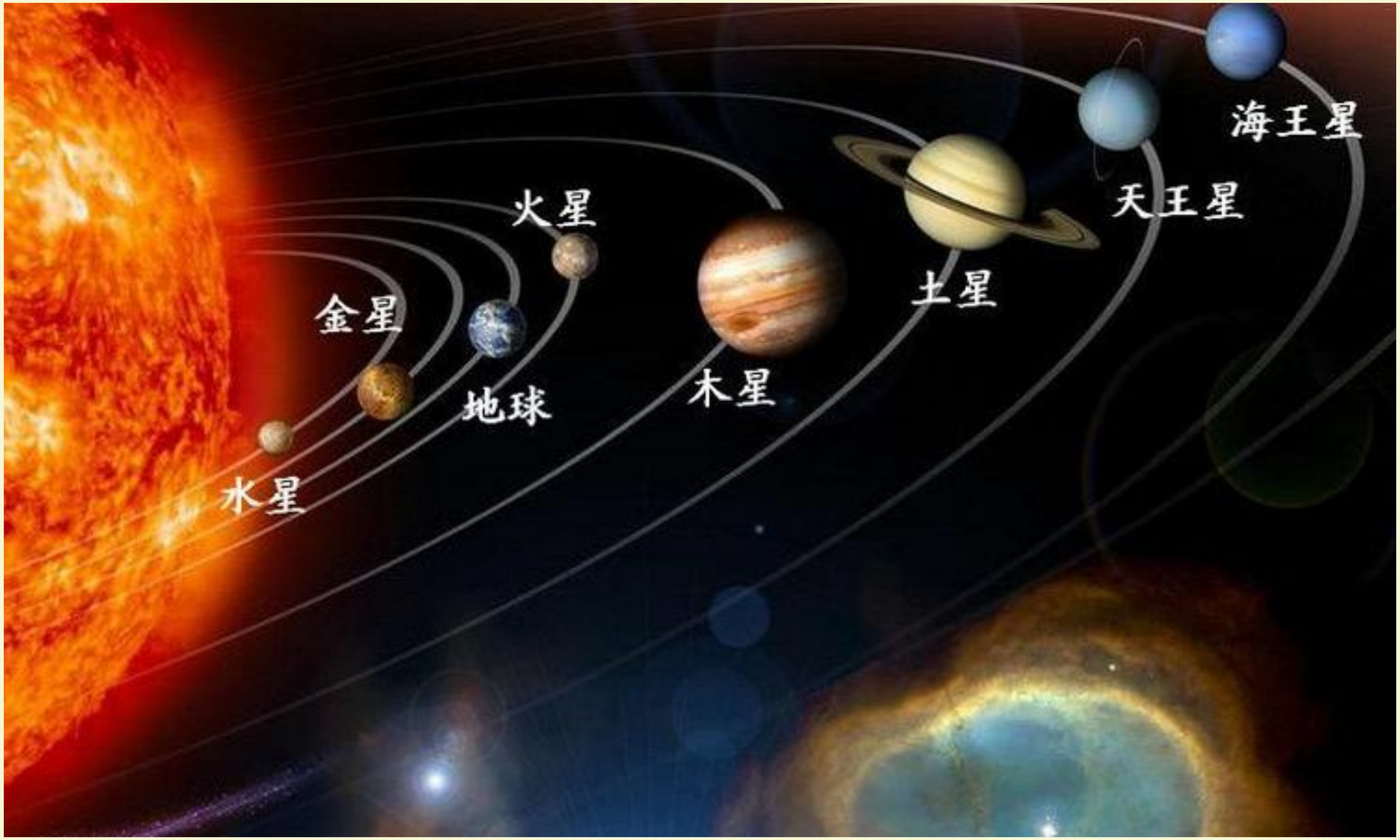
大学物理

蒋英

湖南大学物理与微电子科学学院

第1章 质点运动学



第1章 质点运动学

§1.0 引言

§1.1 质点、参考系、坐标系

§1.2 质点运动的描述—位矢、位移、速度、加速度

§1.3 切向加速度和法向加速度

§1.4 几种常见的质点运动

§1.5 相对运动

质点运动学——引言

给我物质和运动，我可以创造一个宇宙。

——笛卡尔（Descar, 1596-1650，法国数学家、哲学家、物理学家）

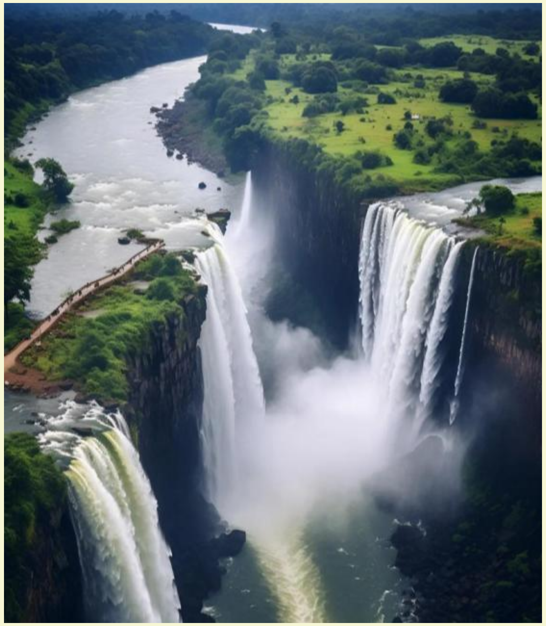
世界是物质的，物质是运动的，而运动是有规律的。

——马克思恩格斯自然辩证哲学

质点运动学——引言

万象纷呈的运动形式

斗转星移



江河水流

机器运转

火箭飞行

质点运动学——引言

机械运动：最普遍、最基本的一种运动形式

物质之间或物体各部分之间**相对位置的变化**

力学：研究机械运动及其规律的学科

- ★ **运动学——描述物体的运动**
- ★ **动力学——研究引起物体运动和运动状态改变的原因**
- ★ **静力学——研究物体在相互作用下的平衡问题**

质点运动学——引言

描述物体的运动面临的挑战

★ 客观物体的多样性 （形状、大小……）

★ 物体运动形式的复杂性 （平动、转动、振动、扭曲……）

解决问题的途径之一——理想化思维法

★ 在一定条件下，建立理想物理模型、理想的物理过程或实验，使主要规律凸显出来，来简化问题的处理

★ 理想的物理模型：质点、刚体、理想气体、点电荷……

★ 理想的物理过程：自由落体、简谐振动……

质点运动学——质点、参考系、坐标系

一、质点

1、质点模型

★自然界的一切客观物体都有大小和形状，其机械运动可能较复杂

★若物体的大小和形状对所研究问题的影响可忽略，可将其看作

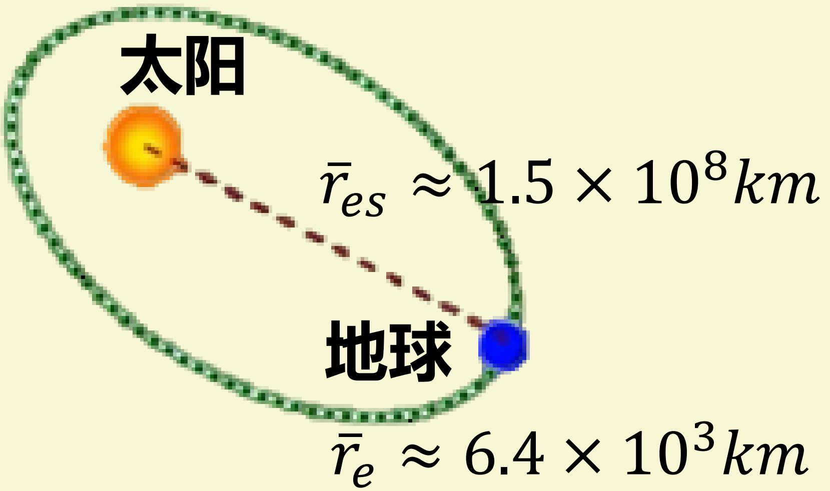
——**一个具有质量但没有大小和形状的几何点——质点**

例：地球的绕日运动

$$\bar{r}_{es} \approx 2.3 \times 10^4\ \bar{r}_e$$

★地球的大小、形状及其变化对地球绕太阳公转的影响可忽略

★地球绕太阳公转可简化为——一个含地球全部质量的质点在绕日转动



质点运动学——质点、参考系、坐标系

2、物体被视为质点的条件或判据

(1) 物体的大小和形状对所研究问题的影响程度可忽略；

★要看所研究问题的性质而非物体的实际大小 (地球公转 *VS* 自转)

(2) 如果物体不转动、不变形，只有平移运动，其上各点运动情况都相同，则物体的整体运动也可用一个质点代替。

3、如何处理不能当作质点的物体的运动?

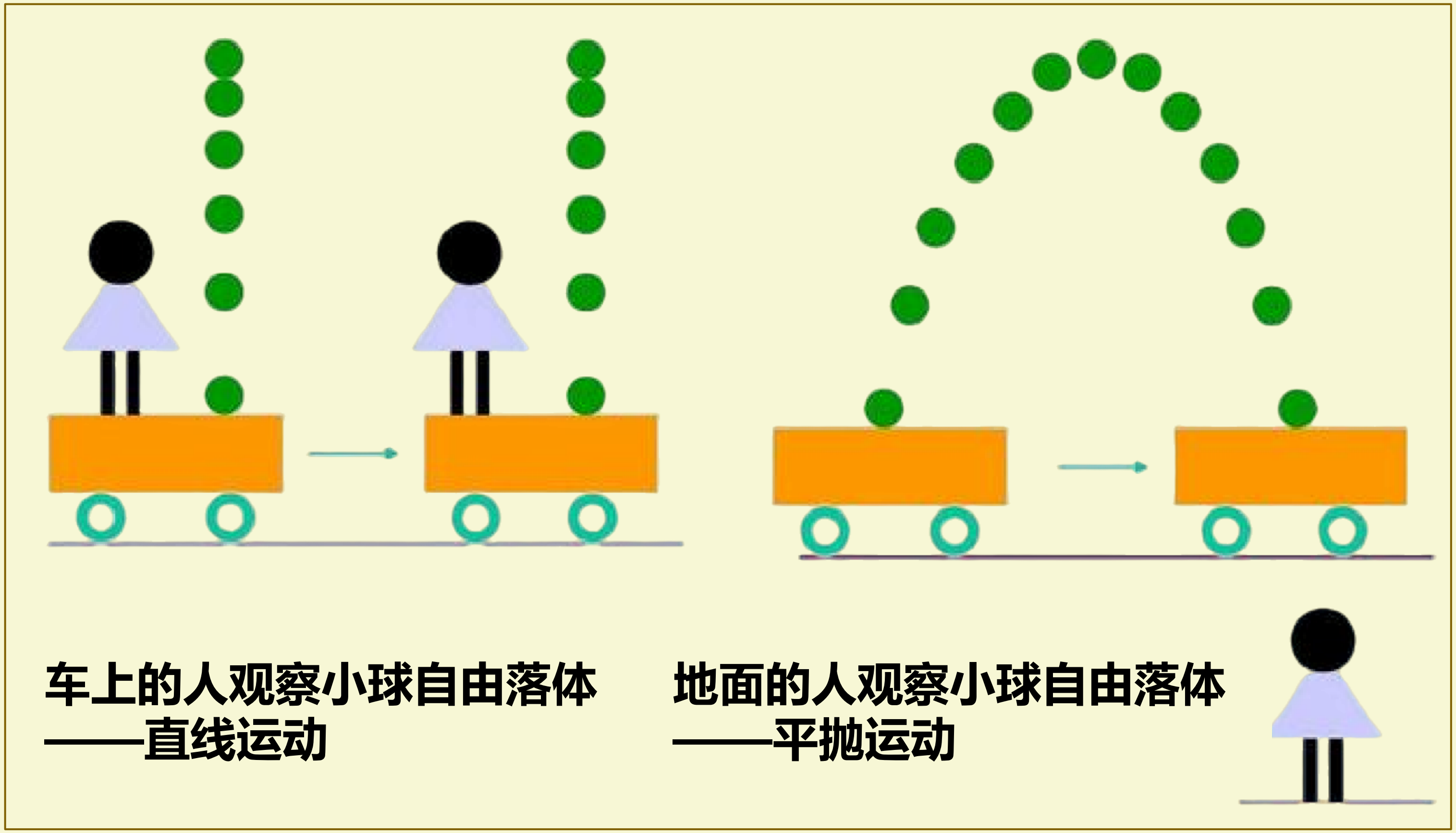
(1) 整个物体看作是由许多质点组成的质点系；

(2) 分析这些质点的运动，便可弄清整个物体的运动情况。

研究质点的运动是研究实际物体复杂运动的基础!

质点运动学——质点、参考系、坐标系

二、参考系与坐标系



车上的人观察小球自由落体
——直线运动

地面的人观察小球自由落体
——平抛运动

运动是绝对的，但运动的描述是相对的

质点运动学——质点、参考系、坐标系

1、参考系

(1) **定义**：在描述物体的运动状态时，必须选定一个物体作为参照，被选作参照的物体叫做参考系（frame of reference）。

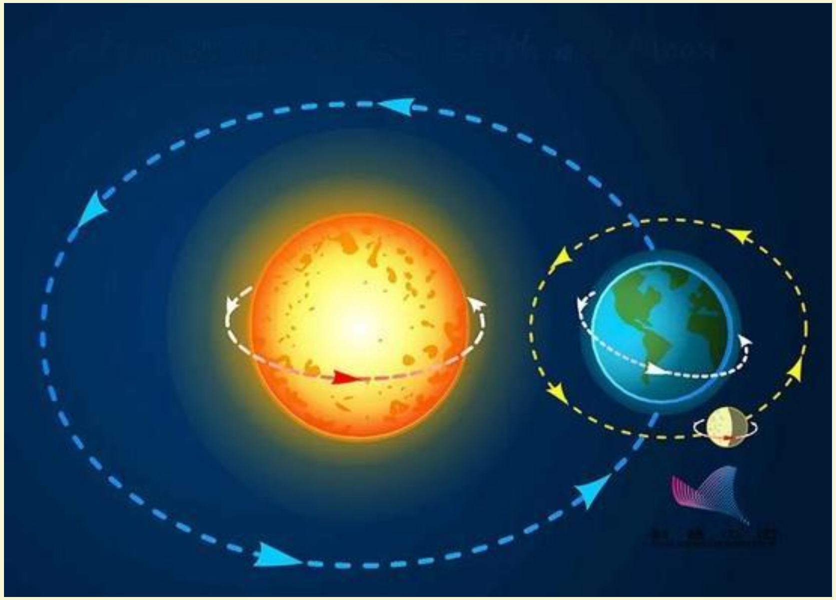
(2) **说明**：参考系的选取具有任意性(视具体问题和研究方便而定)。

★**地球绕太阳公转时——**

宜以太阳为参考系

★**月亮绕地球公转时——**

宜以地球为参考系



(3) 若无指明参考系，则默认以地面为参考系(也称为实验参考系)。

质点运动学——质点、参考系、坐标系

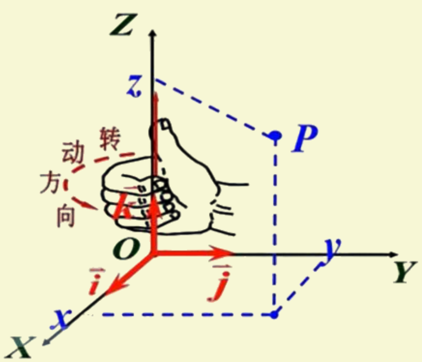
2、坐标系

(1) **坐标系**：定量地对物体的位置及其变化进行描述。

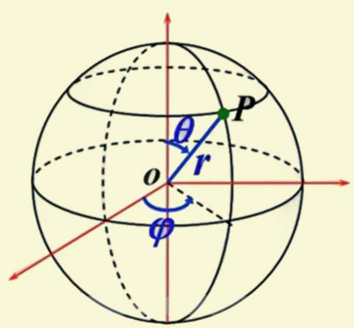
参考系：定性地对物体的运动进行描述

(2) **常用的坐标系**：

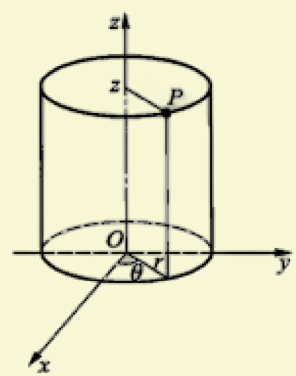
★ 直角坐标系 ★ 球坐标系 ★ 柱坐标系 ★ 平面自然坐标系



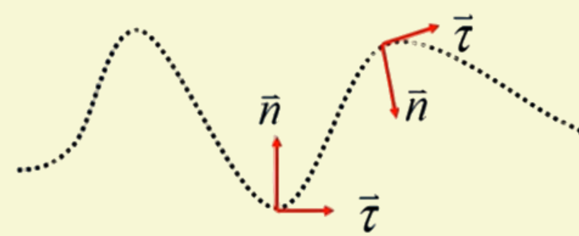
P(x, y, z)



P(r, θ, φ)



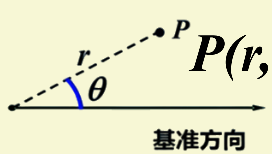
P(r, θ, z)



切向单位矢量：$\bar{\tau}$

法向单位矢量：$\bar{n}$

★ 极坐标系



P(r, θ)

★ 四维坐标系

物体的运动不能脱离空间

物体的运动也不能脱离时间

质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

描述质点运动的四个物理量：位置矢量、位移、速度、加速度

质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

一、位置矢量

1、位置矢量（位矢, position vector）

(1) 定义：设质点在t时刻运动到P点，则从参考点O点指向P点的有向线段 $\overrightarrow{OP}$ (用 $\vec{r}$ 表示)被定义为质点在该时刻的**位置矢量**，简称**位矢**。

(2) 说明：

★位矢是矢量 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

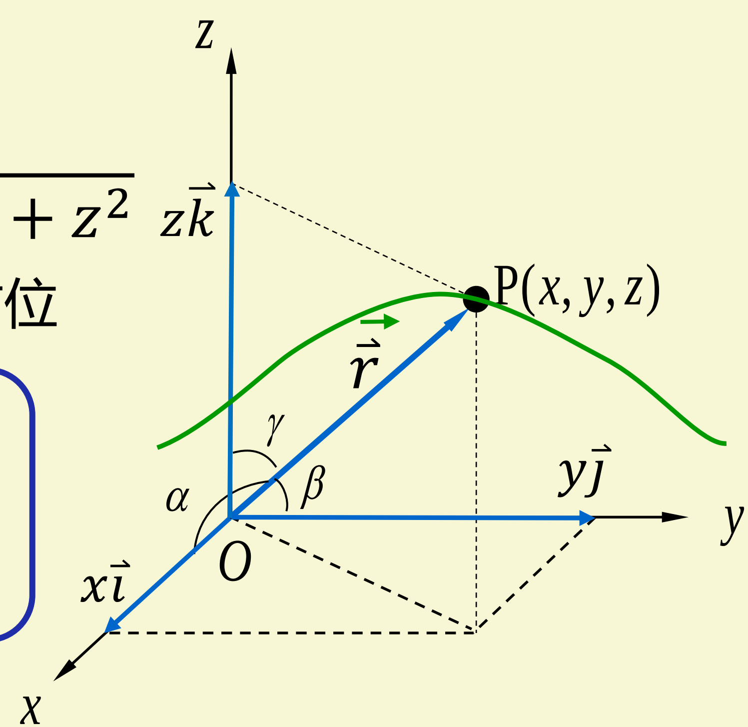
大小：P点到O点的距离 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

方向：从O点指向P点—质点在坐标系中的空间方位

方向可由方向余弦确定

$$\cos\alpha = x/r, \cos\beta = y/r, \cos\gamma = z/r.$$

$$cos\alpha^2 + cos\beta^2 + cos\gamma^2 = 1$$



直角坐标系

★位矢具有瞬时性、相对性(参考点可变)

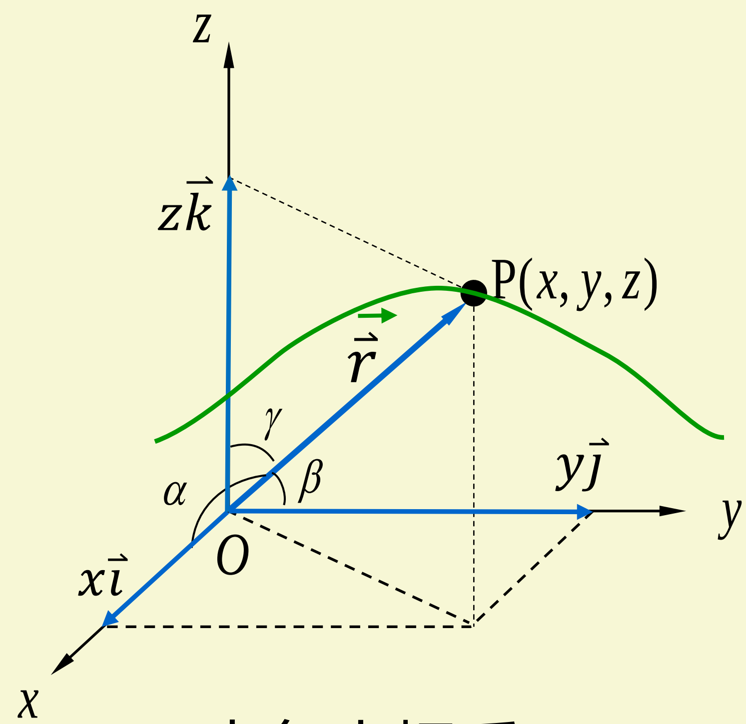
质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

2、运动方程（equation of motion）

质点运动时，它相对于O点的位矢是随时间变化的：$\vec{r}=\vec{r}(t)$
——质点的运动方程

矢量形式： $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

参数形式： $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$



直角坐标系

3、 轨道方程（trajectory）

从运动方程消去时间 t 得到轨道方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\xrightarrow{\text{消去t}} f(x,y,z)=0$$

质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

二、位移

1、位移矢量（displacement vector）

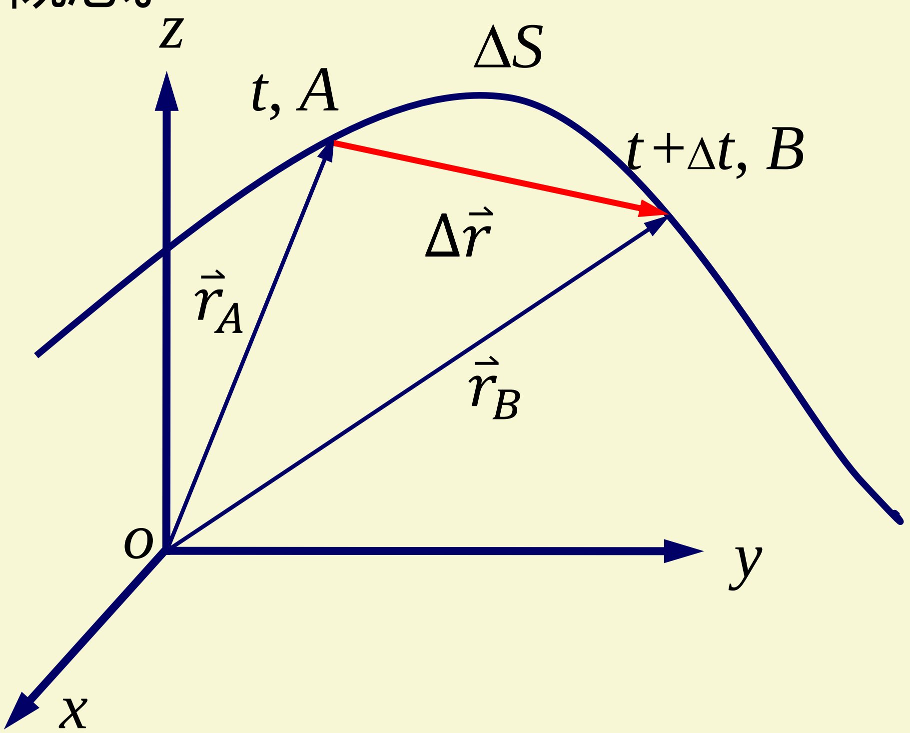
当质点在空间运动时，位置随时间变化，为了描述质点位置变化的大小和方向，引入**位移(矢量)**的概念。

t 时刻： $\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$

$t+\Delta t$ 时刻： $\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{r}_B - \vec{r}_A\\ &|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A|\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}\\ &|\Delta\vec{r}| = \sqrt[2]{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\end{aligned}}$$



$[\Delta x = x_B - x_A;\ \Delta y = y_B - y_A;\ \Delta z = z_B - z_A]$

质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

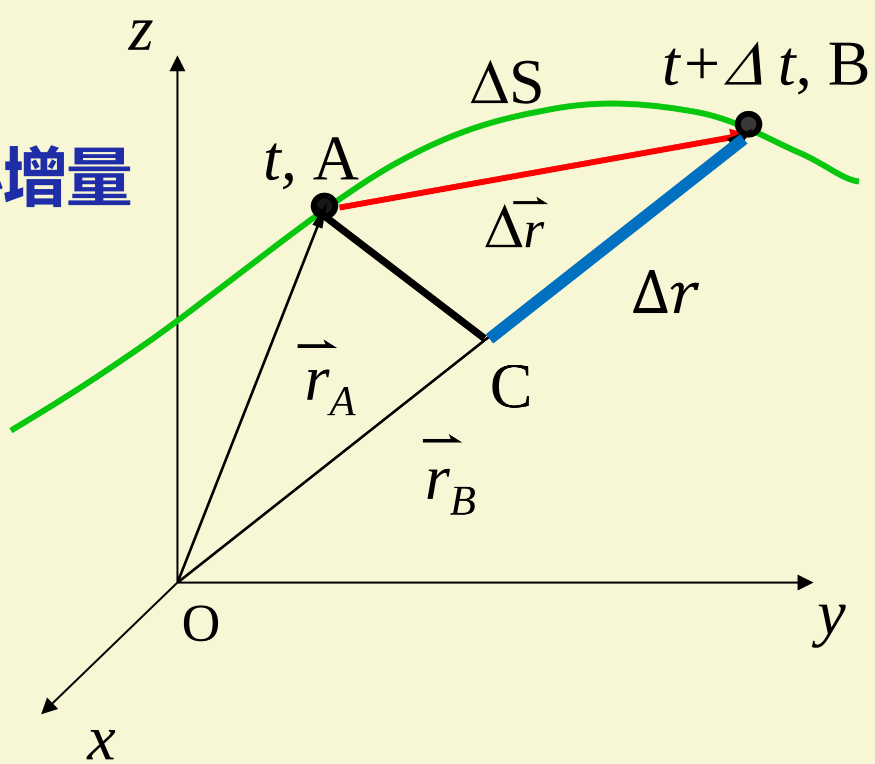
2、位移大小与位矢大小增量

位移大小 $|\Delta\vec{r}| \stackrel{?}{=} \Delta r$ **位矢大小增量**

$$|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A|$$

$$\Delta r = |\vec{r}_B| - |\vec{r}_A|$$

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r$$



$$|\Delta\vec{r}| = \left|(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}\right|$$
$$= \sqrt[2]{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\Delta r = \left|x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}\right| - \left|x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}\right|$$
$$= \sqrt[2]{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} - \sqrt[2]{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

3、位移与路程

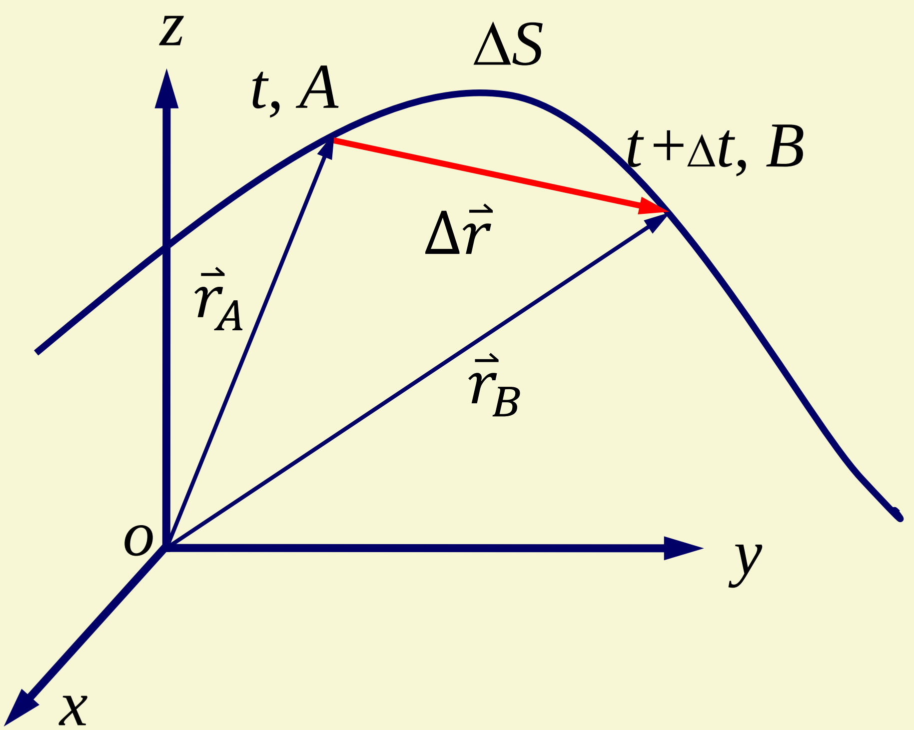
★位移：表示质点位置矢量的改变量（矢量）

★路程：表示质点运动轨迹的长度（标量）

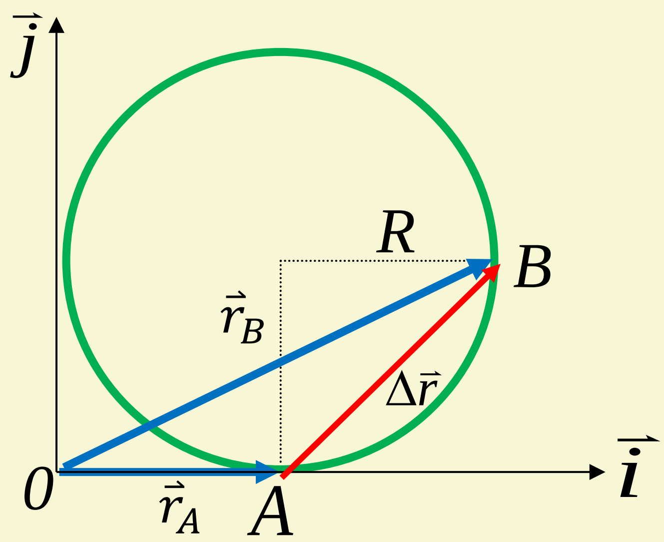
路程：$\Delta S = \overset{\frown}{AB}$

通常：$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta S$

极 限：$|d\vec{r}| = dS \; (\Delta t \rightarrow 0)$



例1.1: 求质点从A点顺时针沿圆周运动到B点时，质点处于始末位置时的位矢、质点的位移、以及质点的运动路程。



位矢：$\vec{r}_A = R\vec{i}$

$\vec{r}_B = 2R\vec{i} + R\vec{j}$

位移：$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = R\vec{i} + R\vec{j}$

路程：$S = \dfrac{3}{4} \times 2\pi R = \dfrac{3}{2}\pi R$

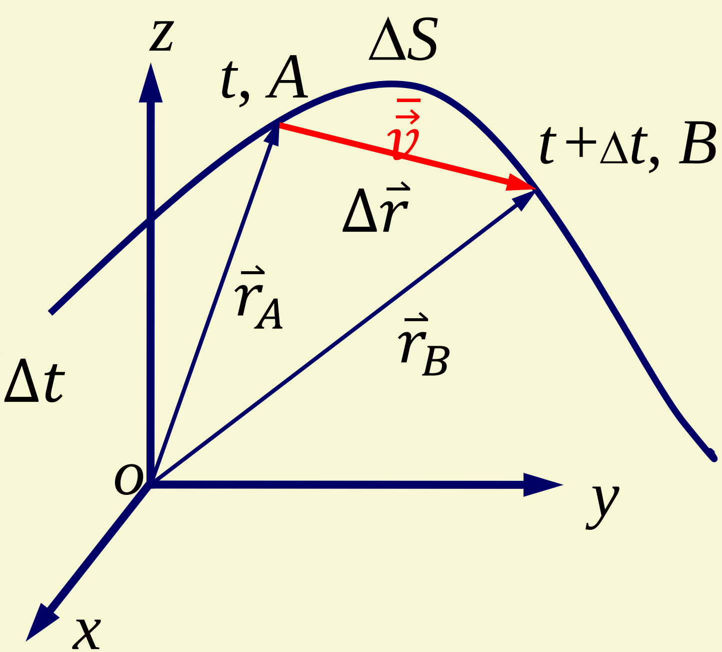
思考: 若坐标原点取在圆心，则位矢和位移的描述有无变化?

质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

三、速度

1、平均速度（average velocity）

定义：设质点在一段时间Δt内发生了位移$\Delta\vec{r}$，位移$\Delta\vec{r}$与时间Δt的比——质点在该时间内的**平均速度（矢量）**。



$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

★大小：$|\bar{\vec{v}}| = |\Delta\vec{r}/\Delta t| = |\Delta\vec{r}|/\Delta t$

★方向：与位移$\Delta\vec{r}$相同

2、平均速率：质点在一段时间内走过的路程ΔS与时间Δt的比值

$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \neq \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

★平均速度（矢量）≠ 平均速率（标量）

★ 平均速度大小 ≠ 平均速率大小

质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

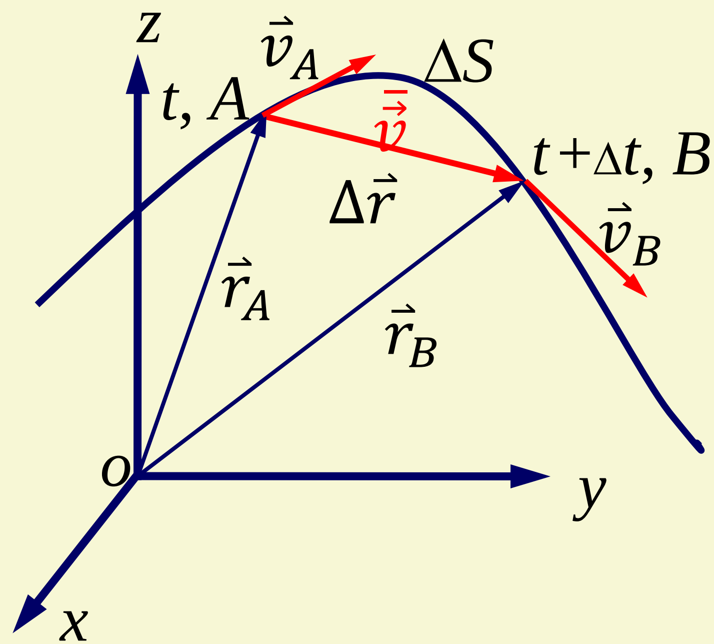
3、瞬时速度（instantaneous velocity）

定义：当$\Delta t \to 0$时，平均速度的极限值称为**瞬时速度（简称速度）**。

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$ 速度是位矢对时间的导数

★大小：$|\vec{v}| = |d\vec{r}/dt| = |d\vec{r}|/\Delta t$

★方向：曲线所在点切线方向



4、瞬时速率（简称速率）：当$\Delta t \to 0$时，平均速率的极限值

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t} = |\vec{v}|$$

$\Delta t \to 0$：$dS = |d\vec{r}|$

★速度(矢量)≠ 速率（标量）

★速度大小= 速率大小

质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

5、速度在直角坐标系中的表述形式

位矢： $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

速度： $$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$v_x = \frac{d\,x}{d\,t},\quad v_y = \frac{d\,y}{d\,t},\quad v_z = \frac{d\,z}{d\,t}$$

速度的矢量形式： $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

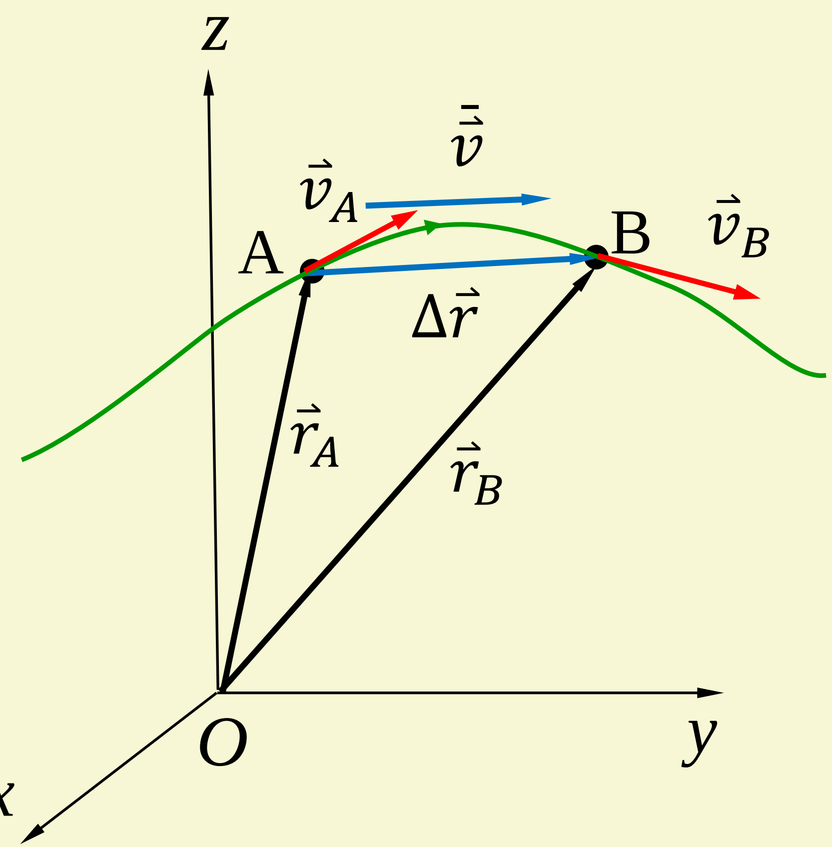
速度的大小： $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

6、概念辨析

(1) Δs与$\Delta\vec{r}$的区别与联系

(2) ds与$|\mathrm{d}\vec{r}|$的区别与联系

(3) v与$|\vec{v}|$的区别与联系



质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

四、加速度：描述速度的变化情况

★质点在Δt 内速度的增量：$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

★质点在Δt 内**平均加速度**

(average acceleration)

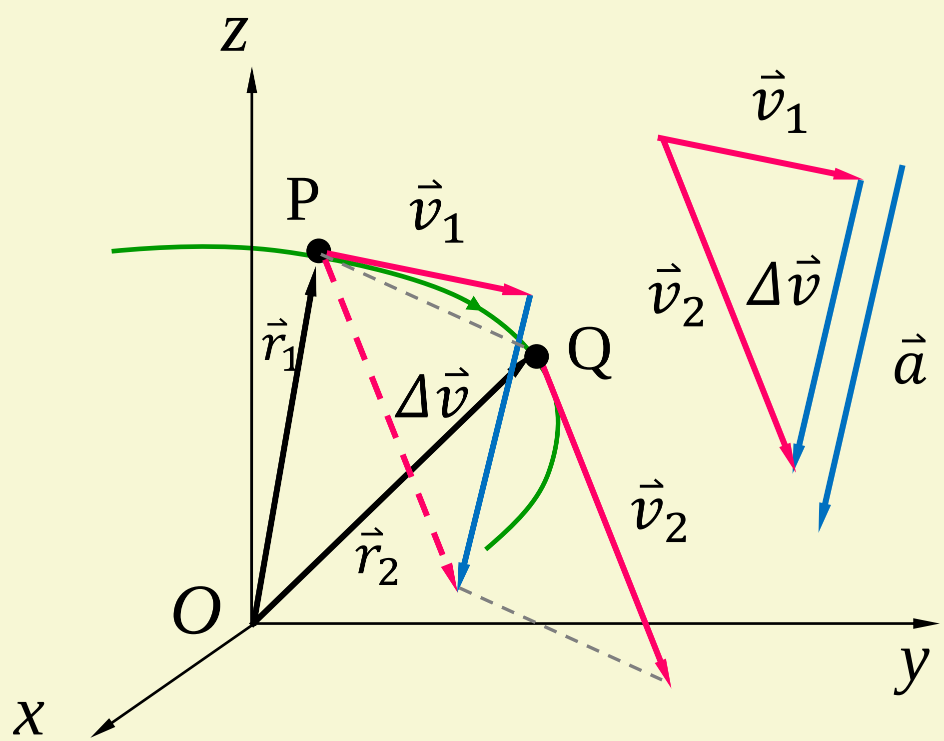
$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\bar{\vec{v}}}{\Delta t}$$

★质点在Δt 内**瞬时加速度**

(instantaneous acceleration)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{d\,t} = \frac{d^2\vec{r}}{d\,t^2}$$

一般曲线运动

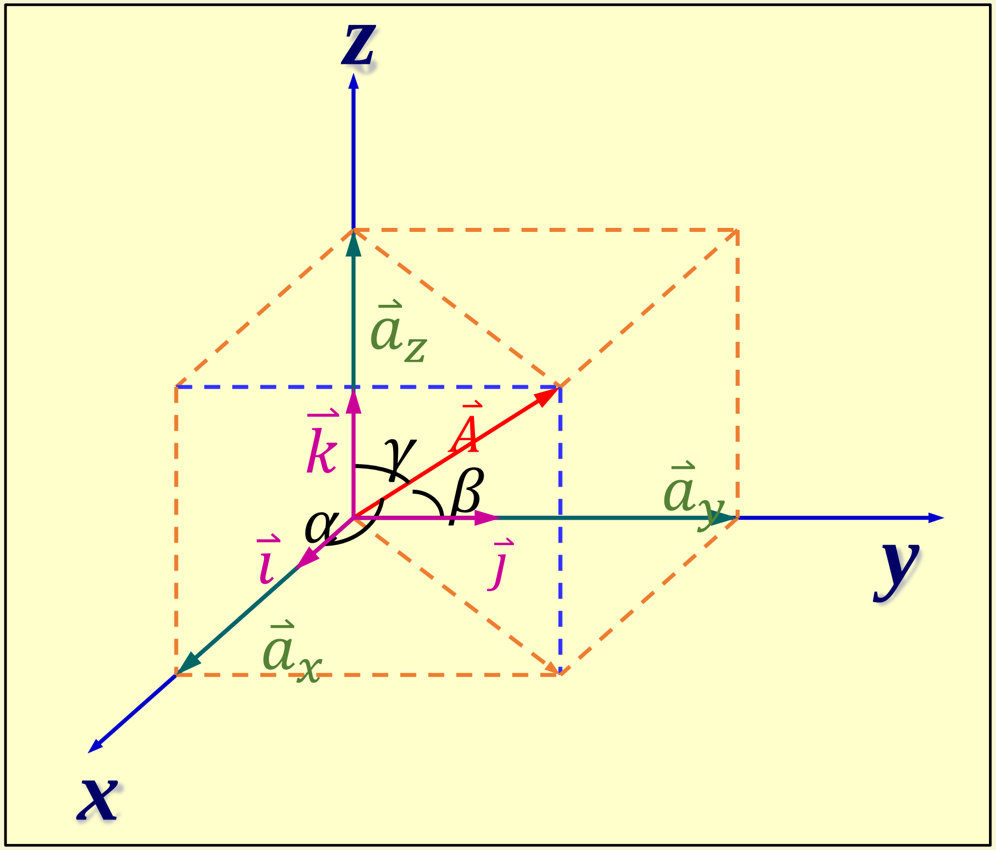


质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

★**在直角坐标系中描述加速度**：$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

大小： $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

方向： $cos(a,i) = \dfrac{a_x}{a}$， $cos(a,j) = \dfrac{a_y}{a}$， $cos(a,k) = \dfrac{a_z}{a}$



加速度的分量式：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

五、位矢、速度、加速度之间的关系

1、若质点的加速度是时间的函数，且其函数关系式已知

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v}-\vec{v}_0=\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}=\int_0^t \vec{a}(t)dt$$

2、若位矢是时间的函数，且其函数关系式已知

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r}-\vec{r}_0=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}=\int_0^t \vec{v}(t)dt$$

质点运动学——位矢、位移、速度、加速度

例1.2：如图所示游乐场中的碰碰车的位置满足$\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$ (m)。请根据此关系式说明碰碰车运行的轨迹；并求$t=2s$时的速度和加速度。

解：由运动方程 $\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 2-t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{轨迹方程}\quad y = 2-\frac{x^2}{4}$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}=2\vec{i}-2t\vec{j}\ \ (\text{m/s})$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}=-2\vec{j}\ \ (\text{m/s}^2)$$

自主学习教材P8：例1.2

质点运动学——切向加速度和法向加速度

在平面自然坐标系中如何描述加速度?

一. 平面自然坐标系（natural coordinates）

S：弧坐标

$\hat{\tau}$ ：切向

$\hat{n}$ ：法向

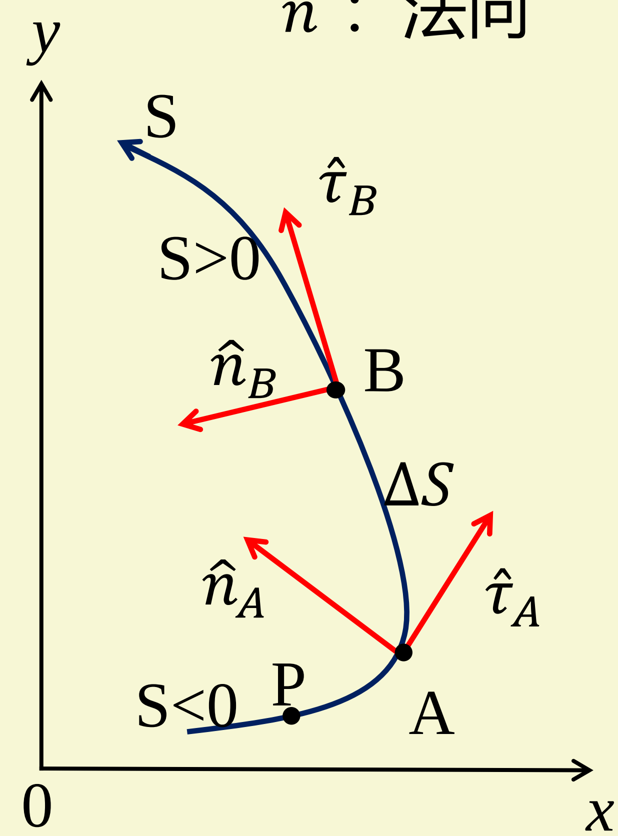
定义：质点在一个平面内做曲线运动，若运动轨迹已知，则可将此轨迹曲线作为一维坐标的轴线，建立一种新的坐标系，称**平面自然坐标系(自然坐标系)**。

弧坐标S：任选一点P作为坐标原点，从P点到质点在轨迹所处位置的弧长。选定某一走向为正方向，S值可正可负。

★**切向单位矢量** $\hat{\tau}$：沿轨迹切线并指向弧坐标增加方向的单位矢量。

★**法向单位矢量** $\hat{n}$：沿轨迹法线且指向轨迹凹侧的单位矢量。

★$\hat{\tau}$ 和 $\hat{n}$ 随着质点的运动而变化，不是恒矢量。



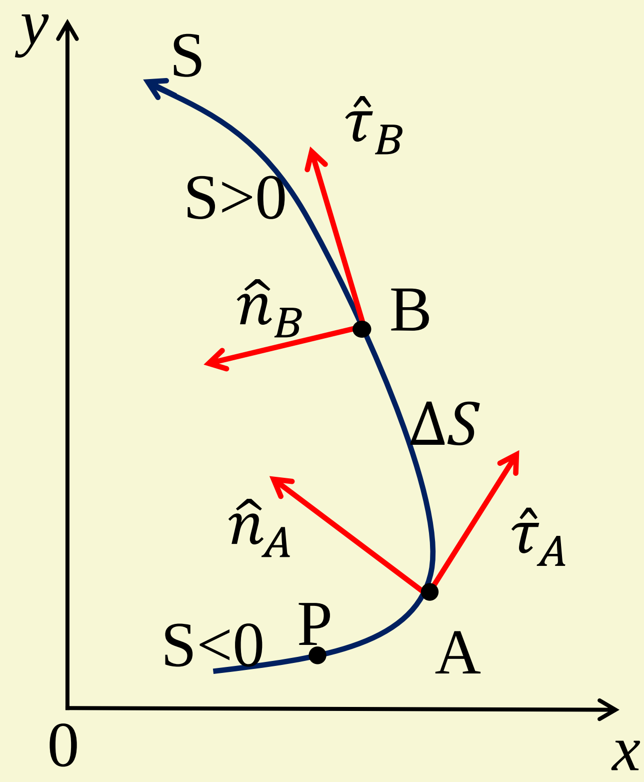
质点运动学——切向加速度和法向加速度

二. 切向加速度和法向加速度

自然坐标系中的速度：$\vec{v} = v\hat{\tau} = \frac{dS}{d\,t}\hat{\tau}$

自然坐标系中的加速度：

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\hat{\tau})}{\mathrm{d}t} = \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}\hat{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t} = \boxed{\vec{a}_\tau} + \vec{a}_n$$



1. 切向加速度 $\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}\hat{\tau}$

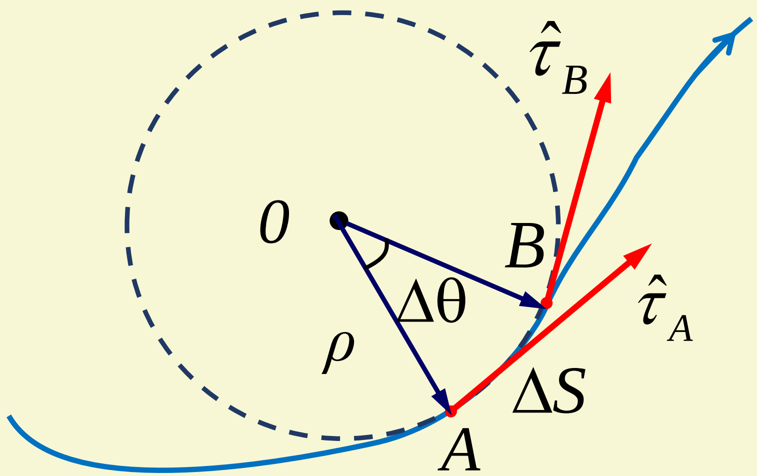
★大小：反映速度大小随时间的变化

★方向：指向轨迹的切线方向

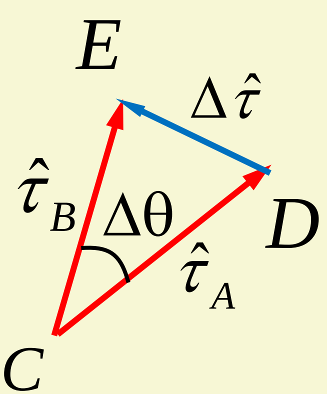
质点运动学——切向加速度和法向加速度

2. 法向加速度

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+\boxed{\upsilon\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}}=\vec{a}_\tau+\boxed{\vec{a}_n}$$



$$\left.\begin{array}{l}|\Delta\hat{\tau}|=|\hat{\tau}|\Delta\theta=\Delta\theta \\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\hat{\tau}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}\end{array}\right\}\ \frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{n}$$



$$\Delta\theta=\frac{\Delta S}{\rho}\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\rho\Delta t}\hat{n}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\hat{n}=\frac{\upsilon}{\rho}\hat{n}$$

$$\vec{a}_n=\upsilon\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\upsilon^2}{\rho}\hat{n}$$

★大小：反映速度方向随时间的变化

★方向：指向轨迹的法向方向

质点运动学——切向加速度和法向加速度

自然坐标系中的加速度：

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

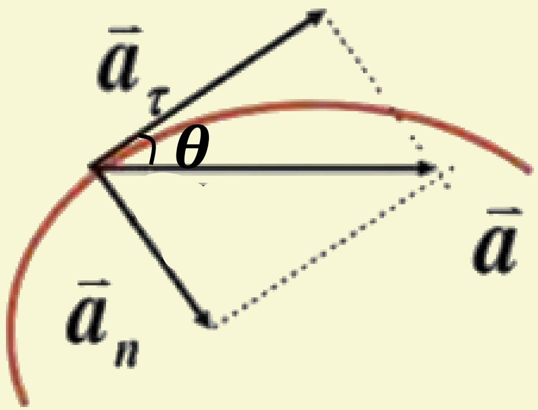
加速度的大小 $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$

加速度方向与切线方向的夹角

$$\tan\theta=\frac{a_n}{a_\tau}$$

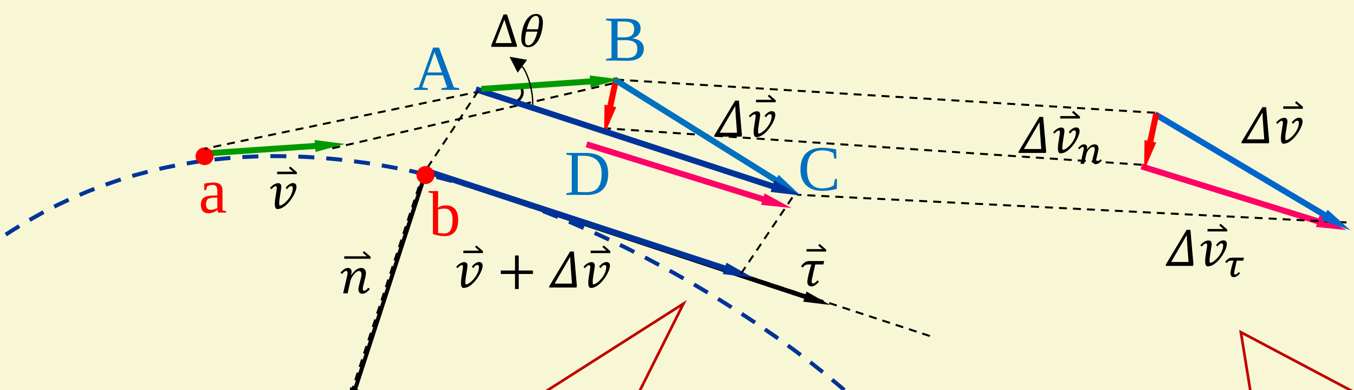
切向加速度的大小反映了**速度大小**随时间的变化

法向加速度的大小反映了**速度方向**随时间的变化



质点运动学——切向加速度和法向加速度

3.一般曲线运动中的速度与加速度



BD ⊥ DC

$|\overrightarrow{BD}| = \Delta v_n$ 法向

$|\overrightarrow{DC}| = \Delta v_\tau$ 切向

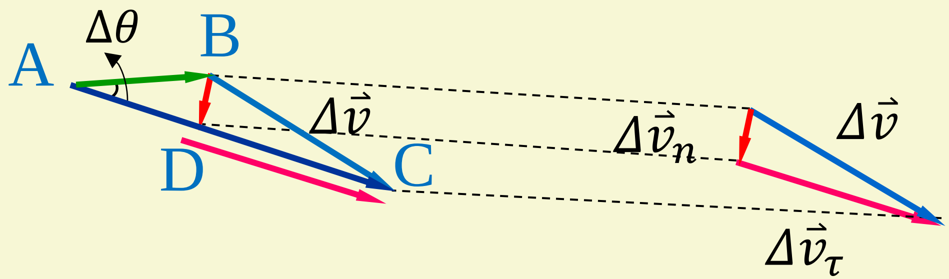
$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_\tau$

$\Delta t \to 0, \Delta\theta \to 0$

等腰速度三角形ABD

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}$$

质点运动学——切向加速度和法向加速度



$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n+\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}$$

切向加速度 $a_\tau=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$

法向加速度 $a_n=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta\theta}{\Delta t}=v\frac{d\theta}{dt}=v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{v^2}{\rho}$

总加速度 $\vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}$

质点运动学——几种常见的质点运动

一、直线运动

直线运动是研究曲线运动的基础，一般曲线运动都可看成由x,y,z三个方向的直线运动合成的。

运动中两类质点运动学的基本问题

1. 已知运动方程，求v，a .

第一类问题的求解在数学上使用：微分求导的方法。

$$\because x = x(t), \quad \therefore v = \frac{d\,x}{d\,t}; \qquad a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2}$$ 有确定的解。

例1.3：已知$x = 12t^2$，求3秒末的速度和加速度.

解：$$v = \frac{d\,x}{d\,t} = 24t, \ \vec{v}_3 = 24t\Big|_{t=3}\vec{\imath} = 72(ms^{-1})\,\vec{\imath}$$

$$a = \frac{d^2\,x}{d\,t^2} = \frac{dv}{d\,t} = 24, \quad \vec{a} = 24(ms^{-2})\vec{\imath}$$

质点运动学——几种常见的质点运动

2. 已知速度、加速度，求运动方程 $x = x(t)$.

第二类问题的求解使用的数学工具是积分。

$\because \dfrac{dx}{dt} = v(t) \quad \therefore dx = v(t)\,dt \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v(t)\,dt \quad \boxed{\therefore x - x_0 = \int_0^t v(t)\,dt}$ 一般公式

如果质点做匀速直线运动，$v(t)$=常数 $x - x_0 = vt$ (1) 中学

$\because a(t) = \dfrac{dv}{dt} \quad \therefore dv = a(t)\,dt \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a(t)\,dt \quad \boxed{\therefore v - v_0 = \int_0^t a(t)\,dt}$ 一般公式

如果质点做匀变速直线运动, $a(t)$ =常数 $v - v_0 = at$ (2) 中学

$$\left.\begin{aligned} v - v_0 &= at \\ \frac{dx}{dt} - v_0 &= at \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\therefore dx - v_0\,dt = at\,dt \\ &\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x - \int_0^t v_0\,\mathrm{d}t = \int_0^t at\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \quad x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

(3) 中学

质点运动学——几种常见的质点运动

例1.4：质点作直线运动, $a(t) = 3t$,求速度和运动方程。

解：$\dfrac{dv}{dt} = a(t) = 3t \quad \therefore \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t 3t\,dt \Rightarrow v - v_0 = \dfrac{3}{2}t^2$

注意:若由公式(2),得：$v - v_0 = at - -(2) \quad v - v_0 = 3t^2$ ✗

$$v - v_0 = \frac{3}{2}t^2 \rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{3}{2}t^2 \Rightarrow dx = v_0\,dt + \frac{3}{2}t^2\,dt$$

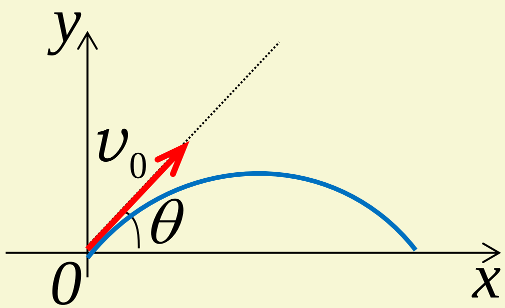
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0\,dt + \int_0^t \frac{3}{2}t^2\,dt \Rightarrow x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}t^3$$

质点运动学——几种常见的质点运动

二、抛体运动

例1.5:抛体运动是典型的平面匀加速运动，已知$\vec{a}=\vec{g}$，初速度与水平面的夹角为θ，初速度大小为υ_0，求解运动质点的运动方程、轨道方程、速度随时间的变化关系和位矢随时间的变化关系。

解: $$\begin{cases} x_0 = y_0 = 0 \\ a_x = 0 \quad a_y = -g \\ \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta \quad \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} \\ a_y = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \cos\theta \\ \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \upsilon_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \upsilon_0 \cos\theta t \\ y = \upsilon_0 \sin\theta t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

运动方程

质点运动学——几种常见的质点运动

速度分量 $\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \cos\theta \\ \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta - gt \end{cases}$

运动方程 $\begin{cases} x = \upsilon_0 t \cos\theta \\ y = \upsilon_0 t \sin\theta - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

轨道方程 $y = x\tan\theta - \dfrac{g x^2}{2\upsilon_0 \cos^2\theta}$

速度随时间的变化关系

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} = (\upsilon_0 \cos\theta)\vec{i} + (\upsilon_0 \sin\theta - gt)\vec{j}$$

$$= (\upsilon_0 \cos\theta)\vec{i} + (\upsilon_0 \sin\theta)\vec{j} - gt\vec{j} = \boxed{\vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t}$$

位矢随时间的变化关系

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t = (\upsilon_0 t \cos\theta)\vec{i} + (\upsilon_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2)\vec{j}$$

$$= (\upsilon_0 \cos\theta\vec{i} + \upsilon_0 \sin\theta\vec{j})t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{j}$$

$$= \boxed{\vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2}$$

自主学习教材P12：例1.4

抛体运动可叠加为: 水平方向的匀速直线运动+竖直方向的自由落体运动

质点运动学——几种常见的质点运动

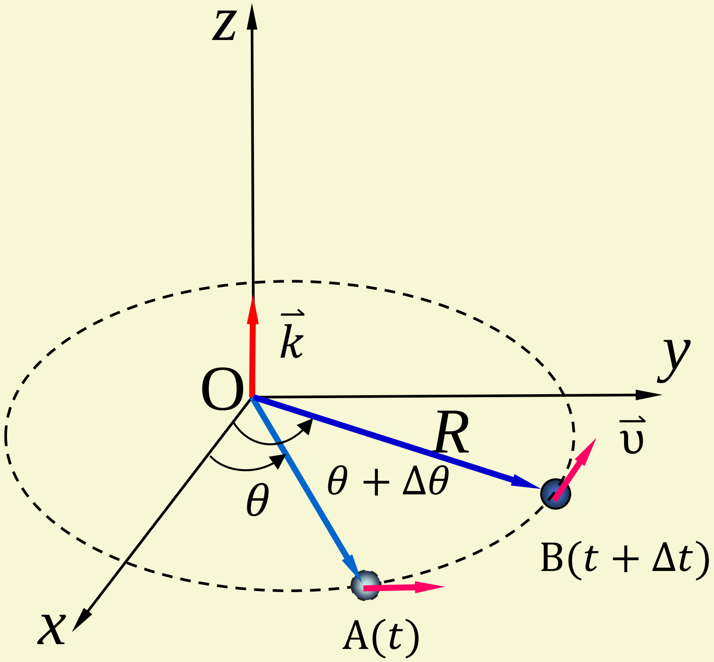
三、圆周运动

圆周运动是讨论一般曲线运动的基础：任何曲线运动可看作是由一系列半径不同的圆周运动组合而成的。

圆周运动的描述：

★线量：位移、速度、加速度

★角量：角位移、角速度、角加速度



质点运动学——几种常见的质点运动

1.圆周运动的角量描述

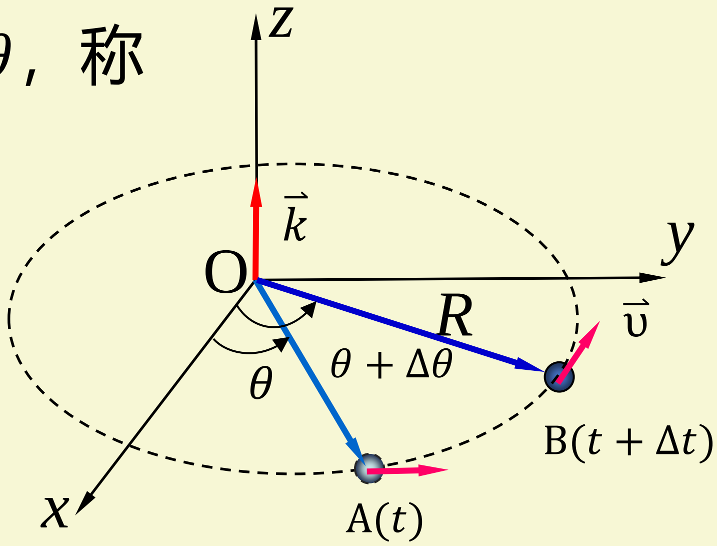
★**角位置**：质点做半径为R的圆周运动，任一时刻质点所在的位置可用其位矢与参考方向(一般选x轴正方向)所成的夹角 θ 表示，θ称为角位置(angular position)或角坐标。

圆周运动的运动方程：角位置随时间变化的函数关系 $\boldsymbol{\theta = \theta(t)}$

★**角位移**：质点在时间Δt内转过的角度$\Delta\theta$，称为质点的角位移(angular displacement)。

$\Delta\theta = (\theta + \Delta\theta) - \theta$ 弧度（rad）

$\Delta\theta = \Delta S / R$



质点运动学——几种常见的质点运动

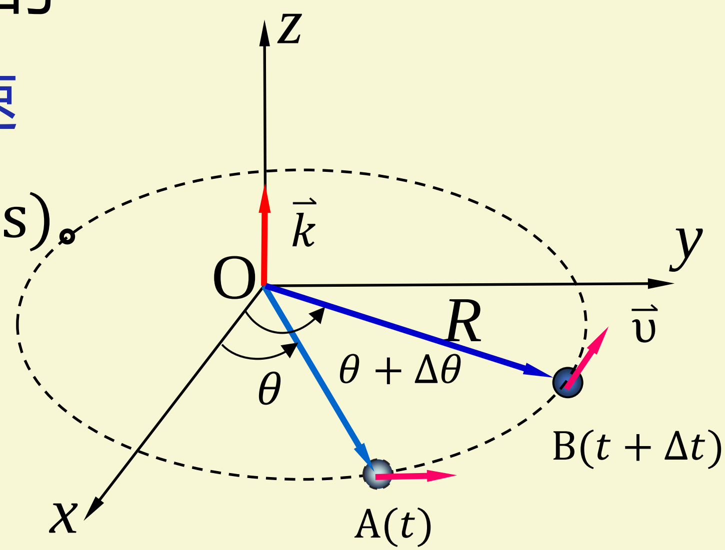
1.圆周运动的角量描述

★**平均角速度**：角位移$\Delta\theta$与时间Δt的比值称为质点在Δt内对O点的平均角速度($\bar{\omega}$, rad/s)。

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (\mathrm{rad}\cdot \mathrm{s}^{-1})$$

★**瞬时角速度**：当$\Delta t \to 0$时，平均角速度的极限值称为质点在t时刻对O点的瞬时角速度(简称角速度-angular velocity, ω, rad/s)。

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t} \quad (\mathrm{rad}\cdot \mathrm{s}^{-1})$$



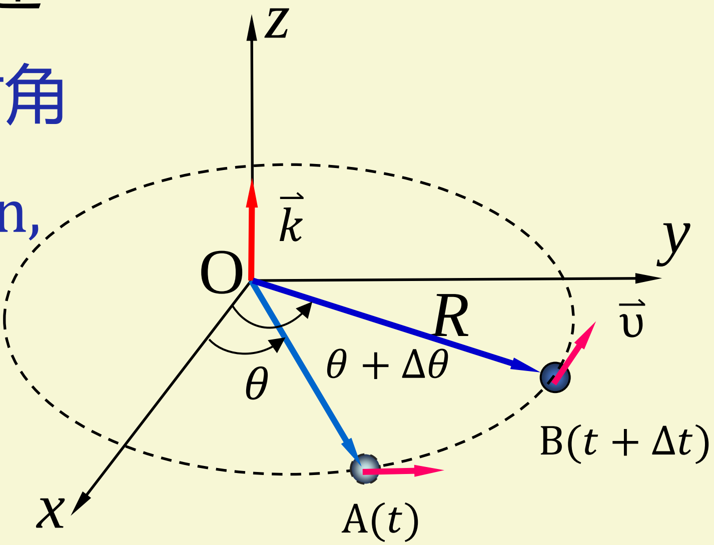
质点运动学——几种常见的质点运动

1.圆周运动的角量描述

★**平均角加速度**：变速圆周运动，角速度的增量$\Delta\omega$与时间Δt的比值称为质点在Δt内对O点的平均角加速度($\bar{\beta}$, rad/s^2)。

$$\overline{\beta}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\ \ (\mathrm{rad}\cdot \mathrm{s}^{-2})$$

★**瞬时角加速度**：当$\Delta t\to 0$时，平均角加速度的极限值称为质点在t时刻对O点的瞬时角加速度(简称角加速度-angular acceleration, β, rad/s^2)。



$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}^2\,\theta}{\mathrm{d}\,t^2}\ \ (\mathrm{rad}\cdot \mathrm{s}^{-2})$$

质点运动学——几种常见的质点运动

2.角量与线量的关系

线量：$\Delta\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$ ；位移、速度、加速度

角量：θ、ω、β；角位移、角速度、角加速度

$$\Delta S = R\Delta\theta \Rightarrow \mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta$$

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\beta$$

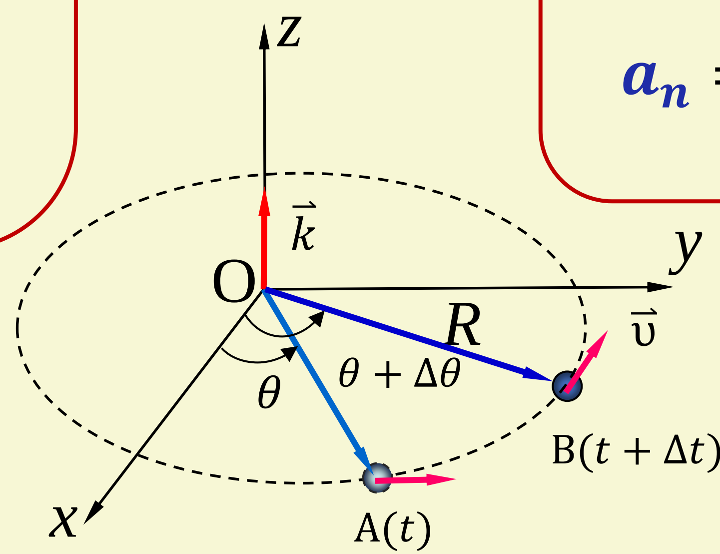
$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

$$\Delta S = R\Delta\theta$$

$$v = R\omega$$

$$a_\tau = R\beta$$

$$a_n = R\omega^2$$



质点运动学——几种常见的质点运动

1.圆周运动的角量描述

匀加速直线运动

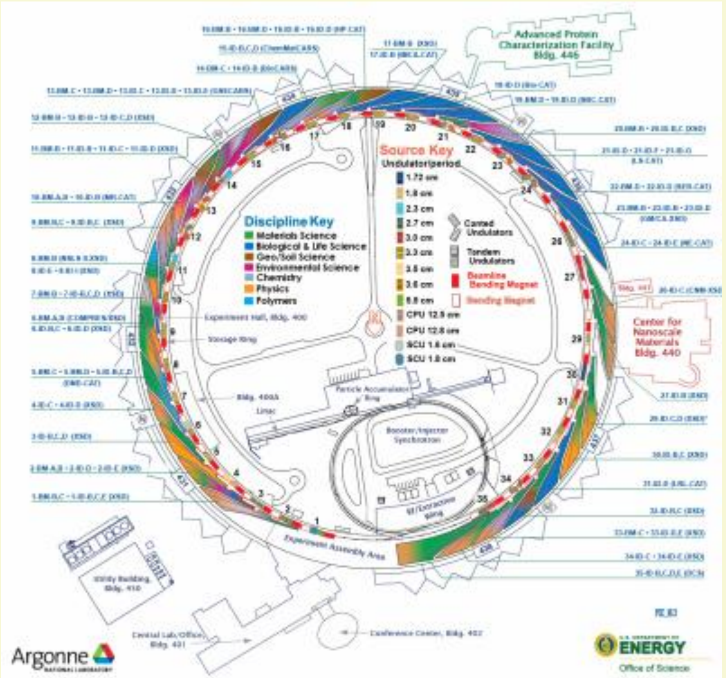
$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v^2 - {v_0}^2 = 2a(x - x_0) \end{cases}$$

匀角加速圆周运动

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 - {\omega_0}^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

用角量描述平面圆周运动可转化为一维运动形式，从而简化问题。

高速电子在磁场约束下的圆周运动：同步辐射X射线光源



美国阿岗国家实验室：先进光子源

上海先进光子源

北京先进光子源

质点运动学——几种常见的质点运动

例1.6：列车离站时驶入半径为$R = 1000m$的圆弧轨道时，运动方程为$\theta = \left(2t^2 + t\right) \times 10^{-4}\, rad$，求列车离开车站$t = 20s$时，其角速度，速度，角加速度，切向加速度和法向加速度各为多少?

解:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t} \Longrightarrow \omega = (4t + 1) \times 10^{-4}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

$$=8.1 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t} \Longrightarrow \beta = 4 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad \cdot s^{-2}}$$

$$v = R\omega = R(4t + 1) \times 10^{-4} m \cdot s^{-1} = 8.1\, m \cdot s^{-1}$$

$$a_\tau = R\beta = 4R \times 10^{-4}\mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0.4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 6.56 \times 10^{-2}\, m \cdot s^{-2}$$

质点运动学——相对运动

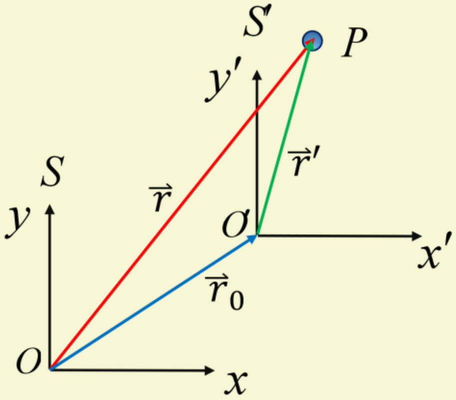
工程技术中，一般是从地面上观察物体的运动，我们把固定在地面上的参照系称为“静止参照系”，把相对于地面运动的参照系称为“运动参照系”。

绝对运动：质点相对于静止参照系的运动。 绝对(加)速度

相对运动：质点相对于运动参照系的运动。 相对(加)速度

牵连运动：运动参照系相对于静止参照系的运动。牵连(加)速度

同一物体在不同参考系中的运动有何联系?



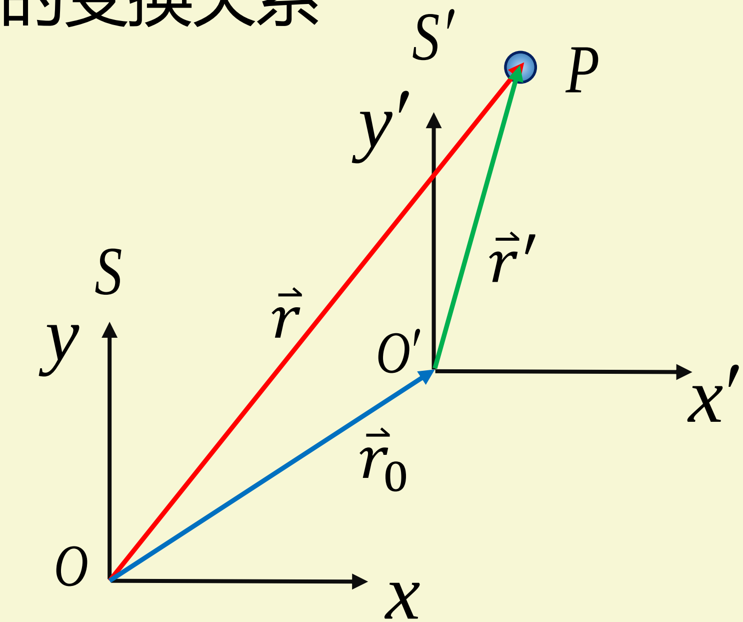
质点运动学——相对运动

参考系S′ 相对于参考系S以速度 v_0 运动，运动中相应坐标轴始终保持平行。

★同一质点的运动速度在不同参考系之间的变换关系

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{r}' \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

伽利略速度变换



绝对速度=牵连速度+相对速度

★同一质点的加速度在不同参考系之间的变换关系

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

绝对加速度=牵连加速度+相对加速度

例1.7：雨天一辆卡车在水平马路上以20 m/s 的速度朝正东方行驶，雨滴在空中相对于地面以10m/s的速度竖直下落，求雨滴相对于卡车的速度。

解：取地面为S系，卡车为 系，以雨滴为研究对象。

由伽利略速度变换关系，可得：

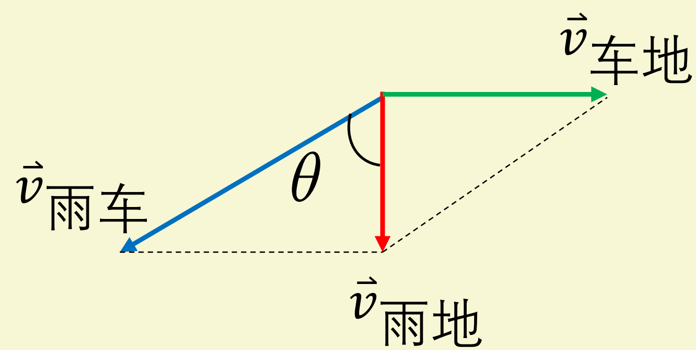
$$\vec{v}_{雨地}=\vec{v}_{雨卡}+\vec{v}_{卡地}$$

$$\vec{v}_{雨卡}=\vec{v}_{雨地}-\vec{v}_{卡地}$$

$$v_{雨车}=\sqrt{v_{雨地}^2-v_{卡地}^2}$$

$$=\sqrt{10^2-20^2}\approx 22.4\ \mathrm{m/s}$$

$$\theta=\arctan\frac{20}{10}\approx 63.4^{\circ}$$



质点运动学——作业

1. 练习册A（第1章 质点运动学）

选择：1-10；填空：1-10; 计算：1-6；研讨：1-4

2. 智慧树网络课堂