2022年6月高数A2（卷A）参考答案

1.解法一： 设平面方程为 $A(x-3)+B(y+1)+C(z-4)=0$，

则 $\begin{cases}A+C=0,\\2A-B+3C=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C=-A,\\B=-A,\end{cases}$

故平面方程为 $A(x-3)-A(y+1)-A(z-4)=0$，即 $x-y-z=0$.

解法二： 设平面法向量为 $\vec{n}$，则 $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=(1,-1,-1)$

故平面方程为 $1(x-3)-1(y+1)-1(z-4)=0$，即 $x-y-z=0$.

2.解法一： 原式$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{1-(1+x^2+y^2)}=-2$

解法二： 令 $t=x^2+y^2$ 原式$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{1-\sqrt{1+t}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{-\dfrac{t}{2}}=-2$

解法三： 令 $t=x^2+y^2$ 原式 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{1-\sqrt{1+t}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}}=-2$

3.解： $\overrightarrow{OA}=(1,\sqrt{3})$

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y=\sqrt{3}\Delta x}}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}-0}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=1$$

4.解法一： $y=y(x)$，$z=z(x)$，方程组两边对 x 求导: $\begin{cases}x+y\cdot y'+z\cdot z'=0,\\x+y\cdot y'-z\cdot z'=0,\end{cases}$

将 $x=3, y=4, z=5$ 代入得 $y'=-\dfrac{3}{4}, z'=0$，可取切向量为$(4,-3,0)$

故切线：$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-5}{0}$ 法平面：$4x-3y=0$

解法二： 两个曲面的切平面法向量分别为

$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)\big|_{(3,4,5)}=(3,4,5)$，$\overrightarrow{n_2}=(x,y,-z)\big|_{(3,4,5)}=(3,4,-5)$

曲线的切向量 $\tau=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)\big|_{(3,4,5)}=(-40,30,0)$，取为$(4,-3,0)$

故切线：$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-5}{0}$ 法平面：$4x-3y=0$

5.解： $F(x)=z+\ln(x+2y-z)-2$

$$F'_x=\frac{1}{x+2y-z},F'_y=\frac{2}{x+2y-z},F'_z=1+\frac{-1}{x+2y-z},$$

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{-1}{x+2y-z-1},z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{-2}{x+2y-z-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{-1}{x+2y-z-1}\right)'_y=\frac{2-z'_y}{(x+2y-z-1)^2}=\frac{2(x+2y-z)}{(x+2y-z-1)^3}$$

6.解法一： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+2}{n\cdot 3^n}}{\frac{1}{3^n}}=1$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n\cdot 3^n}$ 收敛 .

解法二： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{3}<1$ ，由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n\cdot 3^n}$ 收敛 .

7.解： $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}\qquad(-1<x<1)$ ，

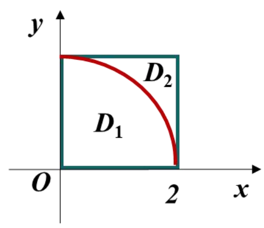
$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad(-1\le x\le 1)\ ,$$

$\arctan 2x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1}$， 收敛域为 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$.

8．解:

$$\boldsymbol{I=\iint_D|x^2+y^2-4|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

$$\boldsymbol{=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x^2+y^2-4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$



因为 $$\boldsymbol{\iint_{D_2}(x^2+y^2-4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D(x^2+y^2-4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

所以 $$\boldsymbol{I=\iint_D(x^2+y^2-4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$.

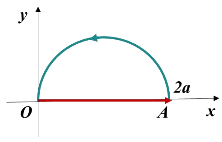
由极坐标变换： $$\boldsymbol{\iint_{D_1}(x^2+y^2-4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1^*}(r^2-4)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$$

$$\boldsymbol{=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2-4)r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}(r^2-4)^2\Big|_0^2=-2\pi.}$$

由轮换对称性有：$$\iint_D (x^2+y^2-4)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 2\iint_D x^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y - 4S_D$$

$$= 2\int_0^2 \mathrm{d}\,y\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}\,x - 4\times 4 = -\frac{16}{3}.$$

故 $I = 4\pi - \dfrac{16}{3}.$



9.解：添加辅助线 $L_{OA}: y=0, x: 0\to 2a$，则 L 与 L_{OA} 所围区域为 D，

因为 $P = e^x\sin y + x - y, Q = e^x\cos y + y$ 在 D 上满足格林公式的条件，

$$I = \oint_{L+L_{OA}} (e^x\sin y + x - y)\,\mathrm{d}\,x + (e^x\cos y + y)\,\mathrm{d}\,y$$
$$-\int_{L_{OA}} (e^x\sin y + x - y)\,\mathrm{d}\,x + (e^x\cos y + y)\,\mathrm{d}\,y$$

由格林公式：

$$\oint_{L+L_{OA}} (e^x\sin y + x - y)\,\mathrm{d}\,x + (e^x\cos y + y)\,\mathrm{d}\,y = \iint_D (e^x\cos y - e^x\cos y + 1)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = |D| = \frac{1}{2}\pi a^2.$$

$$\int_{L_{OA}} (e^x\sin y + x - y)\,\mathrm{d}\,x + (e^x\cos y + y)\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{2a} x\,\mathrm{d}\,x = 2a^2.$$

故 $I = \dfrac{1}{2}\pi a^2 - 2a^2.$

10.解：令 $P(x,y,z)=x, Q(x,y,z)=y, R(x,y,z)=z$，作曲面 Σ_1：$z=0, x^2+y^2\le 4$，取上侧，则 $\Sigma+\Sigma_1$ 为内侧. Ω 为 Σ,Σ_1 所围区域，由高斯公式得

$$I_1 = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v \quad = -3\iiint_\Omega \mathrm{d}v$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_0^{4-r^2}\mathrm{d}z$$ （或截面法：$= -3\int_0^4 \pi(4-z)\mathrm{d}z$） $= -3\cdot 8\pi = -24\pi$

又 $\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

故 $I = \iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -24\pi - 0 = -24\pi$

11.解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)!}\dfrac{n!}{n^2+1}=0$ ，故收敛半径为+∞，收敛域为（-∞,+∞）.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n+\mathrm{e}^x \quad =x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}+\mathrm{e}^x$$

$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right)'+\mathrm{e}^x=x\left(x\mathrm{e}^x\right)'+\mathrm{e}^x=x\left(x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\right)+\mathrm{e}^x=\left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^x \qquad (x\in R)$$

12.解： $\begin{cases}x^2+y^2=3z,\\x^2+y^2+z^2=4,\end{cases}$ $\Rightarrow x^2+y^2=3$ 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\\z=z\end{cases}$

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v \quad =\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}r(\sqrt{4-r^2}-\frac{1}{3}r^2)\mathrm{d}r=\frac{19}{6}\pi$$

13.解： 设切点(x_0,y_0,z_0)，则切平面方程 $x_0x+3y_0y+z_0z=1$,其在 x,y,z 轴的截距分别为 $\dfrac{1}{x_0},\dfrac{1}{3y_0},\dfrac{1}{z_0}.$ 所围四面体体积 $V=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{x_0}\cdot\dfrac{1}{3y_0}\cdot\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{1}{18x_0y_0z_0}.$ 只需考虑 $U=xyz$ 在条件 $x^2+3y^2+z^2=1(x>0,y>0,z>0)$下的最大值. 令 $L=xyz+\lambda(x^2+3y^2+z^2-1)$,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=yz+2\lambda x=0,\\\dfrac{\partial L}{\partial y}=xz+6\lambda y=0,\\\dfrac{\partial L}{\partial z}=xy+2\lambda z=0,\\\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+3y^2+z^2-1=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3},y=\frac{1}{3},z=\frac{\sqrt{3}}{3},\lambda=-\frac{1}{6},$$

由实际推断，体积最小时的切点坐标为$(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$.

14.证法一：（交换积分次序）$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x 2(x-y)f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b 2(x-y)f(y)\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_y^b 2(x-y)\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)[x^2-2xy]\Big|_y^b\mathrm{d}y=\int_a^b(b-y)^2f(y)\mathrm{d}y$$

证法二： 考虑 b 为变上限.

令 $F_1(b)=2\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x(x-y)f(y)\mathrm{d}y, F_2(b)=\int_a^b(b-y)^2f(y)\mathrm{d}y$

则 $F_1(a)=F_2(a)$， $F_1'(b)=\int_a^b 2(b-y)f(y)\mathrm{d}y=F_2'(b)$，故 $F_1(b)\equiv F_2(b)$，得证.