湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 微 分 学

2.8 方向导数与梯度

• 主 讲： 于 红 香

第二章　多元函数微分学

第八节 方向导数与梯度

一. 方向导数

二. 方向导数的计算

三.梯 度

第八节 方向导数与梯度

本节学习要求：

- 正确理解方向导数的概念。
- 熟练掌握方向导数的计算方法。
- 了解梯度的概念和计算方法。

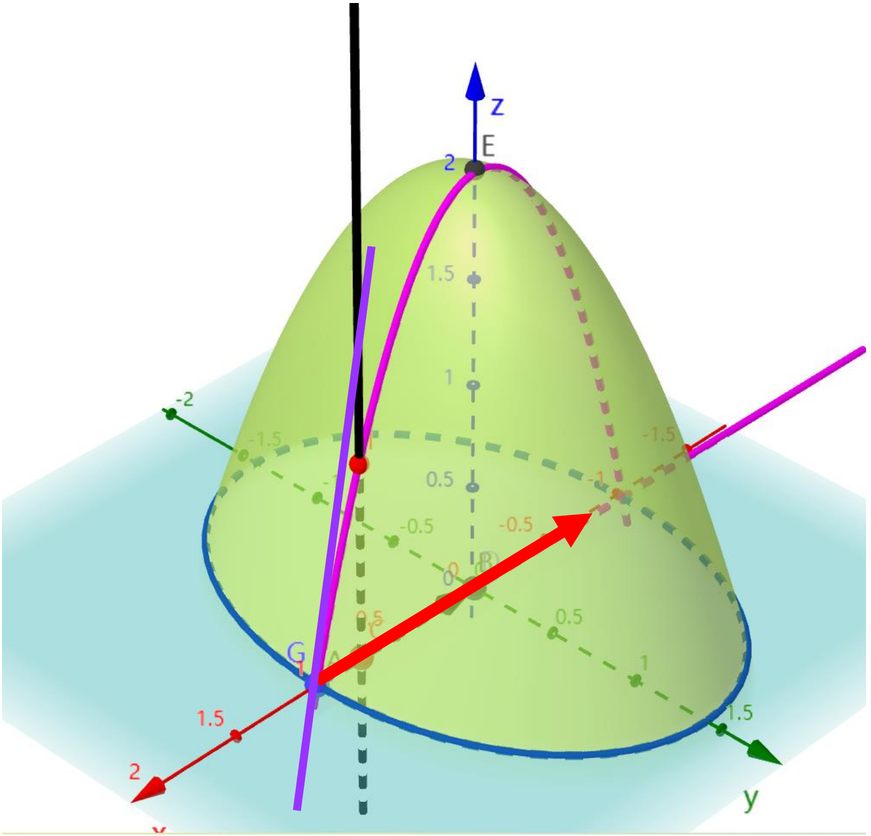
引例：　抢占制高点

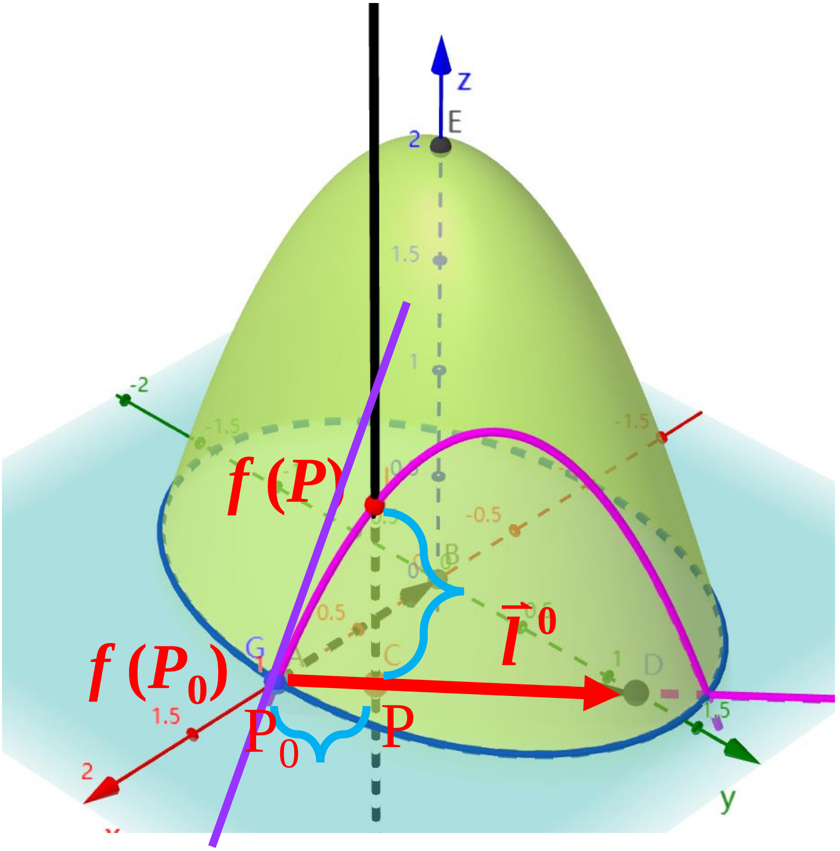
设山的底面所在平面为xoy坐标面，山的高度函数为$z=2-2x^2-y^2$。选择什么路径能最快到达山顶?

两个问题：

沿特定方向爬山的升高率?　　1. 方向导数

沿哪个方向爬，升高最快?　　2. 梯度





$f(X)$ 沿 $\vec{l}^{\,0}$ 方向的导数：

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\|\overline{P_0P}\|}$$

定理1

设函数$z=f(P)$在$U(P_0)$内有定义,以P_0为端点引射线l.

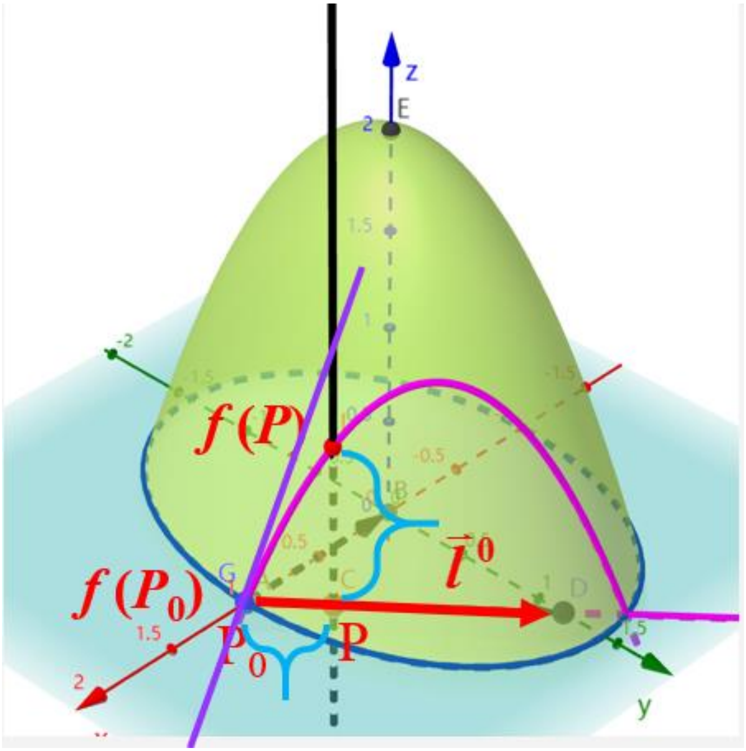
P是射线 l 上的另一点. 若P 沿 l 趋于P_0时,极限

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}$$

存在，则称该极限值为函数$f(P)$在点P_0处沿l方向的

方向导数.记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{P=P_0}=\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}$$ 或 $f_l'(P_0)$.



注意:
函数 $u=f(X)$已知
射线方向已知

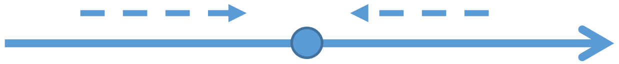
一. 方向导数

函数$z = f(x, y)$的偏导数$f'_x(x_0, y_0)$是否为函数沿x轴正向的方向导数?

在方向导数中，分母 $\| X - X_0 \| > 0.$

单向

在偏导数中，分母 Δx, Δy 可正、可负.



双向

即使 l 的方向与 x 轴，y 轴的正方向一致时，

方向导数与偏导数也是两个**不同的概念**.

若函数$z=f(x,y)$在点$X_0(x_0,y_0)$的偏导数存在，

则在点X_0处沿X 轴正向的方向导数是多少?

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+0^2}}=f_x'(x_0,y_0).$$

在点X_0处沿X 轴负向的方向导数是多少?

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+0^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{-\Delta x}=-f_x'(x_0,y_0).$$

一. 方向导数

若已知函数 $z=f(x,y)$ 在点$X_0(x_0,y_0)$可微，且在点$X_0(x_0,y_0)$的射线 l 的单位方向向量为(cosα,cosβ),如何求z在点X_0沿l的方向导数?

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{X=X_0}=\lim_{X\to X_0}\frac{f(X)-f(X_0)}{\|X-X_0\|}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0+\\ \Delta y\to 0+}}\frac{f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$\Delta x=\cos\alpha\cdot t,\quad \Delta y=\cos\beta\cdot t$$

射线$l:\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\cos\beta}=t,\quad t>0$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha\cdot t+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta\cdot t+o(t)}{t}$$

$$=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$$

二. 方向导数的计算

定理1 若函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，则函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿给定方向$\vec{l}^{\,0}=(\cos\alpha,\cos\beta)$的方向导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$$

其中,各偏导数均为在点(x_0,y_0)处的值.

此结论可以推广到三元函数情形！

定理2 若函数 $z = f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处**可微**, 则函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处沿给定方向 $\vec{l}^{\,0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的方向导数存在, 且

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

其中, 各偏导数均为在点 (x_0, y_0, z_0) 处的值.

【例】 设 $u=xyz$，求函数在点 $P(1,\ 2,-2)$处沿方向 $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ 的方向导数 .

【解】 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_P=yz\big|_P=-4;\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_P=xz\big|_P=-2;$

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_P=xy\big|_P=2,$

$\|\vec{l}\|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\quad \cos\beta=\dfrac{2}{3},\quad \cos\gamma=\dfrac{2}{3}.$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=(-4)\cdot\frac{1}{3}+(-2)\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

【练】求函数$z = xe^{2y}$在点$P(1,0)$处沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$的方向的方向导数.

【解】

$$\vec{l} = \overrightarrow{PQ} = (1,-1) \qquad \vec{l}^{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.e^{2y}\right|_{(1,0)} = 1; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)} = 2,$$

故沿PQ方向的方向导数为：$\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\cdot(1,2) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

【例】 由点$P(x, y)$到坐标原点的距离定义函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$.问：在坐标原点（0,0）处，两个偏导数是否存在？它在该点沿任何方向的方向导数是否存在？

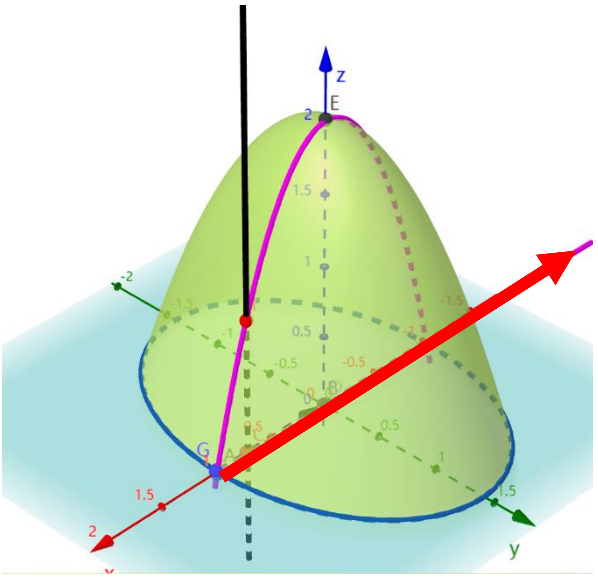
【解】

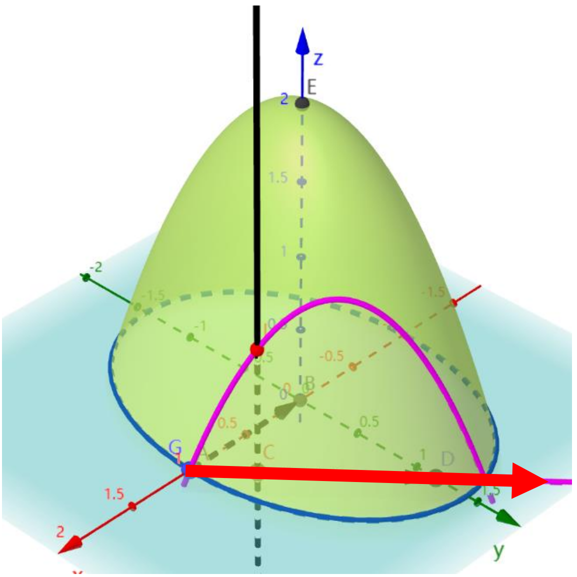
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\text{不存在。}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$$

此例说明：1. 方向导数存在时, 偏导数不一定存在.

2.可微是方向导数存在的充分条件, 而不是必要条件.





可微函数 $u = f(X) = f(x, y, z)$

在给定点 X_0 处沿什么方向增加得最快?

由方向导数的计算公式

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}\triangleq\nabla u\cdot\vec{l}^{\,0}=prj_{\vec{l}^{\,0}}\nabla u$$

如何选方向 l,使得方向导数达到最大?

当 两个向量的方向重合时, $\frac{\partial u}{\partial l}$ 取最大值!

“∇”, 读作"nabla" 或 “del”

定义

设$\Omega \subset R^3$, $u = f(X) \in C^1(\Omega)$, $\forall X_0 \in \Omega$, 则称向量

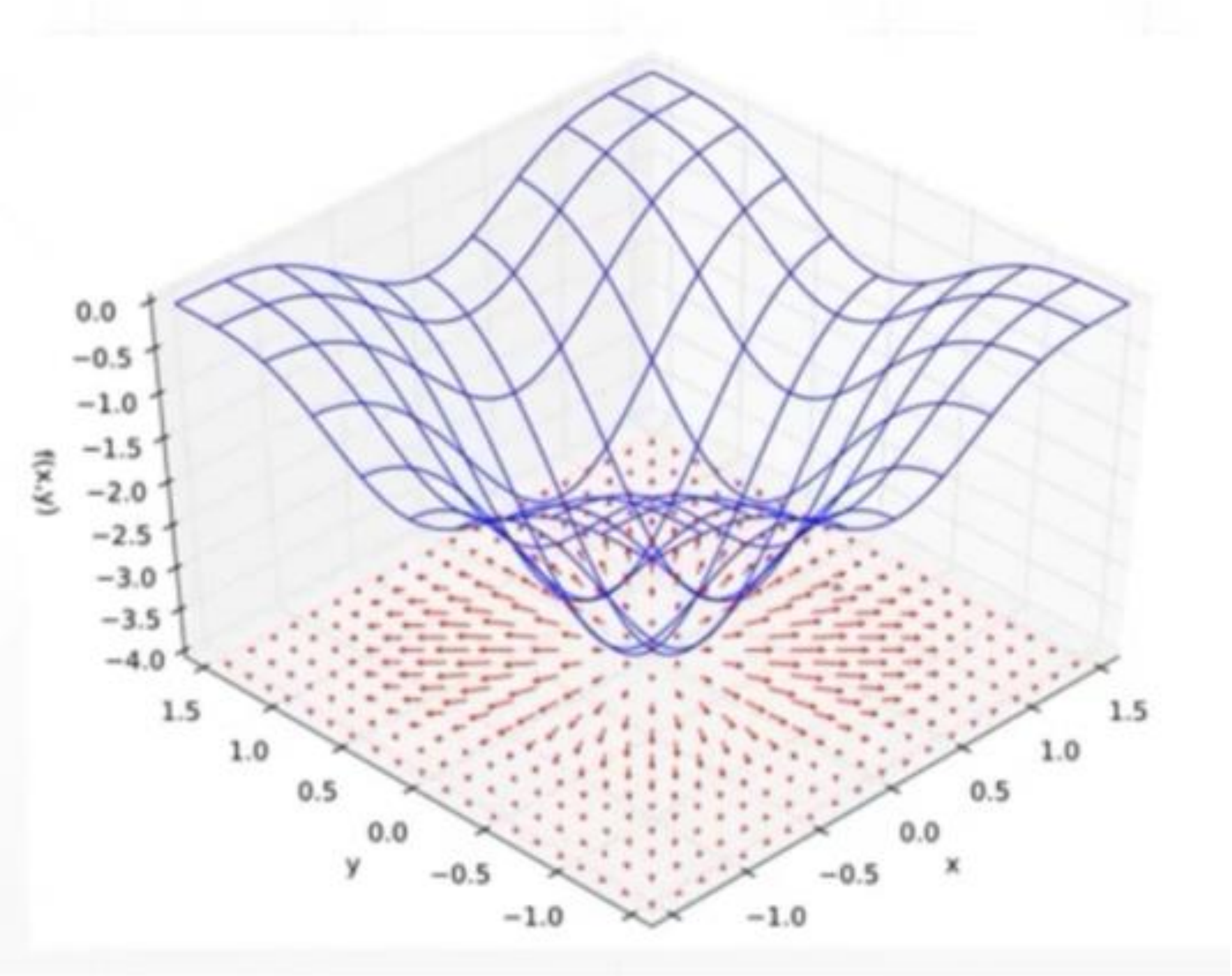
$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(X_0)}{\partial z}\vec{k}$$

为函数$f(X)$在点X_0处的梯度, 记为grad $f(X_0)$或$\nabla f(X_0)$。

注意：梯度即为**函数增长最快的方向，是向量!**

梯度的方向与取得最大方向导数值的方向一致,

而**梯度的模**就是函数在该点的方向导数的最大值.


0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5
−4.0
f(x,y)
1.5
1.0
0.5
0.0
y
−0.5
−1.0
1.5
1.0
0.5
0.0
x
−0.5
−1.0

在 R^2 中 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$

在 R^n 中 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\cos\alpha_n$

可统一表示为

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{l}^{\,0}}$$

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

$$\vec{l}^{\,0} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cdots, \cos\alpha_n), (n \geq 2).$$

【例】 设 $u = xyz + z^2 + 5$，求 grad u，并求在点 $M(0, 1, -1)$ 处方向导数的最大 (小) 值 .

【解】 $\because \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = yz\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = xz\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy + 2z\,,$

$$\therefore \quad \operatorname{grad} u \Big|_{(0,1,-1)} = (yz\,, xz\,, xy + 2z)\Big|_{(0,1,-1)}$$

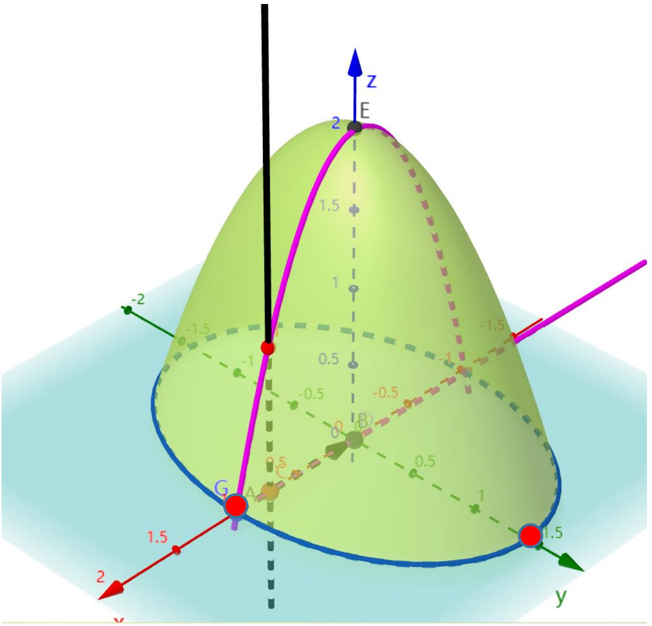
$$= (-1, 0\,, -2)$$

从而 $$\max\left\{ \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_M \right\} = \|\operatorname{grad} u\| = \sqrt{5}$$

$$\min\left\{ \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_M \right\} = -\|\operatorname{grad} u\| = -\sqrt{5}$$

设山的底面所在平面为*xoy*坐标面，山的高度函数为$z=2-2x^2-y^2$。

选择什么路径能最快到达山顶?



$(-4x\ ,\ -2y)|_{(1,0)}$ =(-4,0)

$(-4x\ ,\ -2y)|_{(0,\sqrt{2})}$ =$(0,-2\sqrt{2})$

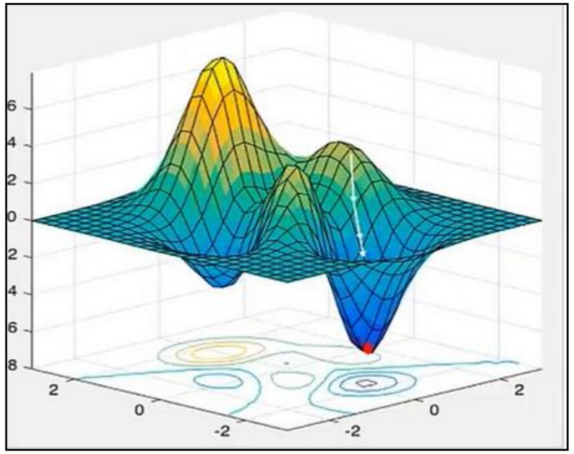
【解】先确定在山脚的哪个点开始爬山，使得梯度最大。

$$\text{grad } z = (-4x\ ,\ -2y).$$

$$\max\|\text{grad } z\| = \sqrt{(-4x)^2+(-2y)^2}$$
$$s.t.\ 2-2x^2-y^2=0$$

这是一个带约束的极值问题，后面解决。

梯度的应用



机器学习：

梯度下降法！

军事应用：

缉毒犬最佳搜索方向

生活现象：

荷叶水滴流向，

热锅上的蚂蚁

本节总结

方向导数：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \mathrm{grad}\, u \cdot \vec{l}^{\,0}}$$

函数沿特定方向的变化率

梯度（向量）

$$\mathrm{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

使函数增加最快的特定方向