湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 积 分 学

4.5 对坐标的曲线积分

• 主 讲: 于 红 香

第五节 对坐标的曲线积分

一．物理背景

二．概念与性质

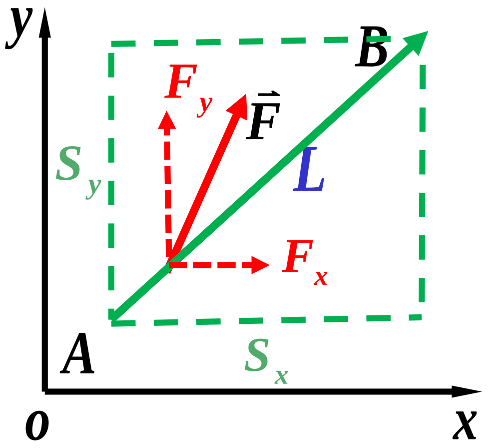
三．计算方法

四．两类曲线积分的联系

- 正确理解对坐标的曲线积分的概念。
- 了解对坐标的曲线积分的性质。
- 掌握对坐标的曲线积分的计算方法。
- 理解两类曲线积分的联系。

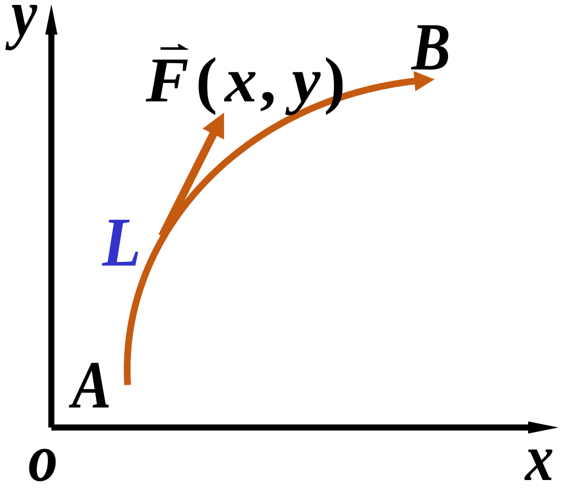
一. 引例：变力沿曲线做功

设xy平面上一质点在变力$\vec{F}(x,y)$的作用下，沿平面上光滑曲线$L(AB)$从点A到点B，求变力$\vec{F}(x,y)$所作的功。



常力沿直线作功

$$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=F_x\cdot S_x+F_y\cdot S_y$$



$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

一. 引例：变力沿曲线做功

设xy平面上一质点在变力$\vec{F}(x,y)$的作用下，沿平面上光滑曲线$L(AB)$从点A到点B，求变力$\vec{F}(x,y)$所作的功。

分割取近似

$$\Delta W_i \approx \vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$$

变力沿曲线做功

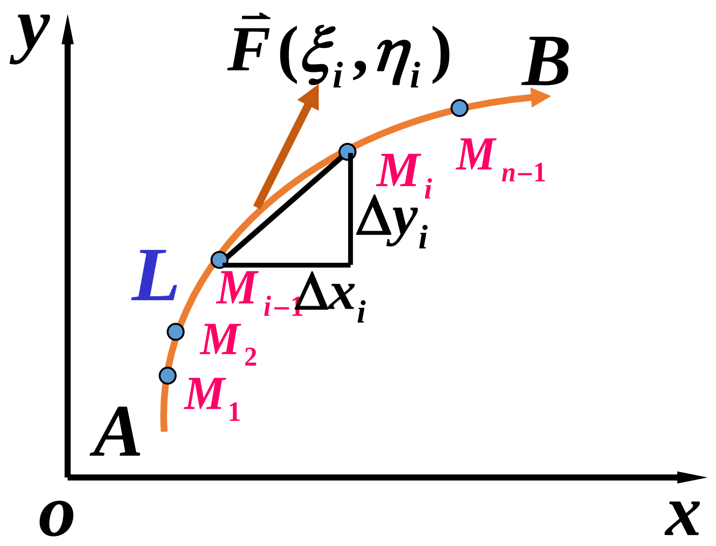
局部近似为

常力沿直线作功

$$= P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i)\vec{i} + (\Delta y_i)\vec{j}$$



求和取极限

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i].$$

【定义】设函数 $P(x\,,y)$ 是定义在 xy 平面上的一条光滑曲线 L_{AB} 上的有界函数 . 在 L_{AB} 上任取 $n-1$ 个点 :

$$A = A_0 < A_1 < \cdots < A_{i-1} < A_i < \cdots < A_{n-1} < A_n = B\,,$$

将 L_{AB} 分 成 n 个有向小弧段 $\Delta l_i = M_{i-1}M_i$，每个小弧段的长度记为 $\|\Delta l_i\|$，并记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\|\Delta l_i\|\}$. 若 $\forall\ (\xi_i,\ \eta_i) \in \Delta l_i$，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i = I$$

存在, 且该极限值与对曲线 L_{AB} 的分法和点 $(\xi_i,\ \eta_i)$ 的取法无关 , 则称该极限值为 $P(x,\ y)$ 按从A到B的方向沿曲线 L_{AB} 上对坐标x 的曲线积分.

对坐标 x 的曲线积分的记号

被积函数

定义在曲线 L_{AB} 上

$$\boxed{\int_{L_{AB}}} \boxed{P(x,y)} \mathrm{d}\, x = \lim_{\lambda\to 0} \boxed{\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i}$$

黎曼和

积分和

对坐标的

曲线积分号

$P(x,y)\,\mathrm{d}\,x$—被积表达式

L_{AB} —积分路径

如果积分曲线为一条封闭曲线 L，则积分记为

$$\oint_{L_{AB}} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i\ .$$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i.$$ $P(x,y)$对坐标 x 的曲线积分.

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$ $Q(x,y)$对坐标 y 的曲线积分.

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i].$$

$$= \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_L \boldsymbol{P(x,y)}\mathrm{d}x + \boldsymbol{Q(x,y)}\mathrm{d}y = \boxed{\int_L \vec{F}(x,y)\cdot\vec{\mathrm{d}s}}$$

【性质1】线性性质

$$\int_L [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}x=\alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}x+\beta\int_L g(x,y)\mathrm{d}x$$

【性质2】可加性

如果 $L(AB)=L(AC)+L(CB)$， $L(AC)$ 和 $L(CB)$ 是光滑曲线， 则

$$\int_{L(AB)} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{L(AC)} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{L(CB)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

【性质3】反向反号性

设L^+是曲线L从点A 到点B 的方向，L^-是曲线L从点B 到点A 的方向.

$$\int_{L^+} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即：对坐标的曲线积分与曲线的方向有关.

1. 参数方程形式下的计算

设 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t\in[\alpha,\ \beta]$, 且 $x(t)$, $y(t)\in C^1([\alpha,\ \beta])$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$,则

当参数t单调地从α 变到β 时,

曲线上的点相应地从起点A变到终点B.

$$\int_{L(AB)} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x = \int_\alpha^\beta P(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\int_{L(AB)} Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y = \int_\alpha^\beta Q(x(t),y(t))y'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

2. 直角坐标方程形式下的计算

(1). 设曲线 L 的方程为

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}, \quad x \in [a\,,b]\,,$$

且 $y(x) \in C^1([a\,,b])$， 则

当参数x单调地从a 变到b 时，

曲线上的点相应地从起点A变到终点B.

$$\int_{L(AB)} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b P(x,y(x))\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_{L(AB)} Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b P(x,y(x))\,y'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

(2). 设曲线 L 的方程为

$$\begin{cases} y = y \\ x = x(y) \end{cases}, \quad y \in [c\,,d]\,,$$

且 $x(y) \in C^1([c\,,d])$， 则

当参数y单调地从c 变到d 时，

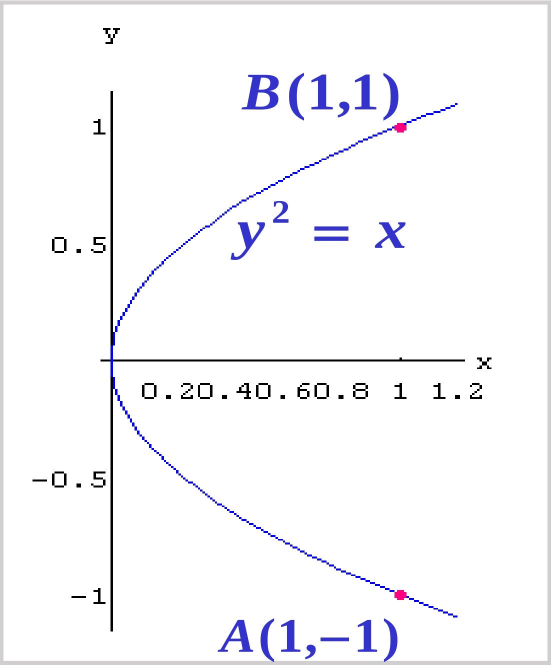
曲线上的点相应地从起点A变到终点B.

$$\int_{L(AB)} P(x,y)\,\mathrm{d}\,x = \int_c^d P(x(y),y)\,x'(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$\int_{L(AB)} Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y = \int_c^d P(x(y),y)\,\mathrm{d}\,y$$

【例】 计算$\int_L xy\mathrm{d}x$, L为沿 $y^2 = x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.

【解1】 化为对x的定积分



$$L_{AO}: y = -\sqrt{x}, x: 1 \to 0.$$

$$L_{OB}: y = \sqrt{x}, x: 0 \to 1.$$

$$\int_L xy\mathrm{d}x = \int_{L_{AO}} xy\mathrm{d}x + \int_{L_{OB}} xy\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{4}{5}.$$

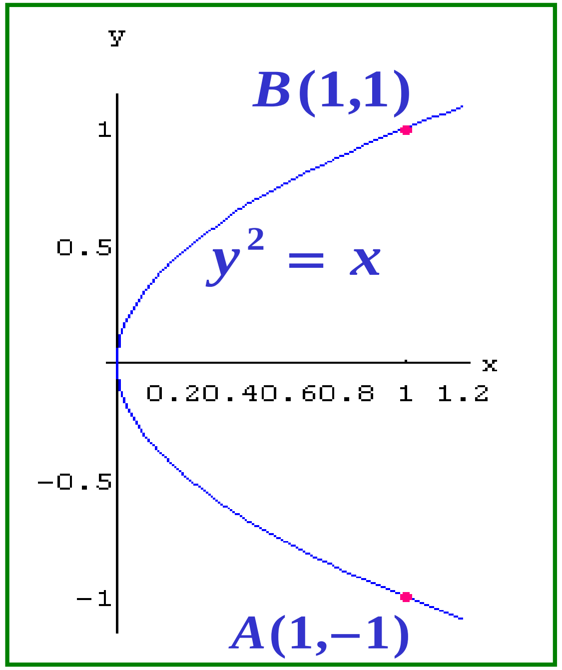
【例】 计算$\int_L xy\mathrm{d}x$，L为沿 $y^2=x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.

【解2】 化为对y的定积分

$$L_{AB}: x=y^2, y:-1\to 1.$$

$$\int_L xy\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} y^2 y\mathrm{d}(y^2)$$

$$=2\int_{-1}^{1} y^4\mathrm{d}y = \frac{4}{5}.$$



【例】 求 $\oint_L y^2\mathrm{d}x$,L 为区域 $x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0$ 的边界，逆时针方向.

【解】

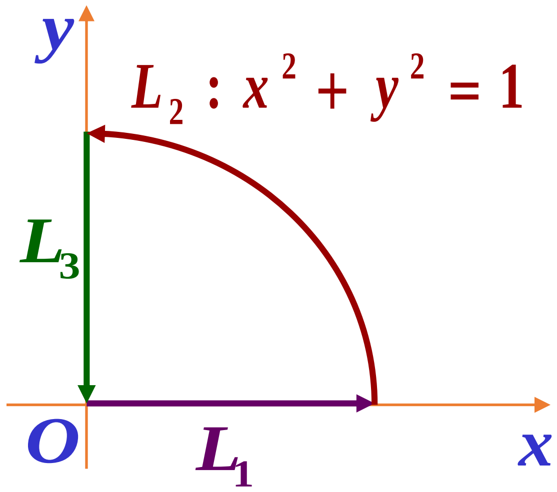
$$\oint_L y^2\mathrm{d}x = \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}\right) y^2\mathrm{d}x$$

$L_1: y=0, x: 0\to 1$

$$\int_{L_1} y^2\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0,$$

$L_3: x=0, y: 1\to 0$

$$\int_{L_3} y^2\mathrm{d}x = \int_1^0 y^2\, 0\mathrm{d}x = 0$$



【例】求 $\oint_L y^2\mathrm{d}x$,L 为区域 $x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0$ 的边界，逆时针方向.

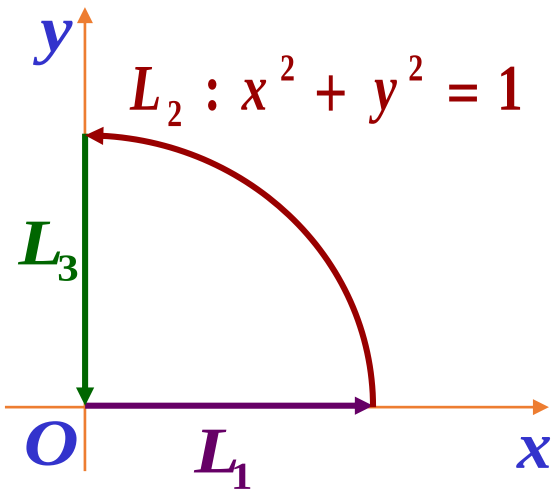
【解】

$(1) L_2: y=\sqrt{1-x^2}, x:1\to 0$

$$\int_{L_2} y^2dx=\int_1^0(1-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3},$$

$(2) L_2: x=\sqrt{1-y^2}, y:0\to 1$

$$\int_{L_2} y^2\mathrm{d}x=\int_0^1 y^2\mathrm{d}\sqrt{1-y^2}=-\frac{2}{3},$$



哪种方法最优？

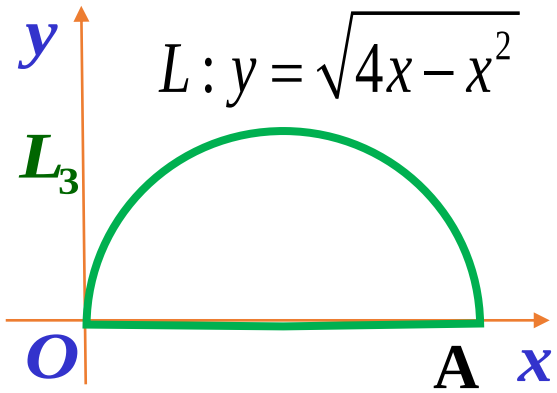
$(3) L_2: x=\cos\theta, y=\sin\theta, \theta:0\to\frac{\pi}{2}$

$$\int_{L_2} y^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\cos\theta=-\frac{2}{3}.$$

$$\therefore \int_L y^2\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}+0+0=-\frac{2}{3}.$$

【练】 计算曲线积分$I=\int_L (y+2xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\,\mathrm{d}y$,

其中L是由点$A(4,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$y=\sqrt{4x-x^2}$.



【例】计算 $\int_L xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, 其中积分路径$L$分别为：

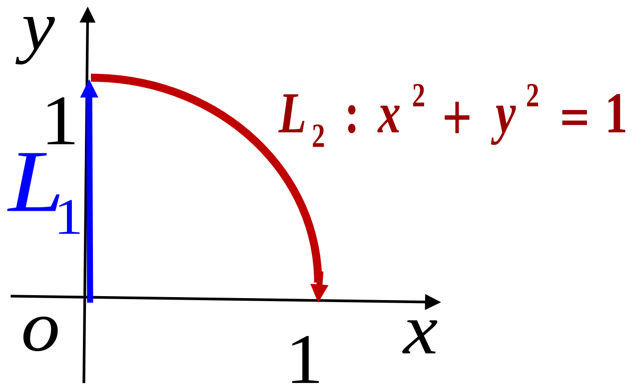
(1)沿y轴从点$(0,0)$开始到点$(0,1)$, 再沿圆周$x^2+y^2=1$到点$(1,0)$;

(2)沿x轴从点$(0,0)$到点$(1,0)$.

【解】(1)$\int_L xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \left(\int_{L_1} + \int_{L_2}\right)\left(xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y\right)$

$L_1: x=0, y: 0\to 1, \mathrm{d}x = 0$, 所以

$$\int_{L_1} xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$



【例】 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, 其中积分路径$L$分别为:

(1)沿y轴从点$(0,0)$开始到点$(0,1)$, 再沿圆周$x^2+y^2=1$到点$(1,0)$;

(2)沿x轴从点$(0,0)$到点$(1,0)$.

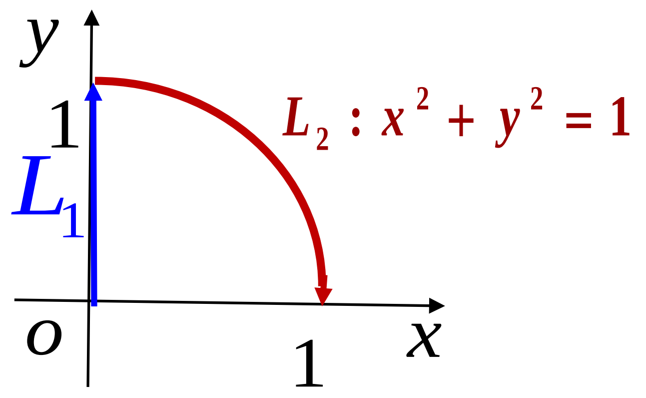
解 $L_2: x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ \theta: \frac{\pi}{2}\to 0$

$$\int_{L_2} xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[\cos\theta\sin\theta(-\sin\theta)+\sin\theta\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\sin\theta=-\frac{1}{6}.$$

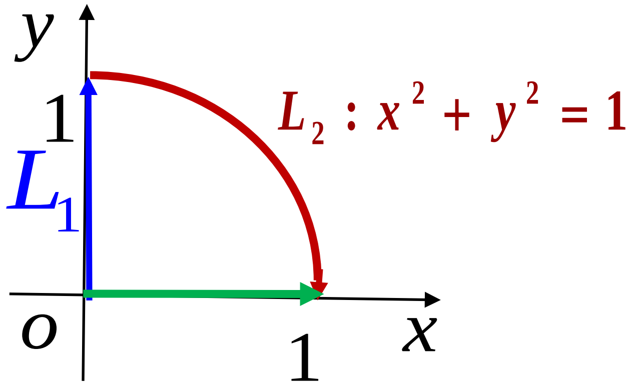
$$\int_L xy\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\left(\int_{L_1}+\int_{L_2}\right)(xy\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$



【例】 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, 其中积分路径$L$分别为:

(1)沿y轴从点$(0,0)$开始到点$(0,1)$, 再沿圆周$x^2+y^2=1$到点$(1,0)$;

(2)沿x轴从点$(0,0)$到点$(1,0)$.



【解】 $(2) L: y=0,\ x: 0\to 1,\ \mathrm{d}y=0,$

$$\int_L xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \int_0^1 x\cdot 0\mathrm{d}x + 0 = 0.$$

此题对坐标的曲线积分，与积分路径的起点终点有关；与积分路径有关。

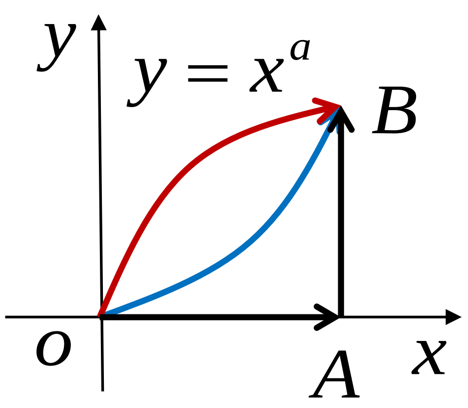
【例】 计算 $\int_L xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y$, 其中积分路径$L$分别为：

(1)$y = x^a, a > 0$上从点$O(0,0)$到点$B(1,1)$的一段曲线；

(2)沿x轴从点$O(0,0)$到点$A(1,0)$, 再沿直线$x = 1$到$B(1,1)$的折线段.

【解】(1)$L: y = x^a, x: 0 \to 1$

$$\int_L xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y = \int_0^1 (x^{2\alpha+1} + \alpha x^{2\alpha+1})\,\mathrm{d}\,x = \ldots = \frac{1}{2}.$$



$$(2)\int_L xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y = \left(\int_{L_{OA}} + \int_{L_{AB}}\right) xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 0\,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 1^2\,y\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}.$$

此题对坐标的曲线积分，与积分路径的起点终点有关；与积分路径无关。

【例】设有一平面力场，其场力的大小与作用点向径的长度成正比，而从向径方向按逆时针旋转$\dfrac{\pi}{2}$角为场力的方向，试求当质点沿圆周$x^2+y^2=a^2$在第一象限的弧段从点$A(a, 0)$移动到点$B(0, a)$时场力所做的功。

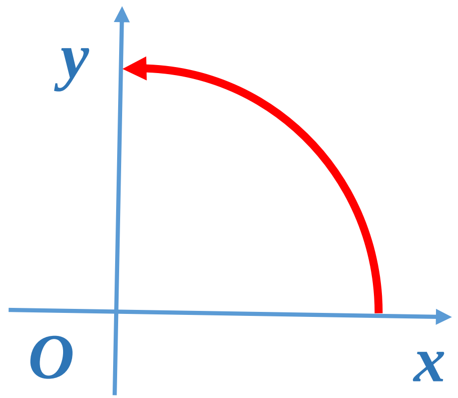
【解】设点(x, y)的力$F(x, y)$，则其大小为$k\sqrt{x^2+y^2}$

向径(x, y)逆时针旋转90度后为$(-y, x)$ 其单位向量为$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y, x)$

$$F(x, y)=k\sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y, x)=k(-y, x)$$

故所做的功为$W=\int_L k(-y, x)\cdot(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \quad =k\int_L(-y)\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$

【例】设有一平面力场，其场力的大小与作用点向径的长度成正比，而从向径方向按逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$角为场力的方向，试求当质点沿圆周$x^2+y^2=a^2$在第一象限的弧段从点$A(a,0)$移动到点$B(0,a)$时场力所做的功。



【解】故所做的功为$W=\int_L k(-y,x)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=k\int_L(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$

设L为参数方程：$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, \theta:0\to\frac{\pi}{2}$,

$$W=k\int_0^{\pi/2}[(-a\sin\theta)(-a\sin\theta)+a\cos\theta a\cos\theta]\mathrm{d}\theta=ka^2\int_0^{\pi/2}d\theta=\frac{ka^2\pi}{2}.$$

【练】计算 $\int_L x^3 \mathrm{d}x + 3zy^2 \mathrm{d}y - x^2 y \mathrm{d}z$, L是从$A(3,2,1)$ 到 $O(0,0,0)$ 的有向线段 $\overrightarrow{AO}$.

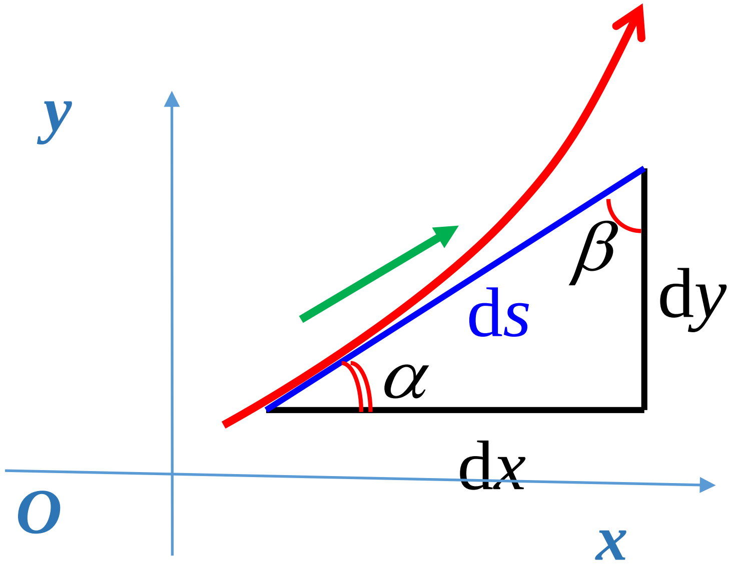
$L(AB)$的参数方程形式:

$$x = x(t), y = y(t), t: 0 \to l,$$

其中 $\vec{\tau}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$ $\quad (x'(t), y'(t))^0$

为曲线L的单位切向量.

切向量方向与曲线正向一致



$$\because \mathrm{d}x = \cos\alpha \mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}y = \cos\beta \mathrm{d}s$$

$$\therefore \int_{L(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x = \int_{L(AB)} P(x,y)\cos\alpha \mathrm{d}s$$

$$\therefore \int_{L(AB)} Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{L(AB)} Q(x,y)\cos\beta \mathrm{d}s$$

四.两类曲线积分的联系

设 $\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$为光滑有向曲线弧$L$上点$(x,y)$处的单位切向量，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{L(AB)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{L(AB)}[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s\end{aligned}}$$

类似地，设 $\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 为有向曲线弧Γ上点(x,y,z)处的单位切向量，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{\Gamma}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_{\Gamma}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}s\end{aligned}}$$

【例】 将 $\int_L xy\mathrm{d}x$ 化为对弧长的曲线积分，

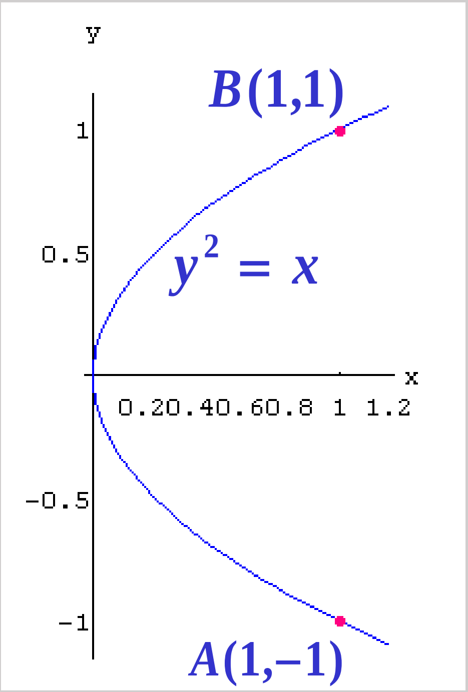
L 为 $y^2 = x$ 上从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧.

解 $\because L: x = y^2,\quad \therefore \vec{\tau} = (2y,\ 1)$

$$\therefore \vec{\tau}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta) = \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}(2y, 1)$$

$$\int_L xy\mathrm{d}x = \int_L xy\cos\alpha\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_L xy\frac{2y}{\sqrt{4y^2+1}}\mathrm{d}s = \int_L \frac{2xy^2}{\sqrt{4y^2+1}}\mathrm{d}s$$



1．对坐标的曲线积分的概念与性质

路径反向，积分反号

2． 对坐标的曲线积分的计算

基本方法：化为对参数的定积分

注意：对坐标的曲线积分化为对参数的定积分后，

总有下限：起点参数，上限：终点参数。

3． 两类曲线积分之间可以相互转化。

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha \mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}y = \cos\beta \mathrm{d}s.$$ 单位切向量

思考题1

计算曲线积分$I=\int_L (y+z)\,\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\,\mathrm{d}y+x^2y^2\,\mathrm{d}z$,

其中曲线L的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x \end{cases}$起点为$A(0,\sqrt{2},0)$终点为$B(0,-\sqrt{2},0)$。