湖南大学理工类必修课程

大 学 数 学 AII

—— 多元元微积分学

1.2 向量的数量积、向量积、混合积

- 主讲：于红香

向量代数与空间解析几何

1.2 向量的数量积、向量积、混合积

一. 向量的数量积

二. 向量的向量积

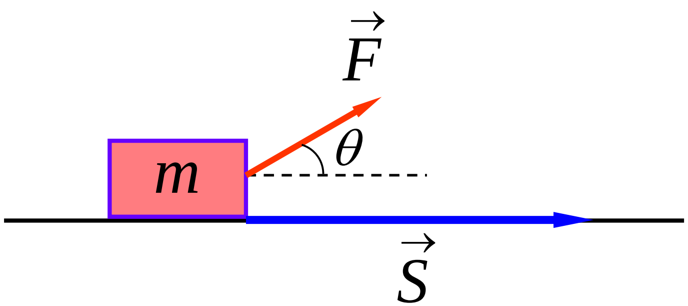
三. 向量的混合积

数量积的物理模型

功＝力的大小×位移

(方向一致)

外力$\vec{F}$作用于质量为m的物体上，使物体沿直线移动了距离 S，该力所作的功为 $W=\|\vec{F}\|\cos\theta\cdot\|\vec{S}\|$。



$$\boldsymbol{W = prj_{\vec{S}}\vec{F}\cdot\|\vec{S}\|}$$

$$W=\|\vec{F}\|\|\vec{S}\|\cos\theta$$

力和位移是向量：$\vec{F}$，$\vec{S}$；

功是标量(数量)：W。

一. 向量的数量积

1. 向量的数量积的概念.

2. 向量的数量积的性质.

3. 向量的数量积的坐标形式.

4. 两个向量间的夹角.

5. 数量积的几何作用

向量的数量积

设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为任意两个向量，则称数值 $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$

为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积，记为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta,$$

其中，$\theta=<\vec{a},\vec{b}>$，且 $0\le\theta\le\pi$。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\,prj_{\vec{a}}\,\vec{b} \qquad\longrightarrow\qquad prj_{\vec{a}}\,\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{b}\|\,prj_{\vec{b}}\,\vec{a} \qquad\qquad\qquad prj_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

性质 1

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \quad (\text{交换律})$$

证 由数量积的定义, 得

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos<\vec{a},\vec{b}>,$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=\|\vec{b}\|\|\vec{a}\|\cos<\vec{b},\vec{a}>,$$

因为 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=\cos<\vec{b},\vec{a}>$, 所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}。$$

性质 2

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \quad (\text{分配律})$$

$$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}$$

证 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\|\vec{a}\|\,prj_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})$ “和的投影等于投影的和”

$$=\|\vec{a}\|(prj_{\vec{a}}\vec{b}+prj_{\vec{a}}\vec{c})$$

$$=\|\vec{a}\|\,prj_{\vec{a}}\vec{b}+\|\vec{a}\|\,prj_{\vec{a}}\vec{c}$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}。$$

例

规定：$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$，则有 $\vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2$。

求 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})$ 和 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ 的表达式。

解 由数量积的分配律,

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot(\vec{c}+\vec{d})+\vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{d})$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+(-\vec{b}))$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(-\vec{b})+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot(-\vec{b})$$

$$=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}^2$$

$$=\vec{a}^2-\vec{b}^2。$$

常用的公式

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^{2}-\vec{b}^{2}$$

$$(\vec{a}\pm\vec{b})^{2}=\vec{a}^{2}\pm 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{2}=\|\vec{a}\|^{2}$$

与相应的初等代数公式进行比较

性质 3 $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\lambda$

其中λ为实数。 (与数乘的结合律)

【证】 $\lambda=0$ 时，等式显然成立。

其它情形类似可证

$\lambda>0$ 时，因为 $<\lambda\vec{a},\ \vec{b}>=<\vec{a},\ \vec{b}>$，所以，

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\|\lambda\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos<\lambda\vec{a},\ \vec{b}>$$

$$=|\lambda|\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos<\vec{a},\ \vec{b}>=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})。$$

$\lambda<0$ 时，因为 $<\lambda\vec{a},\ \vec{b}>=\pi-<\vec{a},\ \vec{b}>$，所以，

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\|\lambda\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\pi-<\vec{a},\ \vec{b}>)$$

$$=-\lambda\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|(-\cos<\vec{a},\ \vec{b}>)=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})。$$

例

设 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，且 $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|=1$，

求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$。

$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2$

【解1】 因为 $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2=\|\vec{0}\|^2=0$,

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{3}{2}$。

例

设$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，且$\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|=1$，

求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$。

$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2$

【解2】 因为 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，所以，$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$.

$$2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})+(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{c}\cdot(\vec{b}+\vec{a})+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$$

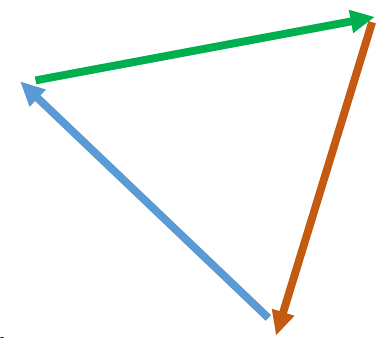
$$=\vec{b}\cdot(-\vec{b})+\vec{c}\cdot(-\vec{c})+\vec{a}\cdot(-\vec{a})=-3.$$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{3}{2}$。

例

设 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，且 $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=\|\vec{c}\|=1$，

求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$。



【解3】 从几何角度考虑该题：

因为 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，而且均为单位向量，

所以，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$三向量构成一个封闭的等边三角形。

任意两向量的夹角为$\dfrac{2}{3}\pi$。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=2\vec{a}\cdot\vec{b}=3\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{3}{2}.$$

向量相互垂直的充要条件

定理 1 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量，则

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

证 由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos < \vec{a}, \vec{b} >$ 立即可得

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff < \vec{a}, \vec{b} > = \frac{\pi}{2} \iff \vec{a} \perp \vec{b}。$$

规定：$\vec{0}$ 与任何向量垂直。

基本单位向量的数量积

基本单位向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 间的数量积如下：

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{i}^{\,2} = \|\vec{i}\|^2 = 1;$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0\,;$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{j}^{\,2} = \|\vec{j}\|^2 = 1;$$

$$\vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0\,;$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = \vec{k}^{\,2} = \|\vec{k}\|^2 = 1;$$

$$\vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot i = 0\ 。$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^{\,2} = \|\vec{a}\|^2$$

$$\vec{i}\perp\vec{j},\quad \vec{i}\perp\vec{k},\quad \vec{j}\perp\vec{k}\ 。$$

向量的数量积的坐标形式

设有向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=a_xb_x\vec{i}^2+\underline{a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}}+\underline{a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}}$$

$$+\underline{a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}}+a_yb_y\vec{j}^2+\underline{a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}}$$

$$+\underline{a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}}+\underline{a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}}+a_zb_z\vec{k}^2$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z。$$

向量的数量积的坐标形式

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$， $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z。$$

由此推出：

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0。$$

例

$$\qquad\qquad \|\vec{a}\| \quad \|\vec{b}\| \qquad\qquad\qquad |\vec{a}\cdot\vec{b}|$$

证明: $\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\geq|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z|$。

【分析】 不等式两边看成向量的模的坐标形式

【解】 令 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则由

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos<\vec{a},\vec{b}>|\leq\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|,$$

得 $$|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z|\leq\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\text{。}$$

(当 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=1$ 时等号成立, 此时 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ 。)

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 为非零向量，则

由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\ prj_{\vec{a}}\vec{b}$, 可得 $prj_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$。

由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\cos<\vec{a},\vec{b}>$，

可得 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$，

由此可求出 $<\vec{a},\vec{b}>$。

注意：$0\le<\vec{a},\vec{b}>\le\pi$

例

设 $\vec{a}=(4,-1,\ 2)$, $\vec{b}=(0,\ 3,\ 1)$, $\vec{c}=(-5,\ 1,-3)$,

求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 以及$\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$ 和 $prj_{\vec{b}}\ \vec{a}$。

【解】$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times0+(-1)\times3+2\times1=-1$。

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0\times(-5)+3\times1+1\times(-3)=0$。

$$\cos\langle\vec{b},\vec{c}\rangle=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|}=0,$$ 所以，$\langle\vec{b},\vec{c}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\vec{b}\perp\vec{c}$。

$$prj_{\vec{b}}\ \vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}=\frac{-1}{\sqrt{0^2+3^2+1^2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}。$$

数量积的几何作用

1. 求向量的投影

2. 判断两个向量垂直

3. 求两个向量间的夹角

二. 向量的向量积

1. 向量积的概念.

2. 向量积的性质.

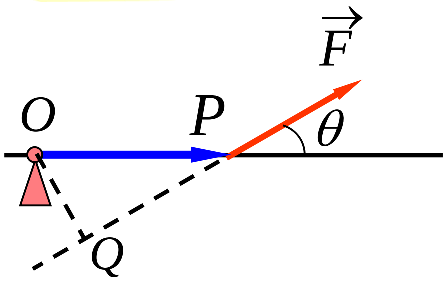
3. 向量积的坐标形式.

4. 向量积的几何作用

力矩的大小＝力的大小×力臂的长度

方向: 由力臂到力符合右手法则

向量积的物理模型



设力 $\vec{F}$ 作用于杠杆上点 P 处,

$\vec{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 间的夹角为 θ。

则力 $\vec{F}$ 对点 O 产生的力矩为一个向量 $\vec{M}$, 且

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{F}\|\|\overrightarrow{OQ}\| = \|\vec{F}\|\|\overrightarrow{OP}\|\sin\theta,$$

$$\boxed{\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}}$$

$\vec{M}$ 的方向是从 $\overrightarrow{OP}$ 到 $\vec{F}$ 以不超过 π 的角度旋转时,

按右手法则确定, 且 $\vec{M}$ 垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\vec{F}$。

向量的向量积

设$\vec{c}$是由$\vec{a}$和$\vec{b}$按下列方式确定的向量：

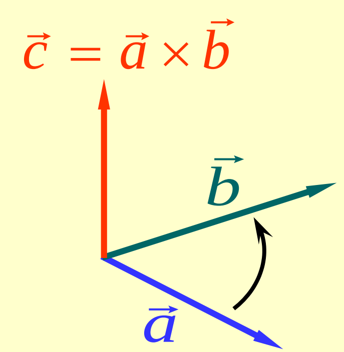
(1) $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi \quad (\theta = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)$;

(2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$ （$\vec{c}$垂直于$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的平面）；

(3) $\vec{c}$的方向，按右手法则从$\vec{a}$转到$\vec{b}$确定，

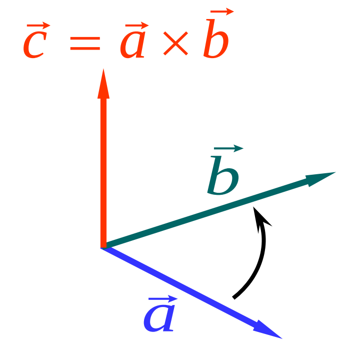
则称$\vec{c}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积，记为$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$。

右手法则：伸开右手，四个手指以不超过π的角度从$\vec{a}$的正向转向$\vec{b}$的正向握拢时，拇指所指的方向为$\vec{c}$的正向。



注意

1. $\vec{a}\times\vec{b}$ 是一个新向量。



2. $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$, $\quad\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$。

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0;$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0。$$

3. $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$。

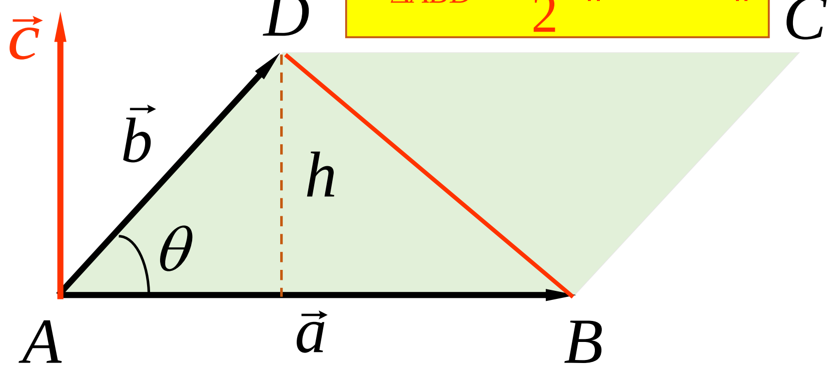
$$(\|\vec{a}\times\vec{a}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{a}\|\sin<\vec{a},\ \vec{a}>=0)$$

4. $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$。

向量积的几何意义

以向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积:

$$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|$$



$$S=\|\vec{a}\|h=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta。$$

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}。$$

$$\|\vec{c}\|=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta,$$

向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的模 $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$

等于以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=S_{\square ABCD}$$

2. 向量的向量积的性质

性质 1

$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a}) \quad (\text{反交换律})$$

向量积不满足交换律

证 若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$, 则 $<\vec{a},\vec{b}>=0$ 或 $<\vec{a},\vec{b}>=\pi$, 故

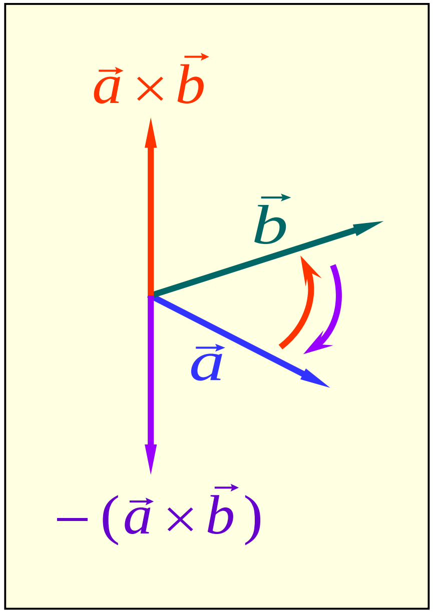
$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})=\vec{0}\,。$$

若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行, 则

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|-(\vec{b}\times\vec{a})\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin<\vec{a},\vec{b}>,$$

而按右手法则 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{b}\times\vec{a}$ 的方向相反, 所以,

$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})\,。$$



2. 向量的向量积的性质

性质 2

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{b})\lambda \quad \lambda\in R$$

(与数乘的结合律)

性质 3

$$(\vec{a}\pm\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}\pm\vec{b}\times\vec{c}$$

$$\vec{c}\times(\vec{a}\pm\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}\pm\vec{c}\times\vec{b}$$

(分配律)

一般形式： $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}$

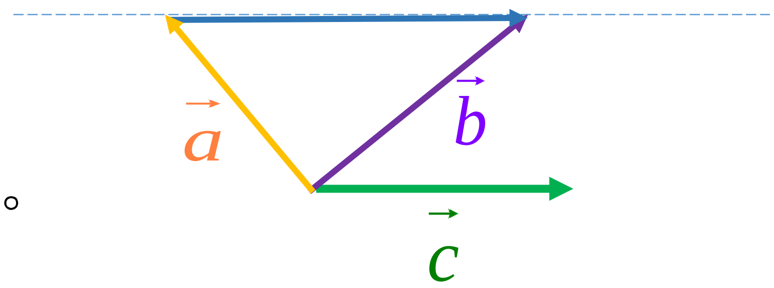
2. 向量的向量积的性质

思

设 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为非零向量, 且 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$。

试问能否由此推出 $\vec{a}=\vec{b}$。

【解】 由 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$, 得



$$(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{c}=\vec{0}。$$

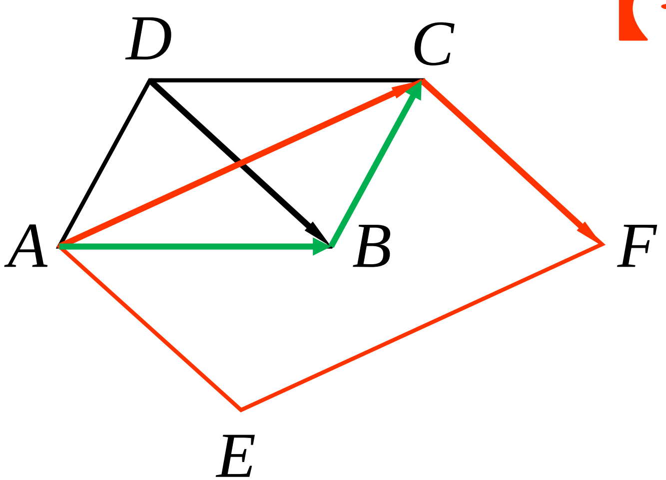
故 (1) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$, 即 $\vec{a}=\vec{b}$;

(2) $(\vec{a}-\vec{b})\parallel\vec{c}$, 此时可能有 $\vec{a}\neq\vec{b}$。

综上所述, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$ 时不一定有 $\vec{a}=\vec{b}$。

例

证明：以平行四边形的两条对角线为邻边构成的平行四边形的面积为原平行四边形面积的两倍。



【证】如图所示，即要证 $S_{\square AEFC}=2\,S_{\square ABCD}$。

引入向量 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, 则

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b},$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\vec{a}-\vec{b},$$

故 $S_{\square AEFC}=\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{CF}\|=\|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\|$

$$=\|\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}\|$$

$$=\|(-2)\,\vec{a}\times\vec{b}\|=|-2|\,\|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

$$=2\,S_{\square ABCD}$$

$$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2\,(\vec{a}\times\vec{b})$$

向量相互平行的充要条件

推论：$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

定理 2 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为非零向量，则

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

证 由 $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin<\vec{a},\vec{b}>$ 及 $\|\vec{a}\|\neq 0$, $\|\vec{b}\|\neq 0$ 立即可得

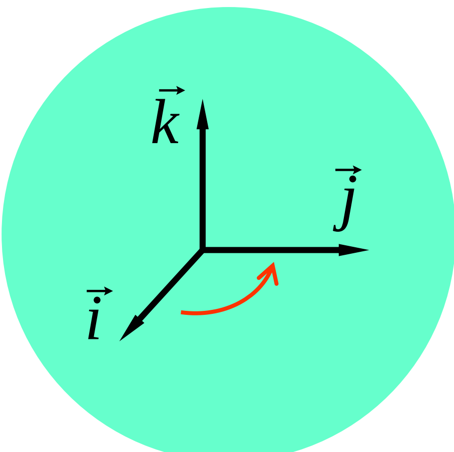
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \iff \sin<\vec{a},\vec{b}>=0$$

$$\iff <\vec{a},\vec{b}>=0\text{ 或 }\pi \iff \vec{a}\parallel\vec{b}\text{。}$$

规定：$\vec{0}$ 与任何向量平行。

基本单位向量的向量积

基本单位向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 间的向量积如下：



$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};\quad (\text{平行关系的推论})$$

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}; \\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}; \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}; \end{array}\right\}\quad (\text{右手法则})$$

3. 向量的向量积的坐标表示

向量的向量积的坐标形式

设有向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=\underbrace{a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}}_{\vec{0}}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}$$

$$+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+\underbrace{a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}}_{\vec{0}}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}$$

$$+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+\underbrace{a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}}_{\vec{0}}$$

向量的向量积的坐标形式

设有向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则

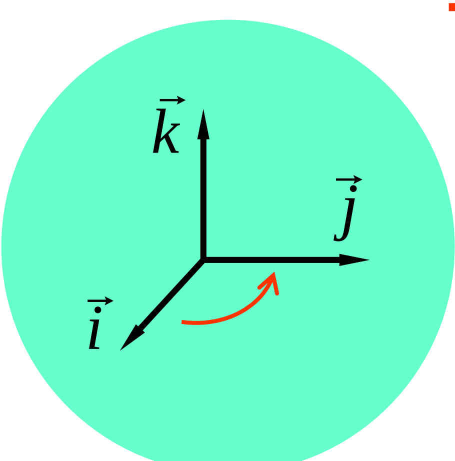
$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=\underbrace{a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}}_{\vec{0}}+a_xb_y\boxed{\vec{k}}+a_xb_z\boxed{-\vec{j}}$$

$$+a_yb_x\boxed{-\vec{k}}+\underbrace{a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}}_{\vec{0}}+a_yb_z\boxed{\vec{i}}$$

$$+a_zb_x\boxed{\vec{j}}+a_zb_y\boxed{-\vec{i}}+\underbrace{a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}}_{\vec{0}}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}。$$



3. 向量的向量积的坐标表示

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \text{基本单位向量} \\ \cdots\cdots\cdots \ \vec{a}\ \ (\vec{a}\times\vec{b}\ \text{左边的}) \\ \cdots\cdots\cdots \ \vec{b}\ \ (\vec{a}\times\vec{b}\ \text{右边的}) \end{array}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}\text{。}$$

3. 向量的向量积的坐标表示

向量的向量积的坐标形式

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

两个坐标写两遍;
掐头去尾留中间;
捺撇相乘再相减;
向量坐标在眼前。

$$\begin{array}{cccccc}\cancel{a_x} & a_y & a_z & a_x & a_y & \cancel{a_z}\\ \cancel{b_x} & b_y & b_z & b_x & b_y & \cancel{b_z}\end{array}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\,\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\,\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

由此推出：

$$\boxed{\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \iff \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\text{。}}$$

分母出现 0 时，理解为分子也是 0。

例 计算 $(\vec{i}+\vec{j})\times 2\vec{i}$。

【解】 法1：$(\vec{i}+\vec{j})\times 2\vec{i}=2\vec{i}\times\vec{i}+2\vec{j}\times\vec{i}=-2\vec{k}$。

法2：因为 $\vec{i}+\vec{j}=(1,\ 1,\ 0)$，

$$2\vec{i}=(2,\ 0,\ 0),$$

故 $$(\vec{i}+\vec{j})\times 2\vec{i}=\left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\right)=(0,0,-2).$$

例 求与 $\vec{a}=(2,\ -1,\ 1)$ 和 $\vec{b}=(1,\ 2,-1)$ 垂直的向量 $\vec{c}$。

【解】 由向量积的概念，$\vec{a}\times\vec{b}$ 垂直于$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$。

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)=(-1,\ 3,\ 5),$$

由向量的平行关系 所求向量为

$$\vec{c}=\lambda\ (-1, 3,\ 5,),\quad \lambda\in R\ 。$$

向量积的几何作用

1. 求与两个向量都垂直的向量

2. 判断两个向量平行

3. 三角形的面积

三.　向量的混合积

1. 向量的混合积的概念.

2. 向量的混合积的坐标形式.

3. 向量的混合积的几何意义.

1. 向量的混合积的概念

设 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$为三个任意向量，则数值 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的混合积，记为$[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]$或$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$，

即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$。

由数量积的交换律：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$,

由向量积的反交换律：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$

即 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=-[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]$。

2. 向量的混合积的坐标形式

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

向量的混合积的坐标形式

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, 则

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\ \vec{a} \\ \cdots\cdots\cdots\ \vec{b} \\ \cdots\cdots\cdots\ \vec{c} \end{array}$$

或 $$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

例 验证向量的混合积的性质：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$

$$=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$$

【证】设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, 则

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$$

或由向量积的反交换律：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$

即 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=-[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]$。

2. 向量的混合积的坐标形式

例 验证向量的混合积的性质：

三个向量做轮换，结果不变；
相邻两个要换位，多出减号！

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]$$

$$=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=-[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]=-[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]=-[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}]$$

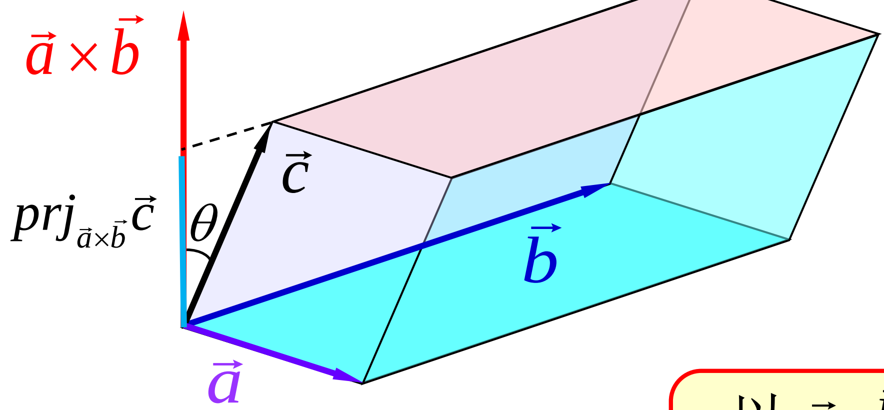
【证】

$$(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^2\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}。$$

其余部分类似可证。

问题：求以不共面的三个向量为棱的平行六面体的体积。



设非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 构成右手系(如图所示)，则

$$(\vec{a}\times b)\cdot\vec{c} = \underbrace{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}_{\text{以 }\vec{a},\,\vec{b}\text{ 为邻边的平行四边形的面积}}\;\underbrace{prj_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}}_{\text{以 }\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}\text{ 为邻边的平行六面体的高}}\text{。}$$

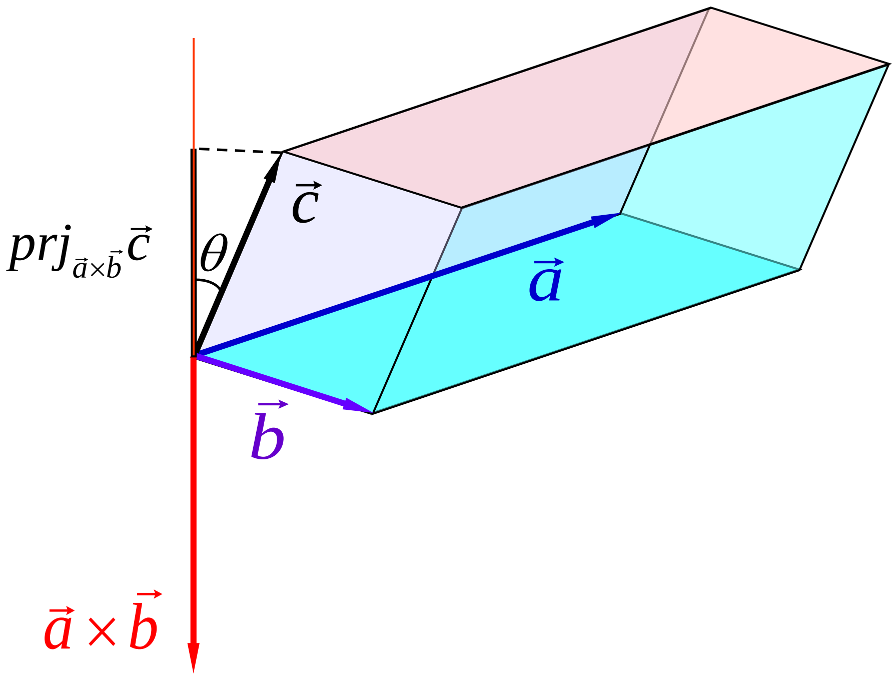
以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积

以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为邻边的平行六面体的高

此时，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 表示以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为邻边的平行六面体的体积。

3. 向量的混合积的几何意义

设非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 构成左手系(如图所示)时，则



$$prj_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\le 0。$$

此时,

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=\|\vec{a}\times\vec{b}\|| prj_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}|$$

表示以$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为邻边的平行六面体的体积。

综上所述, 非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的混合积的绝对值等于以$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为邻边的平行六面体的体积。

混合积的几何意义

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, 则以它们为棱的平行六面体的体积为

$$V=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

$$=\left|\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\right|。$$

定理 3

向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$ 共面的充要条件是

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0。$$

若$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$说明什么？ $\Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$有两个向量平行

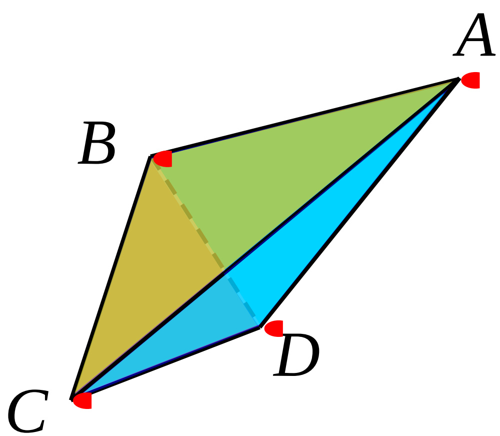
$\Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$三向量共面。

例

已知空间 R^3 中不在同一平面上的四点：

$$A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2),\ C(x_3,y_3,z_3),\ D(x_4,y_4,z_4),$$

求四面体 $ABCD$ 的体积。



【解】四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体体积的 $\dfrac{1}{6}$，而

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1);$$

$$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1);$$

$$\overrightarrow{AD}=(x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1);$$

3. 向量的混合积的几何意义

故 $$V=\frac{1}{6}|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}|$$

$$=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{matrix}\right\|。$$

若$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=0$ 说明什么？

说明三向量共面，也就是四点共面！

定理 4

空间 R^3 中的四点

$$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3),\ D(x_4, y_4, z_4)$$

共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0。$$

混合积的几何作用

1. 判断四点共面，或三向量共面

2. 求不共面的四点（或三向量）所构成的四面体的体积

本节小结

数量积

定义；性质：交换律，分配率，数乘结合律

坐标表示：

几何作用：判垂直，求夹角，求投影

向量积

定义；性质：反交换律，分配率，数乘结合律

坐标表示：

几何作用：判平行，求三角形面积，求与两向量垂直的向量

混合积

定义；

性质：轮换性

坐标表示：

几何作用：判共面，求四面体体积