重积分复习

及习题讲解

主讲：于红香

二重积分内容总结

二重积分

- 定义（几何背景及物理背景）
- 性质（六条性质）
- 计算方法
  - 直角坐标
  - 一般换元法
  - 极坐标

二重积分计算的基本技巧

一，选择积分次序不仅要考虑区域的形状，还要考虑被积函数的特点。

二，善用对称性来简化二重积分。

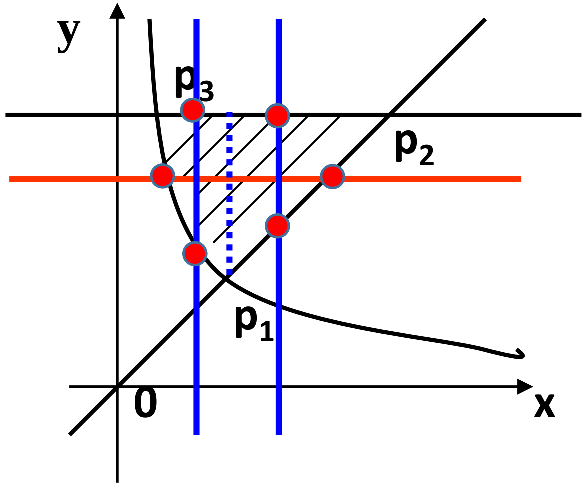
三，巧妙选取极坐标系。一般来说，区域为圆形域，或被积函数含 x^2+y^2 的，考虑选取极坐标系，以简化计算。

四，消去被积函数中的特殊符号，如绝对值,max,min等 $\left\{\begin{array}{l}\text{分块积分法}\\ \text{利用对称性}\end{array}\right.$

五， 利用重积分换元公式

【例】 化二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 为直角坐标下的二次积分，

D由直线 $y=x, y=2$ 及双曲线 $xy=1(x>0)$ 所围成的闭区域；



【解】 如右图，三线交点为$p_1(1,1)$, $p_2(2,2)$, $p_3(1/2,2)$，

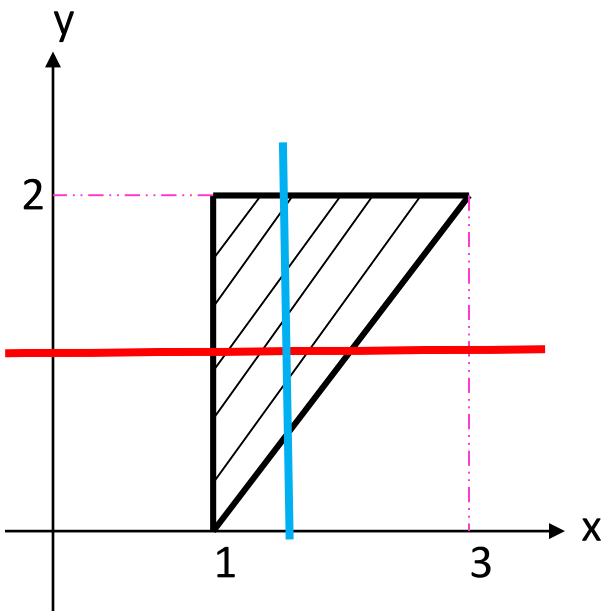
$$I=\int_1^2 dy\int_{1/y}^{y} f(x,y)dx$$

或 $$I=\int_{1/2}^{1} dx\int_{1/x}^{2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy$$

【例】 计算积分 $\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 \sin y^2 dy$

【解2】 因为 $\sin y^2$ 的原函数不是初等函数，

故只能交换积分次序。积分区域如右图：

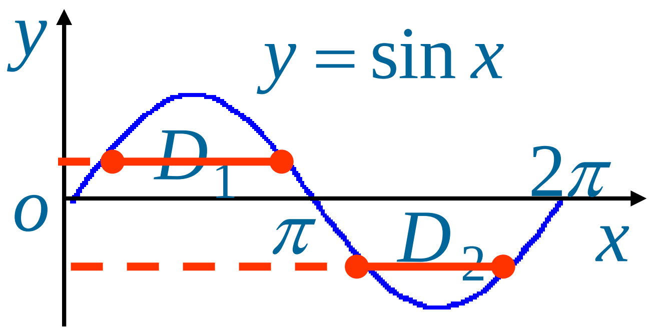


$$I=\int_0^2 dy\int_1^{1+y}\sin y^2 dx$$

$$=\int_0^2 y\sin y^2 dy \qquad =\frac{1}{2}(1-\cos 4)$$

【例】 交换下列二次积分的顺序:

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$



【解】 如图所示

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{0}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

【例】 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$.

【解】 令 $x=ar\cos\theta$， $y=br\sin\theta$， **广义极坐标**

则 $D^*=\{(r,\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1\}$，

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & a\sin\theta \\ -br\sin\theta & br\sin\theta \end{vmatrix}=abr$$

故 $$\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D^*_1}(ar\cos\theta)^2\cdot abr\mathrm{d}r$$

$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1(ar\cos\theta)^2\cdot abr\mathrm{d}r=\frac{\pi a^3 b}{4}.$$

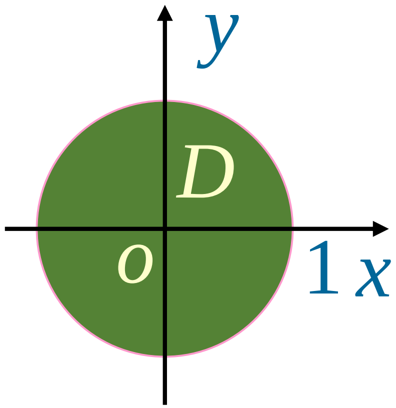
【例】 计算二重积分$I=\iint_D(x^2+xye^{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$为圆域 $x^2+y^2\le 1.$

【解】 利用**对称奇偶性**及**轮换对称性**.

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0$$

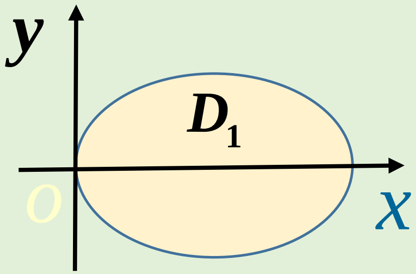
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$



奇偶对称性

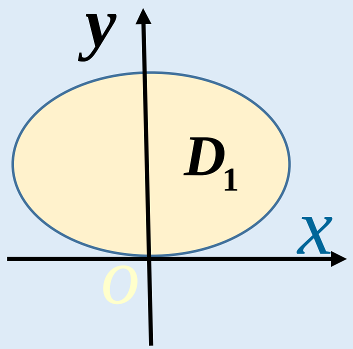
1.积分区域D关于x轴对称，则 x轴对称看y奇偶

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(x,-y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$



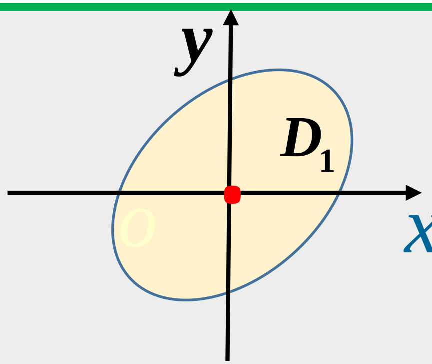
2.积分区域D关于y轴对称，则 y轴对称看x奇偶

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(-x,y)=f(x,y)\\ 0, & f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}$$



3.积分区域D关于原点对称，则 原点对称xy奇偶

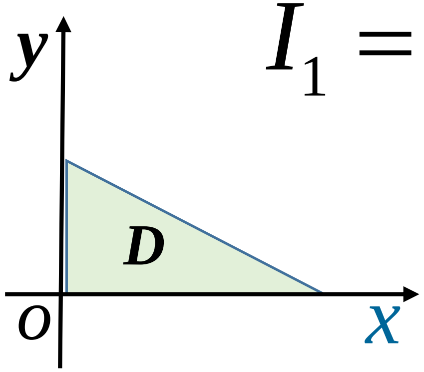
$$\iint_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(-x,-y)=f(x,y)\\ 0, & f(-x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$



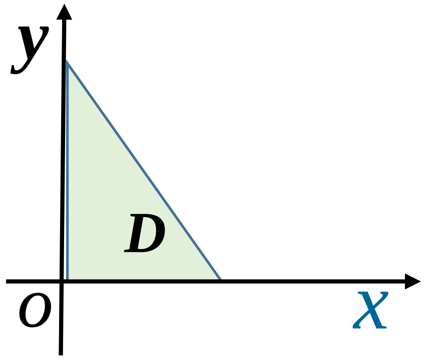
计算$I_1=\iint_D (5x+3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$由 $x+2y=1, x=0, y=0$围成。

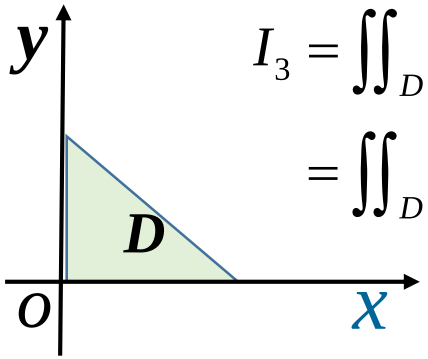
计算$I_2=\iint_D (3x+5y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$由 $2x+y=1, x=0, y=0$围成。

计算$I_3=\iint_D (3x+5y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$由 $x+y=1, x=0, y=0$围成。



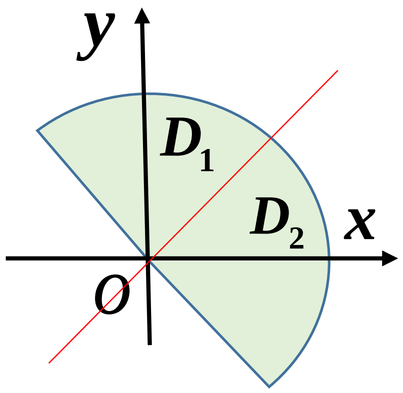
$$I_1=I_2$$





$$I_3=\iint_D (3x+5y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D (5x+3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

轮换对称性

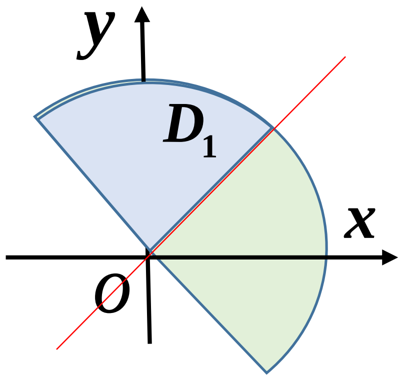


1.积分区域D_1与D_2关于 $y=x$ 对称，则

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2} f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad x\leftrightarrow y$$

2.积分区域D关于 $y=x$ 对称，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}[f(x,y)+f(y,x)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



3.积分区域D关于 $y=x$ 对称，且 $f(x,y)=f(y,x)$ 则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$ D_1为D关于$y=x$对称的一半。

积分区域轮换对称: 坐标互换，区域不变.

定理1: 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续,

D 对坐标 x, y 具有轮换对称性,则　　D关于 $y = x$ 对称

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(y,x)\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_D (f(x,y)+f(y,x))\,dxdy$$

定理2: 设函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续,

Ω 对坐标 x, y, z 具有轮换对称性, 则

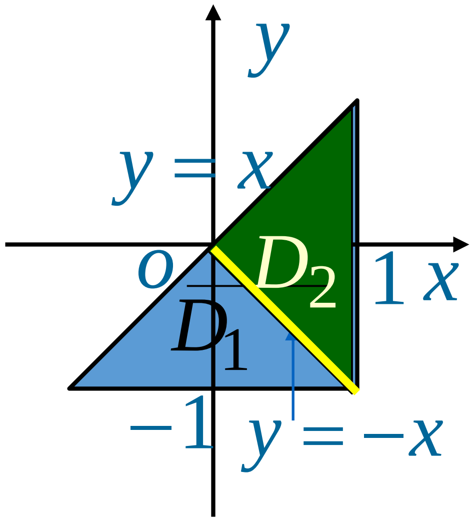
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega f(y,z,x)dxdydz = \iiint_\Omega f(z,x,y)dxdydz$$

【例】 计算二重积分$I=\iint_D (x^2+xye^{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中:

D由直线$y=x\,,\,y=-1\,,\,x=1$围成。

【解】 积分域如图: 添加辅助线 $y=-x$,将D 分为D_1,D_2

利用对称奇偶性,得



$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

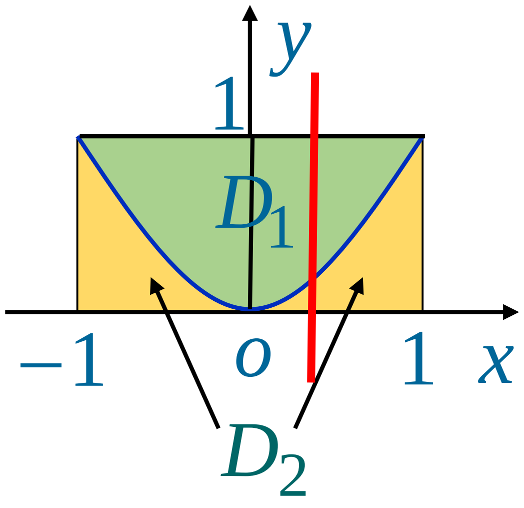
$$=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1} xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}\mathrm{d}y+0+0=\frac{2}{3}$$

【例】 计算 $I=\iint_D \operatorname{sgn}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, D:-1\le x\le 1, 0\le y\le 1$

【解】

$$\operatorname{sgn}(y-x^2)=\begin{cases}1, & y-x^2>0\\ 0, & y-x^2=0\\ -1, & y-x^2<0\end{cases}$$



作辅助线 $y=x^2$ 把与D分成D_1, D_2两部分,则

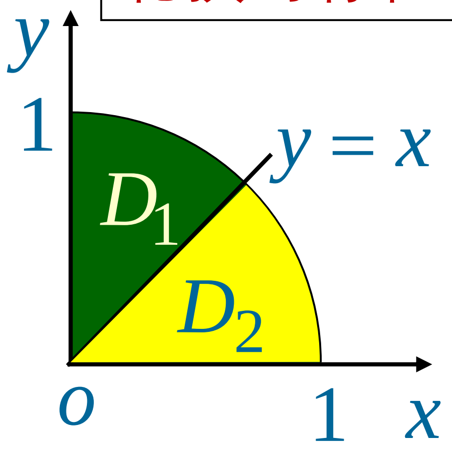
$$I=\iint_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

【例】 计算$I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为圆域$x^2+y^2\le 1$在第一象限部分.

【解】 $I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(|x-y|+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

轮换对称性



作辅助线 $y=x$ 将D 分成 D_1,D_2两部分

$$=2\iint_{D_2}(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

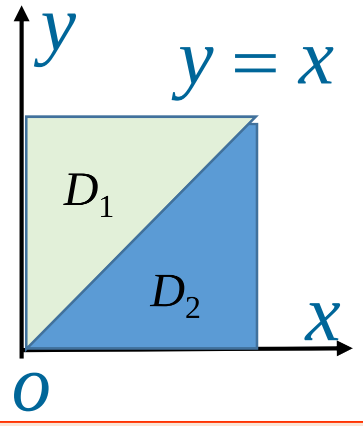
$$=\cdots=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}$$

说明: 若不用对称性, 需分块积分以去掉绝对值符号.

【例】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$

【证】 左端 $=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y \quad =\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

右端 $=\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\iint_D f^2(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



$$D:\begin{cases} a\le x\le b \\ a\le y\le b \end{cases}$$

区域D具有轮换对称性，故有

$$\iint_D f^2(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f^2(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D[f^2(x)+f^2(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

利用 $2uv\le u^2+v^2$

$$\ge\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{左边}$$

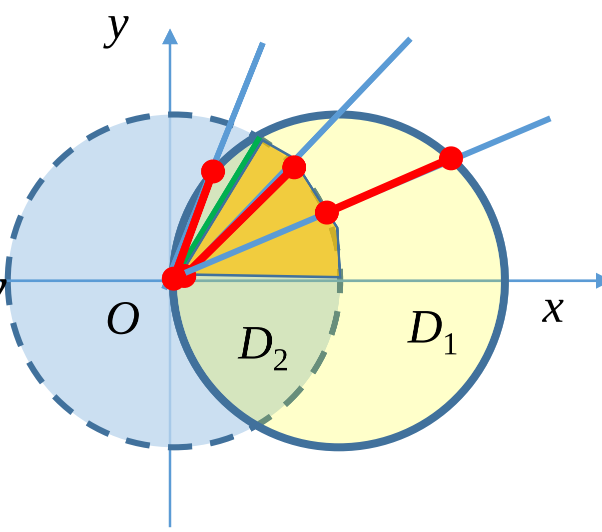
思考题1

已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\le 1\}$，计算二重积分$\iint_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

【解】 先去除绝对值符号

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-1, & x^2+y^2\ge 1\\ 1-\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\le 1\end{cases}$$

再用对称奇偶性



$$\iint_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{D_1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1{}^*}(r-1)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi/3}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}(r-1)\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$\iint_{D_2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\pi/3}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r)\cdot r\,\mathrm{d}r+2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(1-r)\cdot r\,\mathrm{d}r$$

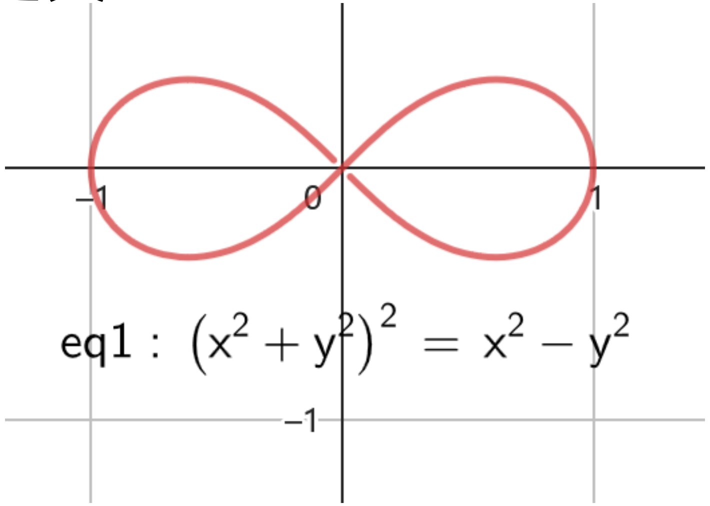
$$\iint_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\sqrt{3}-\frac{\pi+32}{9}.$$

思考题2

曲线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\,(x\ge 0,y\ge 0)$与$x$轴所围成的区域为$D$，求$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

【解】 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2 \Rightarrow r^4=r^2\cos 2\theta \Rightarrow r=\sqrt{\cos 2\theta}.$

可知$r(\theta)$在区间$(0,\dfrac{\pi}{4})$内单调递减，从1$\to$0. 在$(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$内无定义。



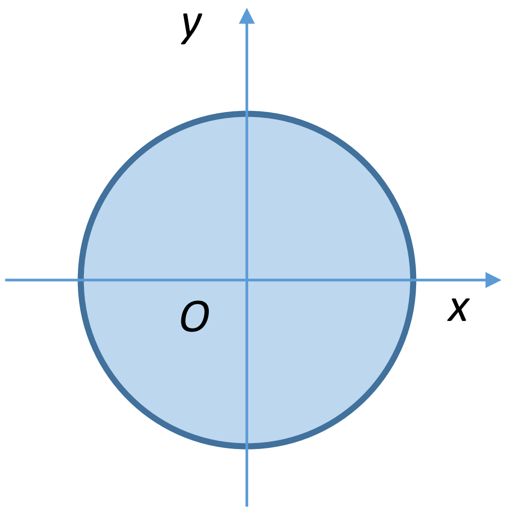
$$D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le r\le\sqrt{\cos 2\theta}\}$$

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=\ldots=1/48.$$

设区域D为$x^2+y^2\le R^2$，求$\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

【解】 因为区域**D**具有轮换对称性，故有



$$\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}R^4.$$

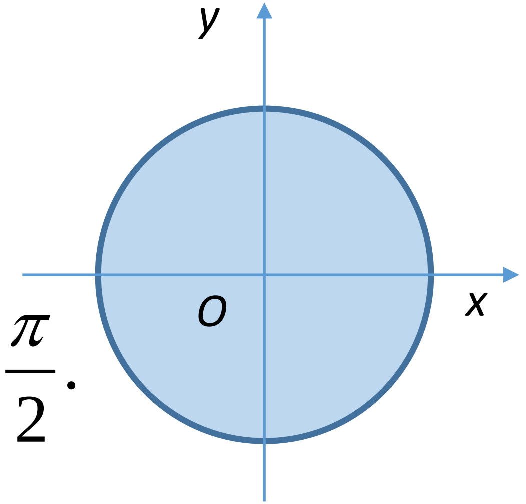
$$\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{1}{b^2}\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}R^4(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}).$$

拓展题

设$g(x)>0$为已知连续函数，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$,计算二重积分

$$I=\iint\limits_D \frac{\lambda g(x)+\mu g(y)}{g(x)+g(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 其中λ，μ为正常数。



【解】 **因为区域*D*具有轮换对称性，故有**

$$\iint\limits_D \frac{g(x)}{g(x)+g(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{g(y)}{g(x)+g(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{g(x)+g(y)}{g(x)+g(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

$$\iint\limits_D \frac{\lambda g(x)+\mu g(y)}{g(x)+g(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lambda\iint\limits_D \frac{g(x)}{g(x)+g(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mu\iint\limits_D \frac{g(y)}{g(x)+g(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(\lambda+\mu)\iint\limits_D \frac{g(x)}{g(x)+g(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}(\lambda+\mu).$$

设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，$f(0,0)=1, g(x)\in C^1, g(0)=0, g'(0)=3,$

求极限$\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{g(r^2)}$的值，其中$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le r^2\}$。

【解】 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\cdot\pi r^2$　　有连续性，可用积分中值定理

其中$(\xi,\eta)\in D$,当$r\to 0^+$时,$(\xi,\eta)\to(0,0)$，故$\lim\limits_{r\to 0^+} f(\xi,\eta)=f(0,0)=1.$

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{g(r^2)}=\lim_{r\to 0^+}\frac{f(\xi,\eta)\cdot\pi r^2}{g(r^2)}=\lim_{r\to 0^+} f(\xi,\eta)\pi\lim_{r\to 0^+}\frac{r^2}{g(r^2)}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\pi\lim_{r\to 0^+}\frac{2r}{g'(r^2)2r}=\frac{\pi}{g'(0)}=\frac{\pi}{3}.$$

■ "先一后二"法 （投影法）

若 D_{xy} 为Ω在xoy面上的投影区域

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$

1. 作图定域
2. 投影定界
3. 穿线定界

■ "先二后一"法（截面法）

若 $\Omega = \{(x, y, z) \mid c_1 \le z \le c_2, (x, y) \in D_z\}$

D_z为平面$z = z$截立体区域Ω所得的平面区域.

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

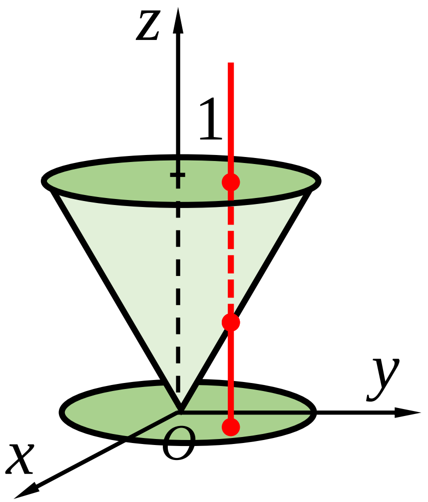
1. 作图定域
2. 截面定界
3. 移动定界

(2)利用柱面坐标计算

若$\Omega=\{(r,\ \theta,\ z)\,|\,z_1(r,\ \theta)\le z\le z_2(r,\ \theta),\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta\}$

则 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,\mathrm{d}r\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)\,\mathrm{d}z$$



1. 作图定域
2. 投影定界−极坐标
3. 穿线定界−极坐标

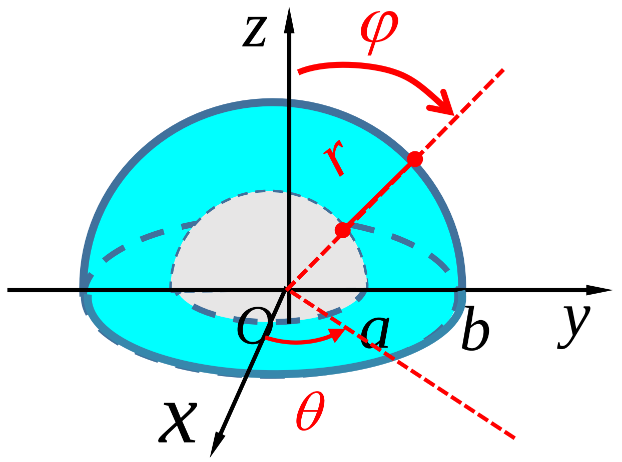
(3)利用球面坐标计算

若$\Omega=\{(r,\ \varphi,\ \theta)\,|\,r_1(\varphi,\ \theta)\le r\le r_2(\varphi,\ \theta),\ \varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta\}$

$$\text{则}\ \iiint_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$



1. 作图定域

2.空间射线定界-r,φ

3. 平面射线定界$-\theta$

三重积分的方法选择

$f(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2)$

积分区域Ω为球形域或其投影是圆域，则利用球面坐标计算；

$f(x, y, z) = g(x^2 + y^2)$

积分区域Ω为柱体或Ω的投影是圆域，则利用柱面坐标计算；

$f(x, y, z) = g(z)$

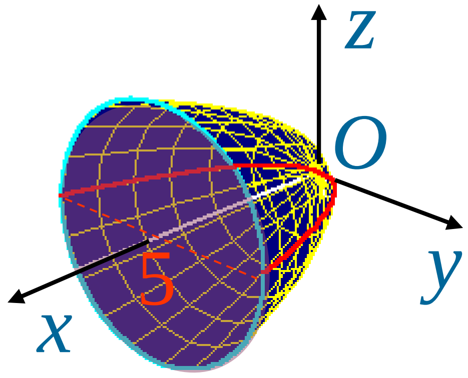
z切片形状为规则图形,则可采用先二后一法计算；

若以上三种特征都不具备，则采用直角坐标的先一后二计算.

【例】 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v$, 其中Ω 是由$xOy$ 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

【解1】 利用柱面坐标

$$\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases} \qquad \Omega: \begin{cases} \frac{1}{2}r^2 \le x \le 5 \\ 0 \le r \le \sqrt{10} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$



$$\text{原式} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}} r^3\,\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x = \frac{250}{3}\pi$$

【解2】 先二后一

$$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v = \int_0^5\mathrm{d}x\iint_{D_x}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^5\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2x}} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r = \frac{250}{3}\pi$$

【例】 设 Ω_1由$x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$确定，

Ω_2由 $x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$所确定，则 C

$(A)\ \iiint_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} x\,\mathrm{d}v$

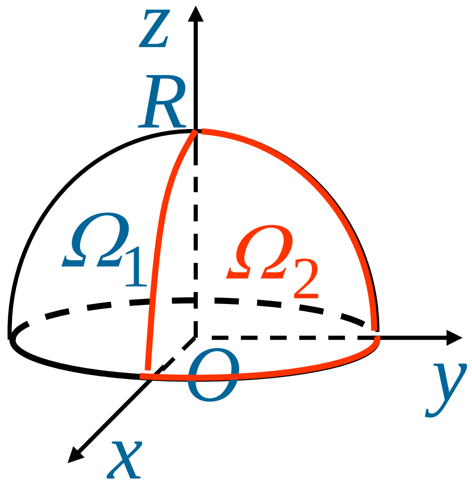
$(B)\ \iiint_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} y\,\mathrm{d}v$

$(C)\ \iiint_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}v$

$(D)\ \iiint_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} xyz\,\mathrm{d}v$

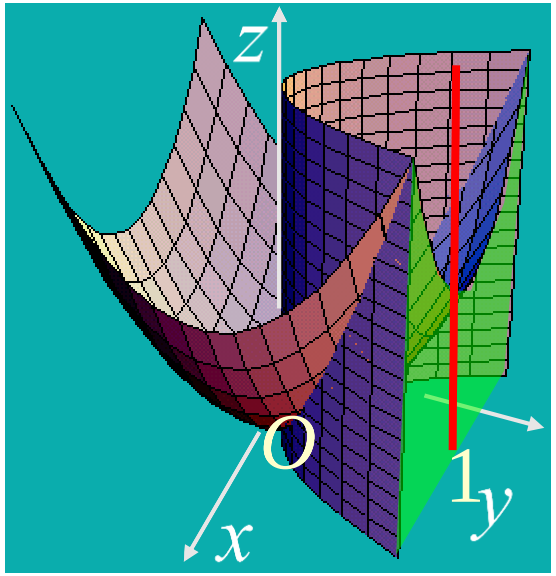
Ω_1：上半球

Ω_2：第一卦限部分



【例】 把积分$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$化为三次积分,其中Ω由曲面

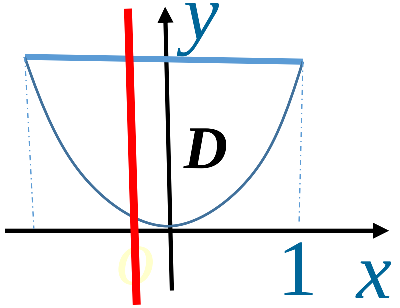
$z = x^2 + y^2$, $y = x^2$及平面$y = 1$, $z = 0$所围成的闭区域.



【解】 积分域为

沿柱面母线投影

$$\Omega:\begin{cases} 0 \le z \le x^2 + y^2 \\ x^2 \le y \le 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$



$$\text{原式} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x \int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y \int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

【例】 计算$\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是两个球$x^2+y^2+z^2\le R^2$及$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$

$(R>0)$的公共部分.

【解1】 用圆锥面$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$将Ω分成两部分$\Omega=\Omega_1+\Omega_2$,

球面坐标

$$\Omega_1: 0\le r\le 2R\cos\varphi,\ \frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta\le 2\pi$$

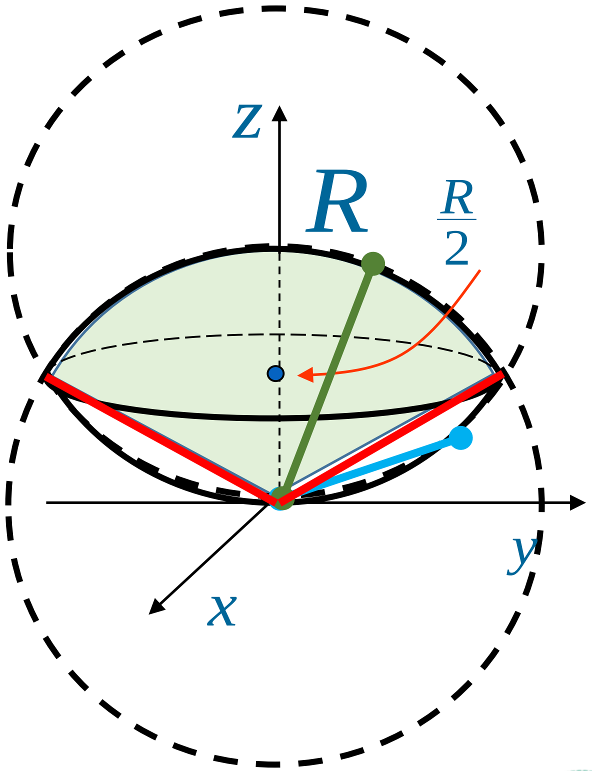
$$\Omega_2: 0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3},\ 0\le\theta\le 2\pi$$

于是,得

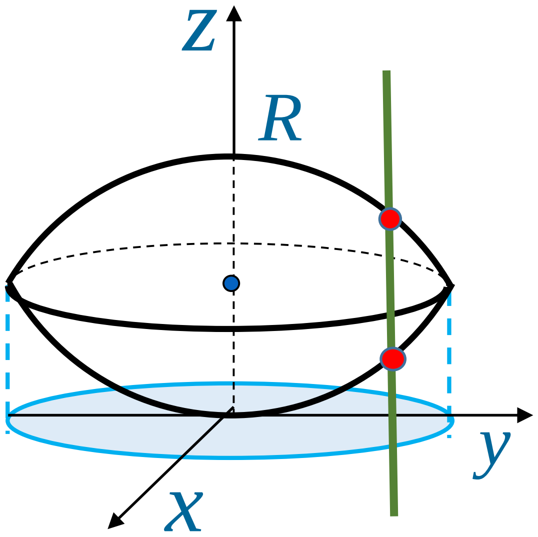
$$\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz = \iiint_{\Omega_1} z^2 dxdydz + \iiint_{\Omega_2} z^2 dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$+\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^{R} r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr = \frac{59}{480}\pi R^5$$



【例】 计算$\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中Ω是两个球$x^2+y^2+z^2 \le R^2$及$x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$ $(R>0)$的公共部分.



【解2】 由于 Ω在xoy平面的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2 \le \dfrac{3R^2}{4}$

柱面坐标

故在柱面坐标下,

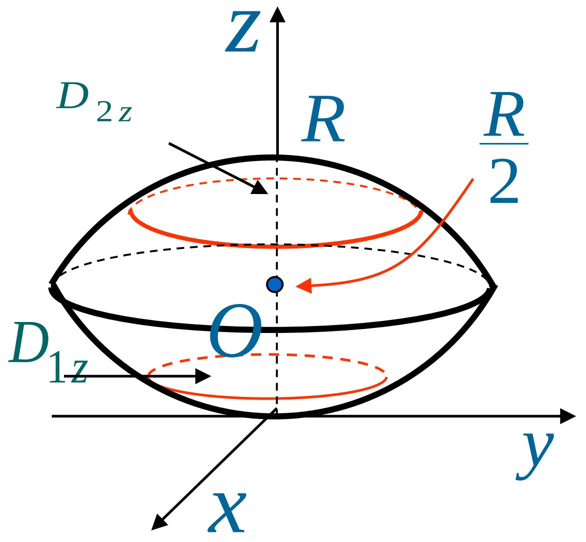
$$\Omega:\ R-\sqrt{R^2-r^2} \le z \le \sqrt{R^2-r^2},\ 0 \le r \le \frac{\sqrt{3}R}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}R}{2}} rdr \int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} z^2 dz$$

【例】 计算$\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是两个球$x^2+y^2+z^2\le R^2$及$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$

$(R>0)$的公共部分.

【解3】 由于被积函数缺x,y, 利用“**先二后一**”计算方便.



$$原式 = = \iiint_{\Omega_1} z^2 dxdydz + \iiint_{\Omega_2} z^2 dxdydz$$

$$\int_0^{R/2} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_{1z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{R/2}^{R} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_{2z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{R/2} z^2\cdot\pi(2Rz-z^2)\,\mathrm{d}z + \int_{R/2}^{R} z^2\cdot\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{59}{480}\pi R^5$$

设函数$f(x,y,z)$连续,$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$,

记Ω在xOy平面上的投影区域为D_{xy}.

(1)求二重积分$I=\iint_{D_{xz}}\sqrt{|z-x^2|}\,\mathrm{d}\sigma$;

(2)写出三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$的积分次序为$y,z,x$的三次积分。

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y=1 \end{cases}$$

【解】 $D_{xz}=D_1+D_2$

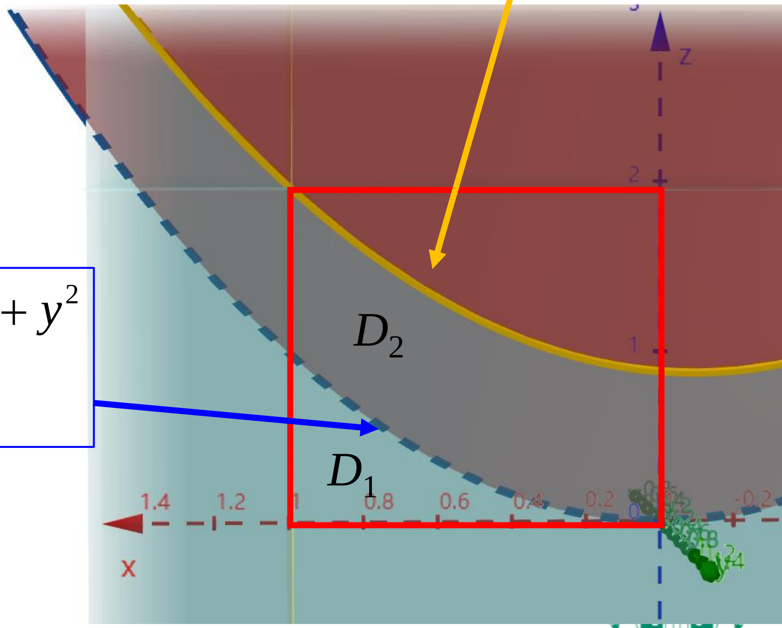
$$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le z\le x^2\}$$

$$D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,x^2\le z\le x^2+1\}$$

$$I=\iint_{D_1}\sqrt{x^2-z}\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}\sqrt{z-x^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-z}\,\mathrm{d}z+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x^2+1}\sqrt{z-x^2}\,\mathrm{d}z$$

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y=0 \end{cases}$$



设函数$f(x,y,z)$连续，$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$，

记Ω在xOy平面上的投影区域为D_{xy}.

(1)求二重积分$I=\iint_{D_{xz}}\sqrt{|z-x^2|}\,\mathrm{d}\sigma$;

(2)写出三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$的积分次序为$y,z,x$的三次积分。

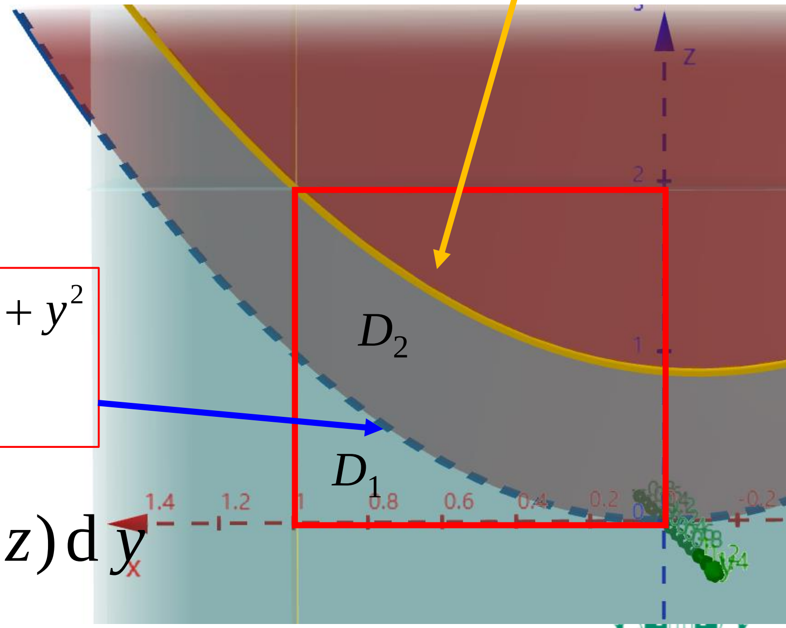
【解】

$$D_{xz}=D_1+D_2$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\iint_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x^2+1}\mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y$$



拓展题3

设$f(u)\in C^1$, $f(0)=0$,计算$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}v$,其中$\Omega$: $x^2+y^2+z^2\le t^2$.

【解】 $$\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega^*} f(r)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\,\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r)r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}v=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi\int_0^t f(r)r^2\,\mathrm{d}r}{\pi t^4}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=f'(0).$$