2021020628 高数 A（2）参考解答

一、计算题 I（每小题 6 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}y$

$$=1\times 2=2.$$

2. 取方向向量为 $\overrightarrow{PQ}=(2,3,4)$，

所以直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}.$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot 2x=yf_1'+2xf_2'$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot x+f_2'\cdot(-2y)=xf_1'-2yf_2'$$

4. 向量 $\overrightarrow{OP}=(1,\sqrt{2},1)$, 所以 l 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

.

$$u_x'=y+z,u_y'=x+z,u_z'=x+y.$$

所以 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)}=(1+2)\times\dfrac{1}{2}+(1+2)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+(1+1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5+3\sqrt{2}}{2}.$

5. $ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+(2x)^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx,$

$$I=\int_L\sqrt{y}ds=\int_0^1\sqrt{x^2}\sqrt{1+4x^2}dx=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2)=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

二、计算题 II（每小题 8 分，共 40 分）

6. 令 $F(x,y,z)=4x^2+2y^2+z^2-16,$

$$F_x'=8x,F_y'=4y,F_z'=2z.$$

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{4x}{z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=-\dfrac{2y}{z}.$

2021020628 高数 A（2）参考解答

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(-\dfrac{4x}{z})=-4\dfrac{z-xz'_x}{z^2}=-4\dfrac{z-x(-\dfrac{4x}{z})}{z^2}-\dfrac{4(z^2+4x^2)}{z^3}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{4x}{z})=\frac{4x}{z^2}z'_y=\frac{4x}{z^2}(-\frac{2y}{z})=-\frac{8xy}{z^3}.$$

7. 在极坐标系下，$D:-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\theta.$

所以 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cdot rdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{r^3}{3})\bigg|_0^{2\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta=\frac{32}{9}.$$

8. 在球面坐标系下，$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},0\le r\le 4\cos\theta.$

所以 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r^3dr$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}64\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{56\pi}{3}.$$

9. 将 Σ 分成 Σ_1,Σ_2 两部分，$\Sigma_1:z=-\sqrt{1-x^2-y^2},\Sigma_2:\sqrt{1-x^2-y^2}$，则 Σ_1,Σ_2 在 $x\mathrm{O}y$ 平面上的投影区域 D 为以原点为圆心的单位圆的第一象限部分.所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}xyzdxdy=2\iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr=\frac{2}{15}$$

10. 取 x 轴上从点 O 到 A 的直线段 L_1，则 $\Gamma=L+L_1$ 形成一条封闭曲线，记该封闭曲线围成的平面区域为 D.

令 $P=e^x\sin y-my,Q=e^x\cos y-m,$ 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-m,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y.$

由格林公式有

$$\oint_\Gamma(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint\limits_D mdxdy$$

$$=m\cdot\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2=\frac{m\pi a^2}{8}.$$

2021020628 高数 A（2）参考解答

而$\int_{L_1}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=0$，

所以$I=\oint_\Gamma-\int_{L_1}\ =\dfrac{m\pi a^2}{8}$.

三、解答题（每小题 10 分，共 30 分）

11. 收敛半径为$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}}\right|=1$.

故该级数在$(-1,1)$上绝对收敛.

当$x=-1$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$为交错级数，而$\dfrac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty)$且单调递减，从而收敛.

当$x=1$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$为调和级数，发散.

所以收敛域为$[-1,1)$.

设和函数为$S(x)$,则$S(0)=1$. 当$x\neq 0$时，

$$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n dx=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^n dx=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}dx$$
$$=-\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

所以和函数为$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases}$

12. 所求曲面在xOy平面内的投影为$D:(x-1)^2+y^2\le 1$,

又$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2}$,

所以面积为$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}S_D=\sqrt{2}\pi$.

13. (1)令$F(x,y,z)=x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{4}-1$,则$F_x'=2x,F_y'=y,F_z'=\dfrac{z}{2}$.

故椭球面在 M 点处的法向量为 $(2x_0, y_0, \frac{z_0}{2})$.

所以切平面方程为 $2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+\frac{z_0}{2}(z-z_0)=0$.

（或 $x_0x+\frac{y_0y}{2}+\frac{z_0z}{4}=1$）

（2）点 M 处的切平面在坐标轴上的截距分别为 $\frac{1}{x_0},\frac{2}{y_0},\frac{4}{z_0}$, 所以四面体体积为

$$V=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x_0}\cdot\frac{2}{y_0}\cdot\frac{4}{z_0}\right)=\frac{4}{3x_0y_0z_0}.$$

所以问题转化为求函数 $V=\frac{4}{3xyz}$ 在约束条件 $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ 下的最小值.

因为函数 $V=\frac{4}{3xyz}$ 取最小值时，函数 xyz 取得最大值，所以可构造拉格朗日函数

$$\Phi(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}-1).$$

令 $\begin{cases}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=yz+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=xz+\lambda y=0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}=xy+\frac{\lambda z}{2}=0,\\ x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1.\end{cases}$ 解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}, y=\frac{\sqrt{6}}{3}, z=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 所以所求切点为 $(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$. 此时最小体积为 $V=\frac{4}{3x_0y_0z_0}=\sqrt{6}$.