2023-2024-2 学期高等数学 A(2) 试题参考答案

一、计算题 I（每小题 6 分，共 42 分）

1. 求过点 $(1,0,-2)$ 且与两平面 $\Pi_1: x-4z=3,\ \Pi_2: 3x-y-5z=1$ 均平行的直线方程.

解 所求直线的方向向量为 $\vec{s}=(1,0,-4)\times(3,-1,-5)=(-4,-7,-1)$

故过点 $(1,0,-2)$ 的直线方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z+2}{1}$.

2. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？偏导数是否存在？

解 函数在原点不连续. 事实上，取 $y=kx, k\neq 0$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(k^2+1)x^2}=\frac{k}{k^2+1},$$

其值与 k 相关，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在. 因在点 $(0,0)$ 处，按偏导数的定义，有

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ \ f_y'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

(或由 $f(x,0)=0, f(0,y)=0$ 得 $f_x'(0,0)=0,\ \ f_y'(0,0)=0$).

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数均存在.

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(xy,z-2x)=0$ 所确定的隐函数, 其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数, 求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解法一 令 $G(x,y,z)=F(xy,z-2x)$, 则 $G_x'=yF_1'-2F_2', G_y'=xF_1', G_z'=F_2'$.

于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{G_x'}{G_z'}=-\dfrac{yF_1'-2F_2'}{F_2'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{G_y'}{G_z'}=-\dfrac{xF_1'}{F_2'}$，从而 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x$.

解法二 在方程两边分别对 x, y 求偏导数，得

$$yF_1' + (\frac{\partial z}{\partial x} - 2)F_2' = 0, \ xF_1' + \frac{\partial z}{\partial y}F_2' = 0,$$

故有 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yF_1' - 2F_2'}{F_2'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xF_1'}{F_2'}$，从而 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x.$

4. 设 $z = 2x + \sin\dfrac{y}{x}$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,\pi)}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2 - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{(1,\pi)} = 1.$$

5. 在曲面 $z = x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 - 1$ 上求一点，使它的切平面与平面 $2x + y + z = 0$ 平行，并求该点的切平面方程.

解 由曲面方程 $z = x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 - 1$ 知 $z_x' = 2x, \ z_y' = \dfrac{1}{2}y$，所以曲面在点

(x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为 $2x_0(x - x_0) + \dfrac{1}{2}y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$

要使切平面与平面 $2x + y + z = 0$ 平行，需满足 $\dfrac{2x_0}{2} = \dfrac{y_0/2}{1} = \dfrac{-1}{1},$

所以 $x_0 = -1, y_0 = -2$，将其代入曲面方程，得 $z_0 = 1$.

故所求切平面方程为 $-2(x+1) - (y+2) - (z-1) = 0$，即 $2x + y + z + 3 = 0.$

6. 计算二次积分 $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}y \int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

解法一 $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}y \int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 2$

解法二 $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}y \int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = [y\int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x]_0^\pi - \int_0^\pi y(-\frac{\sin y}{y})\mathrm{d}y$

$\displaystyle = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 2$

7. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}$的敛散性. 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

解 该级数为交错级数, 其一般项为$u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n}=\frac{1}{2}<1\ (\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^{n-1}}}=\frac{1}{2}<1\ ),$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}\right|$收敛, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}$绝对收敛.

8. 设区域Ω由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=9$围成, 计算三重积分$\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}v$.

解 由对称性知 $\iiint_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}y\,\mathrm{d}v=0$. 因此

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^9 z\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^9 z^2\mathrm{d}z=243\pi.$$

9. 设曲线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$与路径无关, 其中$\varphi(x)$可导且$\varphi(0)=0$, 求积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$的值.

解 令$P=xy^2,Q=y\varphi(x)$,

依题意有 $2xy=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi'(x)$, 即$\varphi'(x)=2x$,

积分可得 $\varphi(x)=x^2+C$. 又$\varphi(0)=0$, 故 $\varphi(x)=x^2$,

所以 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+yx^2\mathrm{d}y=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x+\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$

$$(\text{或}\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}(xy^2)=\frac{1}{2}xy^2\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}).$$

10. 计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面$z=0$及$z=1$之间部分的下侧.

解 设平面$\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$, 取上侧, Ω是Σ与Σ_1围成的区域.

由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(1+0-1)\mathrm{d}v=0.$$

Σ_1 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, 从而

$$\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\pi.$$

于是 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0-(-\pi)=\pi.$

11. 将函数 $f(x)=x\cos x^2$ 展开成麦克劳林级数，并求级数 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4!}-\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{6!}+\cdots$ 的和.

解 由 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$, 可得

$$x\cos x^2=x[1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}+\cdots]$$

$$=x-\frac{x^5}{2!}+\frac{x^9}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(2n)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty).$$

将上述结果在 $[0,1]$ 上积分得

$$\int_0^1 x\cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^1[x-\frac{x^5}{2!}+\frac{x^9}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(2n)!}+\cdots]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4!}-\cdots(-1)^n\frac{1}{(4n+2)}\cdot\frac{1}{(2n)!}+\cdots$$

故有 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4!}-\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{6!}+\cdots=\int_0^1 x\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin x^2\Big|_0^1=\frac{\sin 1}{2}.$

12. 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在闭区域 $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant 25\}$ 上的最大值和最小值.

解 (1) 区域 D 的内部为 $\{(x,y)|\ x^2+y^2<25\}$.

解方程组 $\begin{cases}f'_x=2x-12=0,\\ f'_y=2y+16=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=6,\\ y=-8,\end{cases}$

易知驻点 $(6,-8)$ 不在区域 D 的内部，故 $f(x,y)$ 的最值只可能在边界上取到.

(2) 在边界$x^2+y^2=25$上求最值.

令 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$,

解方程组$\begin{cases}F_x'=2x-12+2\lambda x=0,\\ F_y'=2y+16+2\lambda y=0,\\ F_\lambda'=x^2+y^2-25=0,\end{cases}$得 $\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=-4,\end{cases}\begin{cases}x_2=-3,\\ y_2=4,\end{cases}$

易得 $f(3,-4)=-75, f(-3,4)=125$, 故最大值为125, 最小值为-75.

注：本题也可利用$x^2+y^2=25$的参数方程求边界上的最值.

13. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=Rx(R>0)$ 内部的那部分的面积.

解 含在圆柱面$x^2+y^2=Rx\,(R>0)$内部且位于xOy面上方的曲面方程为

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 于是有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant Rx, y\geq 0\}$, 则曲面的对称性得所求面积为

$$S=4\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,\mathrm{d}r=2R^2(\pi-2).$$

14. 设$u_n>0\,(n=1,2,\cdots)$, 且数列$\{u_n\}$单调递减, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$发散, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+u_n}\right)^n$收敛.

证 因为数列 u_n 单调递减, 且$a_n>0$, 所以存在$a\geqslant 0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.

若$a=0$, 则由莱布尼茨判别法得原级数收敛, 此与条件矛盾, 所以 $a>0$.

方法一 令$x_n=\left(\dfrac{1}{1+u_n}\right)^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+u_n}=\dfrac{1}{1+a}<1$,

由根值判别法知, 所给级数收敛.

方法二 存在$N>0$，当$n\geqslant N$时，有$u_n>\frac{a}{2}>0$，即有

$$\frac{1}{(1+u_n)^n}<\frac{1}{(1+a/2)^n},$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a/2)^n}$收敛，故由比较判别法知所给级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+u_n)^n}$收敛.