湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 积 分 学

4.4 对弧长的曲线积分

• 主 讲： 于 红 香

第四章　多元函数积分学

第四节 对弧长的曲线积分

一．对弧长的曲线积分的实际背景

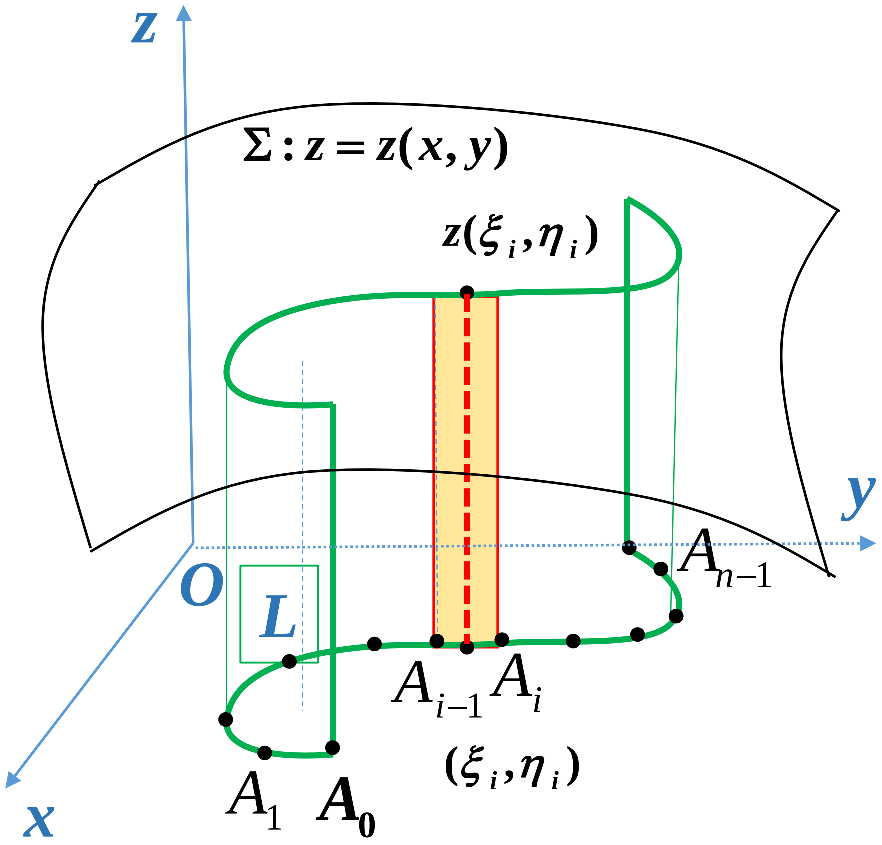
二．对弧长的曲线积分的定义和性质

三. 对弧长的曲线积分的几何意义

四．对弧长的曲线积分的计算

- 正确理解对弧长的曲线积分的概念。
- 了解对弧长的曲线积分的性质和几何意义。
- 掌握对弧长的曲线积分的计算方法。

设有一个夹在xoy面及曲面Σ：$z=z(x,y)$ 之间的柱面，柱面的准线为xoy面的曲线L：$f(x,y)=0$，母线平行于z轴，求该曲边柱面的面积S。

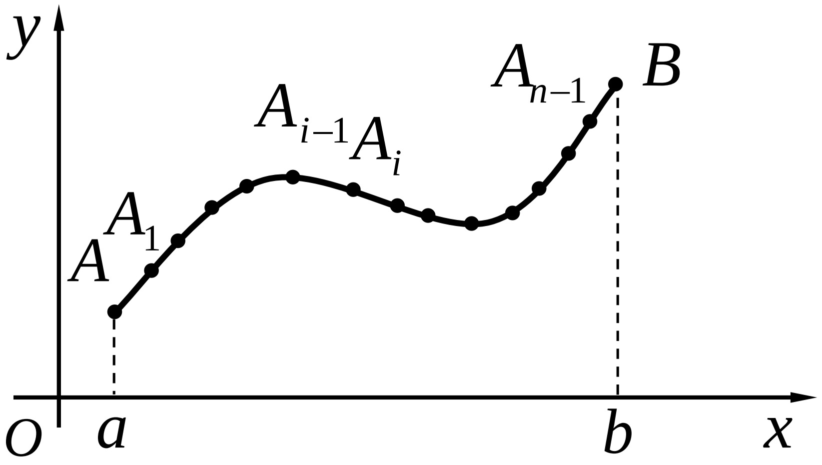


分割取近似　　$\Delta S_i \approx z(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i$

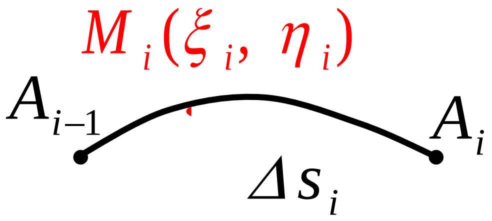
求和取极限　　$S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} z(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i$

一. 引例2：非匀质曲线构件求质量

设有一质量非均匀分布的光滑的平面曲线构件 L , 其密度 μ 是 L 上点的连续函数: $\mu = f(x,y) \quad (x,y) \in L$. 求曲线构件 L 的质量 .



分割取近似.



$$\Delta m_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

求和取极限

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

【定义】 设函数 $f(x,y)$ 是定义在 xy 平面上的一条可求长的曲线 L_{AB} 上的有界函数． 在 L_{AB} 上任取 $n-1$ 个点：

$$A = A_0 < A_1 < \cdots < A_{i-1} < A_i < \cdots < A_{n-1} < A_n = B\,,$$

将 L_{AB} 分 成 n 个小弧段 S_i （$i=1$，2，$\cdots$，n），每个小弧段的长度记为 Δs_i，并记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$．若 $\forall\ (\xi_i,\ \eta_i)\in S_i$，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i$ 存在，且该极限值与对曲线 L_{AB} 的分法和点 $(\xi_i,\ \eta_i)$ 的取法无关 ,则称该极限值为 $f(x,y)$ 在曲线 L_{AB} 上对弧长的曲线积分，记为

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\,.$$

二. 对弧长的曲线积分的定义和性质

对弧长的曲线积分的记号

被积函数　定义在曲线 L_{AB} 上

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta s_i .$$

黎曼和

积分和

对弧长的

曲线积分号

弧长元素

(弧微分)

$f(x,y)\,\mathrm{d}s$: 被积表达式

L_{AB} : 积分曲线

如果积分曲线为一条封闭曲线 L ，则积分记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

【性质】

1. 对弧长的曲线积分值与曲线的起点、终点选取无关:

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_{L_{BA}} f(x,y)\,\mathrm{d}s\,.$$

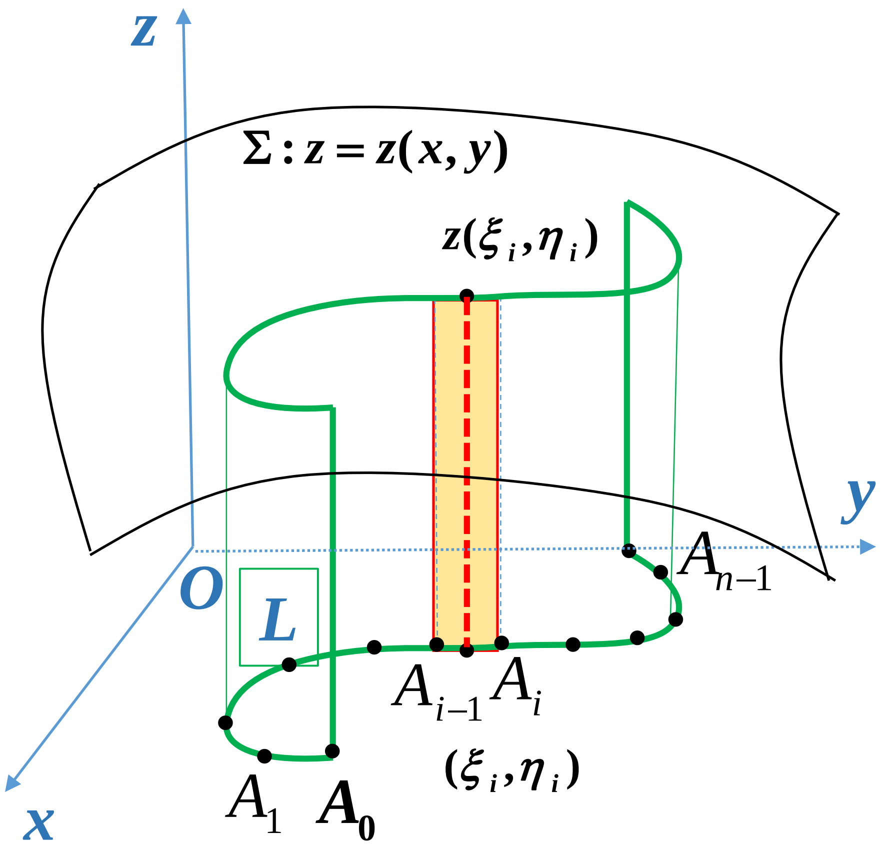
2. 如果 $L=L_1+L_2$， L_1 和 L_2 是光滑曲线， 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s\,.$$

3. 当 $f(x,y)\equiv 1$ 时，

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_L \mathrm{d}s=s \quad (\,s\text{ 为曲线 }L\text{ 的弧长}\,)\,.$$

三. 对弧长的曲线积分的几何意义



$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = S \quad (S \text{ 为曲边柱面的面积}).$$

被xy坐标面和曲面$\Sigma : z = f(x,y)$

截下的曲边柱面的面积。

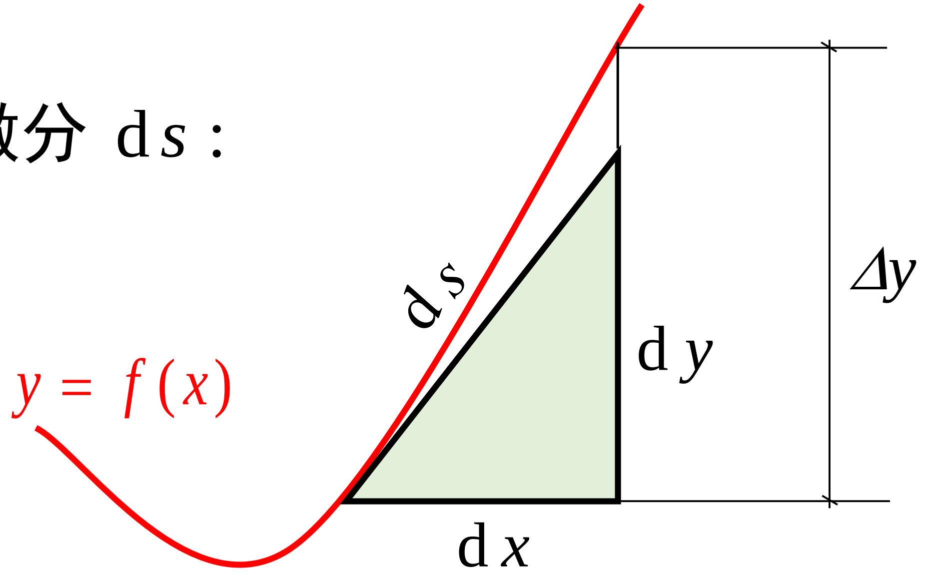
$L: f(x,y) = 0$

为柱面在xy坐标面上的准线,

柱面母线平行于z轴。

复习回顾:

弧微分 $\mathrm{d}s$:



局部以直代曲:

曲线长度

近似为

切线长度

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

四. 对弧长的曲线积分的计算

当弧长的增加方向与自变量 x 的增加方向一致时，

(1) . 曲线L的方程为$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$;

$$\boxed{\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t} \qquad \mathbf{d}s^2 = \mathbf{d}x^2 + \mathbf{d}y^2$$

(2) . 曲线L的方程为$y = y(x), x \in [a, b]$;

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

(3) . 曲线L的方程为$x = x(y), y \in [c, d]$;

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + x'^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\mathbf{d}\,\boldsymbol{s}^2 = \mathbf{d}\,\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{d}\,\boldsymbol{y}^2$$

(4) . 曲线L的方程为极坐标方程 $r = r(\theta), t \in [\alpha, \beta]$;

$$\mathrm{d}\,s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\,\theta$$

(5) .R^3中曲线Γ的方程为$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$.

$$\mathrm{d}\,s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}\,t$$

四. 对弧长的曲线积分的计算

设曲线L的方程为参数方程：$x = x(t)$，$y = y(t)$，$t \in [\alpha, \beta]$，

$x(t)$，$y(t) \in C^1([\alpha, \beta])$，且 $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, $f(x, y) \in C(L)$,则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

注意：由于对弧长的曲线积分与起点、终点的选取无关，

取弧长的增加方向与自变量 t 的增加方向一致 .

化为定积分后，积分下限小于积分上限 .

设曲线 L 的方程为

$$y = y(x),\quad x \in [a, b],\quad \text{且}\ y(x) \in C^1([a, b]),\ \text{则}$$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

设曲线 L 的方程为

$$x = x(y),\quad y \in [c, d],\quad \text{且}\ x(y) \in C^1([c, d]),\ \text{则}$$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1+x'^2}\,\mathrm{d}y$$

四. 对弧长的曲线积分的计算

设曲线L的方程为极坐标方程 $r=r(\theta), t\in[\alpha,\beta]$；

且 $r(\theta)\in C^1([a\ ,b])$， 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

设 R^3 中曲线 Γ 的参数方程为

$$\Gamma:\quad x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in[\alpha,\beta],$$

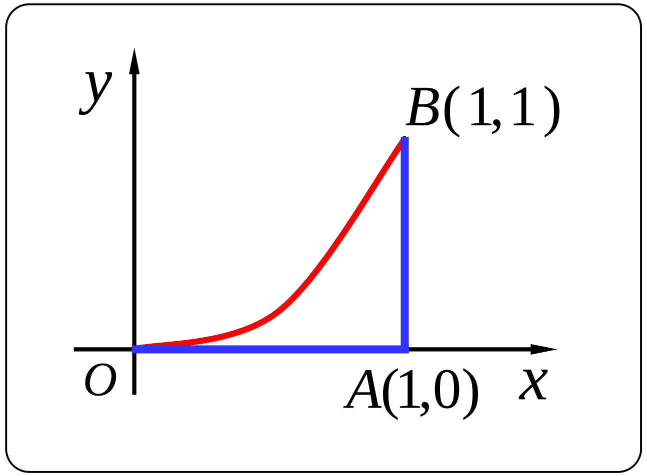
且 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)\in C^1([\alpha,\ \beta])$， 则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

【例】 计算 $\int_L x\,\mathrm{d}s$，其中

1）L 是 $y=x^2$ 上由原点 $O(0,\ 0)$ 到点 $B(1,\ 1)$ 的一段弧 .

2）L 是折线OAB，其中 $A(1,\ 0)$.



解

1) L: $y=x^2$， $x\in[0,1]$，而 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$,

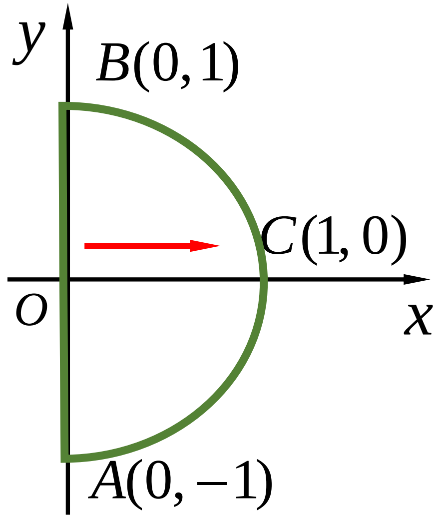
故 $\int_L x\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$.

2) $L=\overline{OA}+\overline{AB}$,

在 $\overline{OA}$ 上: $y\equiv 0$，$x\in[0,1]$, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$；在 $\overline{AB}$ 上: $x\equiv 1$, $y\in[0,1]$, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$,

故 $\int_L x\,\mathrm{d}s=\int_{\overline{OA}} x\,\mathrm{d}s+\int_{\overline{AB}} x\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 1\,\mathrm{d}y=\dfrac{3}{2}$.

【例】 求 $\int_L |y| \,\mathrm{d}s$，其中 L 为右半单位圆 .



解1

由题意，L：$x^2+y^2=1$，$x\ge 0$.

由隐函数求导法，得 $y'=-\dfrac{x}{y}$，

故 $$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|y|}\,\mathrm{d}x .$$

从而，$$\int_L |y|\,\mathrm{d}s=\int_{L_{AC}}|y|\,\mathrm{d}s+\int_{L_{BC}}|y|\,\mathrm{d}s$$

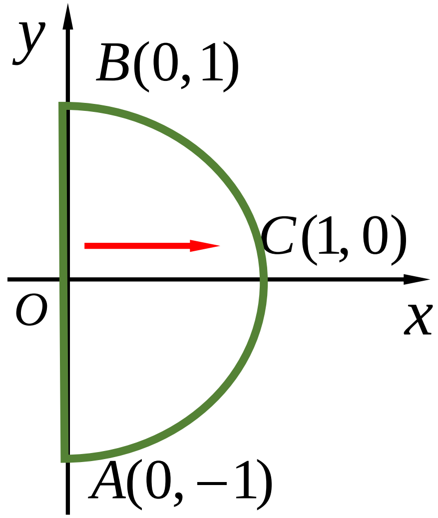
$$=\int_0^1 |y|\frac{1}{|y|}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 |y|\frac{1}{|y|}\,\mathrm{d}x=2 .$$

偶倍奇零

极坐标方程

可以做吗?

【例】 求 $\int_L |y|\,\mathrm{d}s$，其中 L 为右半单位圆 .



解2 L的极坐标方程为: $r=1$, $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

则 $\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta.$

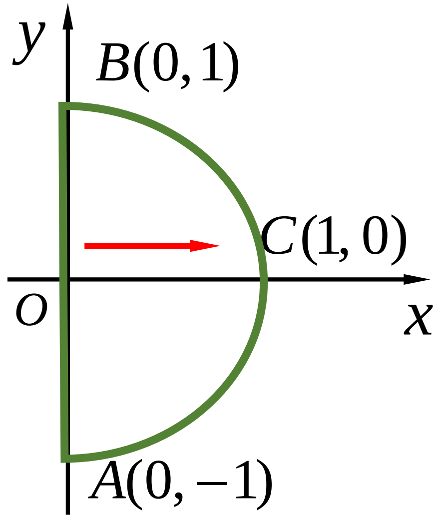
从而, $\int_L |y|\,\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2.$$

参数方程

可以做吗?

【例】 求 $\int_L |y|\,\mathrm{d}s$，其中 L 为右半单位圆 .



解3 L的参数方程为: $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$.

则 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta.$

从而，$\int_L |y|\,\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2.$$

圆周线的曲线积分，
用参数方程或极坐标
更高效！

【练】 计算$\oint_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$，其中$L$：$x^2+y^2=a^2 \ (a>0)$.

解 L 的参数方程为 $x=a\cos t$ ， $y=a\sin t$ ， $0\le t\le 2\pi$.

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=a\,\mathrm{d}t\ .$$

由于被积函数 f 定义在曲线 L 上， 故

$$f(x,y)=x^2+y^2=a^2,$$

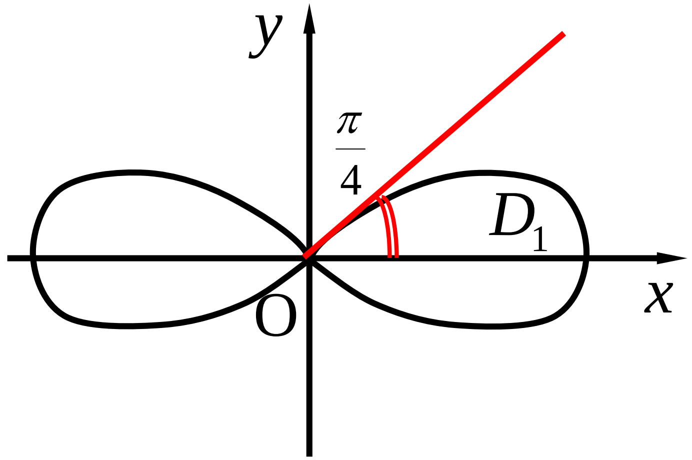
从而，
$$\oint_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi} a^2\cdot a\,\mathrm{d}t=2\pi a^3.$$

【例】 计算 $I=\int_L |x|\,\mathrm{d}s$,其中L为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), a>0.$

解 在极坐标系下 $L: r^2=a^2\cos 2\theta$,

它在第一象限部分为

$$L_1: r=a\sqrt{\cos 2\theta}\quad (0\le\theta\le\pi/4).$$



利用奇偶对称性， 得

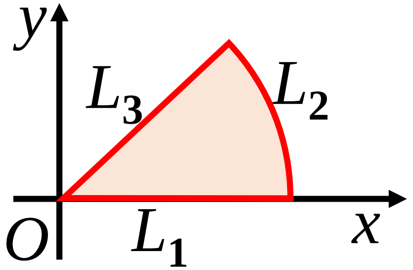
$$I=4\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s$$

$$=4\int_0^{\pi/4} r\cos\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\,a^2.$$

【练】 计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$， 其中L为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$及$x$轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界。

解

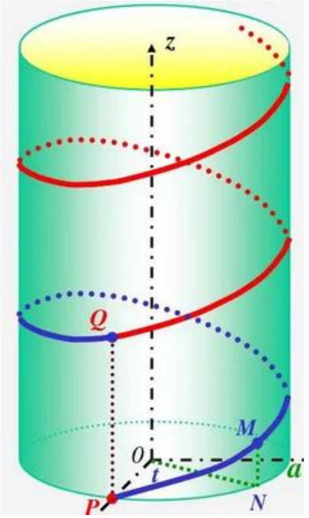
$$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s=\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s+\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s+\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$$



$$=\int_0^a e^x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}\mathrm{d}x$$

$$=2(e^a-1)+\frac{\pi a}{4}e^a.$$

【例】 求 $\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}$ ， Γ 是螺旋线 $x=a\cos t$ ， $y=a\sin t$, $z=bt$ 的第一圈（$0\le t\le 2\pi$).



解 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t$,

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t}{a^2+b^2t^2}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\arctan\frac{2b\pi}{a}.$$

【练】 计算 $\int_{\Gamma}(x^3+y^2z)\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 是由点 $A(3,\ 2,\ 1)$ 到原点的直线段 .

解 过原点和点 A 的直线方程为

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}.$$

线段 $\overline{AO}$ 参数方程为 $x=3t$， $y=2t$， $z=t$， $0\le t\le 1$.

$$\int_{\Gamma}(x^3+y^2z)\,\mathrm{d}s=\int_0^1((3t)^3+(2t)^2t)\sqrt{3^2+2^2+1^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=31\sqrt{14}\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t=\frac{31}{4}\sqrt{14}.$$

【例】计算 $\oint_\Gamma x^2 \mathrm{d}s$, 其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周.

解　由**轮换对称性**可知

$$\oint_\Gamma x^2 \mathrm{d}s = \oint_\Gamma y^2 \mathrm{d}s = \oint_\Gamma z^2 \mathrm{d}s.$$

$$\therefore \quad \oint_\Gamma x^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{3}\oint_\Gamma a^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2 \cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

本节小结

对弧长的曲线积分的几何背景和物理背景

对弧长的曲线积分的定义和几何意义

对弧长的曲线积分的计算　　　弧微分

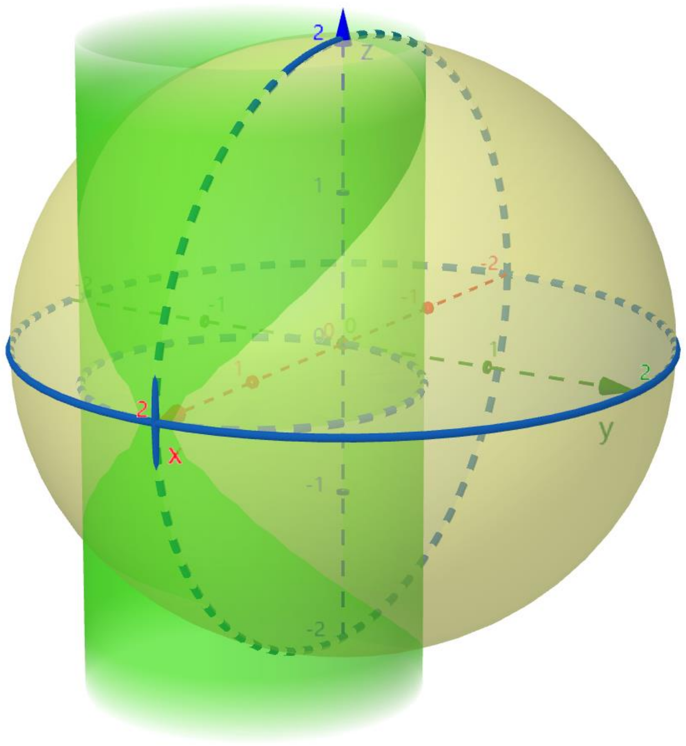
参数方程：圆周，空间直线

极坐标方程：圆周

直角坐标方程：其他

思考题2：

求圆柱面$x^2+y^2=ax$含在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$内部的那部分面积。



解：求柱面面积，用曲线积分。

被积函数是什么？

积分曲线是什么？

$$S=4S_1=4\int_L \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,ds$$

$$L: x^2+y^2=ax, y\geq 0$$

思考题1：

求 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$ 与平面 $x+z=1$ 的交线 .