湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 积 分 学

4.1　二重积分（2）

• 主 讲： 于 红 香

第四章 多元函数积分学

第一节 二重积分

四. 二重积分的计算

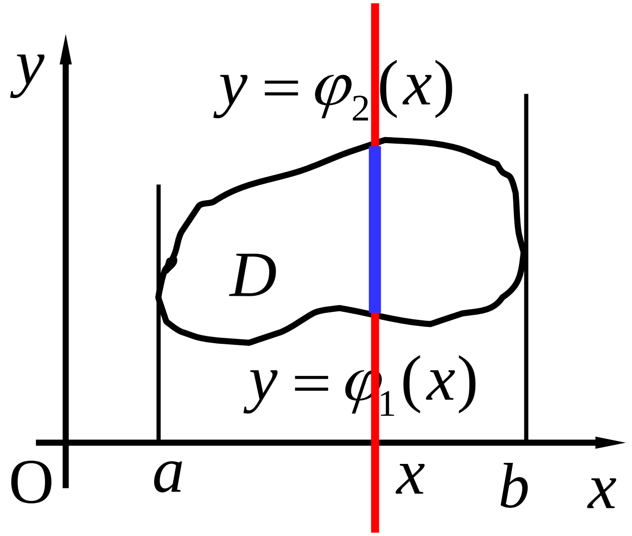
- 直角坐标系下二重积分的计算
- 二重积分的换元法
- 极坐标系下二重积分的计算

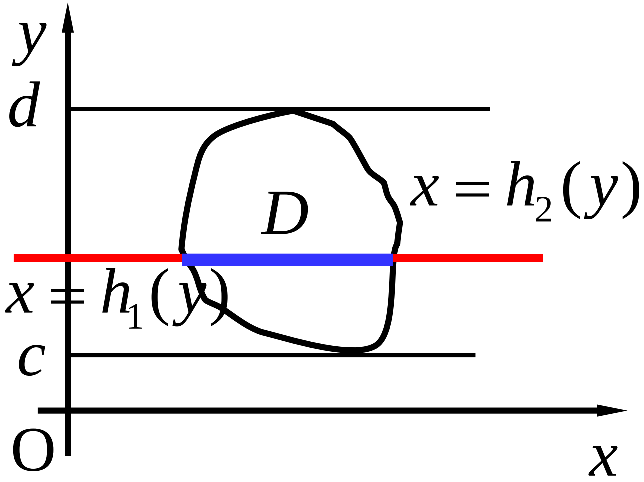
本节教学要求:

◆ 正确理解重积分的换元法。

◆ 熟练掌握极坐标系下二重积分的计算。

直角坐标系下二重积分的计算





若积分区域 D 可表示为下列两种形式：

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b，\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\},$$

$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d，\ h_1(y)\le x\le h_2(y)\},$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

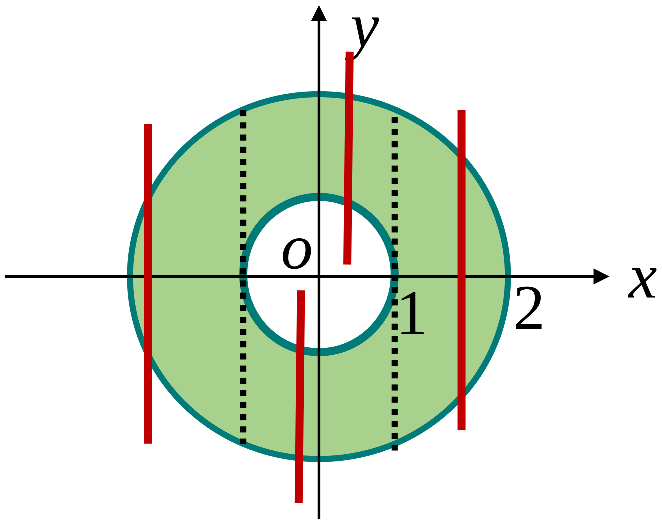
$$=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

直角坐标系下二重积分的计算

【练】 将二重积分$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{dxdy}$化为直角坐标系下的二次积分，

其中$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

【解】



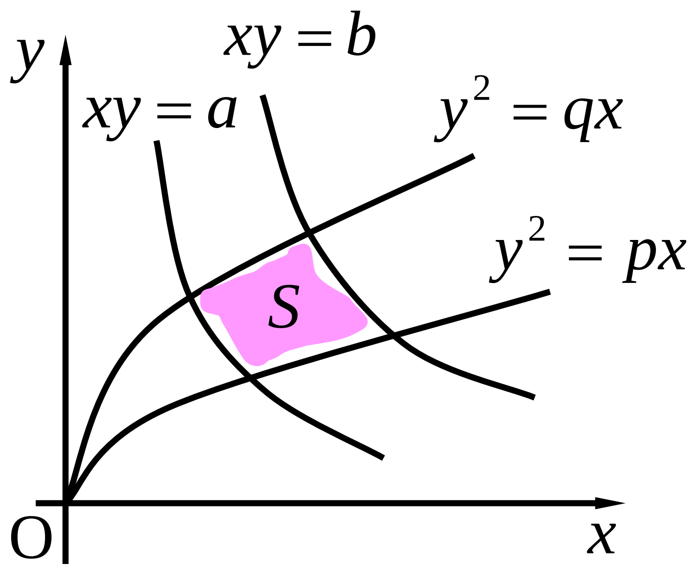
$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{dxdy}=\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$$

$$+\int_{1}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$$

【例】 求由抛物线 $y^2 = px,\ y^2 = qx\ \ (0 < p < q)$ 及双曲线 $xy = a,\ xy = b\ \ (0 < a < b)$ 所围成的平面图形的面积。



【解】 $S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (被积函数 $f(x, y) \equiv 1$)

直接运用直角坐标系下的公式 计算较繁。

积分区域是否可以简化?

换元法!

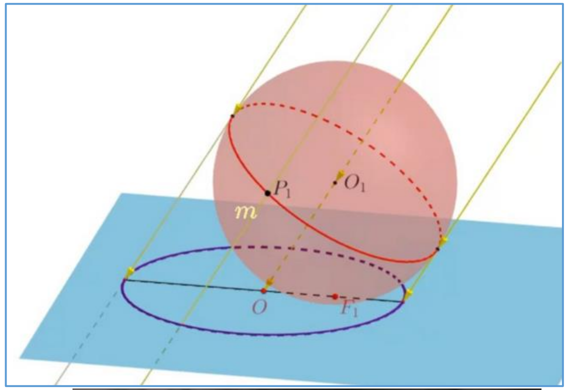
二重积分的换元法

设 D 是 xy 平面上的有界闭区域，$f(x,y)\in C(D)$。

变换 T：$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 将 uv 平面上的区域 D^* ——变为 xy平面上的区域D，且

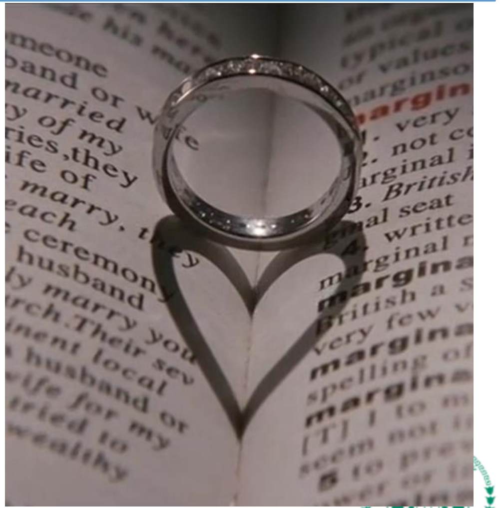
(1) $x(u,v)$，$y(u,v)\in C^1(D^*)$；

(2) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0 \quad (u,v)\in D^*$，



面积伸张系数

则有 $$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v。$$

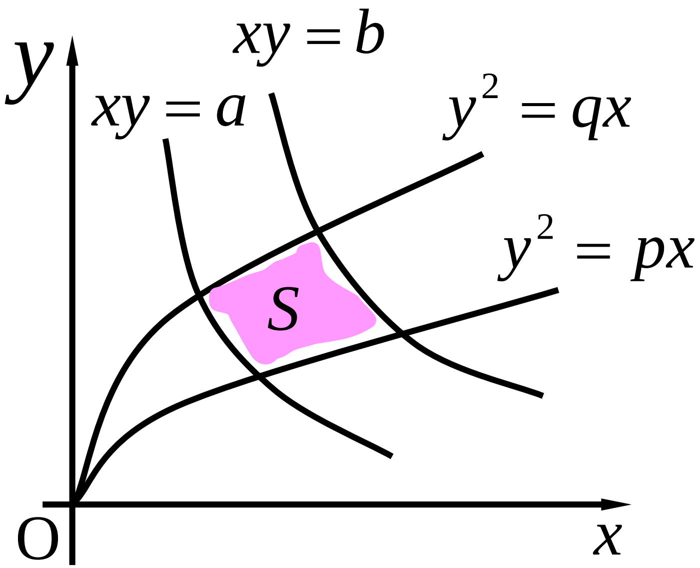


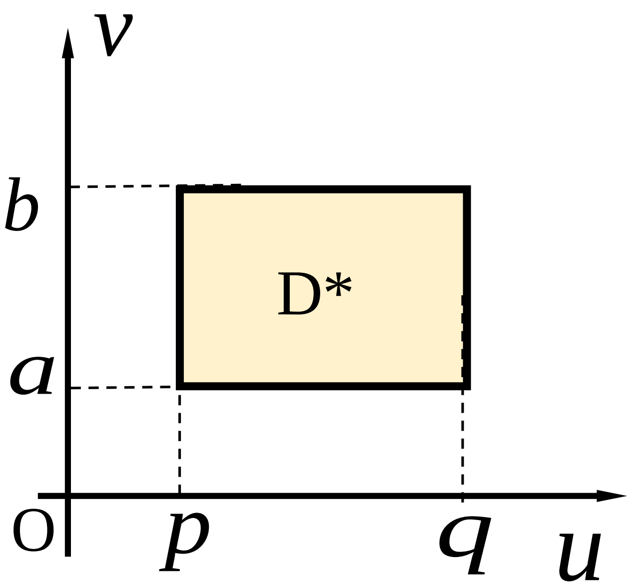
【例】 求由抛物线 $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0<p<q)$ 及双曲线

$xy=a$, $xy=b$ $(0<a<b)$ 所围成的平面图形的面积。

【解】 作变量代换 T: $u=\dfrac{y^2}{x}$, $v=xy$, 简化：积分区域

则 $D \longrightarrow D^*$: $D^*=\{(u,v) \mid p\le u\le q,\ a\le v\le b\}$。 矩形区域





【例】 求由抛物线 $y^2 = px,\ y^2 = qx\ (0 < p < q)$ 及双曲线 $xy = a,\ xy = b\ (0 < a < b)$ 所围成的平面图形的面积。

【解】 又 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & y \\ \dfrac{2y}{x} & x \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{-\dfrac{3y^2}{x}} = -\dfrac{1}{3u}$。

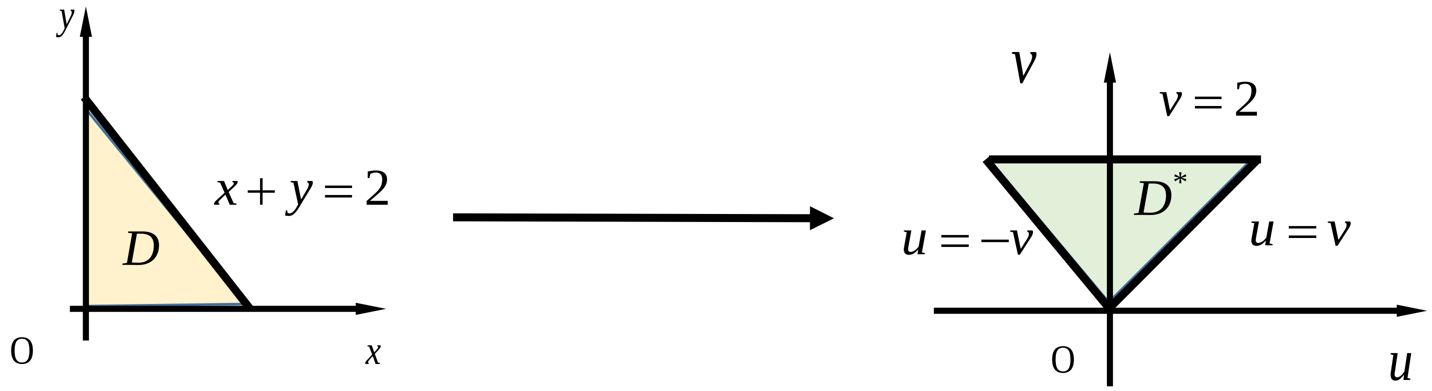
所求面积为

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (\text{被积函数 } f(x,y) \equiv 1) = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \iint_{D^*} \frac{1}{3u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}v \int_p^q \frac{1}{3u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{q}{p}\text{。}$$

【练】计算$\iint\limits_{D} e^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由$x$轴、$y$轴和直线$x+y=2$所围成的闭区域。

【解】令$u=y-x$，$v=y+x$，　　简化：被积函数



$$\iint\limits_{D} e^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D^*} e^{\frac{u}{v}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u\;=e-e^{-1}.$$

【例】 计算$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

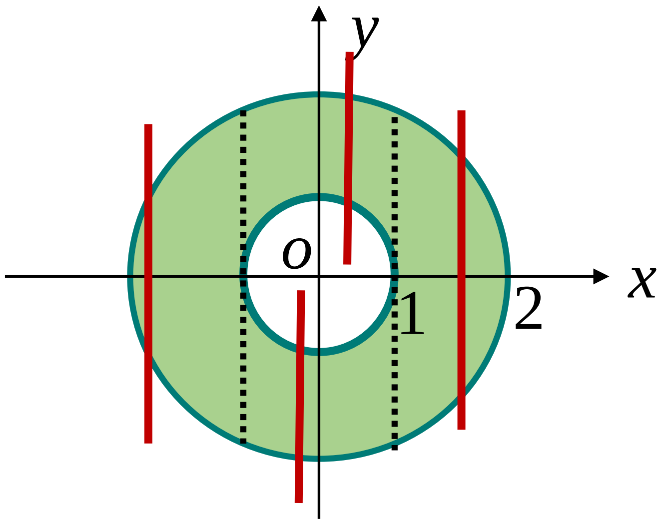
【解】

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{-2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$$

$$+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{4-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$$



$$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}e^{x^2+y^2}dy=?$$

换坐标系试试！

由极坐标与直角坐标的关系：

如何化为二次积分？

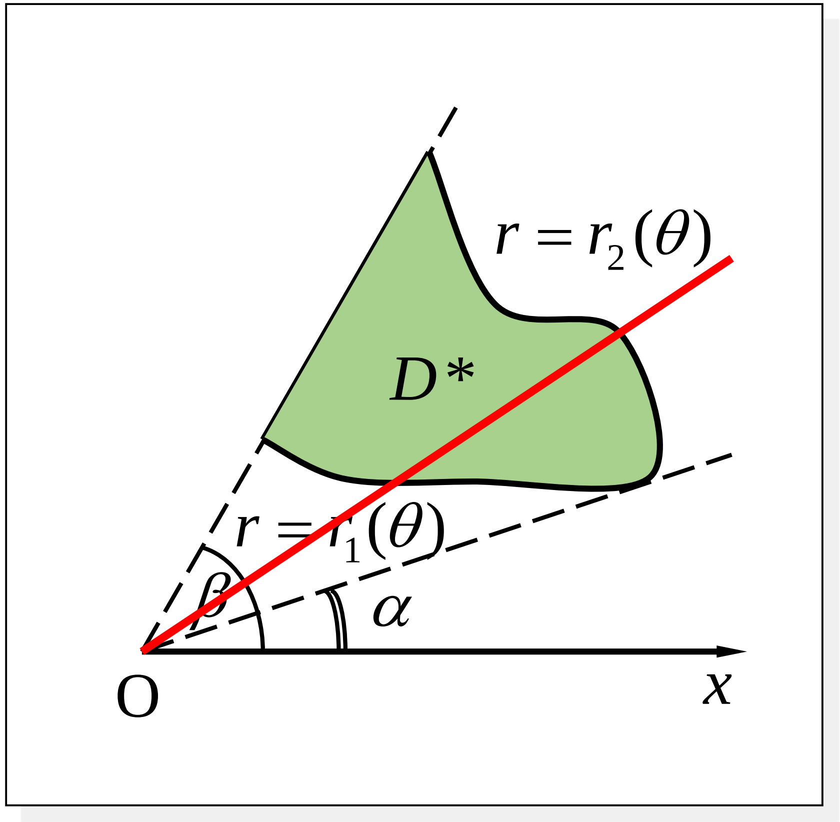
$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\ 。$$

此时 $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\,,$$

从而 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\ 。$$

(1) 极点位于积分区域外



在极坐标系中，曲线的方程为 $r = r(\theta)$。

如图所示，$D^* = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,$

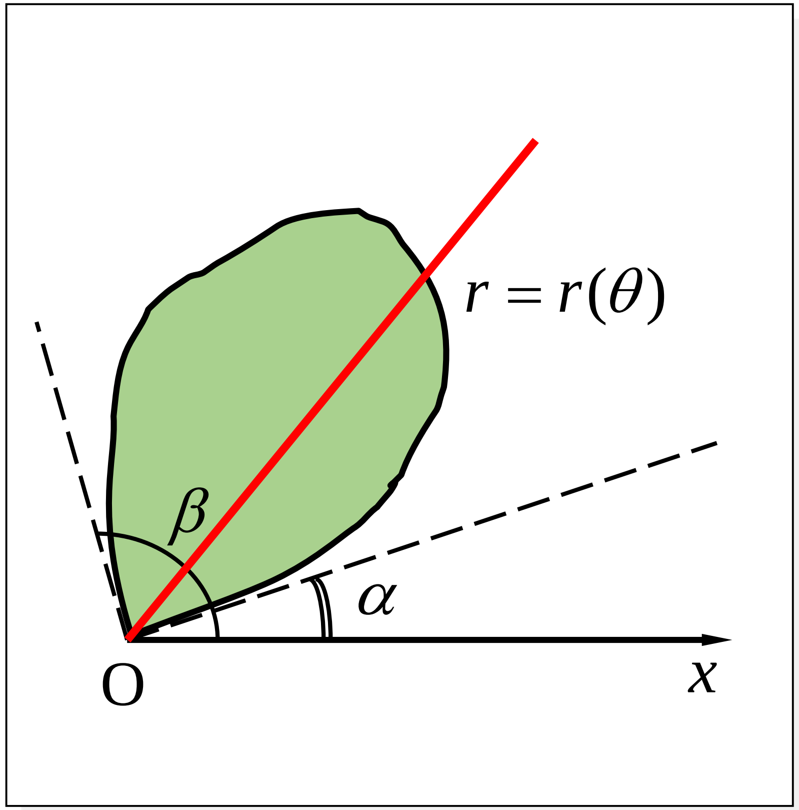
$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$，

其中，$r_1(\theta)$，$r_2(\theta) \in C([\alpha,\beta])$，则

$$\iint\limits_{D^*} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\ 。$$

(2) 极点位于积分区域边界上



如图所示，$D^* = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,$

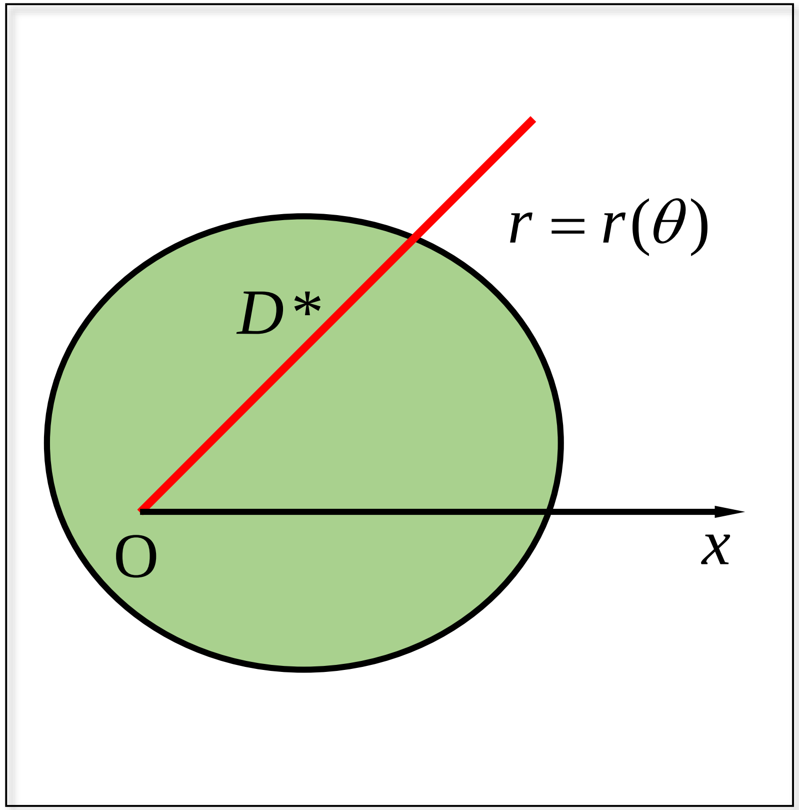
$0 \le r \le r(\theta)\}$，

其中$r(\theta) \in C([\alpha,\beta])$，则

$$\iint_{D^*} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{r(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r \text{。}$$

(3) 极点位于积分区域内部



如图所示,$D^*=\{(r,\theta)\mid\ 0\le\theta\le 2\pi,$

$0\le r\le r(\theta)\}$，

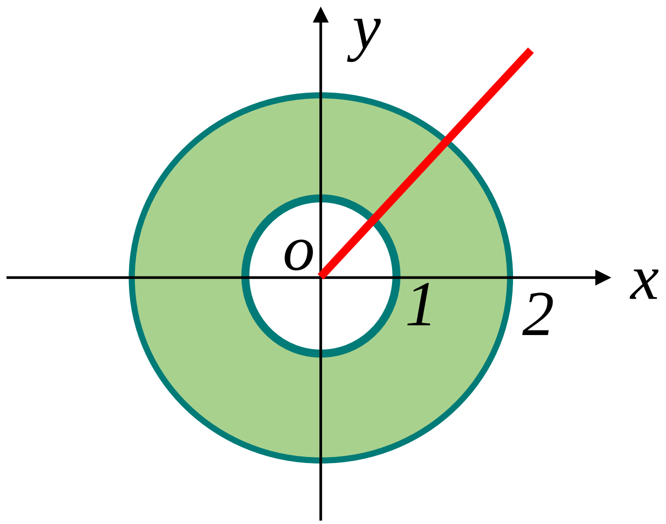
其中$r(\theta)\in C([\alpha,\beta])$，则

$$\iint\limits_{D^*} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\ 。$$

【例】 计算$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

【解】 采用极坐标进行计算：$D\to D^*=\{(r,\theta)\,|\;\; 0\le\theta\le 2\pi,\ 1\le r\le 2\}$



$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 e^{r^2}rdr$$

$$=\pi(e^4-e).$$

极坐标下：
本题的被积函数、积分区域均简化！
简单高效！

【练】 设函数$f(u)$连续，区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2y\}$，

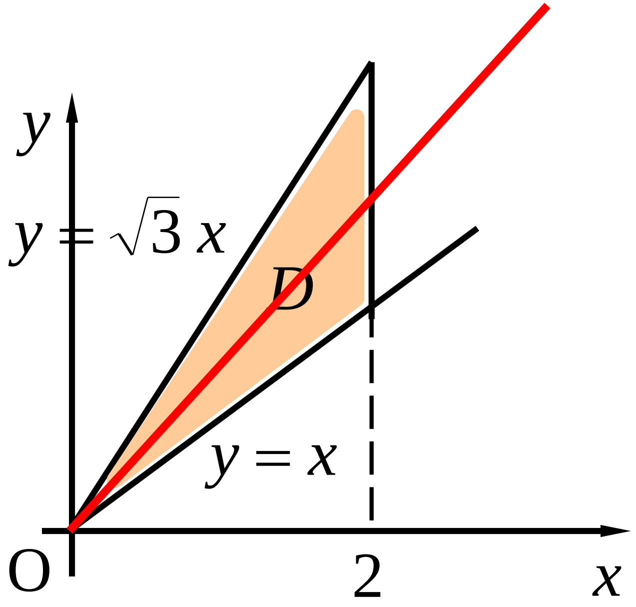
则$\iint\limits_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(\quad)$

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\,\mathrm{d}y$ (B) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\,\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}r$ (D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\,\mathrm{d}r$

【例】 将二重积分化为极坐标形式：$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y$ 。

【解】



引入极坐标 $x=r\cos\theta$ ， $y=r\sin\theta$ ，

$D=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 2,\ x\le y\le\sqrt{3}\,x\}$ 。

故 $r\cos\theta\le r\sin\theta\le\sqrt{3}\,r\cos\theta$ ，

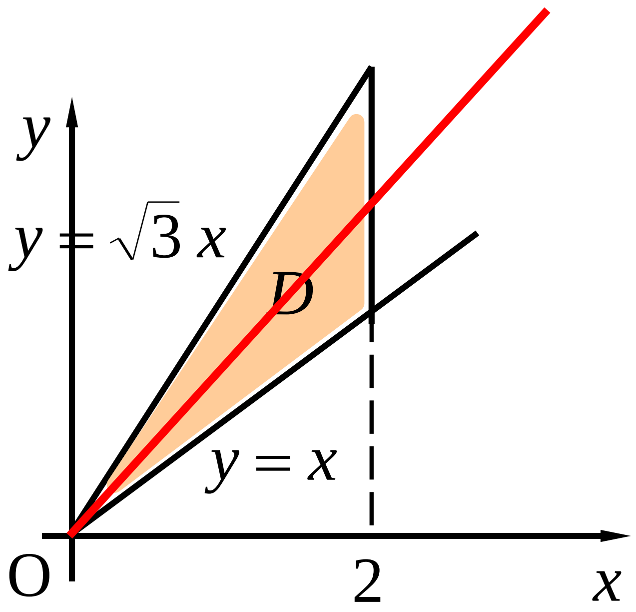
由此，得 $1\le\tan\theta\le\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$ ，

又由 $x=r\cos\theta=0$ 得 $r=0$ ；

由 $x=r\cos\theta=2$ 得 $r=\dfrac{2}{\cos\theta}=2\sec\theta$ 。

【例】 将二重积分化为极坐标形式：$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y$ 。

【解】



故在极坐标系下 $D \to D^*$：

$$D^* = \{(r,\theta) \mid \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3},\ \ 0 \le r \le 2\sec\theta\},$$

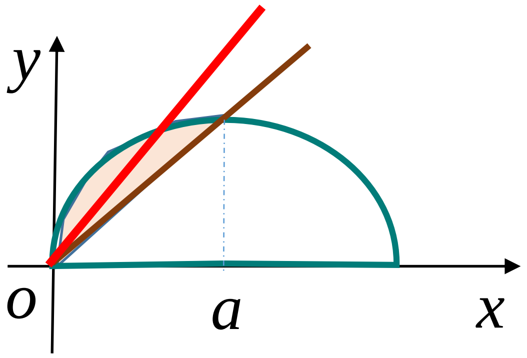
从而，原积分化为

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y = \iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D^*} f(r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \ = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sec\theta} f(r)\,r\,\mathrm{d}r \text{。}$$

【练】计算二次积分 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}y$

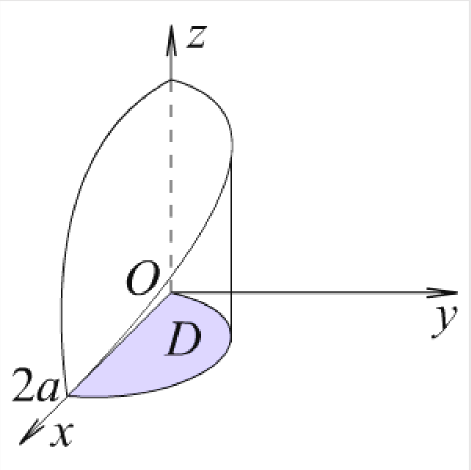
【解】 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}y$



$$= \iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^2 r\,\mathrm{d}r$$

$$= 4a^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \left(\frac{3}{8}\pi+1\right)a^4.$$

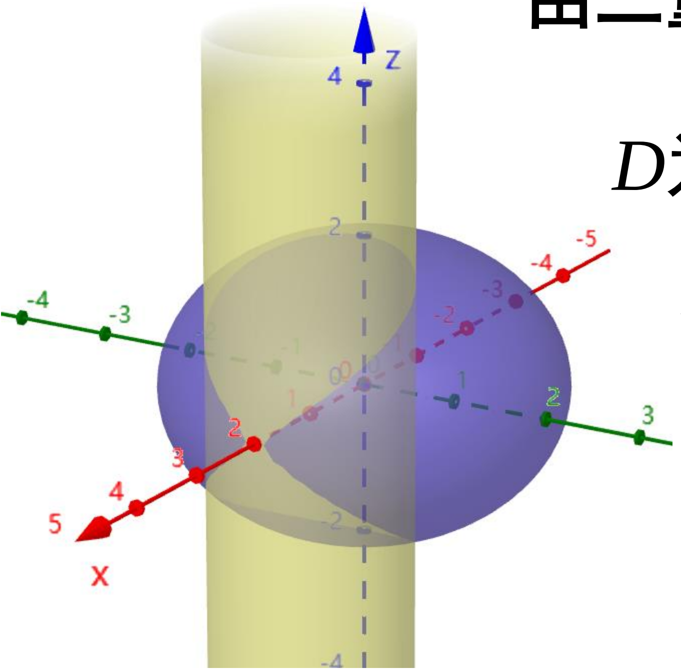
【例】 求球体$x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$所截得的(含在圆柱面内的部分)立体的体积.

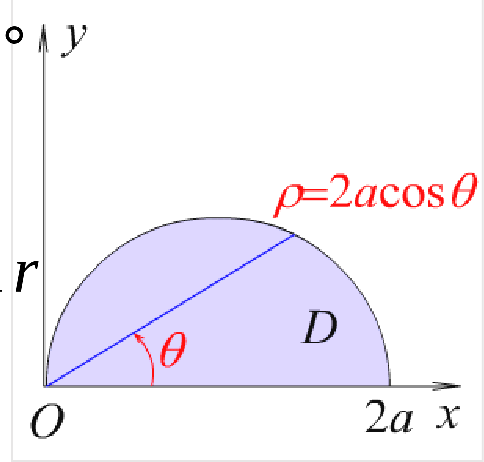


【解】 **由图形的对称性, 所求体积为第一卦限部分的四倍.**

由二重积分的定义知： $V=4\iint\limits_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$,

D为半圆周$y=\sqrt{2ax-x^2}$与x轴所围成的闭区域。





利用极坐标系进行计算

$$=4\iint\limits_{D^*}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(\sin^3\theta-1)d\theta=(\frac{16}{3}\pi-\frac{64}{9})a^3$$

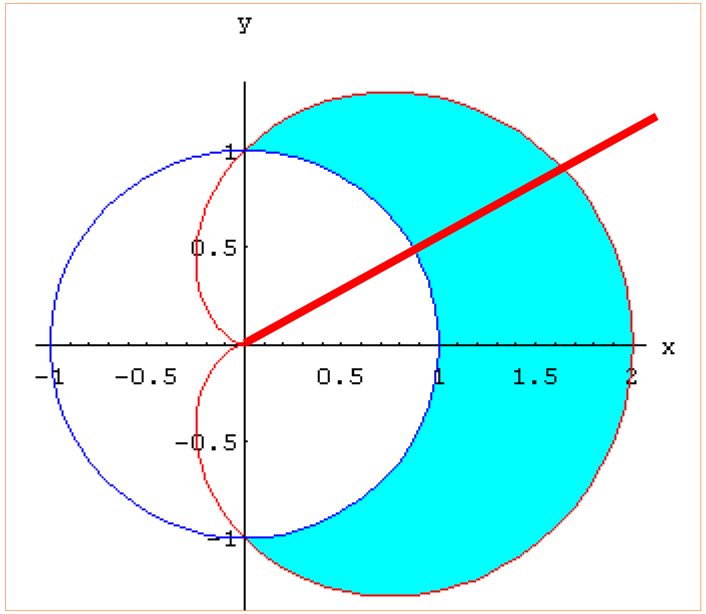
【练】 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$. D 是由心脏线$r=a(1+\cos\theta)$ 与圆 $r=a$ 围成（取圆外部）.

【解】 由图形的对称性有：

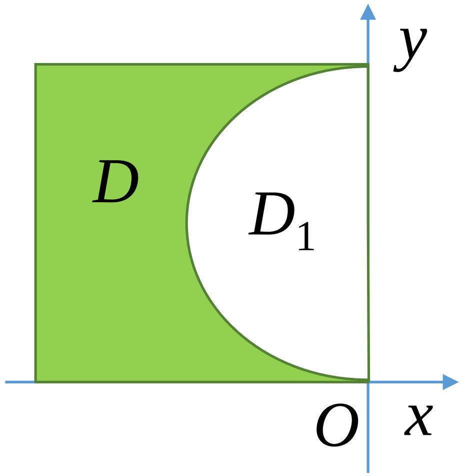
$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_1^*} r\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)} r\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3[(1+\cos\theta)^3-1]\mathrm{d}\theta \;=a^3\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right).$$



【例】 计算 $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.



【解1】 $$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2 y\,\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}\mathrm{d}x$$

【解2】 $$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

本节小结

换元法

简化积分区域D

简化被积函数 f

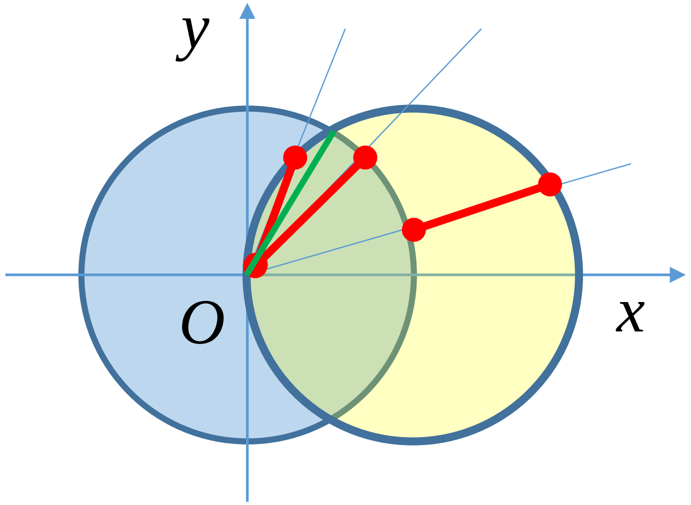
极坐标使用场景：

当积分区域D为**圆域**或圆域的一部分，

或被积函数为 $f(x^2+y^2),\ f(\frac{x}{y})$ 的形式时。

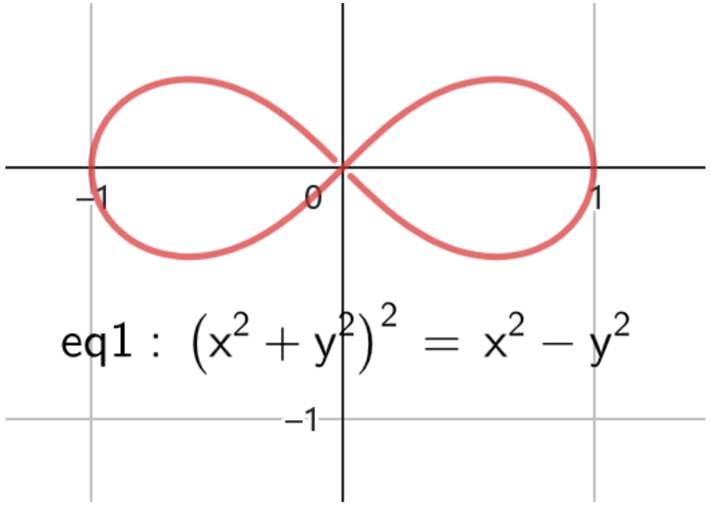
思考题1

已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\le 1\}$，计算二重积分$\iint_D |\sqrt{x^2+y^2}-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



思考题2

曲线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geq 0, y\geq 0)$与$x$轴所围成的区域为$D$，求$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



设区域D为$x^2+y^2\le R^2$, 求$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

设$g(x)>0$为已知连续函数，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D \frac{\lambda g(x)+\mu g(y)}{g(x)+g(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$，其中λ，μ为正常数。