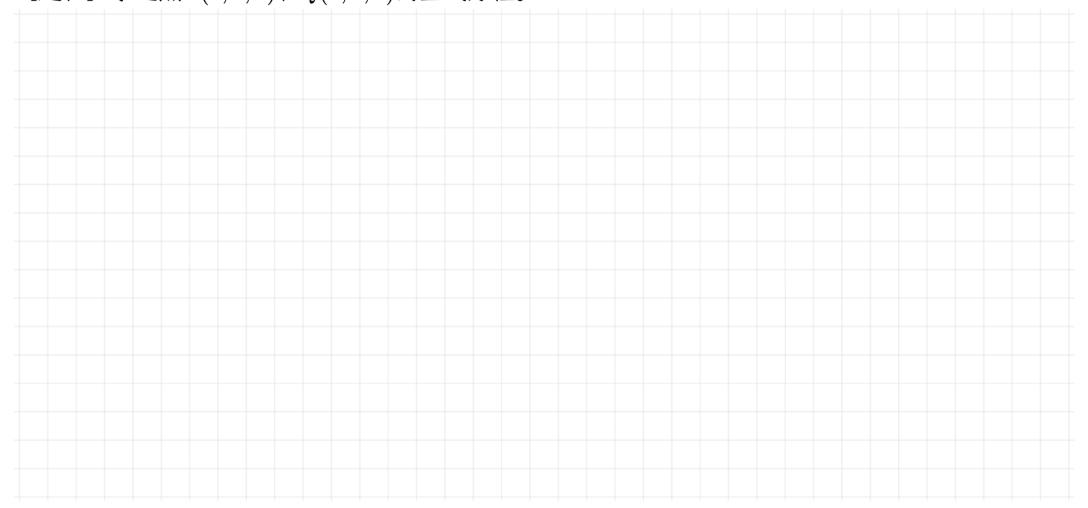
期末真题

21-24年期末试题整理

解析几何

2106(6)

【题目】求过点P(1,2,3)和Q(3,5,7)的直线方程。

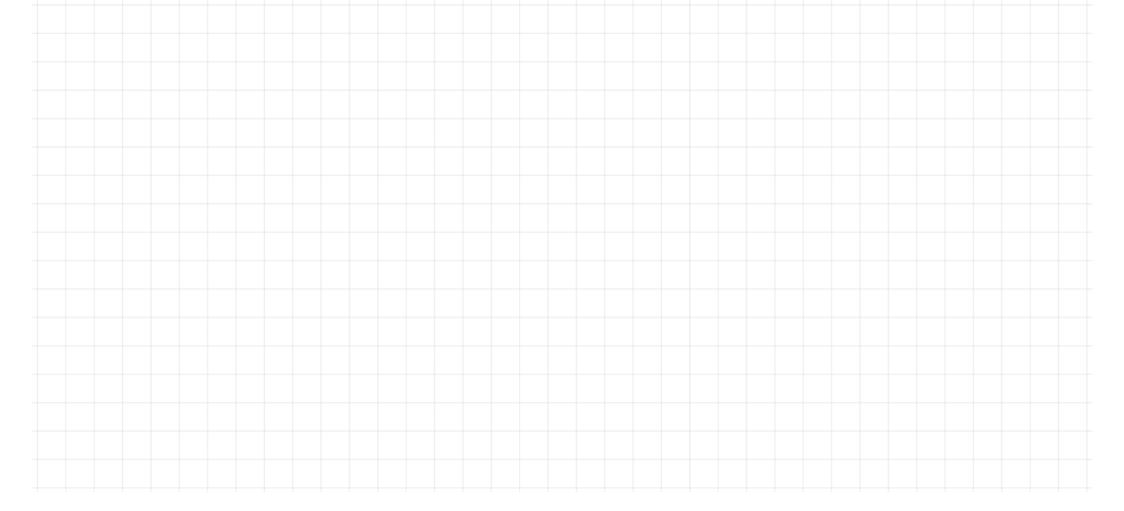


【解析】

- 1. 方向向量 $\overrightarrow{PQ} = (3-1,5-2,7-3) = (2,3,4)$ 。
- 2. 直线的对称式方程为 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ 。
- x=1+2t 3. 参数方程为 $\begin{cases} x=1+2t \ y=2+3t \ (t为参数) \ z=3+4t \end{cases}$ 。

2206(6)

【题目】求与向量a=(1,0,1),b=(2,-1,3)平行,且经过点 $p_0=(3,-1,4)$ 的平面 π 的方程。



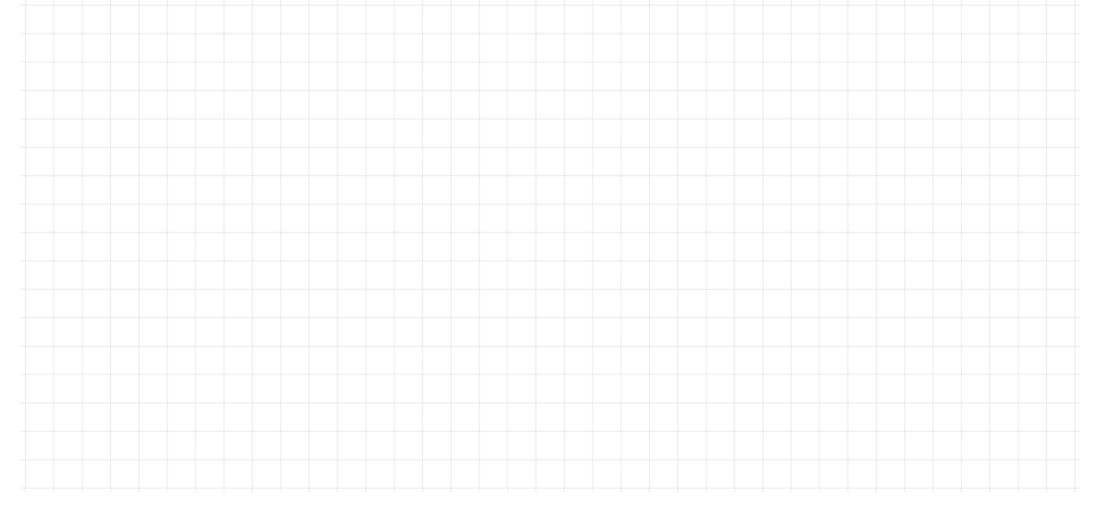
1. 平面法向量

$$n=a imes b=egin{array}{cccc} i & j & k \ 1 & 0 & 1 & =i(0 imes 3-1 imes (-1))-j(1 imes 3-1 imes 2)+k(1 imes (-1)-0 imes 2) = (1,-1,-1) \ 2 & -1 & 3 & \end{array}$$

2. 平面方程为 $1 \cdot (x-3) + (-1) \cdot (y+1) + (-1) \cdot (z-4) = 0$, 即x-y-z=0。

2306(6+6)

【题目1】已知向量a=3i-j-2k,b=i+2j-k,求 $\cos(a,b)$ 。



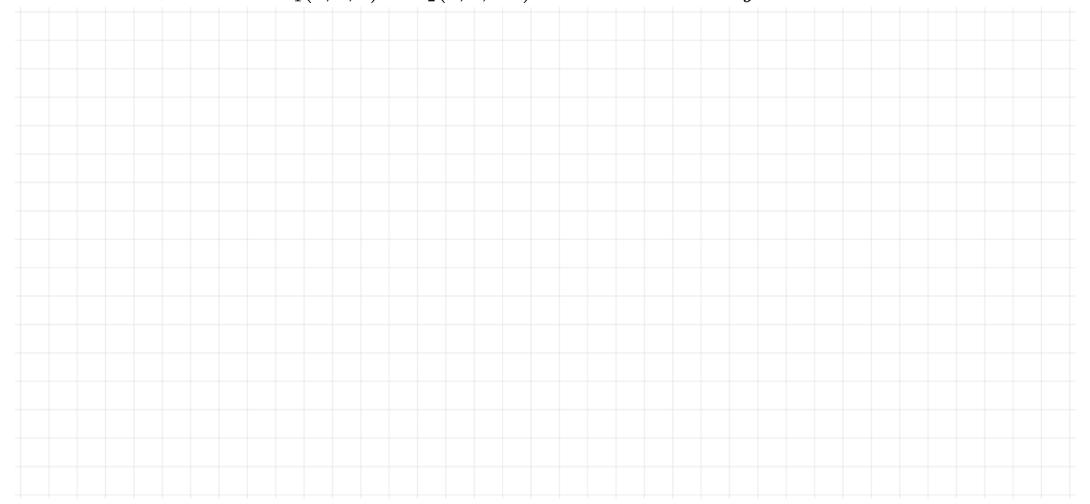
1.
$$a = (3, -1, -2)$$
, $b = (1, 2, -1)$.

2.
$$a \cdot b = 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3 - 2 + 2 = 3$$

3.
$$|a|=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$
, $|b|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ \circ

$$4.\cos(a,b) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{3}{\sqrt{14} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$
 o

【题目2】一平面过两点 $M_1(1,1,1)$ 、 $M_2(0,1,-1)$,且垂直于平面x+y+z=0,求此平面方程。

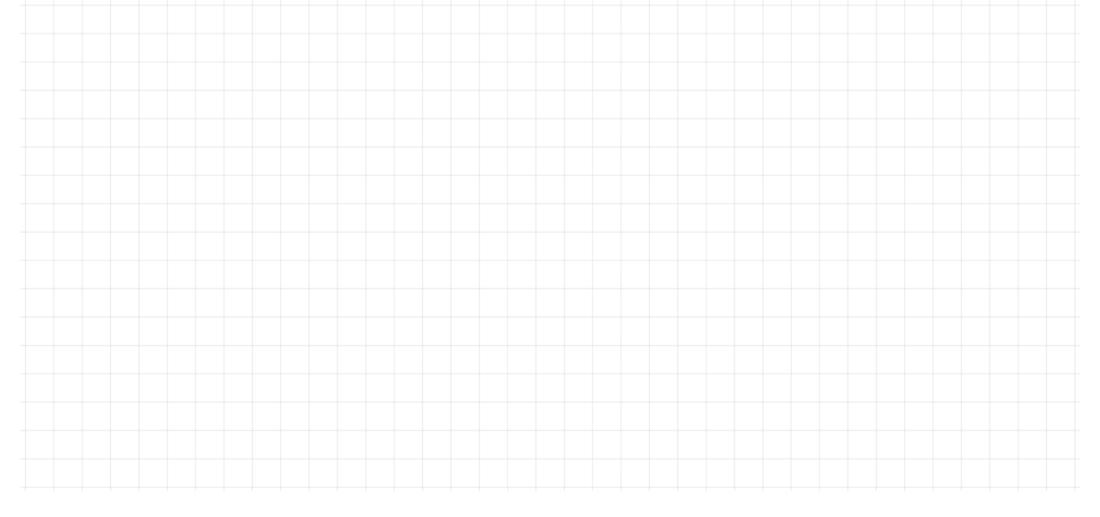


【解析】

- 1. 向量 $\overline{M_1M_2} = (-1,0,-2)$,已知平面法向量 $n_1 = (1,1,1)$ 。
- 2. 设所求平面法向量为n=(A,B,C),则 $\begin{cases} n\cdot \overrightarrow{M_1M_2}=-A-2C=0, \ \$ 取A=2,则C=-1, $n\cdot n_1=A+B+C=0$
- 3. 平面方程为2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0, 即2x-y-z=0。

2406(6+6)

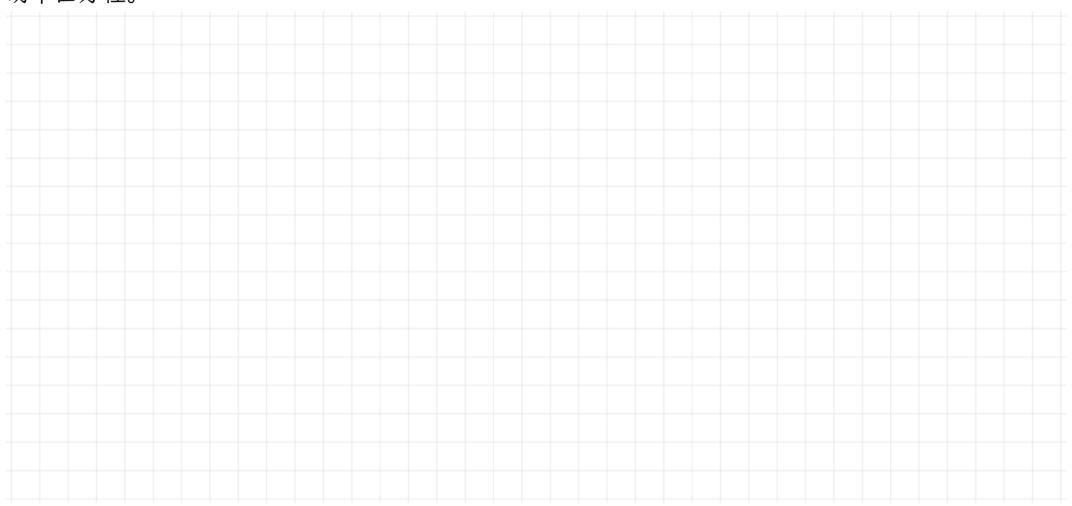
【题目1】求过点(1,0,-2)且与两平面 $\Pi_1: x-4z=3$, $\Pi_2: 3x-y-5z=1$ 均平行的直线方程。



- 1. 平面 Π_1 法向量 $n_1 = (1,0,-4)$, Π_2 法向量 $n_2 = (3,-1,-5)$ 。
- 2. 直线方向向量

3. 直线方程为 $\frac{x-1}{-4} = \frac{y}{7} = \frac{z+2}{-1}$ 。

【题目5】在曲面 $z=x^2+\frac{1}{4}y^2-1$ 上求一点,使它的切平面与平面2x+y+z=0平行,并求该点的切平面方程。



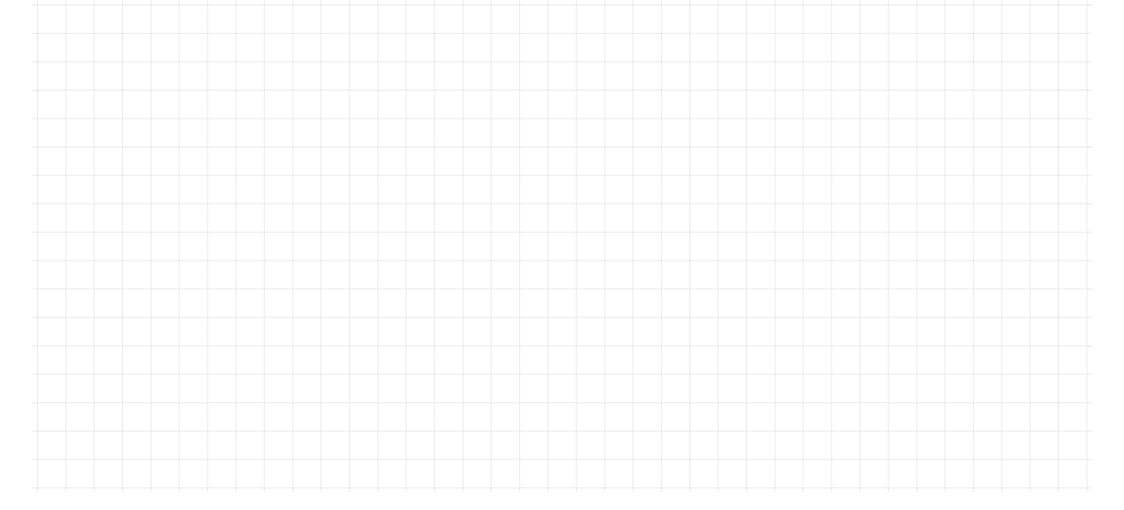
【解析】

- 1. 设切点为 (x_0,y_0,z_0) ,曲面法向量 $n=(2x_0,\frac{1}{2}y_0,-1)$ 。
- 2. 已知平面法向量(2,1,1),由平行得 $\frac{2x_0}{2}=\frac{\frac{1}{2}y_0}{1}=\frac{-1}{1}$,解得 $x_0=-1$, $y_0=-2$, $z_0=(-1)^2+\frac{1}{4}\times(-2)^2-1=1$ 。
- 3. 切平面方程为2(x+1) + 1(y+2) + 1(z-1) = 0, 即2x + y + z + 3 = 0。

二重极限

2106(6)

【题目】求极限: $\lim_{\substack{x \to 0 \ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x}$ 。

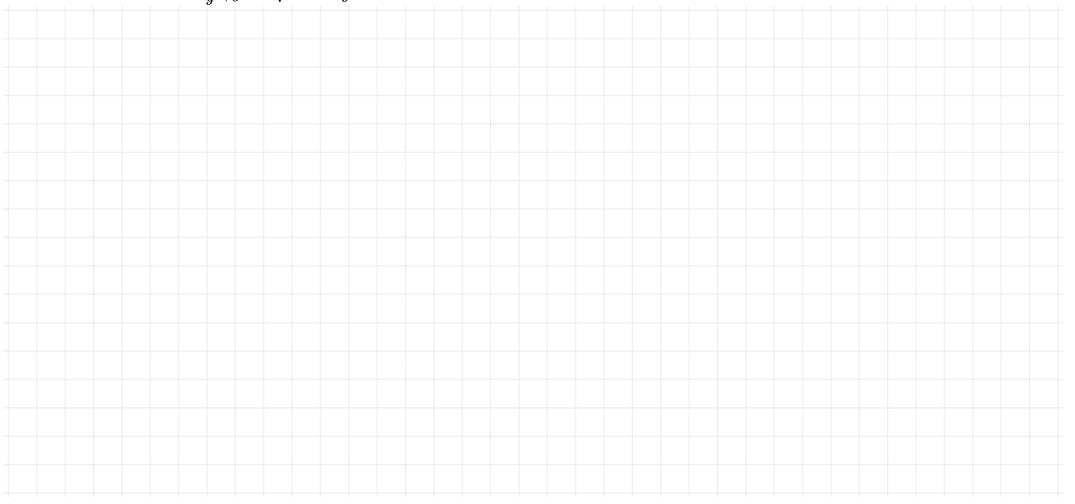


1. 等价无穷小替换: $\sin xy \sim xy$ $(x \to 0, y \to 2$ 时, $xy \to 0)$ 。

2. 原式
$$=\lim_{\substack{x o0\y o2}}rac{xy}{x}=\lim_{\substack{x o0\y o2}}y=2$$
。

2206(6)

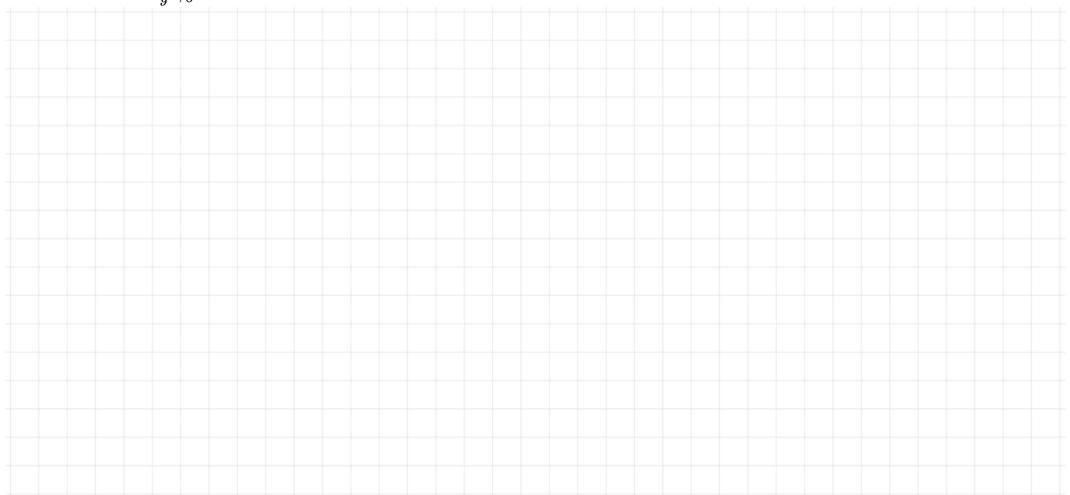
【题目】求极限
$$\lim_{\substack{x o 0 \ y o 0}} rac{x^2 + y^2}{1 - \sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$
。



$$\begin{array}{l} 1. \, \text{分子分母同乘}1+\sqrt{1+x^2+y^2}:\\ \text{原式}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{(1-\sqrt{1+x^2+y^2})(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{-x^2-y^2}\\ =-\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(1+\sqrt{1+x^2+y^2})=-2_{\mathfrak{o}} \end{array}$$

2306(6)

【题目】求
$$\lim_{\substack{x o 0 \ y o 0}} rac{xy}{|x|+|y|}$$
。



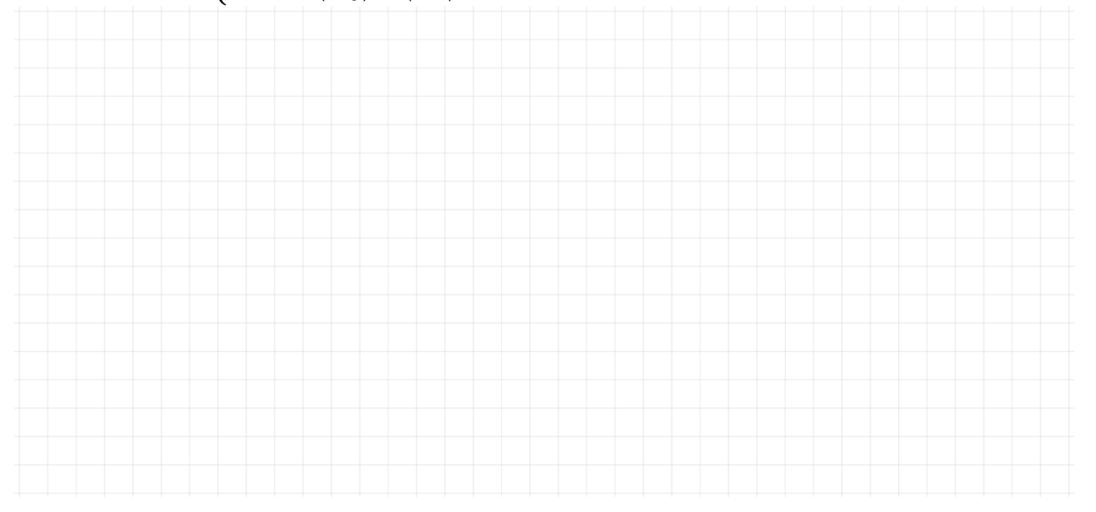
【解析】

1. 利用夹逼定理:
$$0 \leq \frac{xy}{|x|+|y|} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{|x|+|y|} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{2\sqrt{|xy|}} = \frac{\sqrt{|xy|}}{4} o 0$$
 $(x o 0, \ y o 0)$ 。

2. 故极限为0。

2406(6)

【题目】
$$f(x,y) = egin{cases} rac{\sin xy}{x^2 + y^2}, & (x,y)
eq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
,讨论在 $(0,0)$ 处的连续性。



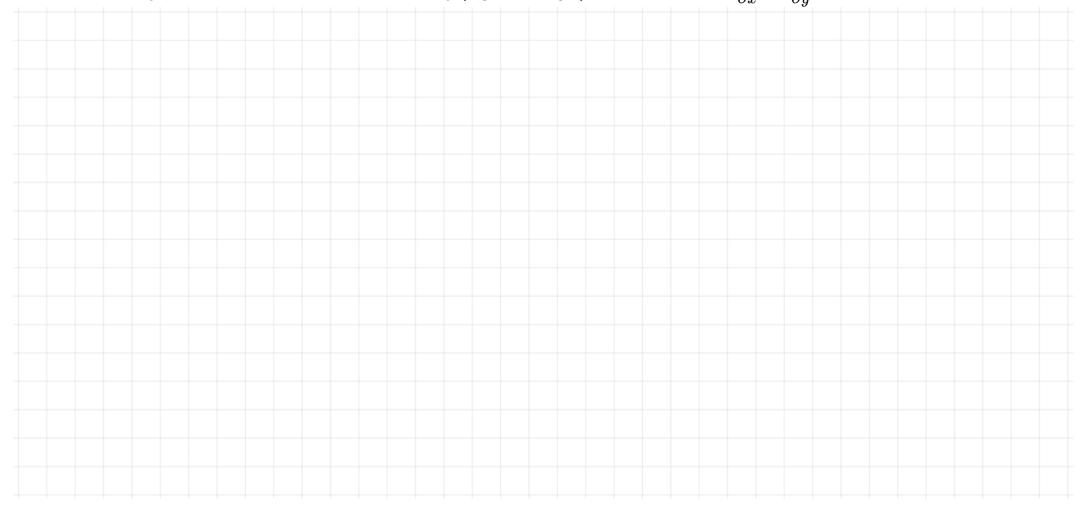
1. 取路径
$$y=kx$$
,则 $\lim_{\substack{x\to 0\y=kx\to 0}} \frac{\sin(kx^2)}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$,与 k 有关。

2. 极限不存在,故f(x,y)在(0,0)处不连续。

多元微分

2106(6+6+8)

【题目3】设f是可微的二元函数,求 $z=f(xy,x^2-y^2)$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。



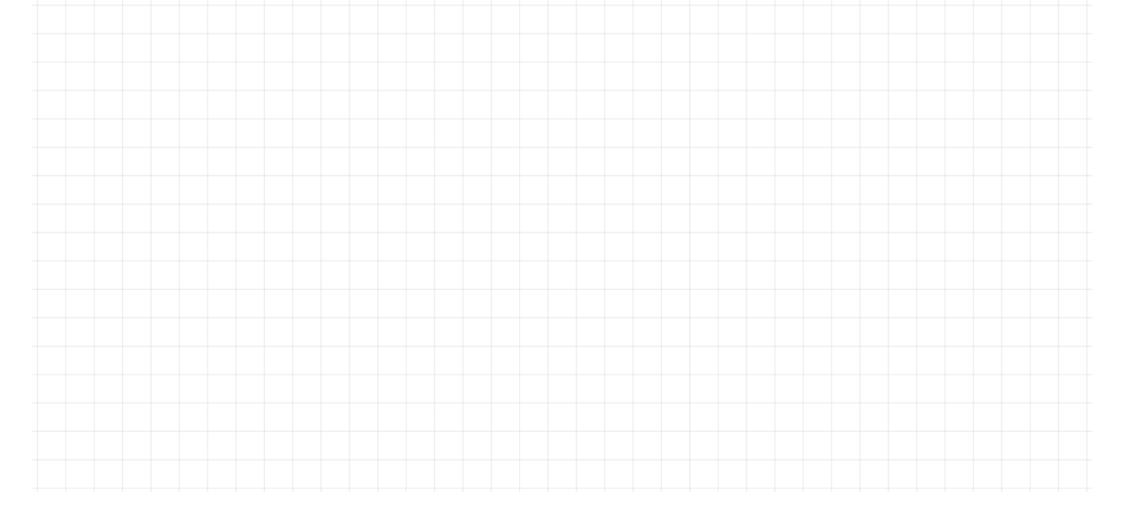
【解析】

1. 设
$$u=xy$$
, $v=x^2-y^2$, 则 $z=f(u,v)$ 。

2.
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = yf_u' + 2xf_v'$$
.

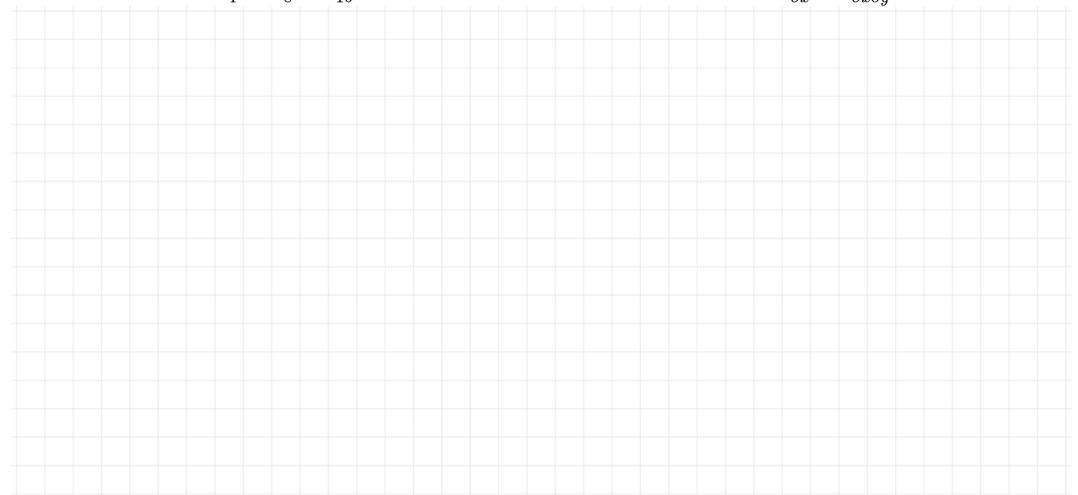
3.
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=xf_u'-2yf_v'$$

【题目4】求函数u=xy+yz+zx在点(1,1,2)处沿从坐标原点到点 $P(1,\sqrt{2},1)$ 的方向l的方向导数。



- 1. 方向向量 $\overrightarrow{OP}=(1,\sqrt{2},1)$,单位向量 $e=\frac{1}{2}(1,\sqrt{2},1)$ 。
- 2. 偏导数: $u_x = y + z$, $u_y = x + z$, $u_z = y + x$ 。
- 3. 在点(1,1,2)处, $u_x=3$, $u_y=3$, $u_z=2$ 。
- 4. 方向导数= $3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5+3\sqrt{2}}{2}$ 。

【题目6】已知方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{16}=1$ 确定了z为x,y的函数,求二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。



【解析】

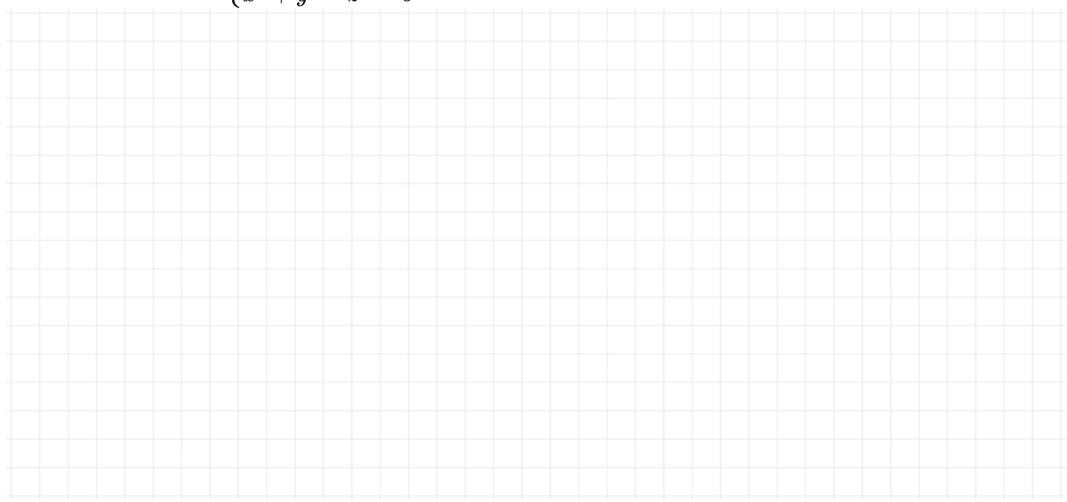
- 1. 方程两边对x求导: $\frac{x}{2} + \frac{z}{8} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, 得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x}{z}$ 。
- 2. 对求再求导: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4z 4x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{4z 4x \cdot (-\frac{4x}{z})}{z^2} = -\frac{4z 4x \cdot (-\frac{4x}{z})}{z^2} = -\frac{4z^2 + 16x^2}{z^3} = -\frac{16(1 \frac{x^2}{4} \frac{y^2}{8}) + 16x^2}{z^3} = -\frac{16 + 12x^2 2y^2}{z^3}$ 。
- 3. 对y求导 $\frac{\partial z}{\partial x}$: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4x \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = -\frac{4x \cdot (-\frac{2y}{z})}{z^2} = \frac{8xy}{z^3}$ 。

2206(6+6+6)

【题目3】 求 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点O(0,0)处沿从点O(0,0)到点A(1,3)的方向的方向导数。

- 1. 方向向量 $\overrightarrow{OA} = (1,3)$,单位向量 $e = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$ 。
- 2. 沿x轴方向导数: $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t,0) f(0,0)}{t} = 1$,沿y轴方向导数: $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(0,t) f(0,0)}{t} = 1$ 。
- 3. 但f(x,y)在(0,0)处不可微,方向导数需用定义: $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t^2+3t^2}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{t} = 2$ 。

【题目4】求曲线 $\Gamma: egin{cases} x^2+y^2+z^2=50 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$ 在点 $M_0(3,4,5)$ 处的切线方程。



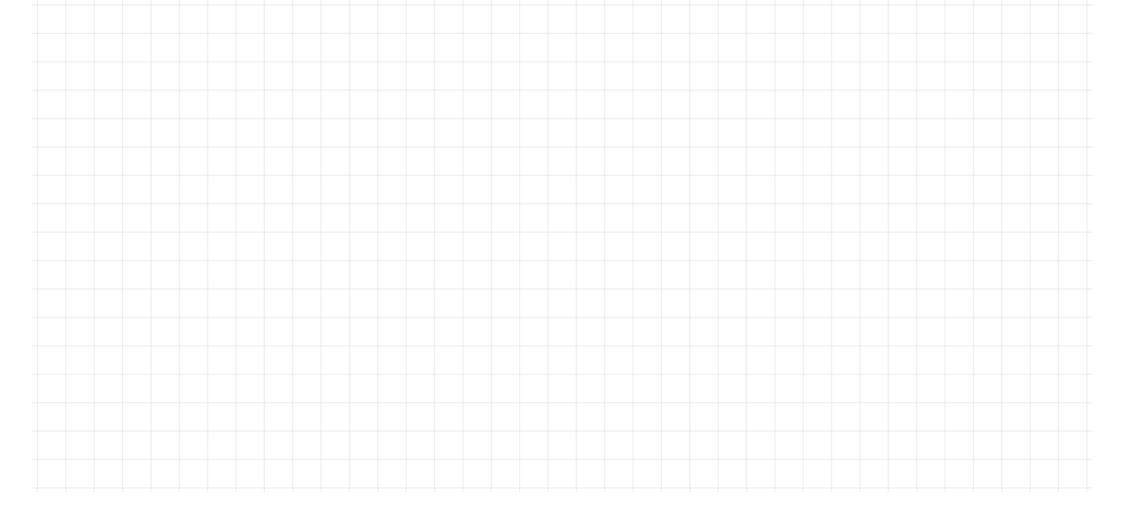
【解析】

1. 方程组对
$$x$$
求导: $\begin{cases} 2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0 \ 2x+2y\frac{dy}{dx}-2z\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$ 代入 M_0 得: $\int 3+4\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx}=0$

$$\left\{egin{aligned} 3+4rac{dy}{dx}+5rac{dz}{dx}&=0\ 3+4rac{dy}{dx}-5rac{dz}{dx}&=0 \end{aligned}
ight.$$
解得 $rac{dy}{dx}=-rac{3}{4}$, $rac{dz}{dx}=0$ 。

2. 切线方向向量
$$(1, -\frac{3}{4}, 0)$$
,切线方程为 $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-\frac{3}{4}} = \frac{z-5}{0}$,即 $\begin{cases} 4(x-3) = -3(y-4) \\ z = 5 \end{cases}$ 。

【题目5】设方程 $z+\ln(x+2y-z)=2$ 确定了隐函数z=z(x,y),求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。



1. 方程两边对x求导: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1 - \frac{\partial z}{\partial x}}{x + 2y - z} = 0$,整理得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + 2y - z + 1}$ 。

2. 对求导
$$\frac{\partial z}{\partial x}$$
: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-\left(2 - \frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(x + 2y - z + 1)^2}$, 而 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x + 2y - z + 1}$, 代入得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-(2 - \frac{2}{x + 2y - z + 1})}{(x + 2y - z + 1)^2} = -\frac{2(x + 2y - z)}{(x + 2y - z + 1)^3}$

最值极值

2106(10)

【题目13】已知 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为椭球面 $x^2+rac{y^2}{2}+rac{z^2}{4}=1$ 上的一点。

- (1) 求该椭球面在点M处的切平面方程;
- (2)若M点在第一卦限,要使切平面与三个坐标平面所围成的四面体的体积最小,求M点的坐标,并求此最小体积。

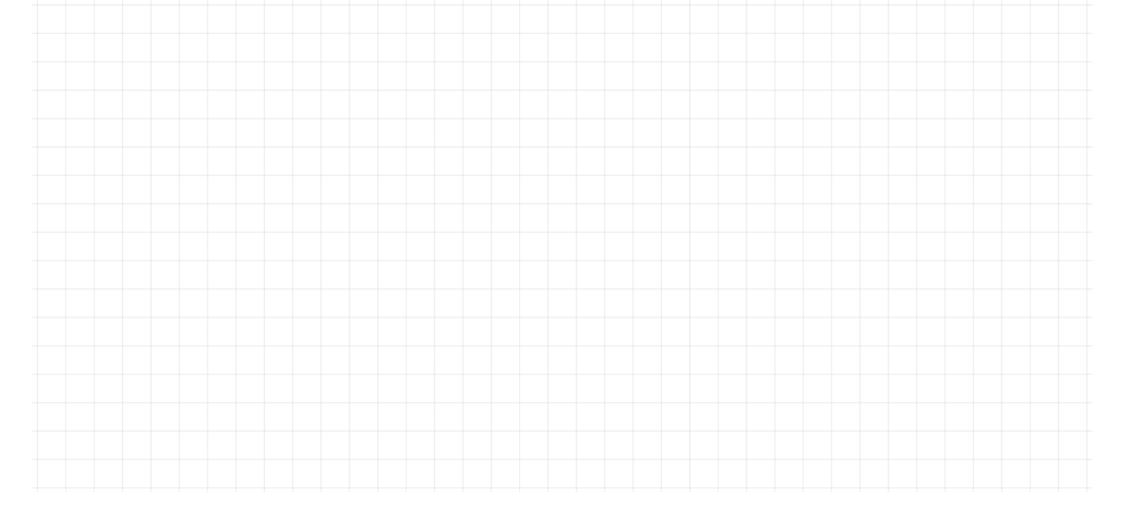
【空白,14行】

【解析】

- (1) 椭球面法向量 $(2x_0,y_0,\frac{z_0}{2})$,切平面方程为 $2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+\frac{z_0}{2}(z-z_0)=0$,即 $2x_0x+\frac{y_0y}{2}+\frac{z_0z}{4}=1$ 。
- (2) 切平面在x,y,z轴截距分别为 $\frac{1}{2x_0}$, $\frac{2}{y_0}$, $\frac{4}{z_0}$,体积 $V=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x_0}\cdot\frac{2}{y_0}\cdot\frac{4}{z_0}=\frac{2}{3x_0y_0z_0}$ 。 由柯西不等式: $1=x_0^2+\frac{y_0^2}{2}+\frac{z_0^2}{4}\geq 3\sqrt[3]{x_0^2\cdot\frac{y_0^2}{2}\cdot\frac{z_0^2}{4}}$, 得 $x_0y_0z_0\leq\frac{2\sqrt{6}}{9}$, 当且仅当 $x_0^2=\frac{y_0^2}{2}=\frac{z_0^2}{4}=\frac{1}{3}$ 时等号成立,即 $x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $z_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$, 最小体积 $V=\frac{2}{3\times\frac{2\sqrt{6}}{9}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 。

2206(10)

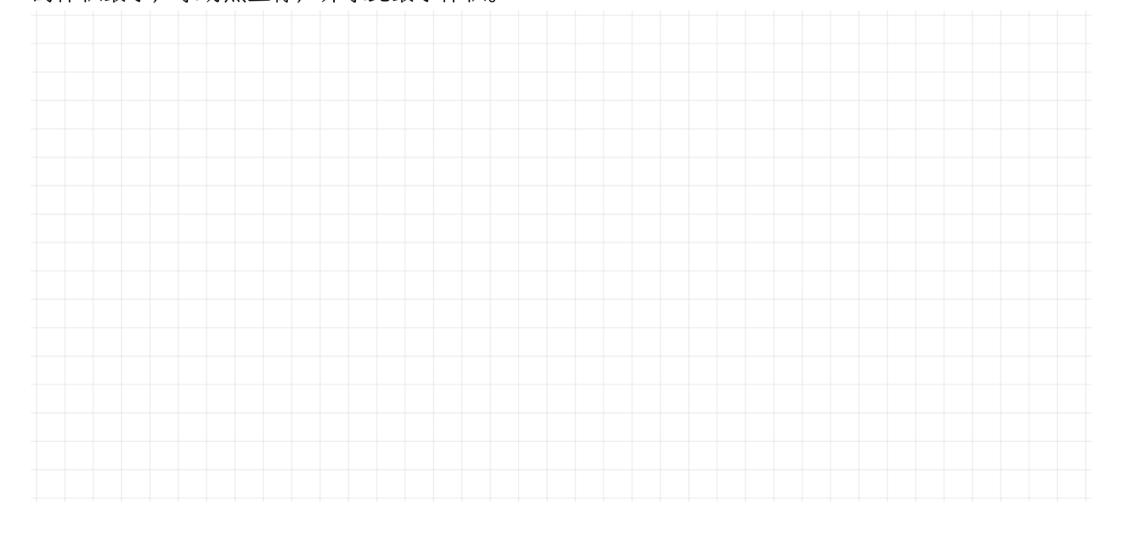
【题目13】设椭球面 $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ 第一卦限上的点的切平面 π ,求使切平面 π 与三个坐标面所围成的四面体体积最小的切点坐标。



- 1. 设切点 (x_0,y_0,z_0) ,法向量 $(2x_0,6y_0,2z_0)$,切平面方程 $2x_0x+6y_0y+2z_0z=2$,截距为 $\frac{1}{x_0}$, $\frac{1}{3y_0}$, $\frac{1}{z_0}$
- 2. 体积 $V = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{3y_0} \cdot \frac{1}{z_0} = \frac{1}{18x_0y_0z_0}$ 。
- 3. 由均值不等式: $1=x_0^2+3y_0^2+z_0^2\geq 3\sqrt[3]{3x_0^2y_0^2z_0^2}$,得 $x_0y_0z_0\leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$,当且仅当 $x_0^2=3y_0^2=z_0^2=\frac{1}{3}$,即 $x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_0=\frac{1}{3}$, $z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时体积最小。

2306(10)

【题目13】在第一卦限内作球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的切平面,使得切平面与三个坐标面所围的四面体的体积最小,求切点坐标,并求此最小体积。



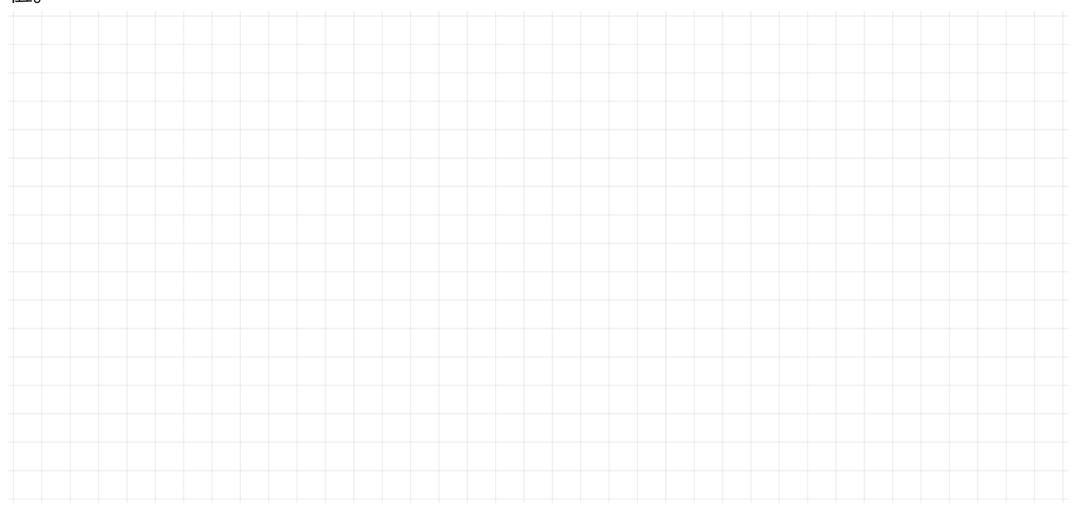
【解析】

1. 设切点 (x_0, y_0, z_0) , 法向量 $(2x_0, 2y_0, 2z_0)$, 切平面方程 $x_0x + y_0y + z_0z = 1$, 截距为 $\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{z_0}$ 。

2. 体积 $V=\frac{1}{6x_0y_0z_0}$,由均值不等式 $1=x_0^2+y_0^2+z_0^2\geq 3\sqrt[3]{x_0^2y_0^2z_0^2}$,得 $x_0y_0z_0\leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$,当且仅当 $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时等号成立,最小体积 $V=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

2406(10)

【题目12】求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在闭区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 25\}$ 上的最大值和最小值。



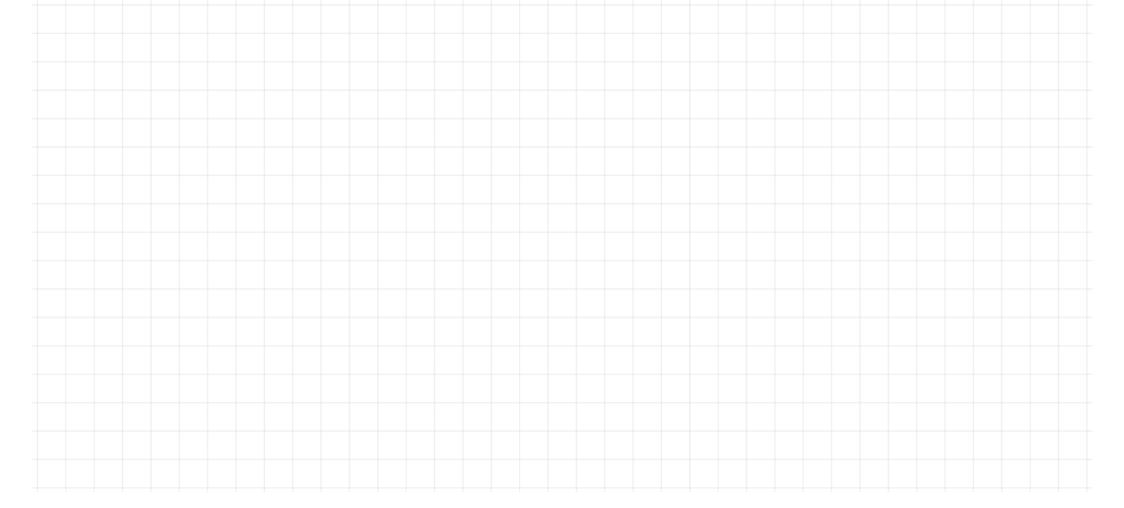
【解析】

- 1. 内点极值: $f_x=2x-12=0$, $f_y=2y+16=0$, 解得(6,-8), 但 $6^2+(-8)^2=100>25$, 不在D内。
- 2. 边界条件 $x^2+y^2=25$,用拉格朗日乘数法: $L=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(25-x^2-y^2)$, $L_x=2x-12-2\lambda x=0$, $L_y=2y+16-2\lambda y=0$, 联立 $x^2+y^2=25$, 由前两式得 $\lambda=1-\frac{6}{x}=1+\frac{8}{y}$,即 $-\frac{6}{x}=\frac{8}{y}$, $y=-\frac{4}{3}x$,代入圆方程得 $x^2+\frac{16}{9}x^2=25$, $x=\pm 3$,对应 $y=\mp 4$ 。
- 3. 计算f(3,-4)=9+16-36-64=-75, f(-3,4)=9+16+36+64=125, 故最大值125, 最小值-75。

多元积分

2106(6+8+8+8+10=48)

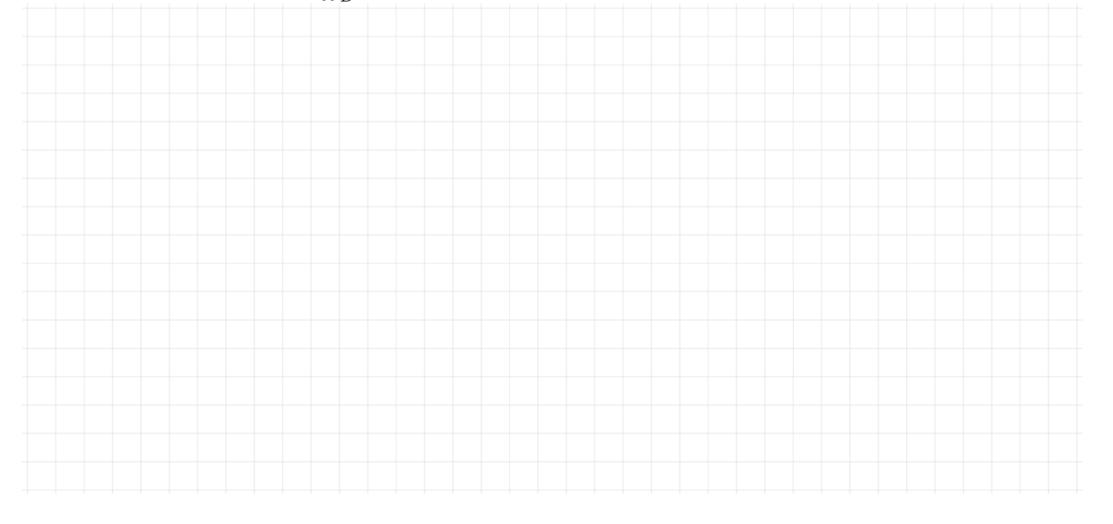
【题目5】计算曲线积分 $I=\int_L\sqrt{y}ds$,其中L是抛物线 $y=x^2$ 上点O(0,0)与B(1,1)之间的一段弧。



1. 参数化 $L\colon \ x=t$, $y=t^2$, $t\in [0,1]$, $ds=\sqrt{(1)^2+(2t)^2}dt=\sqrt{1+4t^2}dt$ 。

2.
$$I=\int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{1+4t^2} dt = \int_0^1 t \sqrt{1+4t^2} dt$$
, $\Leftrightarrow u=1+4t^2$, $du=8t dt$, $I=\frac{1}{8}\int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12} (5\sqrt{5}-1)$.

【题目7】计算二重积分 $I=\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$,其中 $D:x^2+y^2\leq 2x$ 。



【解析】

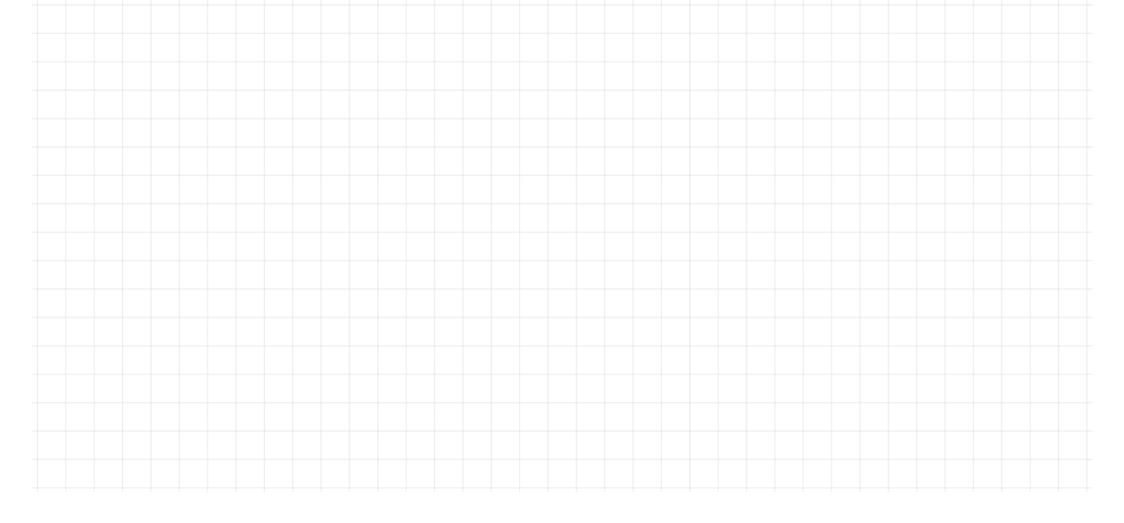
1. 极坐标变换: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, D化为 $r^2 \le 2r\cos\theta$, 即 $r \le 2\cos\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。

2.
$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{2\cos\theta} r \cdot r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \cos^{3}\theta d\theta = \frac{16}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{3}\theta d\theta$$

 $= \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{9}$ (利用Wallis公式)。

2206(8+8+8+10+6=40)

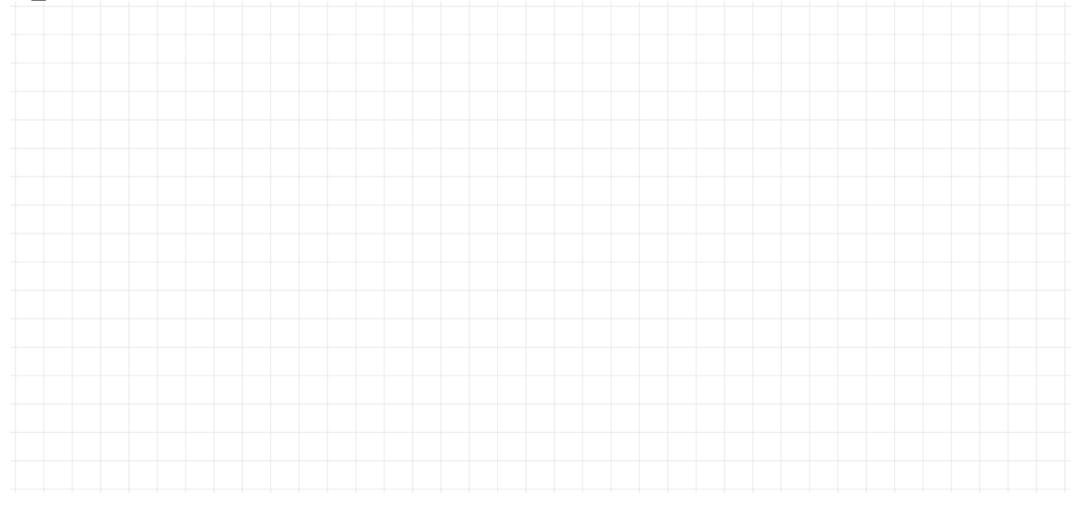
【题目8】 计算二重积分 $I=\iint_D |x^2+y^2-4| dx dy$,其中 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 2,0\leq y\leq 2\}$ 。



- 1. 分区域: $D_1: x^2 + y^2 \le 4$ 与D交集, $D_2 = D D_1$ 。
- 2. $I=\iint_{D_1} (4-x^2-y^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2+y^2-4) dx dy$ \circ
- 3. 极坐标计算 $D_1\colon heta\in [0,rac{\pi}{2}],\ \ r\in [0,2],$ $\iint_{D_1}=\int_0^{rac{\pi}{2}}d heta\int_0^2(4-r^2)rdr=rac{\pi}{2}\cdot(8-4)=2\pi$ 。
- 4. D_2 为矩形内圆外部分, $\iint_{D_2} = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^2 (x^2+y^2-4) dy$,计算得 $\frac{16}{3}-2\pi$ 。
- 5. 总积分 $I = 2\pi + \frac{16}{3} 2\pi = \frac{16}{3}$ 。

2306(6+8+8+8+8=38)

【题目12】取曲面 $\sum : z = x^2 + y^2 (z \le 1)$ 的上侧,计算曲面积分 $\iint_{\sum} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy.$



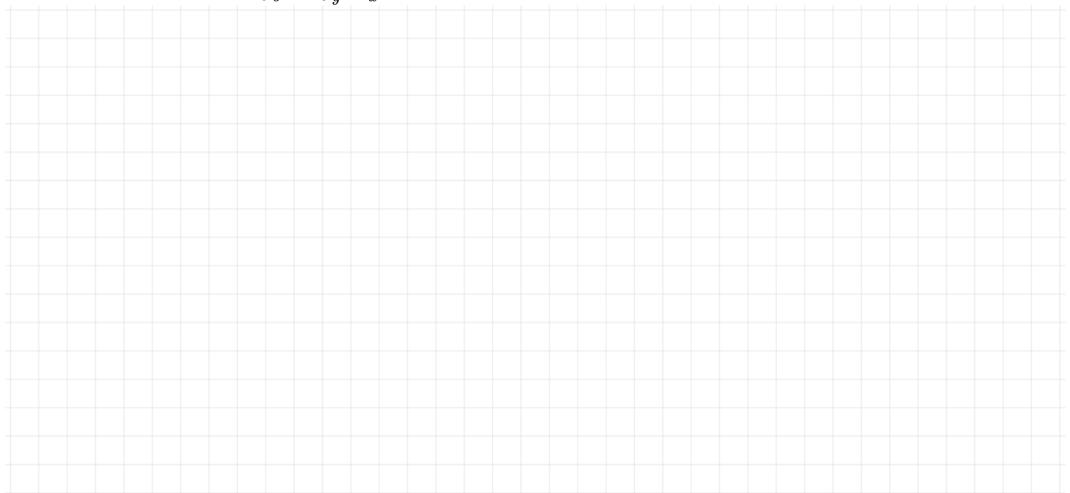
【解析】

1. 用高斯公式,补平面 $\sum_1:z=1$ 下侧,围成闭区域 Ω 。

- 2. 原式= $\mathop{ \iiint_{\Omega}} [3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dV-\iint_{\sum_1} (z-1)dxdy$ 。
- 3. $\iiint_{\Omega} = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} r dr \int_{r^{2}}^{1} [3(r\cos\theta 1)^{2} + 3(r\sin\theta 1)^{2} + 1] dz$ $= \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} r [3(r^{2} 2r\cos\theta 2r\sin\theta + 2) + 1] (1 r^{2}) dr, \quad \text{利用对称性} \int_{0}^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0, \quad \text{化简得}$ $\frac{11\pi}{6} \circ$
- 4. $\iint_{\sum_{1}} = 0$,故原式 $= \frac{11\pi}{6}$ 。

2406(6+8+8+8+10=40)

【题目6】计算二次积分 $\int_0^\pi dy \int_y^\pi rac{\sin x}{x} dx$ 。



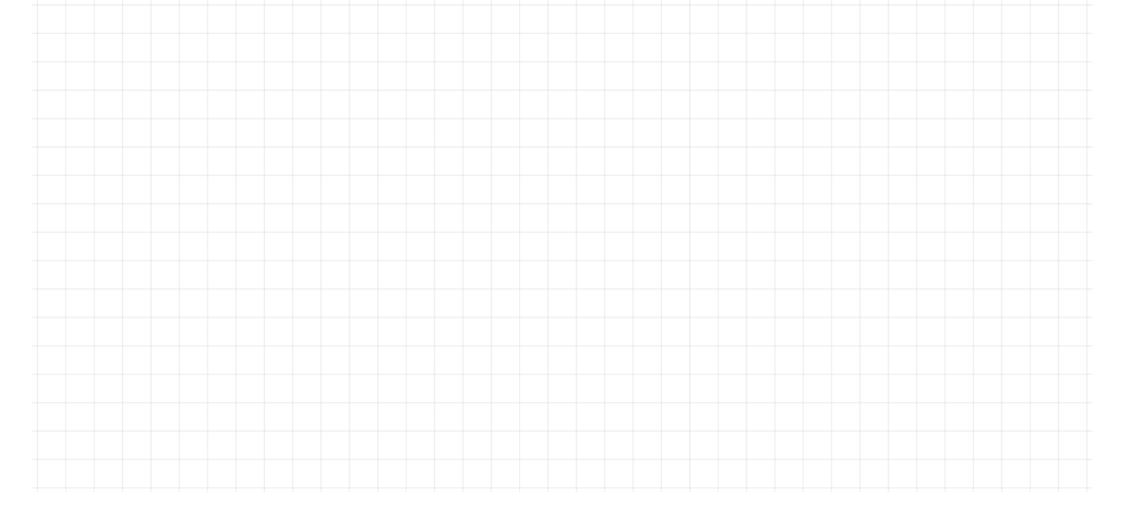
【解析】

- 1. 交换积分次序: 积分区域为 $0 \le y \le \pi$, $y \le x \le \pi$, 即 $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le x$ 。
- 2. 原式 $=\int_0^\pi dx \int_0^x rac{\sin x}{x} dy = \int_0^\pi rac{\sin x}{x} \cdot x dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2$ 。

无穷级数

2106(10)

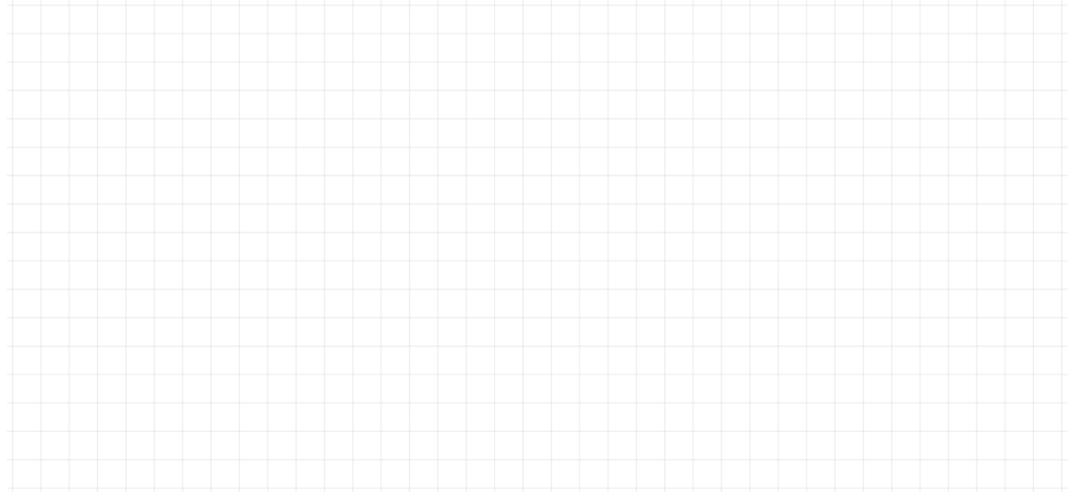
【题目11】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域及和函数。



- 1. 收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}rac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}rac{n+2}{n+1}=1$ 。
- 2. 端点x=1时,级数为 $\sum rac{1}{n+1}$ 发散;x=-1时,级数为 $\sum rac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛,故收敛域为[-1,1)。
- 3. 和函数:设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$,则 $xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)$ (|x|<1),故 $S(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}$ ($x\neq 0$),S(0)=1。

2206(6+6)

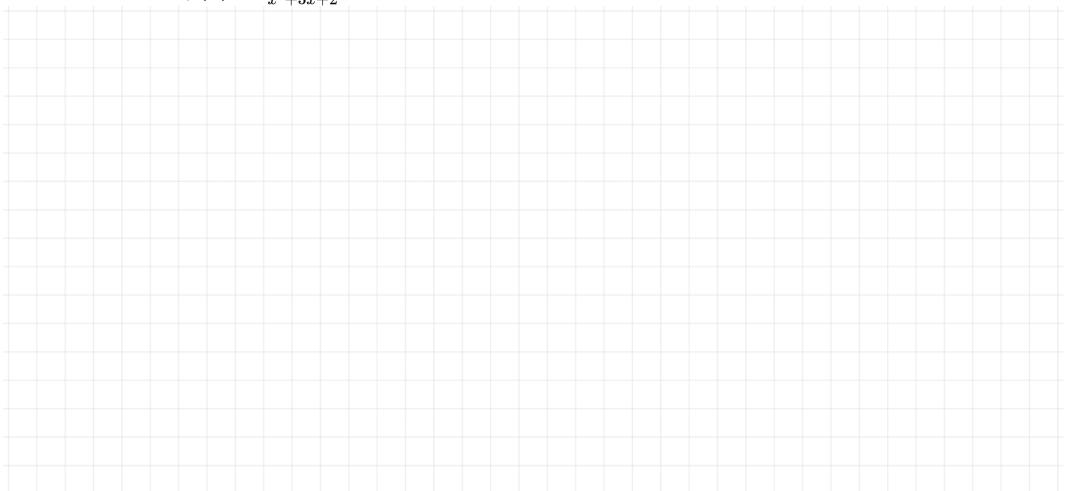
【题目6】讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} rac{n+2}{n \cdot 3^n}$ 的敛散性。



- 1. 用比值审敛法: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+3) \cdot n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1} \cdot (n+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+3)}{3(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3} < 1$ 。
- 2. 故级数收敛。

2306(6+8)

【题目7】求函数 $f(x)=rac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x_0=-4$ 处的幂级数展开式,并写出收敛域。



【解析】

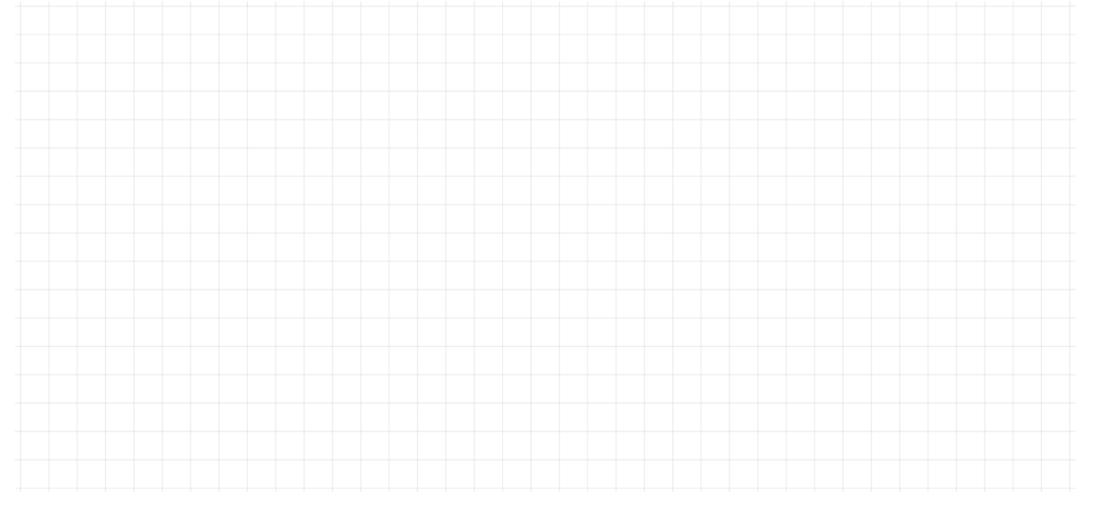
1. 分解
$$f(x)=rac{1}{(x+1)(x+2)}=rac{1}{x+1}-rac{1}{x+2}=rac{1}{-3+(x+4)}-rac{1}{-2+(x+4)}=-rac{1}{3}\cdotrac{1}{1-rac{x+4}{3}}+rac{1}{2}\cdotrac{1}{1-rac{x+4}{2}}$$
。

2. 展开为幂级数:
$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{3})^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}](x+4)^n$$
。

3. 收敛条件:
$$\left|\frac{x+4}{3}\right| < 1$$
且 $\left|\frac{x+4}{2}\right| < 1$, 即 $-6 < x < -2$, 收敛域为 $(-6, -2)$ 。

2406(6+8+6)

【题目7】判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}}$ 是绝对收敛还是条件收敛。



【解析】

1. 考虑绝对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} rac{n}{2^{n-1}}$,用比值审敛法: $\lim_{n o \infty} rac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n o \infty} rac{n+1}{2^n} \cdot rac{2^{n-1}}{n} = rac{1}{2} < 1$ 。

| 2. 绝对级数收敛, | 故原级数绝对收敛。 |
|------------|-----------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |