湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 微 分 学

3.2　空间曲面的切平面与法线方程

• 主 讲： 于 红 香

第三章　多元函数微分学的应用

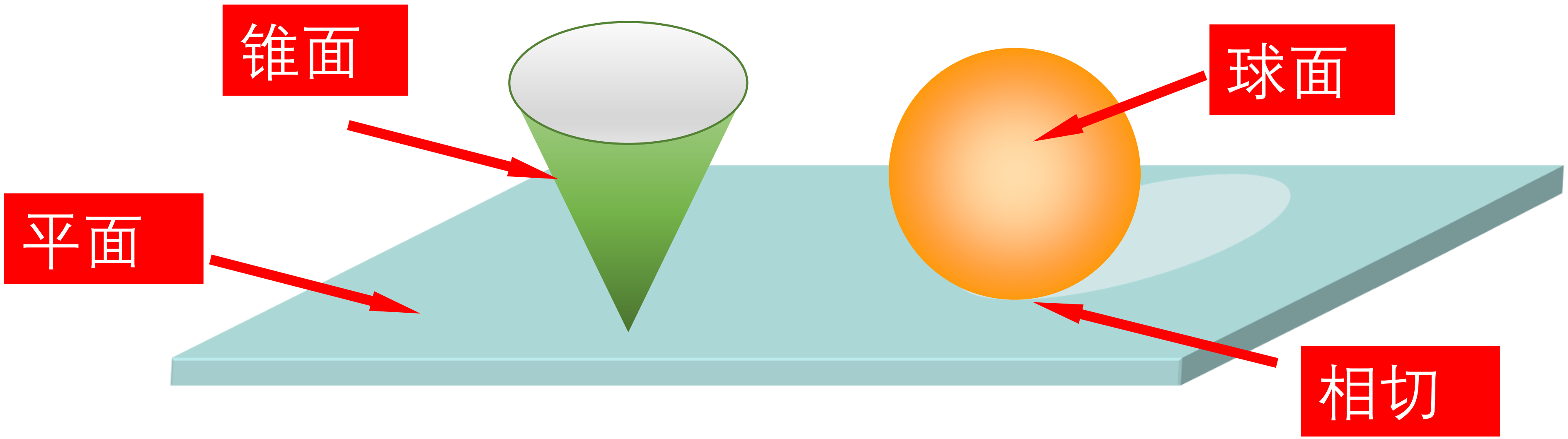
第二节　空间曲面的切平面与法线方程

本节教学要求：

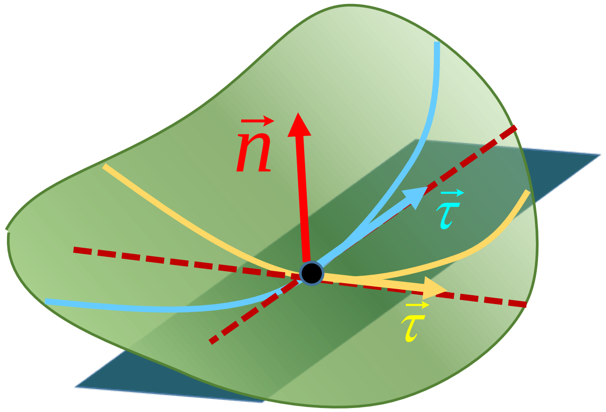
- 正确理解曲面的切平面、法线的概念。
- 能熟练地求出曲面的切平面方程和法线方程。

【问题1】什么情况下，曲面 Σ在给定点 P 的切平面一定存在？

【问题2】若曲面 Σ在给定点 P 的切平面存在，如何求出？



若过空间曲面Σ 上点 $M(x, y, z)$ 处的**任意**一条完全位于曲面上的曲线在点 M处的**切线均存在**，且都位于**同一个平面**上，则称该平面为曲面 Σ 在点M处的**切平面**.



设已知曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$,在曲面上

任取一条过点$P(x_0,y_0,z_0)$的曲线L，设其方程为

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

因曲线在曲面上故 $F(x(t),y(t),z(t)) \equiv 0$

$$t = t_0 \longleftrightarrow P(x_0,y_0,z_0),$$

上式两边关于 t 求导，则上式在 t_0处的全导数

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)x'(t_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)y'(t_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)z'(t_0)=0$$

向量的数量积

$$\vec{n}\cdot\vec{\tau}=0,$$

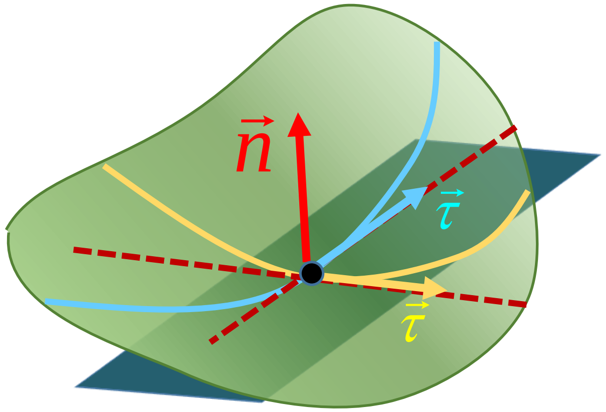
记 $\vec{n}=(F_x',F_y',F_z')_{(x_0,y_0,z_0)}$ $\vec{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

即 $\vec{n}\perp\vec{\tau}$.

曲线在点P的切线的方向向量

空间曲面的切平面与法线

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0$$



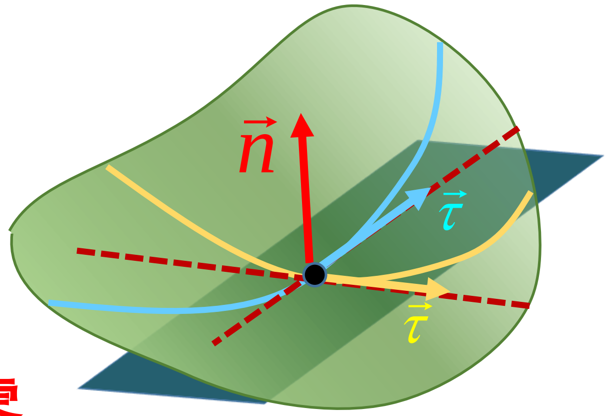
记 $\boxed{\vec{n} = (F_x', F_y', F_z')_{(x_0,y_0,z_0)}}$ $\boxed{\vec{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))}$

$\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0$ ，

曲线在点P的切线的方向向量

即 $\vec{n} \perp \vec{\tau}$.

这说明曲面上任一条过点P的曲线在点P处的切线的方向向量$\vec{\tau}$ 与向量$\vec{n}$ 垂直,且这些切线位于同一平面上,该平面即为曲面在点P处的切平面. 向量$\vec{n}$ 即是切平面的法向量.



设 $\boldsymbol{R}^3$ 中曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的方程为 $F(x,y,z)=0$。

(1) 函数 $F(x,y,z)$ 在点 $X_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ 处**可微**,

(2) 函数 $F(x,y,z)$ 在点 X_0 处的**各一阶偏导数不全为零**,

则曲面 Σ 在点 X_0 有**切平面**存在，其方程为

$$F_x'(X_0)(x-x_0)+F_y'(X_0)(y-y_0)+F_z'(X_0)(z-z_0)=0$$

曲面 Σ 在点X_0处的**法线方程**为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

【例】 求椭球面 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}=1$ 在点$X_0(1,2,3)$处的切平面和法线方程.

【解】 令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}-1$

则 $F_x'(1,2,3)=\frac{2x}{3}\Big|_{x=1}=\frac{2}{3}$ $F_y'(1,2,3)=\frac{1}{3}$ $F_z'(1,2,3)=\frac{2}{9}$

$\vec{n}=\frac{1}{9}(6,3,2)$ 取 $\vec{n}=(6,3,2)$

切平面方程 $6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)=0$

即$6x+3y+2z-18=0$

法线方程 $\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2}$

特别：

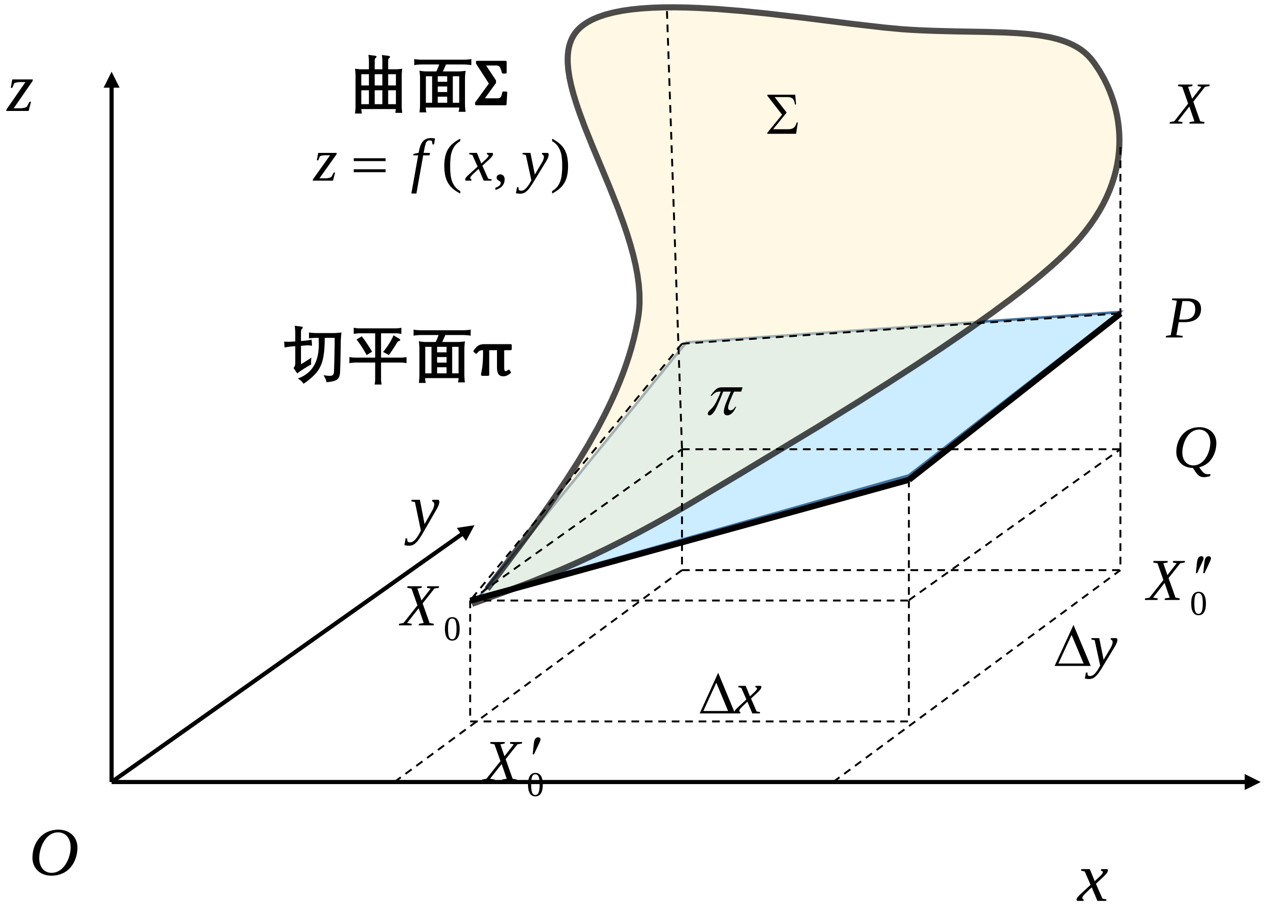
曲面Σ方程为$z = f(x, y)$时，　　令$F(x, y, z) = z - f(x, y)$

则点X_0处的切线的法向量可取为　$\vec{n} = (f_x'(x_0, y_0),\ f_y'(x_0, y_0),\ -1)$

则曲面 Σ 在点X_0处的**切平面方程**为

$$F_x'(X_0)(x - x_0) + F_y'(X_0)(y - y_0) + F_z'(X_0)(z - z_0) = 0$$

曲面 Σ 在点X_0处的**法线方程**为　$\dfrac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$



局部范围：以平代曲

当函数 $z=f(x,y)$ 在点 $X_0(x_0,y_0)$ 处可微，且$|\Delta x|$，$|\Delta y|$都较小时，有近似式：

$$\Delta z \approx dz = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y$$

即有 $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$

$\boxed{z = f(x,y)}$ $\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)}$

曲面Σ 切平面π

曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $X_0(x_0,y_0)$ 处的切平面的法向量为 $(f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0),-1)$

切平面π的点法式方程为：

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$

【例】 求 $z = x^2 + y^2 - 1$在点$X_0(2,1,4)$处的切平面和法线方程.

【解】 令 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 1$

则 $F'_x(2,1,4) = 2x\big|_{x=2} = 4$ $F'_y(2,1,4) = 2y\big|_{y=1} = 2$

$F'_z(2,1,4) = -1$ $\vec{n} = (4, 2, -1)$

切平面方程： $4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0$

法线方程： $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$

【例】 证明：曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$上，任意一点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于$a$.

【证】 令 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$ ，则

$$F_x'(x,y,z)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad F_y'(x,y,z)=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad F_z'(x,y,z)=\frac{1}{2\sqrt{z}},$$

故曲面上任意一点 $X_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面的法向量可取为

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$$

于是，切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

化为截距式方程

【例】 证明：曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$上，任意一点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于$a$.

【证】 $$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$ **化为截距式方程**

由于点$X_0(x_0,y_0,z_0)$ 在曲面上，故切平面方程可化为

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$$

截距 $$\frac{x}{\sqrt{a}\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{a}\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{a}\sqrt{z_0}}=1$$

从而，切平面在各坐标轴上的截距之和为

$$\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=\sqrt{a}\sqrt{a}=a$$

***参数方程形式下，如何求曲面的切平面与法线方程？**

*设曲面由参数方程给出：

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

注意：

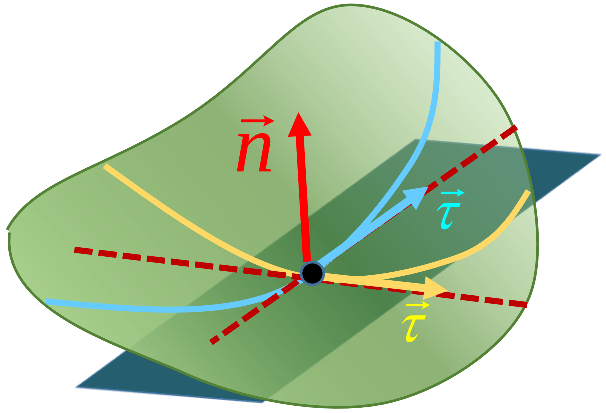
曲线的参数方程含有一个参数；

曲面的参数方程含有两个参数！

$(u,v)=(u_0,v_0)$ 对应于曲面上的点$X_0(x_0,y_0,z_0)$。

$(u,v)=(u,v_0)$ 对应于曲面上的一条过点X_0的曲线。

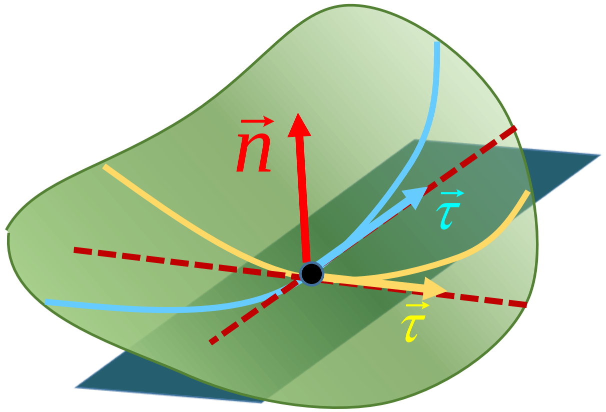
$(u,v)=(u_0,v)$ 对应于曲面上的一条过点X_0的曲线。



设曲面由参数方程给出：

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$(u,v)=(u_0,v_0)$: $X_0(x_0,y_0,z_0)$



考虑过点X_0处的**两条曲线**

$$\Gamma_1: x = x(u,v_0), y = y(u,v_0), z = z(u,v_0);$$

$$\Gamma_2: x = x(u_0,v), y = y(u_0,v), z = z(u_0,v),$$

它们在点X_0处的**切向量分别为**

$$\vec{\tau}_1: \left(x'_u(u_0,v_0), y'_u(u_0,v_0), z'_u(u_0,v_0)\right);$$

$$\vec{\tau}_2: \left(x'_v(u_0,v_0), y'_v(u_0,v_0), z'_v(u_0,v_0)\right).$$

当 $\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 \neq \vec{0}$ 时曲面在点X_0处的**法向量为**

$$\vec{n} = \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\Bigg|_{(u_0,v_0)}$$

【例】 求球面 $\begin{cases} x = \cos\theta\sin\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases}$ 在对应于 $\theta = \varphi = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切平面方程和法线方程.

【解】

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)}\right|_{\theta=\phi=\frac{\pi}{4}} = \left.\begin{vmatrix} -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \end{vmatrix}\right|_{\theta=\phi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}\right|_{\theta=\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}\right|_{\theta=\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

故 $\vec{n} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1, 1, \sqrt{2})$

取 $\vec{n} = (1, 1, \sqrt{2})$

【例】 求球面$\begin{cases} x=\cos\theta\sin\varphi \\ y=\sin\theta\sin\varphi \\ z=\cos\varphi \end{cases}$ 在对应于$\theta=\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切平面方程和法线方程.

【解】 $\theta=\varphi=\dfrac{\pi}{4} \longleftrightarrow (x_0,y_0,z_0)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

取 $\vec{n}=(1,1,\sqrt{2})$

切平面方程: $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\left(z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

即 $x+y+\sqrt{2}z-2=0$

法线方程: $x-\dfrac{1}{2}=y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Sigma: F(x,y,z)=0 \qquad \vec{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)_{(x_0,y_0,z_0)}$$

$$\Sigma: z=f(x,y) \qquad \vec{n}=(f'_x,f'_y,-1)_{(x_0,y_0,f(x_0,y_0))}$$

$$\Sigma:\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases} \qquad \vec{n}=\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\Bigg|_{(u_0,v_0)}$$

可以写出点法式切平面方程及点向式法线方程

求过直线$L\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$且与曲面 $2x^2-2y^2+2z=\frac{5}{8}$相切的切平面。

解 令$F(x,y,z)=2x^2-2y^2+2z-\frac{5}{8}$，则

$F'_x=4x, F'_y=-4y, F'_z=2.$

设过L的平面束方程：

$$3x-2y-z-5+\lambda(x+y+z)=0,$$

即 $(3+\lambda)x+(\lambda-2)y+(\lambda-1)z-5=0,$

设曲面与切平面的切点为(x_0, y_0, z_0),则

$$\begin{cases} \dfrac{3+\lambda}{4x_0} = \dfrac{\lambda-2}{-4y_0} = \dfrac{\lambda-1}{2} = t \\ (3+\lambda)x_0 + (\lambda-2)y_0 + (\lambda-1)z_0 - 5 = 0 \\ 2x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0 = \dfrac{5}{8} \end{cases}$$

解得$\lambda_1=3$, $\lambda_2=7$.

所求切平面方程为 $6x+y+2z=5$,或$10x+5y+6z=5$.