湖 南 大 学 理 工 类 必 修 课 程

大 学 数 学 AII

—— 多 元 微 分 学

2.4 多元函数的全微分

• 主 讲： 于 红 香

回忆一元函数微分的定义及几何意义

若存在仅与 x_0 有关的实数 A，使得

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微,

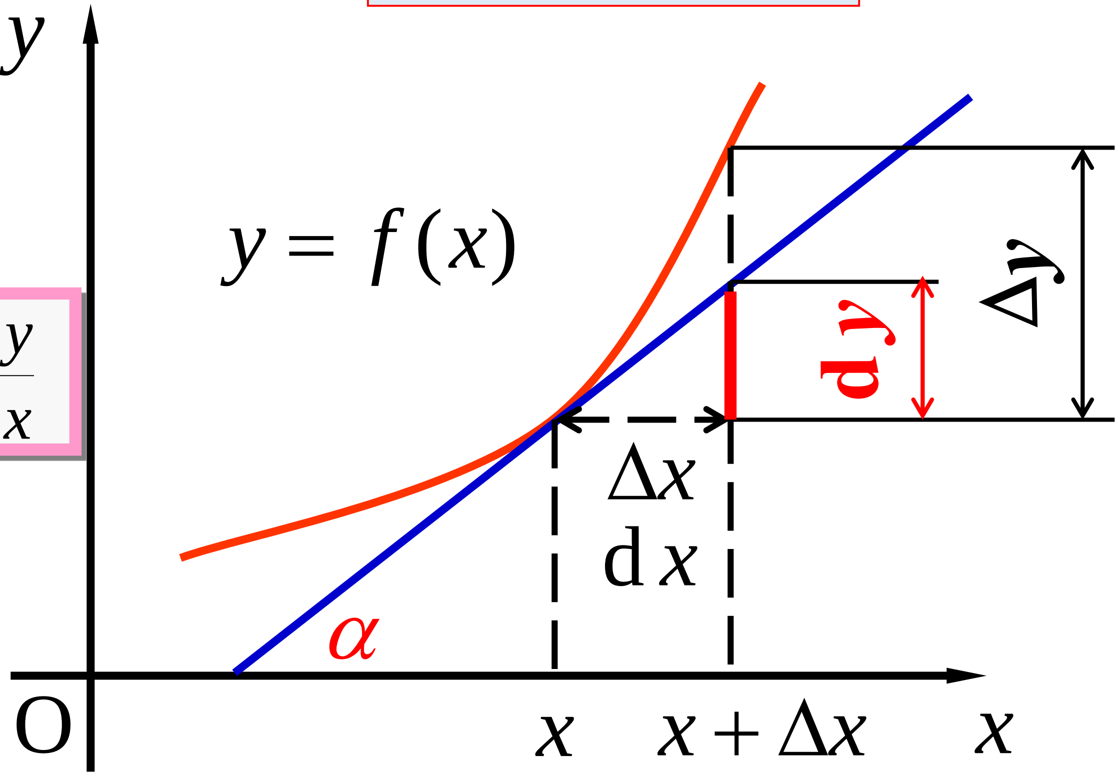
$A\Delta x$ 为函数 $f(x)$在点 x_0 处的微分,

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x = \Delta x$$

$$\boxed{\text{可微} \Longleftrightarrow \text{可导}}$$

微分的几何意义 局部以直代曲

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$



$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}y$$

曲线上的增量　　切线上的增量

一元函数微分推广到 二元函数微分

一元函数		二元函数
一元函数的图形为曲线	⟷	二元函数的图形为曲面
对自变量的微小变化， 可用微分来估计函数的变化量。	⟷	对自变量的微小变化， 是否也可用微分来估计函数的变化量？
函数的微分 是自变量变化量的线性函数。	⟷	函数的微分 也会是自变量变化量的线性函数吗？
几何上，是以直(线)代曲(线)！	⟷	几何上，是以平(面)代曲（面）？

第二章　多元函数微分学

第四节 全微分

1. 二元函数全微分的定义
2. 可微与可偏导和连续的关系
3. 全微分的计算
4. 全微分的几何意义
5. 全微分在近似计算中的应用

第二章　多元函数微分学

第四节 全微分

本节学习要求:

- 正确理解多元函数的全微分、偏微分的概念。
- 了解全微分与可偏导和连续的关系。
- 熟练掌握全微分的计算方法。
- 了解二元函数全微分的几何意义。

$$y = f(x)$$

若存在仅与 x_0 有关的实数 A，使得

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微,

$A\Delta x$ 为函数 $f(x)$在点 x_0 处的微分,

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}x = \Delta x$$

$$z = f(x,y) = f(X)$$

若存在仅与 $X_0 = (x_0,y_0)$有关的实数向量 $A=(a,b)$，使得

$$\Delta z = A\Delta X + o(\Delta X)$$

$$= (a,b)\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} + o(\|\Delta X\|)$$

$$= a\Delta x + b\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

一元函数的增量 $\longleftarrow\!\longrightarrow$ 多元函数的全增量

1. 二元函数全微分的定义

设函数$z=f(X)$在点$X_0=(x_0,y_0)$的某一邻域$\mathrm{U}(X_0)$内有定义，当X_0获得增量$\Delta X=(\Delta x,\Delta y)$，且$X_0+\Delta X\in \mathrm{U}(X_0)$时，若函数在点$X_0$处的全增量可表示为

$$\Delta z=a\Delta x+b\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

则称函数$z=f(X)$在点X_0处可微。

$$\mathrm{d}z\triangleq a\Delta x+b\Delta y$$

称为函数在点X_0处的全微分，其中a,b是与ΔX无关，仅与X_0有关的常数.

全微分概念的极限形式

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + \boxed{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})} \Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - (a\Delta x + b\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

如何描述？

或 $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{|\Delta z - (a\Delta x + b\Delta y)|}{\|\Delta X\|} = 0$$

其中 $\|\Delta X\| \triangleq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

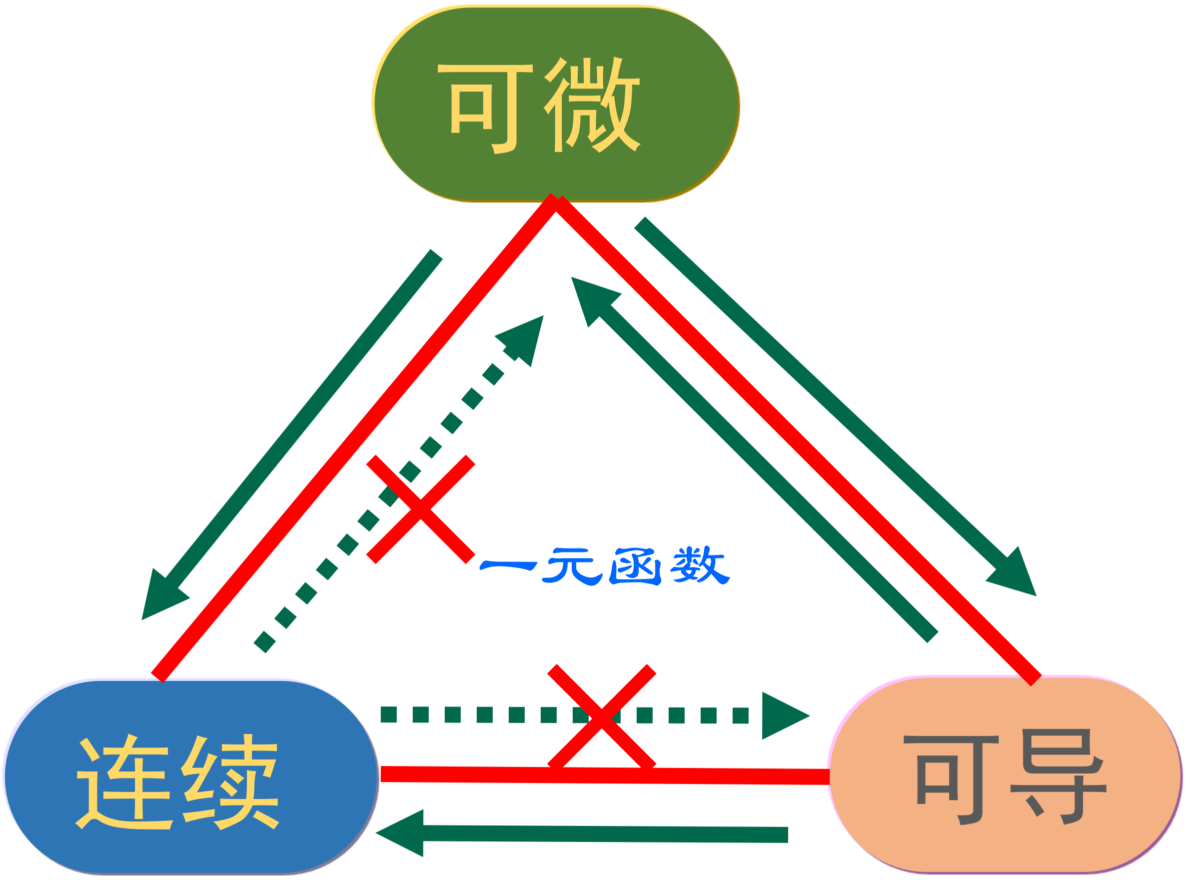
下面讨论：

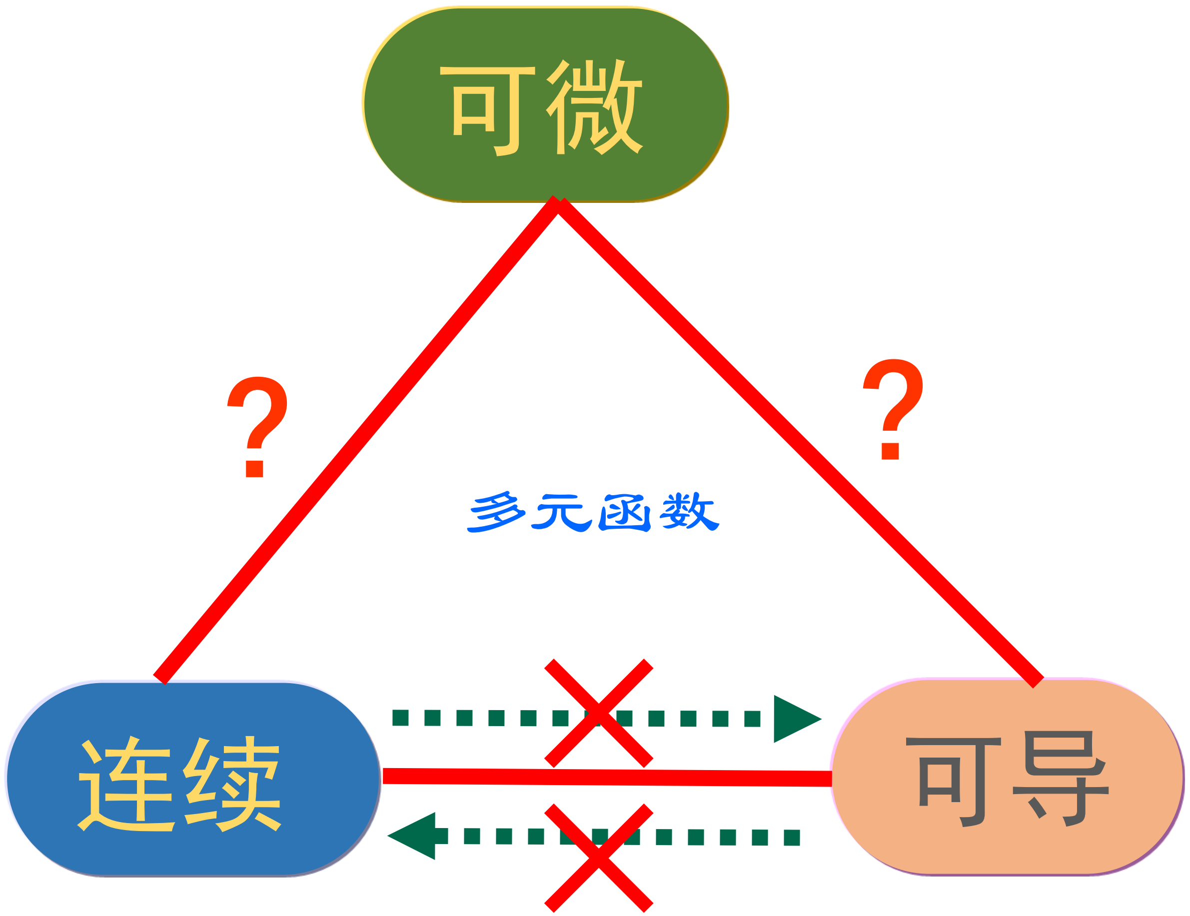
1、函数在什么条件下可微？

2、可微函数的微分如何计算？

3、可微与连续及可偏导有什么关系？

2. 可微与可偏导和连续的关系





2. 可微与可偏导和连续的关系

可微：

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

什么关系?

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

连续：

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

可微

连续

定理

若 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微，则其两个偏导数

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 均存在，且 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$. **可微⇒可偏导**

【证】 **若函数可微，则** $\Delta z=a\Delta x+b\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

可微

由 $\Delta x,\ \Delta y$ 的任意性，取 $\Delta y=0$，则 $\Delta z=\Delta_x z=a\Delta x+o(|\Delta x|)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x+o(|\Delta x|)}{\Delta x}=a$$

即 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=a$，**同理，取** $\Delta x=0$，**得** $\dfrac{\partial z}{\partial y}=b$，

可导

故 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$，$(\Delta x=dx,\ \Delta y=dy)$.

【例】 考虑函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

可偏导$\not\Rightarrow$可微

在点 $(0,0)$ 处是否连续, 是否可偏导, 是否可微?

定理

设 $z = f(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0))$ 内有定义，可偏导。若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微。

【证】 要证明函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 即要证

偏导数连续$\Rightarrow$可微

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}).$$

利用微分中值定理 $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x'(\xi_1,y)(x-x_0) + f_y'(x_0,\eta_2)(y-y_0)$,

由偏导数的连续性 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{\partial f(\xi_1,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, 故 $\dfrac{\partial f(\xi_1,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \alpha$,

2. 可微与可偏导和连续的关系

故 $\dfrac{\partial f(\xi_1, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \alpha$, 同理 $\dfrac{\partial f(x_0, \eta_2)}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} + \beta$,

其中 α, β 为该极限过程中的无穷小量.

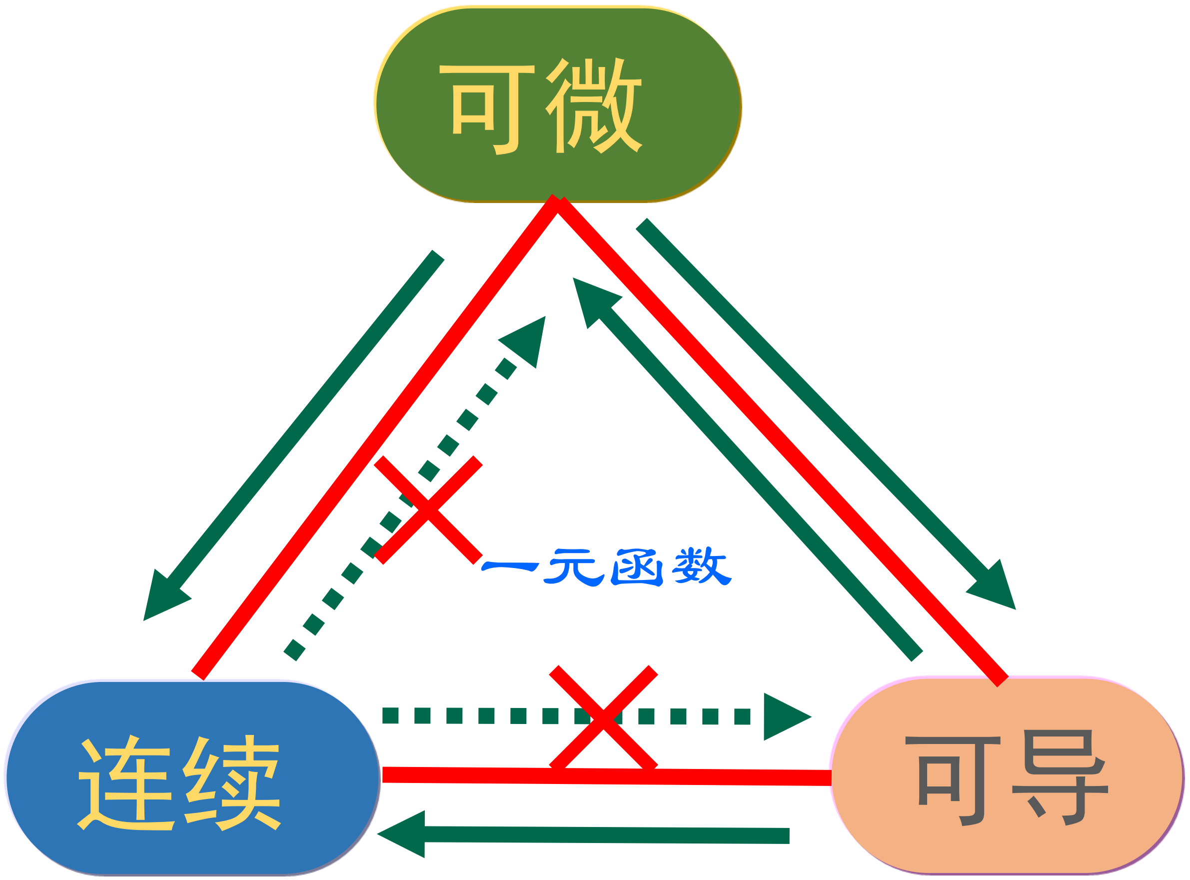
从而，函数的全增量 $\Delta z = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + (\alpha\Delta x + \beta\Delta y)$,

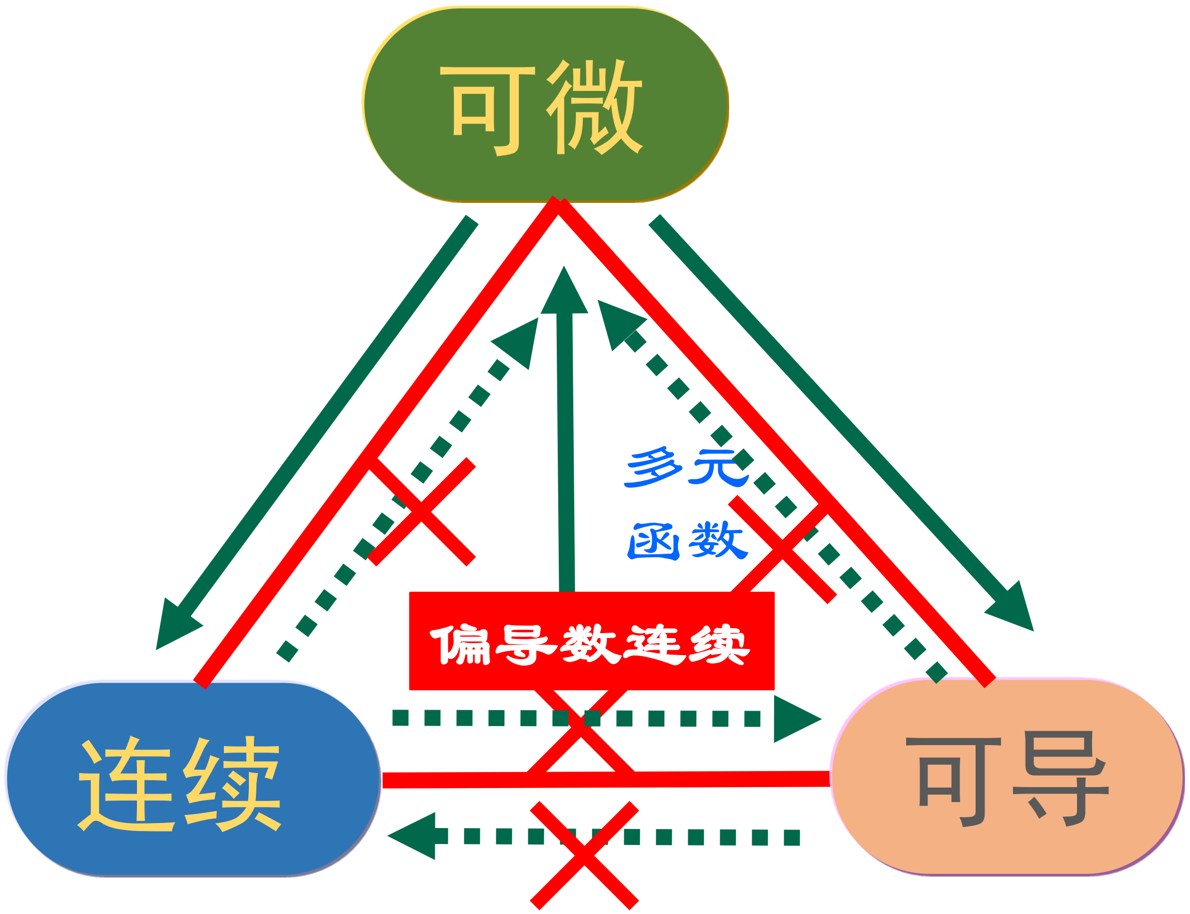
又 $0 \le \left|\dfrac{\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \le |\alpha| + |\beta| \to 0$, 故由夹逼定理,得

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

即函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

2. 可微与可偏导和连续的关系





思考题：

考虑函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点 $(0,0)$ 处偏导数的连续性和可微性？

答案：偏导数不连续；可微

如果函数$z=f(X)$在区域Ω中具有连续偏导数，

则称函数为区域Ω中的C^1函数，记为$f(X)\in C^1(\Omega)$.

当不强调区域时，记为$f(X)\in C^1$.

3. 全微分的计算

设函数 $f(X)$, $g(X)$ 在点 X 处可微，则

$$\mathrm{d}(f(X)\pm g(X))=\mathrm{d}f(X)\pm \mathrm{d}g(X)$$

$$\mathrm{d}(\lambda f(X))=\lambda \mathrm{d}f(X) \qquad (\lambda\in R)$$

$$\mathrm{d}(f(X)g(X))=g(X)\mathrm{d}f(X)+f(X)\mathrm{d}g(X)$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f(X)}{g(X)}\right)=\frac{g(X)\mathrm{d}f(X)-f(X)\mathrm{d}g(X)}{g^2(X)} \qquad (g(X)\neq 0)$$

【例】 函数 $z=x^2y+y^2$ 是否可微？若可微，求其全微分.

【解】 易知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ 在 R^2 中连续，

故函数 $z=x^2y+y^2$ 在 R^2 中可微.

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=2xy\,\mathrm{d}x+(x^2+2y)\,\mathrm{d}y$$

3. 全微分的计算

【例】 设 $u = x^{y^z}$，求 $\mathrm{d}u\big|_{(2,2,1)}$.

【解】 $\mathrm{d}u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$

将 y, z 看成常数： $u = x^w,\ w = y^z$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(2,2,1)} = \frac{\partial}{\partial x}(x^{y^z})\bigg|_{(2,2,1)} = y^z x^{y^z-1}\bigg|_{(2,2,1)} = 4$$

将 x, z 看成常数： $u = x^w,\ w = y^z$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(2,2,1)} = \frac{\partial}{\partial y}(x^{y^z})\bigg|_{(2,2,1)} = x^{y^z}\ln x \cdot z y^{z-1}\bigg|_{(2,2,1)} = 4\ln 2$$

将 x, y 看成常数： $u = x^w,\ w = y^z$.

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(2,2,1)} = \frac{\partial}{\partial z}(x^{y^z})\bigg|_{(2,2,1)} = x^{y^z}\ln x \cdot y^z \ln y\bigg|_{(2,2,1)} = 8\ln^2 2$$

故 $\mathrm{d}u\big|_{(2,2,1)} = 4\,\mathrm{d}x + 4\ln 2\,\mathrm{d}y + 8\ln^2 2\,\mathrm{d}z$

练

设 $z = xy + \dfrac{y}{x}$，求 $\mathrm{d}z$.

$$\mathrm{d}z = (y - \frac{y}{x^2})\mathrm{d}x + (x + \frac{1}{x})\mathrm{d}y$$

回头看全微分公式

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

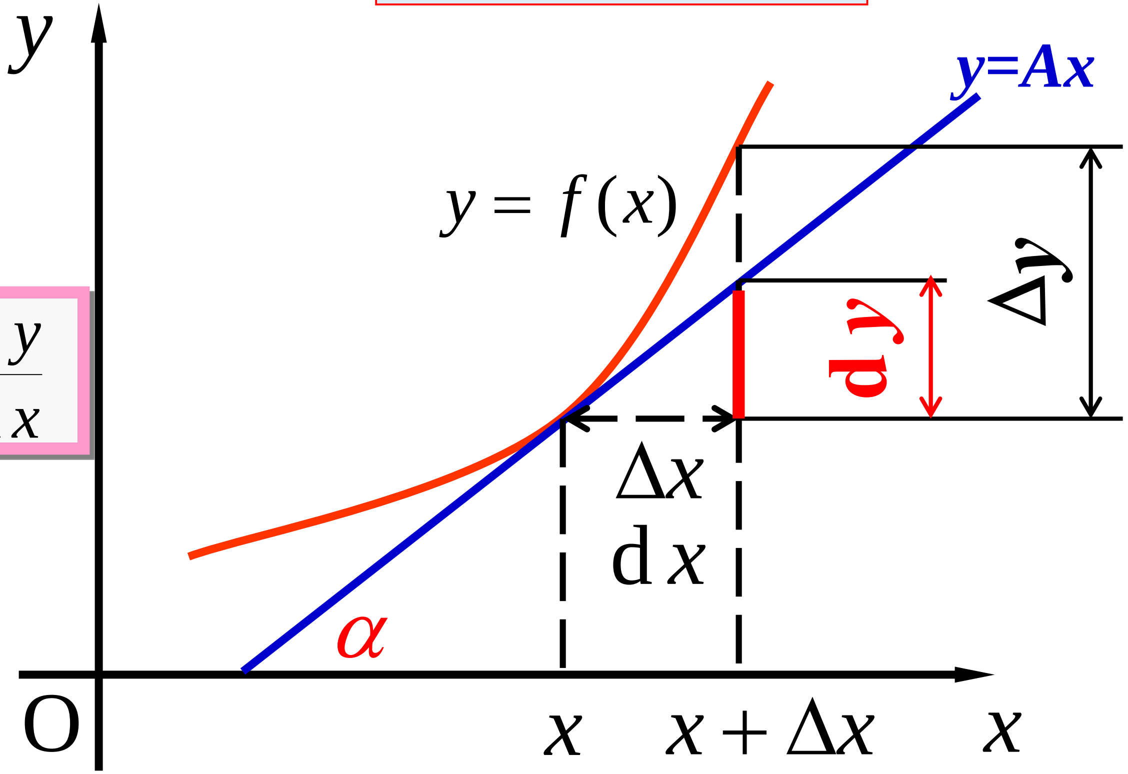
$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}_x z+\mathrm{d}_y z$$

$\Delta_x z\approx \mathrm{d}_x z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ 称为函数关于 x 的偏微分.

$\Delta_y z\approx \mathrm{d}_y z=\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ 称为函数关于 y 的偏微分.

一元函数微分的几何意义

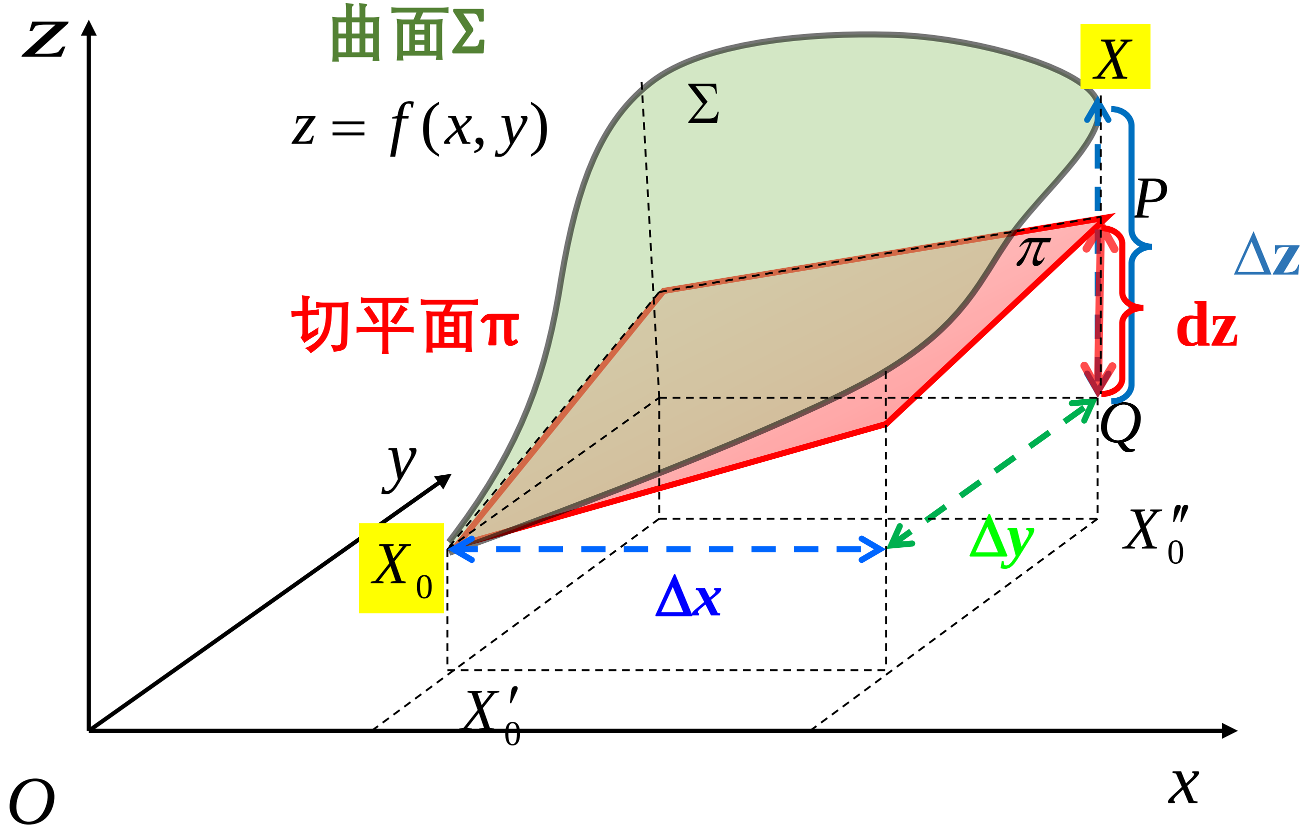
局部以直代曲



$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}y$$

曲线上的增量　　切线上的增量



局部范围：

以平代曲

曲面上的增量

近似为

切平面上的增量

4. 全微分的几何意义

当函数 $z=f(x,y)$ 在点 $X_0(x_0,y_0)$ 处**可微**，

且 $|\Delta x|$，$|\Delta y|$ 都较小时，有近似式：

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

即 $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

曲面Σ

$\boxed{z=f(x,y)}$

切平面π

$\boxed{z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$

以平代曲

5. 全微分在近似计算中的应用

曲面Σ　　切平面π

$$f(x,y) \approx \boxed{f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

$$\boxed{z=f(x,y)} \quad \boxed{z=f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

$z=L(x,y)$: 为x和y的一次函数

称为$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**线性化函数**

非线性函数近似为线性函数！　　用于近似计算！

【例】 计算$I=1.04^{2.02}$ 的近似值

【解】 设函数 $f(x,y)=x^y$ 则 $\boldsymbol{I=f(1.04,2.02)}$

取$x_0=1, y_0=2, \Delta x=0.04, \Delta y=0.02,$

$$f_x'(x,y)=yx^{y-1},\ f_y'(x,y)=x^y\ln x,\ f(1,2)=1,\ f_x'(1,2)=2,\ f_y'(1,2)=0,$$

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f(1.04,2.02)\approx f(1,2)+f_x'(1,2)\Delta x+f_y'(1,2)\Delta y$$

$$f(1.04,2.02)\approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08.$$

本节小结

全微分的2种定义：增量形式及极限形式

全微分的几何意义：以平代曲

全微分的计算

全微分与可导及连续的关系