湖南大学理工类必修课程

大 学 数 学 AII

—— 多元元微积分学

1.3 平面及其方程

- 主讲：于红香

向量代数与空间解析几何

第三节　平面及其方程

一、　平面及其方程

二、　两平面的夹角

三、点到平面的距离

本节教学要求：

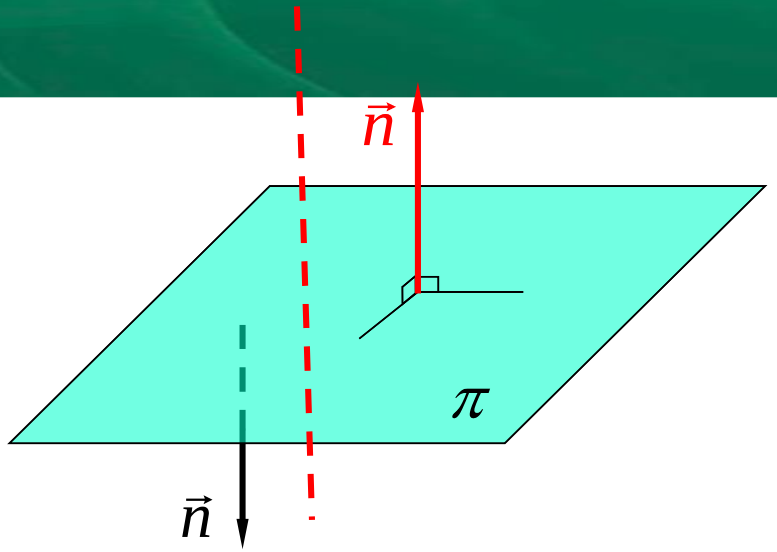
▲ 理解平面的法向量的概念。

▲ 熟练掌握平面的点法式方程、三点式方程、截距式方程和一般方程以及它们间的转化。

▲ 熟悉平面间的夹角、点到平面的距离的计算。

▲ 掌握平面间垂直、平行与它们的法向量间的关系。

平面的方向如何描述?



法向量:

与已知平面Π**垂直**的任一非零向量称为平面Π的法向量.

注: 1° 对平面Π, **法向量不唯一**;

2° 平面Π的法向量与Π上任一向量**垂直**.

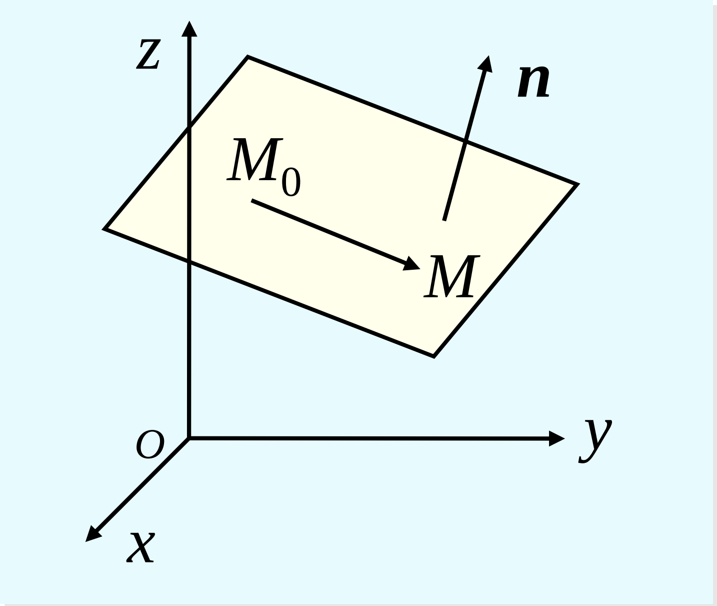
(一) 平面的点法式方程

确定一个平面，规定方向够不够？还需什么？

设平面Π 过**定点** $M_0(x_0, y_0, z_0)$，且有**法向量** $\vec{n}=(A,B,C)$

对于平面上**任一点**$M(x, y, z)$，

向量$\overrightarrow{M_0M}$与n垂直.



$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

而$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$，

得:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

称方程(1) 为平面的**点法式方程**.

例 求过点(2, –3, 0)且以 $\boldsymbol{n} = (1, -2, 3)$为法向量的平面的方程.

【解】 根据平面的点法式方程(1), 可得平面方程为:

$$1\cdot(x-2)-2\cdot(y+3)+3\cdot(z-0)=0$$

即: $$x-2y+3z-8=0$$

(一)平面的点法式方程

例 **求过三点$M_1(2, -1, 4)$, $M_2(-1, 3, -2)$和$M_3(0, 2, 3)$的平面的方程.**

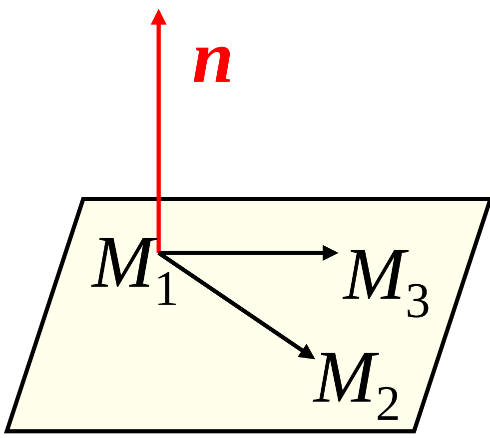
【解】找出该平面的法向量$\boldsymbol{n}$，以及任取一点，可以写出点法式方程.

由于$\boldsymbol{n}$与向量$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$都垂直.

而$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3, 4, -6)$　　$\overrightarrow{M_1M_3}=(-2, 3, -1)$

可取$n = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14i + 9j - k$$



所以, 由点法式得所求平面的方程为:

$$14(x - 2) + 9(y + 1) - (z - 4) = 0$$

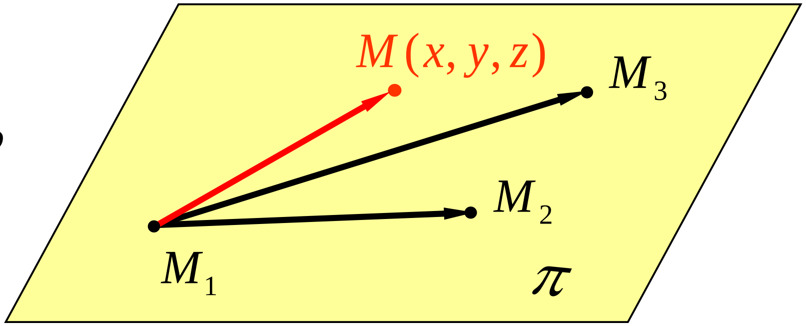
整理得:　　$14x + 9y - z - 15 = 0$

（二）平面的三点式方程

总结

过不共线的三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ 的平面 π方程

对于平面上任一点 $M(x, y, z)$,



$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ 共面

$$\Longleftrightarrow \quad (\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0,$$

即

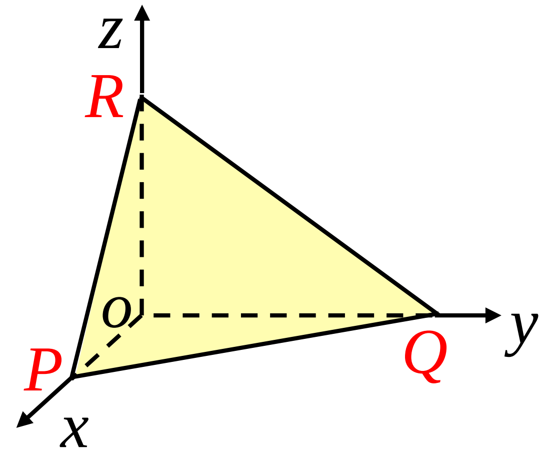
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

（三）平面的截距式方程

若这三点为坐标轴上的三点，方程会怎样？

设平面与x, y, z 轴的交点依次为

$P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$, $R(0, 0, c)$三点



则有 $$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

有 $bcx + acy + abz = abc$

当 a, b, c 非零时

得 $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

a, b, c 分别为平面在x, y, z轴上的截距。

观察与思考

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

发现三个平面方程有什么共同点？

均为x,y,z的一次方程！

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

x,y,z的一次方程都是平面方程？

【定理1】任何x, y, z的一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 都表示平面,且此平面的一个法向量是:

$$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$$

【证】A, B, C不能全为0, 不妨设$A \neq 0$, 则方程可以化为

$$A\left[x-\left(\frac{-D}{A}\right)\right]+B(y-0)+C(z-0)=0$$

它表示过定点 $M_0\left(-\frac{D}{A},0,0\right)$,且

法向量为 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 的平面.

注:一次方程: $Ax + By + Cz + D = 0$

称为平面的一般方程.

(四) 平面的一般方程

一般方程与点法式方程 的转化

点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

假设 $A\neq 0$，则

$\vec{n}=(A,\ B,\ C)$，

过点 $M_0(-\frac{D}{A},\ 0,\ 0)$。

过点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$\vec{n}=(A,\ B,\ C)$，

令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$

例 已知平面过点$M_0(-1, 2, 3)$, 且平行于平面 $2x-3y+4z-1=0$, 求其方程.

【解 1】所求平面与已知平面有相同的法向量 $\boldsymbol{n}=(2, -3, 4)$

$$2(x+1)-3(y-2)+4(z-3)=0$$

即: $2x-3y+4z-4=0$

【解2】 设平面方程为 $2x-3y+4z+D=0$

点$M_0(-1, 2, 3)$代入上面方程得: $D=-4$.

得方程为: $2x-3y+4z-4=0$

2. 平面方程的几种特殊情形

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(1) 过原点的平面方程

由于$O(0, 0, 0)$满足方程, 所以$D = 0$.

于是, 过原点的平面方程为:

$$Ax + By + Cz = 0$$

(2) 平行于坐标轴的平面方程

考虑平行于x轴的平面$Ax + By + Cz + D = 0$,

它的法向量$\boldsymbol{n}$ =(A, B, C)与x 轴上的单位向量

$\boldsymbol{i}$ =$(1, 0, 0)$垂直, 所以

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i} = A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = A = 0$$

于是: 平行于x 轴的平面方程是 $By + Cz + D = 0$;

平行于y 轴的平面方程是 $Ax + Cz + D = 0$;

平行于z 轴的平面方程是 $Ax + By + D = 0$.

缺谁平行谁!

特别: 如果还有$D = 0$时, 平面过坐标轴.

(3) 平行于坐标面的平面方程

平行于两个坐标轴

平行于xOy 面的平面方程是 $Cz+D=0$; (即$z=k$)

平行于xOz 面的平面方程是 $By+D=0$; (即$y=k$)

平行于yOz 面的平面方程是 $Ax+D=0$. (即$x=k$)

缺谁平行谁!

例 求过 y 轴和点 $M(1,1,1)$ 的平面方程.

【解 1】 设所求平面方程为 $Ax + Cz = 0$.(平面过 y 轴)

又因平面过点 $M(1,1,1)$. $A + C = 0$

得 $A = -C\ (\neq 0)$

代入原方程得 $x - z = 0$

【解 2】 三点式

$M(1,1,1)$, $M_1(0,0,0)$, $M_2(0,1,0)$

平面方程小结

R^3空间中，平面π的方程有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$ (点法式)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$ (三点式方程)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ (截距式方程)

$$Ax+By+Cz+D=0$$ (一般方程)

1.【定义1】 两平面的法向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

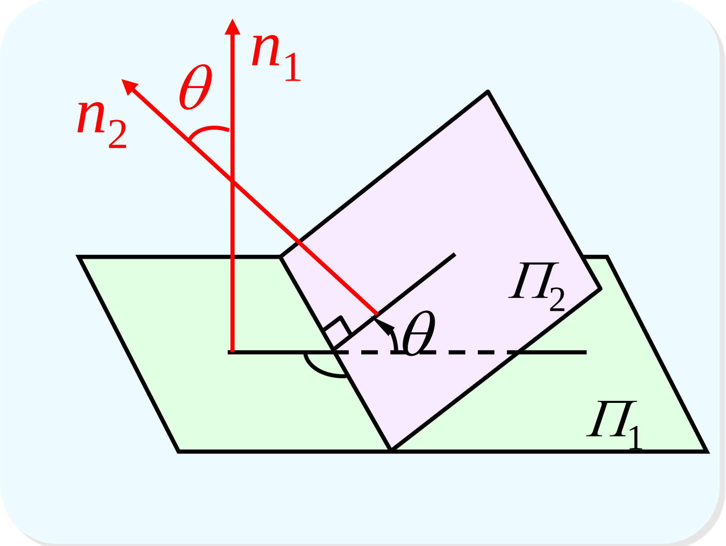
若已知两平面方程是:

Π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

法向量 $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

Π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

法向量 $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$



二、两平面的夹角

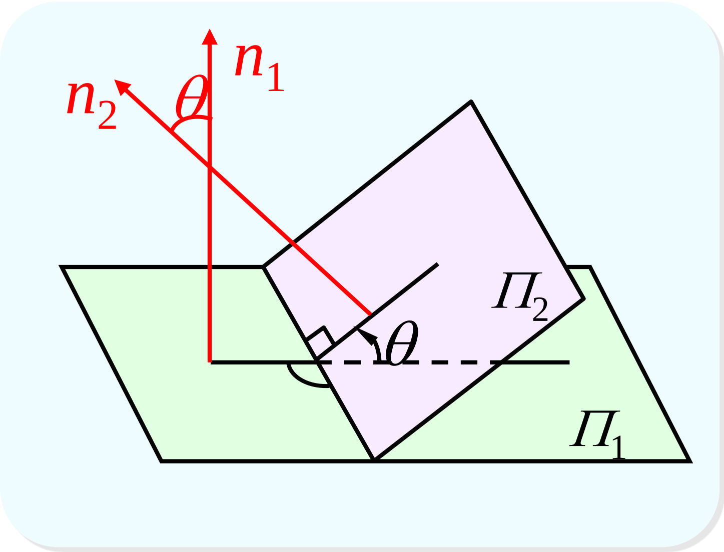
平面Π_1与Π_2的夹角θ应是

$<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>$和$<-\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\pi-<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>$两者中的锐角,

$$\cos\theta=\left|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>\right|$$

$$=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{\|\boldsymbol{n}_1\|\cdot\|\boldsymbol{n}_2\|}$$

$$=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$



二、两平面的夹角

特殊夹角

平面Π_1与Π_2相互垂直 $\Longleftrightarrow$ $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平面Π_1与Π_2相互平行 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

规定: 若比例式中某个分母为0, 则相应的分子也为0.

特殊情形: !

平行不重合 $\Longleftrightarrow$ $A_1{:}A_2=B_1{:}B_2=C_1{:}C_2\neq D_1{:}D_2$;

重合 $\Longleftrightarrow$ $A_1{:}A_2=B_1{:}B_2=C_1{:}C_2=D_1{:}D_2$.

二、两平面的夹角

例 求两平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角.

【解】 $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{n}_2 = (2, 1, 1)$,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_1\|} = \frac{|2-1+2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 所求夹角为 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

例

一平面通过两点$M_1(1, 1, 1)$和$M_2(0, 1, -1)$，且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.

【解 1】设所求平面的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$

已知平面 $x+y+z=0$的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1, 1, 1)$

所以：$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$ 且$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$ 　　取$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1, 0, -2)$ 　　于是：$\boldsymbol{n}=(-2, 1, 1)$

所以，所求平面方程由点法式得

$$-2\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0$$

即：$2x-y-z=0$

【解 2】设平面的一般方程为：$Ax+By+Cz+D=0.$

由平面过两点$M_1(1, 1, 1)$和$M_2(0, 1, -1)$

$A+B+C+D=0$

$B-C+D=0$

所求平面垂直于平面 $x+y+z=0$得：

$A+B+C=0$

三个方程解得：$D=0, B=C, A=-2C,$

取$C=1$，得所求方程为：

$-2x+y+z=0$

二、两平面的夹角

练 求平面Π使其满足：(1)过z轴；

(2) Π与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

【解】 因为平面Π过z轴,可设其方程为

$$Ax+By=0.$$

又因为Π与已知平面夹角为 $\frac{\pi}{3}$. 故

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|2A+B+(-\sqrt{5})\cdot 0|}{\sqrt{A^2+B^2+0^2}\sqrt{2^2+1^2+(-\sqrt{5})^2}}=\frac{1}{2}$$

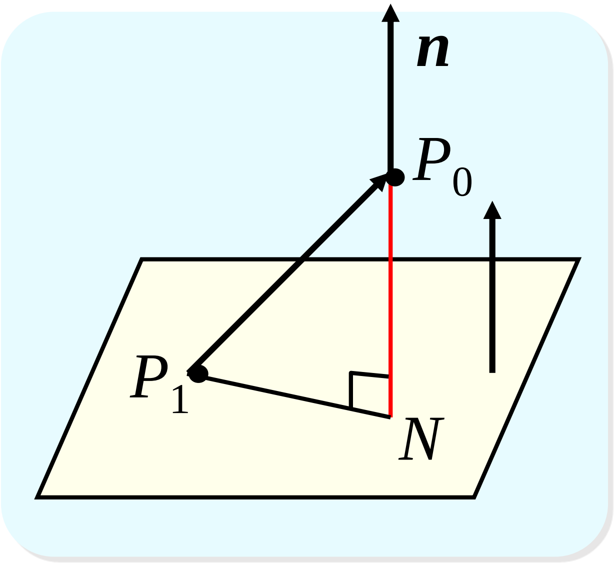
$\Longrightarrow$ $B=3A$ 或 $B=-\frac{1}{3}A$

$\Longrightarrow$ $\Pi: x+3y=0$ 或 $\Pi: 3x-y=0.$

三、点到平面的距离

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面 $Ax+By+Cz+D=0$外一点，

求P_0到这平面的距离d.



在平面上任取一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$

则 $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$

过P_0点作一法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$

于是:

$$d=\left|\operatorname{Prj}_{\vec{n}}\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}}{\|\vec{\boldsymbol{n}}\|}\right|$$

$$=\frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

三、点到平面的距离

又 $A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)$

$$= Ax_0+By_0+Cz_0+D-(Ax_1+By_1+Cz_1+D)$$

$$= Ax_0+By_0+Cz_0+D$$

所以，得点P_0到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (5)$$

例 求点(2, 1, 1)到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.

【解】 这里 $(x_0,\ y_0,\ z_0)=(2,1,1)$,

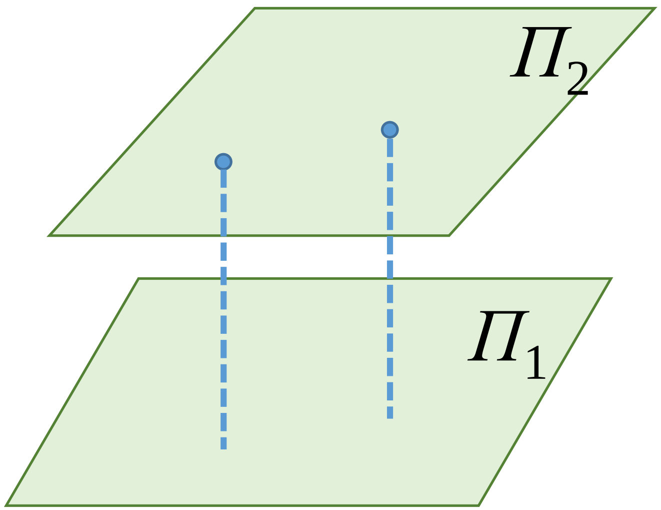
$A=1,\ B=1,\ C=1,\ D=1,$

利用点到平面的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|1\times 2+1\times 1+1\times(-1)+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

问题：如何计算两平行平面间的距离呢?



转化为点到平面的距离

可在平面Π_2上任取一点，
该点到平面Π_1的距离即为
这两平行平面间的距离.

三、点到平面的距离

例 求两平行平面 $\Pi_1: 10x+2y-2z-5=0$

和 $\Pi_2: 5x+y-z-1=0$ 之间的距离 d.

【解】 在平面 Π_2 上取点 $(0,1,0)$, 则

$$d=\frac{|10\times0+2\times1+(-2)\times0-5|}{\sqrt{10^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{108}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

例 求平行于平面 $\Pi_0: x+2y+3z+4=0$, 且与球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=9$ 相切的平面Π的方程.

【解】可利用条件$\Pi // \Pi_0$, 写出平面Π的一般式方程:

$$x+2y+3z+D=0$$

因为平面Π与球面Σ相切, 故球心(0,0,0)到平面Π的距离

$$d=\left.\frac{|x+2y+2z+D|}{\sqrt{1+2^2+3^2}}\right|_{(0,0,0)}=3, \qquad 得\ |D|=3\sqrt{14},$$

故所求平面Π的方程为

$$x+2y+3z+3\sqrt{14}=0 \quad 或 \quad x+2y+3z-3\sqrt{14}=0.$$

课堂练习

练

若平面Π_1：$x+ky-2z=0$与平面Π_2：$2x-3y+z=0$的夹角为$\pi/4$，求k值。

【解】由两平面的法向量 $\vec{n}_1=(1,k,-2)$，$\vec{n}_2=(2,-3,1)$，

计算两平面的夹角余弦

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|1\times 2+k\times(-3)-2\times 1|}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}},$$

即 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|-3k|}{\sqrt{5+k^2}\cdot\sqrt{14}}\implies k=\pm\dfrac{\sqrt{70}}{2}.$

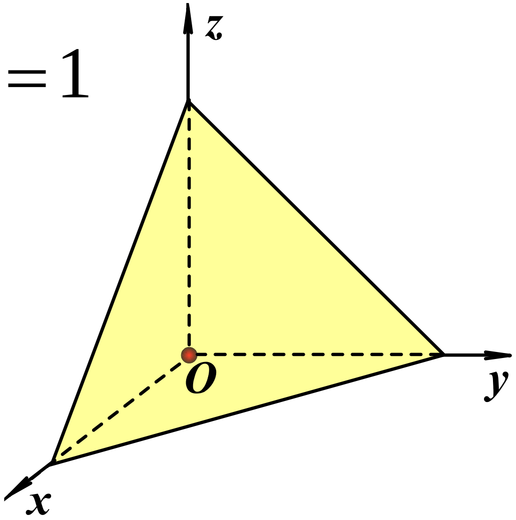
思

求平行于平面$6x+y+6z+5=0$，而与三个坐标面所围成的四面体体积V为一个单位的平面方程.

【解 1】

由两平面平行，可设所求平面方程为 $6x+y+6z+D=0$

化为截距式方程： $\dfrac{x}{-D/6}+\dfrac{y}{-D}+\dfrac{z}{-D/6}=1$



$\because V=1,\quad \therefore \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{D^3}{6^2}\right|=1.$

$\Longrightarrow |D|=6.\quad \therefore\quad D=\pm 6.$

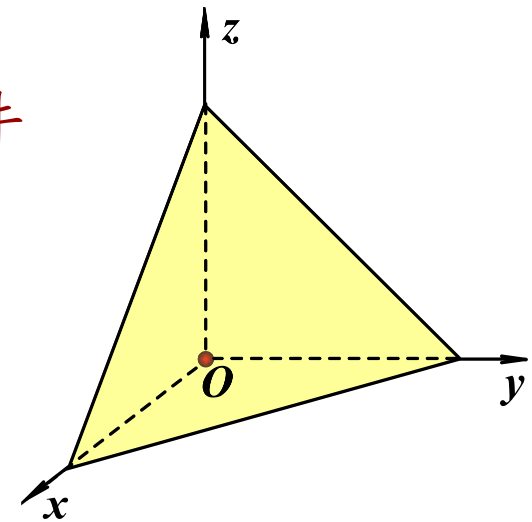
所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm 6.$

思 求平行于平面$6x+y+6z+5=0$,而与三个坐标面所围成的四面体体积V为一个单位的平面方程.

【解 2】设平面方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $\because V=1$, $\therefore \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|abc|=1.$

由所求平面与已知平面平行得

$$\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6},$$ 向量平行的充要条件



令 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$ $\quad a=\frac{1}{6t}, b=\frac{1}{t}, c=\frac{1}{6t}.$

由 $1=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\right| \Longrightarrow |t|=\frac{1}{6}.$

$\therefore \quad a=\pm1, b=\pm6, c=\pm1.$

所求平面方程为 $\frac{x}{1}+\frac{y}{6}+\frac{z}{1}=\pm1,$ 即 $6x+y+6z=\pm6.$