湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 微 分 学

2.3 多元函数的导数

• 主 讲: 于 红 香

第二章　多元函数微分学

第三节 多元函数的导数

一、偏导数的定义

二、偏导数的计算

三、偏导数的几何意义

四、可偏导与连续的关系

第三节 多元函数的导数

本节学习要求：

- 正确理解多元函数的全增量、偏增量的概念。
- 正确理解偏导数的概念。
- 了解偏导数的几何意义。
- 熟练掌握偏导数的计算方法。
- 会利用定义计算偏导数。

一元函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数定义**:

如何推广到多元函数的导数?

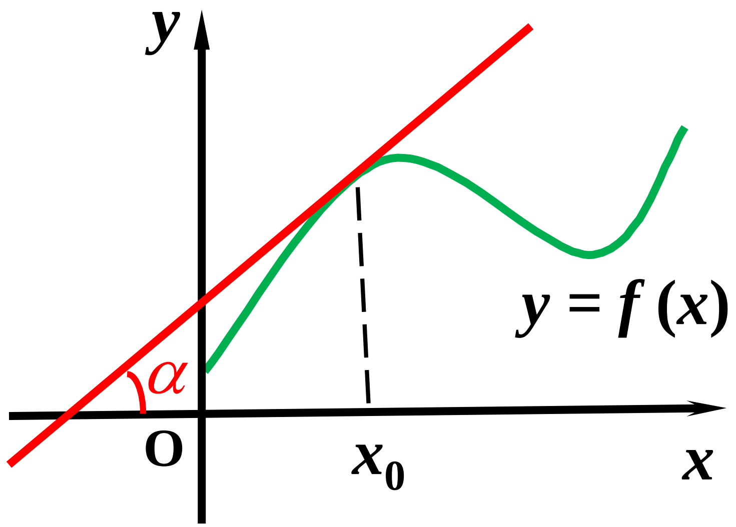
设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，且极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=a$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，

极限值 a 称为函数在该点的导数，记为

$$f'(x_0)=a$$



$$f'(x_0)=\tan\alpha$$

二元函数的偏增量和全增量：

空间 R^2 中: 函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0) 处的

偏增量为:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

及$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

全增量为:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

或 $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$

二元函数的偏导数定义

设 $z = f(x, y)$ 在 $\mathrm{U}(x_0,y_0)$ 内有定义，且极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x} = a$$

存在，则称函数在点 (x_0, y_0) 处对 x 可偏导，极限值a 称为函数$z = f(x, y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为

$$f'_x(x_0, y_0) = a\,,\ z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = a\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = a\,,\ \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = a\,,\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = a.$$

二元函数的偏导数定义

设 $z=f(x,y)$ 在 $U(x_0,y_0)$ 内有定义，且极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=b$$

存在，则称函数在点 (x_0,y_0) 处对 y 可偏导，极限值 b 称

为函数 $z=f(x,y)$ 在 点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记为

$$f_y'(x_0,y_0)=b,\quad z_y'\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=b,\quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=b,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=b,\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=b,$$

若函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处关于变量x 和y 的偏导数均存在,则称函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可偏导.

一、偏导数的定义

若函数$f(x, y)$在区域D内的任一点(x, y)处对 x 的偏导都存在，该偏导为 x, y 的函数，称为z**对x 的偏导函数**，简称偏导数，

记作：$f_x'(x,y)$ z_x' $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$$\boxed{f_x'(x_0, y_0) = f_x'(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}}$$

若函数$f(x, y)$在区域D内的任一点(x, y)处对 y 的偏导都存在，该偏导为 x, y 的函数，称为z**对y 的偏导函数**，简称偏导数，

记作：$f_y'(x,y)$ z_y' $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\boxed{f_y'(x_0, y_0) = f_y'(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}}$$

偏导数的计算方法

对于n元函数求偏导数时,只要将 n 个自变量中的某一个看成变量,其余的 $n-1$个自变量均视为常数,然后按一元函数的求导方法进行计算即可.

一、偏导数的定义

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\boxed{y})-f(x,\boxed{y})}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\boxed{y_0})-f(x_0,\boxed{y_0})}{\Delta x}=\left.\frac{\mathrm{d}\,f(x,y_0)}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=x_0}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\mathrm{d}\,f(x,y_0)}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=x_0}=f_x'(x,\boxed{y})\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

【例】求 $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ 在点 (1, 2) 处的偏导数 .

【解法1】用定义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(1+\Delta x)^2+6(1+\Delta x)+2^2]-11}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+8\Delta x}{\Delta x}=8.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,2+\Delta y)-f(1,2)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[1+3(2+\Delta y)+(2+\Delta y)^2]-11}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y^2+7\Delta y}{\Delta y}=7.$$

【例】求 $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,\ 2)$ 处的偏导数 .

【解法2】代-导-代

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,\,y_0)}=\left.\frac{\mathrm{d}\,f(x,y_0)}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=x_0}$$

因为 $f(x,\boxed{2})=x^2+6x+4$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,\,2)}=\left.\frac{\mathrm{d}\,f(x,2)}{\mathrm{d}\,x}\right|_{y=2}=\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}}(x^2+6x+4)\Big|_{\boxed{x=1}}=8$$

因为 $f(1,y)=1+3y+y^2$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,\,2)}=\left.\frac{\mathrm{d}\,f(1,y)}{\mathrm{d}\,y}\right|_{y=2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}(1+3y+y^2)\Big|_{y=2}=7$$

【例】求 $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ 在点 (1, 2) 处的偏导数 .

【解法3】先导后代

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,\,y_0)}=\left.f_x'(x,y)\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

把y看做常数，对x求导

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,2)}=\left.\{(x^2)_x'+(3xy)_x'+(y^2)_x'\}\right|_{(1,\,2)}=\left.(2x+3y)\right|_{(1,2)}=8$$

把x看做常数，对y求导

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\,2)}=\left.\{(x^2)_y'+(3xy)_y'+(y^2)_y'\}\right|_{(1,\,2)}=\left.(3x+2y)\right|_{(1,2)}=7$$

【例】 求 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$ 的偏导数 .

【解】 将 y 看成常数 $\dfrac{1}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y}{x^2+y^2},$$

将 x 看成常数 $-\dfrac{x}{y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_y=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

二、偏导数的计算

【例】 求 $z = x^y \quad (x > 0, x \neq 1)$ 的偏导数 .

【解】

将 y 看成常数时, 是对幂函数求导.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$$

$$(x^a)' = a\,x^{a-1}$$

将 x 看成常数时, 是对指数函数求导.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

【练】 求下列函数的偏导数

$$u = x^{y^z}$$

【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y.$

【例】 求 $u=e^{x+xy^2-z^3}$ 的偏导数 .

【解】 $$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+xy^2-z^3}(1+y^2);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x+xy^2-z^3}2xy;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{x+xy^2-z^3}(-3z^2).$$

【练】 求下列函数的偏导数

$$F(x,y)=\int_{y}^{xy} f(s)ds+\int_{0}^{1} e^{x^2}dx$$

【解】 $$\frac{\partial F}{\partial x}=yf(xy),\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=xf(xy)-f(y).$$

【例】 在热力学中，已知压强 P、体积 V 和温度 T 之间满足关系 $PV = kT$，其中，k为常数，证明：$\boxed{\frac{\partial P}{\partial V}}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$.

P为函数，V为自变量

【证】 由关系 $PV = kT$ 得 $P = k\frac{T}{V}$ 故 $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{kT}{V^2}$，

类似可得 $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{k}{P}$，$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{k}$，

从而 $$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{kT}{V^2}\frac{k}{P}\frac{V}{k} = -\frac{kT}{PV} = -1.$$

注意！

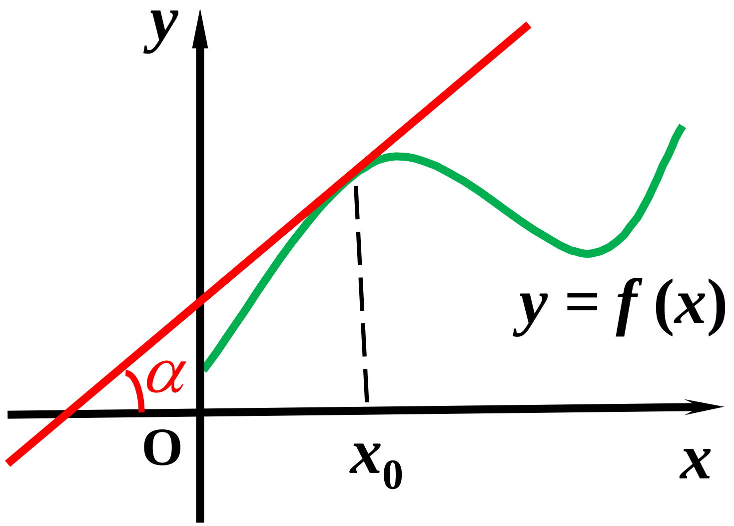
偏导数的符号 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 是一个整体记号,

不能像一元函数那样将 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 看成是

∂z 与 ∂x , ∂y 的商.

一元函数的导数的几何意义

平面上曲线的斜率！



$$f'(x_0) = \tan\alpha$$

二元函数的偏导数

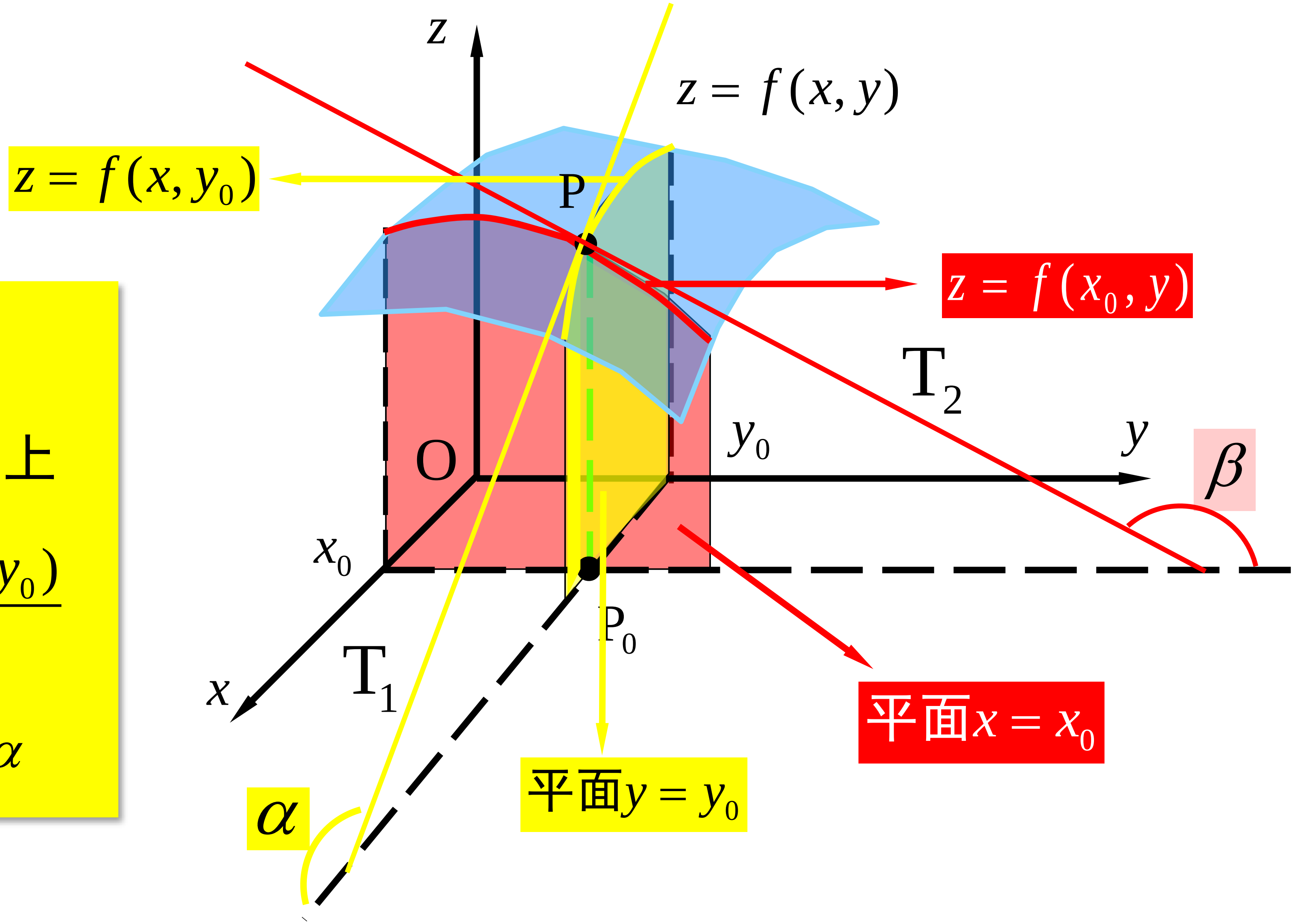
的几何意义呢？

是否一样？

在平面

$y = y_0$ 上

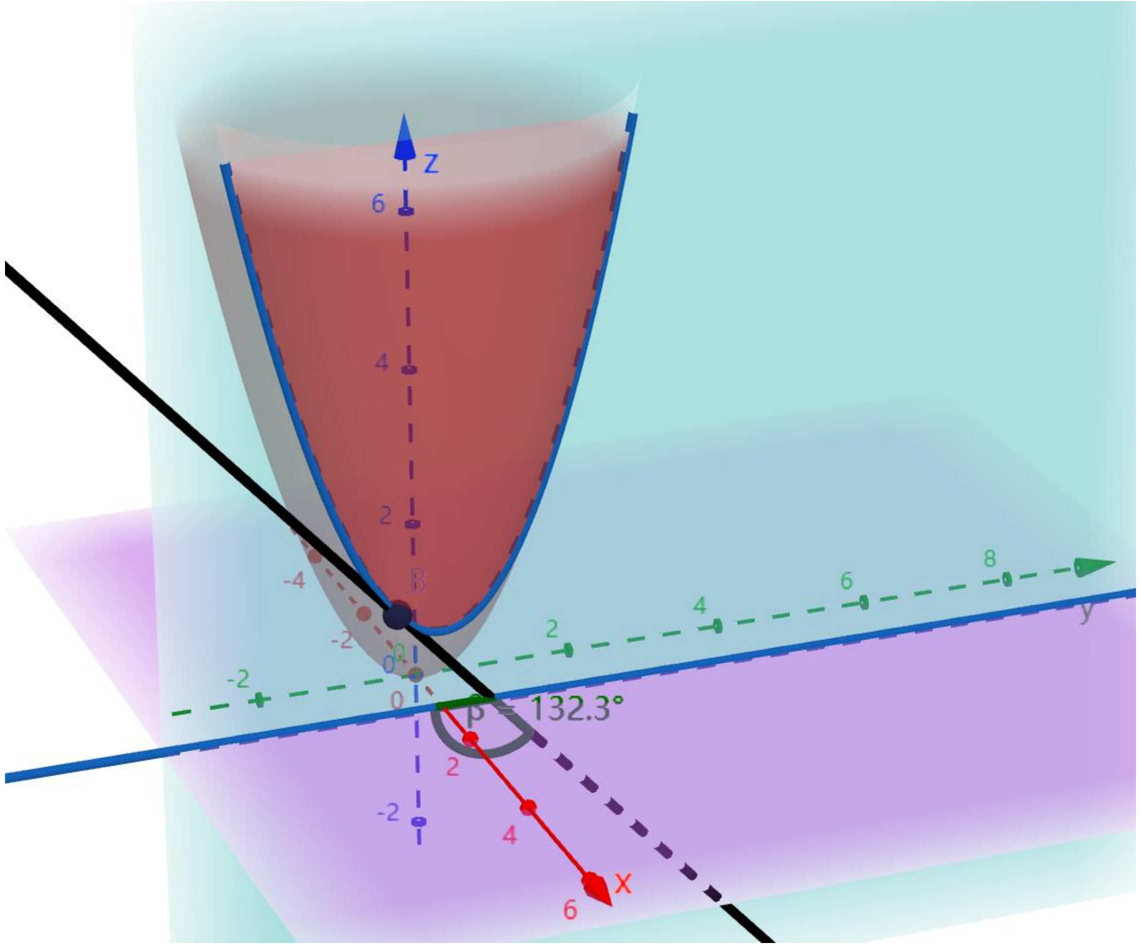
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \tan\alpha$$



在 平面

$x = x_0$ 上

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \tan\beta$$


z
6
4
2
-2
B
y
2
4
6
8
-2
-4
x
6
β = 132.3°

三、偏导数的几何意义

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) & y \in \mathrm{I}_1 \\ x = x_0 \end{cases}$

在点 $y = y_0$ 处切线对y轴的斜率 .

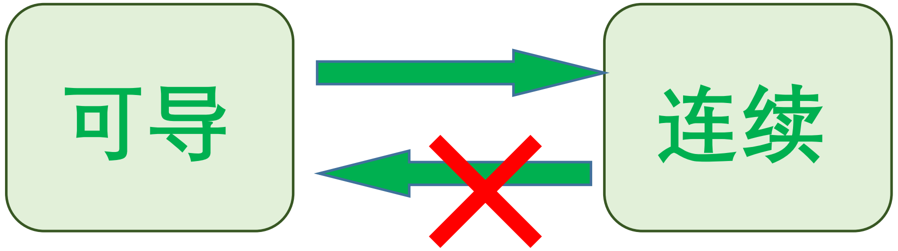
$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) & x \in \mathrm{I} \\ y = y_0 \end{cases}$

在点 $x = x_0$ 处切线对x轴的斜率 .

四、可偏导与连续的关系

一元函数：



多元函数：

可偏导与连续性的关系

是否依然是这样？

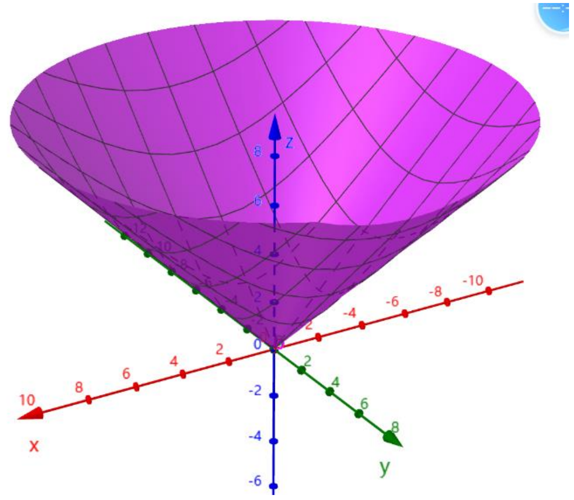
四、可偏导与连续的关系

【例】考查$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0,0)的连续性与偏导数。

【解】因$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0=z|_{(0,0)}$，故在(0, 0)处连续。

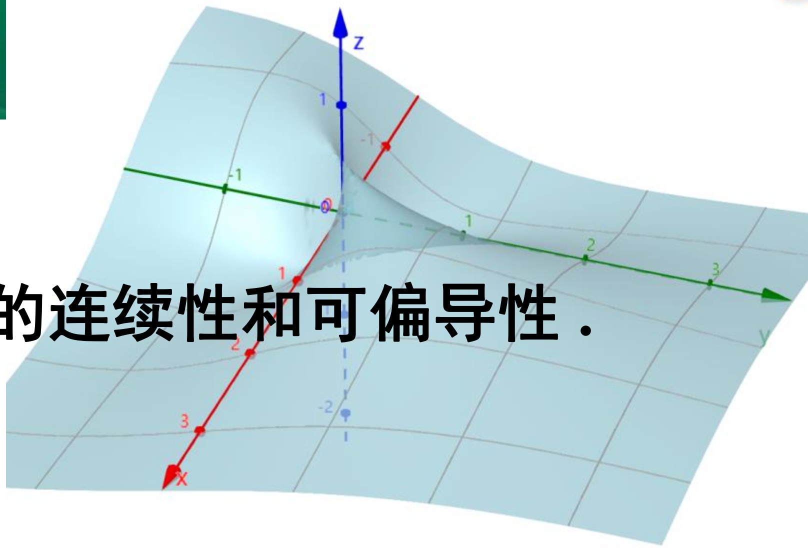
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$不存在。

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$不存在。



故$z=\sqrt{x^2+y^2}$在(0,0)处偏导数不存在。

四、可偏导与连续的关系



【例】讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 (0, 0) 处的连续性和可偏导性 .

【解】 取 $y=kx$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}\ .$$

由结果依赖路径，可知该极限不存在。

故函数 $f(x,y)$ 在点 (0, 0) 处不连续 .

但 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$,

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0\ ,$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 (0, 0) 处可偏导, 且

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0\ ,\qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0\ .$$

对多元函数来说,函数的偏导数存在与否与函数的连续性无必然关系.

可导 $\not\rightleftarrows$ 连续

这是多元函数与一元函数的一个本质区别.

原因在哪里?

从偏导数的几何意义可知：

二元函数的偏导数存在，只是表明函数沿 x 轴和 y 轴方向是连续的，而二元函数在一点处连续必须是沿空间的任何方向均连续，故由偏导数存在不能推出函数连续.

设函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}, xy\neq 0 \\ 0, xy=0 \end{cases}$，求 $f_x'(x,y)$.

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=2x\arctan\dfrac{y}{x}-y, xy\neq 0 \\ f_x'(0,y)=-y \\ f_x'(x,0)=0 \end{cases}$$

思考题2

讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{x^6+(y-x^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,\ 0)$ 处的连续性和可偏导性 .

不连续，可偏导。

本节重点

多元函数偏导数的定义及计算

判断函数在给定点的连续性和可偏导性

偏导数的几何意义