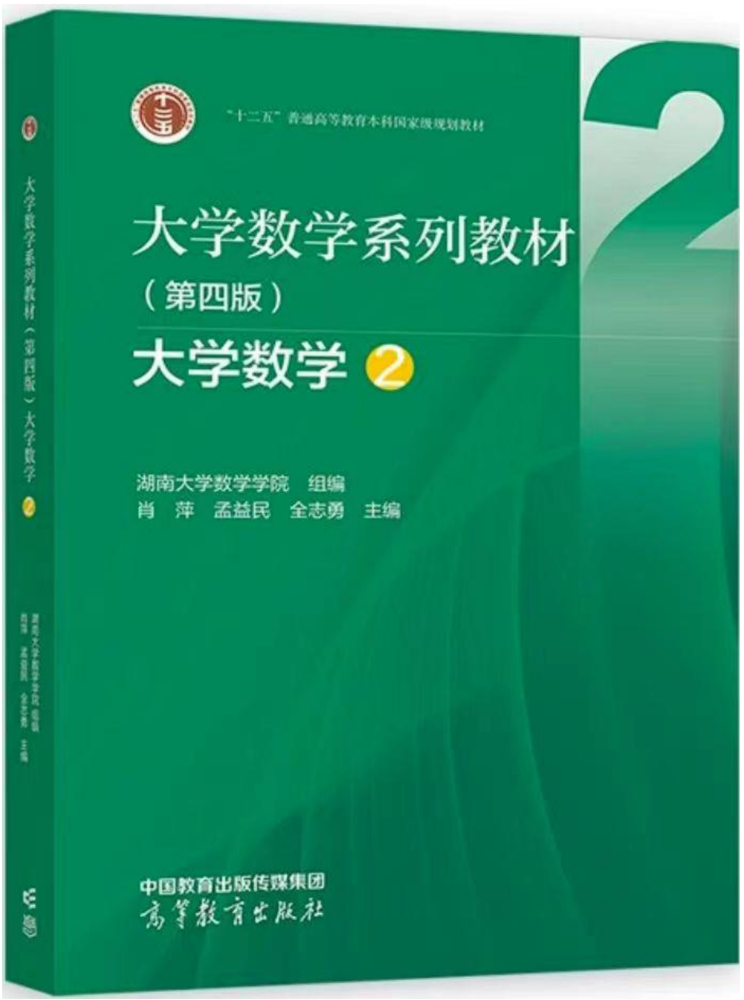
湖南大学理工类必修课程

大 学 数 学 AII

—— 多元元微积分学

1. 1　向量的概念

- 主讲：于红香



课程总评成绩构成：

1. 平时成绩1 占比20%

- 课堂考勤
- 课堂练习
- 课后作业
- 课后答疑
- 章节测试

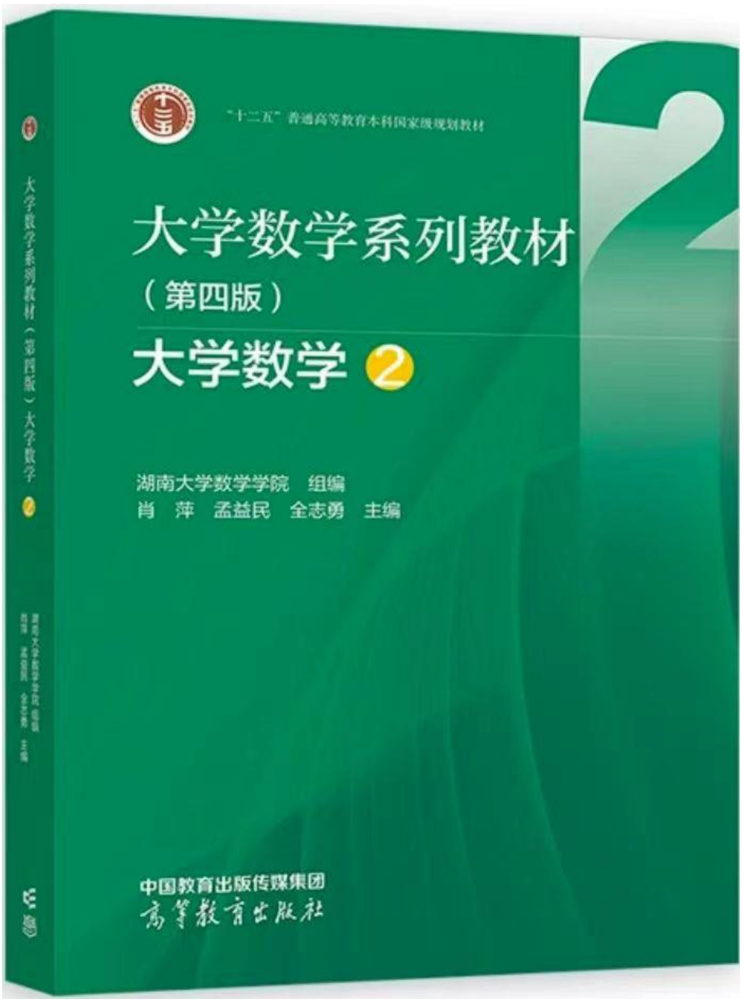
学习通

2. 平时成绩2 占比30%

- 1次机试成绩

3. 期末成绩 占比50%

- 期末考试卷面成绩



课程要求：

1、课前预习，课后复习+作业

2、课堂上手机静音，学习通签到并完成课堂练习

3、欢迎提问交流，及时解决疑问

答疑：课间或QQ（随时提问）

计科安全班：1033699844

材料班：980521052

课前

- 复习前置知识点
- 预习本节内容的简单概念和定义
- 完成课前测（1-3题）

课中

- 重难点的理解和应用
- 例题及课堂练习
- 知识点应用的创新思考

课后

- 课后作业（习题册随进度完成）
- 本节内容的延伸拓展或推荐资料

本课程框架

向量代数

向量的特征及表示
向量的加减，数乘，点乘，叉乘，混合积，
向量间的关系：平行，垂直，共面

工具

空间解析几何

直线，平面，曲线，曲面的特征及其方程，点线面的各种关系

多元微分学

多元函数，连续性，偏导数，全微分，方向导数，梯度，多元极值，曲线的切线和法平面，曲面的法线和切平面。

多元积分学

重积分，曲线积分，曲面积分，格林公式，高斯公式，斯托克斯公式，曲线的弧长，平面曲面的面积，立体的体积。

无穷级数

常数项级数，函数项级数，幂级数，傅里叶级数。

一元微分学

一元积分学

常微分方程

向量的特征及表示
向量的加减，数乘，点乘，叉乘，混合积，
向量间的关系：平行，垂直，共面

向量代数

工具

空间解析几何

直线，平面，曲线，
曲面的特征及其方程
，点线面的各种关系

它们有跨专业领域的应用吗?

向量在专业领域的应用举例

化学与材料科学

- **分子动力学**
  - **化学键方向：** 键长和键角通过向量计算（如分子构型优化）。
  - **晶体结构**：晶格向量描述周期性排列（如布拉格衍射条件）。
- **材料力学**
  - **应力张量：** 三维应力状态分解为向量组合。
  - **复合材料设计：** 纤维方向向量影响材料强度。

向量在专业领域的应用举例

计算机科学与图形学

- **3D建模与渲染**
  - **坐标变换**：用向量表示三维空间中的点，通过矩阵变换（平移、旋转、缩放）实现物体运动。
  - **光照模型**：表面法向量计算光照反射（如Phong模型中的光线方向向量）。
- **机器学习**
  - **特征向量**：数据样本表示为高维向量（如文本的词向量、图像的像素向量）。
  - **相似度计算**：余弦相似度衡量向量方向的一致性（如推荐系统中的用户偏好匹配）。

向量在专业领域的应用举例

航空航天与机器人学

- **飞行器动力学**
  - **姿态控制：** 四元数（扩展的向量概念）描述飞行器旋转姿态。
  - **轨迹规划**：速度向量和加速度向量合成飞行路径。
- **机器人路径规划**
  - **运动学链：** 机械臂关节的位移和力矩用向量描述（如DH参数法建模）。
  - **避障算法：** 斥力向量场引导机器人绕开障碍物。

向量作为跨学科研究的“通用语言”的核心价值

1.抽象复杂现象

（如将物理量简化为方向和大小的组合）。

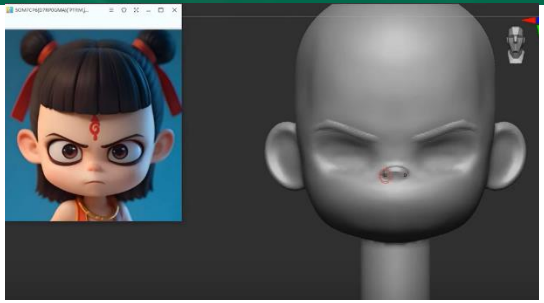
2.实现计算统一

（通过向量运算标准化多领域问题）。

3.支持高维建模

（从三维空间拓展到N维数据分析）。

无论是宏观的航天器轨道，还是微观的分子结构，向量都提供了简洁而强大的数学框架。



计算机图形学与游戏开发

•3D模型渲染

- **应用：** 生成复杂曲面（如汽车外壳、人物模型）。
- **方法：** 使用参数方程（如贝塞尔曲面、NURBS）定义曲面形状，通过空间变换实现旋转、缩放。

•光线追踪算法

- **应用：** 模拟光线与物体的交互（反射、折射）。
- **方法：** 计算光线（直线方程）与物体表面（隐式方程）的交点，利用法向量确定反射方向。

空间解析几何在专业领域的应用举例

- **机器人学与自动化**
- **机械臂运动学**

https://www.bilibili.com/video/BV1Pi421v7YM?spm_id_from=333.788.player.switch&vd_source=47f19507a96f74aab8e368226368699a

只需30秒，你竟然发明了机械臂

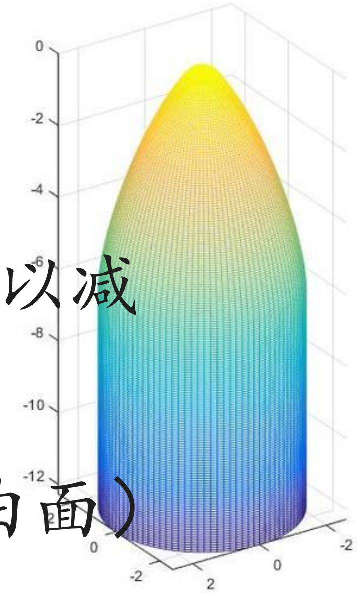
  - **应用：** 控制机械臂末端执行器的空间位置。
  - **方法：** 通过坐标系变换（齐次变换矩阵）建立关节角度与末端位置的关系，求解逆运动学方程。

- **避障路径规划**
  - **应用：** 在三维空间中规划无碰撞路径。
  - **方法：** 将障碍物建模为空间几何体（如球体、立方体），用直线或曲线方程搜索可行路径。

空间解析几何在专业领域的应用举例

航空航天工程

- **飞行器气动外形设计**
  - **应用：** 优化机翼或火箭外壳的曲面形状以减少阻力。
  - **方法：** 使用参数化曲面方程（如B样条曲面）描述外形，结合流体力学仿真验证性能。



冯.卡门整流罩

- **航天器对接控制**
  - **应用：** 计算对接舱的空间相对位置和姿态。
  - **方法：** 通过空间直线和平面的相对位置方程（如距离公式、夹角计算）实现精准对接。

空间解析几何的跨学科意义

1. **直观建模：**将复杂物理现象抽象为几何对象（如曲面、曲线），便于分析和计算。

2. **精准计算：**通过代数方程解决几何问题（如距离、夹角、交点），支持工程设计的精确性。

3. **多维扩展：**从三维空间拓展到高维数据分析（如机器学习中的特征空间），提供统一的数学框架。

无论是设计一架飞机的外形，还是重建人体器官的三维模型，空间解析几何都是连接抽象数学与真实世界的桥梁。

向量代数与空间解析几何

第一节　向量的概念及向量的表示

1. 向量的基本概念

2. 向量的坐标表示

以向量为工具

研究点线面

向量代数部分教学要求：

1．**理解**向量及其相关概念。**掌握**向量的运算（加减法、数乘、数量积、向量积、混合积）。**了解**两个向量夹角的求法和两个向量垂直、平行的条件。

2．**理解**空间直角坐标系。**熟练掌握**两点间距离公式。**理解**向量在坐标轴上的投影。

3．**熟练掌握**向量的模、方向余弦及单位向量的坐标表达式。**熟练掌握**用坐标表达式进行向量运算。

1. 向量的基本概念

1.1 向量的概念.

- 向量的定义，大小，方向，模，向量相等 ，自由向量。
- 零向量 单位向量 负向量.
- 向量间的关系：平行 共线 共面.

1.2 向量的加减法、向量与数乘.

- 向量加减法（几何表示，交换律，结合律）
- 向量与数乘（几何表示，分配律，结合律）

平行的充要条件及应用

1.3 向量在轴上的投影.

- 投影的定义.
- 三个投影性质.

物理量

标量: 仅用数值大小就可描述的量.
(数量)

例如, 面积、体积、质量、温度、功…

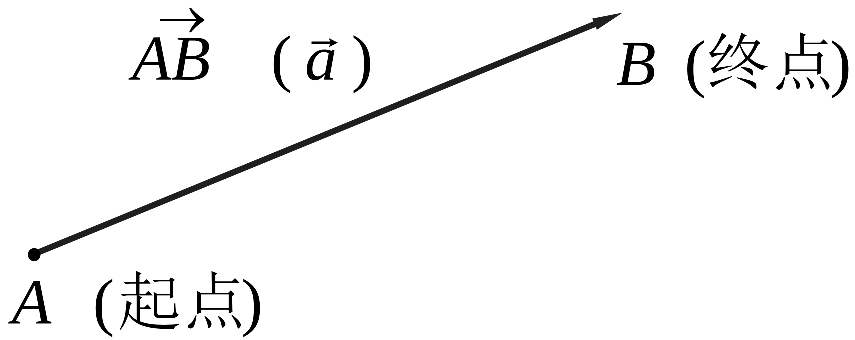
向量: 除用数值描述其大小外, 还要
(矢量) 指明它在空间中的方向的量.

例如, 速度、加速度、力、位移…

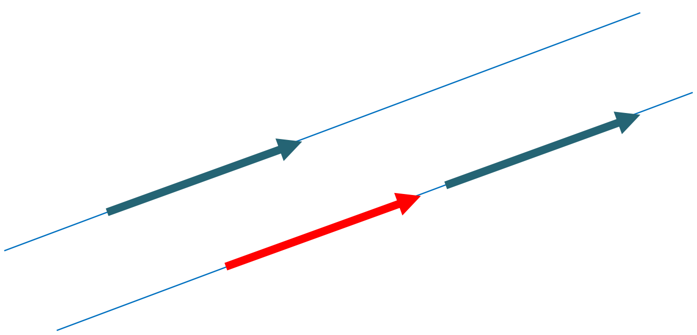
1.1 向量的概念

向量、模

向量的几何表示



向量相等

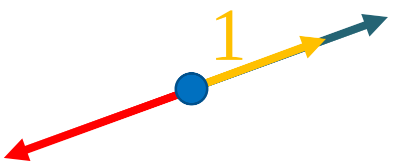


可以在空间中

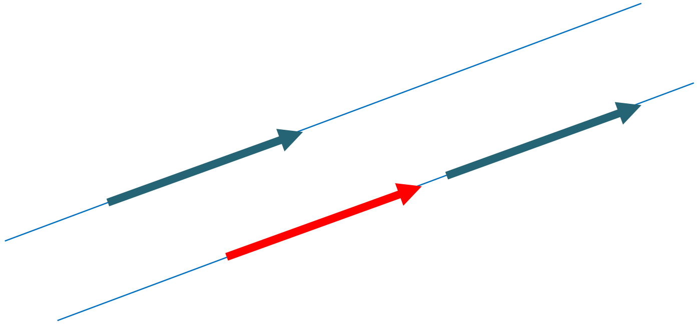
任意平移的向量

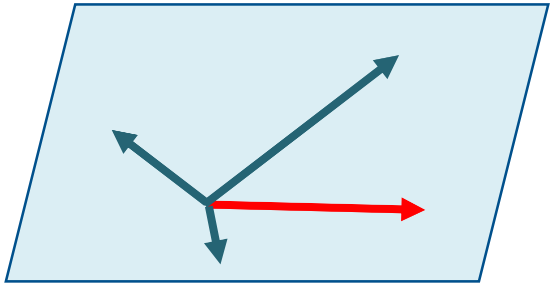
称为“**自由向量**”。

零向量、单位向量、向量的负向量



平行、共线、共面



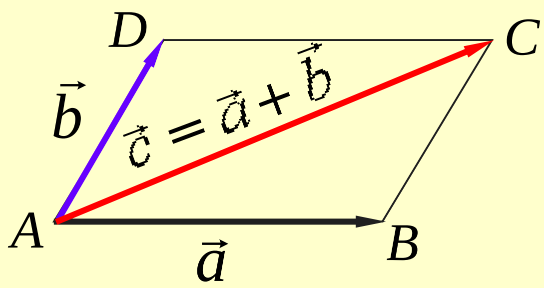


向量的加法

向量加法的运算律

首尾相接

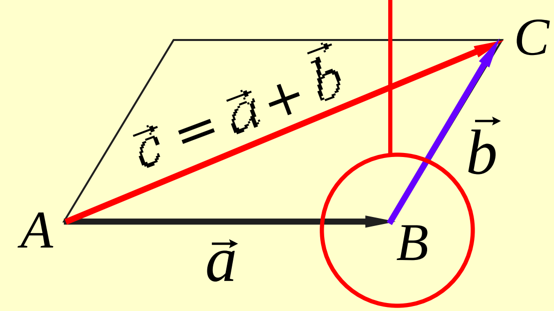
平行四边形法



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

三角形法



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

1.2 向量的加减法、向量与数乘

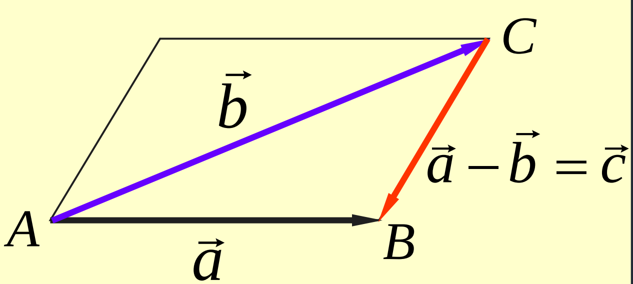
向量的减法

向量的减法是其加法的逆运算：

若 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，则称 向量 $\vec{c}$ 为向量 a 与 b 之差，记为

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b},\qquad \vec{a}-\vec{b}=\vec{c}。$$

三角形法



$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$$

由减项的终点

指向被减项的终点

向量与数乘

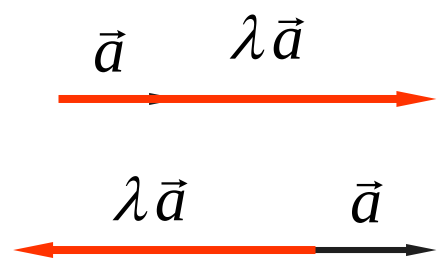
向量$\vec{a}$与实数λ的乘积$\lambda\vec{a}$为满足下列条件的向量:

1. $\|\lambda\vec{a}\|=|\lambda|\|\vec{a}\|$;

2. $\lambda>0$时, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向,

   $\lambda<0$时, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向,

   $\lambda=0$时, $\lambda\vec{a}=\vec{0}$。



向量与数相乘,
相当于将向量沿原方向或反向进行拉长或缩短。

向量数乘的运算律

(1) 结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

定理 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则 $\vec{b}//\vec{a}$

$\Longleftrightarrow$ 存在唯一实数λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

【证】 先证存在性，再证唯一性。向量的数乘有什么作用?

“$\Leftarrow$” 已知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$， 则

当 $\lambda=0$ 时， $\vec{b}=\vec{0}$

当 $\lambda>0$ 时， $\vec{a},\vec{b}$同向

当 $\lambda<0$ 时， $\vec{a},\vec{b}$反向

$\Longrightarrow$ $\vec{a}//\vec{b}$

定理 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则 $\vec{b}\,//\,\vec{a}$

$\Longleftrightarrow$ 存在唯一实数λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

【证】 "$\Rightarrow$" 设 $\vec{a}//\vec{b}$，取 $\lambda=\pm\dfrac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}$； $\vec{a},\vec{b}$ 同向时取正号，反向时取负号，则 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向,且

$$\|\lambda\vec{a}\|=|\lambda|\,\|\vec{a}\|=\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$$

故 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性． 设又有 $\vec{b}=\mu\vec{a}$， 则 $(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0}$

而 $\|\vec{a}\|\neq 0$， 故 $|\lambda-\mu|=0$， 即$\lambda=\mu$.

两向量平行 ⇔ 两向量是确定的数乘关系！

思

设$\vec{a}$ 为已知非零向量，求$\vec{a}^0$.

解

因$\vec{a}^0$为 $\vec{a}$ 的单位向量， 故$\vec{a}^0$与 $\vec{a}$ 平行且同向，

故$\exists \lambda > 0$, 使得$\vec{a}^0 = \lambda\,\vec{a}$ ，

两边取模, 有$1 = \|\vec{a}^0\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\| = \lambda \cdot \|\vec{a}\|$

大小　方向

$\vec{a} = \|\vec{a}\|\vec{a}^0$

又因$\vec{a}$为非零向量, $\|\vec{a}\| > 0$, 解得$\lambda = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}$.

故有$\vec{a}^0 = \lambda\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$.　　或者$\vec{a} = \|\vec{a}\|\vec{a}^0$.

例 已知三个非零向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$中任意两个向量都不平行，但$\vec{a}+\vec{b}$平行于$\vec{c}$，$\vec{b}+\vec{c}$平行于$\vec{a}$，求证$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

证

$$\begin{matrix}\vec{a}+\vec{b}\parallel\vec{c} \\ \vec{b}+\vec{c}\parallel\vec{a}\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\exists\lambda\neq 0,\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{c} \\ \exists\mu\neq 0,\vec{b}+\vec{c}=\mu\vec{a}\end{matrix}$$

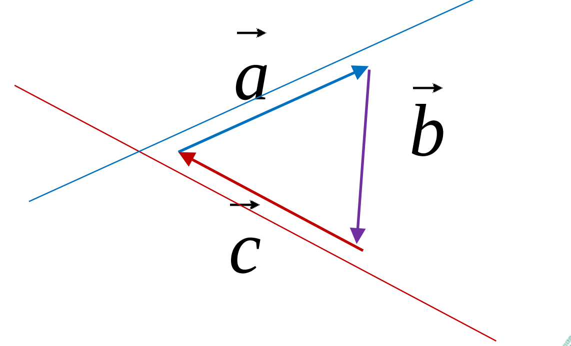
两式相减得:$(1+\mu)\vec{a}=(1+\lambda)\vec{c}$　　两向量有数乘关系？！

$\because$ 任意两个向量都不平行，

$\therefore 1+\mu=1+\lambda=0$，得$\mu=\lambda=-1$.

代入前面两等式得：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

几何上理解



练 设 $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$，$\vec{v}=3\vec{b}-\vec{a}$，求 $\vec{u}-\vec{v}$。

解

$$\vec{u}-\vec{v}=(\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c})-(3\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}-3\vec{b}+\vec{a}$$

$$=2\vec{a}-5\vec{b}+4\vec{c}。$$

例 在平行四边形$ABCD$中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$

试用 $\vec{a}$和$\vec{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.

其中，M是平行四边形对角线的交点.

解 由$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}$

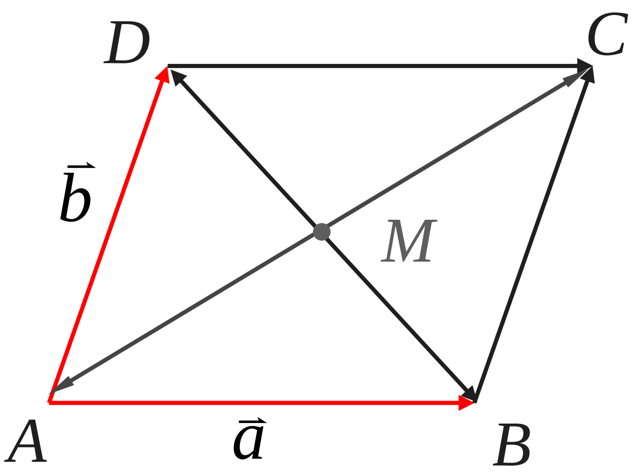
有$\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

又 $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$

有$\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

$$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$



向量间的夹角

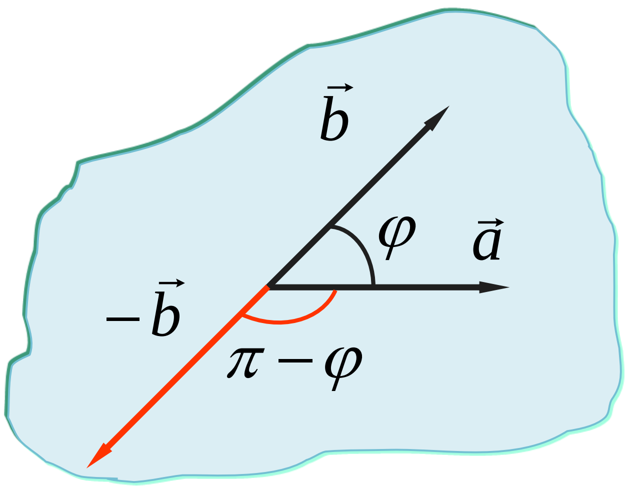
设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是两个非零向量。

平移 $\vec{b}$ 使它的起点与 $\vec{a}$ 的起点重合，此时它们可确定一个平面。在该平面上，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 正向间不超过 π 的夹角称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $<\vec{a},\ \vec{b}>$ 或 α、ϕ 等。

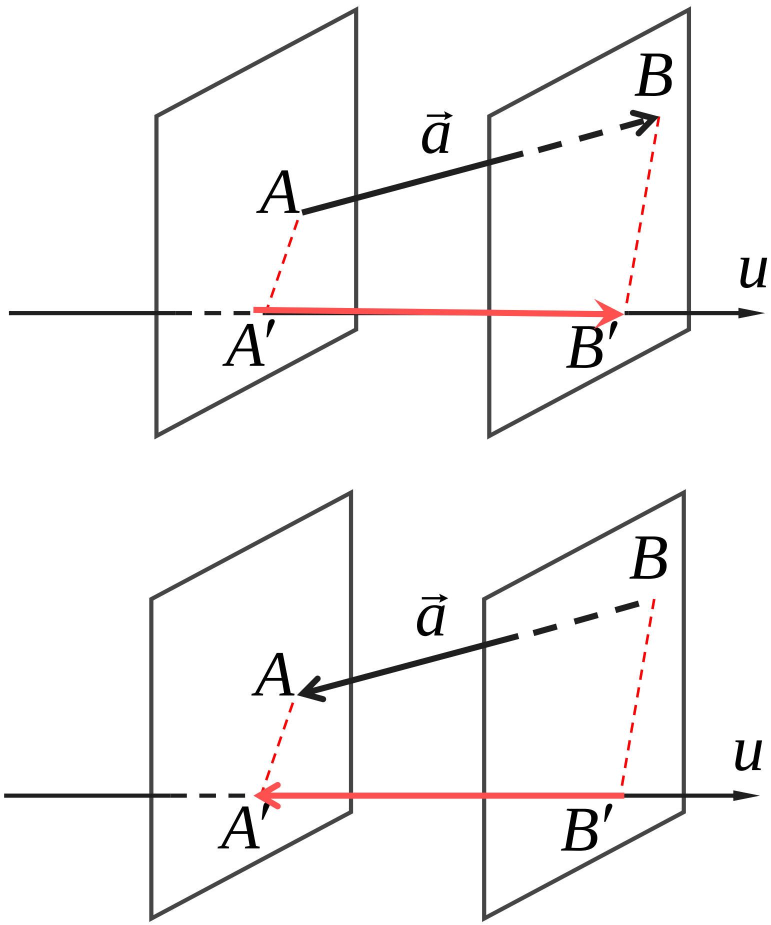
$$0 \le <\vec{a},\ \vec{b}> \le \pi$$

$$<\vec{a},\ \vec{a}> = 0$$

$$<\vec{a},\ -\vec{b}> = \pi - <\vec{a},\ \vec{b}>$$



1.3 向量在轴上的投影



投影与投影向量

轴 u 上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 为

向量 $\vec{a}$ 在轴 u 上的投影向量。

向量 $\vec{a}$ 在轴 u 上的投影:

$$prj_u\vec{a} = \begin{cases} \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{与轴}u\text{同向} \\ -\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{与轴}u\text{反向} \end{cases}$$

prj 是 $project$ 的缩写

$$
prj_u\vec{a}=\begin{cases}\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{与轴}u\text{同向}\\ -\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{与轴}u\text{反向}\end{cases}
$$

注意 区分投影向量和投影：

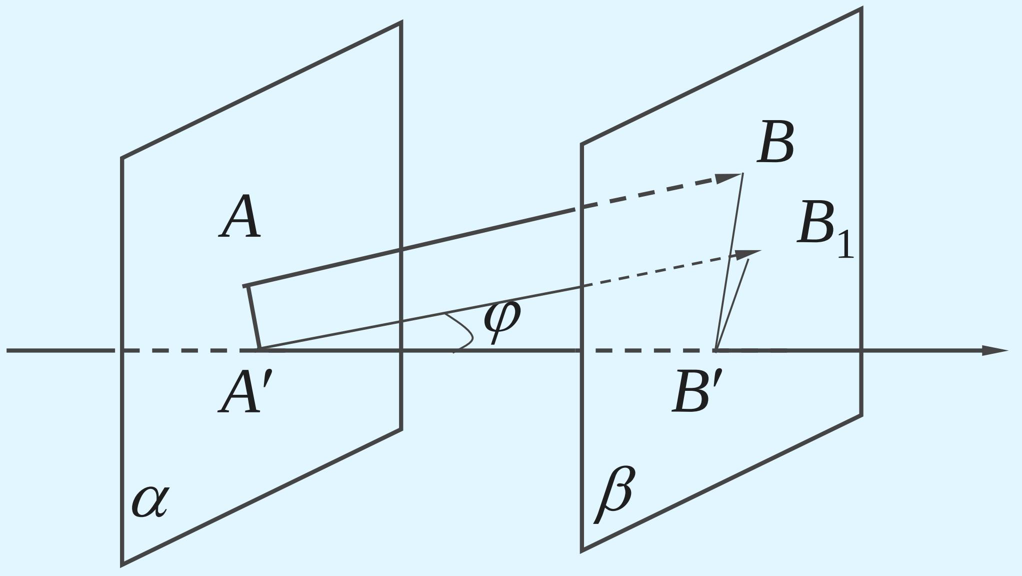
投影向量与轴u平行！可同向，可反向！

投影为标量！可正，可负，可零！

投影性质 1(计算方法)

$$prj_u\vec{a} = \|\vec{a}\|\cos\varphi$$

其中 $\varphi = <\vec{a},\ u>$。

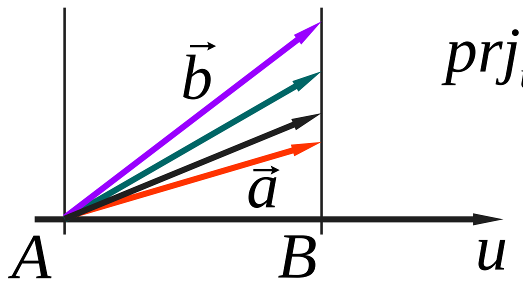


1.3 向量在轴上的投影

投影性质 1 的推论

若 $\vec{a}=\vec{b}$，则 $prj_u\vec{a}=prj_u\vec{b}$。

若 $prj_u\vec{a}=prj_u\vec{b}\Rightarrow\vec{a}=\vec{b}$ ？ **NO!**



$prj_u\vec{a}=\cdots=prj_u\vec{b}$

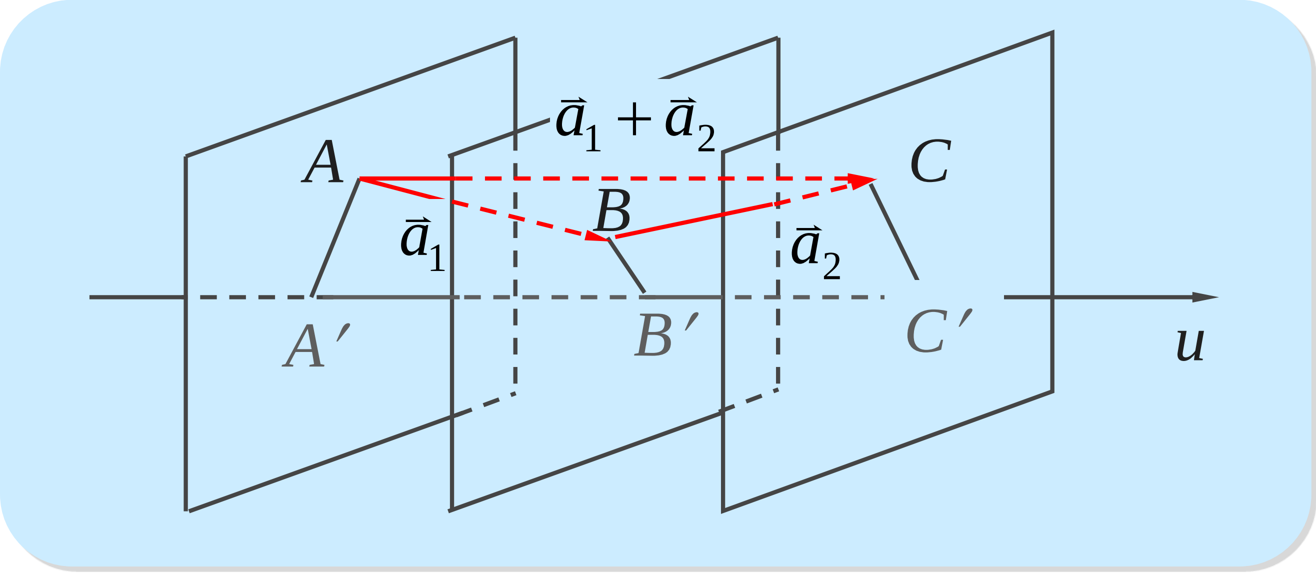
将轴 u 换成向量，则可得到向量间的投影：

$$\boxed{prj_{\vec{b}}\,\vec{a}=\|\vec{a}\|\cos<\vec{a},\vec{b}>。}$$

投影性质 2(求和性质)

$$prj_u \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} prj_u \vec{a}_k .$$

和的投影 = 投影的和



投影定理 3(数乘性质)

$$prj_u \lambda \vec{a} = \lambda\, prj_u \vec{a}.$$

其中λ为实数。

数乘的投影 = 投影的数乘

2.1 空间直角坐标系

2.2 空间两点间的距离

2.3 向量的坐标表示式

2.4 向量的模与方向余弦的坐标表示式

类比

二维平面直角坐标系

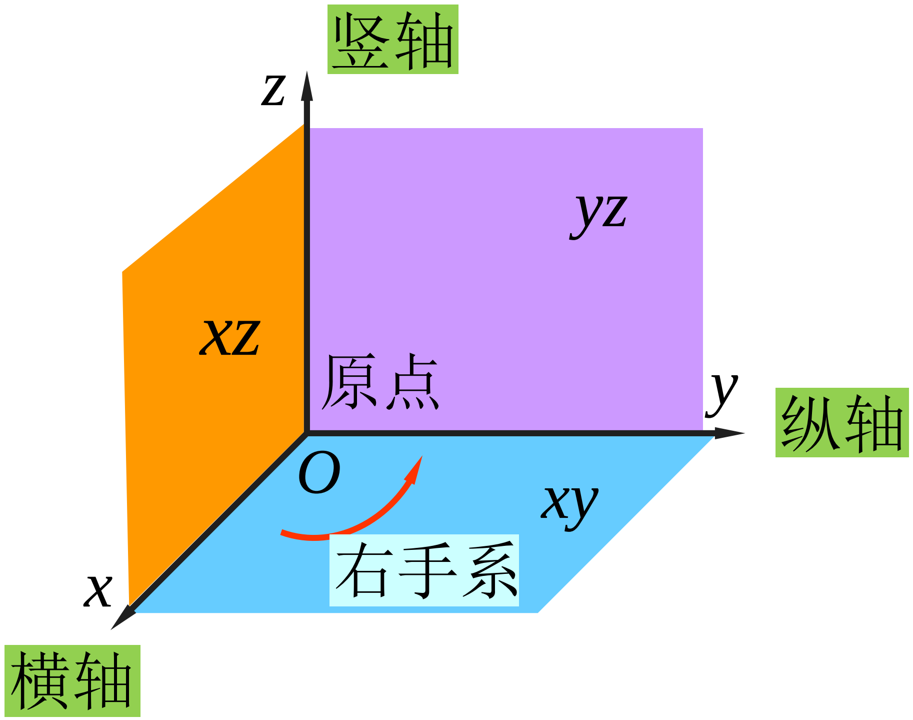
笛卡尔：近代科学的鼻祖

【天才简史-笛卡尔】我们真的存在么？这个世界…

笛卡尔主要数学成就:

1637年发表《几何学》，创立直角坐标系,继而创立了解析几何学.

- 数形结合
- 运动观点
- 变量数学
- 函数概念
- 微积分基础



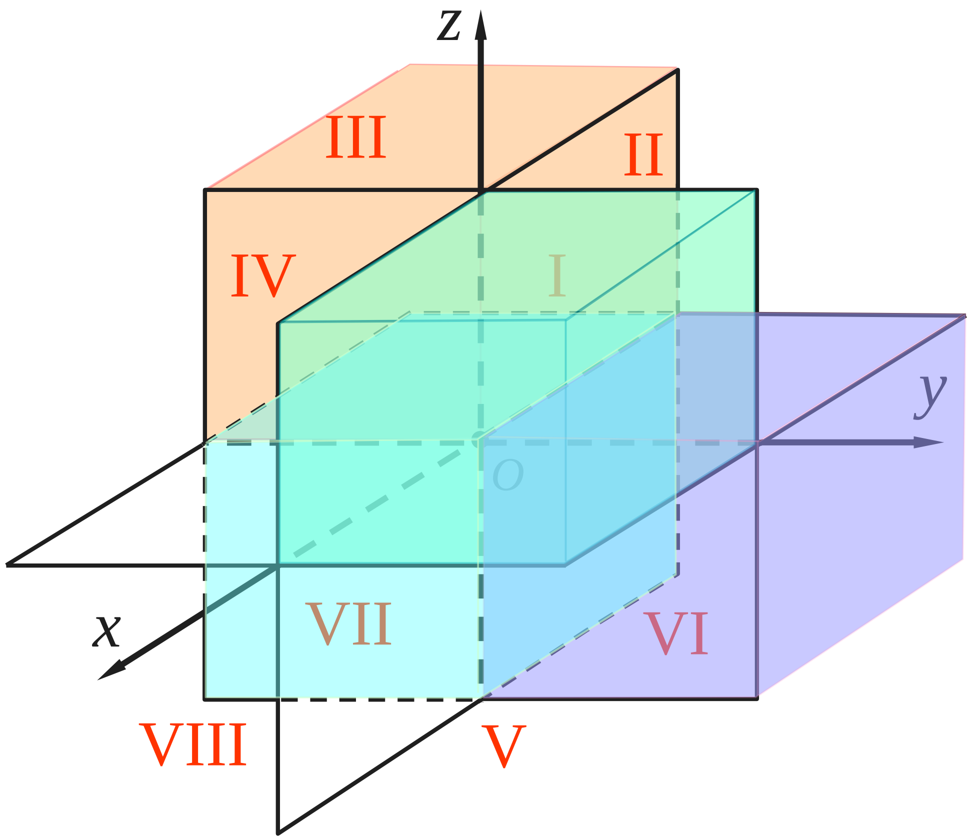
三个坐标轴
三个坐标面
八个卦限

三根数轴两两相互垂直相交于一点O,长度单位相同,右手系。

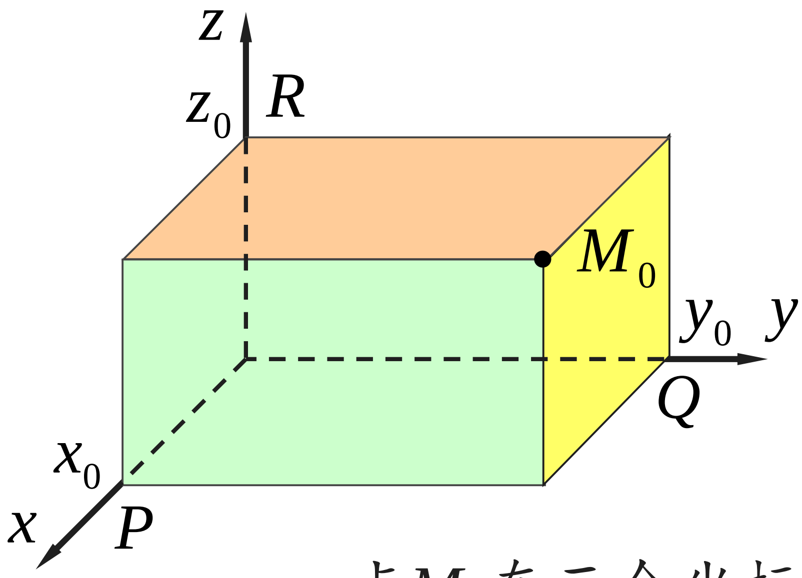
三根坐标轴:x轴(横轴)、y轴(纵轴)、z轴(竖轴)。

三个坐标面:xy平面、yz平面、xz平面。

三个坐标面分空间 R^3 为 8 个卦限



2.1 空间直角坐标系



点M_0在三个坐标轴上的**投影**点分别为P,Q,R

x—横坐标
y—纵坐标
z—竖坐标

点 M_0 的坐标为 x_0、y_0、z_0，记为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$。

$$\boxed{M_0 \longleftrightarrow (x_0, y_0, z_0)}$$

坐标轴，坐标面上的点的坐标特点：

点$(x, y, 0)$ 位于 xy 平面上

点$(0, y, z)$ 位于 yz 平面上

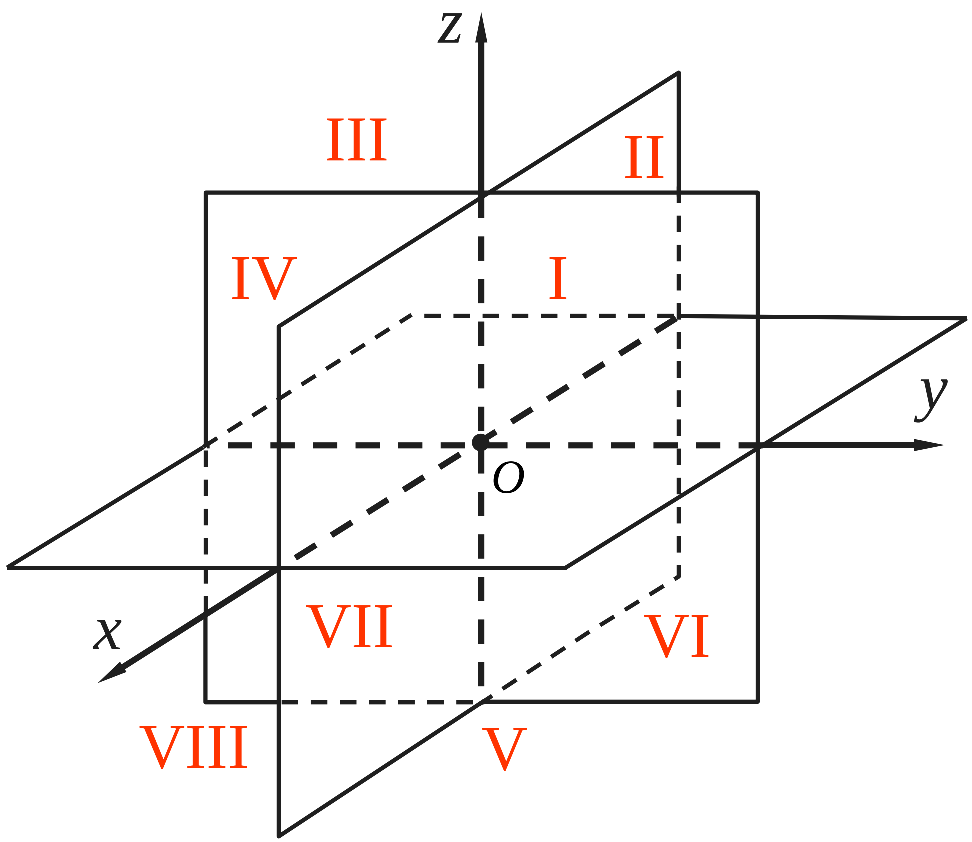
点$(x, 0, z)$ 位于 xz 平面上

点$(x, 0, 0)$ 位于 x 轴上

点$(0, y, 0)$ 位于 y 轴上

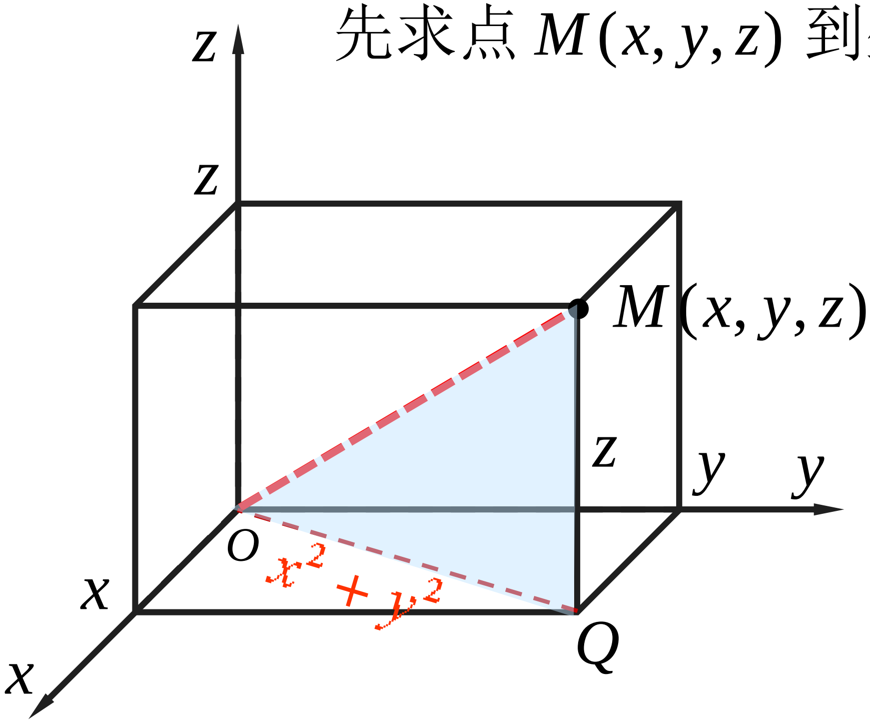
点$(0, 0, z)$ 位于 z 轴上

$(0, 0, 0)$ 为坐标原点



八个卦限上点的坐标特点：

卦限	x	y	z
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	−	+	+
Ⅲ	−	−	+
Ⅳ	+	−	+
Ⅴ	+	+	−
Ⅵ	−	+	−
Ⅶ	−	−	−
Ⅷ	+	−	−



先求点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点的距离 $\mathrm{d}(M,O)$：

$$\|\overline{OM}\|^2=\|\overline{OQ}\|^2+\|\overline{QM}\|^2$$

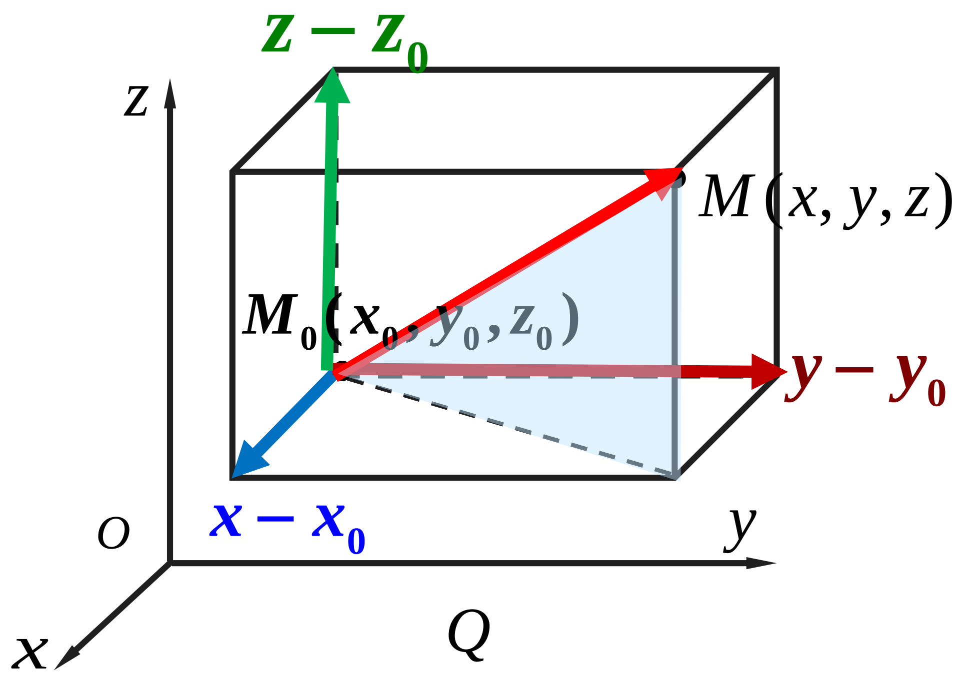
$$=(x^2+y^2)+z^2$$

$$=x^2+y^2+z^2$$

点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点的距离 $\mathrm{d}(M,O)$：

$$\mathrm{d}(M,O)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

2.2 空间两点间的距离



空间 R^3 中，点 $M(x,y,z)$ 与点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 间的距离：

$$d(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\text{。}$$

例 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解 设该点为 $M(0, 0, z)$

由题设 $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$

即: $$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

解得: $z=\dfrac{14}{9}$

所求点为 $M\left(0, 0, \dfrac{14}{9}\right)$.

练 在空间 R^3 中，求点 $P(4,\ 0,\ 3)$ 到坐标原点及点 $Q(0,\ 3,\ -9)$ 的距离。

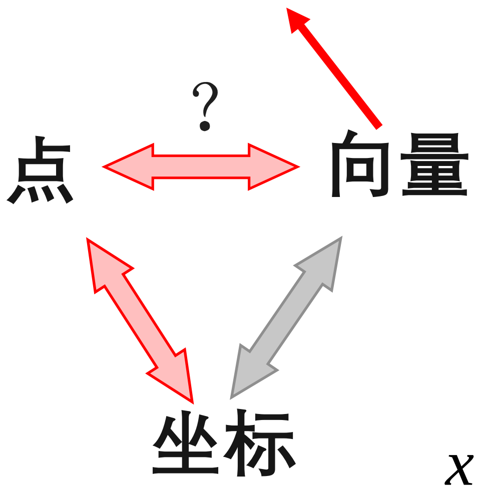
解 $$\mathrm{d}(P,O)=\sqrt{4^2+0^2+3^2}=5\text{。}$$

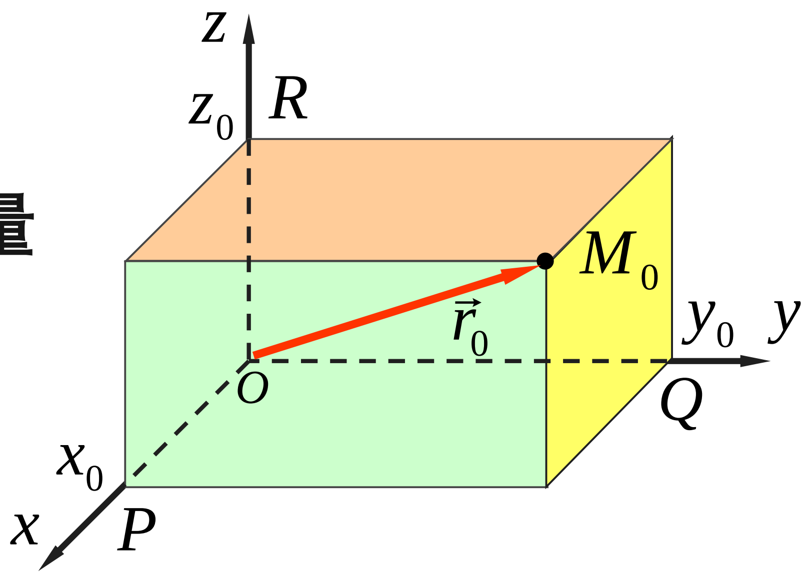
$$\mathrm{d}(P,Q)=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2+(3-(-9))^2}=13\text{。}$$

以向量为工具

研究点线面

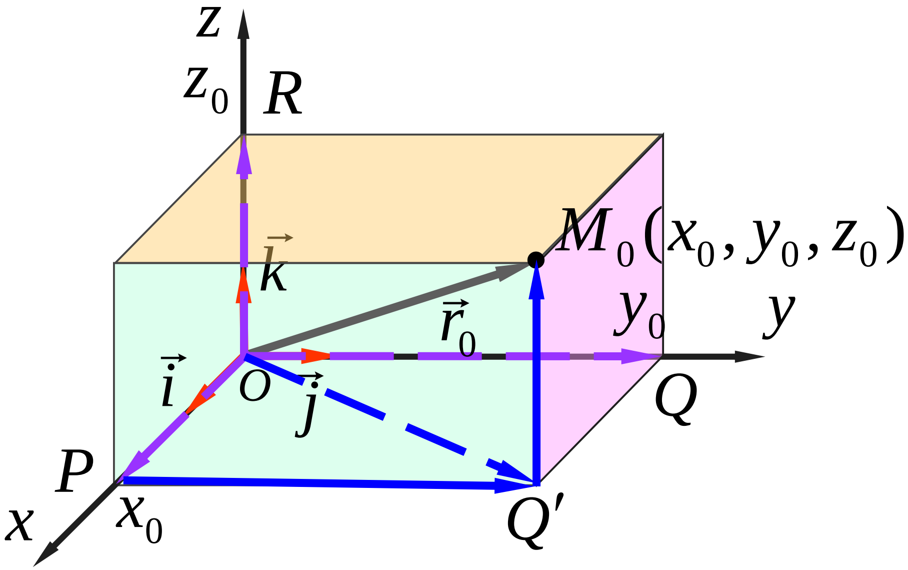
点的向径





点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 对应的向径为 $\overrightarrow{OM_0}$，记为 $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$ 。

2.3 向量的坐标表示式



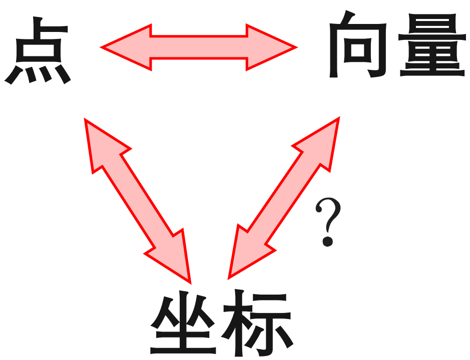
引入三个**基本单位向量**

$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$; $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$。

$$\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{Q'M_0}$$

$$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{Q'M_0}$$

$$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$



$$\overrightarrow{OP} = x_0 \vec{i},$$

$$\overrightarrow{OQ} = y_0 \vec{j},$$

$$\overrightarrow{OR} = z_0 \vec{k},$$

$$\overrightarrow{OM_0} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}。$$

空间 R^3 中，点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 所对应的向径为

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_0 = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}\,,}$$ （分量形式）

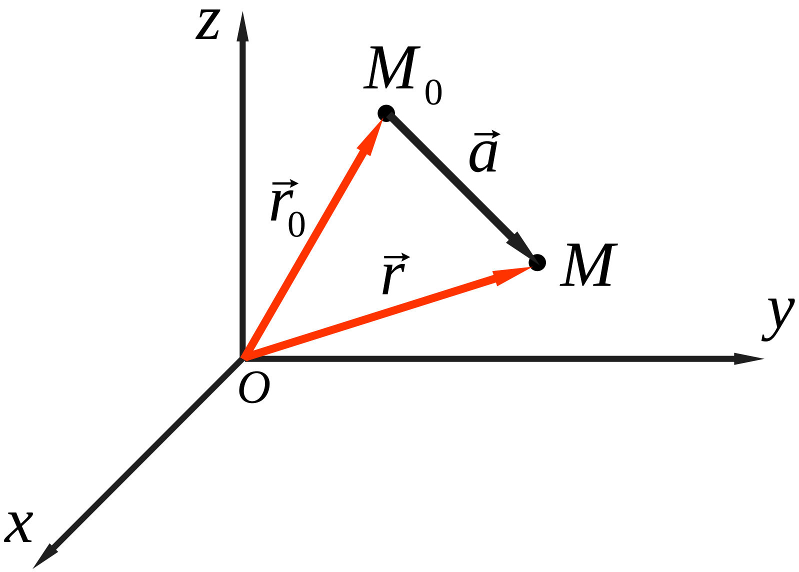
或表示为

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_0 = (x_0\,, y_0\,, z_0\,)\text{。}}$$ （坐标形式）

记 $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{r}_0$，则

$$\overrightarrow{OM}_0 = prj_{ox}\vec{r}_0\,\vec{i} + prj_{oy}\vec{r}_0\,\vec{j} + prj_{oz}\vec{r}_0\,\vec{k}\text{。}$$

起点不在原点的向量，其坐标如何表示?



设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$ 为R^3中任意两点，其对应的向径分别为 $\vec{r}_0$ 和 $\vec{r}$。记 $\vec{a}=\overrightarrow{M_0M}$，则

$$\vec{a}=\vec{r}-\vec{r}_0\text{。}$$

由投影定理

$$\vec{a}=prj_{ox}\vec{a}\ \vec{i}+prj_{oy}\vec{a}\ \vec{j}+prj_{oz}\vec{a}\ \vec{k}$$

$$=prj_{ox}(\vec{r}-\vec{r}_0)\ \vec{i}+prj_{oy}(\vec{r}-\vec{r}_0)\ \vec{j}+prj_{oz}(\vec{r}-\vec{r}_0)\ \vec{k}$$

$$=(prj_{ox}\vec{r}-prj_{ox}\vec{r}_0)\ \vec{i}+(prj_{oy}\vec{r}-prj_{oy}\vec{r}_0)\ \vec{j}+(prj_{oz}\vec{r}-prj_{oz}\vec{r}_0)\ \vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}\text{。}}$$

2.3 向量的坐标表示式

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\,\vec{i}+(y-y_0)\,\vec{j}+(z-z_0)\,\vec{k}$$ 。(分量形式)

记为 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0\ ,\ y-y_0\ ,\ z-z_0)$ 。 (坐标形式)

$$\boxed{\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1),\ \vec{0}=(0,0,0)}$$ 。

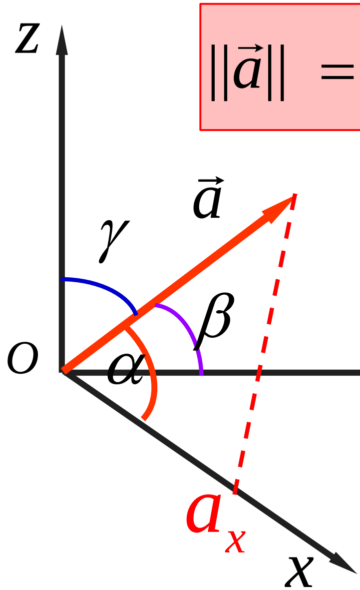
$\forall\,\vec{a}\in R^3$，记 $a_x=prj_{ox}\vec{a},\ a_y=prj_{oy}\vec{a},\ a_z=prj_{oz}\vec{a}$，则

$$\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}$$ 。 (分量形式)

$$\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$$ 。 (坐标形式)

2.4 向量的模与方向余弦的坐标表示式

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



设 R^3 中的非零向量

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

与坐标轴 ox, oy, oz 正向间的夹角依次为 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$，则由投影定理，得 $a_x = prj_{ox}\vec{a} = \|\vec{a}\|\cos\alpha$，

$a_y = prj_{oy}\vec{a} = \|\vec{a}\|\cos\beta$， $a_z = prj_{oz}\vec{a} = \|\vec{a}\|\cos\gamma$， 故有

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\|\vec{a}\|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{\|\vec{a}\|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{\|\vec{a}\|}。$$

称 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 为 $\vec{a}$ 的方向角；$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ 为 $\vec{a}$ 的方向余弦。

显然， $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$。

在坐标系中，
向量的大小由向量的模决定！
向量的方向由方向余弦决定！

$$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{a}=\ \|\vec{a}\|\ \vec{a}^0$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \qquad \vec{a}^0=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)。$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\|\vec{a}\|},\qquad \cos\beta=\frac{a_y}{\|\vec{a}\|},\qquad \cos\gamma=\frac{a_z}{\|\vec{a}\|}。$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

例 求方向角 $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\ \beta=\dfrac{\pi}{4},\ \gamma=\dfrac{\pi}{3}$, 模等于 6 的向量 $\vec{a}$。

解

$$\vec{a}^{\,0}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

$$=(\cos\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{\pi}{3})$$

$$=(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}),$$

$$\vec{a}=\|\vec{a}\|\,\vec{a}^{\,0}=6\,\vec{a}^{\,0}$$

$$=6\,(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2})=(3,\ 3\sqrt{2},\ 3)。$$

2.4 向量的模与方向余弦的坐标表示式

总结：

加减，数乘，相等，平行的坐标形式

设 $\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$,

$\vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, λ, β 为实数,

则 $$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z);$$

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$$

$$=(a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z);$$

$$\vec{a}=\vec{b}\iff a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z;$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}=\lambda\vec{b}\iff\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}。$$

例 设 $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=4\vec{i}+3\vec{j}-16\vec{k}$,

求 $\vec{m}=4\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ 的坐标表示式、在x轴上的投影、在y轴上的分量、方向余弦。

解
$$\vec{m}=4(2\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k})+(2\vec{j}+4\vec{k})-(4\vec{i}+3\vec{j}-16\vec{k})$$
$$=(4\times2-4)\vec{i}+(4+2-3)\vec{j}+(4\times(-5)+4-(-16))\vec{k}$$
$$=4\vec{i}+3\vec{j}\text{。}$$

$\vec{m}$ 的坐标形式：$\vec{m}=(4,\ 3,\ 0)$。

$\vec{m}$ 在x轴上的投影：$prj_{ox}\vec{m}=4$。

$\vec{m}$ 在y轴上的分量：$3\vec{j}$。

$\vec{m}$ 的方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\gamma=0$。

此时 $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$，
即$\vec{m}$位于xy平面上。

练

已知两个力 $\vec{F}_1=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$， $\vec{F}_2=3\vec{i}-3\vec{j}-8\vec{k}$ 作用于同一点，问要用怎样的力才能与它们平衡？并求平衡力的大小和方向：

解

设两个力的合力为 $\vec{F}$，则

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$$

$$=(1+3)\vec{i}+(1-3)\vec{j}+(3-8)\vec{k}$$

$$=4\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k},$$

故平衡力为 $-\vec{F}$，其大小和方向分别为

$$\|-\vec{F}\| =\sqrt{4^2+2^2+5^2}=\sqrt{45};$$

$$-\vec{F}^0=\frac{-\vec{F}}{\|-\vec{F}\|}=\frac{1}{\sqrt{45}}(4,-2,-5).$$

例 设 $\vec{a}$ 的起点为 $A(-2,\ 3,\ 0)$，$\vec{a}$ 在 x, y, z 轴上的投影依次为 $4,\ -4,\ 7$，求 $\vec{a}$ 的终点 B 以及 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$。

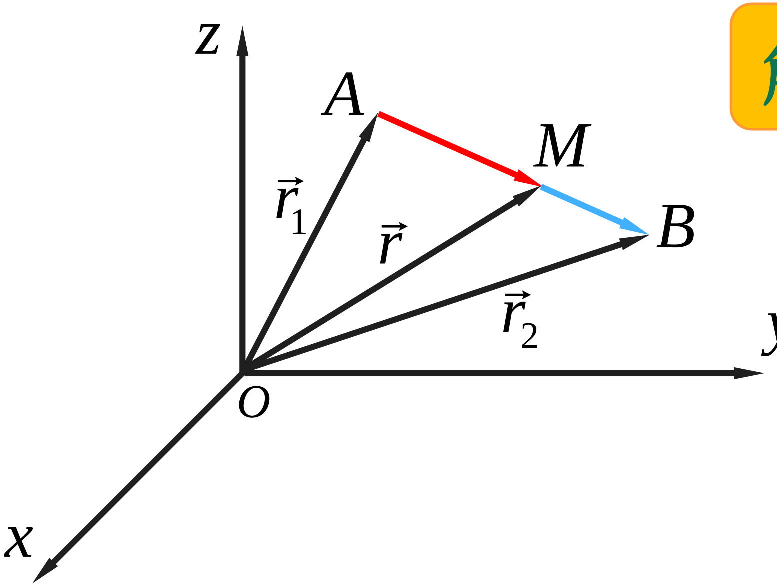
解 设终点为 $B(x,\ y,\ z)$，则 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x+2,\ y-3,\ z)$，

由已知条件，$\vec{a}=(4,\ -4,\ 7)$，故

$$\begin{cases} x+2=4, \\ y-3=-4, \\ z=7, \end{cases} \longrightarrow \quad x=2,\ y=-1,\ z=7。$$

于是，终点为 $B(2,\ -1,\ 7)$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ \frac{7}{2})$。

例 已知点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $B(x_2,y_2,z_2)$，求将线段 $\overline{AB}$ 分成定比 λ（$\lambda \neq -1$）的分点 $M(x,y,z)$。



解 引入向量如图所示。依题意,

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{MB},$$

而 $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$， $\overrightarrow{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$，

故 $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$，

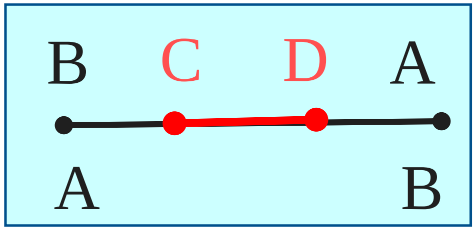
即 $\vec{r} = \dfrac{\vec{r}_1 + \lambda\, \vec{r}_2}{1+\lambda}$。

由向量相等及向量运算, 得分点 M 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1+\lambda},\quad z = \frac{z_1 + \lambda\, z_2}{1+\lambda}。$$

练

已知线段AB被$C(2,0,2)$和$D(5,-2,0)$三等分，求A和B的坐标.



解

设点$A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$

由定比分点公式及三等分条件有：

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB} \qquad \text{或者} \ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$$

$$\begin{aligned} 2-x_1&=5-2=x_2-5 \\ 0-y_1&=-2-0=y_2-(-2) \\ 2-z_1&=0-2=z_2-0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2-x_2&=5-2=x_1-5 \\ 0-y_2&=-2-0=y_1-(-2) \\ 2-z_2&=0-2=z_1-0 \end{aligned}$$

解得$A(-1,2,4), B(8,-4,-2)$，或者$B(-1,2,4), A(8,-4,-2)$.

本节小结

重要知识点：

- 向量的模，单位向量，方向角，方向余弦
- 向量的加减法，向量的数乘
- 向量在轴上的投影
- 空间直角坐标系
- 向径：向量的坐标形式和分量形式
- 基本单位向量

重要结论：

- 向量的模、方向余弦及单位向量的坐标表达式
- 两向量平行与两向量数乘关系
- 空间两点的距离公式
- 向量加减法和数乘的坐标表示
- 空间直角坐标系：三轴三面八卦限的点坐标特点
- 定比分点公式