

湖南大学理工类必修课程

大学数学 AII

——多元积分学

4.1 二重积分 (2)

• 主讲：于红香

第四章 多元函数积分学

第一节 二重积分

四. 二重积分的计算

- 直角坐标系下二重积分的计算
- 二重积分的换元法
- 极坐标系下二重积分的计算

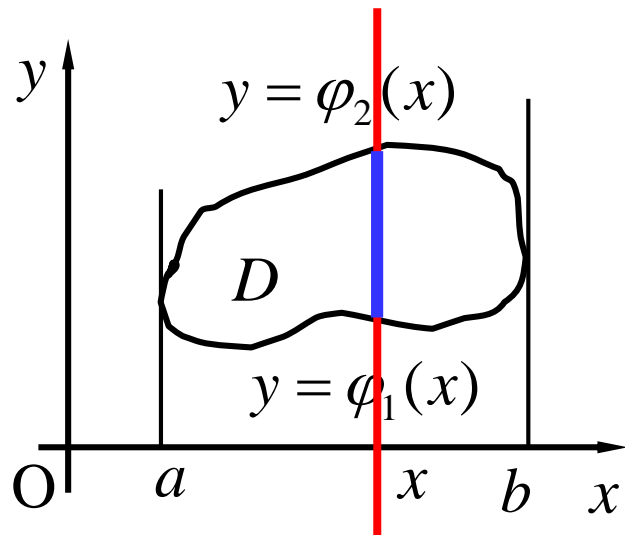
本节教学要求：

- ◆ 正确理解重积分的换元法。
- ◆ 熟练掌握极坐标系下二重积分的计算。





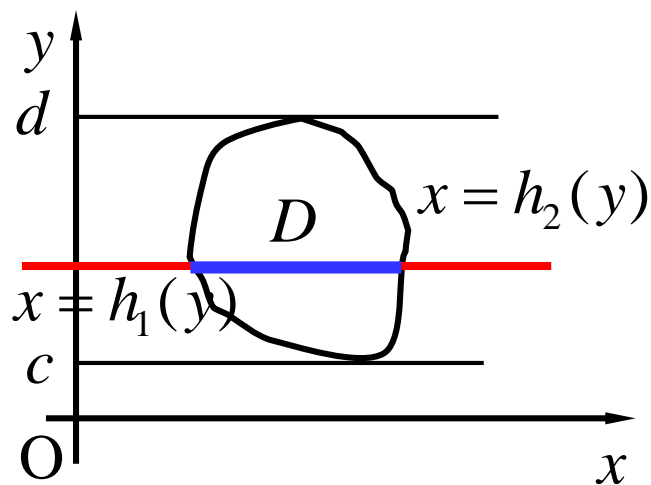
直角坐标系下二重积分的计算



若积分区域 D 可表示为下列两种形式:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$



$$\begin{aligned} \text{则} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \end{aligned}$$



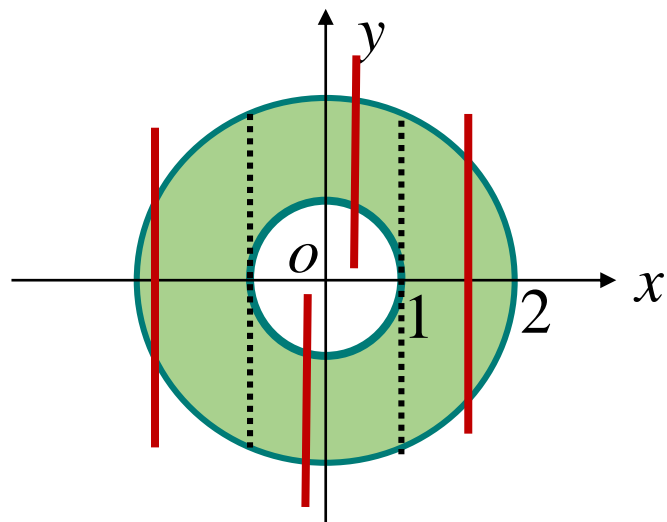


直角坐标系下二重积分的计算

【练】 将二重积分 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ 化为直角坐标系下的二次积分，

其中 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

【解】



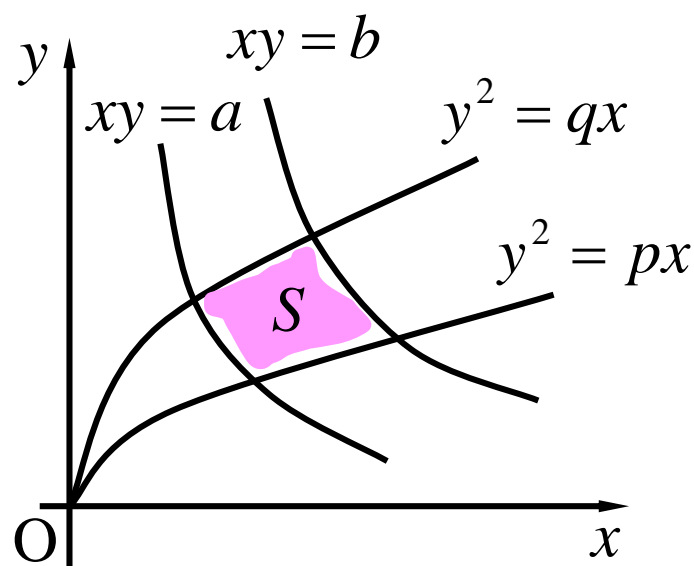
$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy &= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy \\ &+ \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy \\ &+ \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy \\ &+ \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy\end{aligned}$$





直角坐标系下二重积分的计算

【例】 求由抛物线 $y^2 = px$, $y^2 = qx$ ($0 < p < q$) 及双曲线 $xy = a$, $xy = b$ ($0 < a < b$) 所围成的平面图形的面积。



【解】 $S = \iint_D dx dy$ (被积函数 $f(x, y) \equiv 1$)

直接运用直角坐标系下的公式 计算较繁。

积分区域是否可以简化?

换元法!



二重积分的换元法

设 D 是 xy 平面上的有界闭区域, $f(x, y) \in C(D)$ 。

变换 $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$ 将 uv 平面上的区域 D^* 一一变为

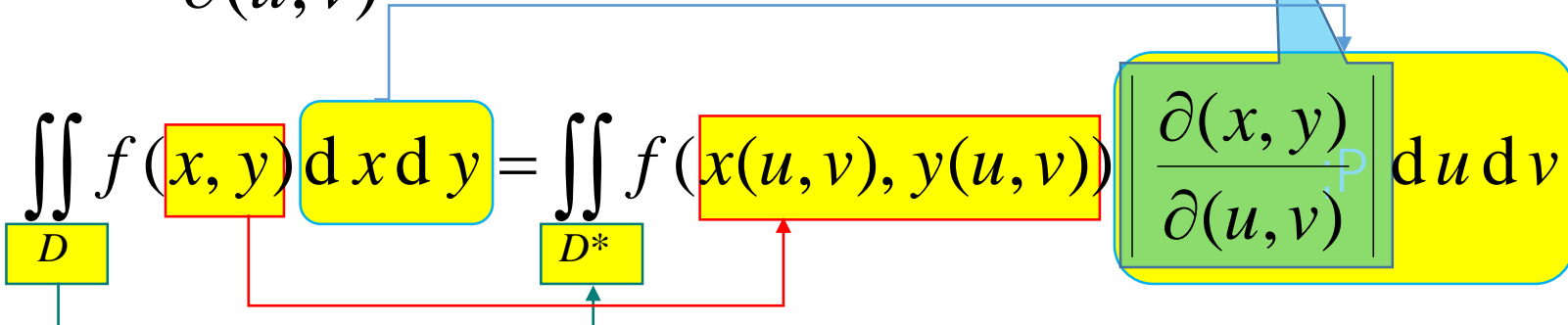
xy 平面上的区域 D , 且

$$(1) \quad x(u, v), y(u, v) \in C^1(D^*);$$

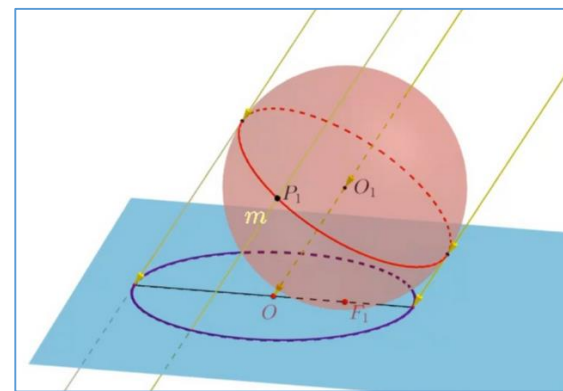
$$(2) \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad (u, v) \in D^*,$$

面积伸张系数

则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$


The diagram illustrates the change of variables in a double integral. It shows two regions, D and D^* , both highlighted in yellow. D is in the xy -plane, and D^* is in the uv -plane. A blue arrow points from D to D^* , representing the transformation T . A red arrow points from D^* back to D , representing the inverse transformation. A blue line connects the Jacobian determinant term $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ in the integral formula to the text '面积伸张系数' (Area Stretching Coefficient) and the image of a magnifying glass over a newspaper.





二重积分的换元法

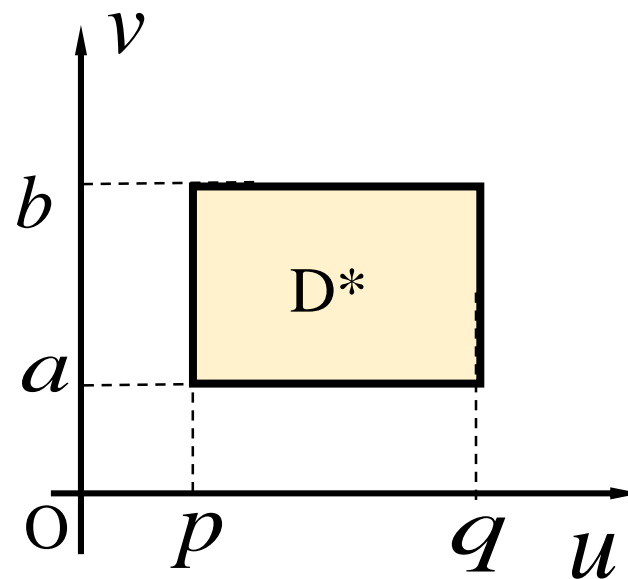
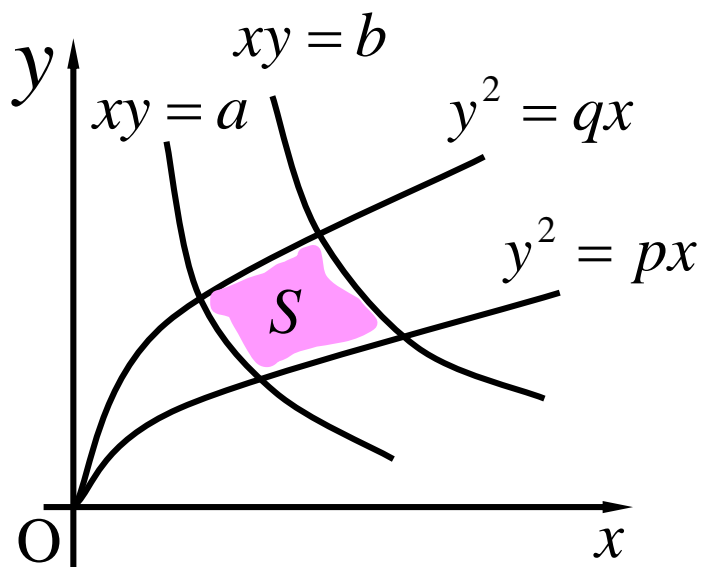
【例】

求由抛物线 $y^2 = px$, $y^2 = qx$ ($0 < p < q$) 及双曲线 $xy = a$, $xy = b$ ($0 < a < b$) 所围成的平面图形的面积。

【解】

作变量代换 $T: u = \frac{y^2}{x}, v = xy$, 简化: 积分区域

则 $D \xrightarrow{\text{red arrow}} D^*: D^* = \{(u, v) \mid p \leq u \leq q, a \leq v \leq b\}$ 。 矩形区域



二重积分的换元法

【例】 求由抛物线 $y^2 = px$, $y^2 = qx$ ($0 < p < q$) 及双曲线

$xy = a$, $xy = b$ ($0 < a < b$) 所围成的平面图形的面积。

【解】 又
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & y \\ \frac{2y}{x} & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{-\frac{3y^2}{x}} = -\frac{1}{3u}。$$

所求面积为

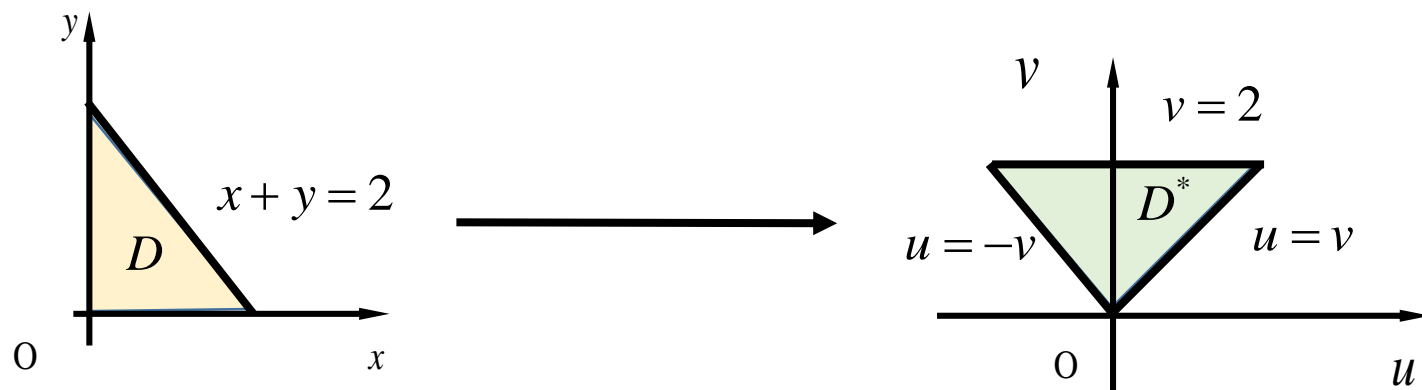
$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy \quad (\text{被积函数 } f(x, y) \equiv 1) = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \iint_{D^*} \frac{1}{3u} du dv = \int_a^b dv \int_p^q \frac{1}{3u} du = \frac{1}{3} (b-a) \ln \frac{q}{p}。 \end{aligned}$$



二重积分的换元法

【练】 计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$, 其中 D 是由 x 轴、 y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域。

【解】 令 $u = y - x$, $v = y + x$, 简化: 被积函数

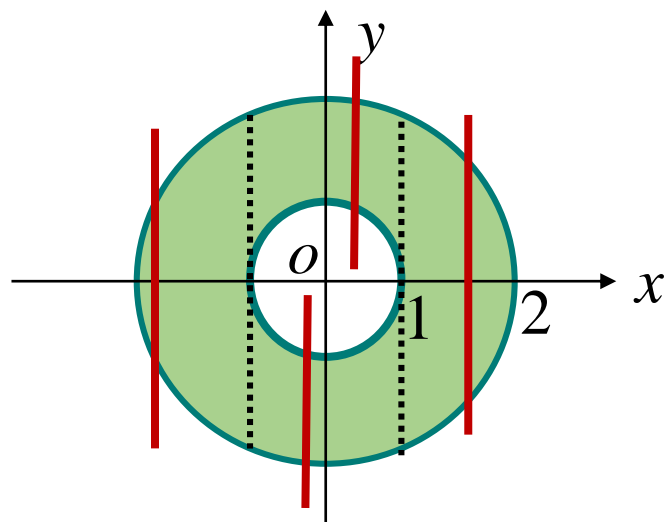


$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy = \iint_{D^*} e^{\frac{u}{v}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_0^2 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du = e - e^{-1}.$$



【例】 计算 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

【解】
$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_{-1}^{-2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$$



$$+ \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$$

$$+ \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$$

$$+ \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$$

$$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy = ?$$

换坐标系试试!





极坐标系下二重积分的计算

由极坐标与直角坐标的关系：

如何化为二次积分？

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta .$$

此时

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r ,$$

从而

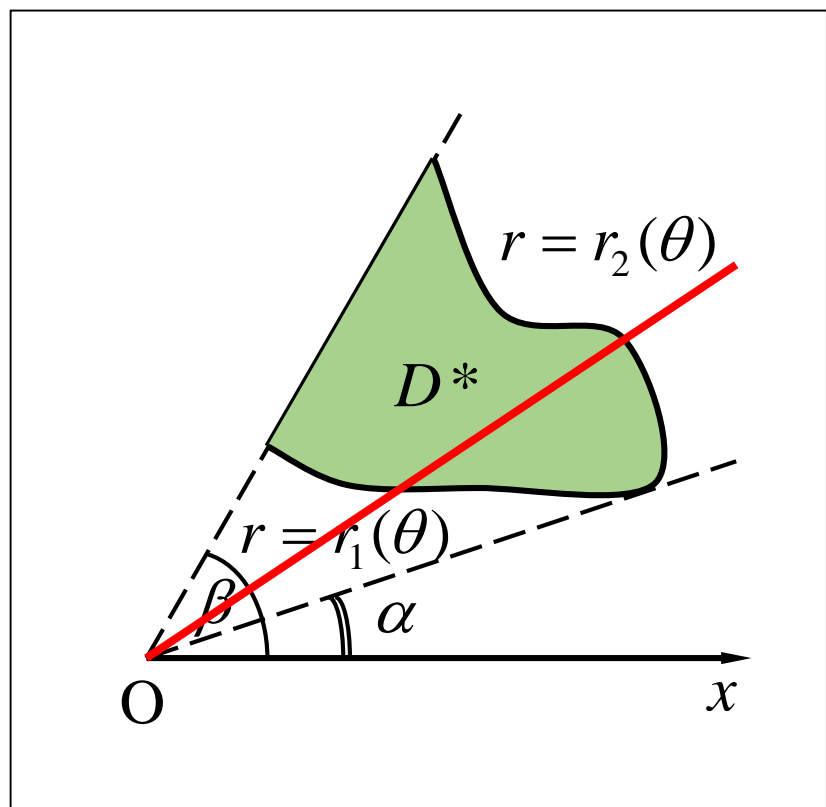
$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| \mathrm{d} r \mathrm{d} \theta$$

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \mathrm{d} r \mathrm{d} \theta .$$



极坐标系下二重积分的计算

(1) 极点位于积分区域外



在极坐标系中，曲线的方程为 $r = r(\theta)$ 。

如图所示， $D^* = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,$

$$r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\},$$

其中， $r_1(\theta), r_2(\theta) \in C([\alpha, \beta])$ ，则

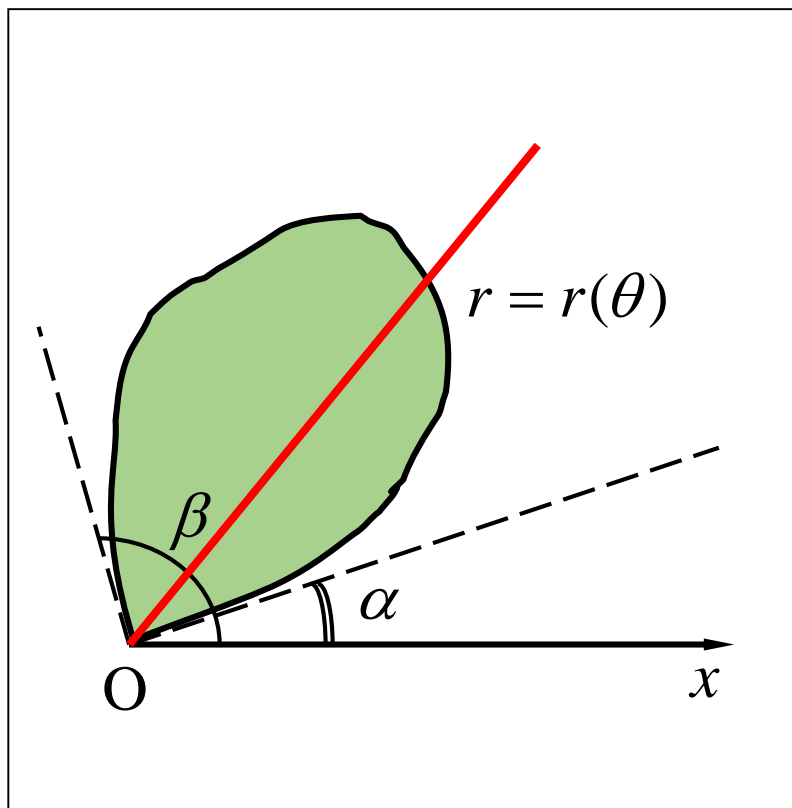
$$\iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr。$$



极坐标系下二重积分的计算

(2) 极点位于积分区域边界上



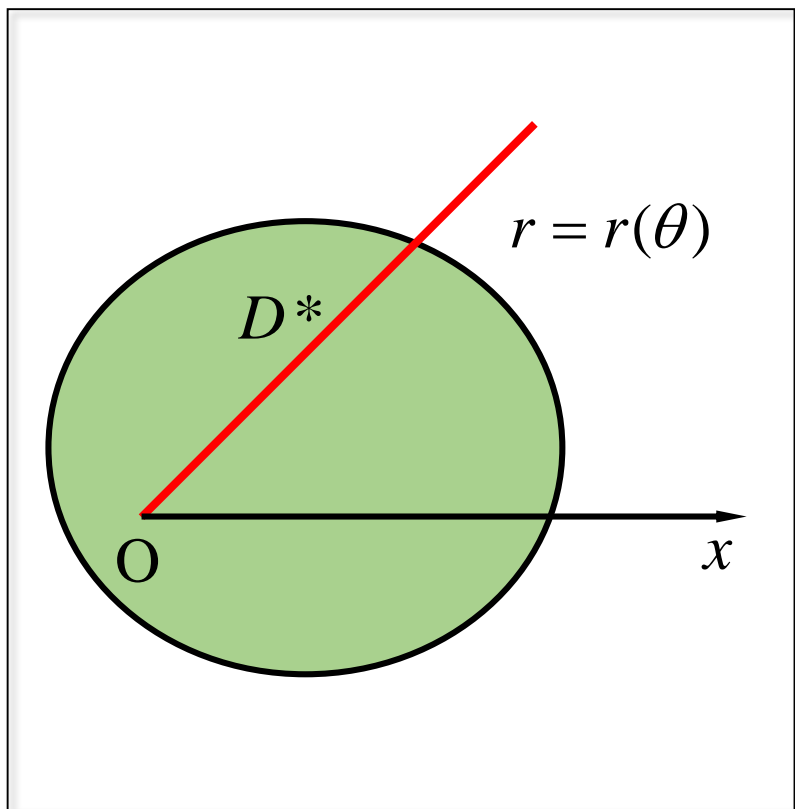
如图所示, $D^* = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\theta)\}$, 其中 $r(\theta) \in C([\alpha, \beta])$, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr. \end{aligned}$$



极坐标系下二重积分的计算

(3) 极点位于积分区域内部



如图所示, $D^* = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq r(\theta) \}$,

其中 $r(\theta) \in C([\alpha, \beta])$, 则

$$\iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

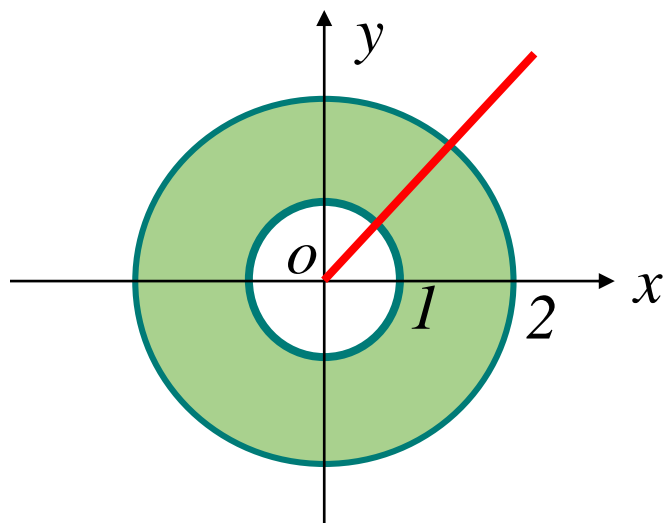
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr .$$



极坐标系下二重积分的计算

【例】 计算 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

【解】 采用极坐标进行计算: $D \rightarrow D^* = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 2\}$



$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 e^{r^2} r dr \\ &= \pi(e^4 - e).\end{aligned}$$

极坐标下:
本题的被积函数、积分区域均简化!
简单高效!



极坐标系下二重积分的计算

【练】 设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$,

则 $\iint_D f(xy) dx dy = (\quad)$

(A) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy$

(B) $2 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dy$

(C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) dr$

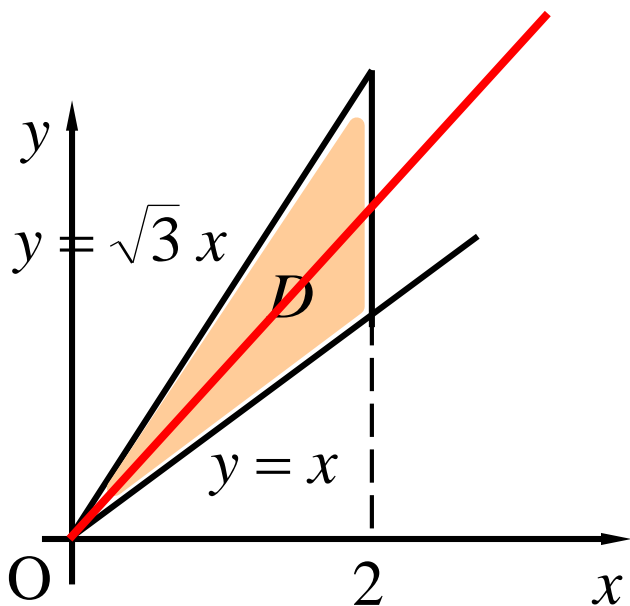
(D) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$



极坐标系下二重积分的计算

【例】 将二重积分化为极坐标形式： $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$ 。

【解】



引入极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$

$$\text{故 } r \cos \theta \leq r \sin \theta \leq \sqrt{3} r \cos \theta,$$

$$\text{由此, 得 } 1 \leq \tan \theta \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},$$

又由 $x = r \cos \theta = 0$ 得 $r = 0$;

$$\text{由 } x = r \cos \theta = 2 \text{ 得 } r = \frac{2}{\cos \theta} = 2 \sec \theta.$$



极坐标系下二重积分的计算

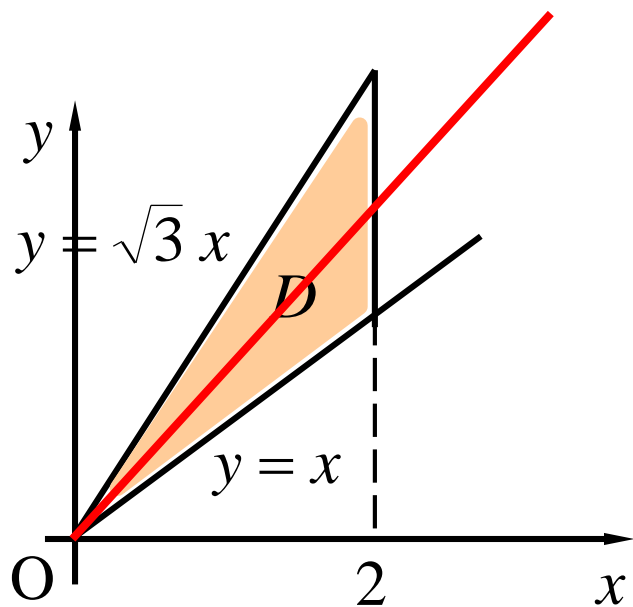
【例】 将二重积分化为极坐标形式： $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$ 。

【解】 故在极坐标系下 $D \rightarrow D^*$:

$$D^* = \{(r, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq r \leq 2 \sec \theta\},$$

从而，原积分化为

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy &= \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= \iint_{D^*} f(r) r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2 \sec \theta} f(r) r dr. \end{aligned}$$



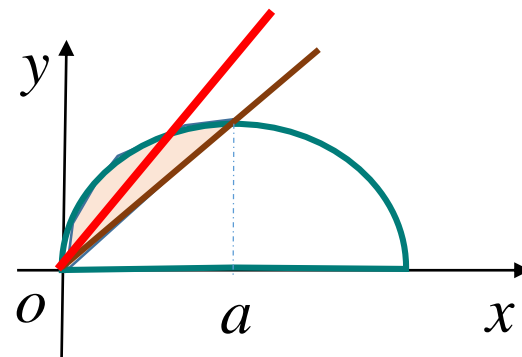
极坐标系下二重积分的计算

【练】 计算二次积分 $\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy$

【解】 $\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy$

$$= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^2 dr$$

$$= 4a^4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \left(\frac{3}{8}\pi + 1\right)a^4.$$



极坐标系下二重积分的计算

【例】 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的 (含在圆柱面内的部分) 立体的体积.

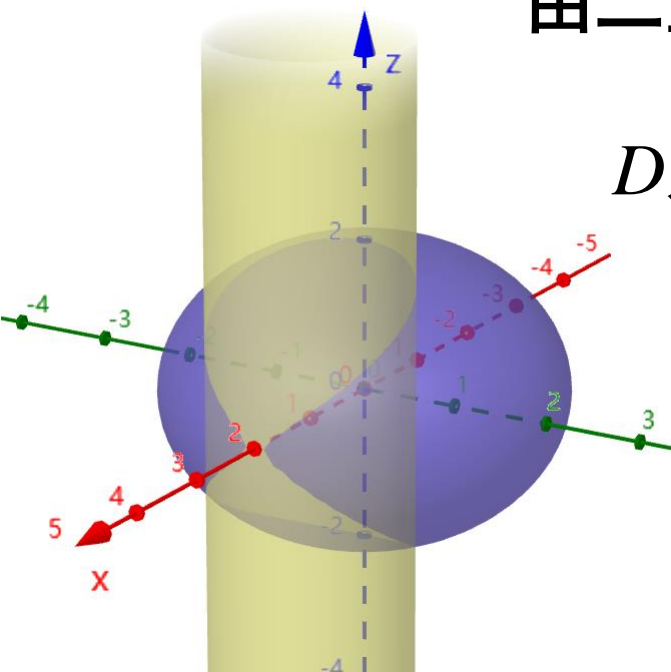
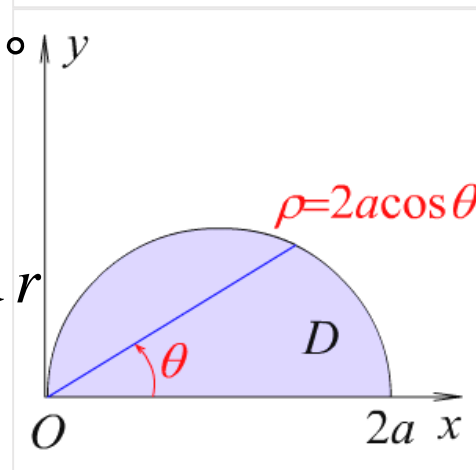
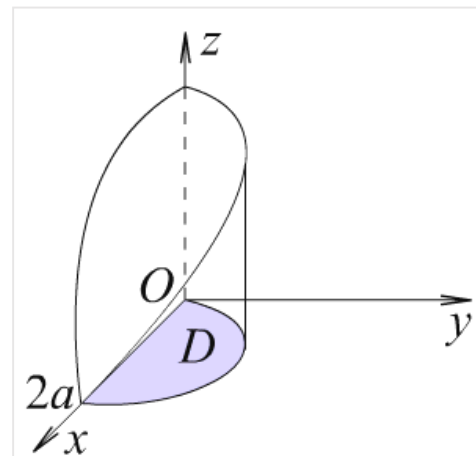
【解】 由图形的对称性, 所求体积为第一卦限部分的四倍.

由二重积分的定义知: $V = 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy$,

D 为半圆周 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 与 x 轴所围成的闭区域。

利用极坐标系进行计算

$$\begin{aligned} &= 4 \iint_{D^*} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr \\ &= \frac{32}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \theta - 1) d\theta = \left(\frac{16}{3} \pi - \frac{64}{9} \right) a^3 \end{aligned}$$

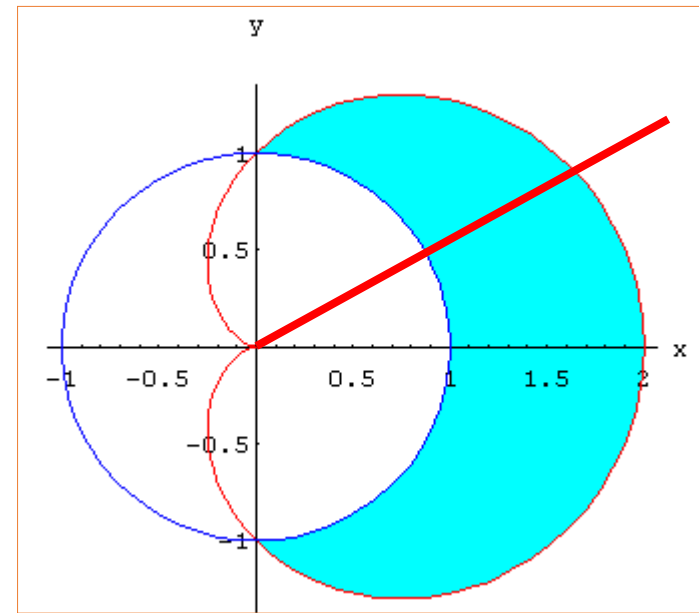


极坐标系下二重积分的计算

【练】 计算 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$. D 是由心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 与圆 $r = a$ 围成 (取圆外部) .

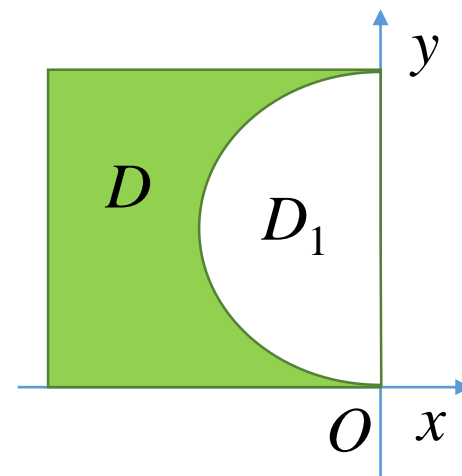
【解】 由图形的对称性有:

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma &= 2 \iint_{D_1^*} r \cdot r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+\cos \theta)} r \cdot r dr \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 [(1 + \cos \theta)^3 - 1] d\theta = a^3 \left(\frac{22}{9} + \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$



【例】 计算 $\iint_D y \, dx \, dy$. D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域.

【解1】
$$\iint_D y \, dx \, dy = \int_0^2 y \, dy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} dx$$



【解2】
$$\iint_D y \, dx \, dy = \iint_{D+D_1} y \, dx \, dy - \iint_{D_1} y \, dx \, dy$$





本节小结

换元法

简化积分区域 D

简化被积函数 f

极坐标使用场景：

当积分区域 D 为圆域或圆域的一部分，

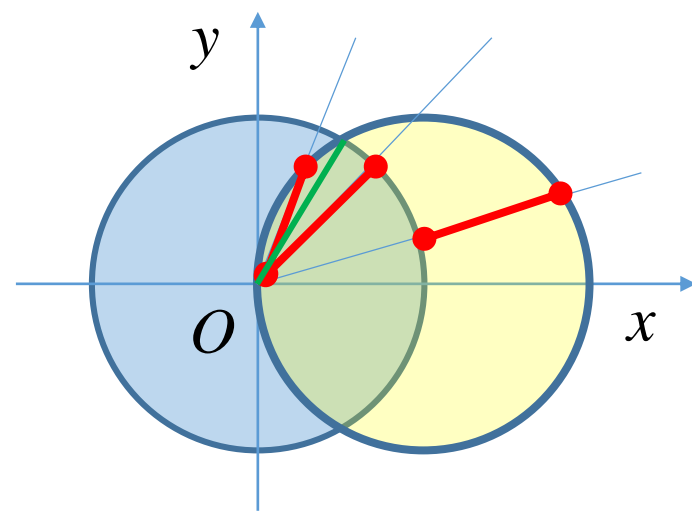
或被积函数为 $f(x^2 + y^2), f(\frac{x}{y})$ 的形式时。





思考题1

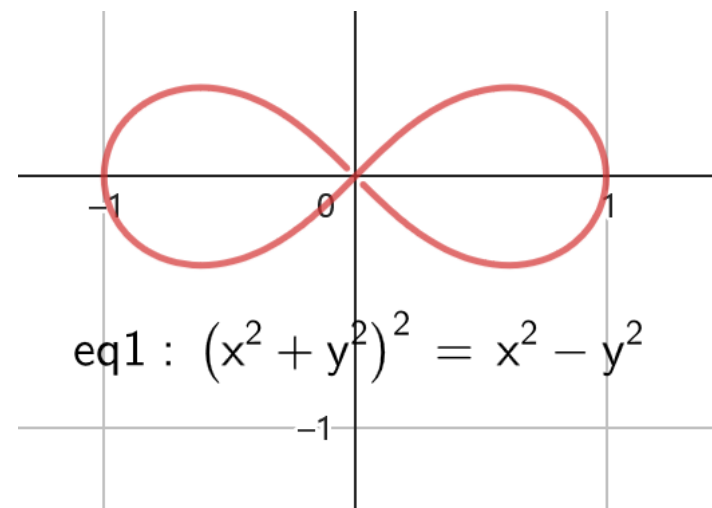
已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, 计算二重积分 $\iint_D |\sqrt{x^2 + y^2} - 1| dx dy$





思考题2

曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 与 x 轴所围成的区域为 D , 求 $\iint_D xy \, dx \, dy$





思考题3

设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 求 $\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) dx dy$





拓展题

设 $g(x) > 0$ 为已知连续函数, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{\lambda g(x) + \mu g(y)}{g(x) + g(y)} dx dy, \text{ 其中 } \lambda, \mu \text{ 为正常数。}$$

