湖南大学理工类必修课程

大学数学AII

—— 多元元微积分学

1.6 二次曲面

- 主讲：于红香

第六节 二次曲面的标准方程

1、椭球面

2、 抛物面

3、双曲面

4、二次锥面

曲面的对称性：

1. 若 $F(x,y,z)=F(x,y,-z)$，

则曲面关于坐标面xy对称。 (其余类推)

2. 若 $F(x,y,z)=F(x,-y,-z)$，

则曲面关于坐标轴x轴对称。(其余类推)

3. 若 $F(x,y,z)=F(-x,-y,-z)$，

则曲面关于坐标原点对称。

由x, y, z的二次方程:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

所表示的曲面, 称为二次曲面.

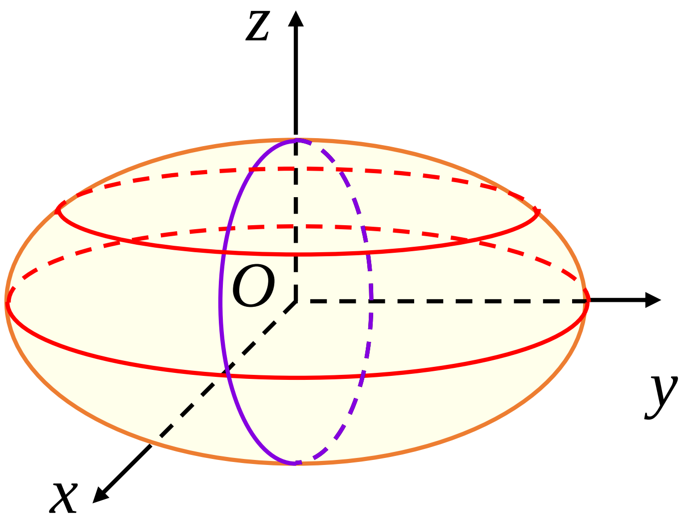
其中$a, b, \ldots, i, j$ 为常数且a, b, c, d, e, f不全为零.

研究方法是采用平面截割法:

用平行于坐标面的平面去截二次曲面,

观察截痕曲线的形状，由截痕曲线的名称命名。

(1) 椭球面

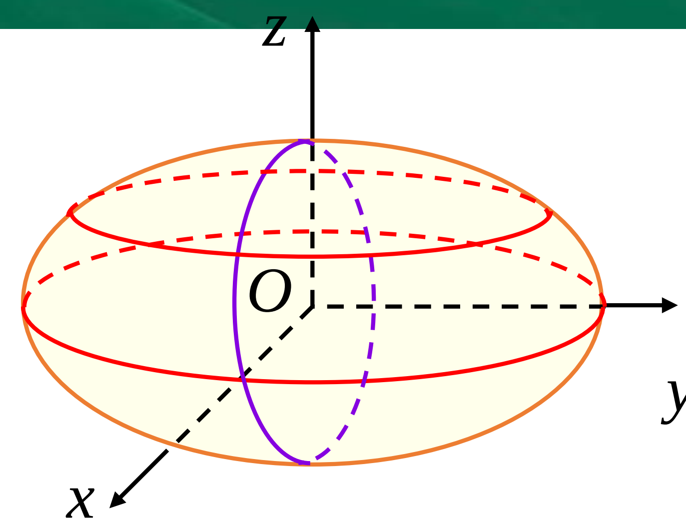


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

① 对称性：关于坐标面对称。

② 有界性 $|x|\le a,\ |y|\le b\ \ |z|\le c$

1° 用平面$z=0$去截割，得椭圆



$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

2° 用平面$z=k$去截割(要求$|k|\le c$)，得椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$$

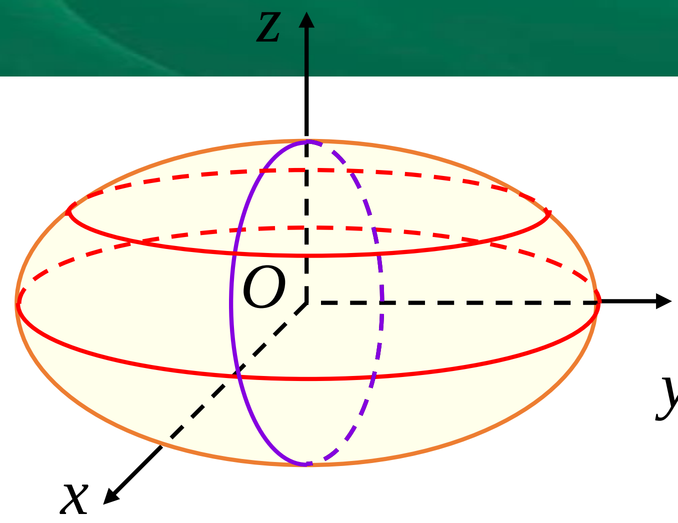
即
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}=1 \\ z=k \end{cases}$$

当$|k|\le c$时，$|k|$越大，椭圆越小；

当$|k|=c$时，椭圆退缩成点.

3° 类似地, 依次用平面 $x=0$,

平面 $y=0$ 截割, 得椭圆:



$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

椭球面的几种特殊情况：

(1) $a=b,\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 旋转椭球面

由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

方程可写为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

旋转椭球面与椭球面的区别

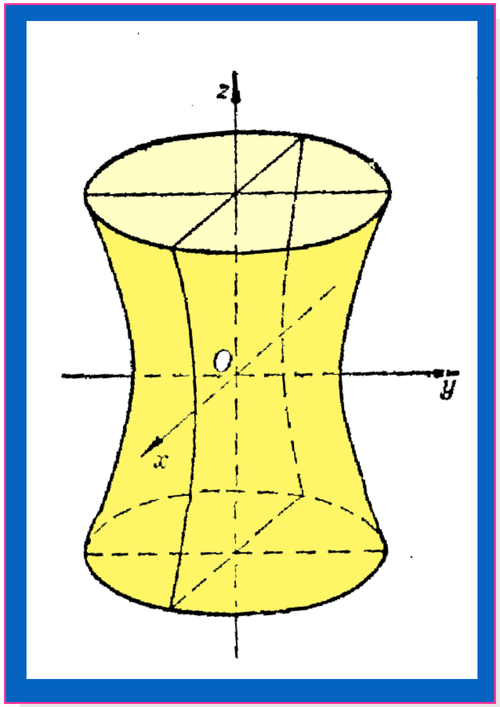
(2) $a=b=c,\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$ 球面

方程可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2.$

（2）单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$(a, b, c$均大于$0)$



以平行于 xy 面的平面 $z=z_0$ 截曲面，

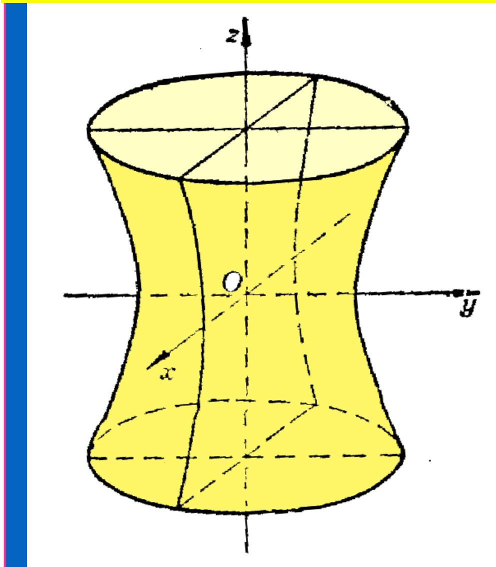
所得截线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z_0^2}{c^2}, \\ z=z_0. \end{cases} \to 椭圆$$

以平行于xz面的平面 $y=y_0$截曲面， 所得截线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_0^2}{b^2}, \\ y=y_0. \end{cases}$$ 双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



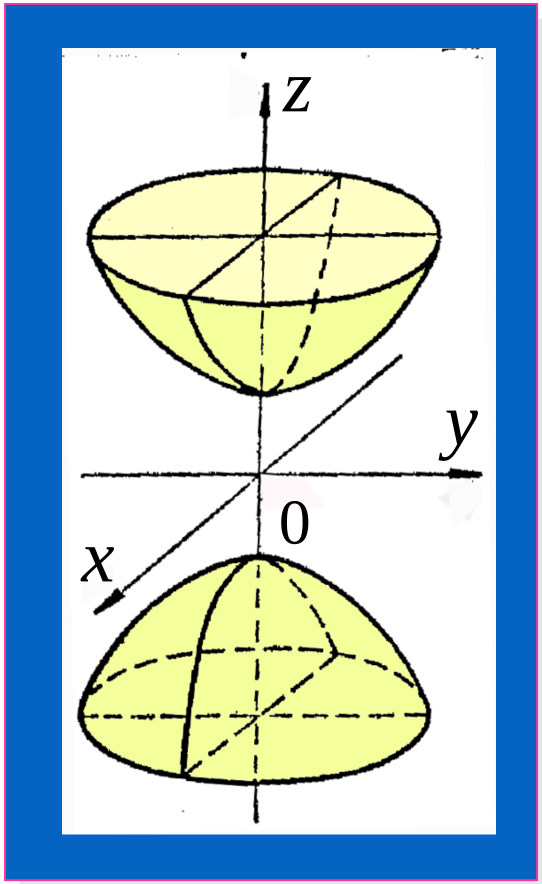
以平行于 yz 面的平面 $x=x_0$ 截曲面，所得截线方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x_0^2}{a^2}, \\ x=x_0. \end{cases}$$ 双曲线

（3）双叶双曲面

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(a, b, c均大于0)



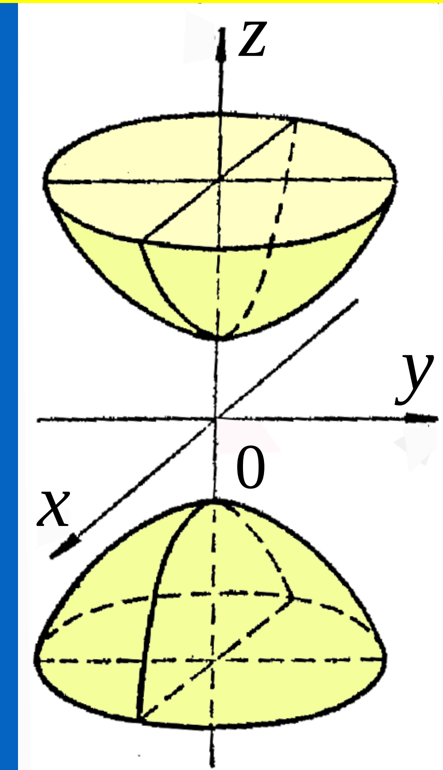
以平行于 xy 面的平面 $z=z_0$ 截曲面，所得截线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z_0^2}{c^2}-1, \\ z=z_0.\end{cases}\rightarrow \text{椭圆}$$

以平行于xz面的平面 $y=y_0$截曲面，所得截线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1+\dfrac{y_0^2}{b^2}, \\ y=y_0. \end{cases}$$ 双曲线

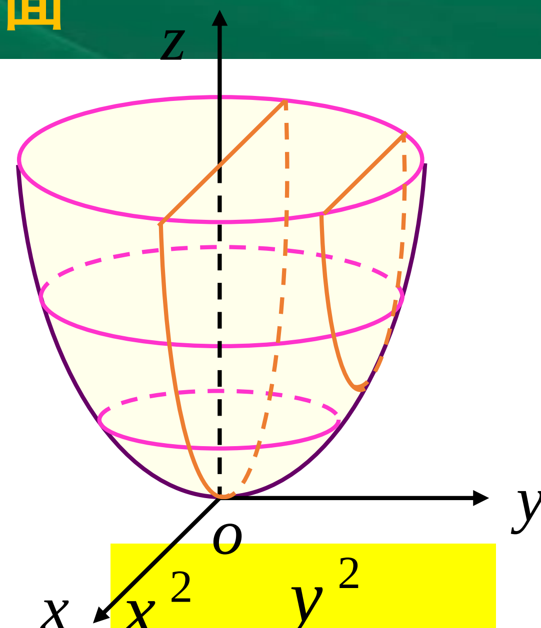
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



以平行于 yz 面的平面 $x=x_0$ 截曲面，所得截线方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{x_0^2}{a^2}, \\ x=x_0. \end{cases}$$ 双曲线

(4) **椭圆抛物面**:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

1° 平面 $z=k$,($k\geq 0$)截割, 截线是平面 $z=k$上的椭圆.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=k\\ z=k\end{cases}$$

$k=0$时, 为一点$O(0,0,0)$; 随着k增大, 椭圆也增大.

2° 用平面 $y=k$去截割, 截线是抛物线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}=z\\ y=k\end{cases},$$

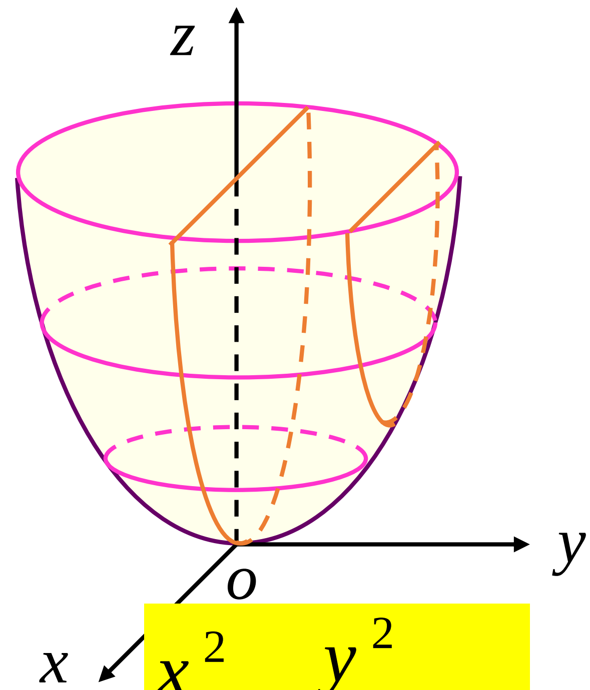
当$k=0$时, 为 $z=\dfrac{x^2}{a^2}$.

3° 类似地，用平面 $x = k$ 去截割，

截线是抛物线.

$$\begin{cases} \dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z \\ x = k \end{cases}$$

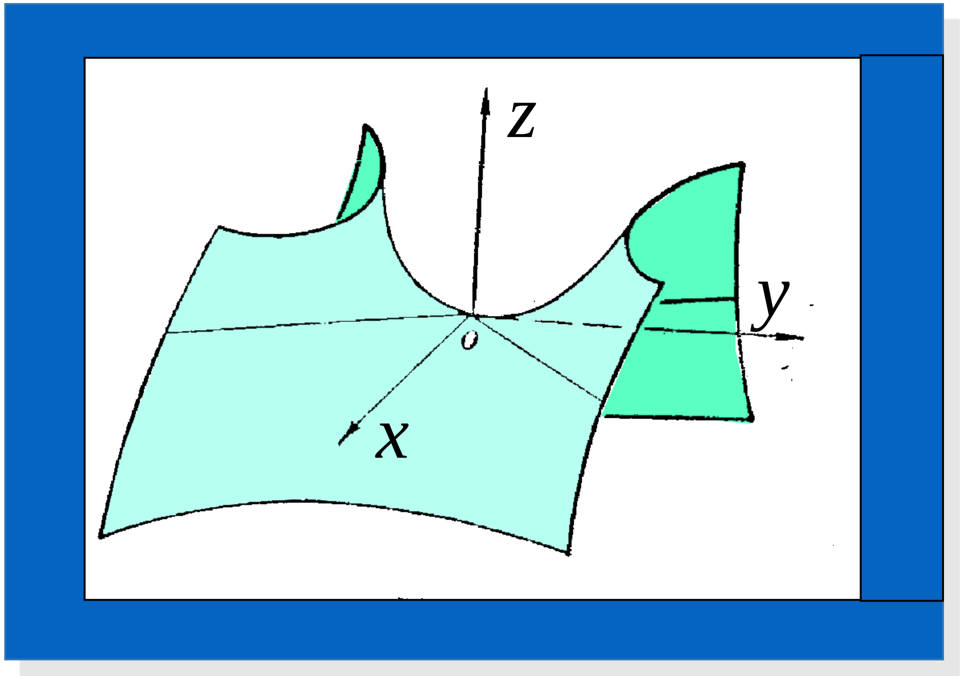
当$k = 0$时，为 $z = \dfrac{y^2}{b^2}$.

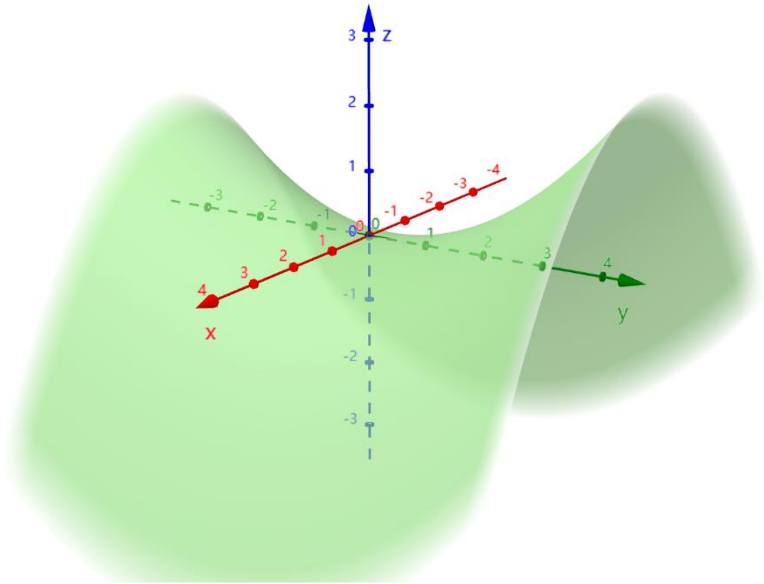


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

（5）双曲抛物面（马鞍面）

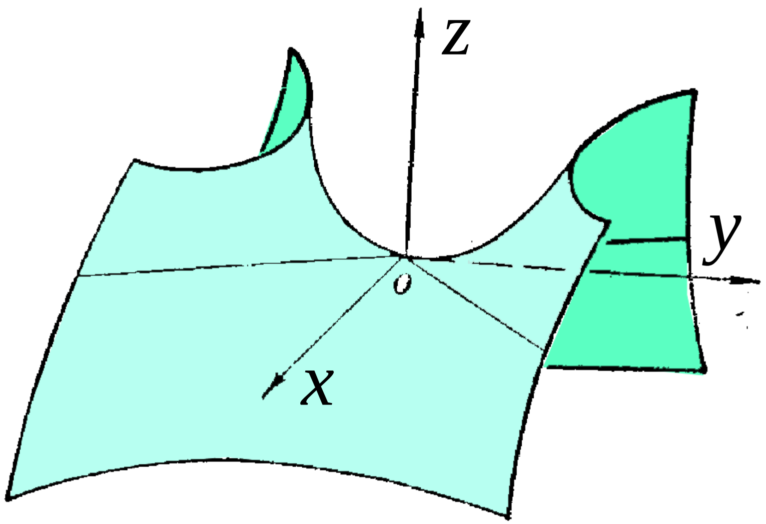
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$





① 双曲抛物面与坐标面xy交线为：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ z=0 \end{cases}$$



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

② 双曲抛物面

与坐标面xz交线为：

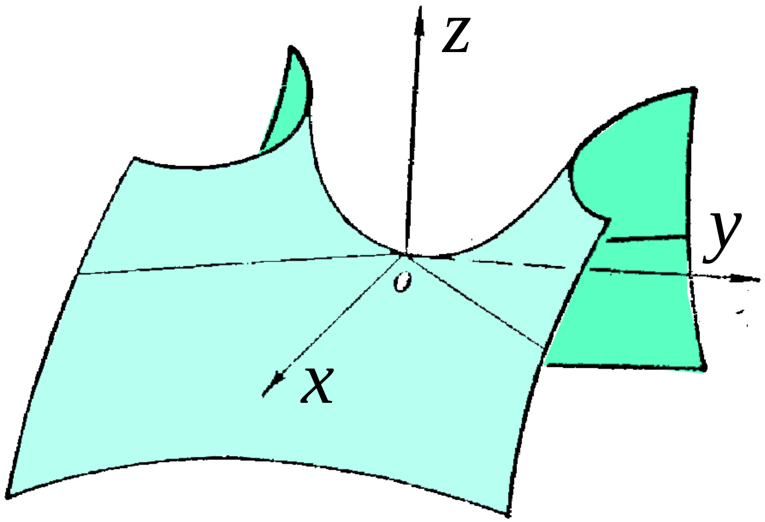
$$\begin{cases} x^2=-a^2z \\ y=0 \end{cases}$$

③ 双曲抛物面与坐标面yz交线为：

$$\begin{cases} y^2=b^2z \\ x=0 \end{cases}$$

(2)双曲抛物面与平面$z=k$的交线为：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-k \\ z=k \end{cases}$$



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

① $k<0$

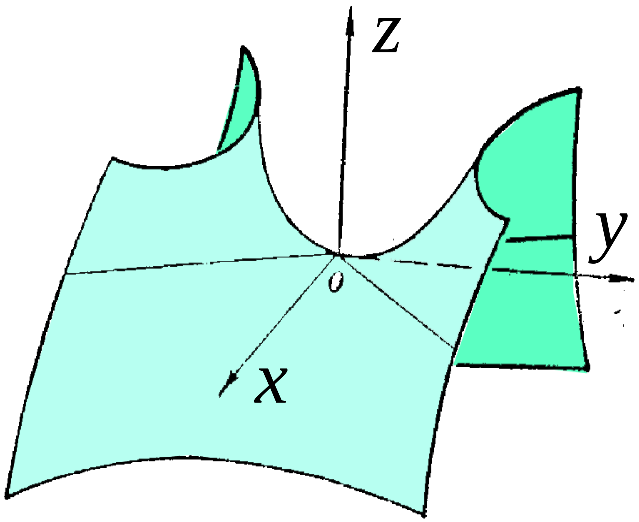
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(a\sqrt{k})^2}-\dfrac{y^2}{(b\sqrt{k})^2}=1 \\ z=k \end{cases}$$

② $k>0$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{(b\sqrt{k})^2}-\dfrac{x^2}{(a\sqrt{k})^2}=1 \\ z=k \end{cases}$$

双曲抛物面与平面$y=k$的交线为：

$$\begin{cases} x^2 = -a^2 z + (\frac{ak}{b})^2 \\ y = k \end{cases}$$



双曲抛物面与

平面$x=k$的交线为：

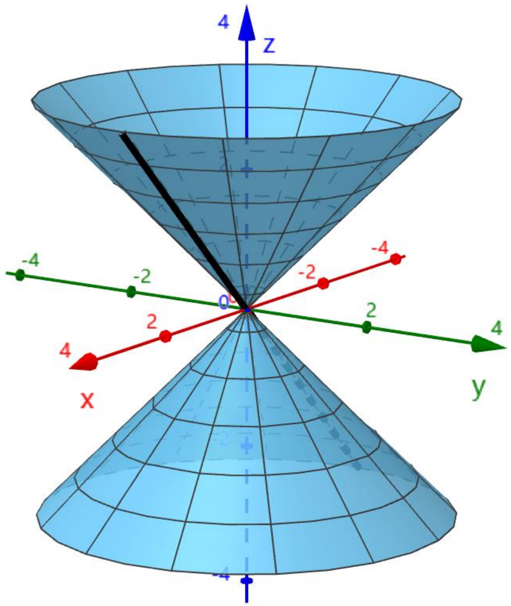
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

$$\begin{cases} y^2 = b^2 z + (\frac{bk}{a})^2 \\ x = k \end{cases}$$

（2）二次锥面

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0}$$

$(a, b, c$均大于$0)$



以平行于 xy 面的平面 $z=z_0$ 截曲面，

所得截线方程为

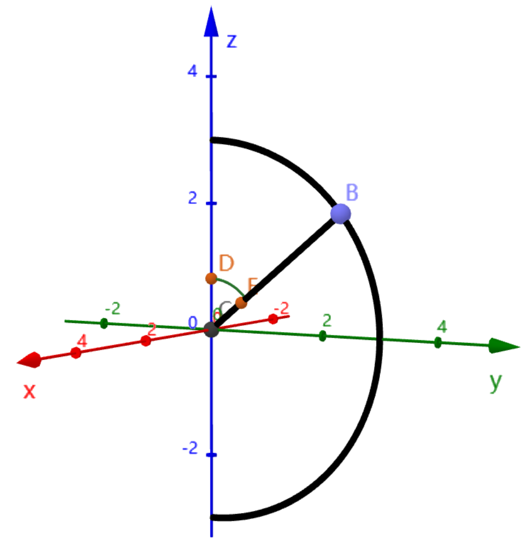
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{{z_0}^2}{c^2} \\ z=z_0. \end{cases} \rightarrow 椭圆$$

球面的形成过程可以如下描述：

1， 由一点做圆周运动形成半圆；

2， 由半圆绕直径旋转成球面。

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = r\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$