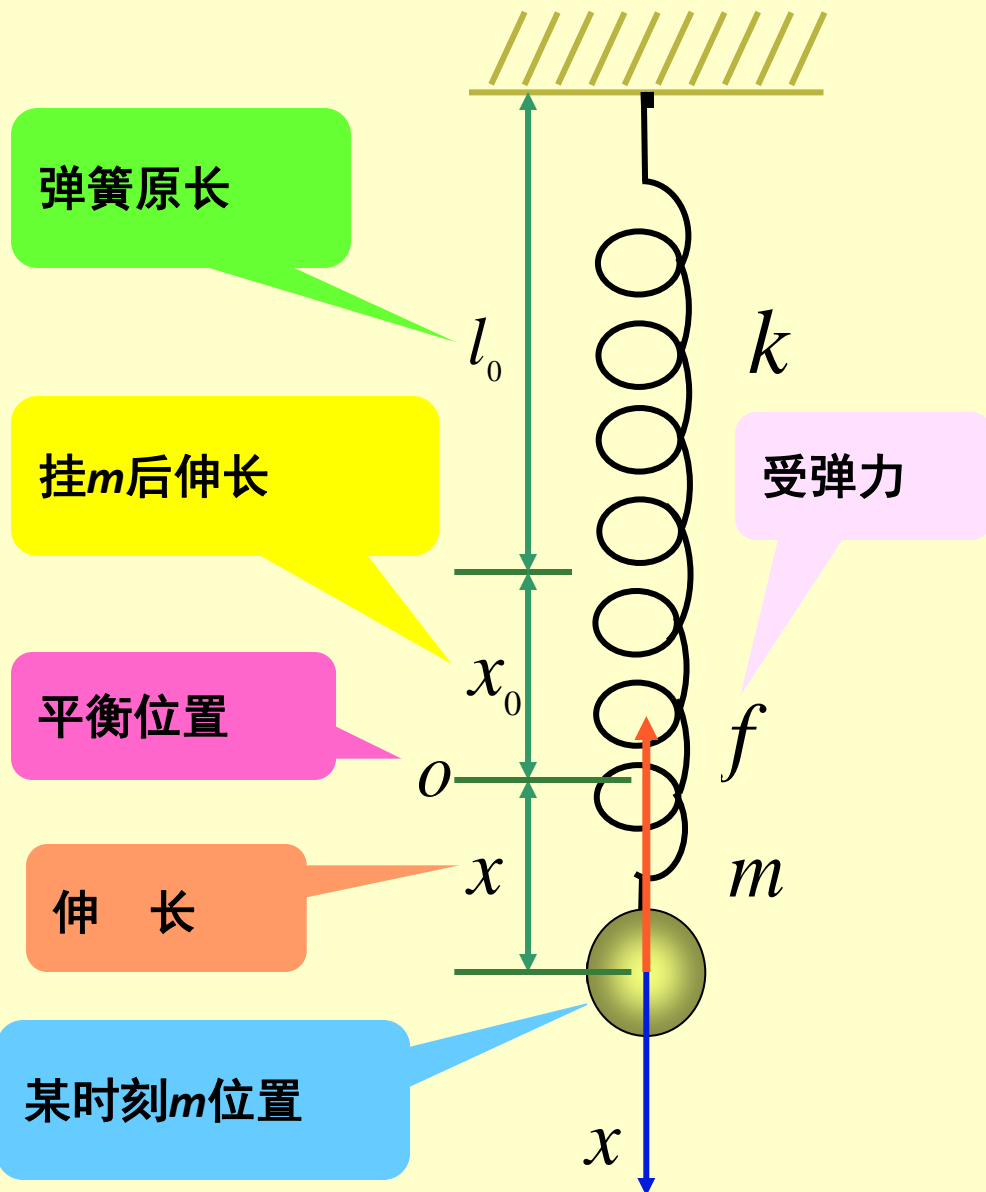
$$\begin{aligned} F &= mg - k(x_0 + x) \\ &= mg - kx_0 - kx \\ &= -kx \end{aligned}$$

重力和弹性力都是保守力，合力 F 做功将转化为势能。

$$-kx \Rightarrow (\text{功}) \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2$$

包括重力势能和弹性势能

系统的势能





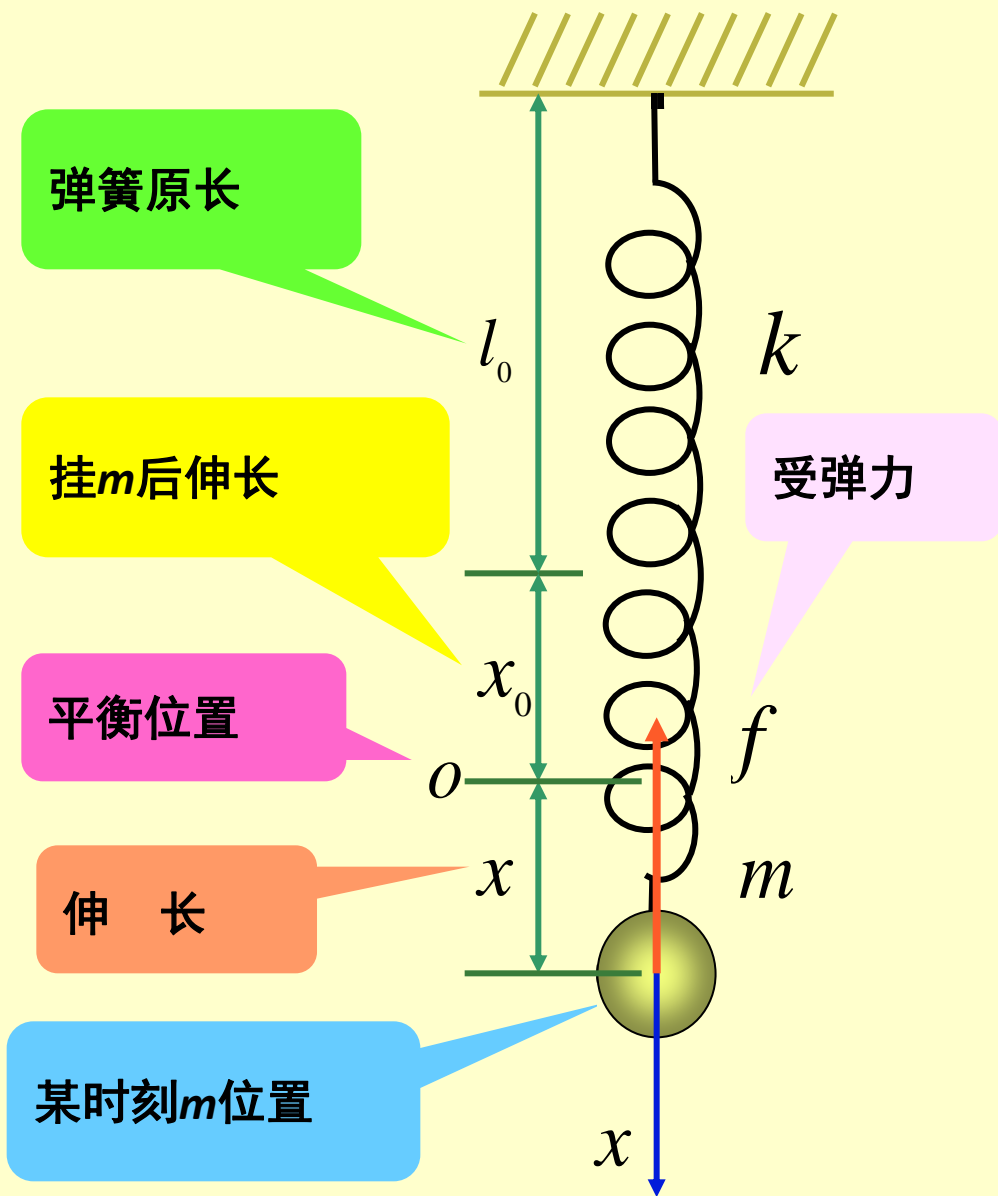
简谐振动——简谐振动的动力学问题求解

如果振动系统除去本身回复力之外还有其它恒力作用。振动系统仍作简谐振动。以振动系统在恒力作用下的平衡位置为原点，则可按常规立刻写出简谐振动的微分方程或振动表达式。

在本例中

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

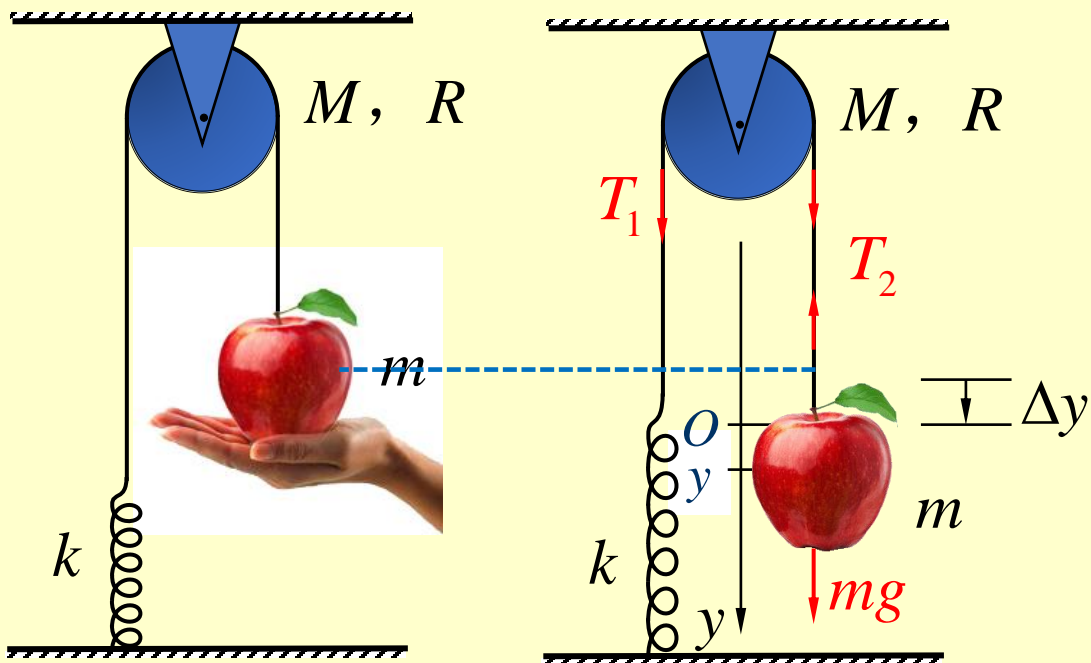
$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$





简谐振动——简谐振动的动力学问题求解

例4.3: 一质量为 m 的苹果、质量为 M 、半径为 R 的滑轮以及一弹性系数为 k 的弹簧构成简谐振动系统。忽略弹簧和绳子质量，假设滑轮轴光滑，绳子不可伸长且与滑轮间无相对滑动。开始时托起苹果使弹簧保持原长，然后静止释放苹果。求该苹果的简谐振动的位置—时间表达式。



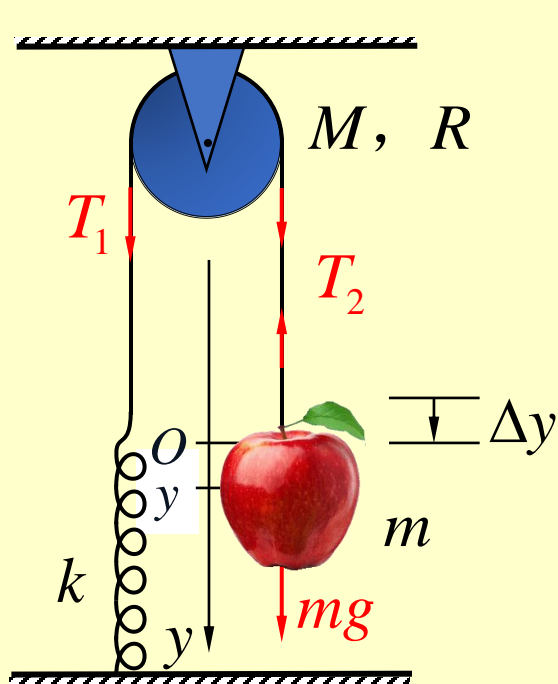
解：平衡位置分析，
滑轮挂上苹果后，平衡时，有

$$T_1 = mg = k\Delta y$$

选择 y 轴竖直向下为正方向，平衡时苹果质心位置为坐标原点，当苹果处于 y 处时，有 $T_1 = k(\Delta y + y)$



简谐振动——简谐振动的动力学问题求解



$$\begin{cases} mg - T_2 = ma = m \frac{d^2 y}{dt^2} & \text{苹果: 牛顿定律} \\ T_2 R - T_1 R = I \beta = \frac{1}{2} MR^2 \beta & \text{滑轮: 转动定律} \\ T_1 = k(\Delta y + y) = mg + ky & \text{弹簧: 弹性拉力} \\ a = R \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{\frac{1}{2}M + m} y = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{M + 2m}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \\ y = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

$$t=0 \text{ 时, 有 } y_0 = -\Delta y, v_0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \Delta y = \frac{mg}{k}, \varphi_0 = \pm \pi \\ y = \frac{mg}{k} \cos(\omega t \pm \pi) \end{cases}$$

自主学习教材P104: 例5.4



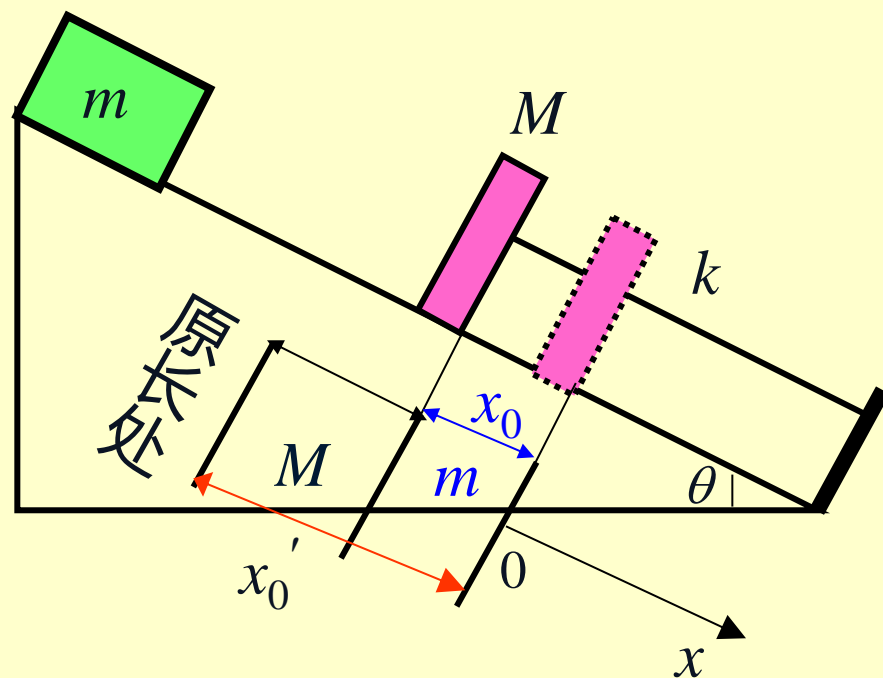
简谐振动——简谐振动的动力学问题求解

例4.4: 一质量为 m 的物体从倾角为 θ 的光滑斜面顶点处由静止滑下, 滑行 l 远后与质量为 M 的物体发生完全非弹性碰撞。 M 与倔强系数为 k 的弹簧相连, 碰前 M 静止于斜面。求: 运动方程。

解: 由分析受力出发

取 m 与 M 碰撞连在一起后的平衡位置为坐标原点。

设此时弹簧在 m 与 M 的压缩下共压缩了 x_0' 。



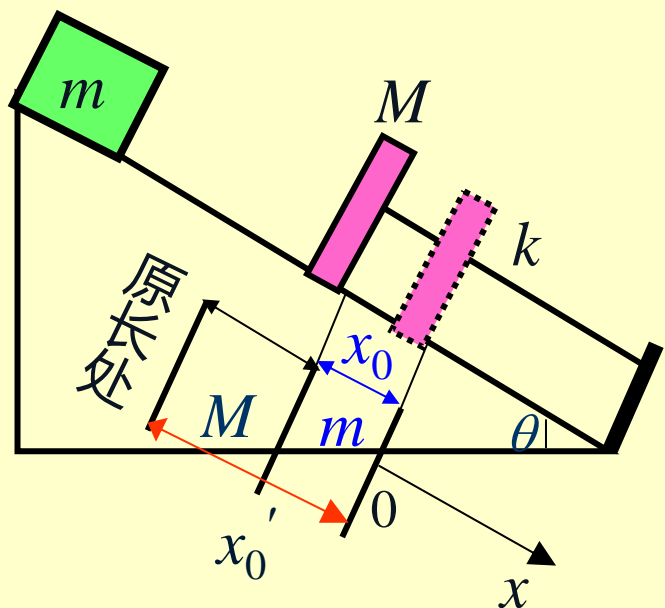
$$(m + M)g \sin \theta = kx_0'$$

$$(m + M) \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$= (m + M)g \sin \theta - k(x + x_0') \Rightarrow (m + M) \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$



简谐振动——简谐振动的动力学问题求解



$$(m + M) \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = A \cos(\omega t + \phi)$$

A和 ϕ 由初始条件确定

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega^2} \\ \tan \phi = -v_0 / \omega x_0 \end{cases}$$

以碰撞时作为计时起点

初位置 $x_{t=0} = -x_0 = -\frac{M}{k} g \sin \theta$

m 物体和 M 物体组成的系统，由动量守恒定律知： $mv_{0m} = (m + M)v_0$

m 物体从静止滑行 l 时，由能量守恒定律知： $\frac{1}{2}mv_{0m}^2 = mgl \sin \theta$

初速度 $v_0 = \frac{m}{m + M} \sqrt{2gl \sin \theta}$



简谐振动——简谐振动的动力学问题求解

任何一个实际的弹簧都是有质量的，如果考虑弹簧的质量，弹簧振子的振动周期将变大还是变小？

参考解答：因为弹簧振子的周期决定于系统的惯性和弹性($T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$)，惯性越大则周期越大。因此可以定性地说，在考虑了弹簧的质量之后，弹簧振子的周期肯定会变大。





简谐振动——简谐振动的动力学问题求解

例4.5：劲度系数为 k 、质量为 m 的均匀弹簧，一端固定，另一端系一质量为 M 的物体，在光滑水平面内作直线运动。求解其运动。（ $m < M$ ）

解：平衡时 O 点为坐标原点。物体运动到 x 处时，速度为 v ，动能 $E_{k2} = \frac{1}{2}Mv^2$

此时弹簧的动能为多少呢？

设此时弹簧的长度为 L ,

弹簧元 dl 的质量 $dm = \frac{m}{L}dl$ 位移为 $\frac{l}{L}x$

若弹簧各等长小段形变相同，位移是线性规律

速度为： $\frac{l}{L} \frac{dx}{dt} = \frac{l}{L}v$,

$$\frac{1}{2}(M + \frac{m}{3})v^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常数}$$

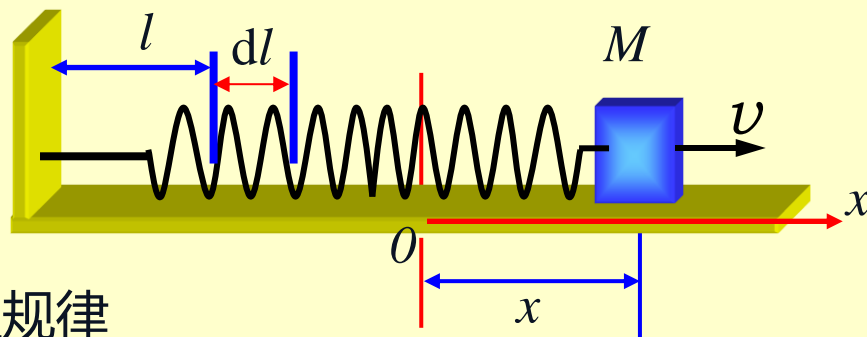
弹簧的动能分别为：

$$E_{k1} = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{m}{L} dl \right) \left(\frac{l}{L} v \right)^2 = \frac{1}{6}mv^2$$

系统弹性势能为 $E_p = kx^2/2$

系统机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{6}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常数}$$



将上式对时间求导，可得

$$(M + \frac{m}{3}) \frac{dv}{dt} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M + m/3}x = 0 \quad \omega^2$$

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{(M + m/3)/k}$$

弹簧质量小于物体质量，且系统作微运动时，弹簧振子的运动可视为是简谐运动。



简谐振动——作业1

1. 练习册B（第4章 机械振动）

选择：1-5； 填空：1-7； 计算：1-6； 研讨：1



大学物理

蒋英

湖南大学物理与微电子科学学院



第4章 机械振动

§4.1 简谐振动的描述

§4.2 简谐振动的动力学方程

§4.3 简谐振动的能量

§4.4 简谐振动的合成

§4.5 阻尼振动、受迫振动、共振



简谐振动——简谐振动的合成

实际中一个质点可能同时参与几个振动的情况。例如：声波传入耳朵引起鼓膜振动，如果同时接收到两个或多个声波，鼓膜就会同时参与多个振动，此时鼓膜的振动就是多个振动的合成。

一、同方向同频率的两个简谐振动的合成

1、解析法

设质点同时参与两个同方向同频率的简谐振动，其运动方程分别为：

$$\text{分振动方程：} \quad x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

$$\text{合振动方程：} \quad x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

$$x = \underbrace{(A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20})}_{A \cos \varphi_0} \cos \omega t - \underbrace{(A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20})}_{A \sin \varphi_0} \sin \omega t$$

$$x = A \cos \varphi_0 \cos \omega t - A \sin \varphi_0 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{合振动：} \quad x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

两个同方向同频率简谐振动的合成仍是简谐振动。合振动的频率与分振动的频率相同。

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$$

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}}$$



简谐振动——简谐振动的合成

合振动： $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$

合振动的振幅不仅与分振动的振幅有关，还与两个分振动的相位差有关

讨论两种特殊情况：

(1)若两分振动同相 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

则 $A = A_1 + A_2$ ，两分振动相互加强，或相长，合振幅最大。

(2)若两分振动反相 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

则 $A = |A_1 - A_2|$ ，两分振动相互减弱，或相消，合振幅最小。

如 $A_1 = A_2$ ，则 $A = 0$ ，合成的结果是使质点处于静止状态。

两个振动的相位差，对合成振动起着重要的作用，这种现象在波的干涉与衍射中具有特殊的意义。



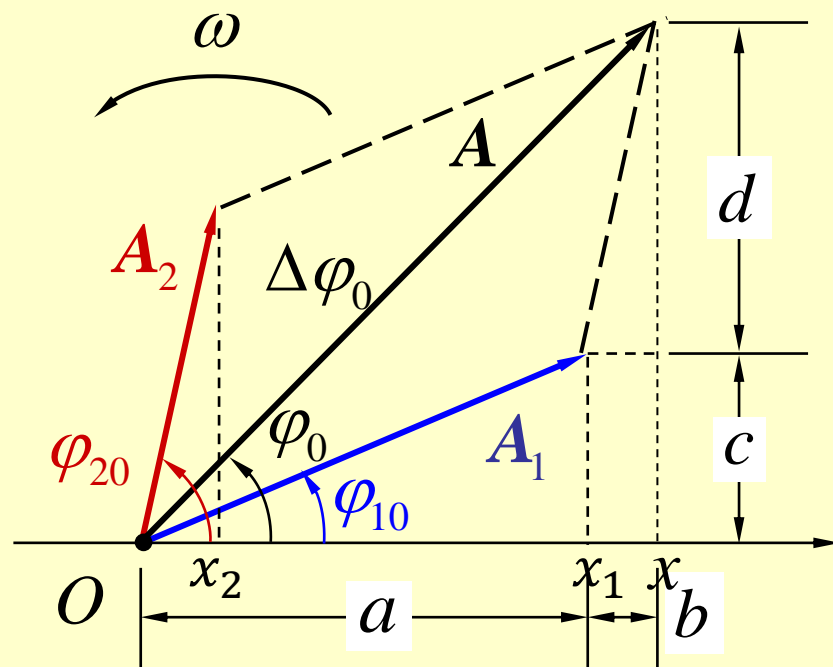
简谐振动——简谐振动的合成

2、矢量图法

同方向同频率简谐振动的合成也可由旋转矢量法得到，该法更直观。

旋转矢量 \vec{A}_1 和 \vec{A}_2 在 x 轴上的投影分别表示简谐振动 x_1 和 x_2 ，则合矢量 \vec{A} 在 x 轴上的投影就是合振动 $x = x_1 + x_2$ 。

求合振动方程的问题归结为求合矢量及其旋转规律。

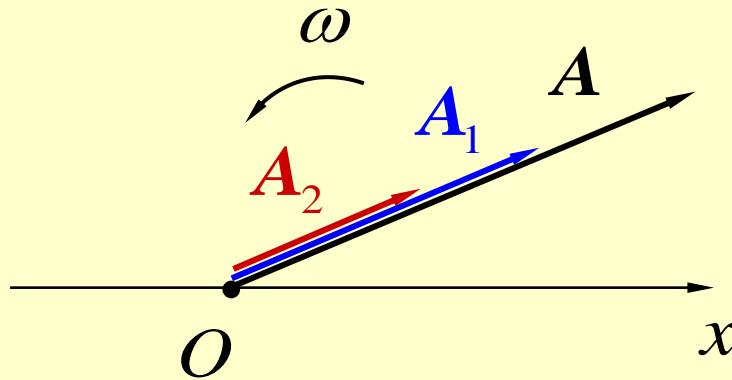


$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

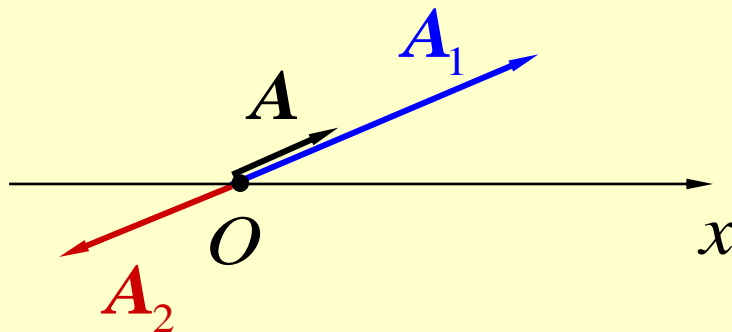
$$\begin{cases} a = A_1 \cos \varphi_{10} \\ b = A_2 \cos \varphi_{20} \\ c = A_1 \sin \varphi_{10} \\ d = A_2 \sin \varphi_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})} \\ \text{tg } \varphi_0 = \frac{c + d}{a + b} = \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}} \end{cases}$$



简谐振动——简谐振动的合成



两振动相长



两振动相消



简谐振动——简谐振动的合成

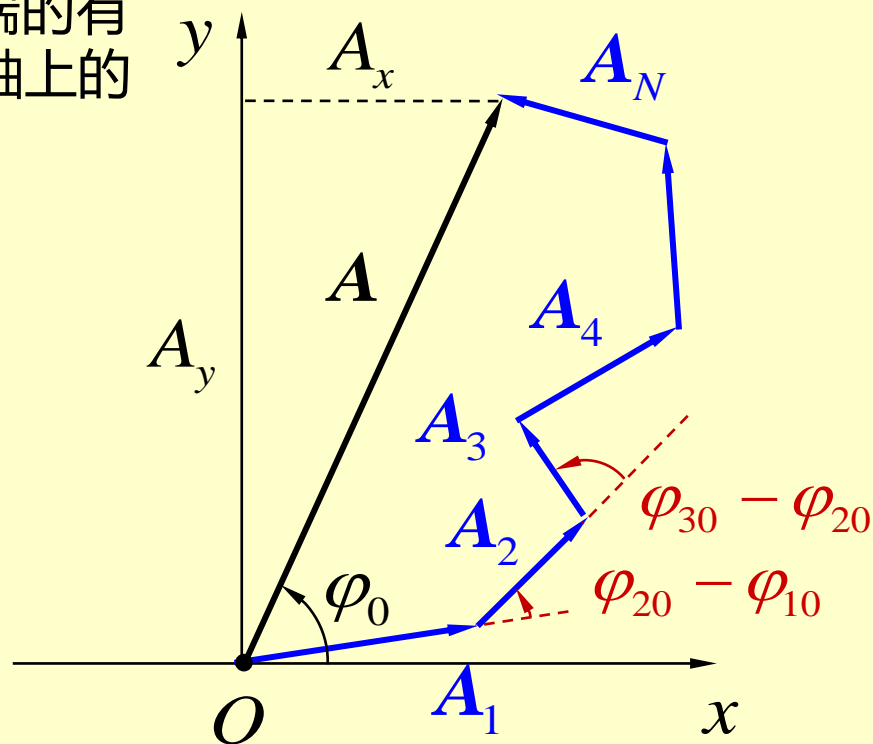
二、多个同方向同频率的简谐振动的合成

作出各分振动的振幅矢量，然后依次平移各矢量，使它们首尾相接。根据矢量合成的法则，从第一个矢量始端引向最后一个矢量末端的有向线段便是合振幅矢量。合振幅矢量在 x 轴上的投影就是合振动的运动方程：

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

合振动的振幅和初相位分别为：

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_y}{A_x} \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_x = A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20} + \dots + A_N \cos \varphi_{N0} \\ A_y = A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20} + \dots + A_N \sin \varphi_{N0} \end{cases}$$



简谐振动——简谐振动的合成

例4.6:求 N 个同方向、同频率的简谐振动的合振动。

设 N 个同方向、同频率的简谐振动，它们的振幅相等，初相分别为 $0, \alpha, 2\alpha, \dots$ ，依次差一个恒量 α ，振动表达式可写成：

$$x_1 = a \cos \omega t$$

$$x_2 = a \cos(\omega t + \alpha)$$

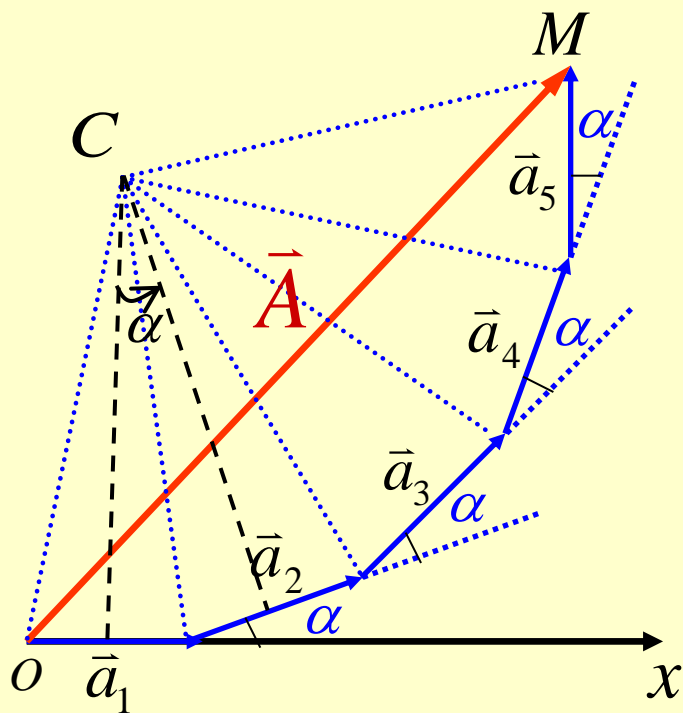
$$x_3 = a \cos(\omega t + 2\alpha)$$

.....

$$x_N = a \cos[\omega t + (N-1)\alpha]$$

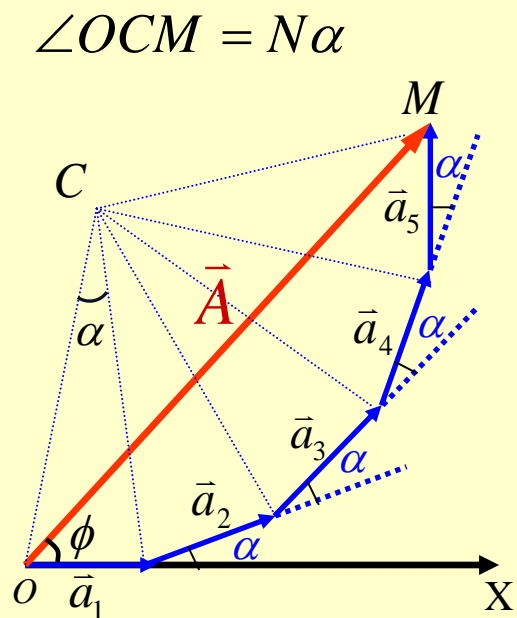
作 \vec{a}_1 和 \vec{a}_2 的垂直平分线，两者相交于 C

$$\Rightarrow \angle OCM = N\alpha$$





简谐振动——简谐振动的合成



在三角形 OCM 中, OM 的长度就是合振动的振幅 A ,角度 $\angle MOX$ 就是合振动的初相 ϕ , 据此得

$$A = 2\overline{OC} \sin \frac{N\alpha}{2}$$

考虑到

$$a = 2\overline{OC} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$A = a \sin \frac{N\alpha}{2} / \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \phi = \angle MOX = \angle COX - \angle COM$$

$$= \frac{1}{2}(\pi - \alpha) - \frac{1}{2}(\pi - N\alpha) = \frac{N-1}{2}\alpha$$

$$x_1 = a \cos \omega t$$

$$x_2 = a \cos(\omega t + \alpha)$$

$$x_3 = a \cos(\omega t + 2\alpha)$$

.....

$$x_N = a \cos[\omega t + (N-1)\alpha]$$

$$\Rightarrow x = \frac{a \sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \left[\omega t + \frac{N-1}{2}\alpha \right]$$



简谐振动——简谐振动的合成

三、两个同方向不同频率的简谐振动的合成

1、解析法

设质点同时参与两个同方向不同频率的简谐振动，分振动方程分别为：

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{10}) \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{20})$$

合振动方程：
$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{10}) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{20})$$

当 $A_1 = A_2 = A_0$ $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$ 则 $x = A_0 \cos \omega_1 t + A_0 \cos \omega_2 t$

合振动方程：
$$x = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right)$$

$ \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$	随时间变化很慢可 看作合振动的振幅	随时间变化较快可 看作谐振动的部分
---	----------------------	----------------------

合振动的振幅随时间周期性缓慢变化的振动现象称为**拍 (beats)**

$$|\omega_2 - \omega_1| = \omega_2 + \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \text{合振动可视为简谐振动}$$



简谐振动——简谐振动的合成

合振动方程 $x = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$

振幅: $\left| 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \right|$ 角频率: $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$

$$\left| 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \right| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right| \tau = \pi$$

振幅随时间做周期性变化的频率叫作**拍频**

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1| \quad \text{拍频}$$

拍频等于两分振动的频率之差。

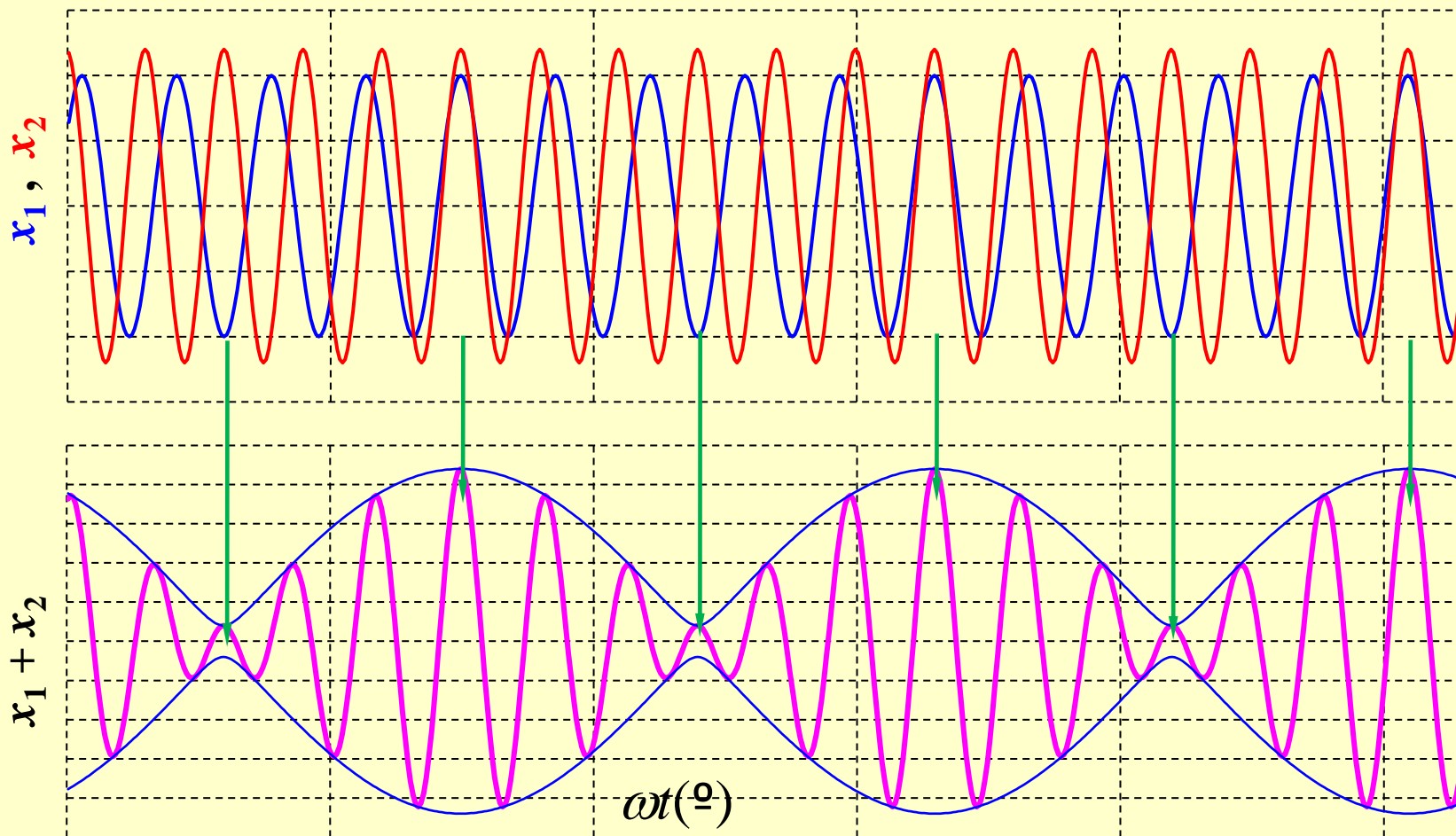


简谐振动——简谐振动的合成

2、曲线图法

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{10}) \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{20})$$

$$A_1=10, \omega_1=10, \varphi_{10}=\pi/6; A_2=12, \omega_2=12, \varphi_{20}=\pi/3$$



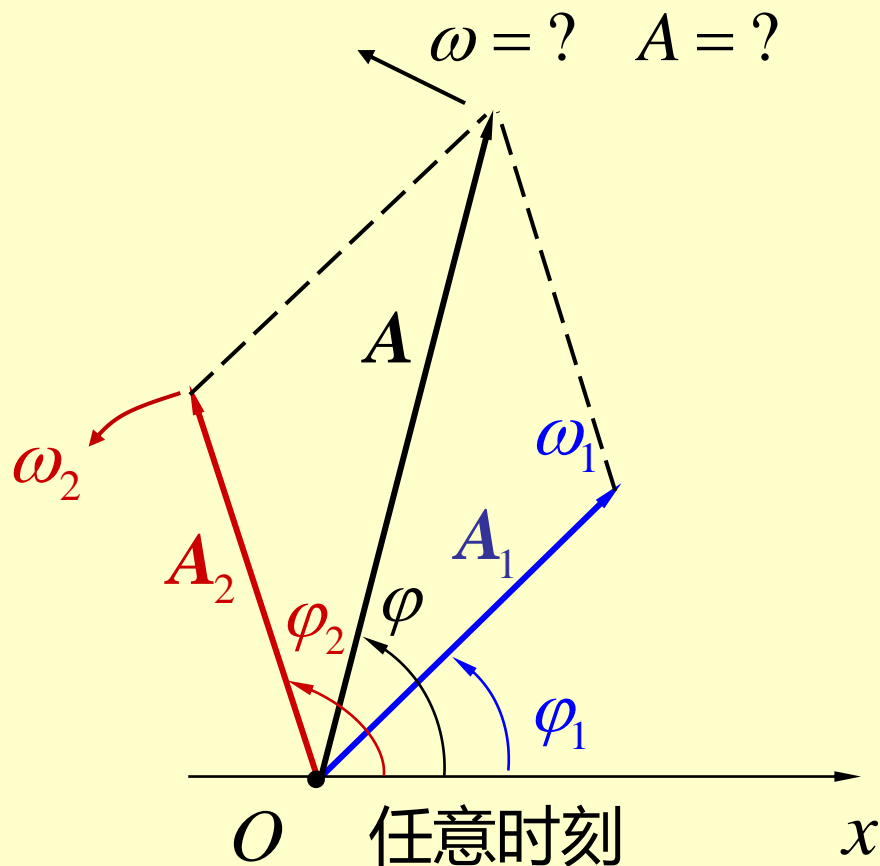
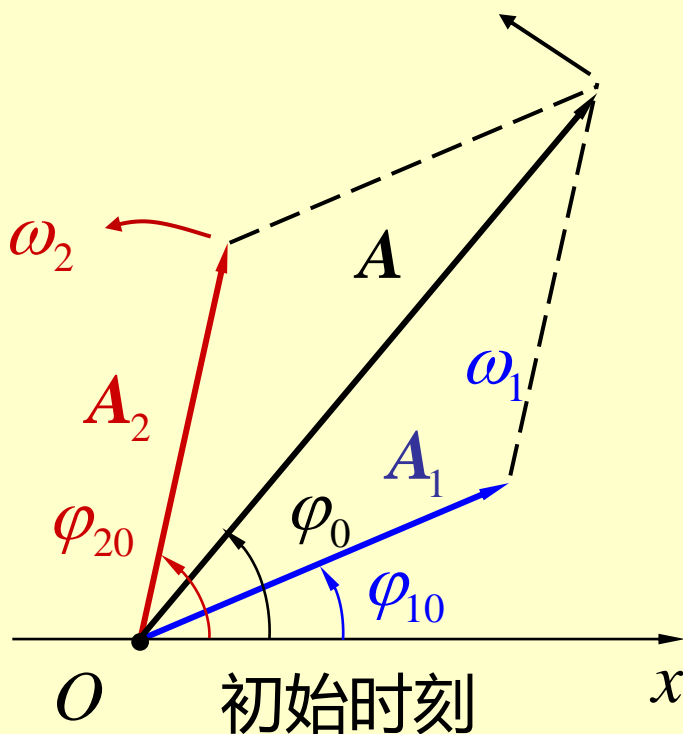
$$x = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$$



简谐振动——简谐振动的合成

3、矢量图法

$\omega = ?$ $A = ?$



重合: $A = A_1 + A_2$

反向: $A = |A_1 - A_2|$

\vec{A}_2 相对于 \vec{A}_1 转动的角速度大小为: $|\omega_2 - \omega_1|$

\vec{A}_2 相对于 \vec{A}_1 转一圈所花时间为: $2\pi/|\omega_2 - \omega_1|$ 拍的周期

拍现象的频率为: $\nu = |\omega_2 - \omega_1|/2\pi = \nu_2 - \nu_1$



简谐振动——简谐振动的合成

四、相互垂直的简谐振动的合成

1、两个相互垂直的同频率的简谐振动的合成

设两个振动的方向分别沿 x 轴和 y 轴，运动方程分别为：

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

这两个方程实际上是质点合振动轨迹的参数方程，消去时间参量 t ，即可得到直角坐标系中质点合振动的轨迹方程：

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

若分振幅 A_1 和 A_2 确定，则上述轨迹方程的性质主要取决于相位差： $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 。下面讨论几种特殊的相位差情况。



简谐振动——简谐振动的合成

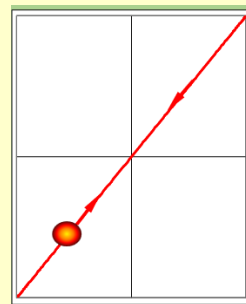
质点合振动的轨迹方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

(1) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ，即两振动同相， ^{$\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$} 则轨迹方程为： $y = \frac{A_2}{A_1} x$ ，

质点的运动轨迹是一条过坐标原点且斜率为 A_2/A_1 的直线。

令 $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$ ，则 $x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$ ， $y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$ ，质点离开平衡位置的位移为 $r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega t + \varphi)$ ，可见质点合振动依然是简谐振动，振动频率与分振动频率相同，振幅为 $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ 。

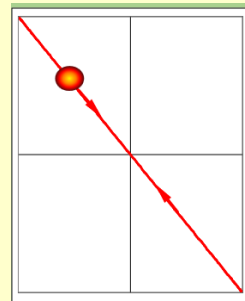


$$\Delta\varphi = 0$$

(2) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ ，即两振动反相，则轨迹方程为： $y = -\frac{A_2}{A_1} x$ ，

质点的运动轨迹是一条过坐标原点且斜率为 $-A_2/A_1$ 的直线。

合振动依然是简谐振动，振动频率与分振动频率相同，振幅为 $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ 。



$$\Delta\varphi = \pi$$



简谐振动——简谐振动的合成

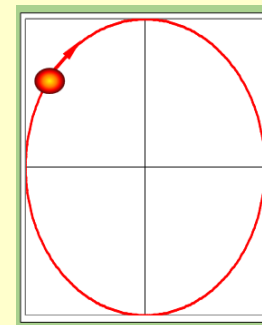
质点合振动的轨迹方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

(3) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ ，则轨迹方程为： $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ ，

质点的运动轨迹是以坐标轴为主轴的椭圆。

y 比 x 的相位超前 $\pi/2$ ，质点沿椭圆顺时针运动。

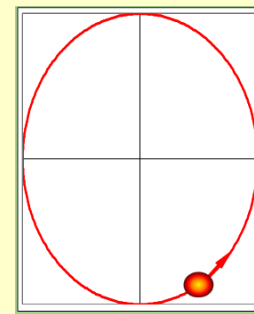


$$\Delta\varphi = \pi/2$$

(4) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi/2$ or $-\pi/2$ ，则轨迹方程为： $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ ，

质点的运动轨迹是以坐标轴为主轴的椭圆。

y 比 x 的相位滞后 $\pi/2$ ，质点沿椭圆逆时针运动。



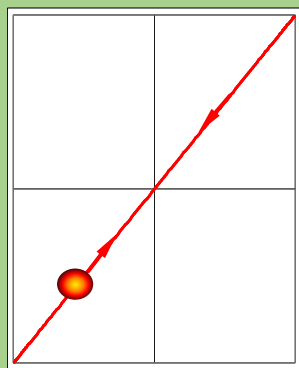
$$\Delta\varphi = 3\pi/2$$

(5) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 为其他值时，质点的运动轨迹为斜椭圆，椭圆的性质视两个振动的相位差而定。

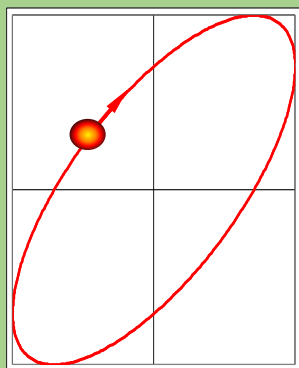


简谐振动——简谐振动的合成

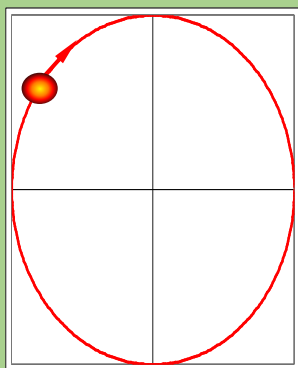
相互垂直的同频率的简谐振动的合成



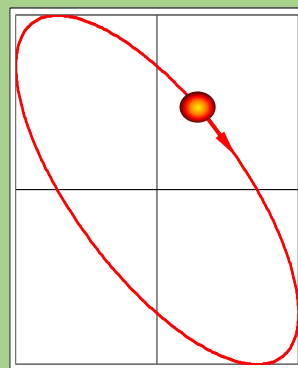
$$\Delta\varphi_0 = 0$$



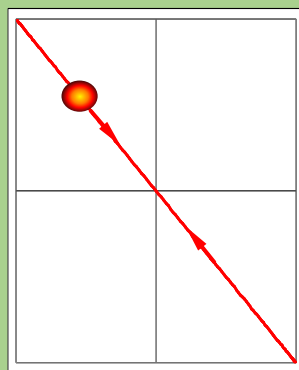
$$\Delta\varphi_0 = \pi/4$$



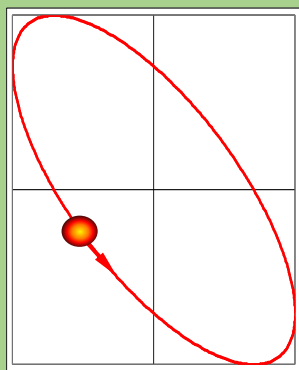
$$\Delta\varphi_0 = \pi/2$$



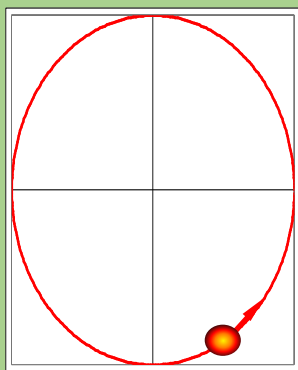
$$\Delta\varphi_0 = 3\pi/4$$



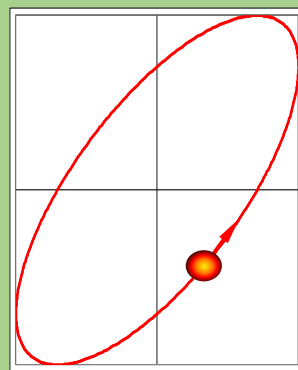
$$\Delta\varphi_0 = \pi$$



$$\Delta\varphi_0 = 5\pi/4$$



$$\Delta\varphi_0 = 3\pi/2$$



$$\Delta\varphi_0 = 7\pi/4$$

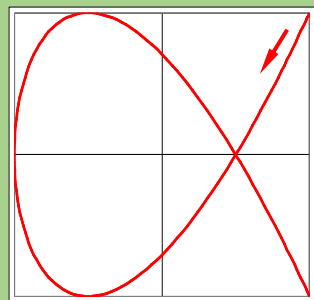
两相互垂直的同频率
的简谐振动的合成

任何简谐振动、匀速圆周运动或椭圆运动都可分解为两个相互垂直、频率相同且有一定相位差的简谐振动。这一结论在光的偏振等有重要应用。

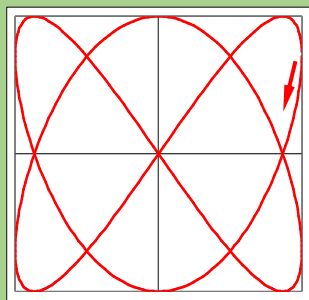


简谐振动——简谐振动的合成

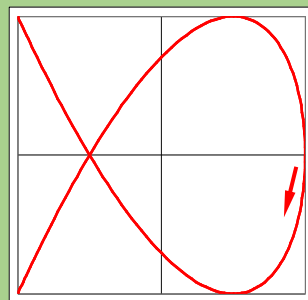
2、两个相互垂直的不同频率的简谐振动的合成



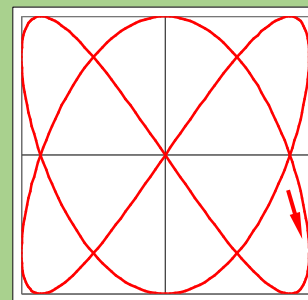
$$\Delta\varphi_0 = 0$$



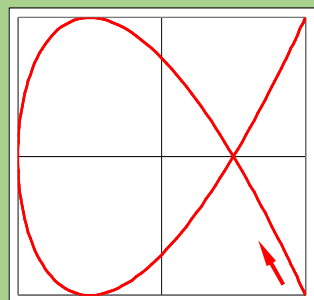
$$\Delta\varphi_0 = \pi/4$$



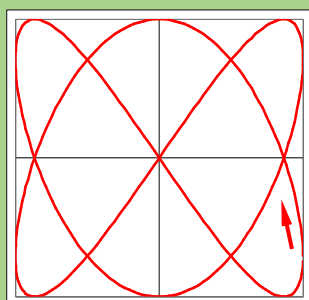
$$\Delta\varphi_0 = \pi/2$$



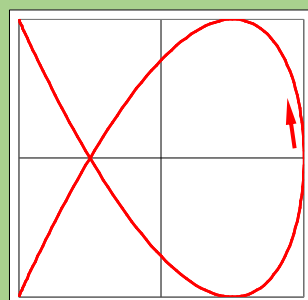
$$\Delta\varphi_0 = 3\pi/4$$



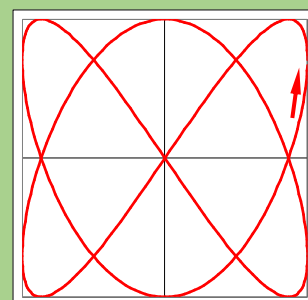
$$\Delta\varphi_0 = \pi$$



$$\Delta\varphi_0 = 5\pi/4$$



$$\Delta\varphi_0 = 3\pi/2$$



$$\Delta\varphi_0 = 7\pi/4$$

李萨茹图形
两相互垂直的不同频率
的简谐振动的合成

两分振动的频率成简单整数比且初相位差恒定，则轨迹为稳定的闭合曲线，称为李萨茹图形。 $T_x:T_y = n_x:n_y$



简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

★**无阻尼自由振动**：物体在弹性力或准弹性力作用下产生的简谐运动称无阻尼自由振动。

★**阻尼振动**：物体在弹性力（或准弹性力）和阻力作用下产生的运动称阻尼振动。

★**阻尼振动的种类**：在阻尼振动中，振动系统所具有的能量将在振动过程中逐渐减少。能量损失的原因通常有两种：

由于介质对振动物体的摩擦阻力，使振动系统的能量逐渐**变为热运动的能量**而造成能量损失。这称**摩擦阻尼**。

由于振动物体引起邻近质点振动，使振动系统的能量逐渐向四周辐射出去，**转变为波动的能量**，而造成系统能量损失。这称**辐射阻尼**。



简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

一、阻尼振动

在流体(液体、气体)中运动的物体，当物体速度较小时，阻力 f_r 与运动速度 v 成正比，方向相反，则：

$$f_r = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

γ ：阻力系数，其值取决于介质的性质、运动物体的形状和大小等。

以弹簧振子为例，在弹性力和上述阻力作用下的微分方程为：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$$

$$\text{令： } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad 2\beta = \frac{\gamma}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

ω_0 ：振动系统的固有角频率 β ：阻尼因子



简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

根据阻尼系数的大小，上述方程的解可分为三种不同的情况。

(1) $\beta^2 < \omega_0^2$ 阻尼较小时，此方程的解：

$$x(t) = Ae^{-\beta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

这种情况称为**欠阻尼**：振幅 $Ae^{-\beta \cdot t}$ 按指数规律随时间衰减。

A 和初相位 φ_0 由初始条件决定，设 $t = 0$ ， $x(0) = x_0$ ， $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$

$$x_0 = A \cos \varphi_0 \quad v_0 = -A\omega \sin \varphi_0 - A\beta \cos \varphi_0$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \beta x_0)^2}{\omega^2}} \quad \tan \varphi_0 = -\frac{v_0 - \beta x_0}{\omega x_0}$$



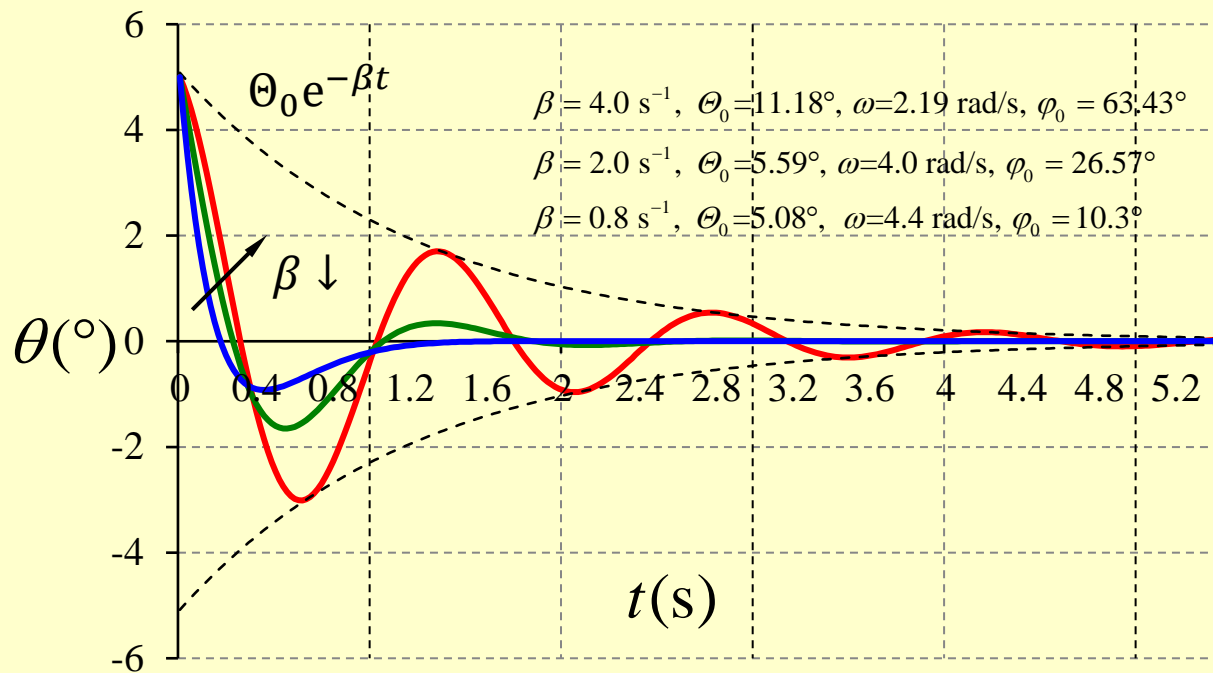
简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

欠阻尼 $x(t) = Ae^{-\beta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi_0)$

★ 振幅特点

振幅: $A(t) = Ae^{-\beta t}$

振幅随 t 按指数衰减



★ 周期特点

严格意义上, 阻尼振动不是周期性振动(更不是简谐振动), 因为位移 $x(t)$ 不是 t 的周期函数。

但阻尼振动有某种重复性, 仍把 $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 称作欠阻尼振动的周期。



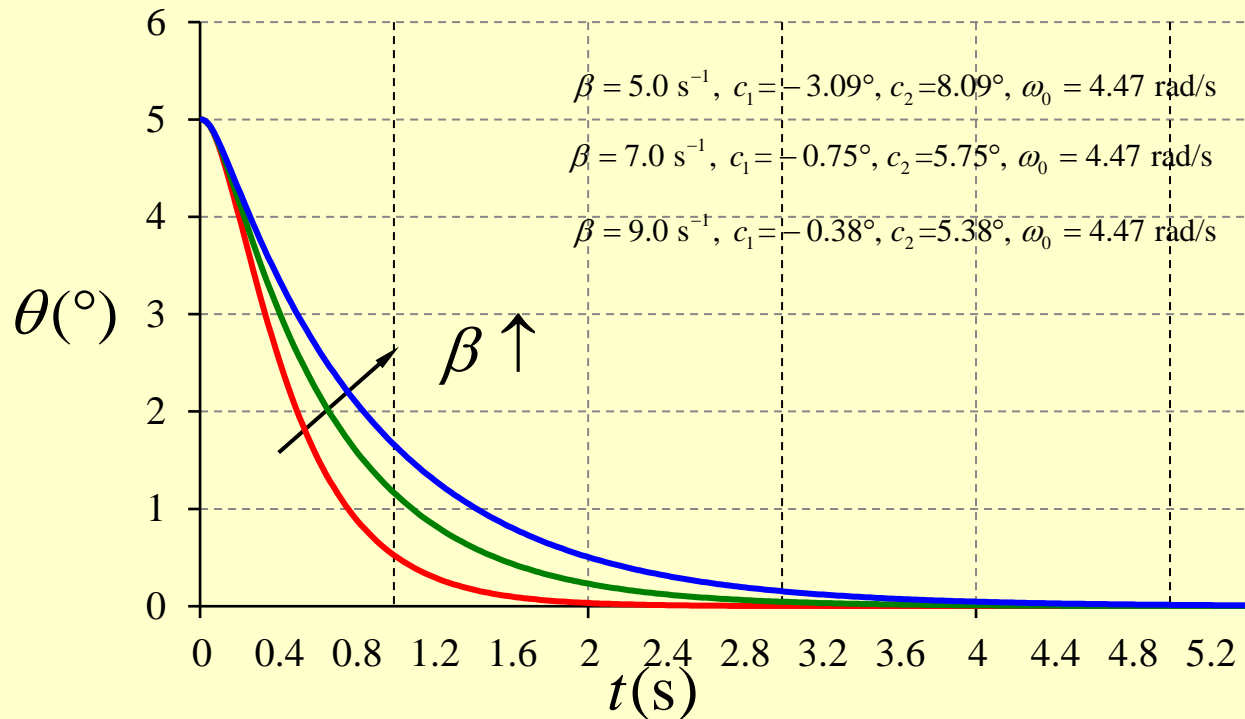
简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

(2) $\beta^2 > \omega_0^2$ 阻尼较大时，此方程的解为：

$$x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

无振动发生！

其中 C_1, C_2 是积分常数，由初始条件来决定，这种情况称为**过阻尼**。

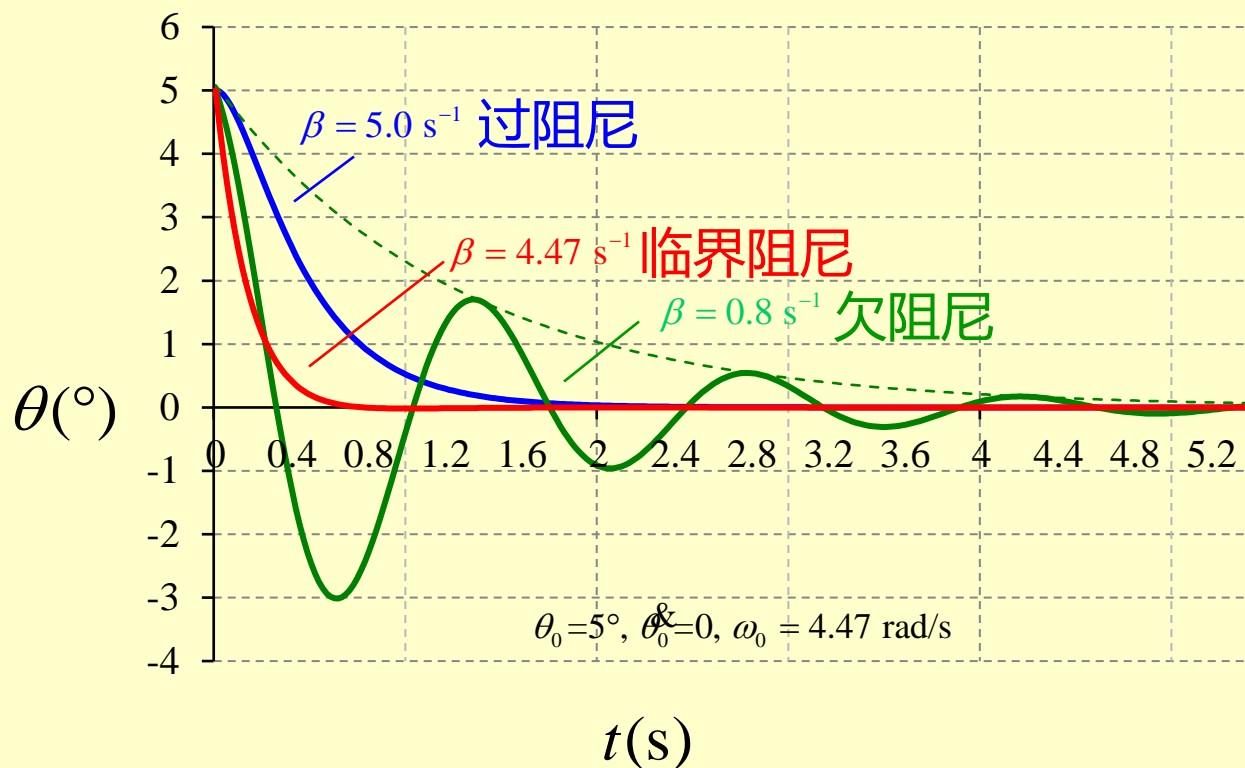




简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

(3) 如果 $\beta^2 = \omega_0^2$ 方程的解: $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$ **临界阻尼**

临界阻尼时物体的运动是非振动性运动。运动物体在一次振动未完成时，能量即已耗光，物体慢慢移向平衡位置。和过阻尼情形相比，临界阻尼下物体回到平衡位置所需时间最短。



应用：
电表阻尼、
天平阻尼



简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

二、受迫振动

振动系统由于受到阻力会消耗能量，如果施加周期性外力(称为策动力)对系统做功，补充振动过程中所消耗的能量，便可获得一个等幅振动。物体在周期性外力的持续作用下发生的振动称为**受迫振动** (forced oscillation)。

以弹簧振子为例： 阻尼力： $f_2 = -\gamma v$ 驱动力： $f_3 = H \cos p t$

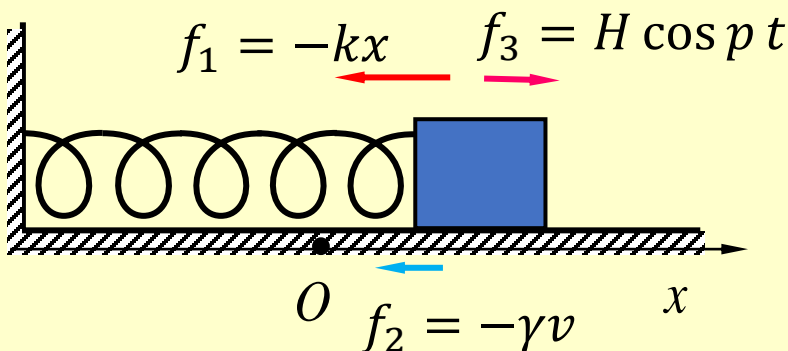
合力： $F = -kx - \gamma v + H \cos p t$

弹簧振子受迫振动的动力学方程：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + H \cos p t$$

设 $\omega_0^2 = k/m$ $\beta = \gamma/2m$

弹簧振子受迫振动的动力学方程：

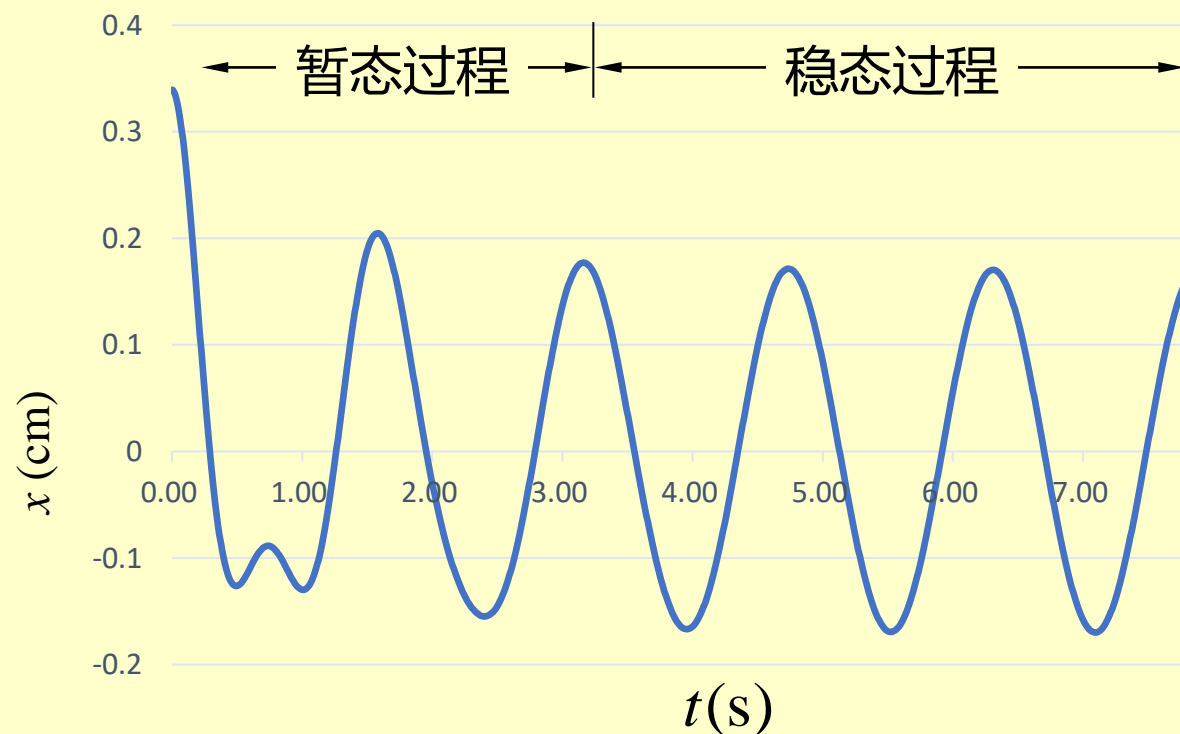
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{H}{m} \cos p t$$




简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

弹簧振子受迫振动的动力学方程：
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{H}{m} \cos p t$$

阻尼较小时：
$$x = \underbrace{A_0 e^{-\beta t}}_{\text{衰减项-阻尼运动-暂态过程}} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi'_0) + \underbrace{A \cos(pt + \varphi_0)}_{\text{稳态项-周期运动-稳态过程}}$$



当外力做功恰好补偿因阻尼而损耗的能量时，系统的机械能保持不变，系统达到一种稳定状态，振动稳定下来。



简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

三、共振

受迫振动的振动方程： $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi'_0) + A \cos(pt + \varphi_0)$

在受迫振动中，周期性的驱动力对振动系统提供能量，另一方面系统又因阻尼而消耗能量，若二者相等，则系统达到稳定振动状态。

经过一段时间后，衰减项忽略不计，仅考虑稳态项

$$x = A \cos(pt + \varphi_0)$$

其中 $A = \frac{H}{m \sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$ $\text{tg } \varphi_0 = -\frac{2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}$

稳态时振动物体速度：

$$v = \frac{dx}{dt} = v_m \cos\left(pt + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad v_m = \frac{pH}{m \sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$



简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振

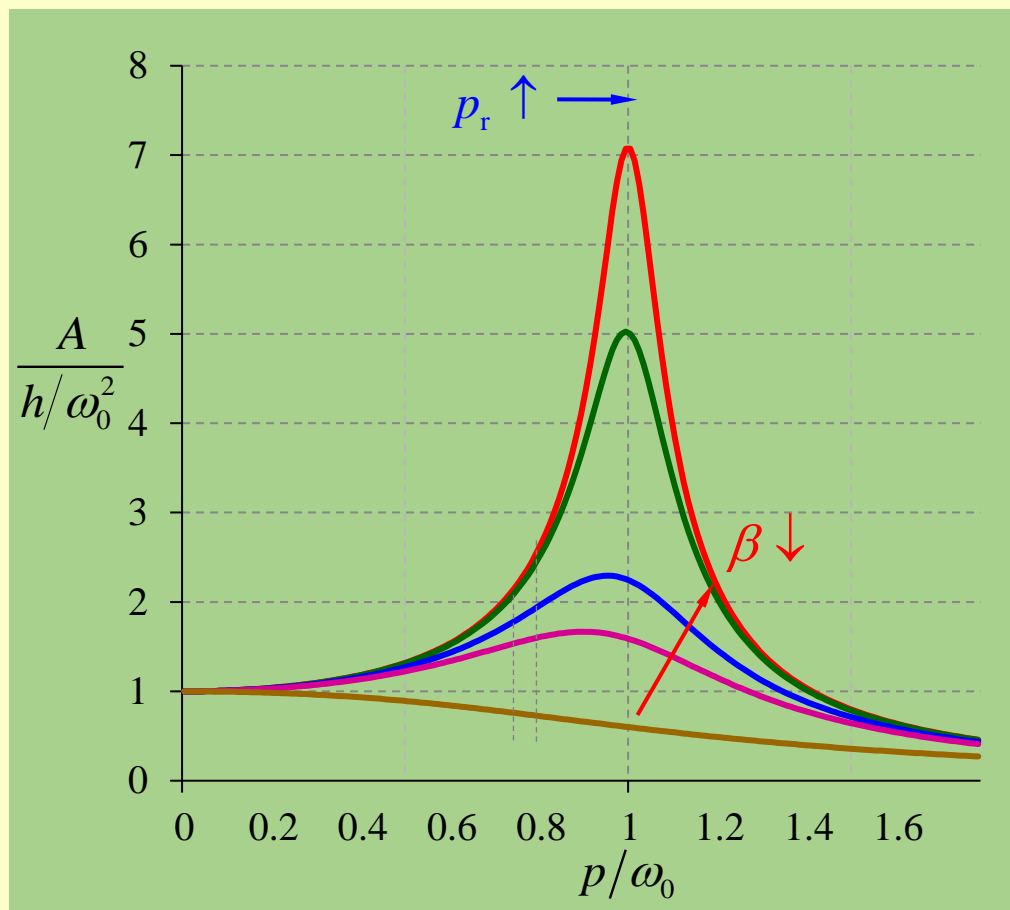
$$A = \frac{H}{m \sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

在受迫振动中，当外力幅值恒定时，稳定态振幅随驱动力的频率而变化。当驱动力的角频率等于某个特定值时，位移振幅达到最大值的现象称为**位移共振**。

$$\frac{dA}{dp} = 0$$

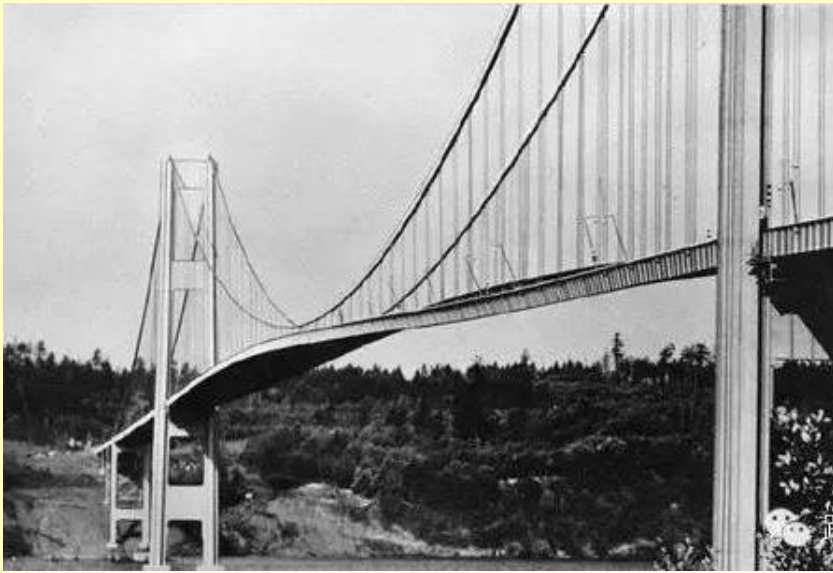
$$\Rightarrow p_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\Rightarrow A_r = \frac{H}{2m\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

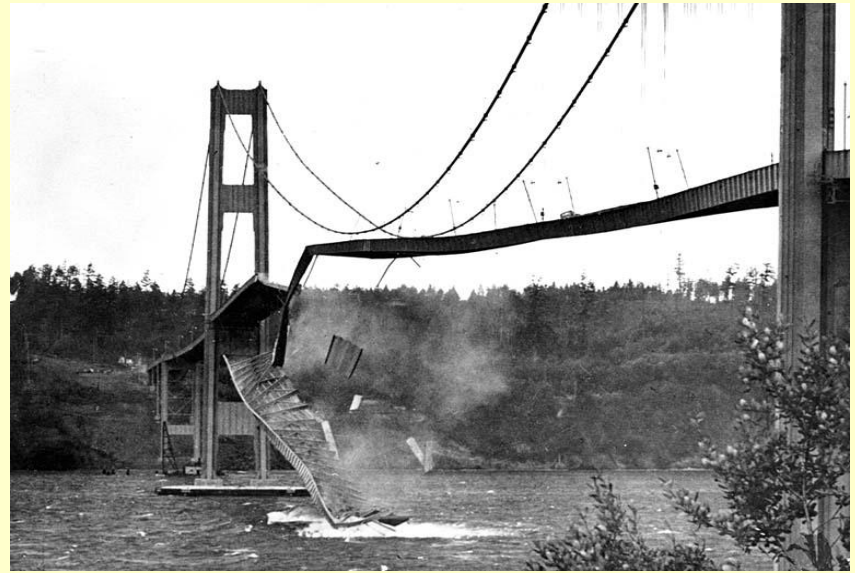




简谐振动——阻尼振动、受迫振动、共振



(a) 大桥扭动



(b) 大桥垮塌



简谐振动——作业2

1. 练习册B（第4章 机械振动）

选择：6-11； 填空：8-10； 计算：7-12； 研讨：2, 3

2. 阻尼振动与受迫振动的智慧树网课。