湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 微 分 学

3.1　空间曲线的切线和法平面方程

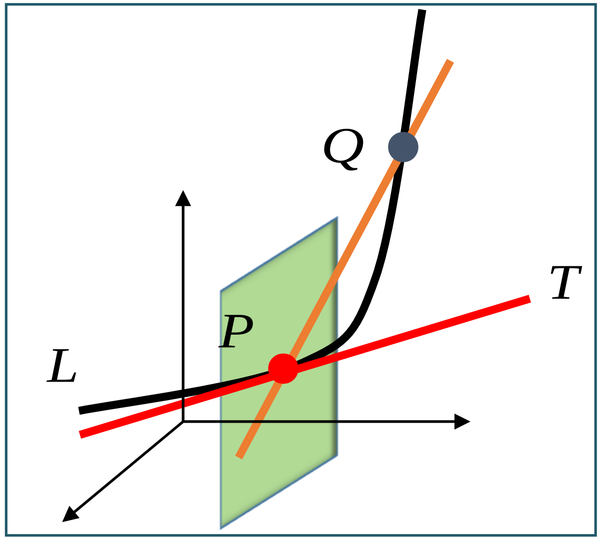
• 主 讲： 于 红 香

一元函数微分学：

平面曲线的切线和法线

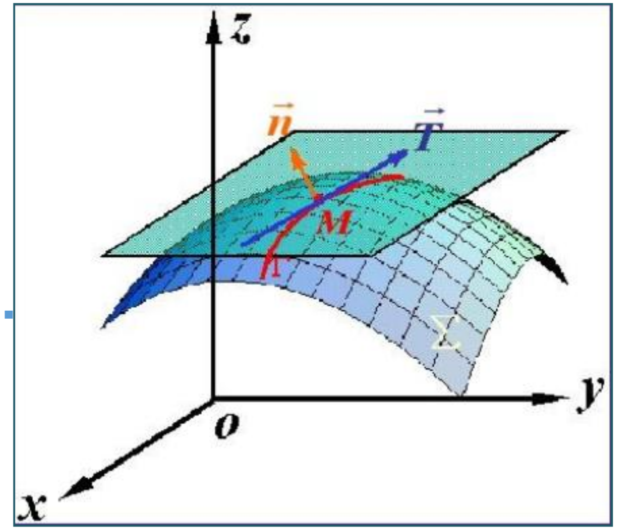
多元函数微分学：

空间曲线的切线和法平面



多元函数微分学：

空间曲面的切平面和法线



第三章　多元函数微分学的应用

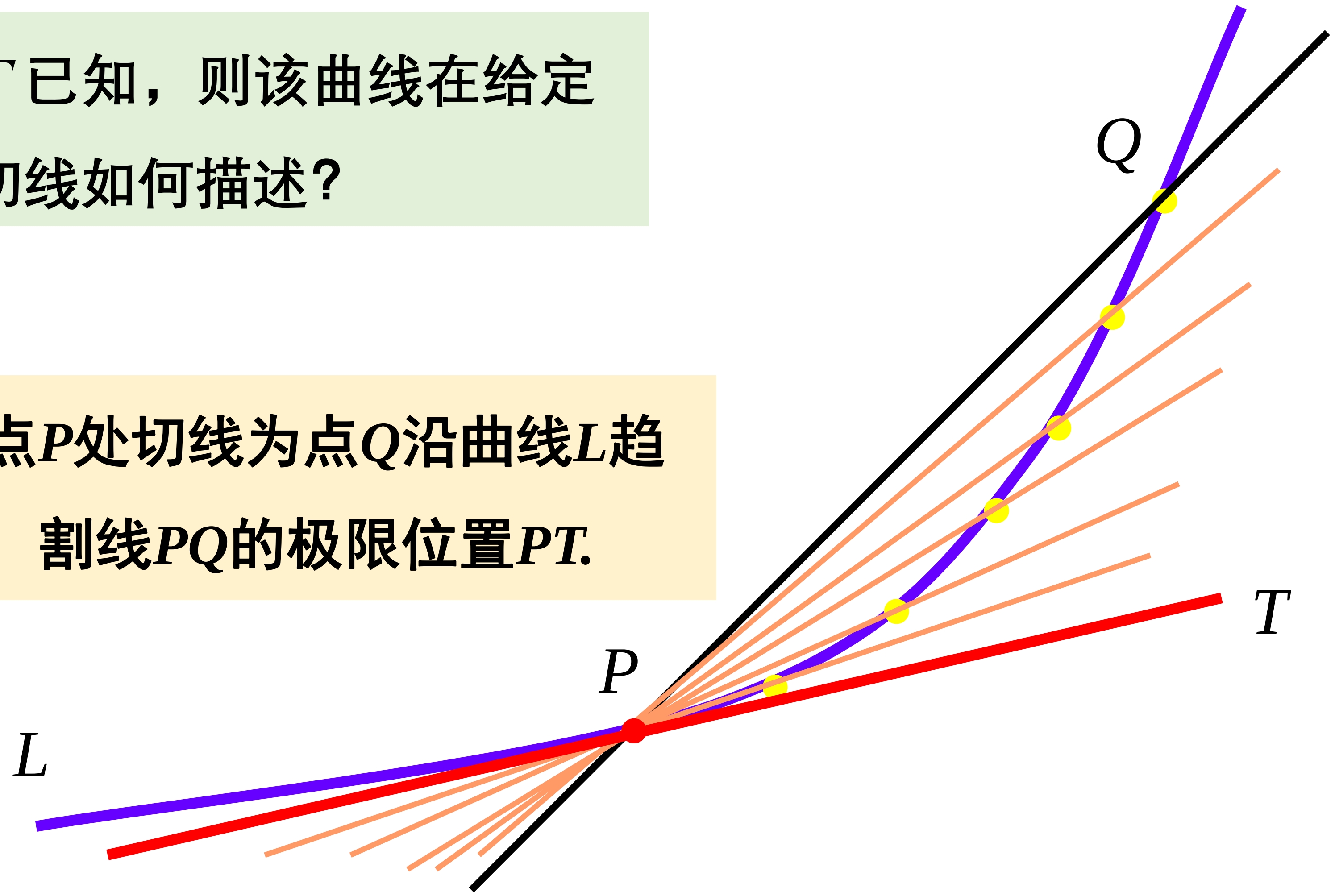
第一节 空间曲线的切线和法平面方程

本节教学要求：

- 正确理解空间曲线的切线、法平面的概念。
- 能熟练地求出空间曲线的切线方程和法平面方程。

一. 空间曲线的切线

若曲线 Γ 已知，则该曲线在给定点 P 的切线如何描述?



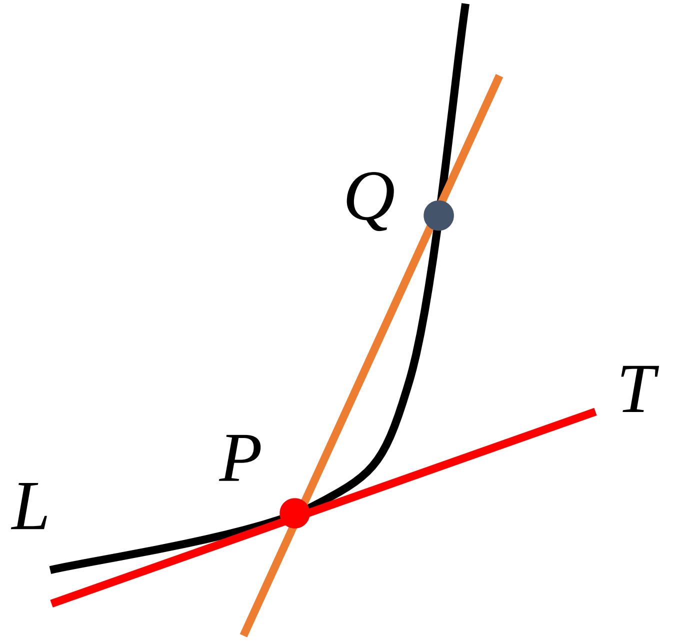
曲线L在点P处切线为点Q沿曲线L趋向点P时，割线PQ的极限位置PT.

【问题】若曲线 L 有参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta$$

其中 $x(t), y(t), z(t)$可导.

求曲线L在点P(对应$t=t_0$)处的切线方程。



切线$l_{PT} = \lim\limits_{Q \to P} l_{PQ}$

$$P \longleftrightarrow t_0: \quad P(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = P(x_0, y_0, z_0)$$

$$Q \longleftrightarrow t_0 + \Delta t: \quad Q(x(t_0+\Delta t), y(t_0+\Delta t), z(t_0+\Delta t)) = Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$$

由两点式可以写出割线 PQ 的方程 $\quad \dfrac{x-x_0}{\Delta x} = \dfrac{y-y_0}{\Delta y} = \dfrac{z-z_0}{\Delta z}$

一. 空间曲线的切线

$\Delta t \to 0$ 时

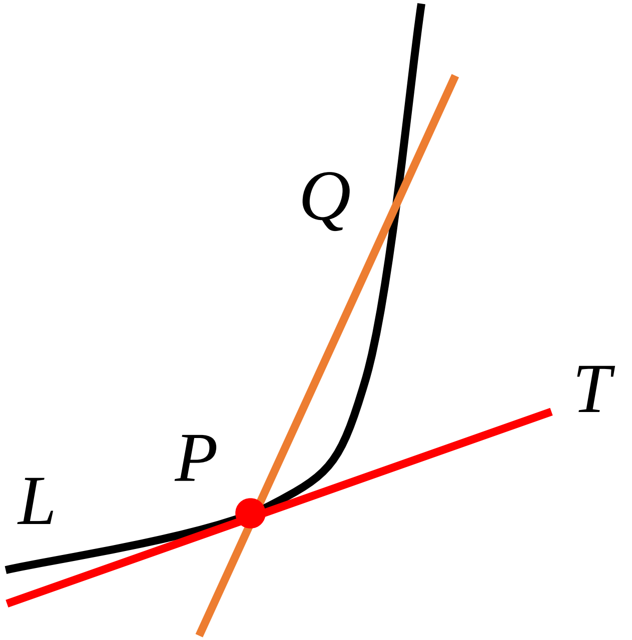
$PQ \to PT$

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$$

引入 Δt

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

切线方程



切线的方向向量 $\vec{\tau}=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))$.

切线 $l_{PT}=\lim\limits_{Q\to P} l_{PQ}$

当 $x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)\neq 0$ 时，切线存在 .

此处为零，则曲线在点P处无切线。

奇点

一. 空间曲线的切线

【问题】若曲线 L 的方程为

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad x \in I$$

其中，$y(x), z(x)$可导.

求曲线L在点$P(x_0, y(x_0), z(x_0))$处的切线方程。

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad x \in I$$

切线的方向向量 $\vec{\tau} = (1,\ y'(x_0),\ z'(x_0))$.

故曲线 L 在点P 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)}$$

【例】 求圆柱螺旋线 $x = a\cos t$， $y = a\sin t$， $z = bt$

在任意一点处的切线及在 $t = 0$ 处的切线.

【解】 螺旋线上任意一点 $P(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 处的切向量为

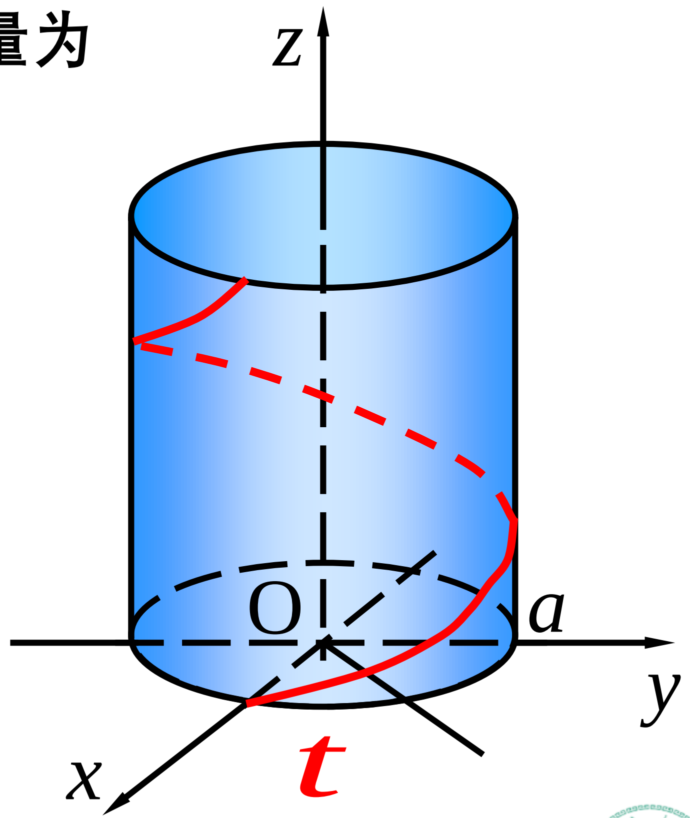
$(-a\sin t_0, a\cos t_0, b)$

能看出什么?

故该点的切线方程为

$$\frac{x - a\cos t_0}{-a\sin t_0} = \frac{y - a\sin t_0}{a\cos t_0} = \frac{z - bt_0}{b}$$

在 $t_0 = 0$ 时, 切线方程为 $\dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z}{b}$



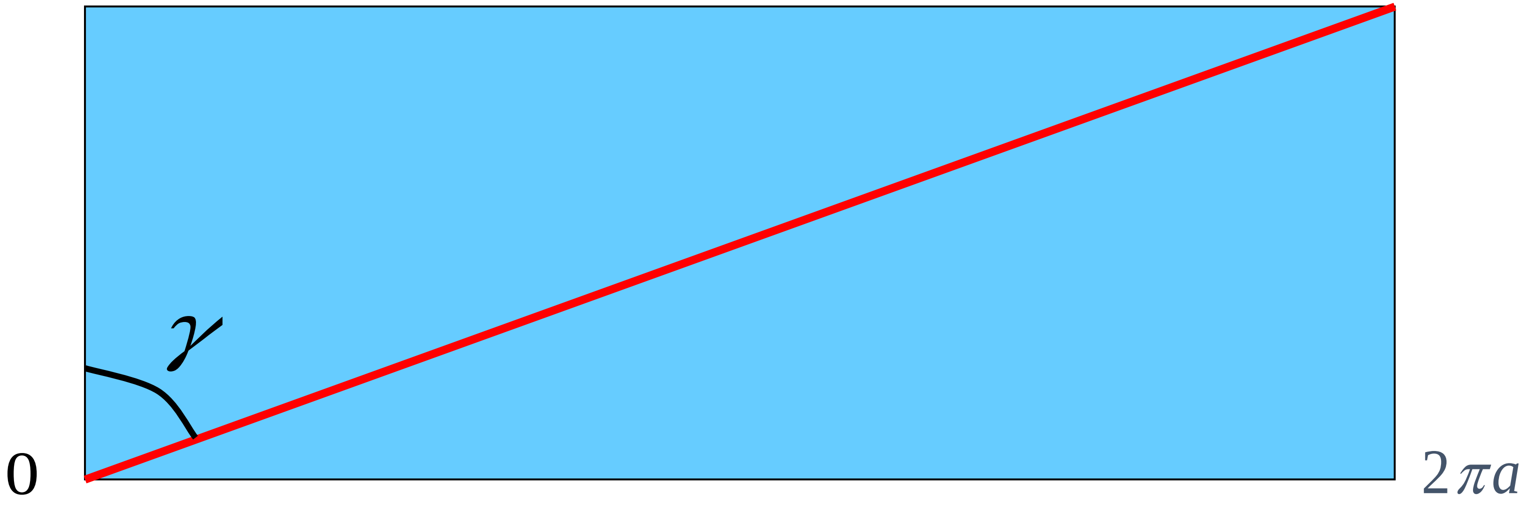
一. 空间曲线的切线

在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处，切线的方向余弦中有

$$\frac{x-a\cos t_0}{-a\sin t_0}=\frac{y-a\sin t_0}{a\cos t_0}=\frac{z-bt_0}{b}$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ （常数）

这说明在螺旋线上每一点处的切线与 z 轴正向的夹角均相同，故展开后螺旋线为直线.



一. 空间曲线的切线

【问题】若曲线 L 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases},$$

其中，$F(x,y,z)$，$G(x,y,z)\in C^1$，

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0,$$

求曲线L在点$P(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程和法平面方程。

【分析】由隐函数存在定理有

$$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \Rightarrow \vec{\tau}=(1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx})\Big|_P$$

由隐函数求导法则可取切线的方向向量：

$$\vec{\tau}=(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)})\Big|_P$$

则所求的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_P}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_P}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_P}$$

【例】求两个圆柱面$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$,求两个圆柱面的交线在

点$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$处的切线方程.

【解】令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-a^2,\quad G(x,y,z)=x^2+z^2-a^2,$

则 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 2z \end{vmatrix}=4yz,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2z & 2x \end{vmatrix}=-4xz,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=-4xy,$

$(4yz,-4xz,-4xy)\big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}})}=2a^2(1,-1,-1)$ 可取切向量为 $(1,-1,-1)$

得所求切线方程为 $x-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{a}{\sqrt{2}}}{-1}=\frac{z-\frac{a}{\sqrt{2}}}{-1}$

一. 空间曲线的切线

切线方程 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

曲线方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \qquad \vec{\tau}=\pm\left(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)\right)$$

$$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \qquad \vec{\tau}=\pm\left(1,\ y'(x_0),\ z'(x_0)\right)$$

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}, \qquad \vec{\tau}=\pm\left.\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\right|_p$$

切线的方向向量

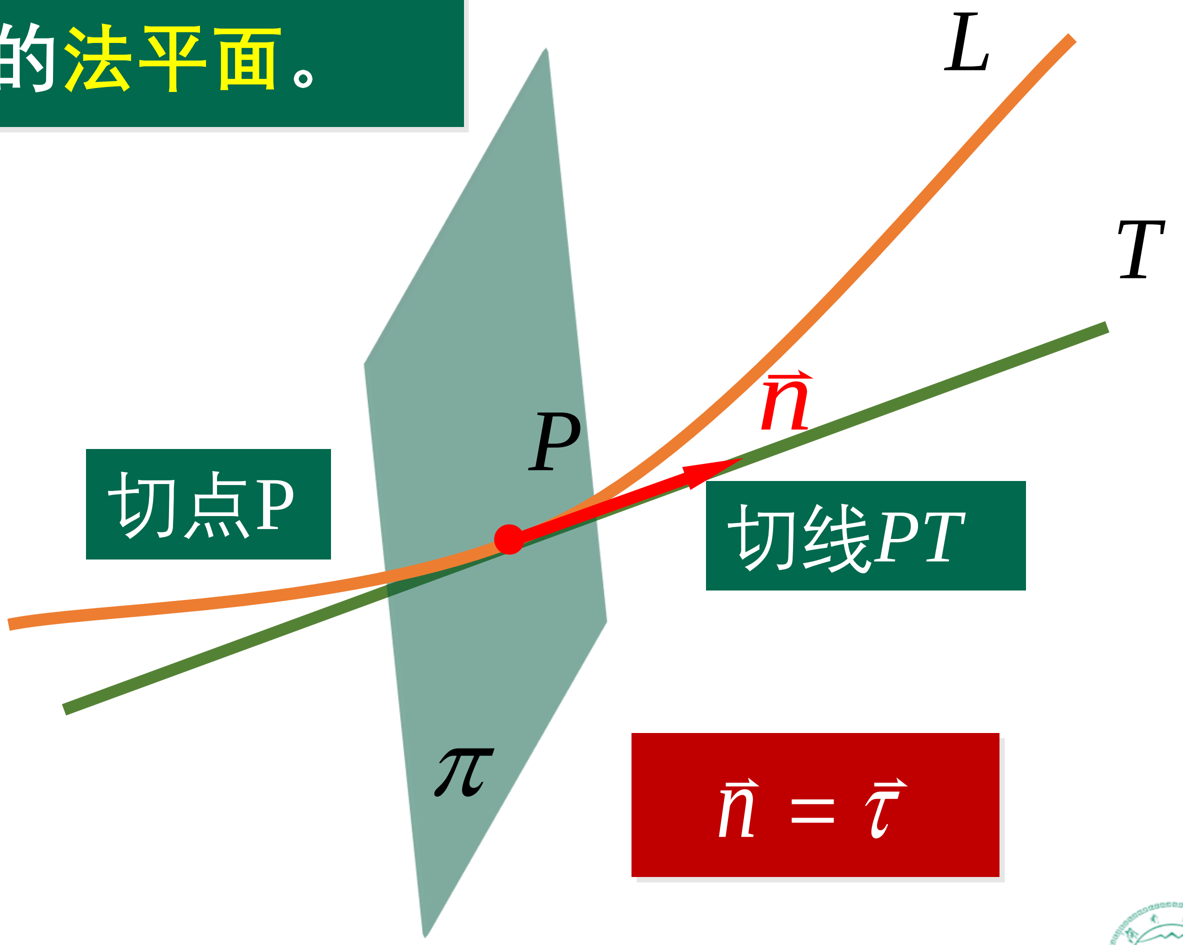
过曲线 L 上点P，且垂直于曲线在该点的切线 PT 的平面称为曲线在点 P 的法平面。

法平面的法向量 $\vec{n}$ 可取为

切线PT的方向向量 $\vec{s}$

点P 处对应的法平面方程

可以由点法式写出！



$\vec{n} = \vec{\tau}$

二. 空间曲线的法平面

不同曲线形式对应的法平面方程：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = \pm(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = \pm(1, y'(x_0), z'(x_0))$$

$$\begin{cases} F = F(x, y, z) \\ G = G(x, y, z) \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = \pm\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\Bigg|_p$$

【例】 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $P(1,-2,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

【解】 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$, $G(x,y,z)=x+y+z$,

则 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_p=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-6$, $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_p=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_p=\left.\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right|_{(1,-2,1)}=6$,

取 $\vec{\tau}=\vec{n}=(-1,0,1)$

故所求的切线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$

法平面方程为 $x-z=0$

【练】 求两个抛物柱面 $y=6x^2$， $z=12x^2$ 的交线 L 在$x=\dfrac{1}{2}$ 时的切线方程和法平面方程。

【解】 当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时， $y=\dfrac{3}{2}$， $z=3$， 此时

$$y'(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=12x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=6,\qquad z'(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=24x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=12$$

取 $\vec{\tau}=\vec{n}=(1,6,12)$

切线方程 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}$

$$x-\frac{1}{2}=\frac{y-3/2}{6}=\frac{z-3}{12}$$

法平面方程 $2x+12y+24z-91=0$

本节小结

切线方程 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

法平面方程：

$$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0.$$

曲线方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \qquad \vec{\tau}=\pm(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$$

$$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \qquad \vec{\tau}=\pm(1,y'(x_0),z'(x_0))$$

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}, \qquad \vec{\tau}=\pm\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\Bigg|_p$$

切线的方向向量