一、根据地质知识，(1)矿场中如果含有物质 A 肯定有物质 B 且没有物质 C；(2 若有物质 C 肯定有物质 D（3）经测定当前矿物中可能有 A 也可能有 D 但二者不可能同时有。请确 定各物质出现的可能性。请将这 3 个条件写成命题公式，用等值演算或（不可兼或）真值表得到类似于 $m00 \vee m11=(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ 的主析取范式(既要形如 $m00 \vee m11$ 的范式，又要形如 $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ 范式)，最后得到答案。

解（A 和 D 有且仅有一个，先分配后两项）：由题意可得，条件为：

1）$A \rightarrow (B \wedge \neg C)$ 为真

2）$C \rightarrow D$ 为真

3）$(A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D)$ 为真

即 $(A \rightarrow (B \wedge \neg C)) \wedge (C \rightarrow D) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D)) \Leftrightarrow 1$

$(A \rightarrow (B \wedge \neg C)) \wedge (C \rightarrow D) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg C \vee D) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D))$ 条件式转析取

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge ((\neg C \wedge A \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge \neg A \wedge D) \vee (D \wedge A \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg A \wedge D))$ 后两项分配律

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge ((A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D))$ 化简(上式第 2 部分第 4 项基于幂等律化简、第 3 项为 0、第 2 项被第 4 项吸收）

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C \wedge A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge D)$ 分配律

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$ 化简（上式第 1 项为 0，第 2、3 项基于幂等律化简，第 4 项被第 1 项吸收）

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee C) \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$ 补充文字

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$ 分配律

$\Leftrightarrow m0001 \vee m0011 \vee m0101 \vee m0111 \vee m1100$

所以各物质出现的可能性有 5 种：

1）只有 D，没有 A、B、C；2）只有 C 和 D，没有 A、B；3）只有 B 和 D，没有 A、C；

4）只有 B、C、D，没有 A；5）只有 A、B，没有 C、D。

解（A 和 D 有且仅有一个，先分配前两项）：由题意可得，条件为：

1）$A \to (B \wedge \neg C)$为真

2）$C \to D$ 为真

3）$(A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D)$ 为真

即$(A \to (B \wedge \neg C)) \wedge (C \to D) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D)) \Leftrightarrow 1$

$(A \to (B \wedge \neg C)) \wedge (C \to D) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg C \vee D) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D))$ 条件式转析取

$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C \wedge D)) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C)) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C \wedge A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge D \wedge A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D \wedge \neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C \wedge A \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee C) \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$ 补充文字

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$

分配律

⇔m0001vm0011vm0101vm0111vm1100

真值表：$(A\to(B\wedge\neg C))\wedge(C\to D)\wedge((A\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge D))$

A	B	C	D	$\neg C$	$B\wedge\neg C$	$A\to(B\wedge\neg C)$	$C\to D$	$(A\to(B\wedge\neg C))\wedge(C\to D)$	$\neg D$	$A\wedge\neg D$	$\neg A$	$\neg A\wedge D$	$(A\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge D)$	$(A\to(B\wedge\neg C))\wedge(C\to D)\wedge((A\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge D))$
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

真值表：(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧((A∧¬D)∨(¬A∧D))

A	B	C	D	(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧((A∧¬D)∨(¬A∧D))
0	0	0	0	1 01 1 1 $\boxed{0}$ 01 0 1 0
0	0	0	1	1 01 1 1 $\boxed{1}$ 00 1 1 1
0	0	1	0	1 00 0 0 $\boxed{0}$ 01 0 1 0
0	0	1	1	1 00 1 1 $\boxed{1}$ 00 1 1 1
0	1	0	0	1 11 1 1 $\boxed{0}$ 01 0 1 0
0	1	0	1	1 11 1 1 $\boxed{1}$ 00 1 1 1
0	1	1	0	1 00 0 0 $\boxed{0}$ 01 0 1 0
0	1	1	1	1 00 1 1 $\boxed{1}$ 00 1 1 1
1	0	0	0	0 01 0 1 $\boxed{0}$ 11 1 0 0
1	0	0	1	0 01 0 1 $\boxed{0}$ 00 0 0 0
1	0	1	0	0 00 0 0 $\boxed{0}$ 11 1 0 0
1	0	1	1	0 00 0 1 $\boxed{0}$ 00 0 0 0
1	1	0	0	1 11 1 1 $\boxed{1}$ 11 1 0 0
1	1	0	1	1 11 1 1 $\boxed{0}$ 00 0 0 0
1	1	1	0	0 00 0 0 $\boxed{0}$ 11 1 0 0
1	1	1	1	0 00 0 1 $\boxed{0}$ 00 0 0 0

解（A 和 D 最多有一个，先分配后两项）：由题意可得，条件为：

1）A→(B∧¬C)为真

2）C→D 为真

3）(A∧¬D)∨(¬A∧D)∨(¬A∧¬D)为真

即(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧((A∧¬D)∨(¬A∧D)∨(¬A∧¬D)) ⇔1

(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧((A∧¬D)∨(¬A∧D)∨(¬A∧¬D))

⇔(¬A∨(B∧¬C))∧(¬C∨D)∧((A∧¬D)∨(¬A∧D)∨(¬A∧¬D))　　　条件式转析取

⇔(¬A∨(B∧¬C))∧((¬C∧A∧¬D)∨(¬C∧¬A∧D)∨(¬C∧¬A∧¬D)∨(D∧A∧¬D)∨(D∧¬

A∧D)∨(D∧¬A∧¬D))　　后两项分配律

⇔(¬A∨(B∧¬C))∧((A∧¬C∧¬D)∨(¬A∧¬C∧¬D)∨(¬A∧D))　化简（上式第 2 部分第 4、6 项为 0，第 5 项基于幂等律化简，第 2 项被第 5 项吸收）

⇔(¬A∧A∧¬C∧¬D)∨(¬A∧¬A∧¬C∧¬D)∨(¬A∧¬A∧D)∨(B∧¬C∧A∧¬C∧¬D)∨(B∧¬C∧¬A∧¬C∧¬D)∨(B∧¬C∧¬A∧D)　　分配律

⇔(¬A∧¬C∧¬D)∨(¬A∧D)∨(A∧B∧¬C∧¬D)　　化简（上式第 1 项为 0，第 2、3、4、5 项基于幂等律化简，第 5 项被第 2 项吸收，第 6 项被第 3 项吸收）

⇔(¬A∧(¬B∨B)∧¬C∧¬D)∨(¬A∧(¬B∨B)∧(¬C∨C)∧D)∨(A∧B∧¬C∧¬D)　补充文字

⇔(¬A∧¬B∧¬C∧¬D)∨(¬A∧B∧¬C∧¬D)∨(¬A∧¬B∧¬C∧D)∨(¬A∧¬B∧C∧D)∨(¬A∧B∧¬C∧D)∨(¬A∧B∧C∧D)∨(A∧B∧¬C∧¬D)　分配律

⇔(¬A∧¬B∧¬C∧¬D)∨(¬A∧¬B∧¬C∧D)∨(¬A∧¬B∧C∧D)∨(¬A∧B∧¬C∧¬D)∨(¬A∧B∧¬C∧D)∨(¬A∧B∧C∧D)∨(A∧B∧¬C∧¬D)　调整顺序

⇔m0000∨m0001∨m0011∨m0100∨m0101∨m0111∨m1100

所以各物质出现的可能性有 7 种：

1）都没有；2）只有 D；3）只有 C、D；4）只有 B；5）只有 B 和 D；6）只有 B、C、D，没有 A；7）只有 A、B，没有 C、D。

解（A 和 D 最多有一个，先分配前两项）：由题意可得，条件为：

1）$A \to (B \wedge \neg C)$为真

2）$C \to D$ 为真

3）$(A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg D)$为真

即$(A \to (B \wedge \neg C)) \wedge (C \to D) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg D)) \Leftrightarrow 1$

$(A \to (B \wedge \neg C)) \wedge (C \to D) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg C \vee D) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg D))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C \wedge D)) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg D))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C)) \wedge ((A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C \wedge A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge \neg D) \vee$

$(\neg A \wedge D \wedge A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D \wedge \neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge D \wedge \neg A \wedge \neg D) \vee$

$(B \wedge \neg C \wedge A \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge (\neg B \vee B) \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee C) \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$　　补充文字

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$　　分配律

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$　　调整顺序

$\Leftrightarrow m_{0000} \vee m_{0001} \vee m_{0011} \vee m_{0100} \vee m_{0101} \vee m_{0111} \vee m_{1100}$

真值表：$(A\rightarrow(B\wedge\neg C))\wedge(C\rightarrow D)\wedge((A\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg D))$

A	B	C	D	$\neg C$	$B\wedge\neg C$	$A\rightarrow(B\wedge\neg C)$	$C\rightarrow D$	$(A\rightarrow(B\wedge\neg C))\wedge(C\rightarrow D)$	$\neg D$	$A\wedge\neg D$	$\neg A$	$\neg A\wedge D$	$(A\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge D)$	$\neg A\wedge\neg D$	$(A\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg D)$	$(A\rightarrow(B\wedge\neg C))\wedge(C\rightarrow D)\wedge((A\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg D))$
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

真值表：(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧((A∧¬D)∨(¬A∧D)∨(¬A∧¬D))

A	B	C	D	(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧((A∧¬D)∨(¬A∧D)∨(¬A∧¬D))												
0	0	0	0	1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	$\boxed{0}$	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0	$\boxed{0}$	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	$\boxed{0}$	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	0	0

解

（A 和 D 最多有一个，否定 A 和 D 都有，¬(A∧D)为真

先分配前两项

）:

由题意可得，条件为：

1）A→(B∧¬C)为真

2）C→D 为真

3）¬(A∧D)为真

即$(A\to(B\wedge\neg C))\wedge(C\to D)\wedge(\neg(A\wedge D))\Leftrightarrow 1$

$(A\to(B\wedge\neg C))\wedge(C\to D)\wedge(\neg(A\wedge D))$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee(B\wedge\neg C))\wedge(\neg C\vee D)\wedge(\neg A\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow((\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge D)\vee(B\wedge\neg C\wedge\neg C)\vee(B\wedge\neg C\wedge D))\wedge(\neg A\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow((\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge D)\vee(B\wedge\neg C))\wedge(\neg A\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg A)\vee(\neg A\wedge D\wedge\neg A)\vee(B\wedge\neg C\wedge\neg A)\vee(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge D\wedge\neg D)\vee(B\wedge\neg C\wedge\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge D)\vee(B\wedge\neg C\wedge\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge(\neg B\vee B)\wedge\neg C\wedge(\neg D\vee D))\vee(\neg A\wedge(\neg B\vee B)\wedge(\neg C\vee C)\wedge D)\vee((\neg A\vee A)\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge D)\vee$

$(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C\wedge D)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg A\wedge B\wedge C\wedge D)\vee$

$(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(A\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C\wedge D)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg A\wedge B\wedge C\wedge D)\vee(A\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)$

$\Leftrightarrow m_{0000}\vee m_{0001}\vee m_{0011}\vee m_{0100}\vee m_{0101}\vee m_{0111}\vee m_{1100}$

所以各物质出现的可能性有 7 种：

1）都没有；2）只有 D；3）只有 C、D；4）只有 B；5）只有 B 和 D；6）只有 B、C、D，没有 A；7）只有 A、B，没有 C、D。

解（A 和 D 最多有一个，否定 A 和 D 都有，$\neg(A\wedge D)$为真

先分配后两项）:

由题意可得，条件为：

1）$A \to (B \wedge \neg C)$为真

2）$C \to D$ 为真

3）$\neg (A \wedge D)$为真

即$(A \to (B \wedge \neg C)) \wedge (C \to D) \wedge (\neg (A \wedge D)) \Leftrightarrow 1$

$(A \to (B \wedge \neg C)) \wedge (C \to D) \wedge (\neg (A \wedge D))$

$(A \to (B \wedge \neg C)) \wedge (C \to D) \wedge (\neg (A \wedge D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg C \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg A) \vee (D \wedge \neg D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg A \wedge D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge D) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge (\neg B \vee B) \wedge \neg C \wedge (\neg D \vee D)) \vee (\neg A \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee C) \wedge D) \vee ((\neg A \vee A) \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee$

$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee$

$(\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$

$\Leftrightarrow m0000 \vee m0001 \vee m0011 \vee m0100 \vee m0101 \vee m0111 \vee m1100$

解（A 和 D 最多有一个，否定 A 和 D 都有，¬(A∧D)为真

最后一项拆开分配（二分））:

由题意可得，条件为：

1）A→(B∧¬C)为真

2）C→D 为真

3）¬(A∧D)为真

即(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧(¬(A∧D)) ⇔1

(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧(¬(A∧D))

(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧(¬(A∧D))

⇔(¬A∨(B∧¬C))∧(¬C∨D)∧(¬A∨¬D)

⇔(¬A∧(¬A∨(B∧¬C))∧(¬C∨D))∨(¬D∧(¬A∨(B∧¬C))∧(¬C∨D))

⇔(¬A∧(¬C∨D))∨(¬D∧(¬A∨(B∧¬C))∧¬C)

⇔(¬A∧¬C)∨(¬A∧D)∨(¬A∧¬C∧¬D)∨(¬D∧B∧¬C∧¬C)

⇔(¬A∧¬C)∨(¬A∧D)∨(B∧¬C∧¬D)

⇔(¬A∧(¬B∨B)∧¬C∧(¬D∨D))∨(¬A∧(¬B∨B)∧(¬C∨C)∧D)∨((¬A∨A)∧B∧¬C∧¬D)

⇔(¬A∧¬B∧¬C∧¬D)∨(¬A∧¬B∧¬C∧D)∨(¬A∧B∧¬C∧¬D)∨(¬A∧B∧¬C∧D)∨

(¬A∧¬B∧¬C∧D)∨(¬A∧¬B∧C∧D)∨(¬A∧B∧¬C∧D)∨(¬A∧B∧C∧D)∨

(¬A∧B∧¬C∧¬D)∨(A∧B∧¬C∧¬D)

⇔(¬A∧¬B∧¬C∧¬D)∨(¬A∧¬B∧¬C∧D)∨(¬A∧¬B∧C∧D)∨(¬A∧B∧¬C∧¬D)∨(¬

A∧B∧¬C∧D)∨(¬A∧B∧C∧D)∨(A∧B∧¬C∧¬D)

⇔m0000∨m0001∨m0011∨m0100∨m0101∨m0111∨m1100

真值表：(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧(¬(A∧D))

A	B	C	D	¬C	B∧¬C	A→(B∧¬C)	C→D	(A→(B∧¬C))∧(C→D)	A∧D	¬(A∧D)	(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧¬(A∧D)
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0

真值表：(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧(¬(A∧D))

A	B	C	D	(A→(B∧¬C))∧(C→D)∧(¬(A∧D))							
0	0	0	0	1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	$\boxed{0}$	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0	$\boxed{0}$	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	$\boxed{0}$	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	$\boxed{0}$	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	$\boxed{0}$	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	$\boxed{0}$	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	$\boxed{0}$	0	1

二、根据地质知识，(1)矿场中如果含有物质 A 肯定有物质 B 且没有物质 C；(2)若有物 质 C 肯定有物质 D；(3)经测定当前矿物中可能有 A 也可能有 D，但二者不可能同时有。(4)现在已经确定当前矿物资中没有物质 D，请用假言推理规则确定是否含有 A、B、C 三种物质。 必须用自然推理的方式。

解(**A 和 D 有且仅有一个**)：由题意可得，已知：

1）A→(B∧¬C)为真

2）C→D 为真

3）(A∧¬D)∨(¬A∧D) 为真

4）¬D

A→(B∧¬C),C→D,(A∧¬D)∨(¬A∧D),¬D⇒

(1)¬D 为真	前提
(2)(A∧¬D)∨(¬A∧D)为真	前提
(3)¬(¬A∧D)→(A∧¬D)为真	(2)p∨q 为真⇒¬p→q 为真
(4)(A∨¬D)→(A∧¬D)为真	(3)德摩律
(5)A∨¬D 为真	(1)q 为真⇒p∨q 为真
(6)A∧¬D 为真	(5)(4)假言推理
(7)A 为真	(6)p∧q 为真⇒p 为真
(8)A→(B∧¬C)为真	前提
(9)B∧¬C 为真	(7)(8)假言推理
(10)B 为真	(9)p∧q 为真⇒p 为真
(11)¬C 为真	(9)p∧q 为真⇒q 为真

由上可得，含有 A、B，不含有 C。

解（**A 和 D 最多有一个**）: 由题意可得，已知：

1）A→(B∧¬C)为真

2）C→D 为真

3）(A∧¬D)∨(¬A∧D)∨(¬A∧¬D) 为真

4）¬D

$A \to (B \wedge \neg C), C \to D, (A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg D), \neg D \Rightarrow$

(1)$\neg D$ 为真 前提

(2)$C \to D$ 为真 前提

(3)$\neg D \to \neg C$ 为真 (2)$p \to q$ 为真$\Rightarrow \neg q \to \neg p$ 为真

(4)$\neg C$ 为真 (1)(3)假言推理

(5) $(A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg D)$为真 前提

(6)$A \vee \neg D$ 为真 (1)q 为真$\Rightarrow p \vee q$ 为真

(7)$\neg(\neg A \wedge D)$为真 (6)德摩律

(8)$(A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg D)$为真 (5)(7)消解法

(9)$(A \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee \neg D) \wedge \neg D$ 为真 (8)分配律

(10)$A \vee \neg D$ 为真 (1)q 为真$\Rightarrow p \vee q$ 为真

(11)$\neg A \vee \neg D$ 为真 (1)q 为真$\Rightarrow p \vee q$ 为真

(12)$A \to (B \wedge \neg C)$为真 前提

(13)$\neg(B \wedge \neg C) \to \neg A$ 为真 (12)$p \to q$ 为真$\Rightarrow \neg q \to \neg p$ 为真

(14)$(\neg B \vee C) \to \neg A$ 为真 (13)德摩律

由上可得，不含有 C，A、B 不确定。

解（**A 和 D 最多有一个，否定 A 和 D 都有，**$\neg(A \wedge D)$为真）: 由题意可得，已知：

1）$A \to (B \wedge \neg C)$为真

2）$C \to D$ 为真

3）$\neg(A \wedge D)$ 为真

4）$\neg D$

$A\to(B\wedge\neg C),C\to D,\ \neg(A\wedge D),\neg D\Rightarrow$

(1)$\neg D$ 为真 前提

(2)$C\to D$ 为真 前提

(3)$\neg D\to\neg C$ 为真 (2)$p\to q$ 为真$\Rightarrow\neg q\to\neg p$ 为真

(4)$\neg C$ 为真 (1)(3)假言推理

(5)$\neg(A\wedge D)$为真 前提

(6)$\neg A\vee\neg D$ 为真 (1)q 为真$\Rightarrow p\vee q$ 为真

(7)$A\to(B\wedge\neg C)$为真 前提

(8)$\neg(B\wedge\neg C)\to\neg A$ 为真 (7)$p\to q$ 为真$\Rightarrow\neg q\to\neg p$ 为真

(9)$(\neg B\vee C)\to\neg A$ 为真 (8)德摩律

由上可得，不含有 C，A、B 不确定。

三、请将如下语句转换为谓词逻辑并完成推理 :任何人如果不努力工作没有高薪资 ,任何 人如果努力工作就不会怨天忧人 ,并不是任何人都不会怨天忧人 ,结论是并非所有人薪资都高。

论域：家里没有家产可以继承的人，$W(x)$表示 x 人努力工作，$G(x)$表示 x 人高薪资，$Y(x)$表示 x 人怨天忧人。给出前提、结论及详细的推理过程。

解：由题意可得：

前提为：

1）$\forall x(\neg W(x)\rightarrow\neg G(x))$为真

2）$\forall x(W(x)\rightarrow\neg Y(x))$为真

3）$\neg\forall x\neg Y(x)$为真

结论为：$\neg\forall xG(x)$为真

$\forall x(\neg W(x)\rightarrow\neg G(x)),\forall x(W(x)\rightarrow\neg Y(x)),\neg\forall x\neg Y(x)\Rightarrow\neg\forall xG(x)$

(1)$\neg\forall x\neg Y(x)$为真	前提
(2)$\exists xY(x)$为真	(1)德摩律
(3)$Y(c)$为真	(2)存在指定,至少存在 c
(4)$\forall x(W(x)\rightarrow\neg Y(x))$为真	前提
(5)$W(c)\rightarrow\neg Y(c)$为真	(4)全称指定,尤其 x=c 为真
(6)$Y(c)\rightarrow\neg W(c)$为真	(5)$p\rightarrow q$ 为真$\Rightarrow\neg q\rightarrow\neg p$ 为真代换实例
(7)$\neg W(c)$为真	(3)(6)假言推理代换实例
(8)$\forall x(\neg W(x)\rightarrow\neg G(x))$为真	前提
(9)$\neg W(c)\rightarrow\neg G(c)$为真	(8)全称指定,尤其 x=c 为真
(10)$\neg G(c)$为真	(7)(9)假言推理代换实例
(11)$\exists x\neg G(x)$为真	(10)存在推广

(12)$\neg\forall xG(x)$为真 (11)德摩律

四、约定某个时刻，每结点发出一句话，然后各结点将收到的话转发出去，请问各结点能 收到自己发出去的句话吗？A 向 B 与 C 发送，B 向 D 与 E 发送，C 向 E 与 F 发送，D 向 A 与 C 发送，E 向 A 与 D 发送，F 向 C 与 B 发送。用 warshall 算法解答该问题。

解：

1）将题中话的转发用关系表示为：

R={<A,B>,<A,C>,<B,D>,<B,E>,<C,E>,<C,F>,<D,A>,<D,C>,<E,A>,<E,D>,<F,C>,<F,B>}

2）将关系 R 转为矩阵并用 warshall 算法计算关系 R 的传递闭包：

$$\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

(1)处理第1列:
第4,5行与第1行析取

$$\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

(2)处理第2列:
第1,4,5,6行与第2行析取

$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

(3)处理第3列:
第1,4,5,6行与第3行析取

$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

(4)处理第4列:
第1,2,5,6行与第4行析取

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

(5)处理第5列:
第1,2,3,4,6行与第5行析取

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

已经是全域关系，算法结束。

传递闭包主对角线全都是 1，所以最终每个结点都能收到自己发出的话。

五、G={0,4,8,12,16,20}，a*b 定义为(a+b)%24，写出其运算表。若构成群，则找出每个元素的周期、G 的非平凡子群的元素个数是哪些？各元素生成的循环子群，从非平凡子群中找出元素和最小的子群 H，写出 H 的所有陪集，写出 H 导出的关系

$R=\{<a,b>|a\in G,b\in G,a*b^{-1}\in H\}$ 的所有序偶，验证 R 是等价关系，找出 G 中各元素的等价类，验证[a]R=Ha，a 为 G 的任意元素。

解：

1）运算表为：

(a+b)%24	0	4	8	12	16	20
0	0	4	8	12	16	20
4	4	8	12	16	20	0
8	8	12	16	20	0	4
12	12	16	20	0	4	8
16	16	20	0	4	8	12
20	20	0	4	8	12	16

2）

封闭性：由运算表可知，∀x,y∈G 计算的结果仍然属于 G，所以该运算在 G 上封闭。

（或基于所有元素都是 4 的整倍数，24 也是 4 的整倍数去证）

可结合：因为对于∀x,y,z ∈G，都有：

(x*y)*z=((x+y)%24)+z)%24=(x+y+z)%24=(x+(y+z)%24)%24=x*(y*z)，所以该运算可结合。

单位元：因为对于∀x ∈G，都有：

x*0=0*x=(x+0)%24=x，所以该运算在集合 G 上有单位元 0；

逆元：因为对于∀x ∈G,都能在 G 中找到对应的 y=(24-x)%24，使得：

x*y=(x+y)%24=(x+(24-x)%24)%24=(x+24-x)%24=0，

即对于∀x ∈G,都有逆元 x^{-1}=y=(24-x)%24∈G

所以<G,*>构成群

3）各元素的周期为：

|0|=1，|4|=6，|8|=3，|12|=2，|16|=3，|20|=6

4）因为|G|=6=1*6=2*3，所以 G 的非平凡子群的元素个数为 2 或 3

5）各元素生成的循环子群：

<0>={0},<4>={0,4,8,12,16,20},<8>={0,8,16},<12>={0,12},

<16>=<8>={0，8，16},<20>=<4>={0,4,8,12,16,20}

6）元素个数为 2 的从非平凡子群为{0,12}，元素和为 12，G 中最小的 3 个元素为 0,4,8 和为 12，但是因为 4*8=12 不满足封闭性，所以{0,4,8}不是子群，因此元素和最小的非平凡子群 H={0,12}

7）H 的所有陪集为：

H_0={0,12}*0={0,12}

H_4={0,12}*4={4,16}

H_8={0,12}*8={8,20}

H_{12}={0,12}*12={0,12}

H_{16}={0,12}*16={4,16}

H_{20}={0,12}*20={8,20}

8）

令 R’={<a,b>|a∈G,b∈G,a*b∈H}，则

R’={<0,0>,<0,12>,<4,8>,<4,20>,<8,4>,<8,16>,<12,0>,<12,12>,<16,8>,<16,20>,<20,4>,<20,16>}

因为 $0^{-1}=0$, $4^{-1}=20$, $8^{-1}=16$, $12^{-1}=12$, $16^{-1}=8$, $20^{-1}=4$，所以

R={<a,b>|a∈G,b∈G,a*b^{-1}∈H}

={<0,0>,<0,12>,<4,4>,<4,16>,<8,8>,<8,20>,<12,0>,<12,12>,<16,4>,<16,16>,<20,8>,<20,20>}

9）

因为序偶<0,0>,<4,4>,<8,8>,<12,12>,<16,16>,<20,20>∈R，即对于∀x∈G 都有<x,x>∈R，所以关系 R 自反

因为对于 R 中所有非<x,x>类型的序偶<0,12>,<4,16>,<8,20>都有对称的序偶<12,0>,<16,4>,<20,8>∈R，所以关系 R 对称

因为对于 R 中所有非<x,x>类型的序偶<0,12>,<4,16>,<8,20>,<12,0>,<16,4>,<20,8>任意两两复合运算的结果<0,0>,<4,4>,<8,8>，都在 R 中，所以关系 R 可传递。

因此关系 R 是等价关系。

10）G 中各元素等价类为：

$[0]_R$={0,12}

$[4]_R$={4,16}

$[8]_R$={8,20}

$[12]_R=\{0,12\}$

$[16]_R=\{4,16\}$

$[20]_R=\{8,20\}$

11）显然

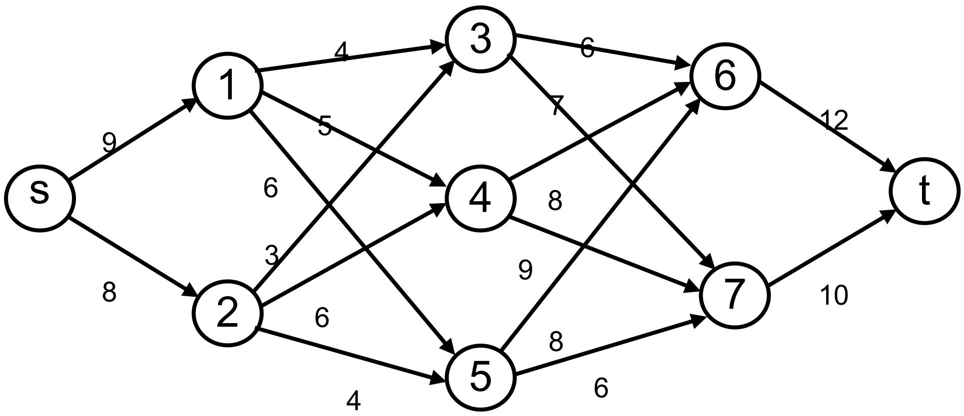
$[0]_R=\{0,12\}=\{0,12\}*0=\{0,12\}*12=[12]_R$

$[4]_R=\{4,16\}=\{0,12\}*4=\{0,12\}*16=[16]_R$

$[8]_R=\{8,20\}=\{0,12\}*8=\{0,12\}*20=[20]_R$

等价类与陪集完全一样。

六、将下图看成无向图，利用 Kruskal、管梅谷法、Prim 法求最小生成树，要写计算过程。



1）Kruskal 算法

首先取边权最小的边(2,3)，边权为 3，加入最小生成树 T={(2,3)}，边权和为 3,|T|=1；

继续取剩下的边中边权最小的边(1,3)，边权为 4，加入最小生成树 T={(2,3),(1,3)}，边权和为 7,|T|=2；

继续取剩下的边中边权最小的边(2,5)，边权为 4，加入最小生成树 T={(2,3),(1,3),(2,5)}，边权和为 11,|T|=3；

继续取剩下的边中边权最小的边(1,4) ,边权为 5 ,加入最小生成树 T={(2,3),(1,3),(2,5),(1,4)}，边权和为 16,|T|=4；

继续取剩下的边中边权最小的边(1,5)，构成回路，放弃；

继续取剩下的边中边权最小的边(2,4)，构成回路，放弃；

继续取剩下的边中边权最小的边(3,6)，边权为 6，加入最小生成树

T={(2,3),(1,3),(2,5),(1,4),(3,6)}，边权和为 22,|T|=5；

继续取剩下的边中边权最小的边(5,7)，边权为 6，加入最小生成树

T={(2,3),(1,3),(2,5),(1,4),(3,6),(5,7)}，边权和为 28,|T|=6；

继续取剩下的边中边权最小的边(3,7)，构成回路，放弃；

继续取剩下的边中边权最小的边(s,2)，边权为 8，加入最小生成树

T={(2,3),(1,3),(2,5),(1,4),(3,6),(5,7),(s,2)}，边权和为 36,|T|=7；

继续取剩下的边中边权最小的边(4,6) ，构成回路，放弃；

继续取剩下的边中边权最小的边(5,6)，构成回路，放弃；

继续取剩下的边中边权最小的边(s,1) ，构成回路，放弃；

继续取剩下的边中边权最小的边(4,7)，构成回路，放弃；

继续取剩下的边中边权最小的边(7,t)，边权为 10，加入最小生成树

T={(2,3),(1,3),(2,5),(1,4),(3,6),(5,7),(s,2),(7,t)}，边权和为 46,|T|=8=点数-1，算法结束。

2）管梅谷法

首先取边权最大的边(6,t)，边权为 12，在环中，去掉，剩余边数 15；

继续取剩下的边中边权最大的边(7,t)，边权为 10，不在环中，保留，剩余边数 15；

继续取剩下的边中边权最大的边(s,1)，边权为 9，在环中，去掉，剩余边数 14；

继续取剩下的边中边权最大的边(4,7)，边权为 9，在环中，去掉，剩余边数 13；

继续取剩下的边中边权最大的边(s,2)，边权为 8，不在环中，保留，剩余边数 13；

继续取剩下的边中边权最大的边(4,6)，边权为 8，在环中，去掉，剩余边数 12；

继续取剩下的边中边权最大的边(5,6)，边权为 8，在环中，去掉，剩余边数 11；

继续取剩下的边中边权最大的边(3,7)，边权为 7，在环中，去掉，剩余边数 10；

继续取剩下的边中边权最大的边(1,5)，边权为 6，在环中，去掉，剩余边数 9；

继续取剩下的边中边权最大的边(2,4)，边权为 6，在环中，去掉，剩余边数 8；

剩余边数等于点数减 1，算法结束，剩余的边构成的最小生成树为：

T={(s,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,5),(3,6),(5,7),(7,t)}，权重和为 8+4+5+3+4+6+6+10=46。

3）Prim 算法

V 为所有点集，以 s 为起点，初始点集 U={s}；

从 V-U 中到 U 中边权最小的边为(s,2)，加入最小生成树，U={s,2}，T={(s,2)}，边权和为 8；

从 V-U 中到 U 中边权最小的边为(2,3)，加入最小生成树，U={s,2,3}，T={(s,2),(2,3)}，边权和为 11；

从 V-U 中到 U 中边权最小的边为(1,3)，加入最小生成树，U={s,1,2,3}，T={(s,2),(2,3),(1,3)}，边权和为 15；

从 V-U 中到 U 中边权最小的边为(2,5)，加入最小生成树，U={s,1,2,3,5}，T={(s,2),(2,3),(1,3),(2,5)}，边权和为 19；

从 V-U 中到 U 中边权最小的边为(1,4)，加入最小生成树，U={s,1,2,3,4,5}，T={(s,2),(2,3),(1,3),(2,5),(1,4)}，边权和为 24；

从 V-U 中到 U 中边权最小的边为(3,6)，加入最小生成树，U={s,1,2,3,4,5,6}，T={(s,2),(2,3),(1,3),(2,5),(1,4),(3,6)}，边权和为 30；

从 V-U 中到 U 中边权最小的边为(5,7)，加入最小生成树，U={s,1,2,3,4,5,6,7}，T={(s,2),(2,3),(1,3),(2,5),(1,4),(3,6),(5,7)}，边权和为 36；

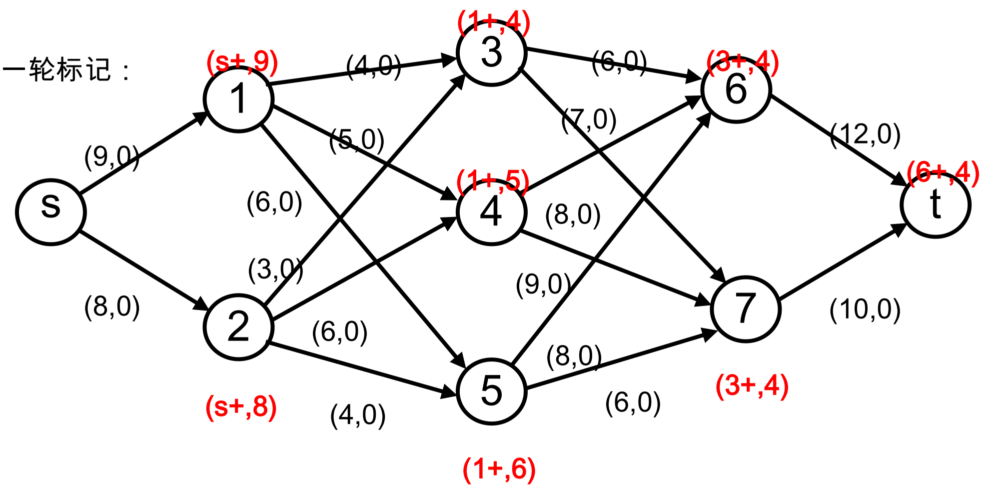
从 V-U 中到 U 中边权最小的边为(7,t)，加入最小生成树，U={s,1,2,3,4,5,6,7,t}，

T={(s,2),(2,3),(1,3),(2,5),(1,4),(3,6),(5,7),(7,t)}，边权和为 46；

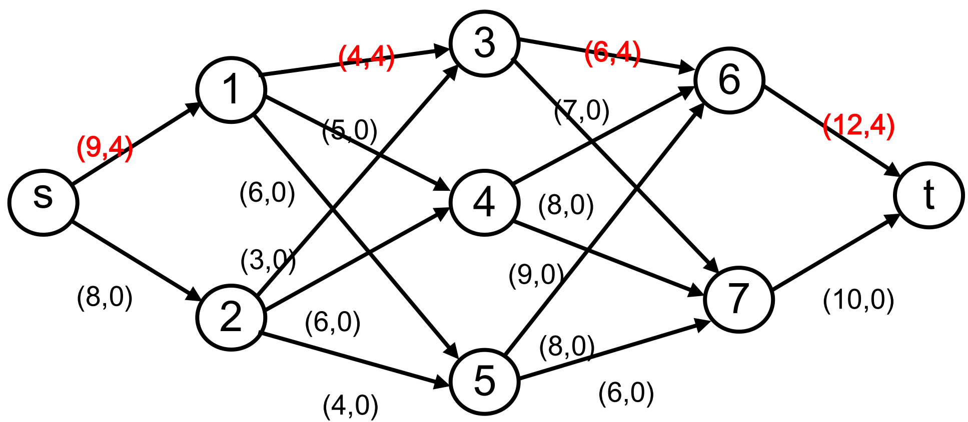
所有点都已经加入集合 U，算法结束。

七、利用 EK 方法求源头 s 到汇聚点 t 的最大流，并验证你的结果确为最大流。

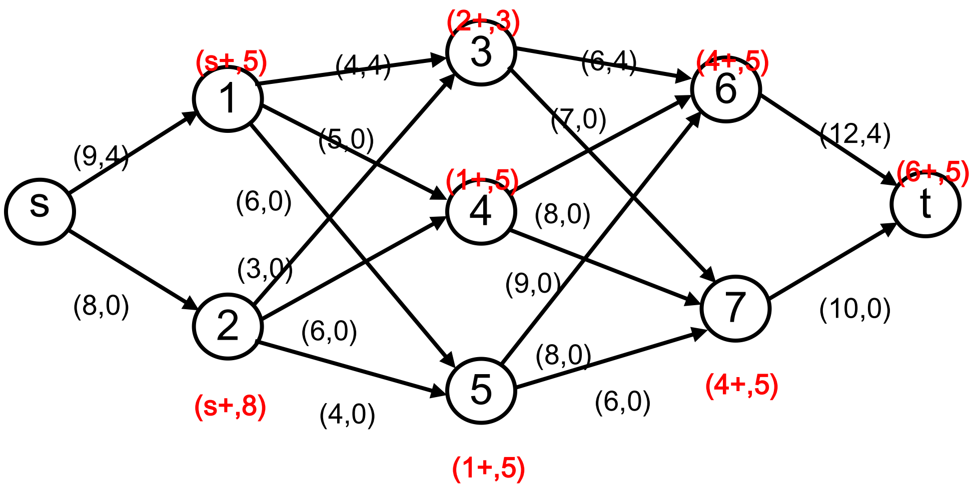
1)第一轮标记：



增流，得到增广路：s-1-3-6-t，流量为 4：

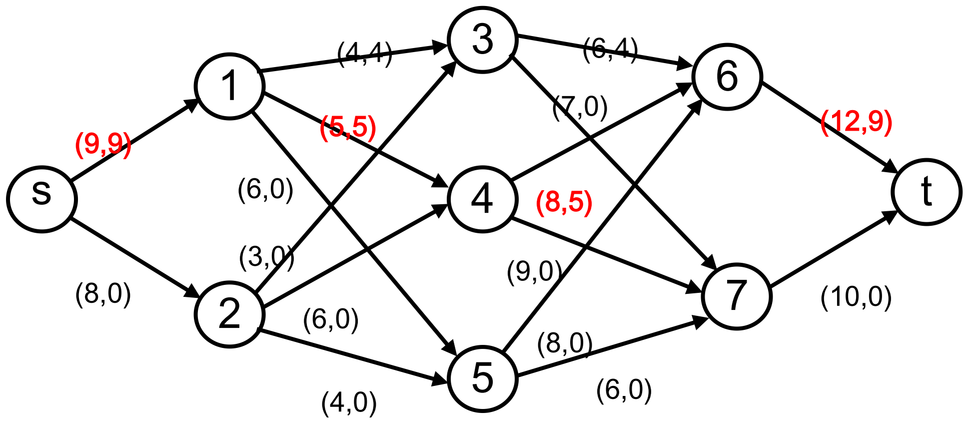


2)第二轮标记：

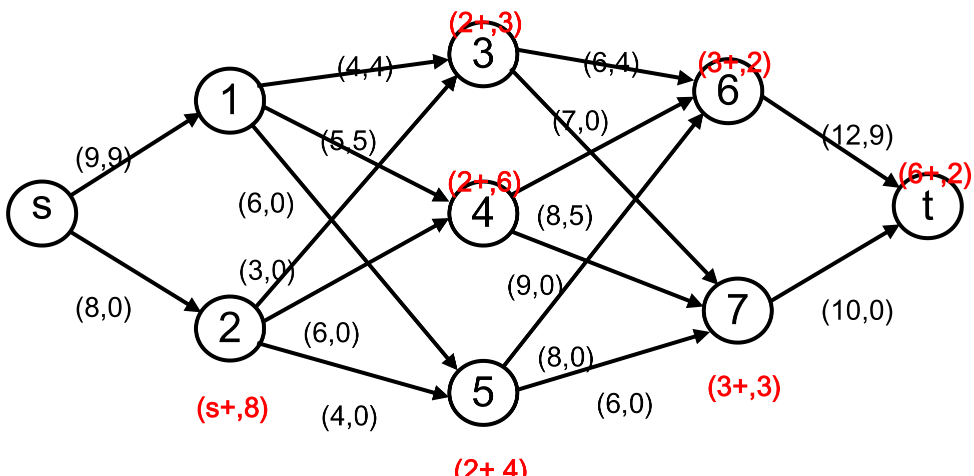


(s+,5)
(2+,3)
(4+,5)
(1+,5)
(6+,5)
(s+,8)
(1+,5)
(4+,5)
s
1
2
3
4
5
6
7
t
(9,4)
(8,0)
(4,4)
(5,0)
(6,0)
(3,0)
(6,0)
(4,0)
(6,4)
(7,0)
(8,0)
(9,0)
(8,0)
(6,0)
(12,4)
(10,0)

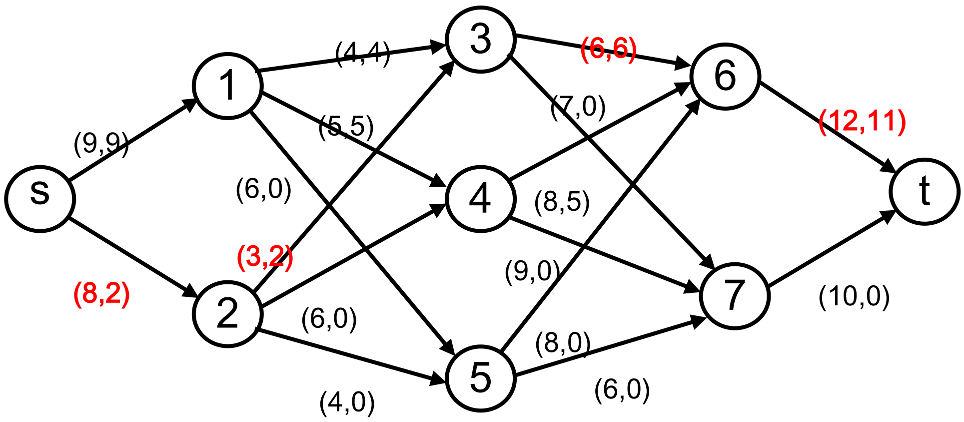
增流，得到增广路：s-1-4-6-t，流量为 5：



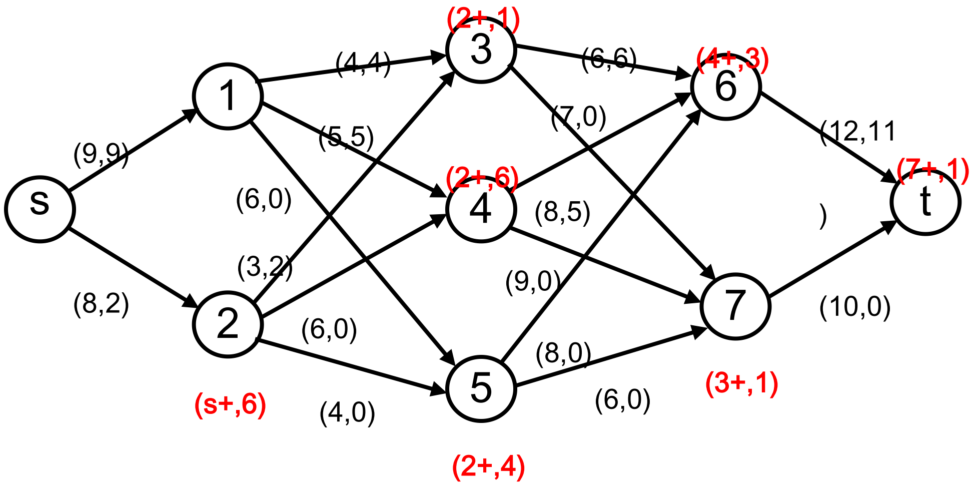
3)第三轮标记：



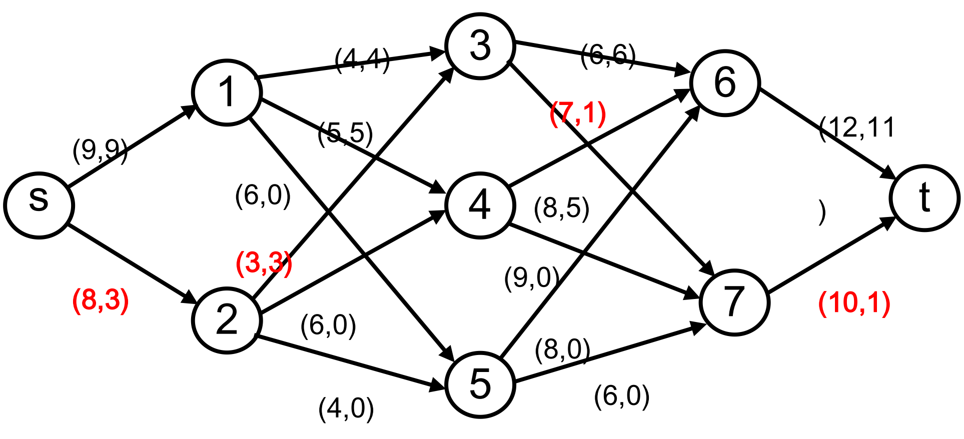
增流，得到增广路：s-2-3-6-t，流量为 2：



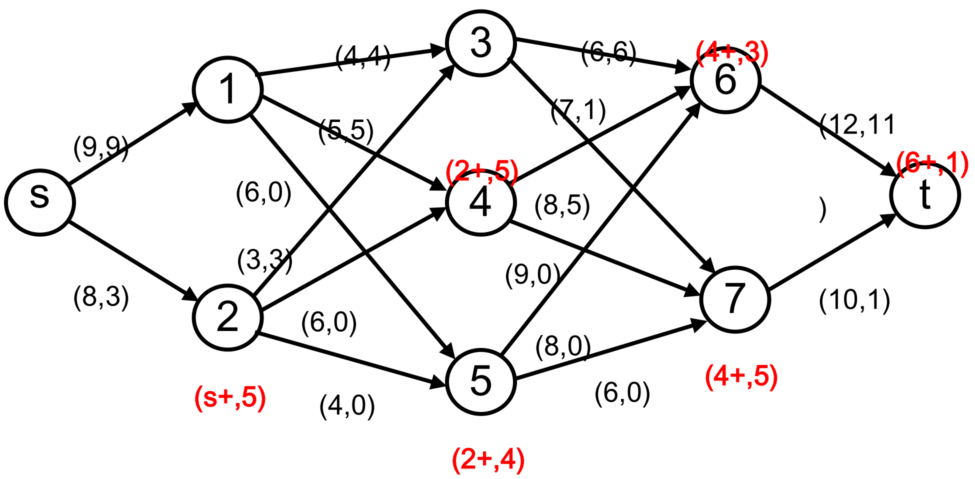
4)第四轮标记：



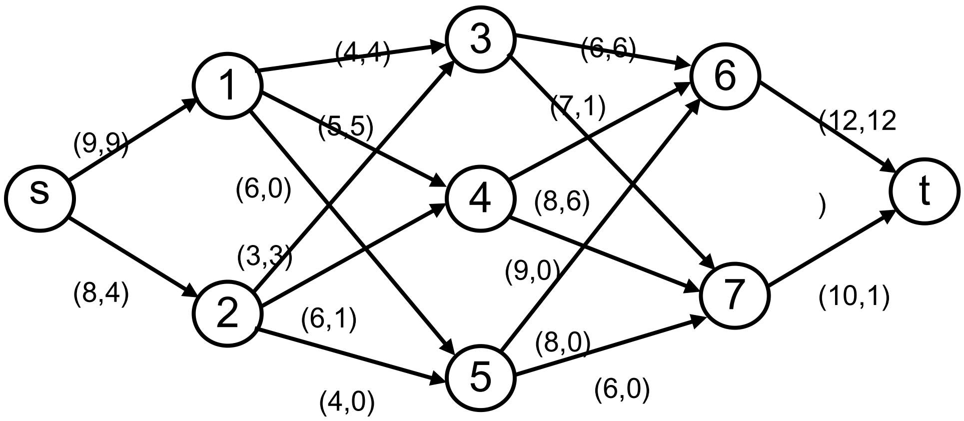
增流，得到增广路：s-2-3-7-t，流量为 1：



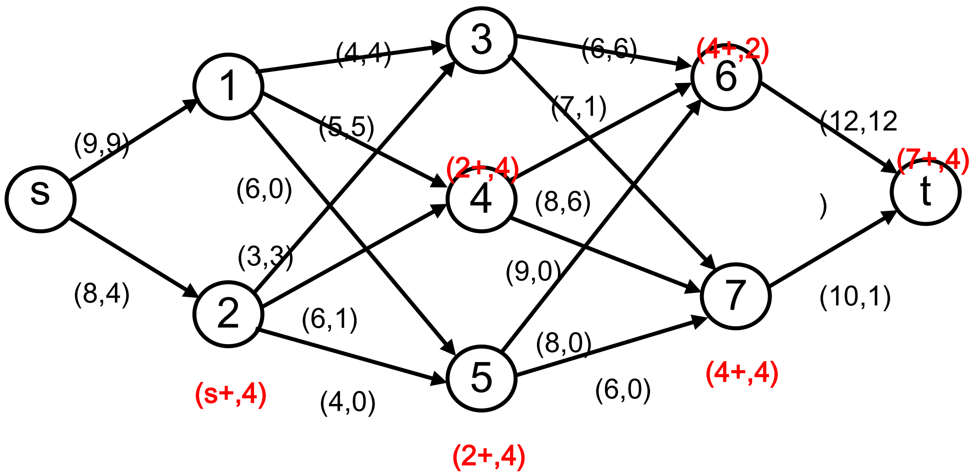
5)第五轮标记：


s
1
2
3
4
5
6
7
t
(9,9)
(8,3)
(4,4)
(5,5)
(6,0)
(3,3)
(6,0)
(4,0)
(6,6)
(7,1)
(8,5)
(9,0)
(8,0)
(6,0)
(12,11
)
(10,1)
(s+,5)
(2+,5)
(2+,4)
(4+,3)
(4+,5)
(6+,1)

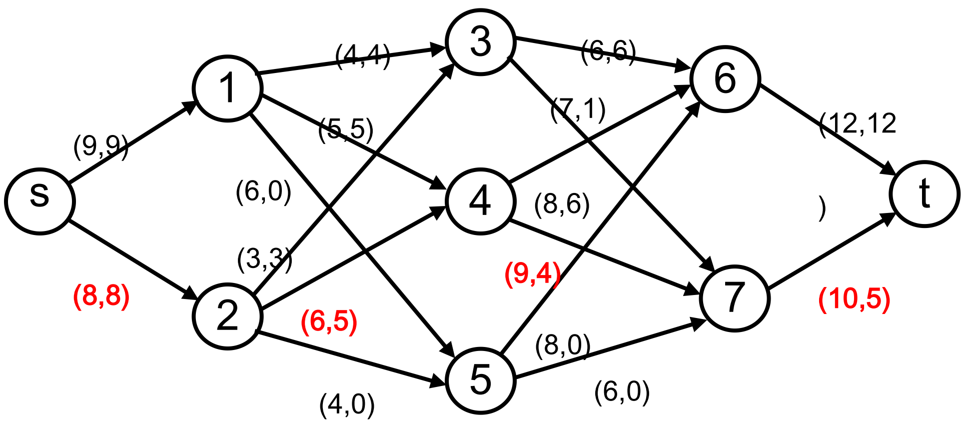
增流，得到增广路：s-2-4-6-t，流量为 1：



6)第六轮标记：



增流，得到增广路：s-2-4-7-t，流量为 4：



因为 s 点所有流出路径都已满，找不到更多增广路，算法结束。

最大流量为：4+5+2+1+1+4=17

证明：

令集合 S={s}，¬S={1,2,3,4,5,6,7,t}

则当前割切 C(S，¬S)=8+9=17≥该图最小割切=该图最大流≥当前计算得到的最大流=17

即：17≥该图最大流≥17

所以 17 即为该图的最大流。

八、某数列的 $a_0=5, a_1=12$，递推式 $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$，求通式 an=?

解：递推方程为：$a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0$

特征方程为：$x^2-5x+6=0$

特征根为：$r_1=2, r_2=3$，均为单重根

所以：$a_n=A\times 2^n+B\times 3^n$

代入$a_0=5, a_1=12$ 得：

$A+B=5$
$2A+3B=12$

联立求解得：$A=3, B=2$，

即通项公式为：$a_n=3\times 2^n+2\times 3^n$