大学物理

蒋英

湖南大学物理与微电子科学学院

第2章 质点动力学

牛顿

英国著名诗人Pope为牛顿写的墓志铭:

Nature and nature's laws lay hid in night;

God said "Let Newton be" and all was light.

第2章 质点动力学

§2.1 牛顿运动定律

§2.2 动量与动量守恒定律

§2.3 功、能与机械能守恒定律

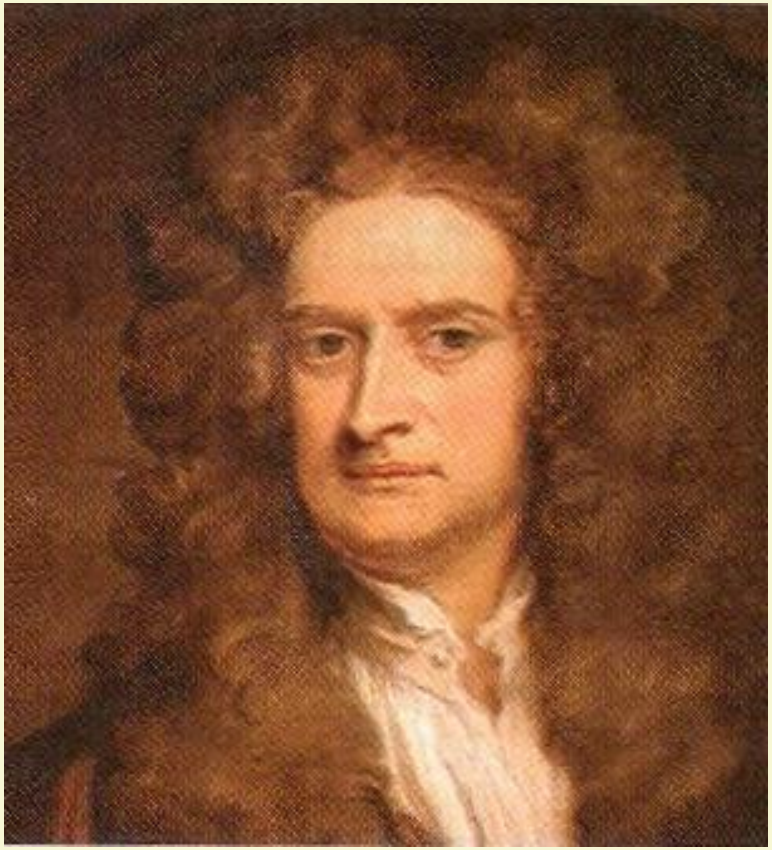
§2.4 角动量和角动量守恒定律

Isaac Newton: (1642-1727)

- 少年时代的牛顿，天资平常，但对自然现象极感兴趣，他有一种把自然现象、语言等进行分类、整理、归纳的强烈嗜好。
- 牛顿未出娘腹，父亲便去世，在舅舅和外祖母的抚养下长大，从小体弱多病。
- 1661年6月，他以“减费生”身份考入剑桥大学三一学院。
- 1665年，由于大瘟疫，学校放假，牛顿回到老家沃尔斯索普村。
- 1667年，瘟疫刚消失，牛顿便重返校园，翌年获硕士学位。
- 1665-1667年，他从苹果落地而得出万有引力定律。

- 1688年，万有引力的巨著《自然哲学的数学原理》问世。牛顿在此书中建立了一个完备自洽的物理学体系。
- 1727年3月20日，牛顿病逝，享年84岁。

Isaac Newton: (1642-1727)



牛顿：杰出的英国物理学家，经典物理学的奠基人。他的不朽巨著《自然哲学的数学原理》总结了前人和自己关于力学以及微积分学方面的研究成果，其中含有三条牛顿运动定律和万有引力定律，以及质量、动量、力和加速度等概念。在光学方面，他说明了色散的起因，发现了色差及牛顿环，他还提出了光的微粒说。

质点动力学——牛顿运动定律

牛顿运动定律是动力学的基本定律，它揭示了物体间的相互作用规律以及相互作用（力）对物体运动的影响。

1. 牛顿第一定律（惯性定律）

物体总是要保持静止或匀速直线运动的状态，直到受到力的作用迫使它改变这种状态为止。

(1) 力(force)：力产生的效果有两个：加速度和形变。

★一个物体受到力的作用时，必定存在施力者；

★力是物体运动状态改变的原因，而不是维持物体运动的原因。

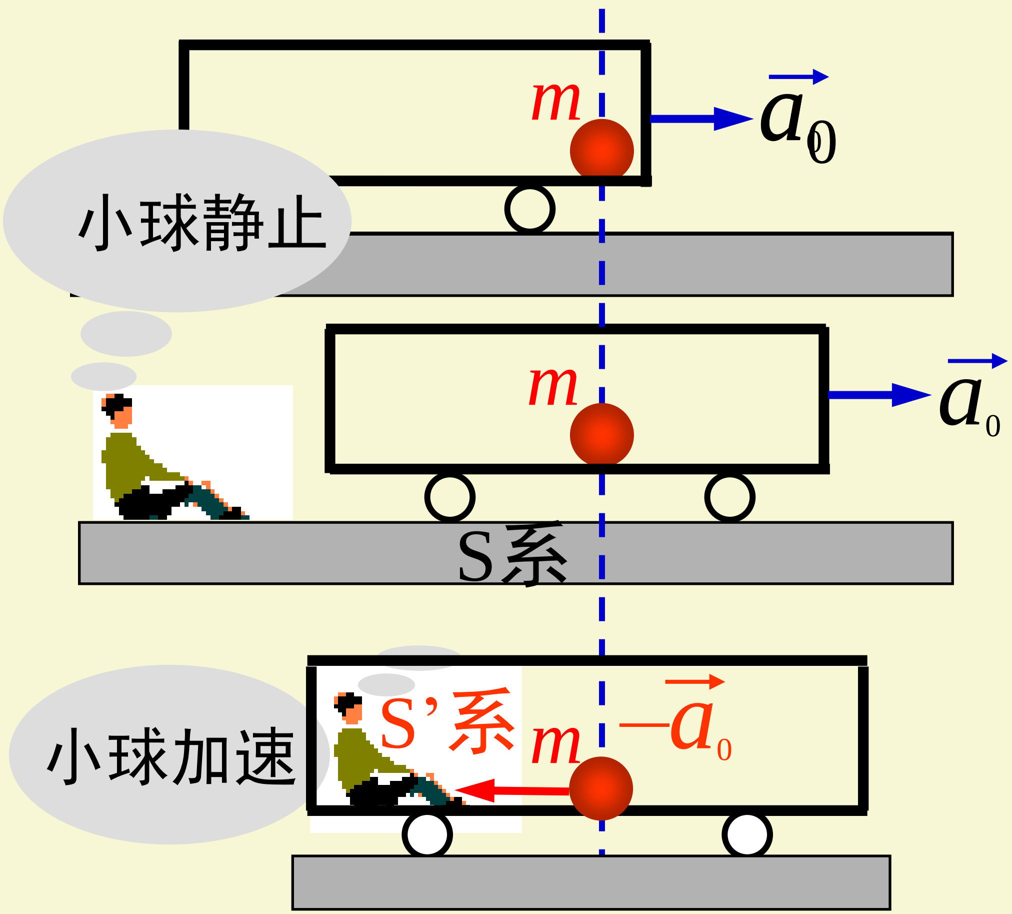
(2) 惯性(inertia)：牛顿第一定律也称为惯性定律。

★物体保持自身原有运动状态不变的性质称为惯性；

★任何物体都有惯性，它是物体的基本属性。

质点动力学——牛顿运动定律

★**惯性系**：牛顿第一定律并不是在所有的参考系中都成立，只有在某种特殊参考系中，不受外力作用的物体才能保持静止或做匀速直线运动，这样的参考系称为惯性系(inertial frame)。



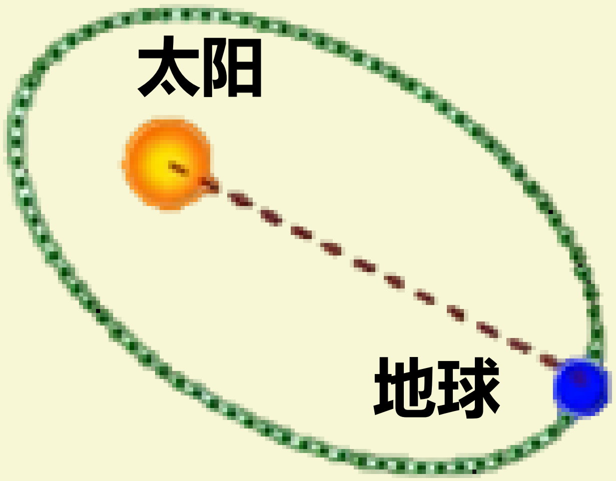
一列相对于地面以加速度$\vec{a}_0$做直线运动的车厢内，有一质量为m的小球放在光滑的桌面上：

- 以地面为参考系，小球水平方向不受力，小球保持静止状态。
- 牛顿第一定律成立，地面参考系为惯性系。

- 以车厢为参考系，小球在水平方向不受任何外力，却以加速度$-\vec{a}_0$相对于车厢运动。
- 牛顿第一定律并不成立，车厢参考系不是惯性系。

质点动力学——牛顿运动定律

★**惯性系**：相对于某惯性参考系做匀速直线运动的参考系仍是惯性系。



判断一个实际的参考系是不是惯性系，只能根据实验观察，实验表明：

- ◆太阳参考系是一个很好的惯性系。
- ◆地球参考系不是严格的惯性系：因为地球绕日公转，说明地球相对于太阳有加速度。
- ◆由于地球相对于太阳的加速度很小，地球参考系可近似地看成惯性系。

★**非惯性系**：相对于惯性参考系做加速运动的参考系不再是惯性参考系，它们被称为非惯性系。

质点动力学——牛顿运动定律

2. 牛顿第二定律（只对惯性系成立）

物体运动的加速度与其所受合外力的大小成正比，与物体的质量成反比，加速度的方向与合外力的方向相同。

数学表达式一： $\vec{F} = m\vec{a}$

相同合外力作用下，质量越大的物体，获得的加速度越小——表明物体的运动状态越不容易改变，即物体具有较大的惯性，反之，则惯性越小——**质量是物体惯性大小的量度(惯性质量)**。

数学表达式二： $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ **——微分形式**

动量： $\vec{P} = m\vec{v}$ ——动量是描述质点运动状态的物理量

——动量是比速度、加速度更基本的物理量(微观)

★当物体运动速度接近光速时，质量显著随速度变化， $\vec{F} = m\vec{a}$ 不再成立。

★**微分形式是基本的普遍形式，适用于高速运动情况与变质量问题。**

质点动力学——牛顿运动定律

2. 牛顿第二定律

应用牛顿第二定律时应注意以下几点:

(1) 力$\vec{F}$是物体所受的合外力。当物体同时受几个力$\vec{F}_1,\vec{F}_2,\ldots\vec{F}_n$作用时，合外力 $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=m\vec{a}$

(2) 牛顿第二定律的数学式是矢量式，实际常采用其分量式。在直角坐标系和曲线坐标系下的分量式分别为(质量不变条件下):

直角坐标系

$$F_x=\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=ma_x$$

$$F_y=\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=ma_y$$

$$F_z=\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=ma_z$$

曲线坐标系(自然坐标系)

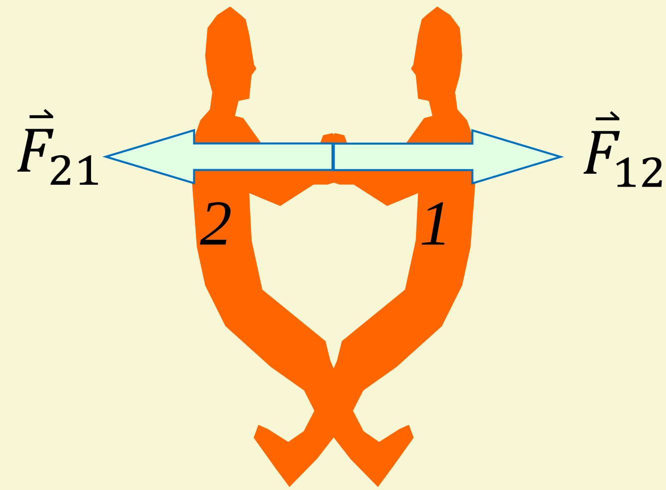
法向: $F_n=ma_n=m\frac{v^2}{\rho}$

切向: $F_\tau=ma_\tau=m\frac{dv}{dt}$

圆周运动: $\rho=R$

质点动力学——牛顿运动定律

3. 牛顿第三定律



两物体间的作用力和反作用力大小相等，方向相反，沿同一直线，分别作用在两个不同的物体上。

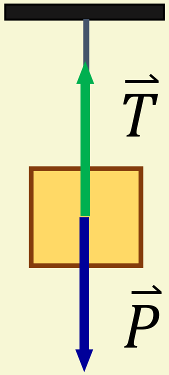
牛顿第三定律的数学表达式: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

牛顿第三定律指出:

(1) 作用力与反作用力成对出现，同生同灭。

(2) 作用力与反作用分别作用于两个不同的物体，各产生其效果，不能相互抵消。

(3) 作用力与反作用力是同一属性的力。



思考：物体受到绳的拉力和受到的重力是否是作用力与反作用力?

牛顿运动定律是经典力学的支柱，但只适用于研究惯性系中做低速(远小于光速)运动的宏观物体。

质点动力学——牛顿运动定律

4. 常见力与基本力

(1) 万有引力和重力

万有引力定律：任意两个物体之间都有引力作用。引力的大小F与它们的质量成正比，与两者间距离的平方成反比。(引力质量)

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$ 引力常数：$G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

重力(gravity)：地球表面附近的物体受地球的引力作用。

$\vec{P} = m\vec{g}$ 重力加速度常数：$g = \mathrm{G}\frac{M}{r^2} \approx 9.8 \cdot m \cdot s^{-2}$ (北纬45°)

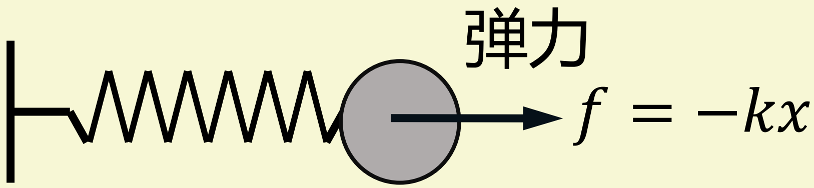
重力加速度的大小会随着地理位置的不同而有所变化(地球自转)。

质点动力学——牛顿运动定律

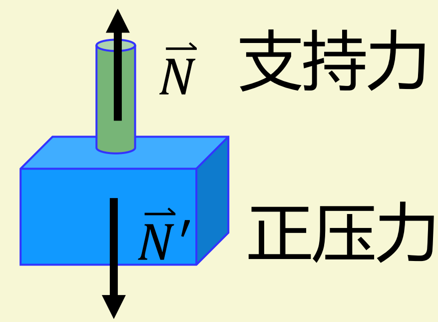
(2) 弹力(elastic force)：发生形变的物体,由于要恢复原状,对与它接触的物体产生的作用力。

弹力的三种形式:

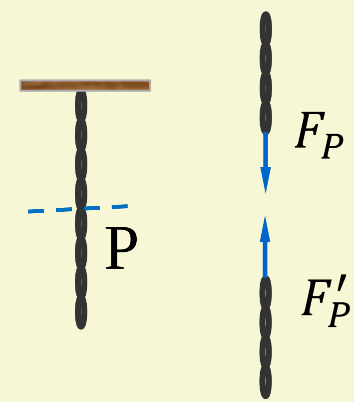
弹簧的弹力:



正压力或支持力: 物体通过一定面积相接触而产生的相互作用力。



拉力和张力: 拉力是绳或线对物体的作用力;
张力是绳子内部各段之间的作用力。



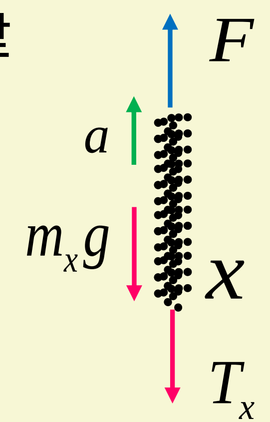
质点动力学——牛顿运动定律

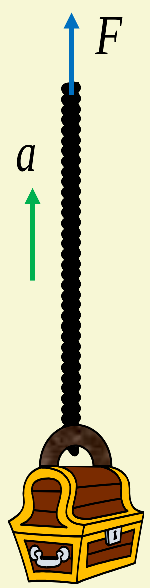
拉紧的绳中任一截面两侧的两部分之间的相互作用力称为该截面处的张力。

例2.1：如图，质量均匀分布的粗绳拉重物，已知：$F = 150\text{N}$，$a = 0.2\text{m/s}^2$，$l = 4\text{m}$，粗绳的质量为$m = 2\text{kg}$. 求：距顶端为x米处绳中的张力。

解：从顶端向下取 x 米绳，由牛顿第二定律

$$\left.\begin{aligned} & F - T_x - m_x g = m_x a \\ & m_x = \frac{m}{l}x \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_x = F - \frac{x}{l}m(g+a)$$





若 $x = \dfrac{l}{2}$ $\quad T_{x=\frac{l}{2}} = F - \dfrac{m(g+a)}{2} \cong 140\ \text{N}$

若绳的质量忽略，则张力等于外力 $T = F$

质点动力学——牛顿运动定律

(3) 摩擦力

静摩擦力： 两个相互接触的物体虽未发生相对运动，但沿着接触面有相对运动的趋势时，在接触面之间会产生一对阻碍相对运动趋势的力，这种力称为静摩擦力。

最大静摩擦力： 静摩擦力的大小与方向随着外力的变化而变化，当外力增大到一定程度时，物体开始滑动时的静摩擦力。

$f_{smax} = \mu_s N$　　μ_s：静摩擦系数；N: 两物体间的压力

思考：静摩擦力并非总是阻碍物体的运动，举例说明。

滑动摩擦力： 当两个相互接触的物体沿接触面发生相对滑动时，在接触面之间会产生一种阻碍相对运动的力，称为滑动摩擦力。

$f_k = \mu_k N$　　μ_k：滑动摩擦系数

质点动力学——牛顿运动定律的应用

质点动力学的基本问题：

1. 已知质点的运动，求作用于质点的力。
2. 已知作用于质点的力，求质点的运动。

要求：能熟练解决质点动力学的两类基本问题 （重点）

解题方法：

- 隔离体法：将所研究的对象跟周围的物体隔开，原来物体间的相互作用，用力来代替，称隔离体法。这是力学中解题最基本的方法。
- 受力分析：重力、弹力、摩擦力等 （难点）

(1) 已知质点的运动，求作用于质点的力。

例2.2：一质点质量为$m = 2\text{kg}$，作直线运动，运动方程$x = 10t^2 + 2t + 1$（SI）求质点所受的合外力。

解：
$$\because a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 20(\mathrm{m/s^2})$$

$$\therefore F = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 40(\mathrm{N})$$

例2.3：一质点质量m，运动方程$\vec{r}=R\cos\omega t\vec{i}+R\sin\omega t\vec{j}$，求作用于质点的合外力。

解：$\because x=R\cos\omega t, y=R\sin\omega t$

$$\therefore a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-R\omega^2\cos\omega t,\quad a_y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-R\omega^2\sin\omega t$$

$$F_x=ma_x=-mR\omega^2\cos\omega t$$

$$F_y=ma_y=-mR\omega^2\sin\omega t$$

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}=-m\omega^2(R\cos\omega t\vec{i}+R\sin\omega t\vec{j})=-m\omega^2\vec{r}$$

自主学习教材P25：例2.1

(2) 已知作用于质点的力，求质点的运动。

a. 选择好坐标系；
b. 根据$F = mdv/dt$ 的分量形式建立运动微分方程式；
c. 对微分方程求解，得到运动方程。

例2.4：一质点m =1kg，直线运动，受力f =2t，设$t = 0$ 时，$x_0 = 0$，v_0=1m/s，求质点的运动方程。

解：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{f}{m} = 2t \quad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 2t \quad \Rightarrow dv = 2t\,dt \quad \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t 2t\,dt$$

$$v - v_0 = t^2 \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 + t^2 \quad \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t + t^2\,\mathrm{d}t$$

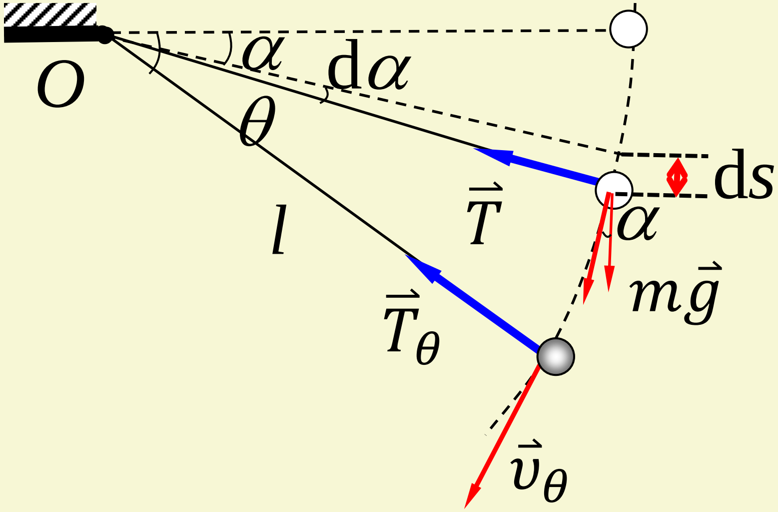
$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t \mathrm{d}t + \int_0^t t^2\,\mathrm{d}t, x - x_0 = t + \frac{t^3}{3}, x = t + \frac{t^3}{3}.$$

质点动力学——牛顿运动定律的应用

例2.5：一个质量为m的的小珠子被细线的一段系住，细线的另一端被钉子固定在签上，细线长度为l。先拉住珠子使细线保持水平静止，然后松手让珠子下落。求细线下摆至于水平方向夹角为θ时的速率和线中的张力。

解：珠子受力如图所示，设珠子在某时刻与水平方向的夹角为α，根据牛顿第二定律，切线方向所受合力为：

$$mg\cos\alpha = ma_{\tau} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

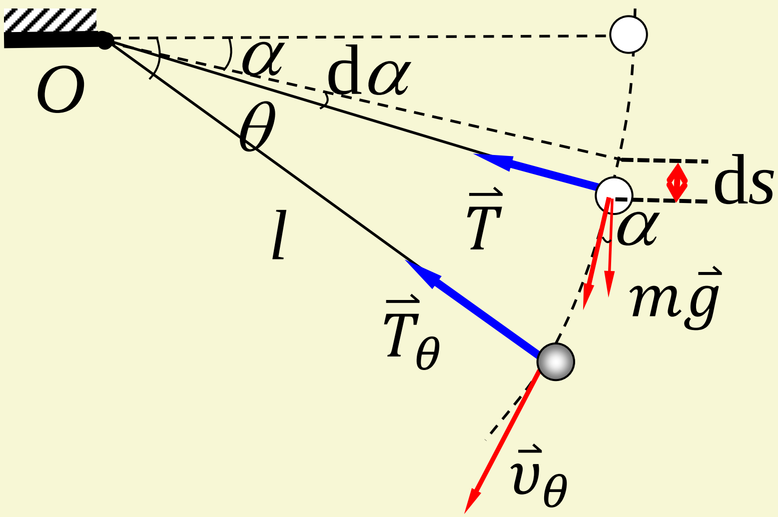


上式两边同乘ds：

$$mg\cos\alpha\,\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = m\mathrm{d}v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

质点动力学——牛顿运动定律的应用

$$mg\cos\alpha \mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = m\mathrm{d}\upsilon\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$



$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}s &= l\mathrm{d}\alpha \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \upsilon\end{aligned}\right\} \Rightarrow gl\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = \upsilon\mathrm{d}\upsilon$$

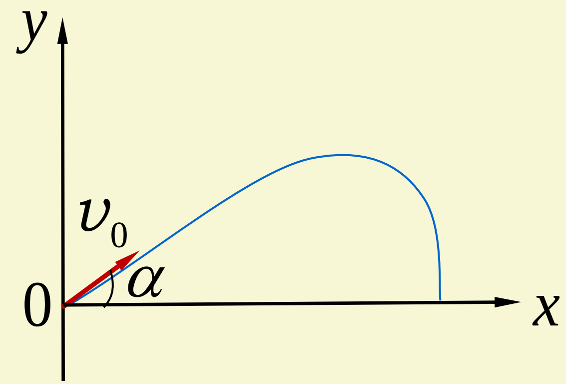
$$\Rightarrow \int_0^\theta gl\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\upsilon_\theta}\upsilon\mathrm{d}\upsilon$$

$$\Rightarrow gl\sin\theta = \frac{1}{2}\upsilon_\theta^2 \Rightarrow \upsilon_\theta = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

在法向上，珠子的受力情况为：

$$T_\theta - mg\sin\theta = ma_n = m\frac{\upsilon_\theta^2}{l} \Rightarrow T_\theta = 3mg\sin\theta$$

例2.6：一个质量为m的的炮弹，以初速度v_0 沿与水平面成α 角的方向抛出，假设它受到的空气阻力为$\vec{F}_R = -km\vec{v}$ ，求此炮弹的弹道轨迹。



解：此题中，炮弹分别受到空气阻力与竖直方向的重力作用，根据牛顿第二定律，其受力方程为：

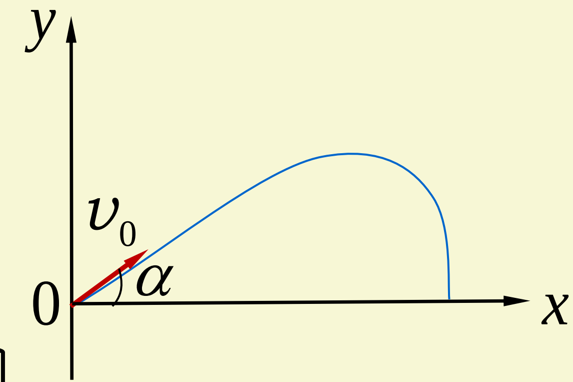
$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -kmv_x \\ v_{0x} &= v_0\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \int_{v_0\cos\alpha}^{v_x}\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -k\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow v_x = v_0 e^{-kt}\cos\alpha$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad x = \int_0^t v_x\mathrm{d}t = \frac{v_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt})$$

质点动力学——牛顿运动定律的应用

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} &= -km\upsilon_y - mg \\ \upsilon_{0y} &= \upsilon_0\sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{\upsilon_0\sin\alpha}^{\upsilon_y}\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{g+k\upsilon_y} = -\int_0^t \mathrm{d}t$$



$$\Rightarrow \upsilon_y = \frac{1}{k}[(g+k\upsilon_0\sin\alpha)e^{-kt} - g]$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow y &= \int_0^t \upsilon_y \mathrm{d}t = \frac{g+k\upsilon_0\sin\alpha}{k^2}(1-e^{-kt}) - \frac{g}{k}t \\ x &= \int_0^t \upsilon_x \mathrm{d}t = \frac{\upsilon_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt}) \end{aligned}\right\}$$

物体运动的轨迹方程为:

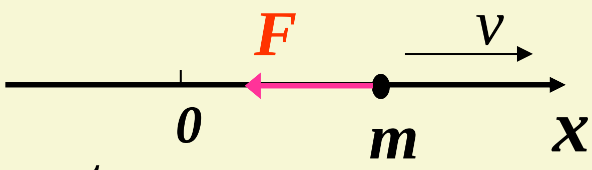
$$y = (\frac{g}{k} + \upsilon_0\sin\alpha)\frac{x}{\upsilon_0\cos\alpha} + \frac{g}{k^2}\ln(1 - \frac{kx}{\upsilon_0\cos\alpha})$$

质点动力学——牛顿运动定律的应用

课后作业：质量为m 的物体，从原点以初速度v_0沿水平方向向右运动，所受到的阻力与速度v成正比，求物体的运动方程。

解： 阻力沿x轴负方向，表示为：

$F = -kv$， k为常数。



$$m\frac{dv}{dt} = -kv, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt, \quad \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{k}{m}dt,$$

当$t = 0$时，$v = v_0$ $\quad ln\frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m}t, \quad \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$

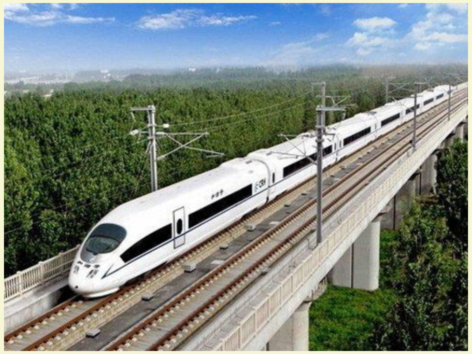
将 $v = \frac{dx}{dt}$ 代入上式，得：$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow dx = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}dt$

当$t = 0$时，$x = 0$；$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t}dt, \quad x = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

质点动力学——惯性系与非惯性系

1、非惯性系

非惯性系：相对地面惯性系做加速运动的参考系。

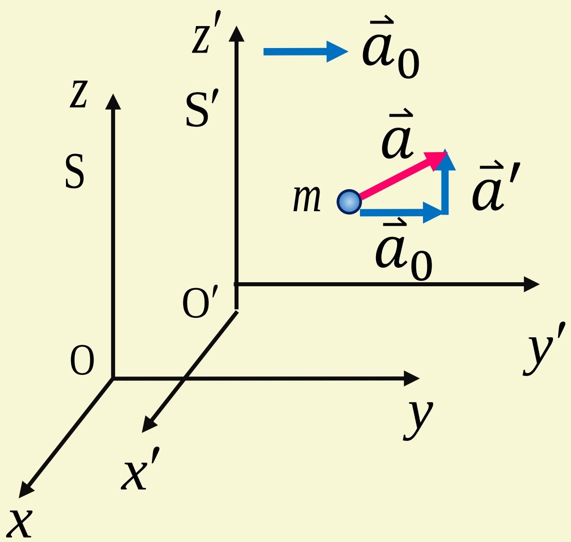


平动加速参考系：相对于惯性系作变速直线运动，但是本身没有转动的物体

转动参考系：相对惯性系转动的物体。

质点动力学——惯性系与非惯性系

2、平动加速系中的惯性力



非惯性系S′系相对于惯性系S系加速度为$\vec{a}_0$

质点m在惯性系S系中加速度为$\vec{a}$

质点m在非惯性系S′系中加速度为$\vec{a}'$

S系中：$\vec{F} = m\vec{a}$　　$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_0 + \vec{a}')$$

$$\boxed{\vec{F} + (-m\vec{a}_0)} = \boxed{m\vec{a}'}$$

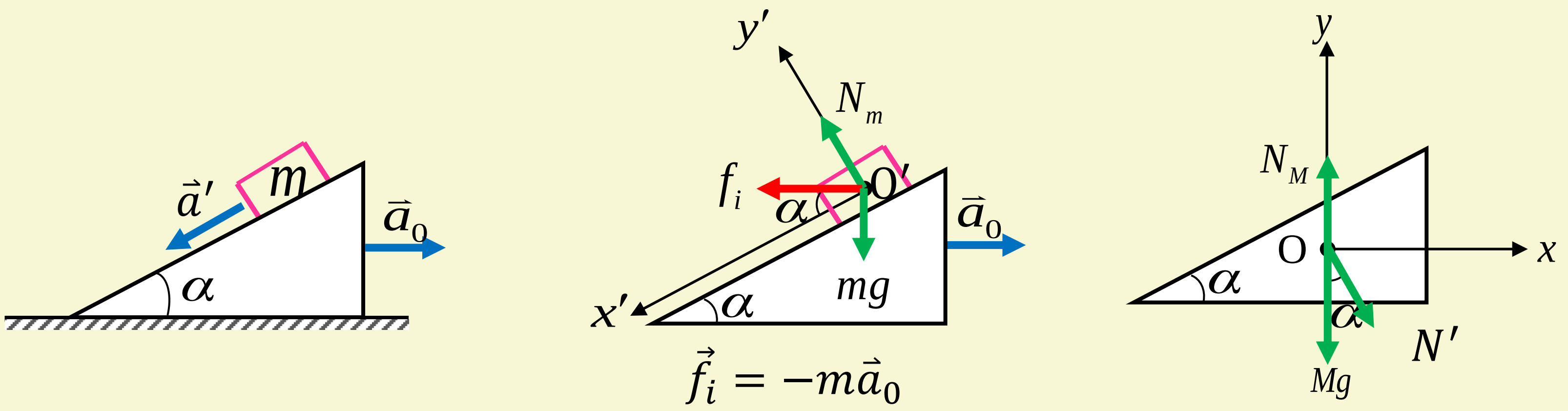
看作质点在非惯性系中所受的“合外力”记为 $\vec{F}'$，其中$\vec{f}_i = -m\vec{a}_0$**记为惯性力**，于是$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{f}_i = m\vec{a}'$，即若要在非惯性系中继续使用牛顿第二定律，需引入一个**假想力即惯性力**$\vec{f}_i$。

S′系中：$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{f}_i = m\vec{a}'$

惯性力：$\vec{f}_i = -m\vec{a}_0$

质点动力学——惯性系与非惯性系

例2.7： 如图所示， 质量为M 的楔块放在光滑的水平面上，在楔块的光滑斜面上有一质量为 m的物体从斜面的顶端自由滑下，斜面长度为l，倾角为α。开始时，楔块与物体都处于静止状态，求楔块相对于地面的加速度和物体相对于斜面的加速度。

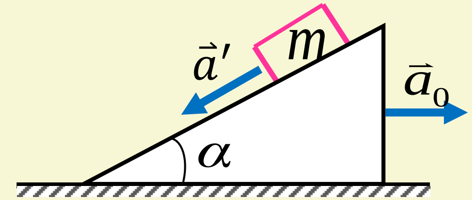


质点动力学——惯性系与非惯性系

解：取地面参考系为S系，楔块参考系为非惯性系S′系。

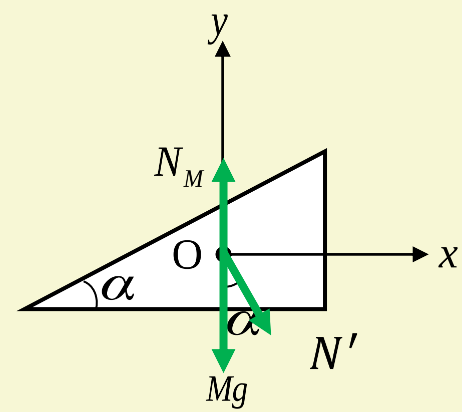
楔块S′系相对于地面S系加速度为$\vec{a}_0$

物体m在楔块S′系中加速度为$\vec{a}'$



楔块在S系中： x方向： $N'\sin\alpha = Ma_0$

y方向： $N'\cos\alpha + Mg = N_M$

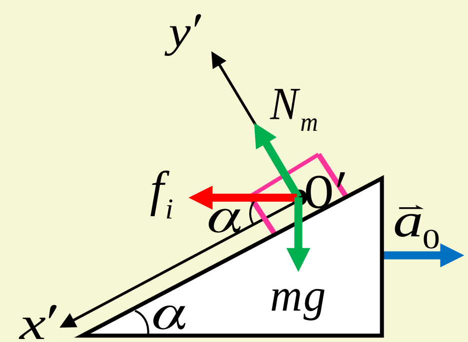


物体在S′系中： x'方向： $\boxed{ma_0\cos\alpha} + mg\sin\alpha = \boxed{ma'}$

y'方向： $N_m + \boxed{ma_0\sin\alpha} = mg\cos\alpha$

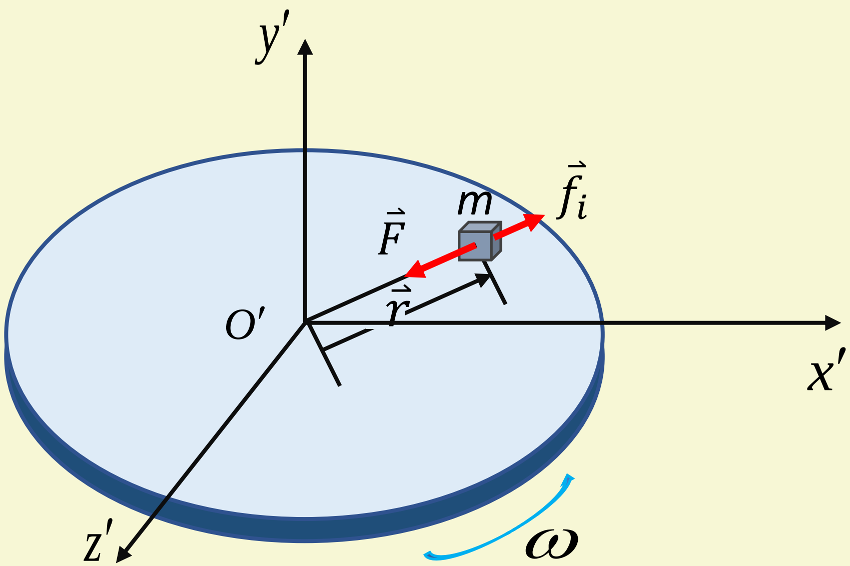
$$N_m = N'$$

$$\Longrightarrow \quad a' = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \qquad a_0 = \frac{mg\sin 2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}$$



$\vec{f}_i = -m\vec{a}_0$

3、转动参考系中的惯性力



(1) 物体固定在转动参考系上

(a) 物体m在地面惯性参考系中：

向心力：$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = -m\omega^2\vec{r}$

(b) 物体m在转动非惯性参考系中：

$\vec{a}' = 0$　　违背牛顿第二定律

$\vec{f}_i = -\vec{F}_n = m\omega^2\vec{r}$　　引入惯性离心力

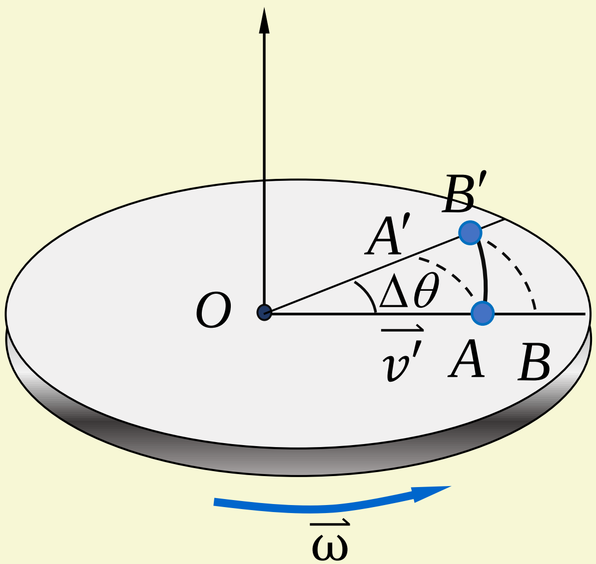
$\vec{F} + \vec{f}_i = 0$　　符合牛顿第二定律

惯性离心力 $\vec{f}_i$：一个和向心力方向相反、大小相等的惯性力(假想力)。

质点动力学——惯性系与非惯性系

(2) 物体相对于转动参考系运动

圆盘匀速转动角速度为 $\vec{\omega}$，槽中小球径向运动：初始位置为A点，速度为$\vec{v'}$



(a) 在地面惯性参考系中：

圆盘静止，小球运动： $\overline{AB} = v'\Delta t$

圆盘转动，小球静止： $\Delta\theta = \omega\Delta t$

$$\overset{\frown}{AA'} = \overline{OA}\omega\Delta t$$

圆盘转动，小球运动：

$$\Delta s = \overset{\frown}{BB'} - \overset{\frown}{AA'} = \overline{OB}\Delta\theta - \overline{OA}\Delta\theta$$

$$= \overline{OB}\omega\Delta t - \overline{OA}\omega\Delta t = \boxed{v'\omega(\Delta t)^2}$$

当$\Delta t \to 0$时，$\Delta s = \boxed{\frac{1}{2}a(\Delta t)^2}$

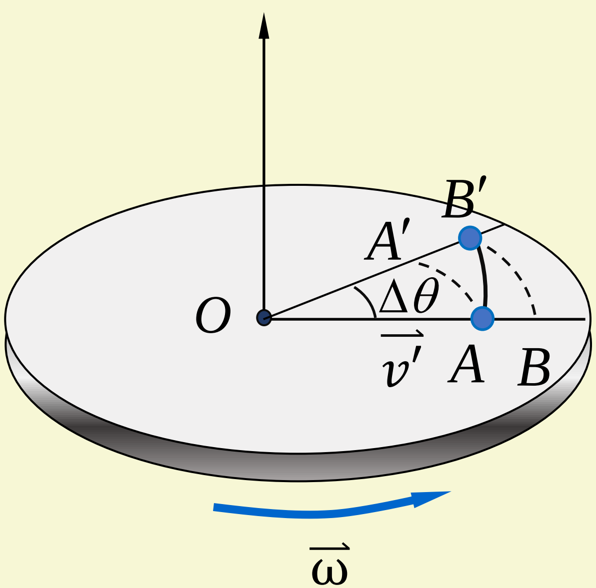
$$\boxed{a = 2v'\omega \qquad \vec{a} = 2\vec{\omega}\times\vec{v'} \qquad f = m\vec{a}}$$

多出的切向位移Δs是由于圆盘的转动与小球相对于圆盘的运动之间的相互影响而产生的加速度(a)所导致的。该加速度是由小槽内侧作用在小球上的压力而产生的。

质点动力学——惯性系与非惯性系

(b)在圆盘非惯性参考系中:

小球并无加速度(因小球仅沿径向做匀速直线运动)，但小球却受到小槽内测给予的压力作用，为了维持平衡，在切向上小球必还受到一个与压力平衡的力的作用，这个力就是**科里奥利力($\vec{f}_C$)**。



$$a = 2v'\omega \qquad \vec{a} = 2\vec{\omega} \times \overrightarrow{v'} \qquad f = m\vec{a}$$

科里奥利力:

$$\vec{f}_C = -m\vec{a} = -2m\vec{\omega} \times \overrightarrow{v'}$$

地球可以看作是匀速转动的参考系，地球上运动的物体都会受到科里奥利力的影响。比如北半球河流的右岸（以流向为前方）被冲刷得比较厉害。

质点动力学——力学单位制 量纲

※ 物理量的单位和量纲

单位制：1984年2月27日，我国国务院颁布实行以国际单位制（SI）为基础的法定单位制。

国际单位制规定了七个基本单位：

力学的基本单位

物理量	长度L	质量M	时间T
单位名称	米	千克	秒
符号	m	kg	s

电流单位A安培，热力学温度K开尔文，物质的量mol摩尔，发光强度cd坎德拉。

大学物理

蒋英

湖南大学物理与微电子科学学院

第2章 质点动力学

§2.1 牛顿运动定律

§2.2 动量与动量守恒定律

§2.3 功和能

§2.4 角动量和角动量守恒定律

质点动力学——动量与动量守恒定律

一、 质点动量定理

牛顿运动定律反映了力的瞬时效应，而作用在物体上的力通常要持续一段时间，持续时间不同，产生的效果也不同，有必要研究力的时间累积问题，由此引入动量、冲量、动量定理和动量守恒定律等内容。

1、 冲量(impulse)与质点动量定理

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})\Rightarrow \vec{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}$$ —合外力$\vec{F}$在dt时间内的冲量(单位：牛·秒)

求积分有：$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{P}_2-\vec{P}_1$$ —— **质点动量定理**

质点所受**合外力**的冲量，等于质点在同一时间内动量的增量。

力对时间的累积效应就是使质点的动量发生变化。

比较：中学 $Ft=mv_2-mv_1$ 直线运动，F—恒力 $\Longrightarrow$ $\vec{F}(t)$

质点动力学——动量与动量守恒定律

2、 质点动量定理在直角坐标系中的分量形式

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \,\mathrm{d}t = p_{2x} - p_{1x} = m\upsilon_{2x} - m\upsilon_{1x}$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \,\mathrm{d}t = p_{2y} - p_{1y} = m\upsilon_{2y} - m\upsilon_{1y}$$

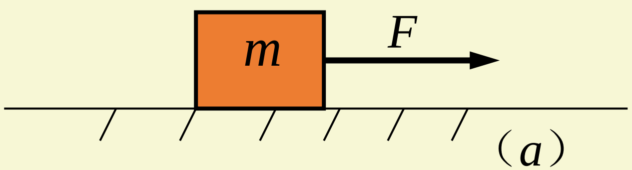
$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \,\mathrm{d}t = p_{2z} - p_{1z} = m\upsilon_{2z} - m\upsilon_{1z}$$

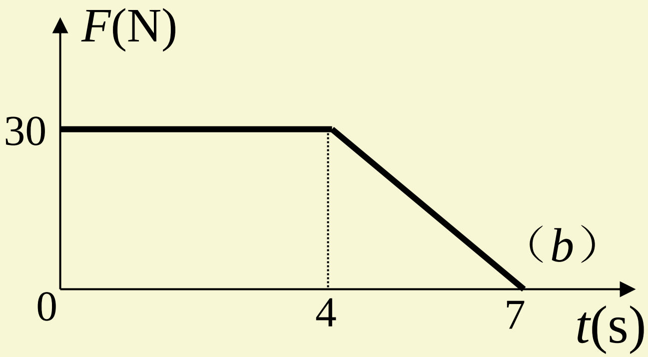
3、 平均冲力

$$\bar{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} \qquad \vec{I} = \bar{\vec{F}} \Delta t$$

质点动力学——动量与动量守恒定律

例2.8：如图 a 所示，质量为m =10kg的木箱，在水平拉力F=30 N的作用下，由静止开始运动，若拉力的大小随时间变化的关系如图b所示，已知木箱与地面间的摩擦系数 $\mu = 0.2$，求：$t = 4$、7、6s 时木箱速度的大小。





解:设$t = 4$、7、6s 时，速度分别为v_4, v_7, v_6。由动量定理:

(1) $$\int_0^4 (F - \mu mg)\,\mathrm{d}t = m\upsilon_4 - m\upsilon_0$$

上式中F=30N,v_0=0m/s, 解出v_4 =4.16m/s

(2) $$\int_4^7 (F - \mu mg)\,\mathrm{d}t = m\upsilon_7 - m\upsilon_4$$

上式中F=70–10t，$(4 \le t \le 7)$

解出v_7 =2.78m/s

(3) $$\int_4^6 (F - \mu mg)\,\mathrm{d}t = m\upsilon_6 - m\upsilon_4$$ 解出$v_6 = 4.24$m/s

自主学习教材P32：例2.5

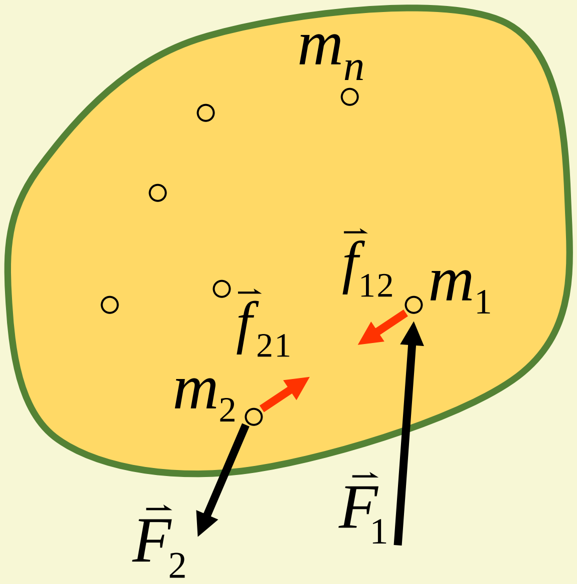
质点动力学——动量与动量守恒定律

二、 质点系动量定理

质点系：由多个质点构成的系统

内力：系统内各质点间的相互作用力

外力：系统以外的物体对系统内质点的作用力



★两质点组成的系统：

内力成对产生，矢量和为零：$\vec{f}_{21} + \vec{f}_{12} = 0$

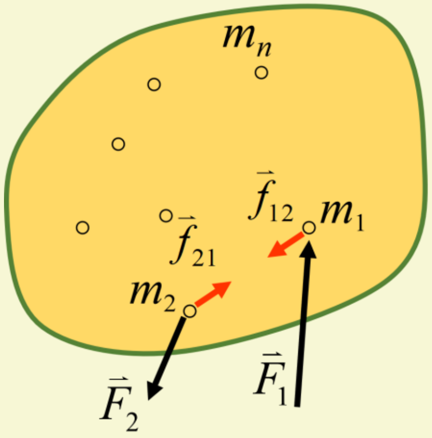
★多质点构成的系统：

系统的所有内力矢量和为零：$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = 0$

二、 质点系动量定理

对第 i 个质点应用动量定理：

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_i+\vec{f}_i)\,\mathrm{d}t=m_i\vec{\upsilon}_{i2}-m_i\vec{\upsilon}_{i1},\ (i=1,2,3\ldots n)$$



一共有n个这样的方程，求和：

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_i+\vec{f}_i)\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_{i1}$$

注意：

内力不能改变系统的总动量；

内力能改变每一个质点的动量。

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\mathrm{d}t,\ \because(\sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i=0)$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_{i1}=\sum\vec{P}_{i2}-\sum\vec{P}_{i1}}$$

质点系动量定理：由n个质点组成的力学系统所受**合外力**的冲量等于系统总动量的增量。

质点动力学——动量与动量守恒定律

质点系动量定理在直角坐标系中的分量形式：

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_{ix}\, d\, t = \sum_i m_i \vec{v}_{ix} - \sum_i m_i \vec{v}_{i0x}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_{iy}\, d\, t = \sum_i m_i \vec{v}_{iy} - \sum_i m_i \vec{v}_{iy0}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_{iz}\, d\, t = \sum_i m_i \vec{v}_{iz} - \sum_i m_i \vec{v}_{iz0}$$

注意：系统所受的合外力是指系统内各质点所受外力的矢量和。

质点动力学——动量与动量守恒定律

汽车发动机内气体对活塞的推力以及各种传动部件之间的作用力能使汽车前进吗？使汽车前进的力是什么力？

参考解答：汽车发动机内气体对活塞的推力以及各种传动部件之间的作用力都是汽车系统的内力，内力只会改变内部各质点的运动状态，不会改变系统的总动量，所以不能使汽车前进。使汽车前进的力只能是外力。

由于汽车前进使从动轮（汽车的前轮）相对地面有向前的运动趋势，因此从动轮受到地面施以的方向向后的摩擦力，该摩擦力对从动轮轴的力矩使从动轮滚动起来。所以汽车的运动最终靠的是地面施加的摩擦力。

质点动力学——动量与动量守恒定律

三、动量守恒定律

质点系动量定理：$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_{i1}=\sum\vec{P}_{i2}-\sum\vec{P}_{i1}$

动量守恒条件：$\sum\vec{F}_i=0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{P}=\sum_i m_i\vec{\upsilon}_i$ = 常矢量

动量守恒定律：当系统所受合外力为零时，系统的总动量保持不变。

动量守恒在直角坐标系中的分量形式：

$$m_1\upsilon_{1x}+m_2\upsilon_{2x}+\cdots+m_n\upsilon_{nx}$$ =常量

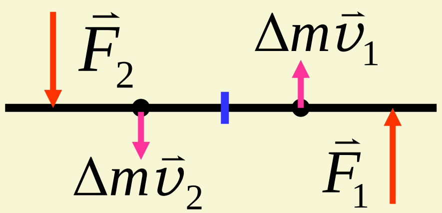
$$m_1\upsilon_{1y}+m_2\upsilon_{2y}+\cdots+m_n\upsilon_{ny}$$ =常量

$$m_1\upsilon_{1z}+m_2\upsilon_{2z}+\cdots+m_n\upsilon_{nz}$$ =常量

质点动力学——动量与动量守恒定律

关于动量守恒定律，要注意的几点：

(1) 动量是矢量，是矢量守恒。



$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$$

跷跷板开始时静止，加上一对力后开始转动，此过程中跷跷板动量是否守恒?

(2) 碰撞、打击过程中受摩擦力、重力作用，外力矢量和不为零 (因Δt很短,碰撞、打击的内力远大于外力),仍有动量守恒.

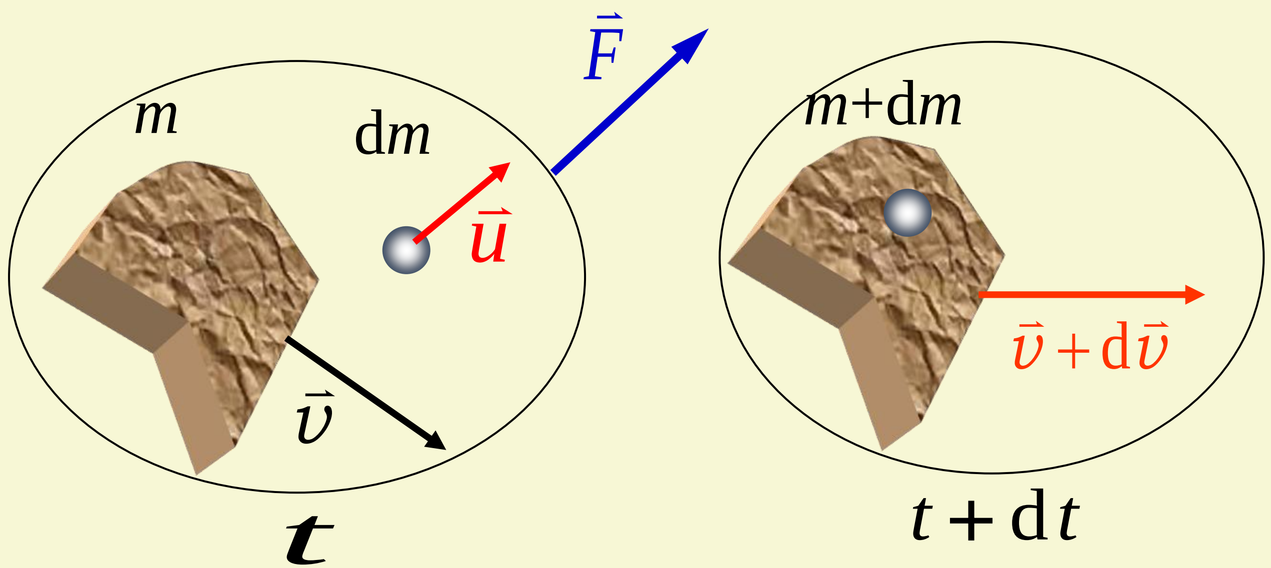
(3) 外力矢量和不为零,但沿着某一方向分量的代数和为零,总动量在该方向的分量守恒.

(4) 上述动量守恒定律是由牛顿运动定律推导出来的，只适用于惯性参考系.

质点动力学——动量与动量守恒定律

★变质量物体问题

物体m与质元dm在 t 时刻的速度以及在 t + dt 时刻合并后的共同速度如图所示：



把物体与质元作为系统考虑，初始时刻与末时刻的动量分别为：

初始时刻 $m\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{u}$　　　末时刻 $(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$

质点动力学——动量与动量守恒定律

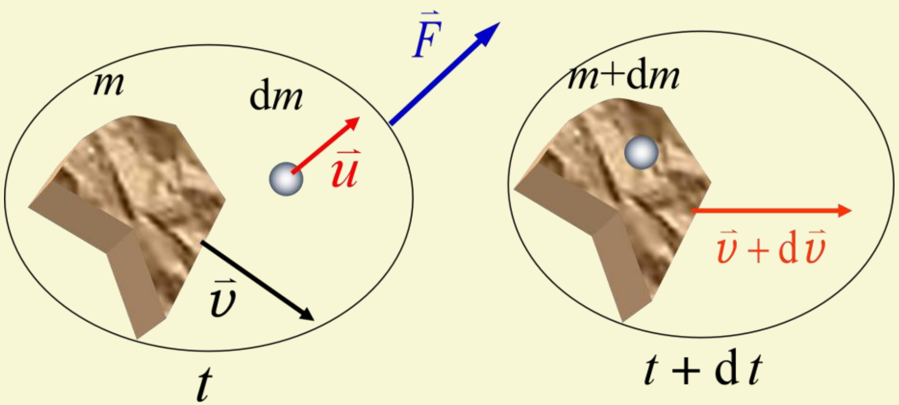
对系统利用动量定理 $(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-(m\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{u})=\vec{F}\,\mathrm{d}t$

$$m\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{v}-\mathrm{d}m\vec{u}=\vec{F}\,\mathrm{d}t$$

略去二阶小量，两端除dt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$$

变质量物体运动微分方程



注意：dm可正可负，当dm取负时，表明物体质量减小。

对于火箭之类喷射问题，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}$ 为尾气推力。

★变质量问题的处理方法

(1)确定研究系统,取定坐标系

(2)写出系统动量表达式

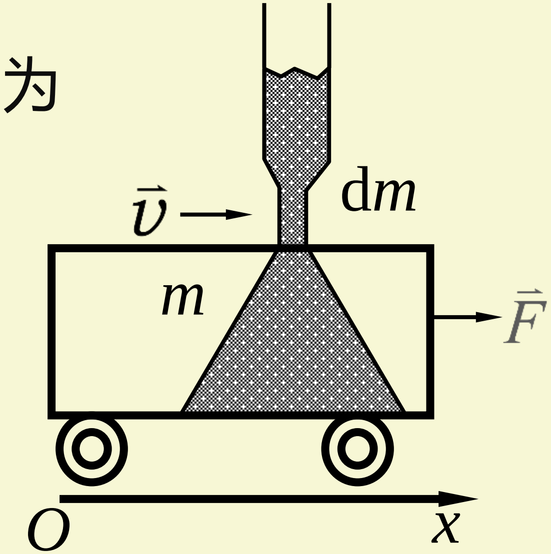
(3)求出系统动量变化率

(4)分析系统受力

(5)应用动量定理求解

质点动力学——动量与动量守恒定律

例2.9：一辆煤车以v =3m/s的速率从煤斗下面通过,每秒钟落入车厢的煤为 Δm=500kg。如果车厢的速率保持不变,应用多大的牵引力拉车厢?



解:(1)取煤车(含车和车中的煤)为研究对象，以地面为参考系建立坐标系如图:

t 时刻：煤车总质量m，速度为v

t+dt 时刻：煤车总质量为m+dm，速度为v

(2) t 时刻和t+dt时刻系统水平总动量分别为:

t 时刻: mv

t+dt 时刻: $(m+\mathrm{d}m)v$

(3) dt 时间内系统水平总动量增量为:

$$\mathrm{d}p=(m+\mathrm{d}m)v-mv=\mathrm{d}m\cdot v$$

(4) 由动量定理可得:

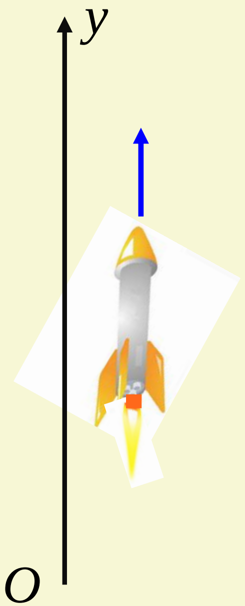
$$F\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}p=\mathrm{d}m\cdot v$$

$$F=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v=500\times3=1500\,\mathrm{N}$$

质点动力学——动量与动量守恒定律

例2.10：火箭是依靠燃料燃烧后喷出的气体产生推力向前飞行的。假设空气阻力和重力可忽略不计，火箭的初始质量为M_i，燃料耗尽时质量为M_f。火箭初始速度为零，在飞行的过程中，喷出气体相对于火箭的速度u为常量。求喷出气体对火箭产生的推力及燃料耗尽时火箭的速度。

解：设飞行的火箭不受外力作用。



t 时刻　　火箭：M, v　　$\boxed{\text{动量：}Mv}$

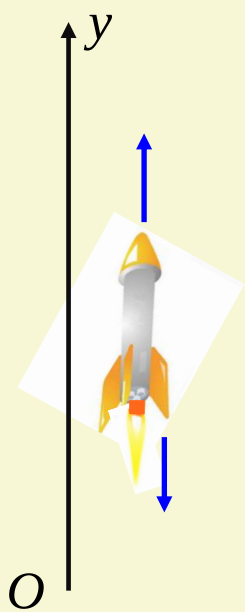
$t+\mathrm{d}t$ 时刻　　火箭：$M-dm,\ v+dv$　　$\boxed{\text{动量：}(M-dm)(v+dv)}$

喷出气体：dm
- 相对火箭速度　u
- 对地速度　$v+\mathrm{d}v-u$
- $\boxed{\text{动量}\ (\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v-u)}$

系统动量守恒　$Mv=(M-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m(v+\mathrm{d}v-u)$

质点动力学——动量与动量守恒定律

系统动量守恒 $Mv=(M-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m(v+\mathrm{d}v-u)$



$$\mathrm{d}v=u\frac{\mathrm{d}m}{M}=-u\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

$$\int_0^{v_f}\mathrm{d}v=-u\int_{M_i}^{M_f}\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

$$v_f=u\ln\frac{M_i}{M_f}$$

喷出气体对火箭$M-dm$的推力：

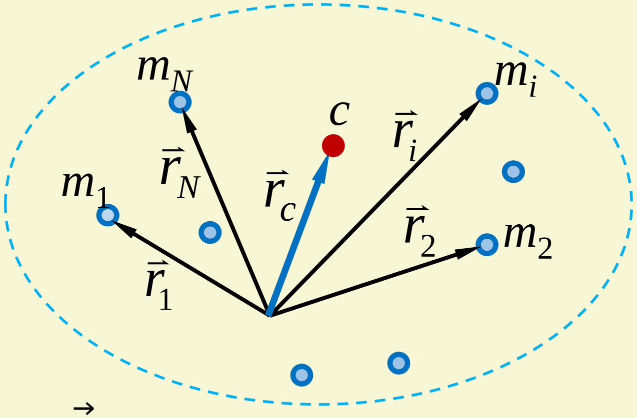
$$F=M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

四、质心运动定理

质点系的运动往往比较复杂，比如体操运动员在做空中翻转动作时，他的躯干与四肢的运动状态不尽相同，但有一特殊位置——**质心的运动**则往往有简单规律。

1、质心的位置矢量

假设质点系由N(N≥2)个质点组成，质点系中第i个质点的位置矢量为r_i，质量为m_i，系统的总质量为：



$$M=\sum_{i=1}^{N} m_i\ ,\qquad i=1,2,\ldots,N$$

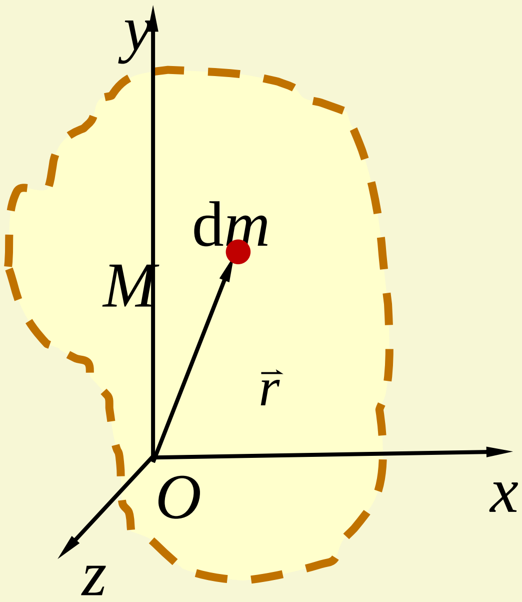
定义质心的位置矢量为：$\vec{r}_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}$

质心位置矢量在直角坐标系中：$x_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M},y_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M},z_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$

质点动力学——动量与动量守恒定律

质量离散分布的物体，质心的位置矢量为：

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$



对于质量连续分布的物体，质心的位置矢量为：

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

质量连续分布的物体其质心位置矢量在直角坐标系中：

$$x_c = \frac{\int x dm}{M}, y_c = \frac{\int y dm}{M}, z_c = \frac{\int z dm}{M}$$

质点动力学——动量与动量守恒定律

2、质心的运动定律

质心的速度： $\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M}$

$$M\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \quad \Longrightarrow \quad \vec{P} = M\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

质点系的总动量$\vec{p}$等于它的总质量与质心速度的乘积

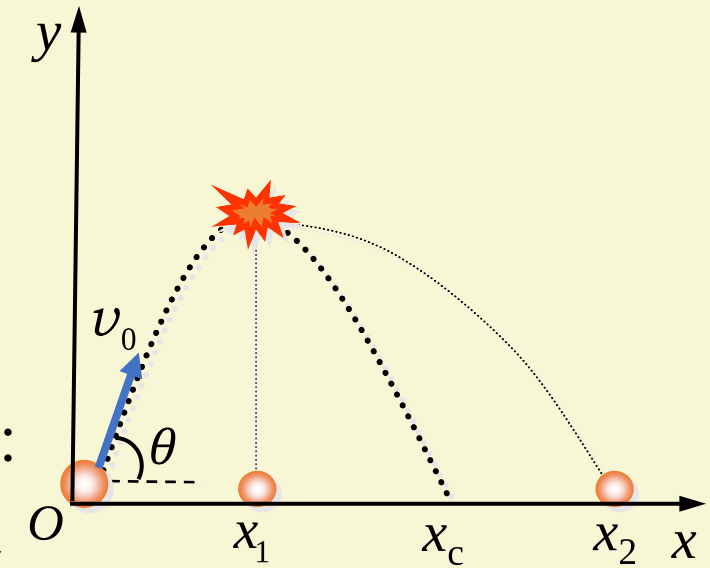
质心运动定律： $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{\mathrm{d}t} = M\frac{d\vec{v}_c}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_c}$

不管物体的质量如何分布，也不管外力情况如何，质心的运动就像物体的质量全部都集中于质心且所有外力也都集中作用在质心上时质点的运动一样。

质心保持静止或者做匀速直线运动： $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a}_c = 0 \rightarrow \vec{v}_c =$ 常矢量

内力不会改变质心的运动状态

例2.11：一枚炮弹发射后在最高点处爆炸分裂为两个质量均为m的相同碎片。其中一块竖直下落，另一块继续向前飞行，已知发射的初速度为v_0，发射角为θ，忽略空气阻力。求两块碎片着地点的位置。



解：建立直角坐标系，在炮弹爆炸前后，外力只有重力，因此炮弹爆炸前后，其质心运动轨迹不变，着地点不变.

(1) 假设炮弹未爆炸，其着地点就是质心的着地点，在竖直y方向只受重力，应用动量定理：

$$0 - 2mv_0 sin\theta = -2mgt_r \qquad t_r = v_0 sin\theta / g$$

由于y方向上只受重力，竖直向上到最高点所需时间t_r与竖直向下自由落体所需时间t_f相等，从发射到落地总的时间为$t = 2t_r = 2v_0 sin\theta / g$

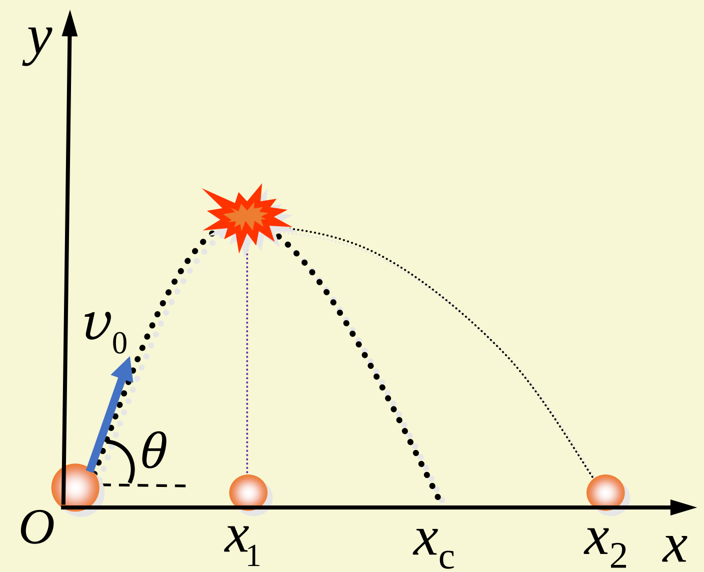
在水平x方向不受力，以速度$v_0 cos\theta$做匀速直线运动，t时间内运动到的位置即为质心着地点：$x_c = v_0 cos\theta \cdot t = v_0^2 sin2\theta / g$

质点动力学——动量与动量守恒定律

质心着地点：$x_c = v_0 cos\theta \cdot t = v_0^2 sin2\theta / g$

(2) 炮弹爆炸后，其中竖直下落那一块的着地点坐标为：

$$x_1 = v_0 cos\theta \cdot t_r = v_0^2 sin2\theta / 2g$$



(3) 根据质心位置的定义，有：

$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{2m}$$

从而可得另一块着地点的坐标为：

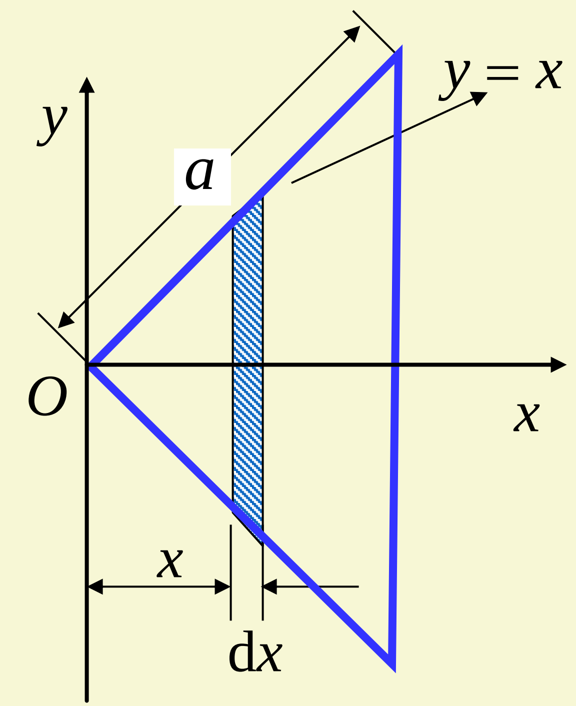
$$x_2 = 2x_c - x_1 = \frac{3v_0^2 sin2\theta}{2g}$$

例2.12:求腰长为a等腰直角三角形均匀薄板的质心位置。

解: 因为等腰直角三角形对于直角的平分线对称，所以质心位于此分角线上。

以此分角线为x轴，作坐标轴如图所示。

在离原点处取宽度为dx的面积元，由于面积元的高度为2y，所以其面积为2ydx=2xdx。设薄板每单位面积的质量为σ，则此面积元的质量dm=2xσdx。



三角形质心坐标x_c是

$$x_c = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{2}}{3}a$$

这个结果和熟知的三角形重心位置一致。

质点动力学——动量与动量守恒定律

放焰火时，一朵五彩缤纷的焰火的质心的运动轨迹如何？（忽略空气阻力与风力）为什么在空中焰火总是以球形逐渐扩大?





参考解答：由质心运动定理$F = ma_c$可知，系统的外力决定质心的运动。放焰火时，若不计阻力和风力，焰火受到的外力只有重力，所以焰火质心的运动轨迹就是一条抛物线。

焰火在空中炸开时，由于爆炸力远远大于重力，可近似认为焰火系统动量守恒，焰火各质点的动量之和必须保持为零，所以各方向的动量都有，且相反方向的动量大小必定相等，从而使空中的焰火大致以球形逐渐扩大。

质点动力学——作业1

1. 练习册B（第2章 质点动力学）

选择：1-6；填空：1-4；计算：1-3；研讨：1-2

2. 课件上的课后作业例题（3道）；

3. 智慧树网络课堂：抛体运动、非惯性系、相对运动

大学物理

蒋英

湖南大学物理与微电子科学学院

第2章 质点动力学

§2.1 牛顿运动定律

§2.2 动量与动量守恒定律

§2.3 功和能

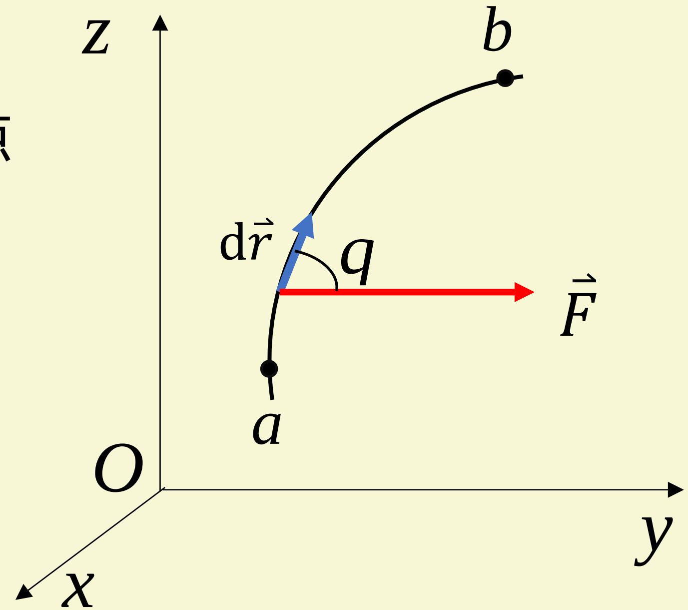
§2.4 角动量和角动量守恒定律

质点动力学——功和能

一、功、功率

作用在物体上的力通常要使物体沿某一路径发生位移，路径和位移不同，产生的效果也不相同，因而有必要研究力的空间累积问题，由此引入功、动能、势能、动能定理、功能原理和机械能守恒定律等内容。

1、功（work）



质点在力$\vec{F}$的作用下发生一元位移$d\vec{r}$，力$\vec{F}$对质点做的功定义为：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad \rightarrow \quad A = \int_{a(L)}^{b} \vec{F}\cdot \overline{\mathrm{d}\,r}$$

功的单位：焦耳（J）

2、功率（power）

力$\vec{F}$在单位时间内做的功定义为功率：

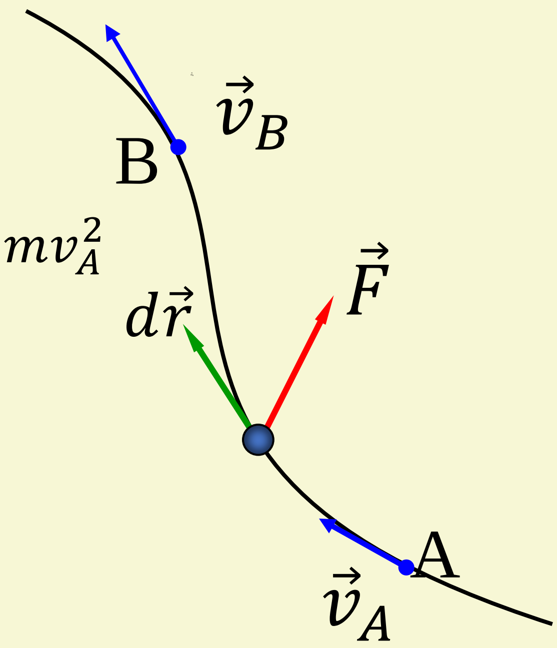
$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad P = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

功率的单位：焦每秒 (J/s)或瓦特(W)

二、动能定理

1、质点的动能定理

质量为m的质点，沿路径L从a点运动到b点，质点速度从v_a变为v_b，合外力对质点所做的功为



$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int_a^b m\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{2}(\vec{v}\cdot d\vec{v}+d\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}d(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}d(v^2)$$

$$\boxed{A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2}$$

质点的动能定义为： $E_k=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{A=\Delta E_k}$

质点动能定理： 质点合外力做的功等于质点动能的增量。

质点动力学——功和能

2、质点系的动能定理

系统中有N个质点，质量分别为$m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_N$，且各质点分别受到外力和内力作用。

设第i个质点受到的外力为$\vec{F}_i$，内力为 $\vec{f}_i$，利用质点的动能定理有：

$$A_i = \int_a^b (\vec{F}_i + \vec{f}_i)\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}_i \cdot d\vec{r} + \int_a^b \vec{f}_i \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$$

$$\left.\begin{aligned} A_{i外} &= \int_a^b \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \\ A_{i内} &= \int_a^b \vec{f}_i \cdot d\vec{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_i = A_{i外} + A_{i内} = \Delta E_{ki} = \Delta E_{kib} - \Delta E_{kia}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N A_{i外} + \sum_{i=1}^N A_{i内} = \sum_{i=1}^N \Delta E_{ki}$$

质点系的动能定理：质点系中所有外力做的功与所有内力做的功之和等于系统总动能的增量。

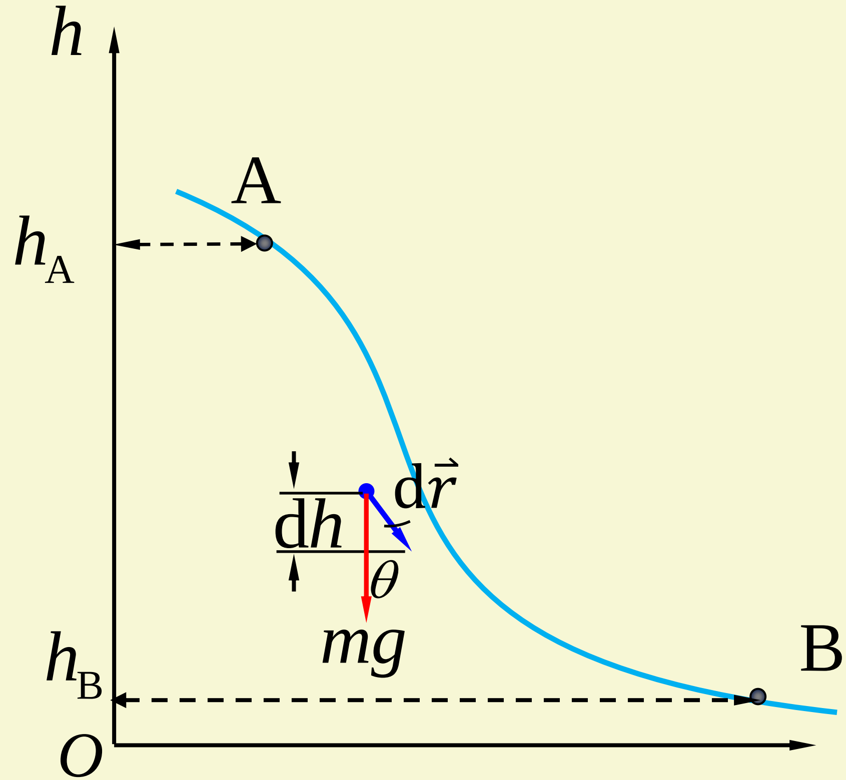
注意：内力虽然不改变系统的总动量，但可以改变系统的总动能—即内力做的总功不一定等于零。 **(自主阅读P40: 一对内力的功)**

质点动力学——功和能

三、保守力与非保守力　势能

保守力：做功与路径无关的力。
比如：重力、弹簧弹力、万有引力等。

非保守力：做功与路径有关的力。
比如：摩擦力等。



1、保守力的功

(1) 重力的功

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \vec{F}\cdot d\vec{r} = F|d\vec{r}|\cos\theta \\ F &= mg, \\ |d\vec{r}|\cos\theta &= -\mathrm{d}h \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}A = -mg\,\mathrm{d}h$$

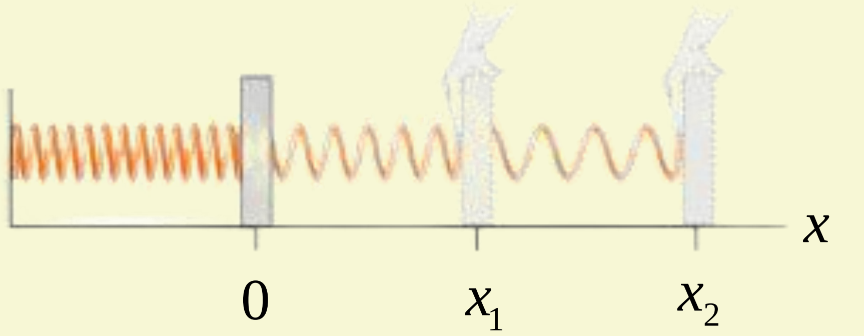
$$A = \int_A^B \mathrm{d}A = -\int_{h_A}^{h_B} mg\,\mathrm{d}h = mg(h_A - h_B)$$

重力是保守力——
重力的功与物体所经过的路径无关。

质点动力学——功和能

(2) 弹性力的功

弹簧在弹性限度内质点受到的弹力为$f=-kx$，k为劲度系数。



弹簧伸长量变化dx过程中，弹力所做的功为：

$$\mathrm{d}A=-kx\,\mathrm{d}x$$

弹簧伸长量从x_1变化到x_2的过程中，弹力所做的功为：

$$A=\int_{x_1}^{x_2}-kx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_1}^{x_2}=\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}-\frac{1}{2}kx_2^{\ 2}$$

弹力是保守力——弹簧弹力所做功与物体所经历的路径无关。

质点动力学——功和能

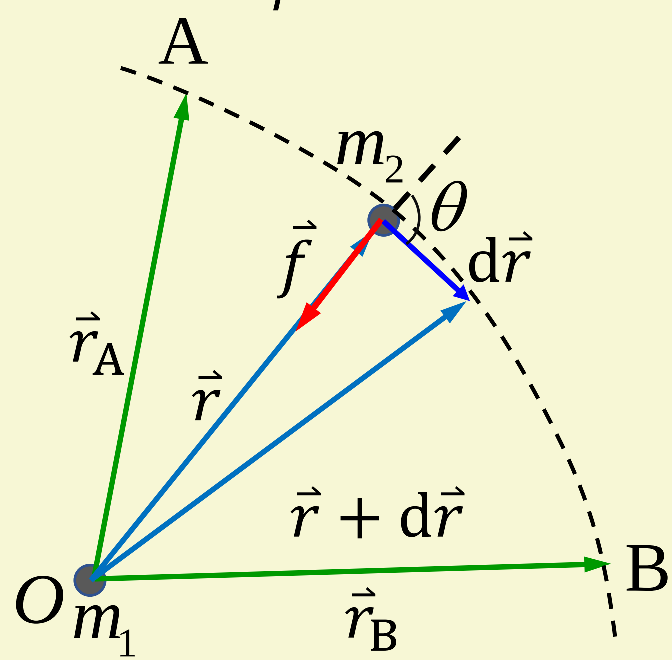
(3) 万有引力的功

质点m_2受m_1的万有引力为：$\vec{f}=-G\dfrac{m_1m_2}{r^2}\hat{\vec{r}}=-G\dfrac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}$

$$\mathrm{d}A=\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-G\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{2}(\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{r})$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{d}(\vec{r}\cdot\vec{r})/2=\frac{1}{2}\mathrm{d}(r^2)=r\mathrm{d}r$$



$$\mathrm{d}A=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$A=\int_A^B(-G\frac{m_1m_2}{r^2})\mathrm{d}r=-Gm_1m_2(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B})$$

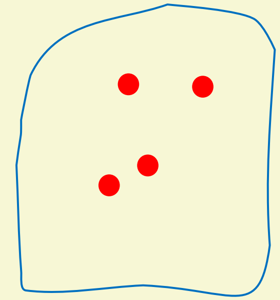
万有引力是保守力——万有引力的功与物体所经过的路径无关。

保守力的定义式： $A=\oint_L\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r}=0$

质点动力学——功和能

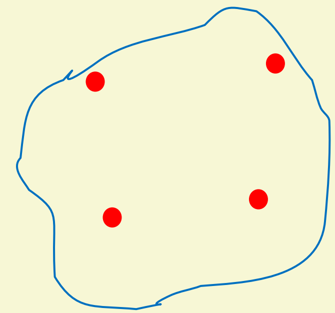
2、势能

(1) 势能定义：既然保守力做功只与物体所处的位置有关，就应该存在一个由物体位置所决定的能量，定义这个与物体位置有关的能量为势能(potential energy, E_p)。



(a)

(2) 势能差：一个质点相对于另一个质点从a点运动到b点的过程中，规定保守力所做的功等于势能的减少。



(b)

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}=-(\boldsymbol{E_{pb}}-\boldsymbol{E_{pa}})=\boldsymbol{E_{pa}}-\boldsymbol{E_{pb}}$$ **势能差**

(3) 某一确定位置状态的势能计算:

为了确定空间各点的势能比如a点的势能E_{pa}，先要选择参考点(势能零点)，选取b点处为势能零点($\boldsymbol{E_{pb}}=\boldsymbol{E_{p参}}=\mathbf{0}$)，则质点在$a$点处的势能可表示为: $\boldsymbol{E_{pa}}-\boldsymbol{E_{pb}}=\boldsymbol{E_{pa}}-\mathbf{0}=\boldsymbol{E_{pa}}$

$$\int_a^b \vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}$$

势能零点

$$\boxed{\boldsymbol{E_{pa}}=\int_a^{势能零点}\vec{\boldsymbol{F}}_{保}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}}$$

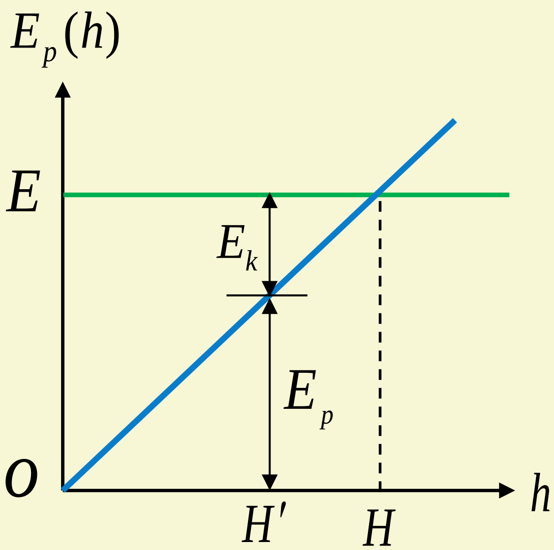
质点动力学——功和能

(4) 势能的计算表达式

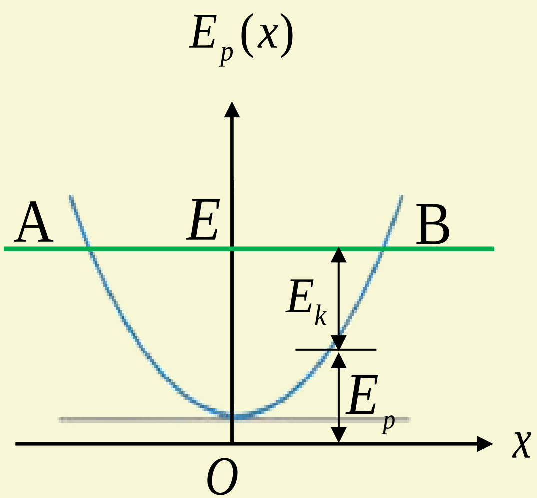
重力的功 $A = mg(h_A - h_B)$　　重力势能 mgh

弹性力的功 $A = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$　　弹力势能 $\frac{1}{2}kx^2$

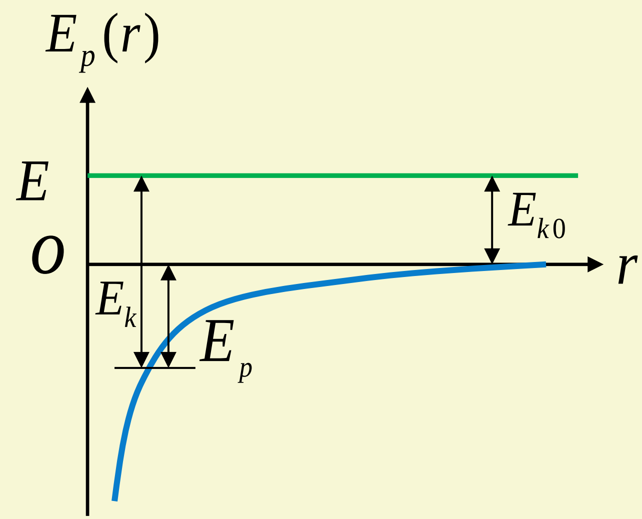
万有引力的功 $A = -(G\frac{m_1m_2}{r_A} - G\frac{m_1m_2}{r_B})$　　引力势能 $-\frac{Gm_1m_2}{r}$



重力势能



弹性势能



引力势能

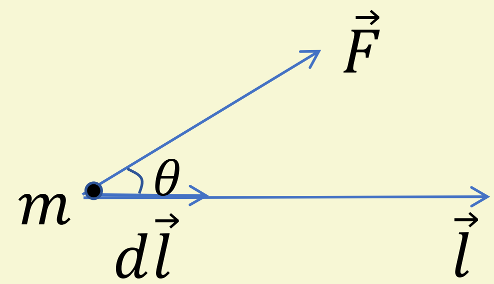
(5) 关于势能需要注意的几点：

★势能属于由保守力相互作用的系统，对单个质点谈论势能是没有意义的。例如：重力势能属于物体和地球组成的系统；万有引力势能属于万有引力相互作用的两物体；弹性势能是各质元之间的相互作用能。

★势能只有相对意义，其大小取决于势能零点的选取。势能零点不同，同一位置的势能值可能不同；但两点之间的势能差与势能零点的选取无关——做功的大小不会因势能零点而变。

质点动力学——功和能

3、由势能函数求保守力



(1) 质点在保守力$\vec{F}$的作用下发生元位移$d\vec{l}$，根据势能的定义有:

$$dA = -dE_p = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F cos\theta dl$$

$$F_l = F cos\theta \Rightarrow dA = -dE_p = F_l dl \Rightarrow \boxed{F_l = -\frac{dE_p}{dl}}$$

弹力势能: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad$ 弹力：$f = -dE_p/dx = -kx$

(2) 已知势能函数$E_p = E_p(x, y, z)$在直角坐标系中的全微分形式:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz \Rightarrow F_x = -\frac{\partial E_x}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_y}{\partial y}, \quad F_x = -$$

保守力的矢量形式: $\boxed{\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_P}$

保守力等于对应势能的负梯度：$\vec{F} = -\nabla E_P, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

质点动力学——功和能

四、功能原理和机械能守恒定律 1、功能原理

研究质点系的功能转换问题时，通常将内力的功分为两类：一类时保守内力的功；另一类时非保守内力的功，即：

$$A_{内}=A_{保}+A_{非保} \qquad A_{保}=E_{P1}-E_{P2} \leftarrow \text{保守内力的功等于势能的减少}$$

质点系的动能定理得：

$$A_{外}+A_{保}+A_{非保}=A_{外}+A_{非保}+E_{P1}-E_{P2}=E_{K2}-E_{K1}$$

$$A_{外}+A_{非保}=(E_{K2}+E_{P2})-(E_{K1}+E_{P1})=E_2-E_1$$

机械能：动能和势能之和 $\qquad E_1=E_{K1}+E_{P1} \qquad E_2=E_{K2}+E_{P2}$

功能原理：所有外力与所有非保守内力做功的代数和等于质点系机械能的增量。$\Rightarrow$

$$\boxed{A_{外}+A_{非保}=E_2-E_1}$$

质点动力学——功和能

2、机械能守恒定律

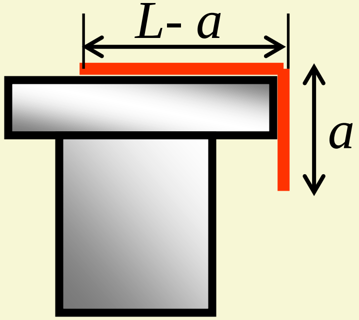
功能原理：所有外力与所有非保守内力做功的代数和等于质点系机械能的增量。 $\Rightarrow$ $\boxed{A_{外} + A_{非保} = E_2 - E_1}$

机械能守恒定律：若系统内只有保守内力做功，或非保守内力与外力的总功为零，则系统的机械能保持不变。

$$A_{外} + A_{非保} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 常量}$$

质点动力学——功和能

例2.13:一根质量为m长为 L的匀质链条，放在摩擦系数为μ 的水平桌面上,其一端下垂,长度为a，如图所示,设链条由静止开始运动,求:(1) 链条离开桌面过程中摩擦力所做的功;(2) 链条刚刚离开桌面时的速率。

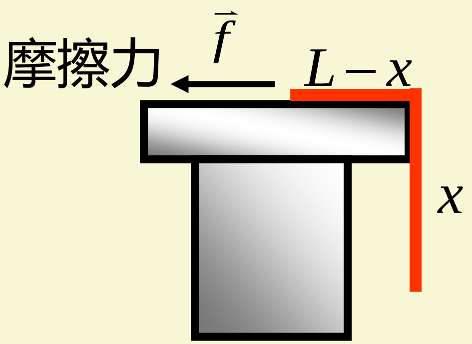


解：(1)确定研究对象：“系统” = 链条+桌面+地球;

(2)分析系统所受的力及力所做的功;

关键： 链条离开桌面过程中摩擦力所做的功:

任取一中间元过程



$$\left.\begin{aligned} &f=-(L-x)\frac{m}{L}g\mu \\ &\text{下落}\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}A=f\,\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A&=\int \mathrm{d}A \\ &=\int_a^L f\,\mathrm{d}x \end{aligned}}$$

$$A=\int_a^L -(L-x)\frac{m}{L}g\mu\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\frac{mg\mu(L-a)^2}{L}$$

质点动力学——功和能

(3)选择地球惯性系建立坐标系；

(4)选择零势能点;(原点所在水平位置)

(5)计算始末态的机械能 $\boxed{A_{外} + A_{非保} = E_2 - E_1}$

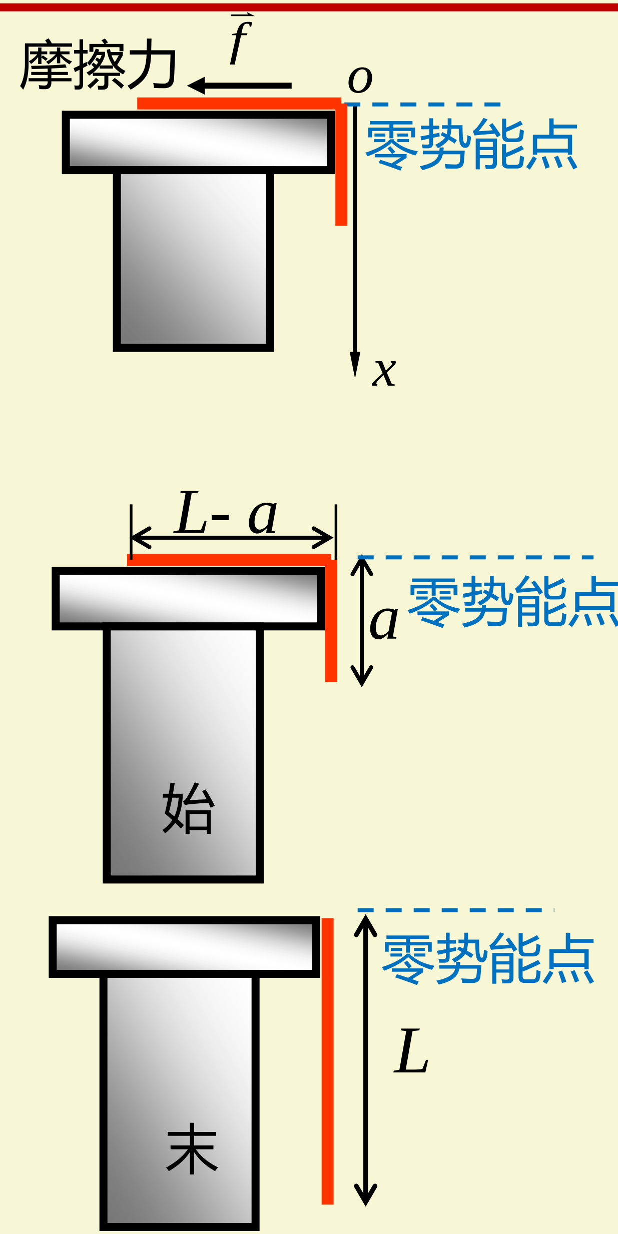
$$E_1 = -a\frac{mg}{L}\cdot\frac{1}{2}a,\ E_2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + (-\frac{1}{2}mgL)$$

(6)应用功能原理列方程解方程

$$A = -\frac{1}{2}\frac{mg\mu(L-a)^2}{L} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + (-\frac{1}{2}mgL) - (-\frac{1}{2}a^2\frac{mg}{L})$$

链条刚刚离开桌面时的速率：

$$\upsilon = \sqrt{g(L-\frac{a^2}{L}) - \mu g(L-2a+\frac{a^2}{L})}$$



自主学习教材P44&45：例2.10、2.11、2.12

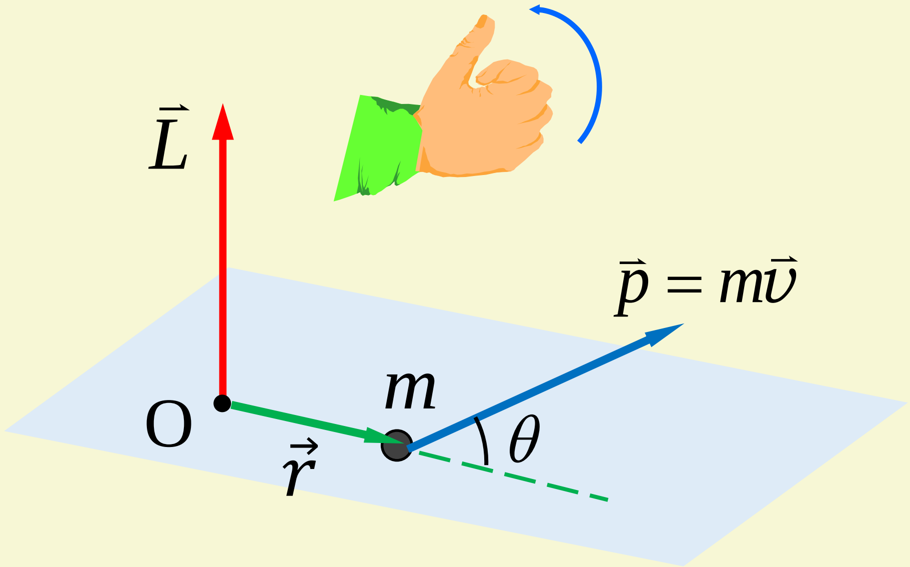
质点动力学——角动量和角动量守恒定律

一、质点的角动量（angular momentum）

实际物体的运动中，存在大量的旋转运动，即对某一位置的绕行运动。为方便研究，引入角动量这个物理量。

质点对参考点O的角动量定义为：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$



角动量的单位：$\mathrm{kg \cdot m^2/s}$

角动量的大小：$L = rmv\sin\theta$

角动量的方向：右手螺旋法则确定

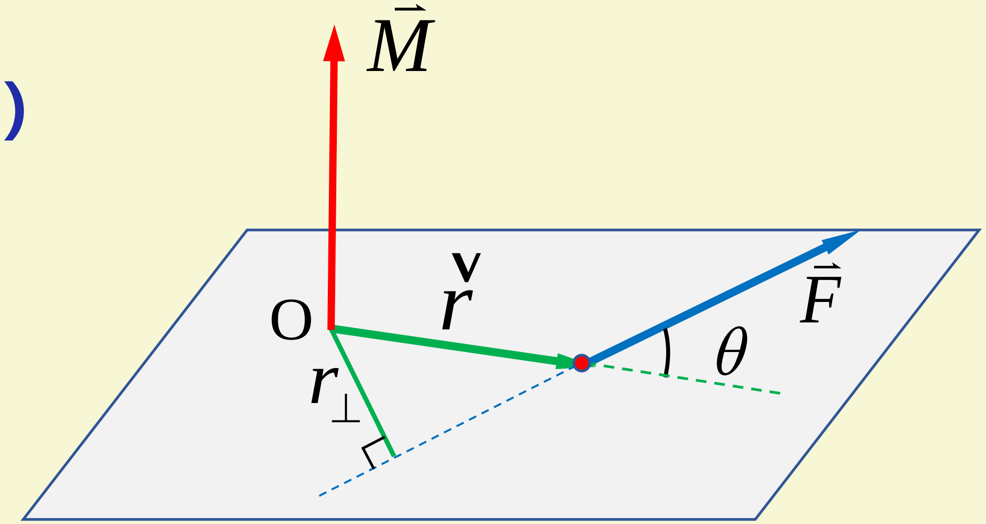
质点动力学——角动量和角动量守恒定律

二、力矩 质点的角动量定理

1、力矩（moment of force)

力对参考点O 的力矩定义为：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



力矩的单位： $\mathrm{N \cdot m}$

力矩的大小：$M = rF\sin\theta = r_{\perp}F$　　力臂：$r_{\perp} = r\sin\theta$

力矩的方向：右手螺旋法则确定

2、质点的角动量定理

质点运动时，角动量可能随时间变化：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = 0, \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

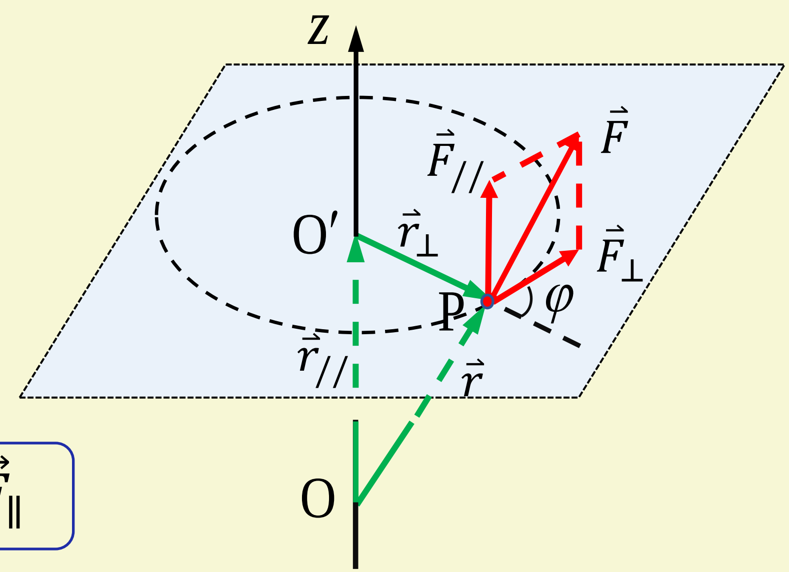
质点的角动量定理: 质点受到的合外力矩等于质点角动量对时间的变化率。

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad \stackrel{VS}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

合外力矩——角动量对时间的微分　　　　合外力——动量对时间的微分

3、质点对轴的角动量定理

对z轴的角动量定理： $M_z = \dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$



直角坐标系中质点在z轴方向的力矩

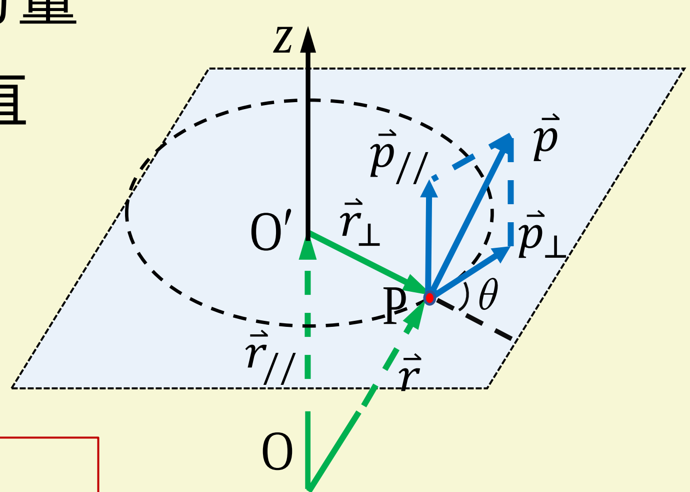
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel) \times (\vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel)$$

$$= \boxed{\vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp} + \boxed{\vec{r}_\perp \times \vec{F}_\parallel + \vec{r}_\parallel \times \vec{F}_\perp} + \boxed{\vec{r}_\parallel \times \vec{F}_\parallel}$$

$\vec{r}_\parallel \times \vec{F}_\parallel = 0$　　$\vec{r}_\parallel$和$\vec{F}_\parallel$均为平行于z轴方向的分量

$\vec{r}_\perp \times \vec{F}_\parallel$，$\vec{r}_\parallel \times \vec{F}_\perp$　叉乘后的方向均与z轴垂直

$$\boxed{\vec{M}_z = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp \qquad M_z = r_\perp F_\perp sin\varphi}$$



同理可得：

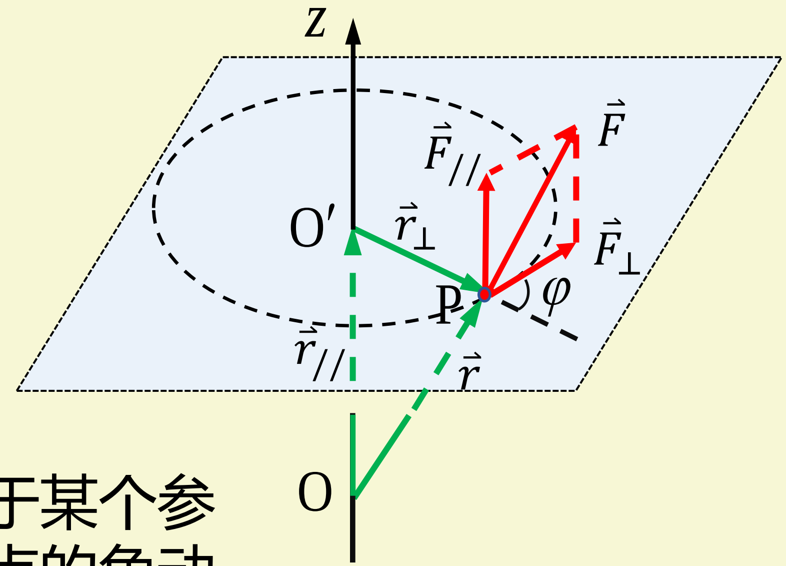
$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \vec{L}_z = \vec{r}_\perp \times \vec{p}_\perp \qquad L_z = r_\perp p_\perp sin\varphi}$$

质点动力学——角动量和角动量守恒定律

4、质点的角动量守恒定律

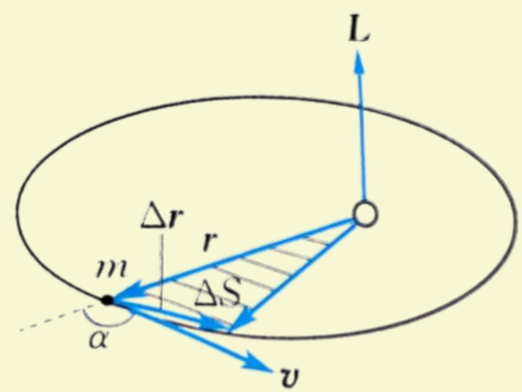
$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}$ =常矢量。



质点的角动量守恒定律：如果质点相对于某个参考点所受的合外力矩为零，则质点对该点的角动量保持不变。

开普勒第二定律：行星相对太阳的矢径在相等的时间内扫过的面积相等——利用角动量守恒定律可以证明(阅读教材P48)。

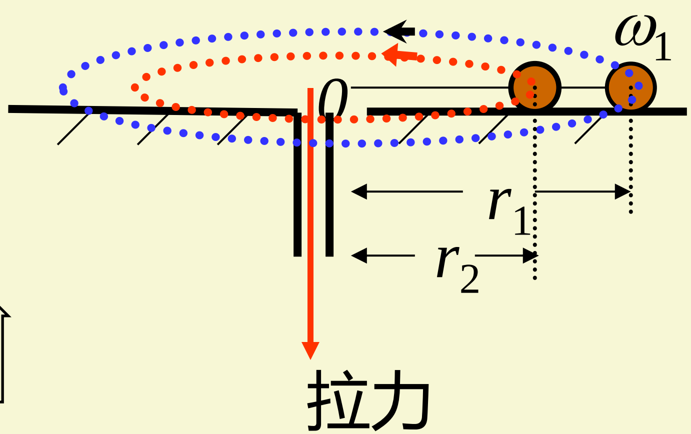


质点动力学——角动量和角动量守恒定律

例2.14：如图所示,一绳拉小球在桌面上作圆周运动,初始角速度和初始位置分别为ω_1和r_1 ;现用力拉绳使小球至r_2处作圆周运动,求ω_2 .

解：绳给小球的拉力过0点,对0点力矩为零.

所以,小球对0点的角动量守恒.



初：$L_1 = r_1 P_1 = r_1 m \upsilon_1$

$\because \upsilon_1 = r_1 \omega_1 \qquad \therefore L_1 = m r_1^2 \omega_1$, 方向 $\Uparrow$

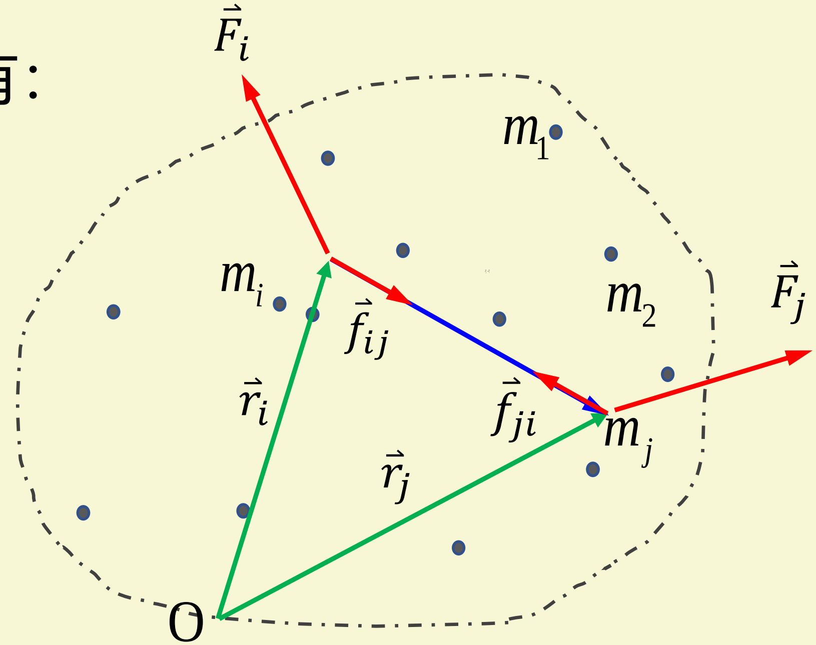
末：$L_2 = r_2 p_2 = m r_2^2 \omega_2$, 方向 $\Uparrow$

$\because \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \qquad \therefore r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2 \qquad \omega_2 = \dfrac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1$

三、质点系的角动量定理

由N个质点组成的质点系，对第i个质点有：

$$\vec{M}_i=\frac{d\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}\qquad \vec{M}_i=\vec{M}_{i外}+\vec{M}_{i内}=\frac{d\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$



$\vec{M}_{i外}$：系统以外的物体作用在第i个质点上的外力相对于参考点产生的力矩。

$\vec{M}_{i内}$：系统内其他质点作用在第i个质点上的内力相对于同一参考点产生的力矩。

考虑系统所有质点：$\vec{M}=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{i外}+\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{i内}=\frac{\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i)}{\mathrm{d}t}$

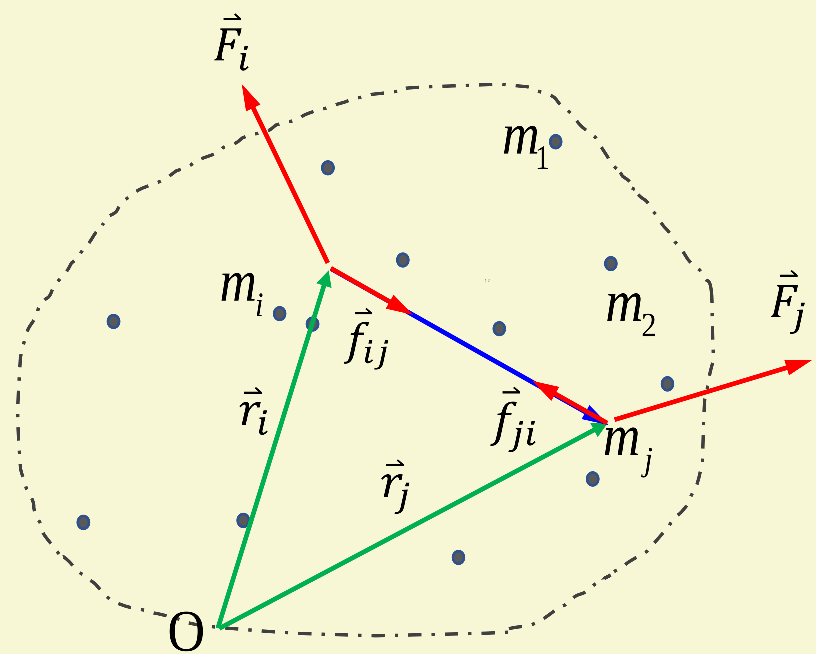
质点动力学——角动量和角动量守恒定律

三、质点系的角动量定理

考虑系统所有质点： $\vec{M}=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{i外}+\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{i内}=\dfrac{\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i)}{\mathrm{d}t}$

一对内力对同一参考点的力矩之和为零： $\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}=(\vec{r}_j-\vec{r}_i)\times\vec{f}_{ji}=0$

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{i内}=0\Rightarrow\boxed{\vec{M}=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{i外}=\frac{d\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$



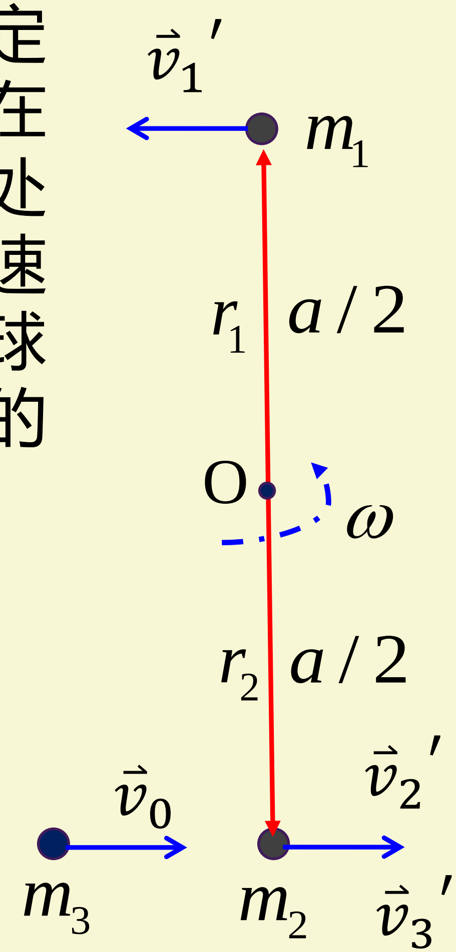
质点系的角动量定理: 质点系所受的合外力矩，等于系统角动量对时间的变化率。

质点系的角动量守恒定律:

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}=$常矢量。

质点动力学——角动量和角动量守恒定律

例2.15：一质量分别为m_1和m_2的两个小钢球固定在一个长为a的轻质硬杆的两端，杆的中点固定在一可使杆在水平面内自由转动的轴上，杆开始处于静止状态。另有一泥球，质量为m_3，以水平速度v_0沿垂直于杆的方向与m_2发生碰撞，碰后两球粘在一起。设$m_1 = m_2 = m_3$，求碰撞后杆转动的角速度。



解：在三个质点构成的质点系中，相对于杆的中点，碰撞过程中合外力矩为零，因此，对此转动中心O，质点系的角动量守恒。

设杆碰撞后角速度为ω

碰撞后三质点的速率为 $v_1' = v_2' = v_3' = \omega \cdot \dfrac{a}{2}$

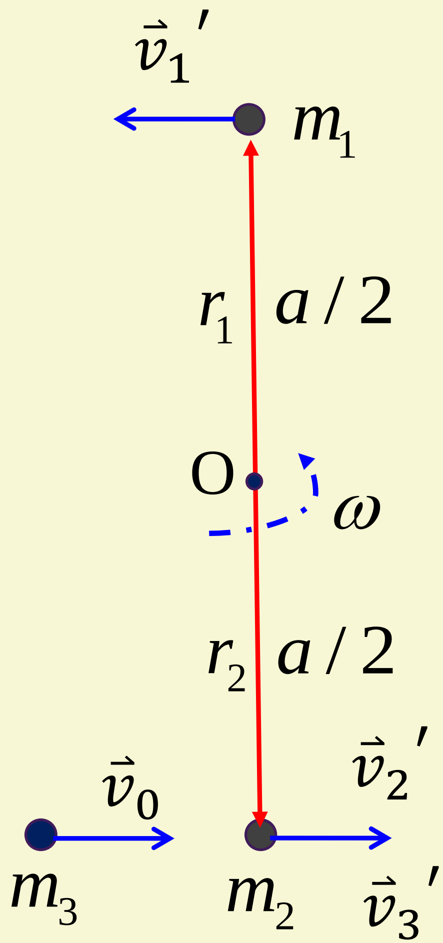
碰撞前系统的角动量 $\vec{r}_2 \times (m_3 \vec{v}_0)$

碰撞后系统的角动量

$$\vec{r}_2 \times (m_1 \vec{v}_1') + \vec{r}_2 \times (m_2 \vec{v}_2') + \vec{r}_2 \times (m_3 \vec{v}_3')$$

$$r_2 m_3 v_0 = r_2 m_1 v_1' + r_2 m_2 v_2' + r_2 m_3 v_3'$$

$$\left.\begin{aligned} & m_1 = m_2 = m_3 \\ & v_1' = v_2' = v_3' = \omega \cdot \frac{a}{2} \\ & r_1 = r_2 = r_3 = \frac{a}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \omega = \frac{2v_0}{3a}$$

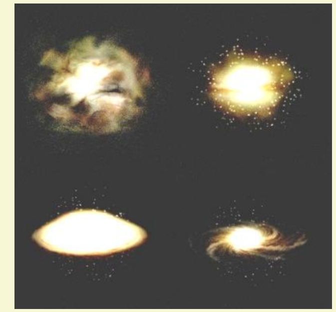


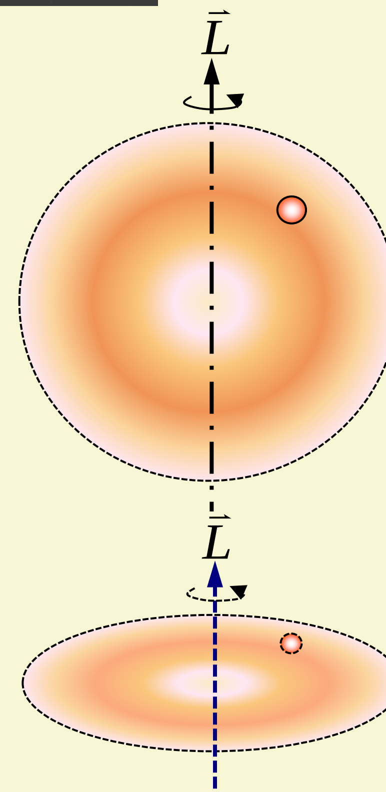
质点动力学——角动量和角动量守恒定律

银河系为何是碟盘状的旋涡星系?

银河系侧视图

银河系俯视图





参考解答:　弥漫在很大的空间中的原始气云可以看作是孤立系统,具有初始角动量。

在万有引力(内力)的作用下气云逐渐收缩,由于角动量守恒,气云绕转动中心轴的旋转速率增大。而惯性离心力也必定随之增大,从而在垂直于L的方向上阻止气云的进一步收缩;

但在平行于L的方向上,却不存在惯性离心力来阻止气云的收缩,于是天体系统就朝着一个旋转的盘状结构演化,盘面垂直于L。银河系即是如此。

质点动力学——角动量和角动量守恒定律

动量定理

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \Delta \vec{P}$$

$$\vec{F} = 0 \quad \Delta\vec{P} = 0$$

角动量定理

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = \Delta \vec{L}$$

$$\vec{M} = 0 \quad \Delta\vec{L} = 0$$

$\vec{F}$ 力

$\vec{P}$ 动量

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$ 力的冲量

$\vec{M}$ 力矩

$\vec{L}$ 角动量或动量矩

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t$ 力矩的冲量或冲量矩

质点动力学——作业2

1. 练习册B（第2章 质点动力学）

选择：7-10；填空：5-9; 计算：4-7；研讨：3-5

2. 自己学习角动量部分，看智慧树课堂角动量部分；