请诚信应考，考试违规将带来严重后果！

湖南大学课程考试试卷

课程名称：高等数学 A(2)；**课程编码：**GE03026；**试卷编号：** A ；**考试形式：**闭卷；**考试时间：** **120** 分钟

姓名：____________________；**学号：**________________________；**专业班级：**__________________________

（请在答题纸内作答！）

一、计算题 I （每小题 6 分，共 42 分）

1. 求过点$(1,0,-2)$且与两平面$\Pi_1: x-4z=3$, $\Pi_2: 3x-y-5z=1$均平行的直线方程.

2. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点$(0,0)$处是否连续?偏导数是否存在?

3. 设$z=z(x,y)$是由方程 $F(xy,z-2x)=0$ 所确定的隐函数, 其中$F(u,v)$具有连续偏导数, 求$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设$z=2x+\sin\dfrac{y}{x}$, 求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,\pi)}$.

5. 在曲面$z=x^2+\dfrac{1}{4}y^2-1$上求一点, 使它的切平面与平面$2x+y+z=0$平行, 并求该点的切平面方程.

6. 计算二次积分$\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\int_y^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

7. 判定级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}$的敛散性. 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

二、计算题 II （每小题 8 分，共 32 分）

8. 设区域Ω由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=9$围成, 计算三重积分$\displaystyle\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}v$.

9. 设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 可导且 $\varphi(0)=0$，求积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

10. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (z^2+x)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间部分的下侧.

11. 将函数 $f(x)=x\cos x^2$ 展开成麦克劳林级数，并求级数 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4!}-\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{6!}+\cdots$ 的和.

三、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

12. 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在闭区域 $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant 25\}$ 上的最大值和最小值.

13. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=Rx\ (R>0)$ 内部的那部分的面积.

四、证明题（本题 6 分）

14. 设 $u_n>0\,(n=1,2,\cdots)$，且数列 $\{u_n\}$ 单调递减，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 发散，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$ 收敛.