湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

高 等 数 学 AII

—— 多 元 微 分 学

3.3 无约束极值与有约束极值

• 主 讲： 于 红 香

第三章　多元函数微分学的应用

第三节 无约束极值与有约束极值

一. 无约束极值

二.　函数的最大值与最小值

三. 有约束极值

第三章　多元函数微分学的应用

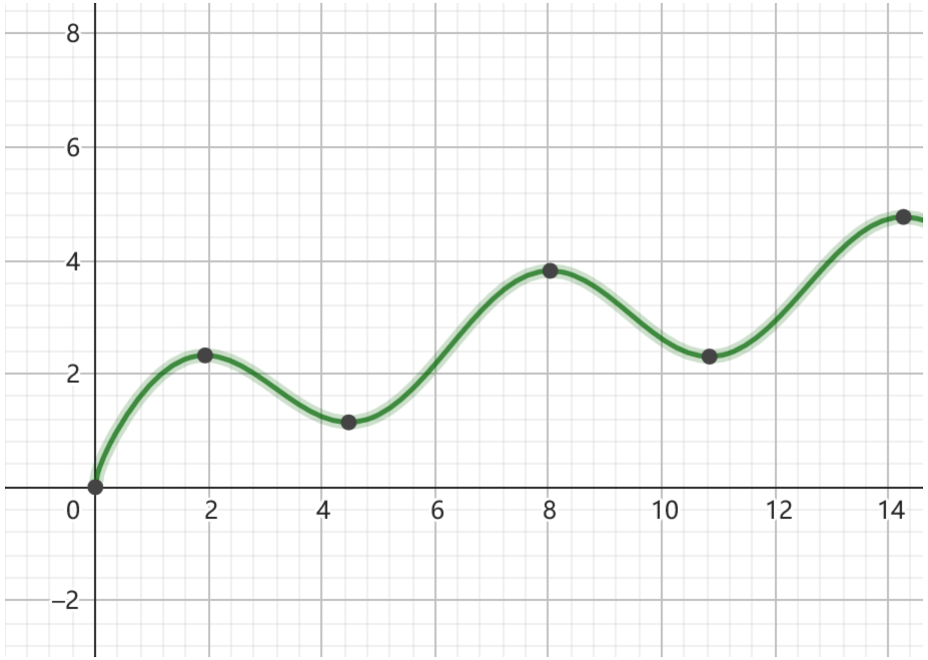
第三节 多元函数的极值

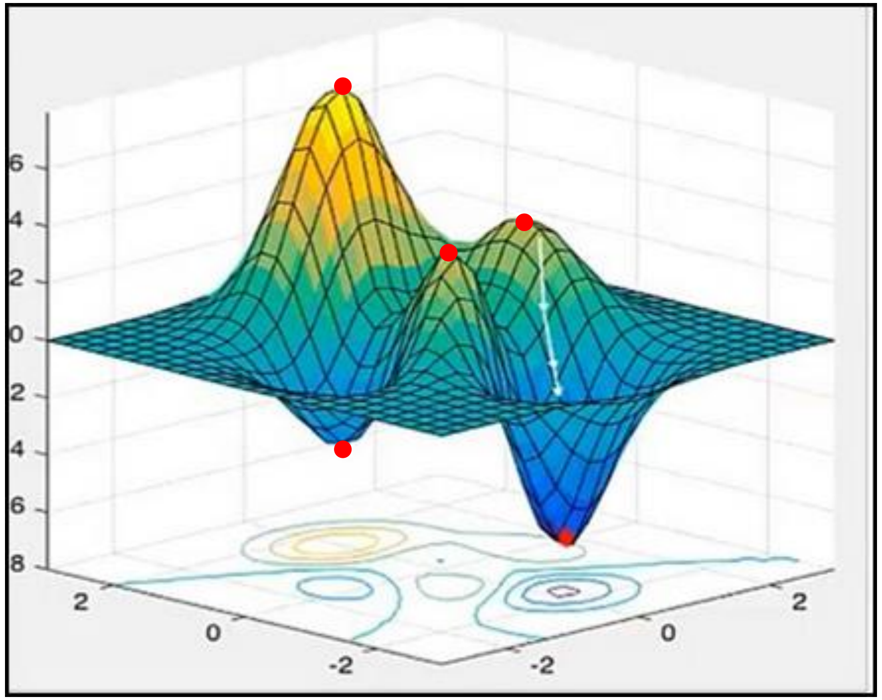
本节教学要求：

- 正确理解无约束极值和条件极值的概念。
- 能熟练地求出函数的无约束极值。
- 能熟练地运用拉格朗日乘数法计算条件极值。
- 能熟练地计算函数的最大值、最小值。
- 能解简单的极值应用问题。

第三节 多元函数的极值

- 无约束极值
- 条件极值
- 拉格朗日乘数法
- 可微函数取极值的必要条件
- 极值判别法





极值：局部的最大值最小值

由点函数推广到多元函数的极值

【定义】

设 $u=f(X)$ 在 $U(X_0)\subset R^n$ 内有定义.

若 $\forall X\in\boxed{\hat{U}(X_0)}$，总有

局部

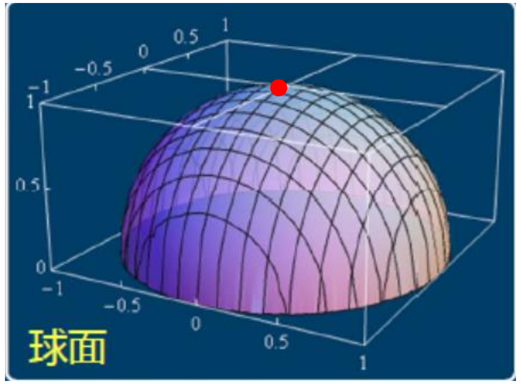
$$f(X)<f(X_0)\quad(f(X)>f(X_0))$$

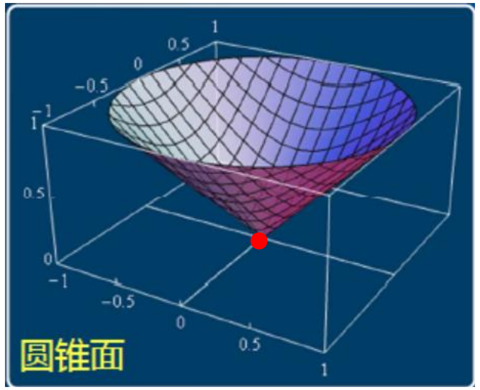
则称 $f(X_0)$ 为函数 $f(X)$ 的极大值 (极小值).

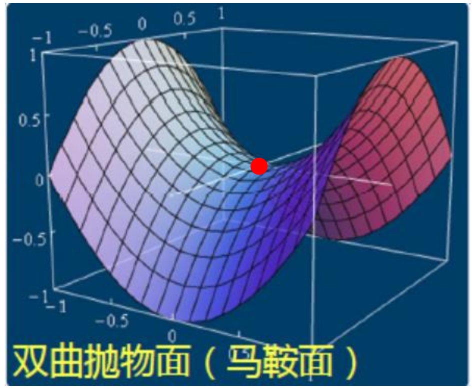
X_0 称为函数的极大点 (极小点).

【例】 考虑下面三个函数在点(0,0)处是否取极值：

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$　　$z=\sqrt{x^2+y^2}$　　$z=xy$







(0,0)为极大点　　(0,0)为极小点　　(0,0)不是极值点

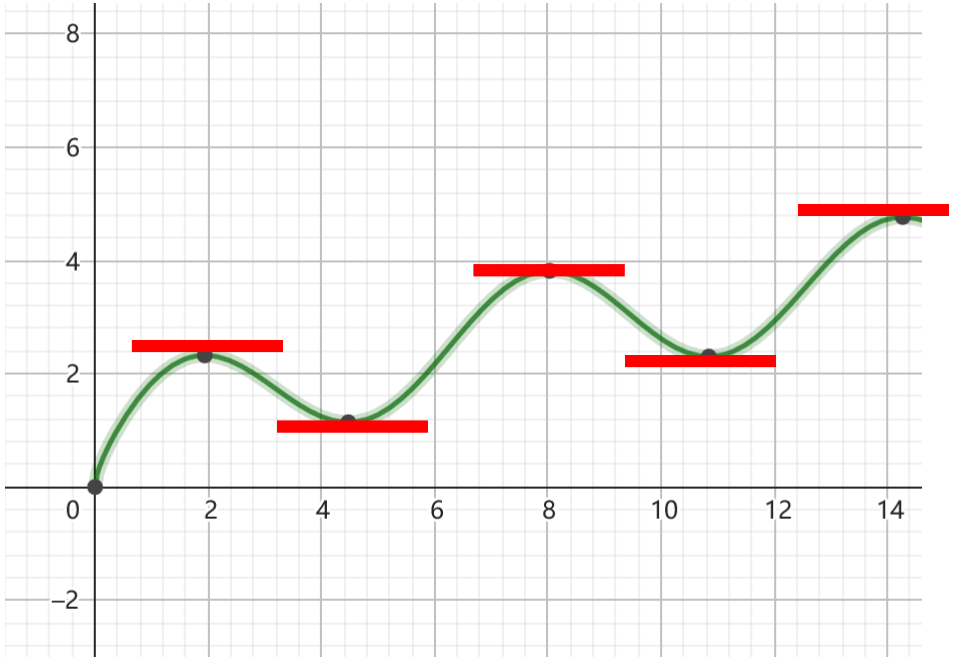
【定理1】 可偏导函数的极值点，必为驻点！

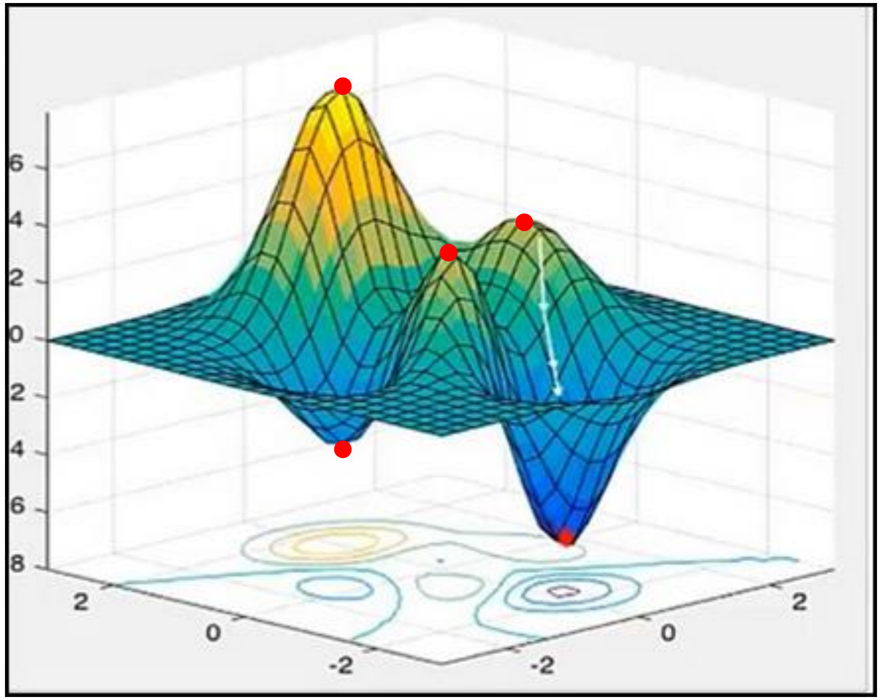
设函数$z = f(x, y)$在区域D内有定义，且在点$(x_0, y_0) \in$ D处取得极值。若在点(x_0, y_0)处可偏导，则必有

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

使函数 $u = f(X)$ 的一阶偏导数全为零的点 X_0 称为函数的驻点. $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = 0$

可导函数极值点的几何特征





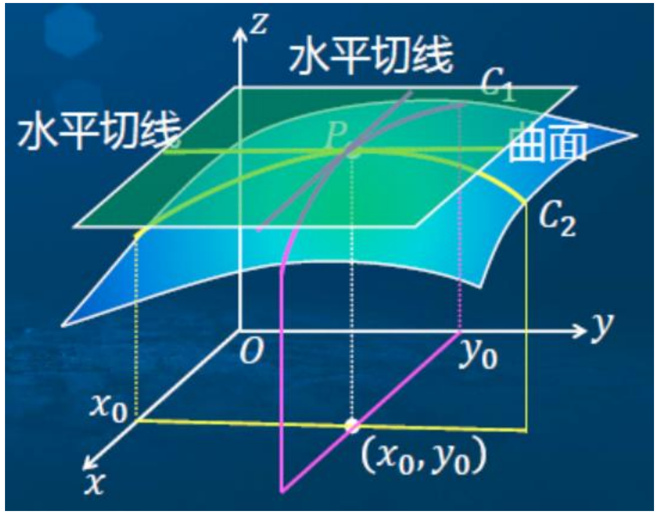
可导曲线的极值点处，切线水平！

可导曲面的极值点处，切面水平？

可导函数极值点的几何特征

设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微且取**极值**，则相应的曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**切平面**方程为

$$\boxed{f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0}$$



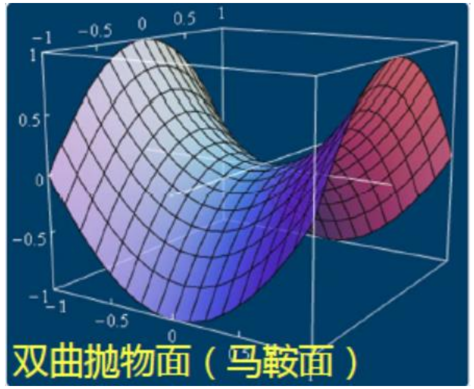
$$\boxed{f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0}$$

$$\boxed{z=z_0.}$$

切平面 //xoy 平面!

一. 无约束极值

$z = xy$



(0,0)不是极值点

一元函数是如何判别极值点的？

一阶导数为0时，

考虑二阶导数符号！

多元函数可借鉴方法吗？

【定理2】

二阶泰勒公式证明

设 $z = f(x,y) \in C^2(\mathrm{U}(x_0,y_0))$, $\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = 0$,

记 $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y_0)}$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(x_0,y_0)}$,

（1）$AC - B^2 > 0$, 则 $f(x, y)$在点(x_0,y_0)处取极值：

$A < 0$ 时，取极大值； $A > 0$ 时，取极小值。

（2）$AC - B^2 < 0$, 则点(x_0,y_0)不是$f(x, y)$的极值点。

（3）$AC - B^2 = 0$, 则不能判断(x_0,y_0) 是否为极值点。

【例】 求 $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$ 的极值.

【解】 可微函数求驻点: $\begin{cases} f'_x=3x^2+3y^2-15=0 \\ f'_y=6xy-12=0 \end{cases}$

解之得驻点 $(-1,-2)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(-2,-1)$.

再求二阶偏导: $A=f''_{xx}=6x$, $B=f''_{xy}=6y$, $C=f''_{yy}=6x$,

- 点(-1,-2): $AC-B^2=-108<0$ 不是极值点.
- 点(1,2): $AC-B^2=-108<0$ 不是极值点.

【例】 求 $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$ 的极值.

【解】 再求二阶偏导： $A=f''_{xx}=6x$， $B=f''_{xy}=6y$， $C=f''_{yy}=6x$，

- 点(2,1)： $AC-B^2=138>0,\quad A=12>0,$

  是极小点， 极小值为 $f(2,1)=-28$.

- 点(-2,-1)： $AC-B^2=138>0,\quad A=-12<0,$

  是极大点，极大值为 $f(-2,-1)=28$.

【练】求函数的极值： $f(x,y)=x^4+y^4-a^2xy+8a^4$

【解】由 $f'_x=4x^3-a^2y=0$

$f'_y=4y^3-a^2x=0$

解得驻点： $(0,0),(\frac{a}{2},\frac{a}{2}),(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$

再求二阶偏导： $f''_{xx}=12x^2;\ f''_{xy}=-a^2;\ f''_{yy}=12y^2$

$AC-B^2=12^2x^2y^2-a^4\,|_{(0,0)}=-a^4<0,(0,0)$不是极值点。

$(\frac{a}{2},\frac{a}{2}),(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$处$AC-B^2>0,A>0,$是极小值点,

最小值为$f(\frac{a}{2},\frac{a}{2})=f(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2})=9a^4$。

二. 函数的最大值和最小值

如果 $f(X)\in C(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega}$ 为有界闭区域, 则函数 $f(X)$ 必在 $\overline{\Omega}$ 上取到它的最大值和最小值.

整体

如何求出最大值和最小值 ?

设函数 $u=f(X)$ 在有界闭区域 $\overline{\Omega}$ 上有定义 .

求出 $f(X)$ 在 Ω 内以及边界 $\partial\Omega$ 上的所有可疑极值进行比较, 从中取出最大者和最小者, 就是 $f(X)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值和最小值.

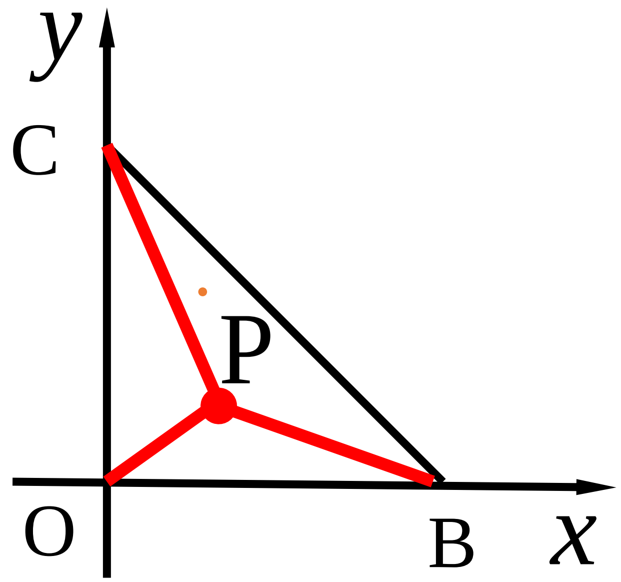
【例】 求在 $\overline{\mathrm{D}}=\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0, x+y \leq 1\}$上求到点$O(0,0)$，$B(1,0), C(0,1)$距离的平方和为最大及最小的点.

【解】 设所求点为$P(x,y)$，则所求距离的平方和为

$$|OP|^2+|PB|^2+|PC|^2$$
$$=3x^2+3y^2-2x-2y+2$$

所求点为$P(x,y)$所在区域为

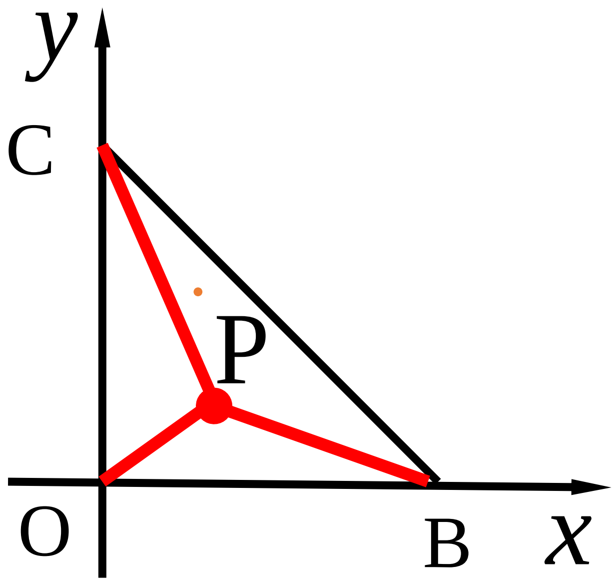
$$\overline{\mathrm{D}}=\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$$



【例】 求在 $\bar{\mathrm{D}}=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$ 上求到点 $O(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ 距离的平方和为最大及最小的点.

【解】 所讨论的问题归结为下面的问题:

求 $f(x,y)=3x^2+3y^2-2x-2y+2$ 在 $\bar{\mathrm{D}}=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$ 上的最大值点和最小值点。

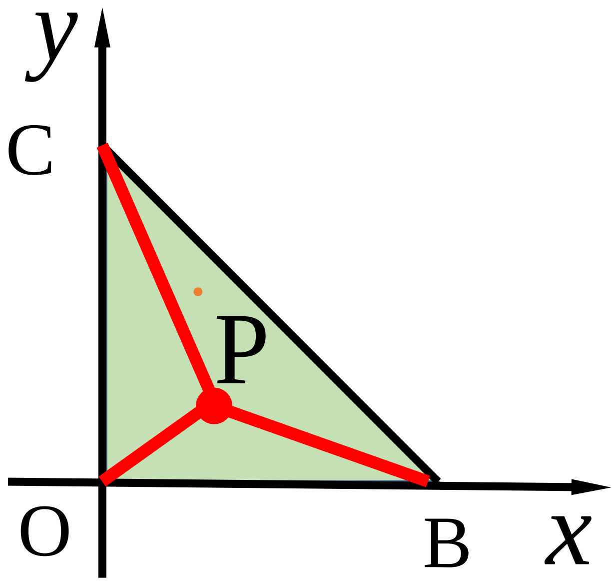


【例】 求在 $\bar{D}=\{(x,y)|\ x\geq 0,\ y\geq 0,x+y\leq 1\}$ 上求到点 $O(0,0)$, $B(1,0),C(0,1)$ 距离的平方和为最大及最小的点.

※ 在D内:

$$f(x,y)=3x^2+3y^2-2x-2y+2$$

由方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=6x-2=0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=6y-2=0\end{cases}$

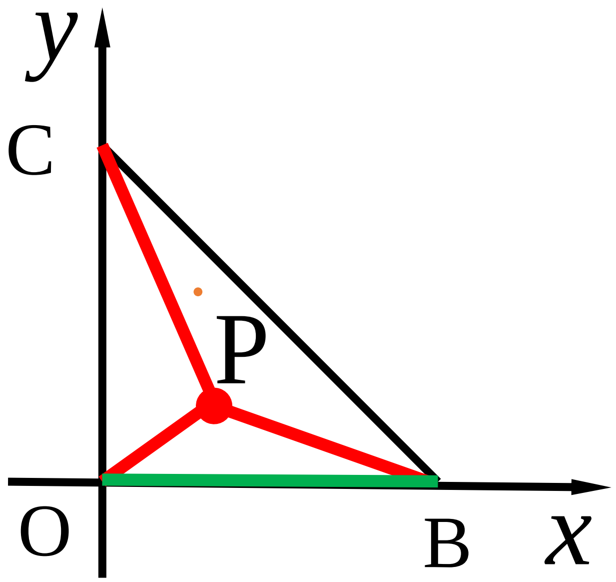


得到驻点 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，且 $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

【例】 求在 $\bar{D}=\{(x,y)|\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$ 上求到点 $O(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ 距离的平方和为最大及最小的点.

※ 在 ∂D 上

$$f(x,y)=3x^2+3y^2-2x-2y+2$$



在OB上： $y\equiv 0,\quad 0<x<1,$

$$f(x,0)=3x^2-2x+2,$$

由一元函数求极值的方法,

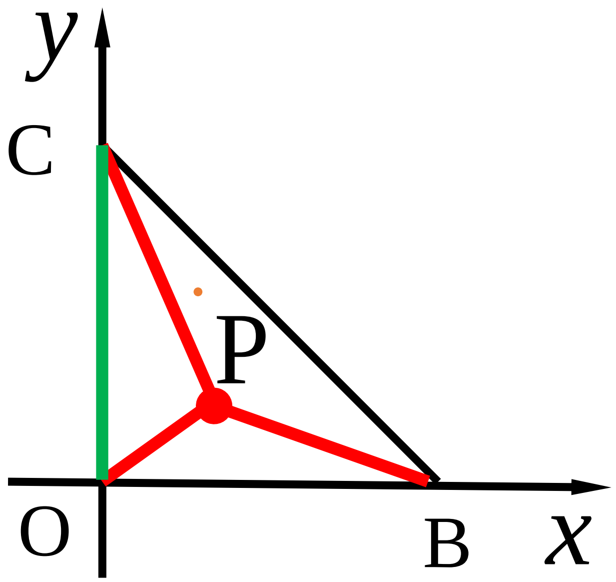
得驻点： $\left(\frac{1}{3},0\right)$, 函数值： $f\left(\frac{1}{3},0\right)=\frac{5}{3}$

二. 函数的最大值和最小值

【例】 求在 $\bar{D}=\{(x,y)|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$上求到点$O(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$距离的平方和为最大及最小的点.

※ 在∂D上

$$f(x,y)=3x^2+3y^2-2x-2y+2$$



在OC上： $x\equiv 0,\quad 0<y<1,$

$$f(0,y)=3y^2-2y+2,$$

由一元函数求极值的方法,

得驻点： $\left(0,\frac{1}{3}\right)$，函数值： $f\left(0,\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

【例】 求在 $\bar{D}=\{(x,y)|\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$上求到点$O(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$距离的平方和为最大及最小的点.

※ 在∂D上

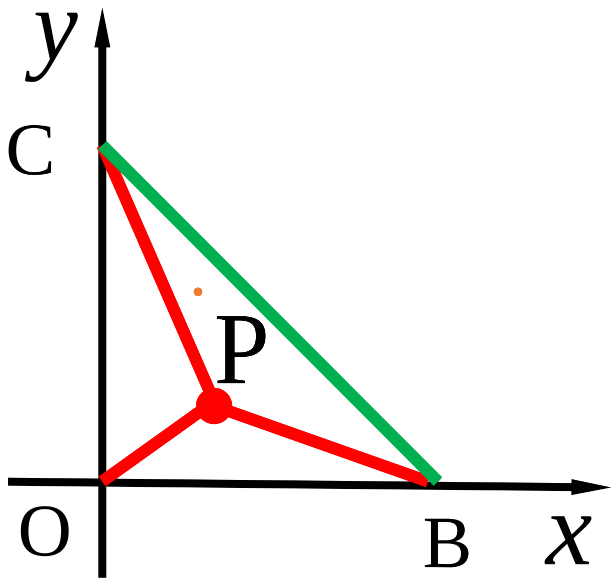
$$f(x,y)=3x^2+3y^2-2x-2y+2$$

在BC上： $x+y=1,\quad 0<x<1,$

$$f(x,1-x)=6x^2-6x+3,$$

由一元函数求极值的方法,

得驻点：$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$， 函数值：$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$



二. 函数的最大值和最小值

综上所述 $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$ $\quad f(\frac{1}{3},0)=\frac{5}{3}$

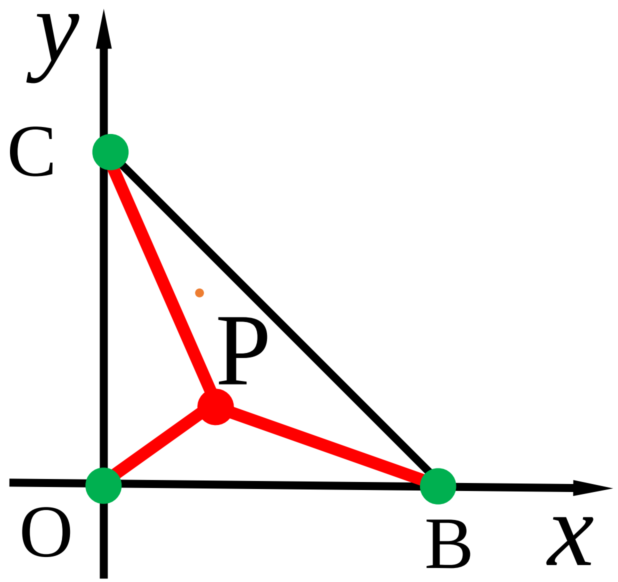
$f(0,\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$ $\quad f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$

边界上端点值：

$f(0,0)=2,\quad f(1,0)=3,\quad f(0,1)=3,$

$\max\limits_{D} f(x,y)$: $f(1,0)=3$ $\quad f(0,1)=3$

$\min\limits_{D} f(x,y)$: $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$



函数最值的实际判断原则

在实际问题中，如果根据问题本身的性质知道函数 $f(X)$的最大值（或最小值）一定在区域 Ω 内部取到, 而函数在区域内可微且仅有唯一驻点, 则可以肯定该驻点对应的函数值一定是函数最大值（或最小值）.

【例】 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

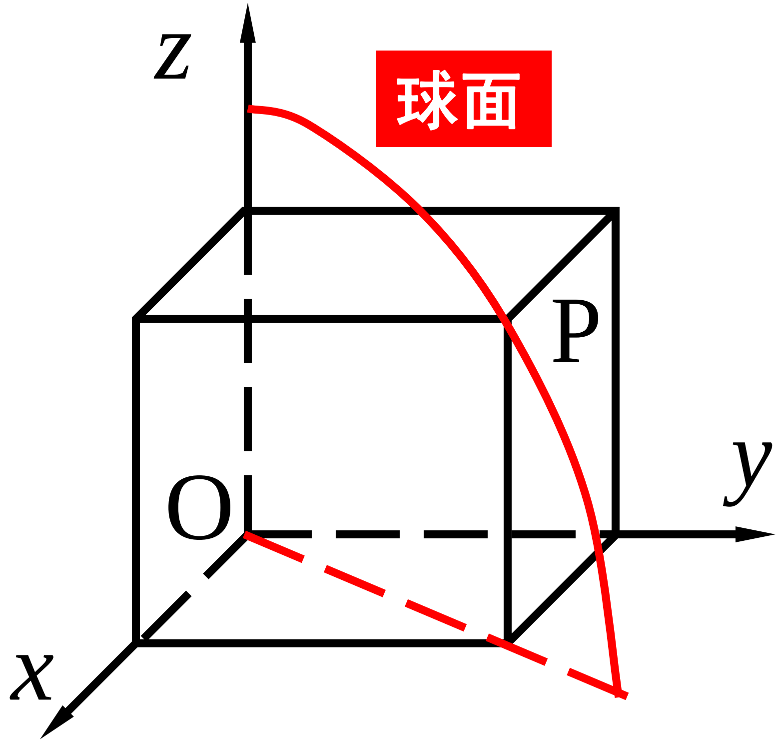
【解】 建模：选择坐标系，使球心位于坐标原点，

则球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$

设所求长方体在第一卦限中的顶点为

$P(x,y,z)$，则长方体的三个棱边长是$2x$，

$2y$，$2z$，长方体体积为



$$V=(2x)(2y)(2z)=8xyz=8xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

原问题归结为下面的优化问题:

求$V = f(x,y) = 8xy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$在$\bar{D} = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < a^2\}$

内的最大值点。

由$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + 2y^2 = a^2 \end{cases}$

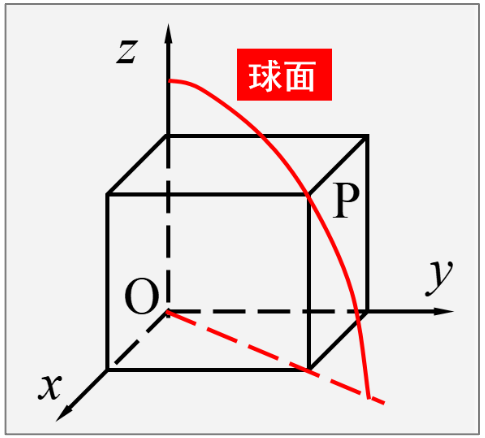
因为该题的最大值存在，函数可微且仅有唯一的驻点，则该驻点即为所求的最值点，从而所求球内接长方体的边长为

解得驻点 $x = y = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$,

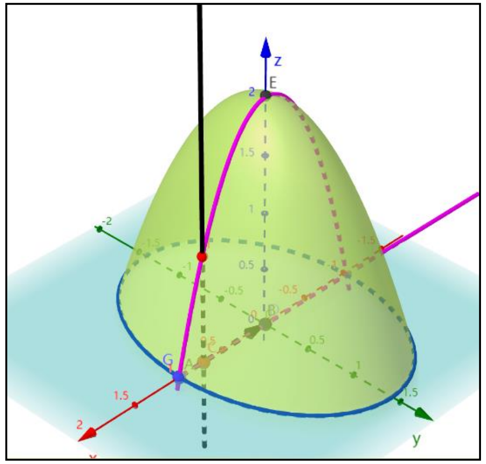
$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$。

$$2x = 2y = 2z = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

对自变量附加一定条件的极值问题就是有约束极值问题 .



$$\max\ f(x,y,z)=8xyz$$
$$s.t.\,x^2+y^2+z^2=a^2$$



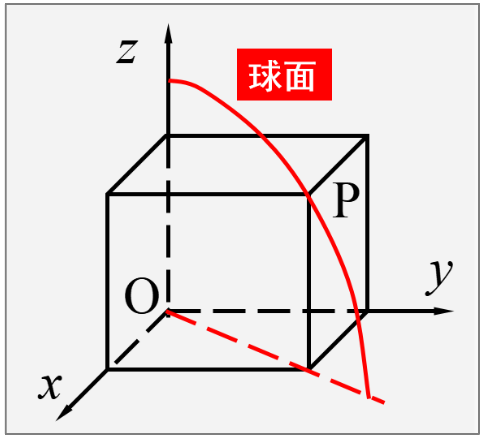
$$\max \|\text{grad } z\| = \sqrt{(-4x)^2+(-2y)^2}$$
$$s.t.\,2-2x^2-y^2=0$$

三. 有约束极值（条件极值）

求函数$u = f(x, y)$

在条件$\varphi(x, y) = 0$下的极值

基本思路：转化为无约束极值问题！



$$\max\ f(x,y,z)=8xyz$$
$$s.t.\, x^2+y^2+z^2=a^2$$

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

变量替代法

（消元降维）

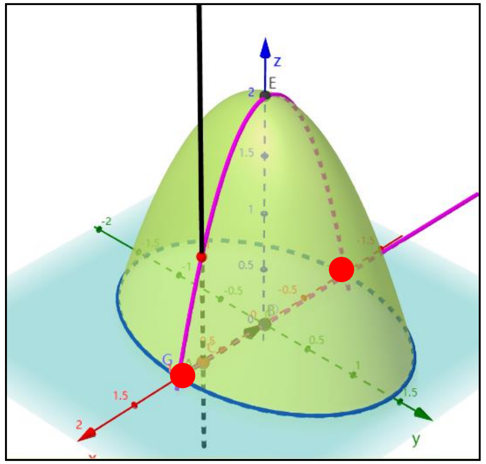
求$V=f(x,y)=8xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}$在

$\bar{D}=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<a^2\}$

内的最大值点。

$$2x=2y=2z=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

三. 有约束极值（条件极值）



$$\max \|\mathrm{grad}\ z\| = \sqrt{(-4x)^2+(-2y)^2}$$

$$s.t. 2-2x^2-y^2=0$$

$y^2=2-2x^2$

变量替代法

（消元降维）

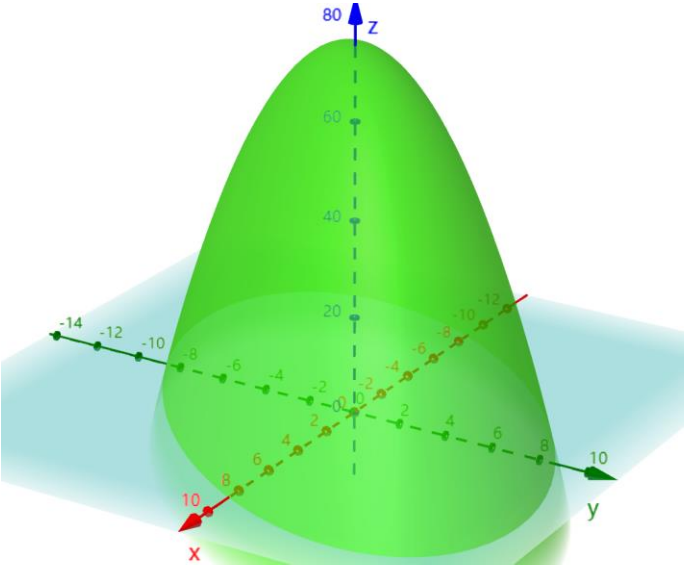
求$f(x)=\sqrt{8x^2+8}$在

$D=\{x \mid -1\le x\le 1\}$内的最大值。

解得：(1, 0) 和 (−1, 0) 为最大值点，最大值为4。

设山的底面所在平面为xoy坐标面，山的高度函数为

$f(x,y)=75-x^2-y^2+xy$。选择什么路径能最快到达山顶?



【分析】先确定在山脚的哪个点开始爬山，使得梯度的模最大。

$$\mathrm{grad}\, f = (-2x+y\ ,\ -2y+x)$$

$$\|\mathrm{grad}\, f\| = \sqrt{(-2x+y)^2+(-2y+x)^2}$$

$$=\sqrt{5x^2+5x^2-8xy}$$

$$s.t.\quad 75-x^2-y^2+xy=0$$

此时消元比较困难！

怎么办？

三. 有约束极值（条件极值）

有约束极值

（升维）

拉格朗日乘数法

变量替代法

（降维）

无约束极值

定理3： 此方法称为拉格朗日乘数法

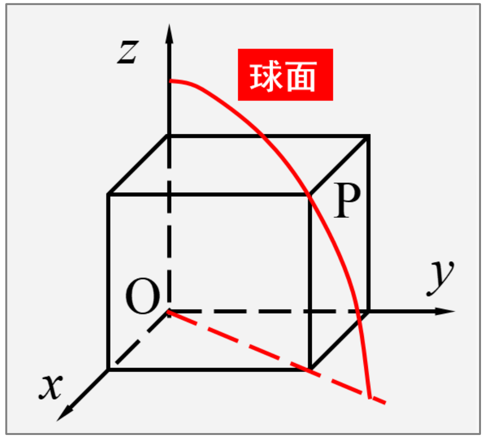
设$P_0(x_0,y_0)\in R^2$, 函数$f(x,y)$, $\varphi(x,y)\in C^1(U(P_0))$, 且$\varphi_x'(x_0,y_0)$和$\varphi_y'(x_0,y_0)$不同时为0. 若点$P_0(x_0,y_0)$是函数$f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的极值点, 则点$M_0(x_0,y_0,\lambda)$必是拉格朗日函数

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$的驻点.

λ称为拉格朗日乘数

$$\begin{aligned}&\max\ f(x,y)\\ &s.t.\quad \varphi(x,y)=0\end{aligned} \Longrightarrow \max F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

【例】 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.



【解2】 问题建模为条件极值：

$$\max f(x,y,z)=8xyz$$
$$s.t.x^2+y^2+z^2=a^2$$

设拉格朗日函数： $F(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$

$$\begin{cases} F_x'=8yz+2x\lambda=0 \\ F_y'=8xz+2y\lambda=0 \\ F_z'=8yx+2z\lambda=0 \\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-a^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

故所求内接长方体边长 (2x,2y,2z)为

$$\left(\frac{2a}{\sqrt{3}},\frac{2a}{\sqrt{3}},\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$$

三. 有约束极值（条件极值）

【练】 $\max\|\mathbf{grad\ f}\| = \sqrt{(-2x+y)^2+(-2y+x)^2} = \sqrt{5x^2+5y^2-8xy}$

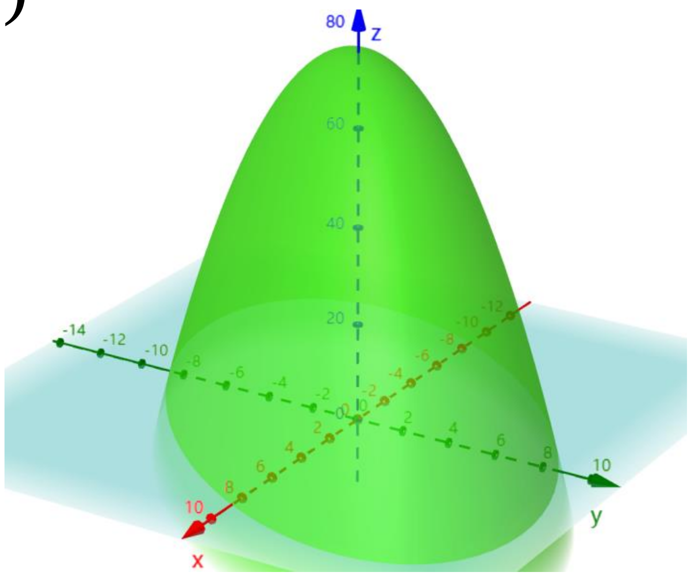
$$s.t.\quad 75-x^2-y^2+xy=0$$

【解】 $F(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$

$$F'_x=10x-8y-2\lambda x+\lambda y=0$$

$$F'_y=10y-8x-2\lambda y+\lambda x=0$$

$$F'_\lambda=75-x^2-y^2+xy=0$$



解得$x=y=\pm5\sqrt{3}$ $\quad\|\mathbf{grad\ f}\| = 5\sqrt{6}$

或$x=-y=\pm5$ $\quad\|\mathbf{grad\ f}\| = 5\sqrt{18}$

故点(5,−5)和(−5,5)为最佳出发点。

三. 有约束极值（条件极值）

推广到n元函数，含m个约束条件的情形：

目标函数： $u=f(X),\quad X\in\Omega\subset R^n$

表现形式：

$$\begin{aligned}&\min f(X)\qquad X\in\Omega\subset R^n\\&s.t.\quad \varphi_1(X)=0,\\&\qquad\quad \cdots\cdots\\&\qquad\quad \varphi_m(X)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max[-f(X)]\qquad X\in\Omega\subset R^n\\&s.t.\quad \varphi_1(X)=0,\\&\qquad\quad \cdots\cdots\\&\qquad\quad \varphi_m(X)=0\end{aligned}$$

构造拉格朗日函数 $L(X,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(X)+\lambda_1\varphi_1(X)+\ldots+\lambda_m\varphi_m(X)$

【例】 平面$x+y+z=0$交圆柱面$x^2+y^2=1$成一个椭圆，求这个椭圆上距离原点最近和最远的点。

【解】 设$P(x,y,z)$为椭圆上任一点，则它到原点的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

且P坐标满足 $$\begin{aligned}&x+y+z=0\\&x^2+y^2=1\end{aligned}$$

此时的条件极值问题，通过变量代换转化为无条件极值问题，比较困难。需要用到拉格朗日乘数法。

设$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-1)+\mu(x+y+z)$

解 设 $F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-1)+\mu(x+y+z)$

由 $\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda x+\mu=0 \\ F_y'=2y+2\lambda y+\mu=0 \\ F_z'=2z+\mu=0 \\ F_\lambda'=x^2+y^2-1=0 \\ F_\mu'=x+y+z=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x=y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, z=\mp\sqrt{2} \\ x=-y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, z=0 \end{cases}$

得到两个最远的点和最近的点如下：

$\boxed{(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}),\quad (-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}),}$ $\quad d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3}$

$\boxed{(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0),\quad (-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0),}$ $\quad d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$

思考题1

求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$$

下的极小值，并证明此时不等式成立：

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{-1}\leq\sqrt[3]{xyz}$$

其中，x、y、z、$a>0$为实数.

解 作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)$

令
$$\begin{cases} L'_x=yz-\dfrac{\lambda}{x^2}=0, \\ L'_y=xz-\dfrac{\lambda}{y^2}=0, \\ L'_z=xy-\dfrac{\lambda}{z^2}=0, \\ L'_\lambda=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{a}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xyz=\dfrac{\lambda}{x}=\dfrac{\lambda}{y}=\dfrac{\lambda}{z}, \\ x=y=z, \end{cases}$$

$$x=y=z=3a,$$

该驻点是否为原函数的极值点?

三. 有约束极值（条件极值）

有约束极值

带等式约束的极值

带其它约束的极值

转化

变量代换法

拉格朗日乘数法

无约束极值

一般优化问题

本节小结

一. 无约束极值：

函数取极限的必要条件，充分条件.

二. 最值：

比较内部和边界的极值可能点的函数值；

实际判断原则.

三. 有约束极值：转化为无条件极值

变量代换法，拉格朗日乘数法.