计算机领域本科教育教学改革试点
工作计划（“101计划”）研究成果

数据结构

授课教师：张羽丰

湖南大学　信息科学与工程学院

第 13 章

外排序

提纲

13.1 问题引入

13.2 文件与文件流

13.3 外排序的处理过程

13.4 二路归并外排序

13.5 多路归并

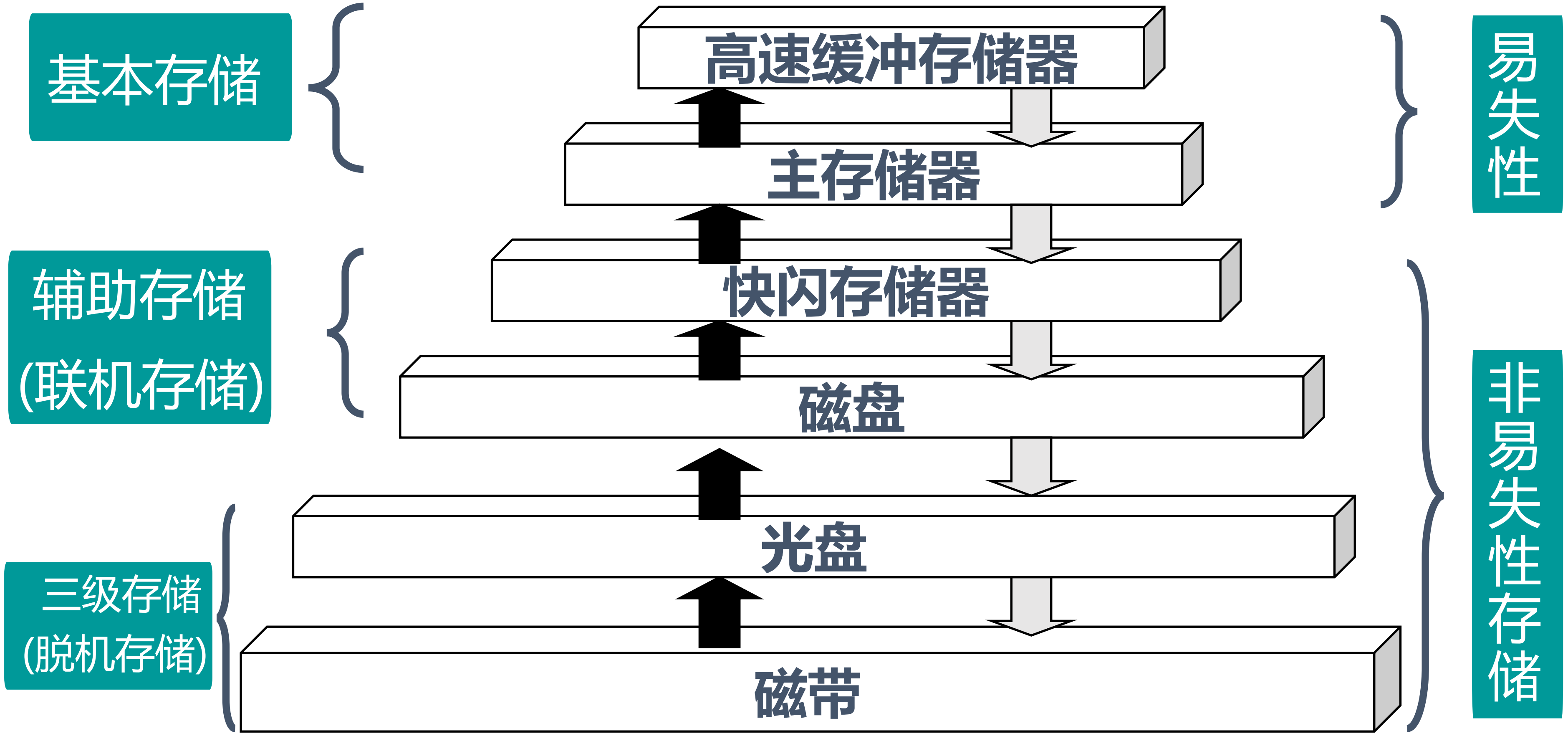
13.6* 最佳归并树

13.7 置换选择排序

13.1 内存与外存

- **计算机存储器主要有两种**
  - 主存储器（Primary Memory或者Main Memory，简称“内存”或者“主存”）
    - 随机访问存储器（RAM，Random Access Memory)
    - 高速缓存（Cache)
    - 视频存储器（Video Memory)
  - 外存储器（Peripheral Storage或者Secondary Storage，简称“外存”）
    - 硬盘（几百G-几百T，10^{12}B)
    - 磁带（几个P，10^{15}B)

物理存储介质概览


基本存储
辅助存储
(联机存储)
三级存储
(脱机存储)
高速缓冲存储器
主存储器
快闪存储器
磁盘
光盘
磁带
易失性
非易失性存储

内存 VS 外存

- 内存
  - 优点：访问速度快
    - CPU 直接与内存沟通，一般内存访问的时间单位是纳秒（10^{-9}秒）
  - 缺点：造价高，存储容量小，断电丢数据
- 外存
  - 优点：价格低，信息不易失，便携性
  - 缺点：存取速度慢
    - 外存一次访问的时间以毫秒或秒为数量级

机械硬盘的访问时间是内存访问的10^6倍，
固态硬盘的访问时间是内存访问的10^3倍

- 牵扯到外存的计算机程序应当尽量减少外存的访问次数

13.2 文件的逻辑结构

- 文件是记录的汇集
  - 文件的各个记录按照某种次序（时间先后、关键字大小）排列起来，各记录间自然形成了一种线性关系
  - 因而，文件可以看成是一种线性结构

文件的组织和管理

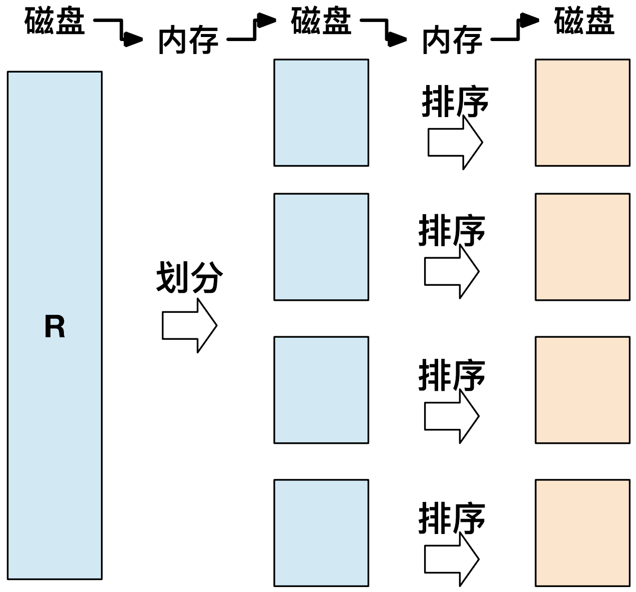
- 逻辑文件（Logical File）
  - 面向高级程序语言的编程人员
  - 连续的字节构成记录，记录构成逻辑文件
- 物理文件（Physical File）
  - 成块地分布在整个磁盘中
- 文件管理器
  - 操作系统或数据库系统的一部分
  - 把逻辑位置映射为磁盘中具体的物理位置

文件的组织

- 文件逻辑组织的三种形式
  - 顺序结构的定长记录
  - 顺序结构的变长记录
  - 按关键码存取的记录
- 常见的物理组织结构
  - 顺序结构——顺序文件
  - 计算寻址结构——散列文件
  - 带索引的结构——索引文件

13.3 磁盘文件的排序

- 外排序
  - 对外存设备（文件）上的数据的排序
  - 待排序的文件非常大，内存存放不下，只能分段处理
- 通常由两个相对独立的阶段组成
  - 将文件分成多个局部有序的初始顺串（run）
    - 置换选择排序：初始顺串尽可能长，
      从而减少初始顺串的个数
  - 将初始顺串归并成全局有序的文件
    - 归并排序：采用多路归并，减少归并的趟数

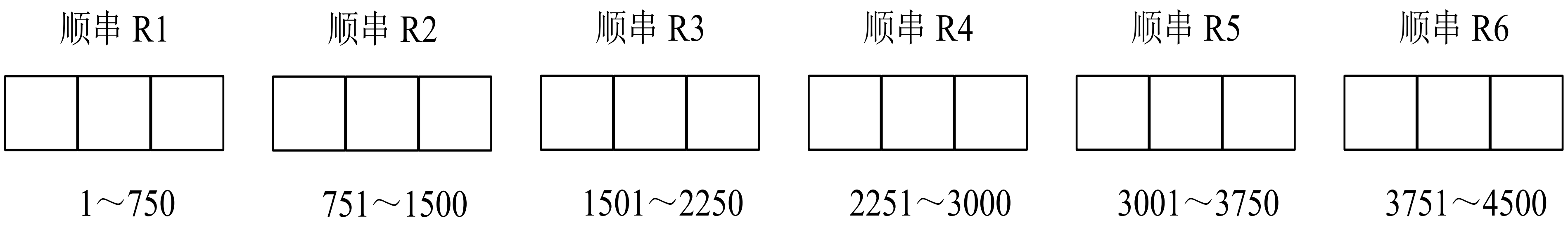


外排序的时间组成

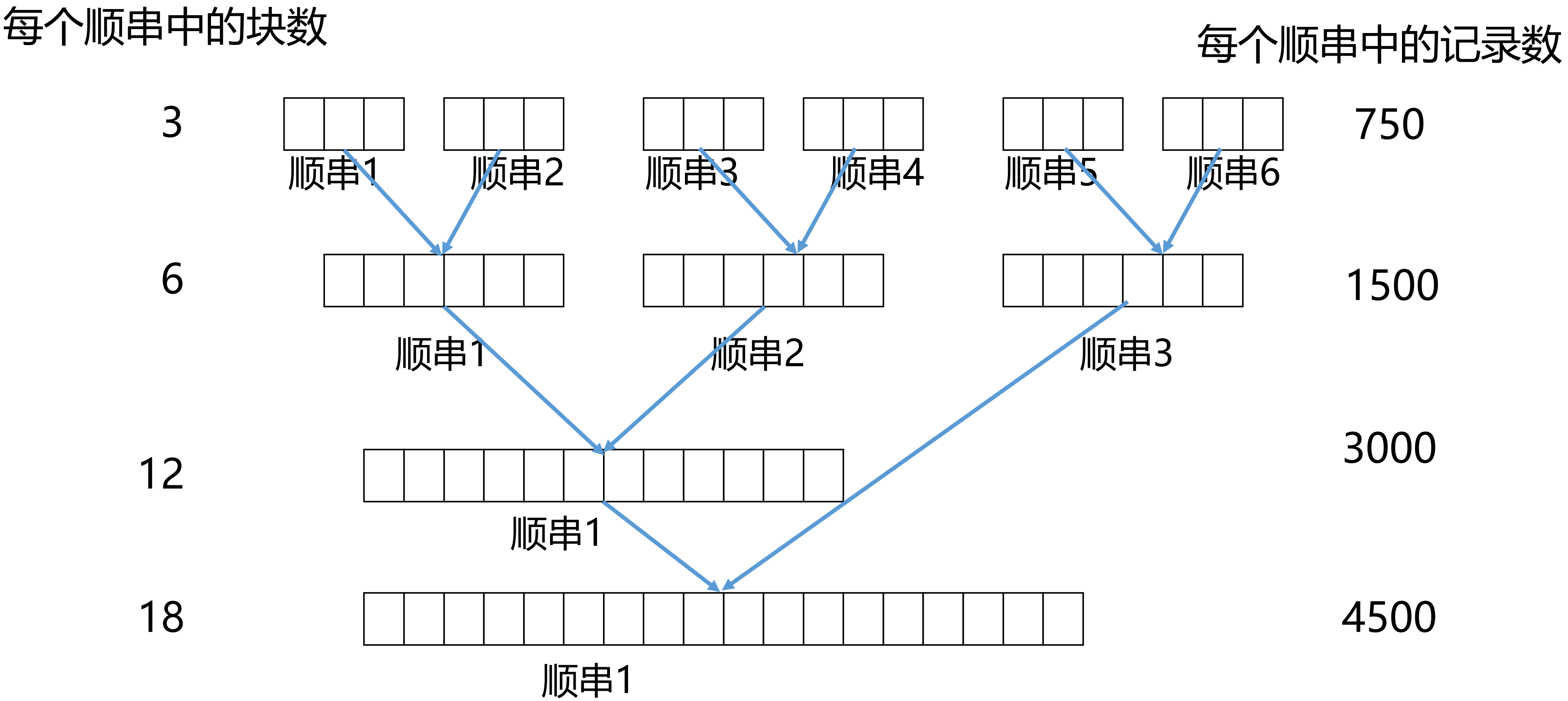
- 由三部分组成
  - 产生初始顺串的内排序所需时间
  - 对顺串的归并过程中所需的IO读写时间
    - 对外存的访问，速度慢
  - 内部归并所需要的时间
- 减少外存IO读写次数是提高外部排序效率的关键

13.4 二路归并外排序

- **二路归并**
  - **把第一阶段所生成的顺串，两两加以合并，直至变为一个顺串为止**
    - **多个顺串加以合并，则称为多路归并**
- **例子**
  - **设有一个文件，内含4500个记录：A_1，A_2，…，A_{4500}，现在要对该文件进行排序。文件存放在磁盘上，页块长为250个记录**
    - **但可占用的内存空间至多只能对750个记录进行排序。**

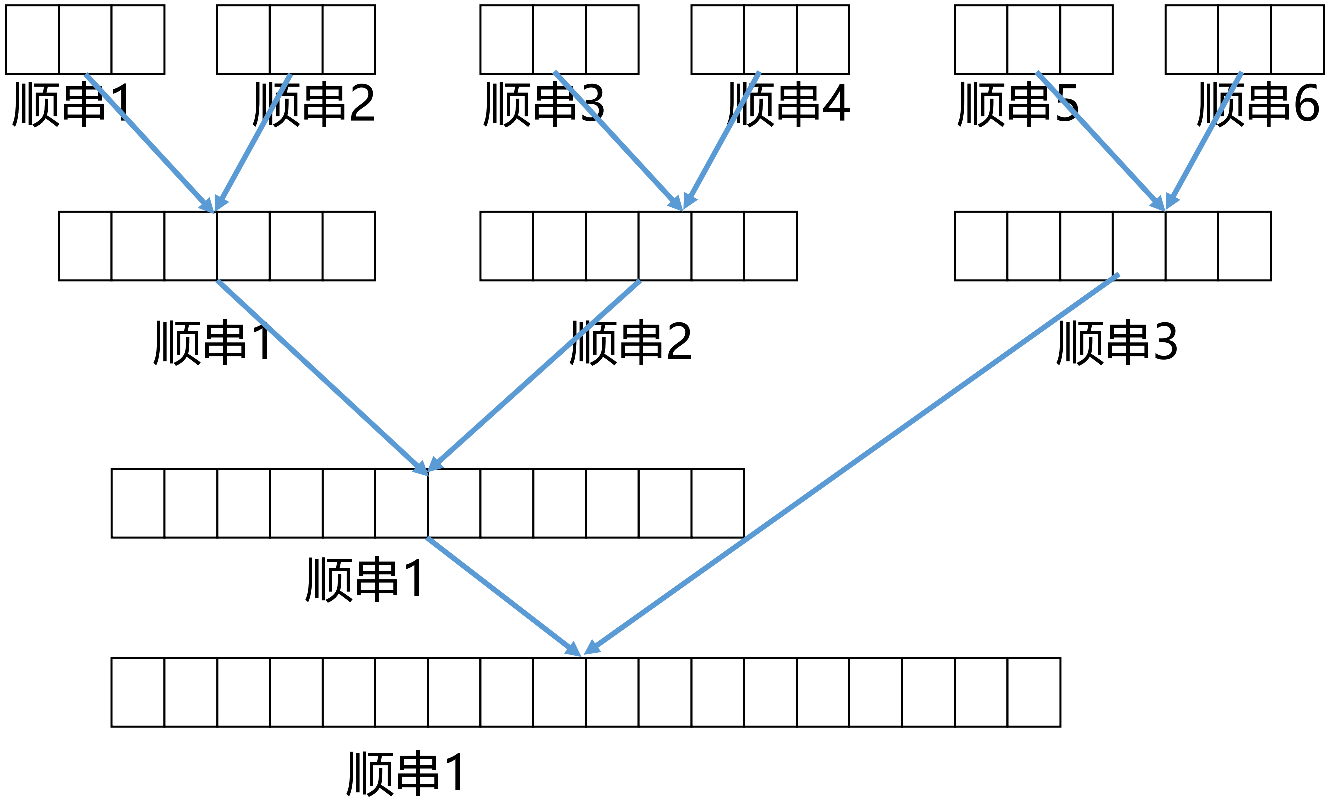


例子：产生顺串->归并顺串



每层都要读出来，归并后写到下一层。
读写各：3*6 + 6*2 + （12 +6）= 48 次，共96次

二路路归并外排序

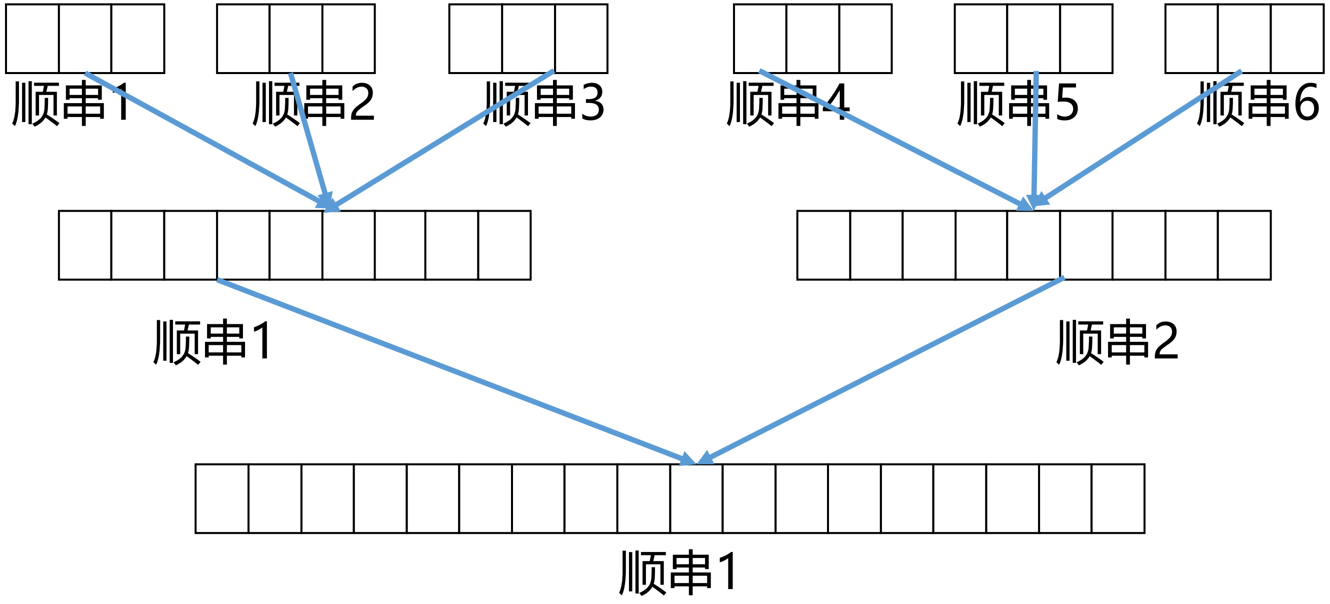


磁盘IO次数为2B*log$_k$n，可以通过增加归并的路数k和减少初始顺串的数目n，减少磁盘IO次数

- 文件所占磁盘块数为B
  - 每一趟读写各B次
  - 3趟读写各3B次
- 初始顺串的数目为n
  - 每趟归并，顺串数减半
  - 归并趟数为$\log_2 n$
- 磁盘IO次数为2B*logkn
  - 增加归并的路数k
  - 减少初始顺串的数目n

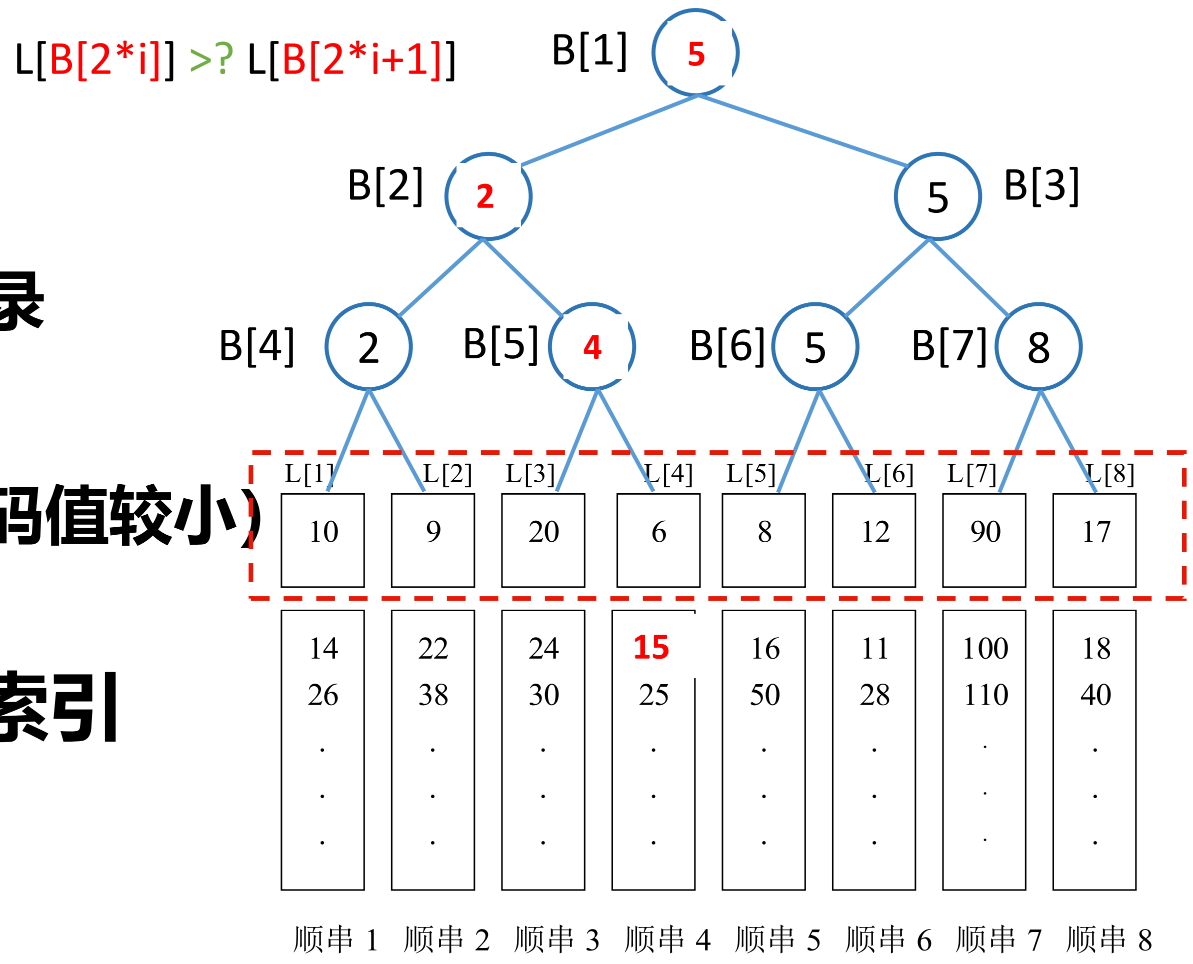
13.5 多路归并外排序

- 增加归并的路数，可减少磁盘IO的次数，提高外排序效率
- 多路归并时，实质就是找最小值
  - 直接循环遍历找k个顺串中的最小值，代价较大
  - 如何提高找最小值的效率?
    - 胜者树
    - 败者树



胜者树

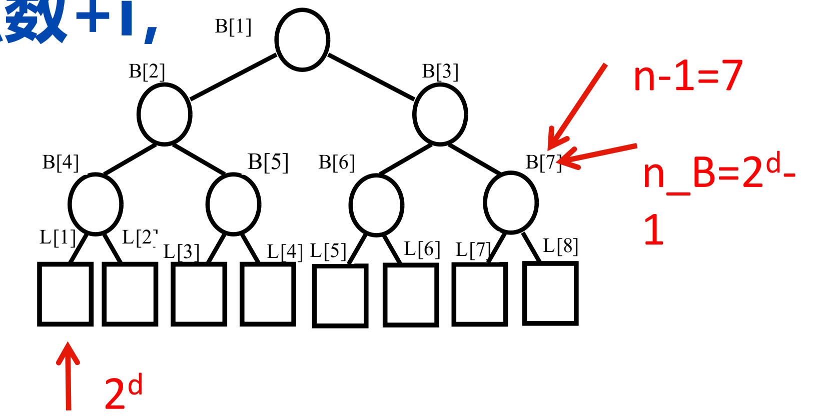
- **胜者树是一棵完全二叉树**
  - **叶子结点用数组L[1..n]表示**
    - **存储各顺串在合并过程中的当前记录**
  - **分支结点用数组B[1..n-1]表示**
    - **代表两个儿子结点中的胜者（关键码值较小）所对应数组L的索引**
  - **根结点B[1]是树中的最终赢者的索引**
    - **即为下一个要输出的记录结点**
- **如果L[i]发生改变**
  - **只需沿着从L[i]到根结点的路径修改二叉树，不必改变其它的结果**



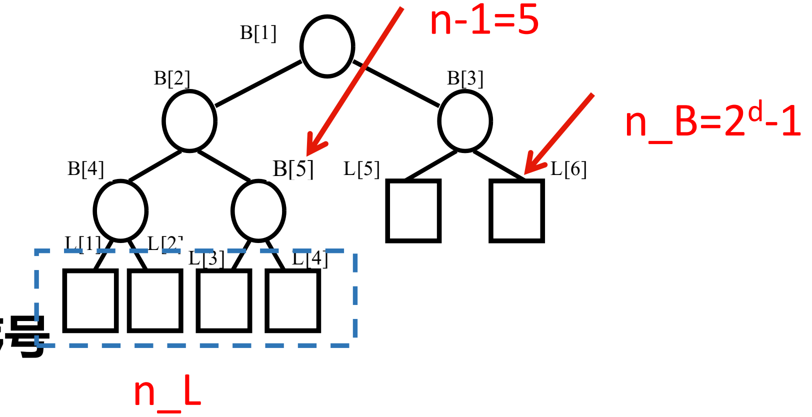
胜者树与数组的对应关系

- **n路归并，则外部叶子结点数为n，内部结点数为n-1**
  - **叶子结点数 = 内部结点数 + 1**
- **如果$n=2^d$，第i个叶子结点在完全树中的序号为内部节点数+i，即为$n-1+i$，对应的内部父结点p：**

$$p=(n-1+i)/2$$



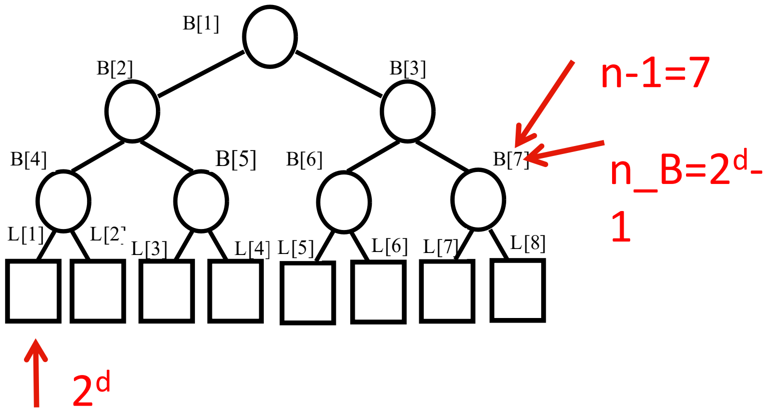
- **否则：设$d=[log_2 n]$**
  - **最底层的叶子结点父节点p：$p=(2^d-1+i)/2$**
    - **除最底层叶子结点外的所有结点个数$n_B=2^d-1$**
  - **非最底层叶子结点父节点p：$p=(n-1+i-n\_L)/2$**
    - **其中非最底层叶子结点序号i在底层叶节点之后，因此从最后一个内部结点n-1开始，往后数i-n_L个得到第i个非最底层叶节点在数组中的序号**

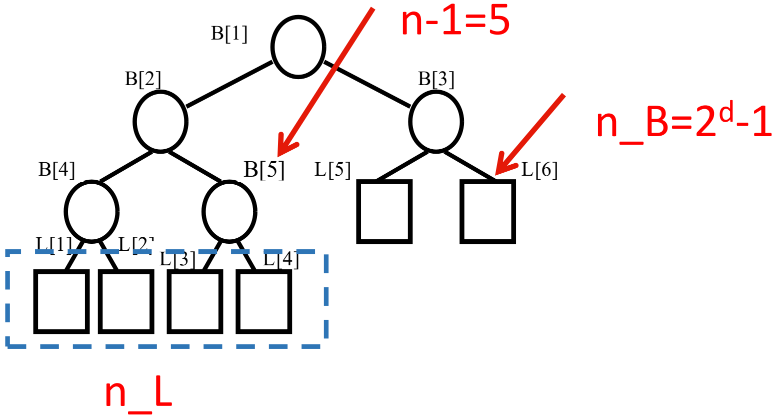


胜者树与数组的对应关系

- n路归并，则外部叶子结点数为n，内部结点数为n-1
  - 叶子结点数 = 内部结点数 + 1
- 最底层的叶子结点数目n_L为多少?
  - $n\_L = (2n - 1) - (2^d - 1) = 2n - 2^d$
- 最后两层中统一从左到右数，
  第i个叶子结点对应的内部结点p：

$$p = \begin{cases} (2^d - 1 + i)/2 & i \le n\_L \\ (n - 1 + i - n\_L)/2 & i > n\_L \end{cases}$$





- 其中

$$d = \lceil \log_2 n \rceil$$

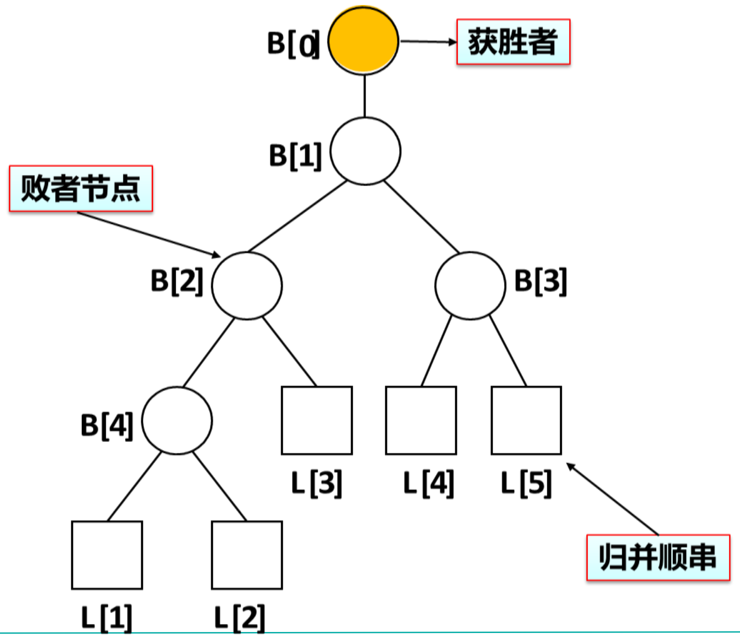
$$n\_L = 2n - 2^d$$

胜者树

- **时间复杂度**
  - 初始化k路归并的胜者树：O(k)
  - 读入新值并重构胜者树
    - 沿着从L(i)到根的路径进行更新，O(logk)
    - n个元素的k路归并：O(nlogk)
  - 总时间为：O(k+nlogk)

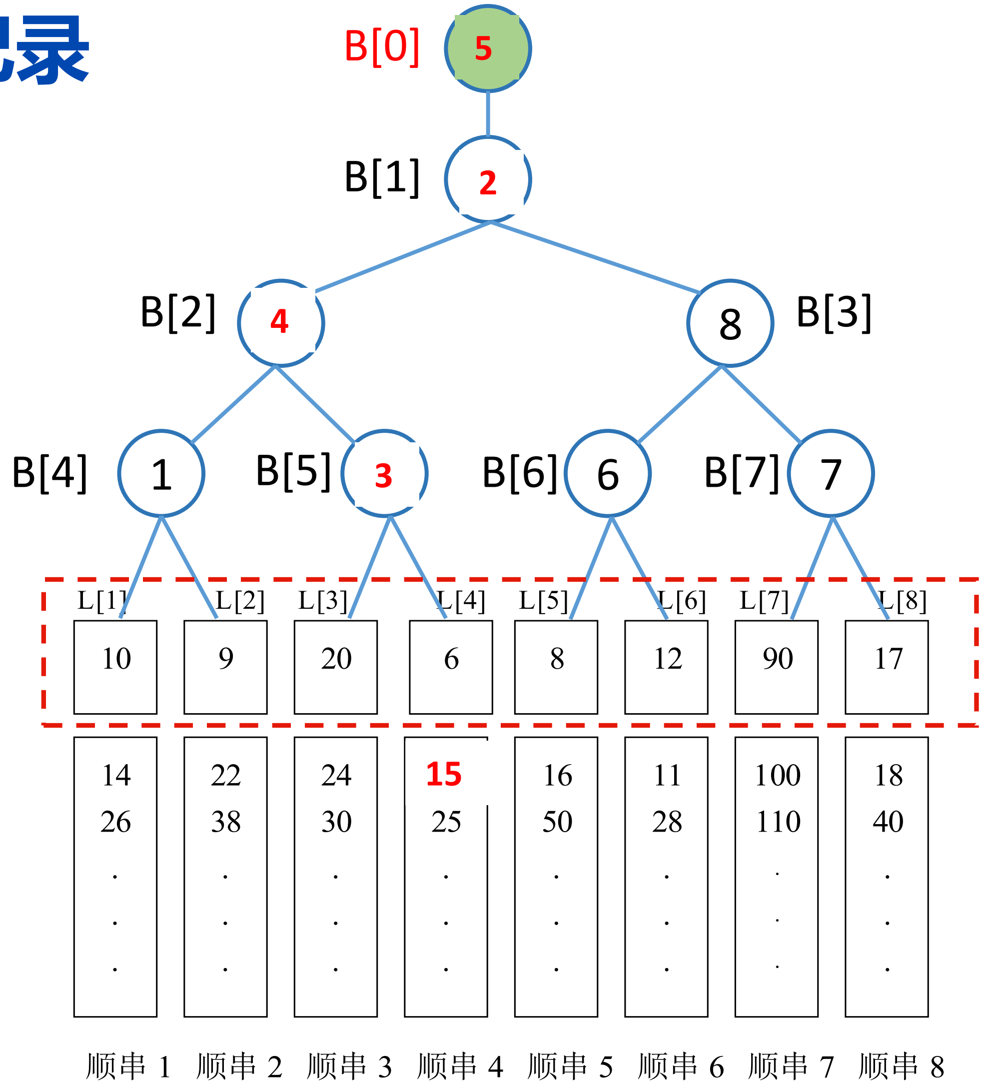
败者树

- **败者树是胜者树的一种变体**
  - **在败者树中，父节点B[i]记录其左右子节点进行比赛的败者，而让获胜者去参加更高阶段的比赛**
  - **新增根节点B[0]，来记录整个比赛的全局胜者**



败者树示例

- L[]存储各顺串在合并过程中的当前记录
- B[]代表两个儿子结点中的败者（关键码值较大）所对应数组L的索引
- L[i]发生改变时，沿着从L[i]到B[0]的路径修改败者树
  - 与胜者树不同，只需当前结点的胜者与父节点（败者/更新前兄弟中更大的那个）进行比较，
    无需与兄弟结点进行比较
  - 降低了重构的开销

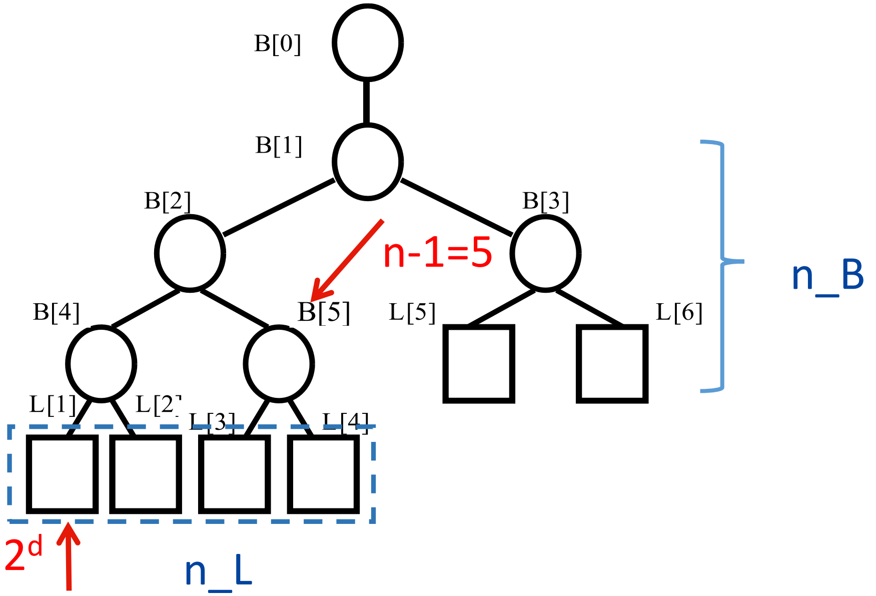


败者树与数组的对应关系

- **为了将L中的败者存储在父节点中，需要知道B[]与L[]的下标对应关系**
  - **与胜者树一致**

$$p=\begin{cases}(2^d-1+i)/2 & i\le n\_L\\(n-1+i-n\_L)/2 & i>n\_L\end{cases}$$

- **其中：** $d=\lceil log_2 n\rceil$
  - **最底层叶子结点个数** $n\_L=2n-2^d$
  - **最底层第一个叶子结点之前的结点数** $n\_B=2^d-1$



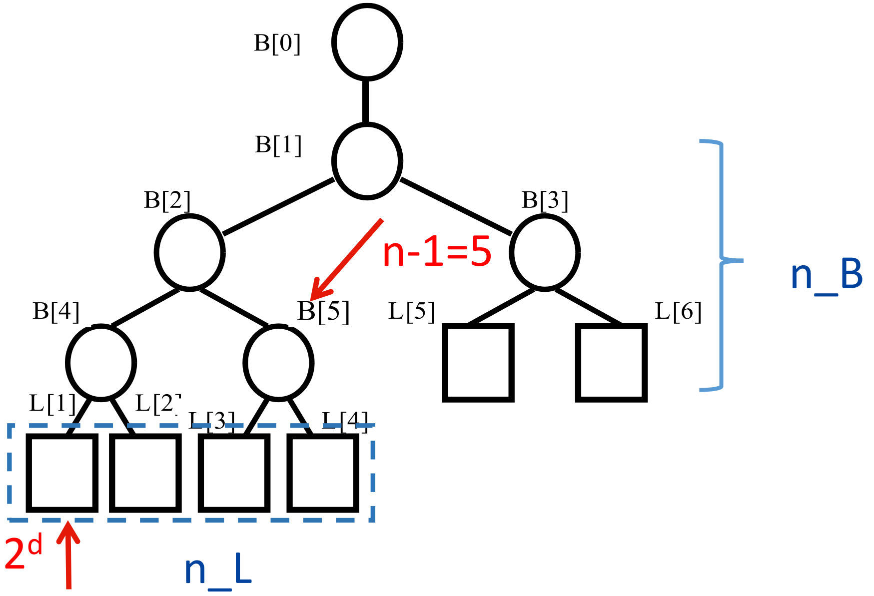
败者树ADT

ADT LoserTree {
数据对象：
kMaxSize, n, n_L, n_B, B, L
数据关系：
kMaxSize, n分别表示最大选手数和当前选手数
n_L, n_B分别表示最底层外部结点数，最底层外部结点之上的结点（除最底层结点之外的结点）总数
B表示存放下标的胜者树数组
L表示元素数组
基本操作:
Initialize(tree, array, size)：根据有size个元素的数组array初始化败者树tree。
Winner(tree, x, y)：比较两个元素并返回胜者。
Loser(tree, x, y)：比较两个元素并返回败者。
Play(tree, p, left, right)：在初始化时，从内部结点p到树根的路径上进行比赛。
RePlay(tree, i)：重构时，从外部结点i到树根的路径上重新进行比赛。
FinalWinner(tree)：根据败者树tree返回最终胜者。
}

败者树初始化

```
// 输入：元素数组array，元素个数size
// 输出：败者树tree
Initialize(tree, array, size){
    tree.n ← size
    tree.L ← array
    d ← ⌈log2(tree.n)⌉   //右图d=3
    tree.n_L ← 2×tree.n-2^d //最底层数量
    tree.n_B ← 2^d-1//除去最底层的数量
    i←2
    while i ≤ tree.n_L do
    |  p ← (i+tree.n_B)/2
    |  Play(tree, p, i-1, i)          // 最底层外部结点比赛，比到树根
    |  i ← i+2
    end
```

记最后一层叶节点数为n_L，倒数第二层叶节点数为n_R，则n_L+n_R=n，若将倒数第二层n_R个结点都附上两个子节点，则最后一层叶节点数量为n_L+2 * n_R = 2^d，结合可得n_L=2n-2^d



$$p = \begin{cases} (2^d - 1 + i)/2 & i \le n\_L \\ (n - 1 + i - n\_L)/2 & i > n\_L \end{cases}$$

$$n\_L = 2n - 2^d$$

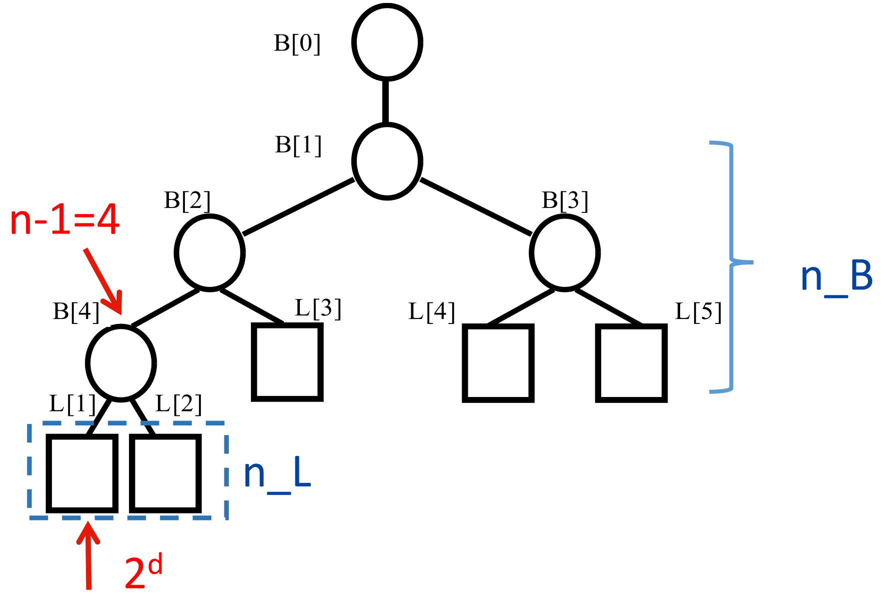
$$n\_B = 2^d - 1$$

败者树初始化（续）

```
// 处理其余外部结点
if tree.n % 2 = 1 then    // n为奇数，内部结点和外部结点比赛
| //这里用L[n_L+1]和它的父结点比赛
| //因为此时它的父结点中存放的是其兄弟结点处的比赛胜者索引
| Play(tree, tree.n / 2, tree.B[(tree.n - 1)/2], tree.n_L + 1)
| i ← tree.n_L    3 //多跳一个节点
else
| i ← tree.    2
end
whi    点的比赛
| p
| Pl
| i ← i+2
End
}
```

倒数第二层的第一个叶节点的父节点索引，右侧计算p的方式：(n-1+(n_L+1)-n_L)/2=n/2

n_L的父节点的父节点，按照右侧计算方式



$$p = \begin{cases} (2^d - 1 + i)/2 & i \le n\_L \\ (n - 1 + i - n\_L)/2 & i > n\_L \end{cases}$$

$$n\_L = 2n - 2^d$$

$$n\_B = 2^d - 1$$

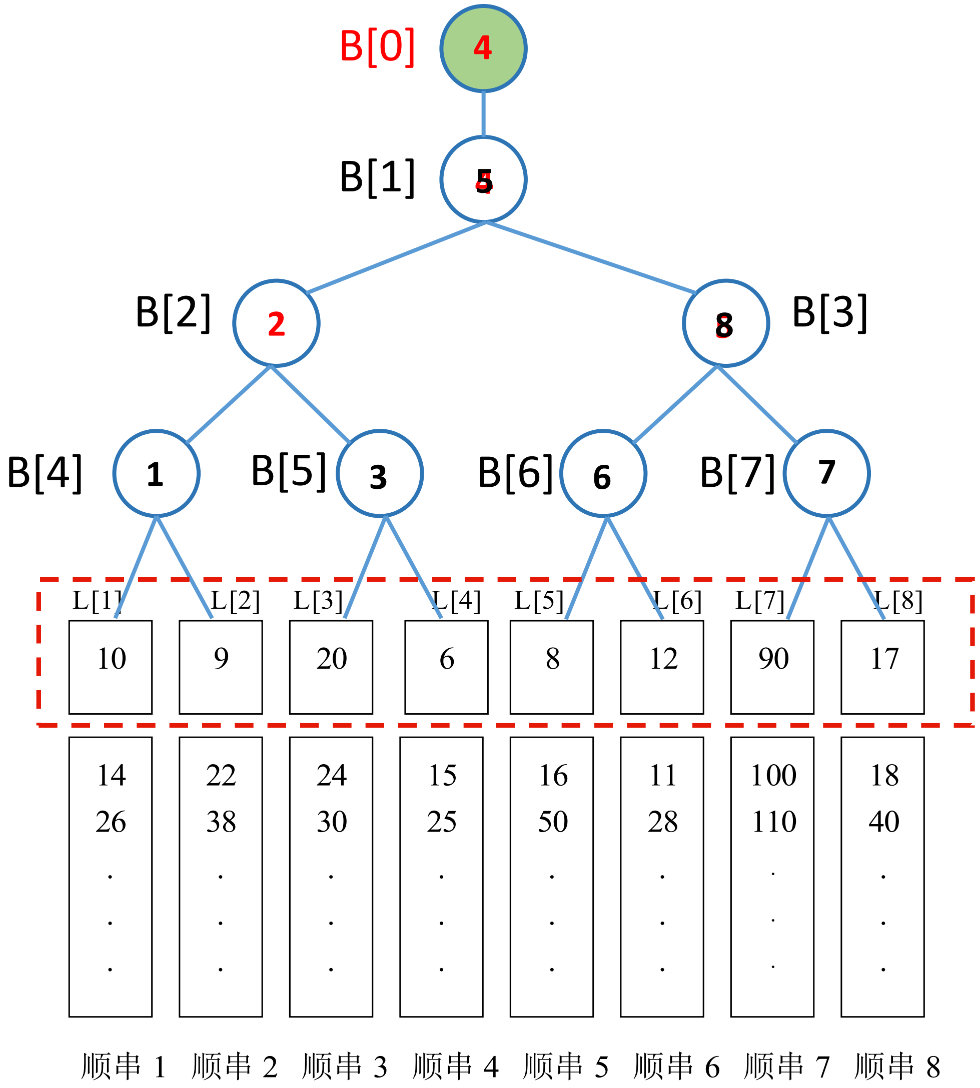
Play比赛

```
Play(tree, p, left, right) {
    tree.B[p] ← Loser(tree, left, right)  // 将败者索引放在B[p]中
    winner1 ← Winner(tree, left, right)  // 将胜者索引暂存在winner1中
    while p>1 且 p%2=1 do  // p是某个结点右孩子，需要沿路径继续向上比赛
        // 胜者和B[p]父结点所标识的外部结点相比较（左孩子结点的胜者索引暂存在B[p]的父节点）
        winner2 ← Winner(tree, winner1, tree.B[p/2])  // 新的胜者索引暂存在winner2中
        tree.B[p/2] ← Loser(tree, winner1, tree.B[p/2])  // 新的败者索引存在B[p/2]中
        winner1 ← winner2
        p ← p/2
    end
    // 结束循环(B[p]是左孩子，或者B[1])之后，胜者索引暂存在B[p]的父结点，将来B[p]的兄弟有比
//赛结果后，会继续网上比赛，见下页动画
    tree.B[p/2] ← winner1
}
```

Initialize过程演示

- **左孩子结点（编号为偶数）**
  - **败者保存在当前结点**
  - **胜者临时保存在父节点**
- **右孩子结点（编号为奇数）**

3
  - **败者保存在当前结点**
  - **继续与左兄弟结点的胜者比较，左兄弟结点的胜者已保存在父节点，因此只需与父节点比较**



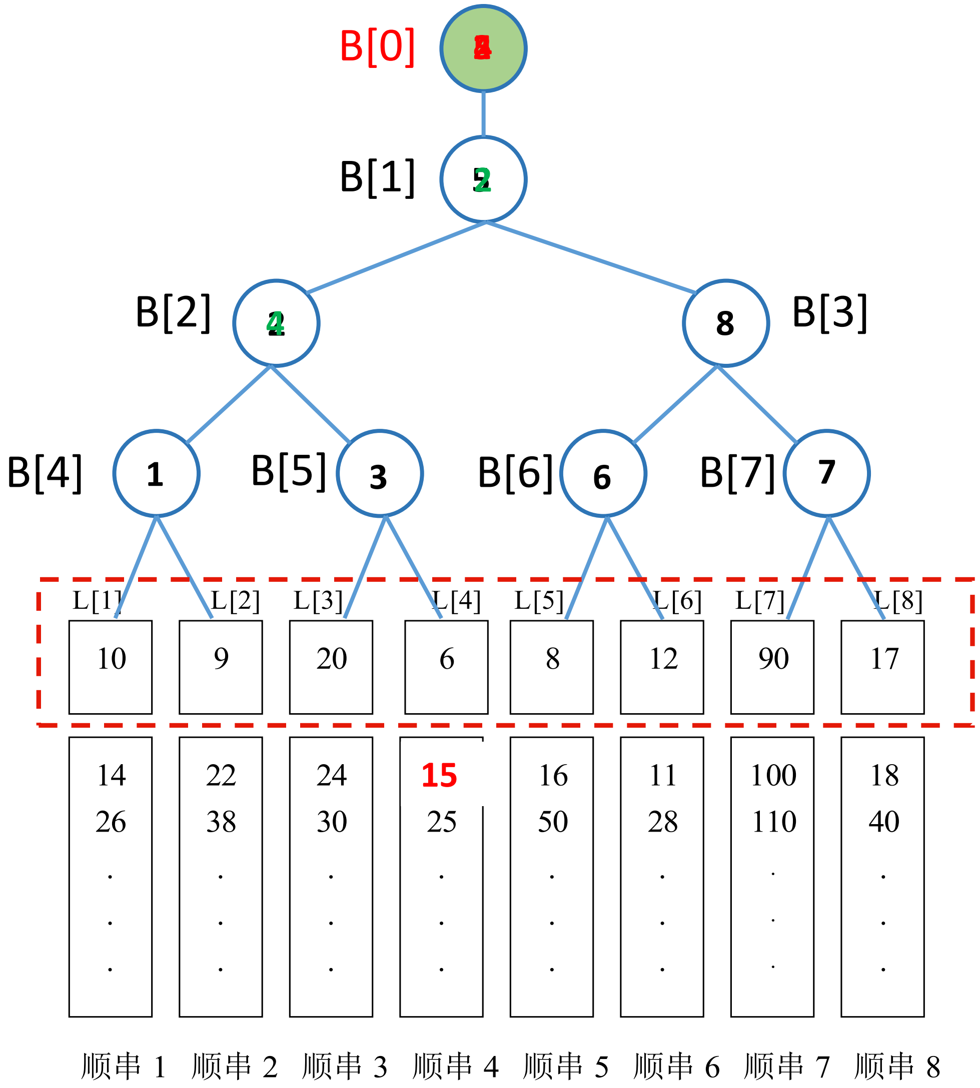
RePlay重构

```
RePlay(tree, i) {
    if i ≤ tree.n_L then              // 最底层叶子结点
        p ← (i + tree.n_B)/2        // 父节点下标
    else                              // 非最底层叶子结点
        p ← (tree.n - 1 + i - tree.n_L)/2
    end
    tree.B[0] ← Winner(tree, i, tree.B[p])     // B[0]中始终保存胜者索引，下面循环会更新B[0]
    tree.B[p] ← Loser(tree, i, tree.B[p])      // B[p]中保存败者的索引
    while p/2≥1 do  //沿路径向上比赛
        // 只需当前结点的胜者与父节点的败者比较
        winner ← Winner(tree, tree.B[p/2], tree.B[0])      //B[0]中保存了胜者的索引
        tree.B[p/2] ← Loser(tree, tree.B[p/2], tree.B[0])
        tree.B[0] ← winner                                 //winner临时存放胜者的索引
        p ← p/2
    end
}
```

$$p=\begin{cases}(2^d-1+i)/2 & i\le n\_L\\(n-1+i-n\_L)/2 & i>n\_L\end{cases}$$

Replay过程演示

- 胜者一直暂存在B[0]
- 每次只需与父节点保存的败者进行比较



小结

- 外排序：尽可能减少磁盘IO操作，提高排序性能
  - 多路归并排序：多个顺串归并成一个顺串
    - 增加同时归并的顺串数，可减少磁盘IO数
    - 胜者树：分支结点代表两个子节点中的胜者（关键码值小）对应的索引
    - 败者树：分支结点记录两个子节点中的败者对应的索引
      - 新增根结点以记录全局胜者
  - 最佳归并树：K叉Huffman树，IO降到最少
  - 置换选择排序：利用最小堆产生尽可能长的顺串