大学物理

蒋英

湖南大学物理与微电子科学学院

第3章 刚体力学

新疆达坂城风力发电厂是我国，也是亚洲最大的风能基地。
风力机叶片上每一点具有相同的角速度。研究表明，风力机的效能会随着叶片尺寸的增大而提高。请问其基本的力学原理是什么？

第3章 刚体力学

刚体力学——刚体运动学

刚体定义：在任何情况下形状和大小都不发生变化的物体。

刚体特征：一种特殊的质点系统，刚体内任意两质点间的距离在外力作用下始终保持不变。刚体是固体物件的理想化模型。

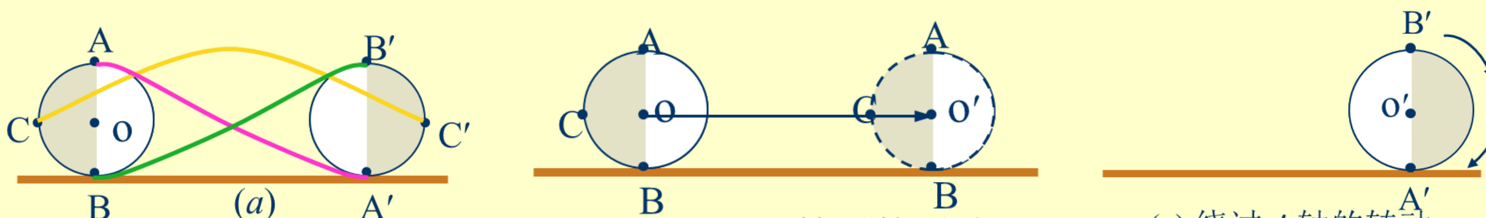
一、刚体的平动和转动　　刚体的运动 = 平动 + 转动

刚体运动形式：平动和转动是两种最简单而又最基本的运动形式。刚体的一般运动都可看成是由这两种基本运动合成的。

平动：在刚体上任作一条直线，若在刚体运动过程中，该直线的空间指向始终保持平行，称这种运动为刚体的平动。**(质心运动代表刚体平动)**

转动：若刚体上各点都绕同一点或同一直线(转轴)做圆周运动—转动。

定轴转动：若转轴位置固定不懂，则为刚体的定轴转动。

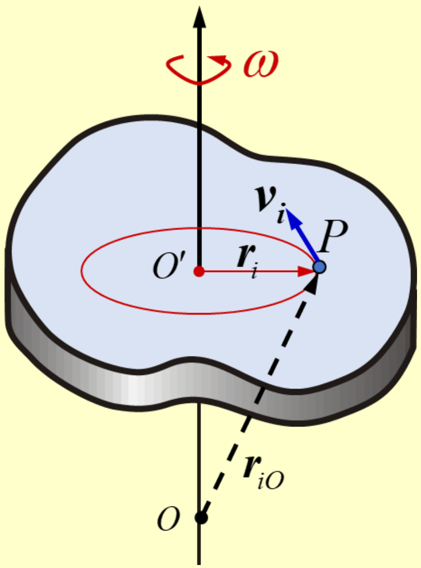


(a)　(b) o→ o′轮子的平动　(c) 绕过o′ 轴的转动

刚体力学——刚体运动学

二、描写刚体转动的运动学量

刚体定轴转动时，相同的时间内各点相对于同一转轴转过的角度都相等，所以通常采用角量来描述刚体的转动。定轴转动刚体中任何其它质点都具有相同的θ，ω，β.



角速度的大小: $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度的大小: $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

线量与角量的关系: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ 右手螺旋定则

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{iO} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \qquad (\vec{r}_{iO} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}_i)$$

$$\vec{a}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}_i \qquad a_\tau = r_i \beta}$$

$$\boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \qquad a_n = r_i \omega^2}$$

例3.1 观看完一部影片，碟片作匀减速转动，其角速度逐渐减小最终碟片停止转动。假设碟片的角加速度恒定为$\beta = -10.0\ \mathrm{rad}/s^2$，$t$ =0时刻，它的角速度是$\omega_0 = 27.5\ rad/s$, 请问在t=0.3s 时，碟片的角速度是多少？需要多长时间碟片才会停下来？

解： 由题意，碟片的角加速度 $\beta = -10.0\,\mathrm{rad/s^2}$ $\omega_0 = 27.5\,\mathrm{rad/s}$

当 $t = 0.300\,\mathrm{s}$ ，碟片的角速度

$$\omega = \omega_0 + \beta t = 27.5\,\mathrm{rad/s} + (-10.0\,\mathrm{rad/s^2})(0.300\,\mathrm{s}) = 24.5\,\mathrm{rad/s}$$

碟片最终停下来的时间 $$t = \frac{\omega - \omega_0}{\beta} = \frac{0 - 27.5\,\mathrm{rad/s}}{-10\,\mathrm{rad/s^2}} = 2.75\,\mathrm{s}$$

观看完一部影片，碟片作匀减速转动，其角速度逐渐减小最终碟片停止转动。

刚体力学——刚体的定轴转动 转动惯量

一、转动定律

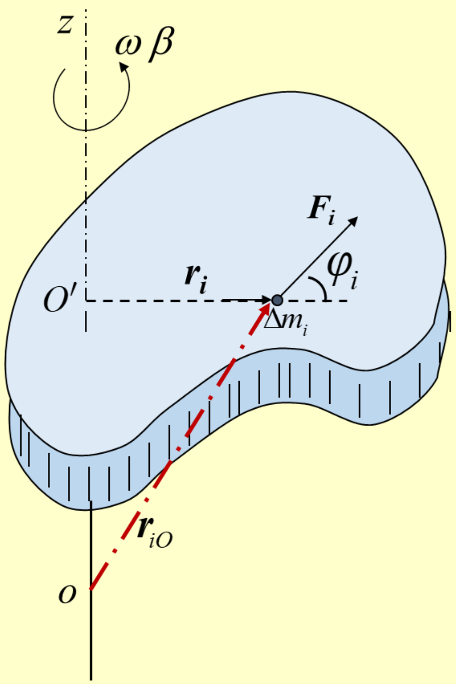
刚体的转动动力学：(1)角动量和力矩是描述刚体转动状态及其影响因素的基本物理量；(2)角动量定理是研究转动动力学问题的基本依据。

设刚体绕某固定轴转动，取该固定轴为 z 轴，如图所示。把刚体看作质点系，利用质点系角动量定理的分量形式：$M_z = \dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$

刚体对z轴的合外力矩：$M_z = \sum_{i=1}^{N} M_{iz} = \sum_{i=1}^{N} F_i r_i \sin\varphi_i$

刚体对z轴的总角动量：

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz} = \sum_{i=1}^{N} r_i \Delta m_i v_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2\right)\omega$$



定义刚体对转轴的转动惯量 $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$

$$L_z = I\omega, \qquad M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\beta$$

刚体力学——刚体的定轴转动 转动惯量

$$\boxed{M_z = I\beta \qquad L_z = I\omega}$$

在约定转轴为z轴的情况下，常略去下标z，因而上式常写为：

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I\beta} \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{I\omega}}$$

刚体定轴转动的转动定律

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma} \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{mv}}$$

质点系运动的牛顿第二定律

刚体绕定轴转动的转动定律：刚体所受的对某一固定转轴的合外力矩等于刚体对**同一转轴**的转动惯量与刚体所获得的角加速度的乘积。

在应用转动定律时应注意：

(1) M 是合外力矩，是外力力矩的矢量和， 而不是合外力的力矩；

(2) M、I、 β 应是对同一转轴而言；

(3) 单位统一。

刚体力学——刚体的定轴转动 转动惯量

二、转动惯量的计算 转动定律的应用

1、转动惯量

$$I=\sum_i \Delta m_i r_i^2 \qquad \boldsymbol{M}=\boldsymbol{I\beta}$$

转动惯量 I 是物体转动惯性大小的量度：合外力矩一定时，转动惯量越大，角加速度就越小；反之亦然。

质量 m 是物体平动惯性大小的量度：合外力一定时，质量越大，加速度就越小；反之亦然。

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{ma}$$

转动惯量与下面三因素有关：物体总质量、物体质量分布、转轴位置

若物体质量连续分布，转动惯量

$$I=\int_m r^2 dm \quad \begin{cases} dm=\lambda dl & \lambda\text{: 线密度（细杆）} \\ dm=\sigma ds & \sigma\text{: 面密度（圆盘）} \\ dm=\rho dv & \rho\text{: 体密度（球体）} \end{cases}$$

$$I=\int_m r^2 dm=\int_v r^2\lambda dl$$

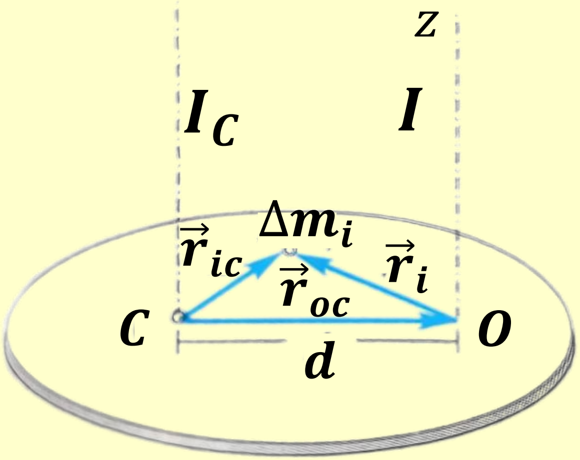
$$I=\int_m r^2 dm=\int_v r^2\sigma ds$$

$$I=\int_m r^2 dm=\int_v r^2\rho dv$$

刚体力学——刚体的定轴转动 转动惯量

2、 平行轴定理

刚体对任一轴的转动惯量 I，等于对过质心 c 并与该轴平行的轴的转动惯量 I_c 与二轴间距离 d 的平方乘上刚体质量的积之和。

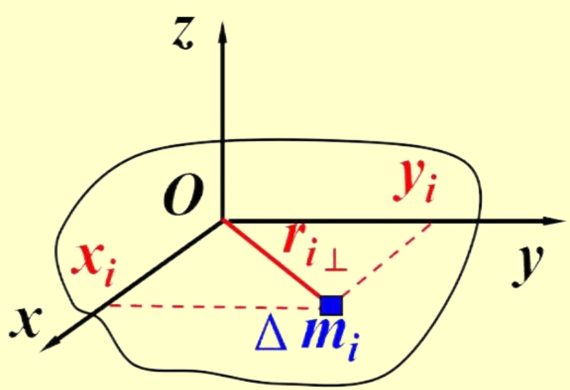


平行轴定理

$$\boxed{I = I_c + md^2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{r}_{ic} = 0$$

3、垂直轴定理(对薄平板刚体)

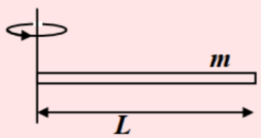
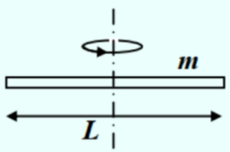
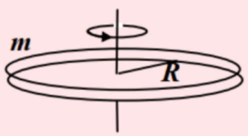
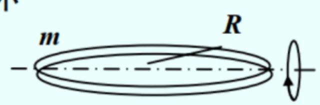
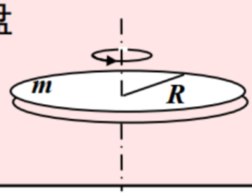


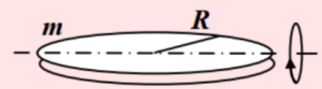
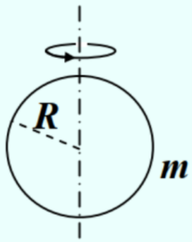
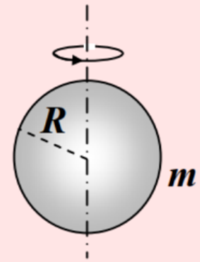
垂直轴定理

$$I_z = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2 = \sum \Delta m_i\, x_i^2 + \sum \Delta m_i y_i^2$$

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

刚体力学-转动惯量

刚体的名称及示意图	轴	转动惯量
细杆 	过杆的一端且与杆垂直	$\frac{1}{3}mL^2$
细杆 	过杆的中点且与杆垂直	$\frac{1}{12}mL^2$
圆环 	过环的中心垂直于环面	mR^2
圆环 	直径	$\frac{1}{2}mR^2$
圆盘 	过盘中心垂直于盘面	$\frac{1}{2}mR^2$

刚体的名称及示意图	轴	转动惯量
圆盘 	直径	$\frac{1}{4}mR^2$
薄球壳 	直径	$\frac{2}{3}mR^2$
球体 	直径	$\frac{2}{5}mR^2$

作业

刚体力学——刚体的定轴转动 转动惯量

例3.3 求质量为m，长为 l的匀质细棒对下列给定转轴的转动惯量。

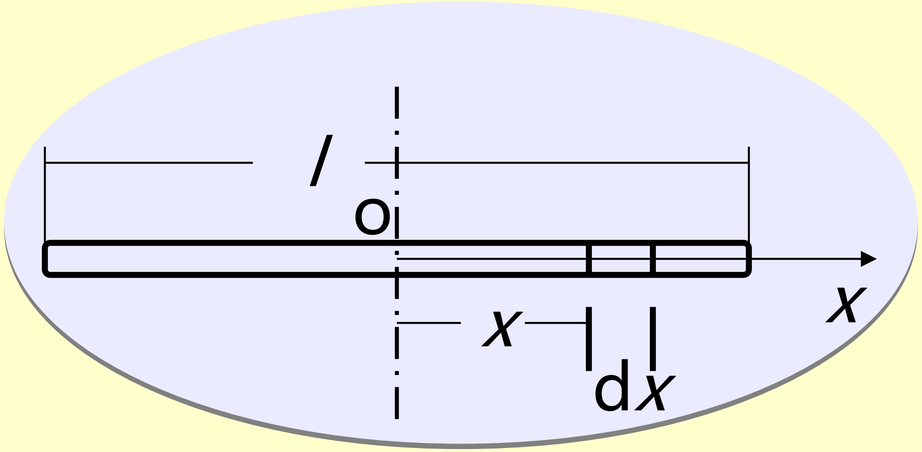
(1) 转轴通过棒的中心并与棒垂直；

(2) 转轴通过棒的一端并与棒垂直。

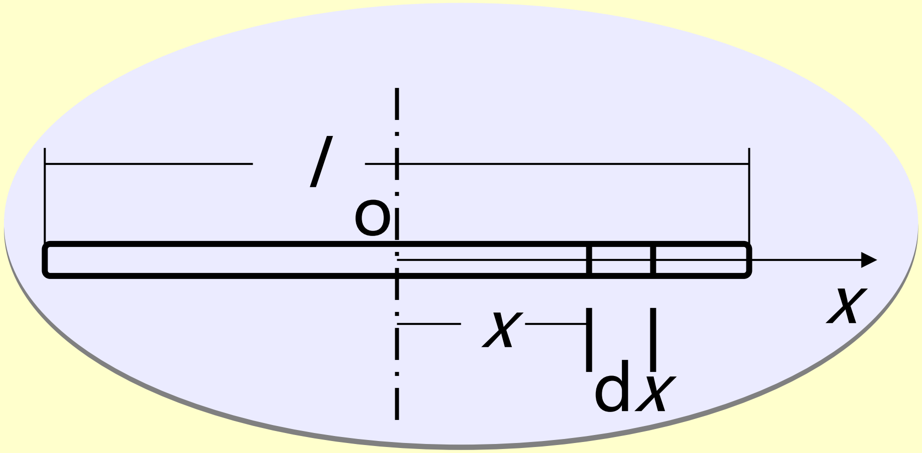
解：如图所示，沿棒长方向取X轴，中心为坐标原点。

(1)将细棒分成无穷多小段，取一小段dx，该小段对中心轴的转动惯量dI

$$dI_c = x^2 dm$$



各段对中心轴的转动惯量求和



$$I_c=\int \mathrm{d}\, I_c=\int x^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{l}dx$$ 代入上式

$$I_c=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\frac{m}{l}\mathrm{d}x=\frac{m}{3l}x^3\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{12}ml^2$$

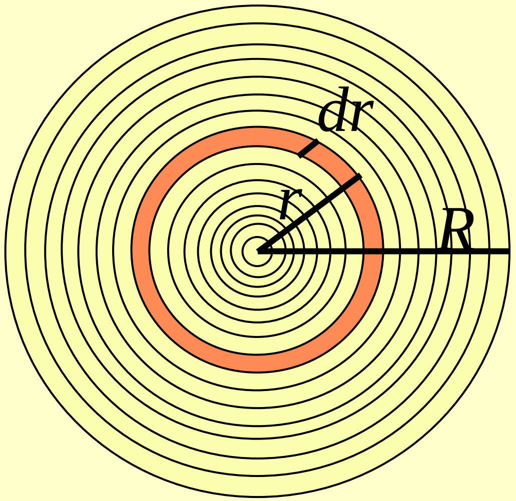
(2)利用平行轴定理

$$I=I_c+md^2 \qquad \mathrm{d}=\frac{l}{2}$$ 代入

$$I=\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{2})^2=\frac{1}{3}ml^2.$$

刚体力学——刚体的定轴转动 转动惯量

例3.4 求质量为m，半径为R的圆盘绕通过中心并与圆面垂直的转轴的转动惯量，设质量在盘上均匀分布。



解：将圆盘分成无穷多个大大小小的薄圆环，取其中一个半径为 r，厚度为 dr 的薄圆环，该薄圆环对中心轴的转动惯量 $\mathrm{d}I = r^2\mathrm{d}m$

而 $\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2mr}{R^2} dr$ 代入上式

整个圆盘对中心轴的转动惯量

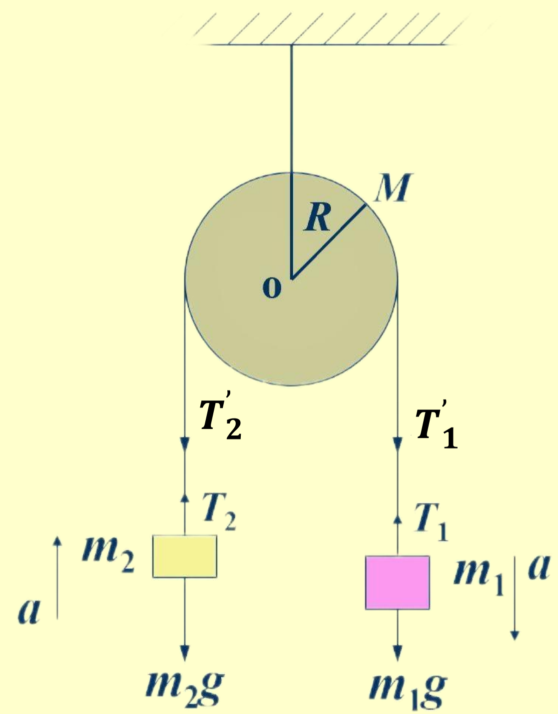
$$I = \int \mathrm{d}I = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2} mR^2$$

刚体力学——刚体的定轴转动 转动惯量

例3.5 质量为m_1， m_2 （ $m_1 > m_2$）的两物体，通过一定滑轮用绳相连，已知绳与滑轮间无相对滑动，且定滑轮是半径为R、质量为 M 的均质圆盘，忽略轴的摩擦。求：

(1) m_1 、m_2的加速度；

(2) 滑轮的角加速度β 及绳中的张力。



解： 对m_1 、m_2，滑轮作受力分析，

m_1 、m_2作平动，滑轮作转动，

$$(T_1 = T_1', \quad T_2 = T_2')$$

刚体力学——刚体的定轴转动 转动惯量

对两物体应用牛顿第二定律:

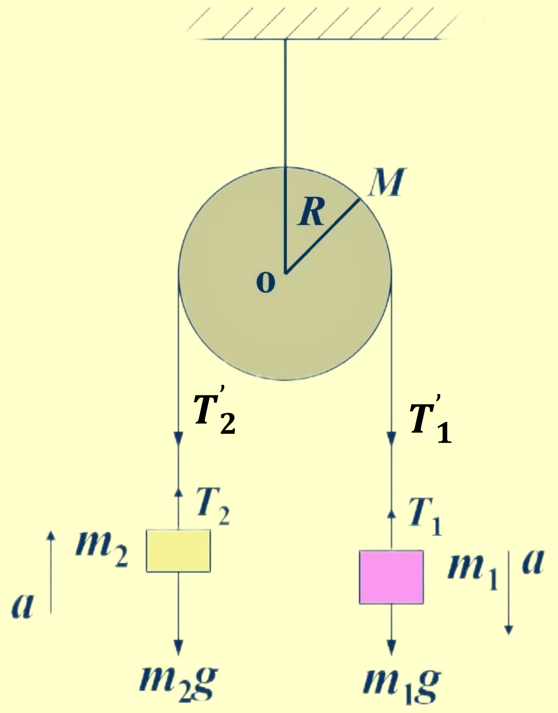
$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

对滑轮应用转动定律:

$$\boxed{T_1 R - T_2 R = I\beta}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$a = R\beta$$



解得:

$$\begin{cases} a = \dfrac{2(m_1 - m_2)}{2(m_1 + m_2) + M} g \\ \beta = \dfrac{2(m_1 - m_2)}{[2(m_1 + m_2) + M]R} g \\ T_1 = \dfrac{4m_1 m_2 + m_1 M}{2(m_1 + m_2) + M} g \\ T_2 = \dfrac{4m_1 m_2 + m_2 M}{2(m_1 + m_2) + M} g \end{cases}$$

自主学习教材P63: 例3.6

刚体力学——作业1

1. 练习册A（第3章 刚体的定轴转动）

选择：1-5；填空：1-6; 计算：1-4；研讨：1,3

2. 课件上转动惯量作业；

3. 智慧树平台平行轴与垂直轴定理；

大学物理

蒋英

湖南大学物理与微电子科学学院

第3章 刚体力学

刚体力学——刚体的动能与势能

一、力矩的功

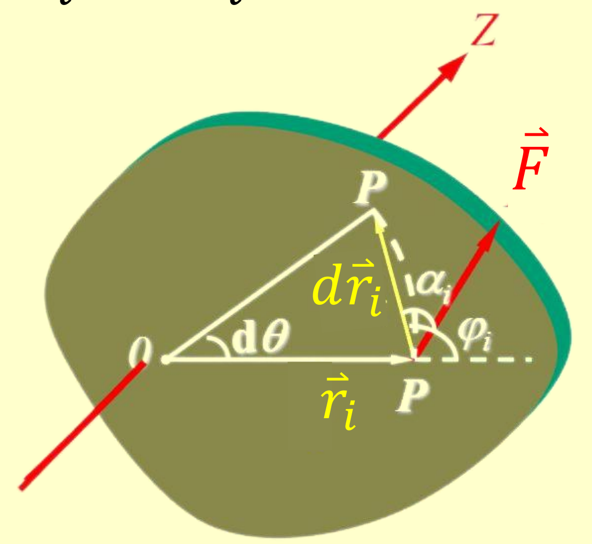
刚体所受外力为$\vec{F}$，且在转动平面内，刚体绕固定轴转过一微小角度$d\theta$，力$\vec{F}$的作用点P处的质元发生元位移$d\vec{r}_i$，转过弧长$ds_i = r_i d\theta$。
力$\vec{F}$在这段元位移中所做的功为：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot d\vec{r}_i = F|d\vec{r}_i|\cos\alpha_i = F ds_i \cos\alpha_i = F r_i \cos\alpha_i \,\mathrm{d}\theta$$

$$(\because\ \alpha_i + \varphi_i = \frac{\pi}{2},\quad \therefore \cos\alpha_i = \sin\varphi_i)$$

$$\therefore \mathrm{d}A = F r_i \sin\varphi_i \,\mathrm{d}\theta \qquad M = F r_i \sin\varphi_i$$

$$\boxed{dA = M d\theta}$$



力矩所做的元功等于力矩M和角位移$d\theta$的乘积。

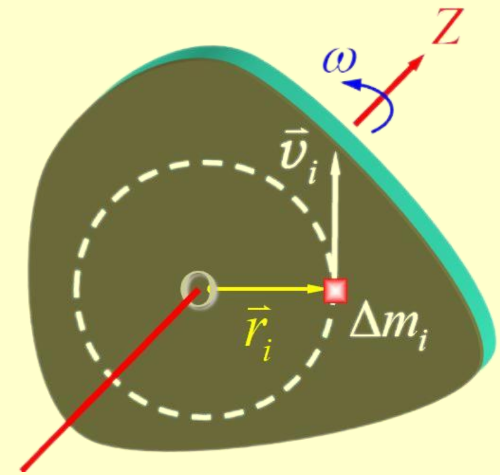
刚体从角位移θ_1转至θ_2时，外力矩M所作的功：

$$\boxed{A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta}$$

定轴转动的刚体，内力力矩的总功为零，只需考虑合外力矩的功。

刚体力学——刚体的动能与势能

二、刚体的转动动能



刚体内第i个质元的质量为Δm_i，离转轴的距离为r_i，其动能为：

$$E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 \quad (\because v_i = r_i\omega)$$

整个刚体的转动动能等于各质点动能之和：

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^{\,2}\omega^2 = \frac{1}{2}(\sum_i \Delta m_i r_i^{\,2})\omega^2 \qquad I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

刚体的转动动能: $\boxed{E_k = \frac{1}{2}I\omega^2}$

物体的平动动能: $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$

刚体定轴转动的动能定理

$$\because M = I\beta = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = I\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\therefore M\,\mathrm{d}\theta = I\omega\,\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{dA = Md\theta}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

$$\boxed{A = \int M\,\mathrm{d}\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^{\ 2} - \frac{1}{2}I\omega_1^{\ 2} = E_{k2} - E_{k1}}$$

刚体定轴转动的动能定理——刚体绕固定轴转动的动能的增量等于合外力矩所作的功。

质点系的动能定理在刚体做定轴转动时的特殊形式。

刚体力学——刚体的动能与势能

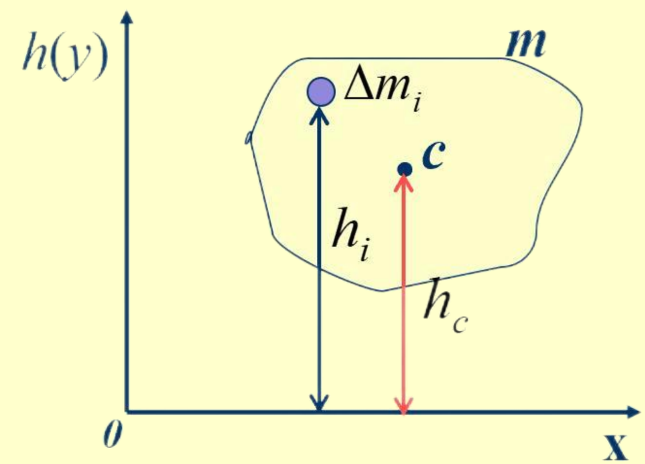
三、刚体的势能

如果刚体处在保守力场中，同样可以引入势能的概念。
重力场中的刚体具有一定的重力势能。

设刚体内第i个质元的质量为Δm_i，其重力势能为：

$$E_{pi} = \Delta m_i g h_i$$

整个刚体的重力势能为各质元重力势能的总和：



$$E_p = \sum E_{p_i} = \sum \Delta m_i \, g h_i = g \sum \Delta m_i \, h_i$$

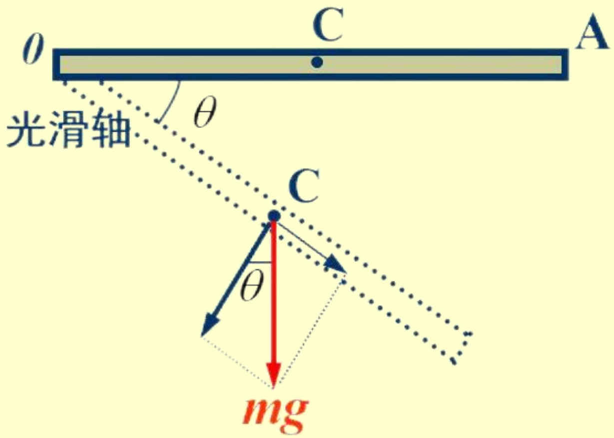
刚体质心的高度：$h_c = \dfrac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$

刚体的重力势能: $\boxed{E_P = mgh_c}$

刚体势能的计算:把刚体的质量看成集中于质心,计算质心势能即可.

刚体力学——刚体的动能与势能

例3.7 如图，均匀细直棒可以绕光滑固定轴O转动。求棒从水平位置由静止状态下摆至 θ角时的角加速度和角速度。



解：当棒摆到如图所示位置时，重力矩 $M = mg\dfrac{L}{2}\cos\theta$

由转动定理得到角加速度：

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{mg\frac{L}{2}\cos\theta}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2L}$$

重力矩做的功：

$$A = \int M\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\theta mg\frac{L}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}mL^2}$$

转动动能定理：

$$A = \Delta E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2$$

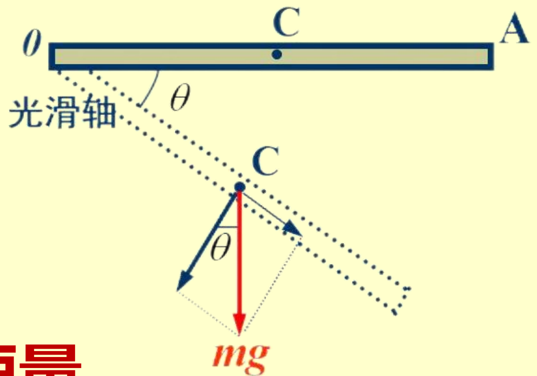
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{L}}}$$

四、刚体系统的功能原理

$$A_{外力}+A_{非保守内力}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$$

机械能守恒定律

若$A_{外力}+A_{非保守内力}=0$，或只有保守力做功，则系统的机械能守恒。



平动动能+转动动能+重力势能+弹性势能=恒量

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I\omega^2+mgy_c+\frac{1}{2}kx^2=\text{恒量}}$$

尝试用机械能守恒定律求解例3.7。

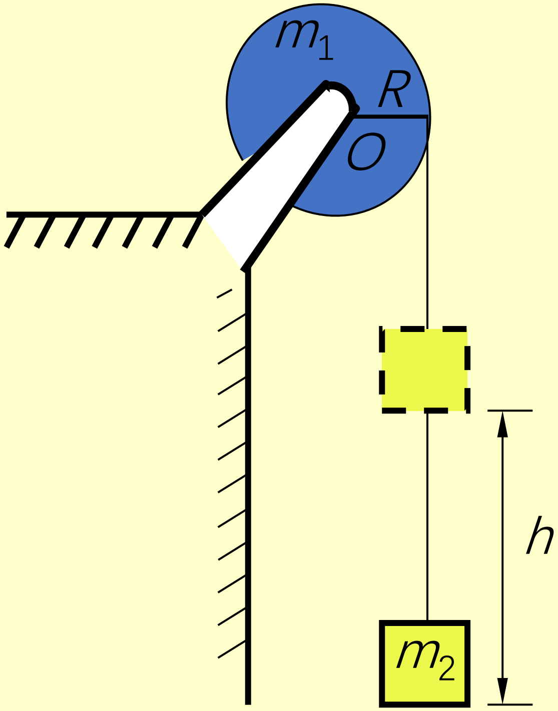
例3.8 质量m_1，半径为R 的定滑轮（当作均质圆盘）上绕一轻绳，绳的一端固定在滑轮上，另一端挂一质量为m_2的物体而下垂，如图所示。忽略轴处摩擦，求物体m_2由静止下落h高度时的速度。

解：将滑轮、物体、绳和地球视为一个系统，根据机械能守恒定律

$$m_2gh=\frac{1}{2}m_2\upsilon^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I=\frac{1}{2}m_1R^2 \qquad \upsilon=R\omega$$

$$\upsilon=2\sqrt{\frac{m_2gh}{m_1+2m_2}}$$



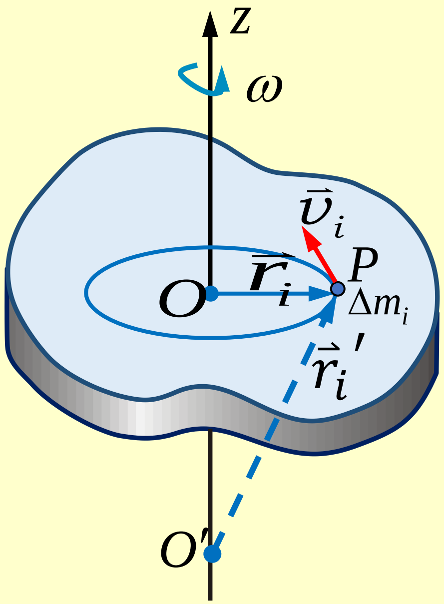
刚体力学——刚体转动的角动量及角动量守恒定律

一、刚体转动的角动量定理

刚体对z轴的角动量:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum_i \Delta m_i r_i^{\ 2})\omega = I_z \omega$$

刚体对定轴角动量(略去小标z): $L = I\omega$



刚体转动定律 $$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

考虑力矩对时间的累积 $$\boxed{\int_{t_0}^{t} M\,\mathrm{d}t} = I\omega - I_0\omega_0$$

冲量矩

刚体角动量定理：在一段时间内，相对于同一转轴的合外力矩的冲量矩等于在这段时间内刚体角动量的增量。

物理含义：合外力矩的时间累积效应是使刚体角动量发生变化。

二、角动量守恒定律

刚体角动量定理

$$\int_{t_0}^{t} M\,\mathrm{d}t = I\omega - I_0\omega_0$$

如果刚体所受的合外力矩为零，即： $M = 0$

则有： $L = I\omega =$恒量

刚体定轴转动的角动量守恒定律——当刚体相对于固定转轴所受的合外力矩等于零时，刚体相对于同一转轴的角动量保持不变。

刚体力学——刚体转动的角动量及角动量守恒定律

刚体角动量守恒定律的几点说明：

（1）刚体定轴转动，转动惯量I 不变，即：

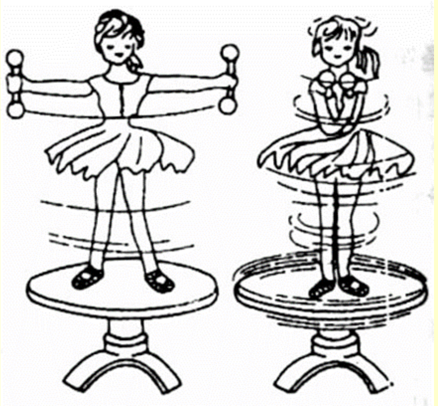
$$I\omega = I\omega_0 \qquad \omega = \text{恒量}$$

（2）定轴转动系统由多个刚体组成，则：

$$\sum_i I_i \vec{\omega}_i = \text{恒量}$$

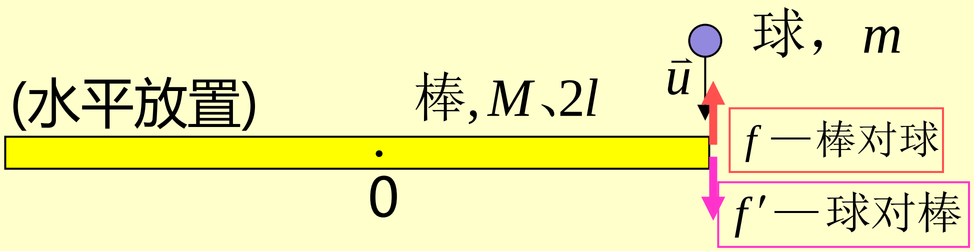
（3）物体绕定轴转动时，如果物体上的质元相对于转轴的距离可变，即物体转动惯量可以改变，此时：

$$I\omega = I_0\omega_0 \qquad (I = \sum_i \Delta m_i r_i^2)$$



刚体力学——刚体转动的角动量及角动量守恒定律

•例3.10 一根质量为 M ，长为2l 的均匀细棒，可以在竖直平面内绕通过其中点的水平轴O转动。开始时细棒在水平位置，如图所示。一质量为 m的小球与细棒的一端作完全弹性碰撞。求碰撞后小球的回跳速度以及棒的角速度各等于多少？ (小球与棒碰撞前瞬间的速度为u)



解: 小球：动量定理 (向上为正):

$$\int f\,\mathrm{d}t = mv - (-mu) = m(v+u) \quad --(1)$$

(式中：f —棒对球)

$$f = f'$$

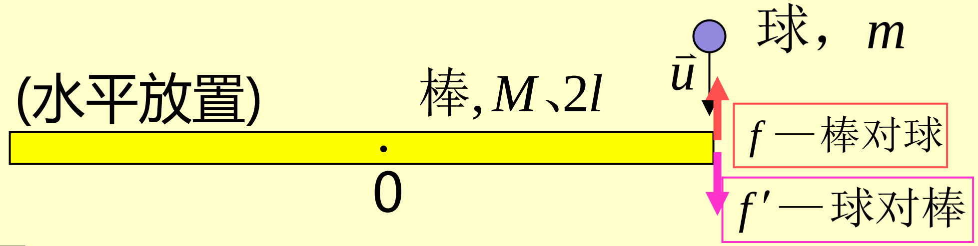
(式中：f' —球对棒)

细棒：角动量定理 (方向以⊗为正):

$$\int M\,\mathrm{d}t = \int lf'\,\mathrm{d}t$$

$$= I_0\omega \qquad --(2)$$

刚体力学——刚体转动的角动量及角动量守恒定律



联立方程(1)和(2)得：

$$lm(v+u) = I_0\omega \qquad --(3)$$

球和棒系统，弹性碰撞，动能守恒：

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \quad ——(4) \qquad \left(I_0 = \frac{1}{12}M(2l)^2 = \frac{1}{3}Ml^2\right)$$

联立方程(3)和(4)可求出：$v, \omega \quad \rightarrow v = \dfrac{u(M-3m)}{M+3m} \qquad \omega = \dfrac{6mu}{(M+3m)l}$

另解:棒球系统,碰撞过程角动量守恒.

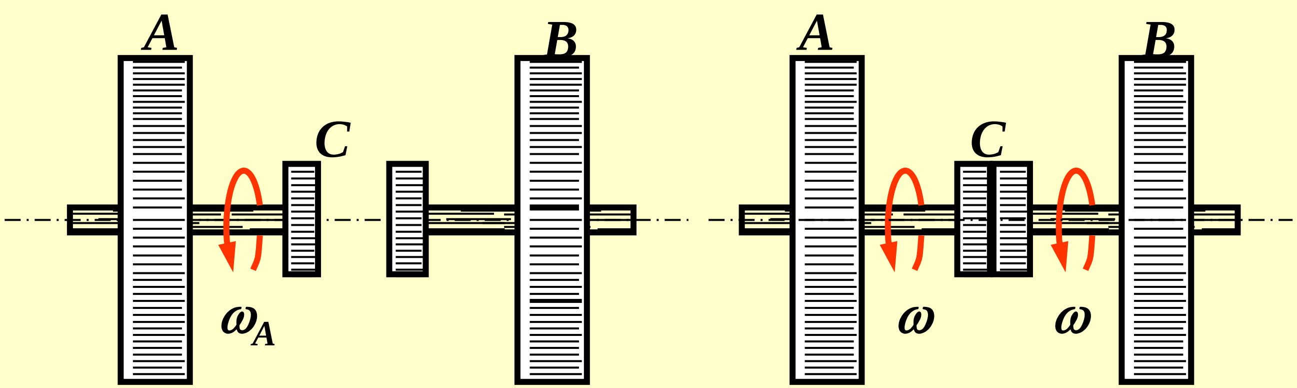
$$mlu = I_0\omega - mlv \quad \rightarrow \quad lm(v+u) = I_0\omega——— (3)$$

$$v = \frac{u(M-3m)}{M+3m} \qquad \omega = \frac{6mu}{(M+3m)l}$$

自主学习教材P69&70: 例3.9，例3.11

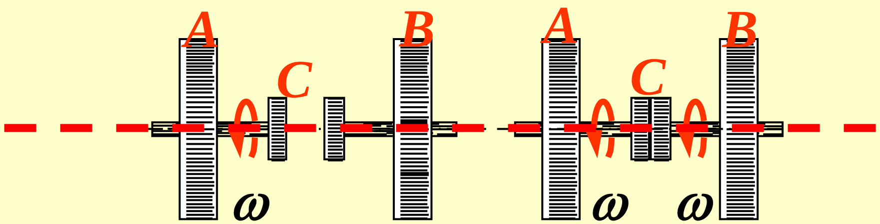
刚体力学——刚体转动的角动量及角动量守恒定律

补充例题：工程上，两飞轮常用摩擦啮合器使它们以相同的转速一起转动。如图所示，*A*和*B* 两飞轮的轴杆在同一中心线上，A轮的转动惯量为I_A=10kg·m²，B的转动惯量为I_B=20kg·m² 。开始时A轮的转速为600r/min，B轮静止。C为摩擦啮合器。求两轮啮合后的转速；在啮合过程中，两轮的机械能有何变化?



解：以飞轮A、B和啮合器C作为一系统来考虑，在啮合过程中，系统受到轴向的正压力和啮合器间的切向摩擦力，前者对转轴的力矩为零，后者对转轴有力矩，但为系统的内力矩。系统没有受到其他外力矩，所以系统的角动量守恒。按角动量守恒定律可得

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$



ω为两轮啮合后共同转动的角速度

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

以各量的数值代入得 $\omega = 20.9\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

或共同转速为 $n = 200r\cdot\min^{-1}$ $(\omega = 2\pi n)$

在啮合过程中，摩擦力矩作功，所以机械能不守恒，部分机械能将转化为热量，损失的机械能为

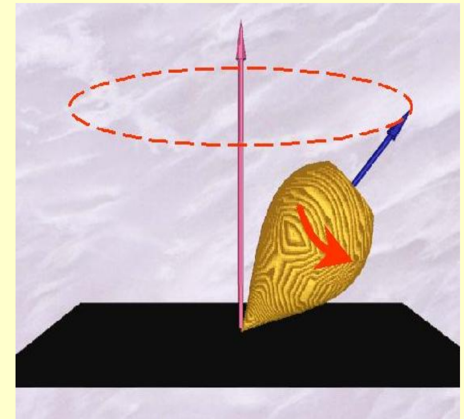
$$\Delta E = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 - \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2 = 1.32\times 10^4 J$$

平动与转动的对应关系

线　量		角　量	
位置矢量	$\vec{r}$	角 位 置	θ
位　　移	$\mathrm{d}\vec{r}$	角 位 移	$\mathrm{d}\theta$
速　　度	$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	角 速 度	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加 速 度	$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角加速度	$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
	$v=v_0+at$		$\omega=\omega_0+\beta t$
	$S-S_0=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$		$\theta-\theta_0=\omega_0t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$
	$v^2-v_0^2=2a(S-S_0)$		$\omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)$
质　　量	m	转动惯量	I
力	$\vec{F}$	力　　矩	M
牛顿定律	$\vec{F}=m\vec{a}=d\vec{p}/dt$	转动定律	$\vec{M}=I\vec{\beta}=d\vec{L}/dt$
动　　量	$\vec{p}=m\vec{v}$	角动量	$\vec{L}=I\vec{\omega}$
动　　能	$\dfrac{1}{2}mv^2$	转动动能	$\dfrac{1}{2}I\omega^2$
力做功	$A=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}d\vec{r}$	力矩做功	$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}Md\theta$

刚体力学——进动

一、进动

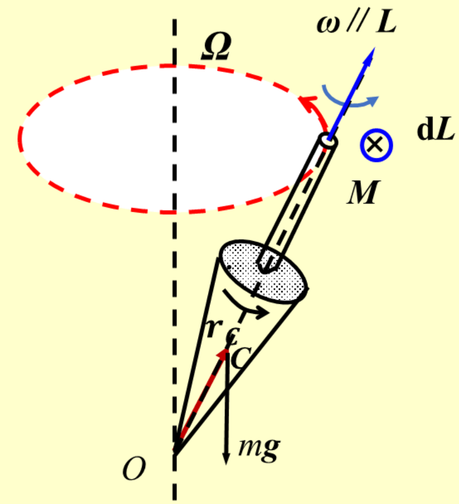


高速旋转的物体，绕自转轴旋转的刚体同时又绕图中竖直轴转动的现象称之为刚体的**进动**，**如玩具陀螺的运动。**

进动可以利用角动量定理来说明。

假设陀螺的质心C相对于O点的位矢为$\vec{r}_C$，陀螺所受的重力矩$\vec{M}$即为其所受的合外力矩：

$$\vec{M} = \vec{r}_C \times m\vec{g}$$



重力矩 $\vec{M}$ 的方向与陀螺自转的角动量 $\vec{L}$ 垂直。

因此，在重力矩租用下，陀螺角动量的大小不变，只有方向改变。

根据角动量定理：$d\vec{L} = \vec{M}\,\mathrm{d}\,t$

角动量增量的方向和重力矩的方向一致，这正是陀螺产生进动的原因。

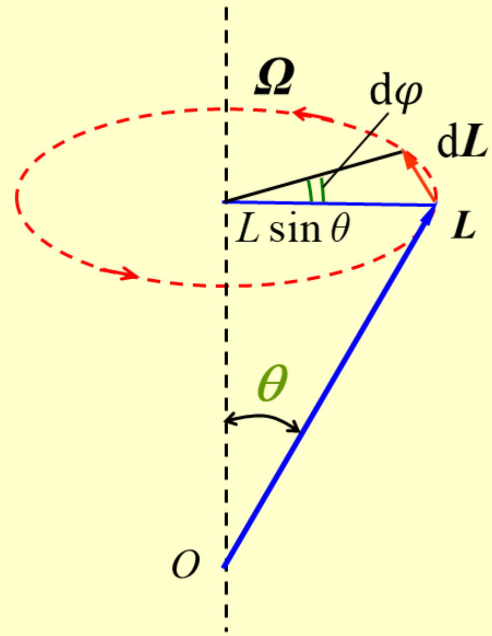
刚体力学——进动

根据角动量定理：$d\vec{L} = \vec{M}\,\mathrm{d}\,t$

$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = L\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi = M\mathrm{d}t$$

进动的角速度：$\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$

$$\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{I\omega\sin\theta}$$



当 $\theta = 90°$ 时 $\quad \Omega = \dfrac{M}{I\omega} \qquad \Omega \propto \dfrac{1}{\omega}$， $\quad \omega\uparrow \rightarrow \Omega\downarrow$

★进动角速度Ω和外力矩M成正比，和自转角动量$L = I\omega$成反比，和角度θ没有关系($M = r_c mg\sin\theta$)。

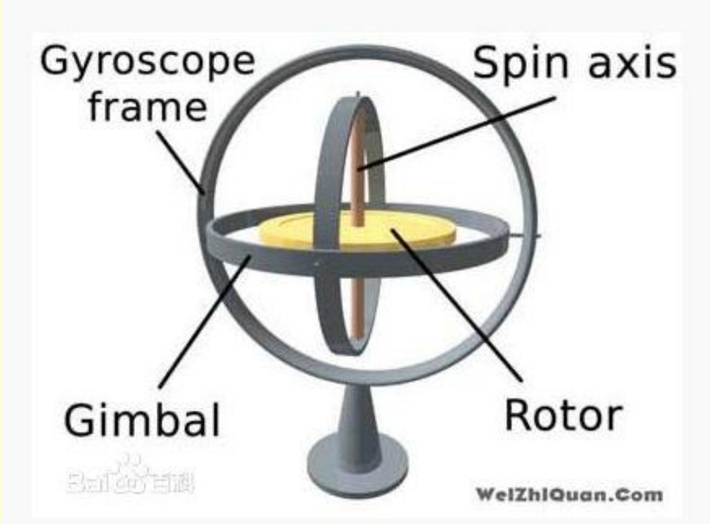
★陀螺自转角速度越大，进动越慢。

刚体力学——进动

二、陀螺仪

陀螺仪（gyroscope）（回转仪）是应用陀螺的力学特性制成的陀螺装置。

1.常平架上的陀螺仪



2. 杠杆陀螺仪

刚体力学——作业2

1. 练习册A（第3章 刚体的定轴转动）

选择：6-10；填空：7-8; 计算：5-6；研讨：2,4

2. 课件上转动惯量作业；