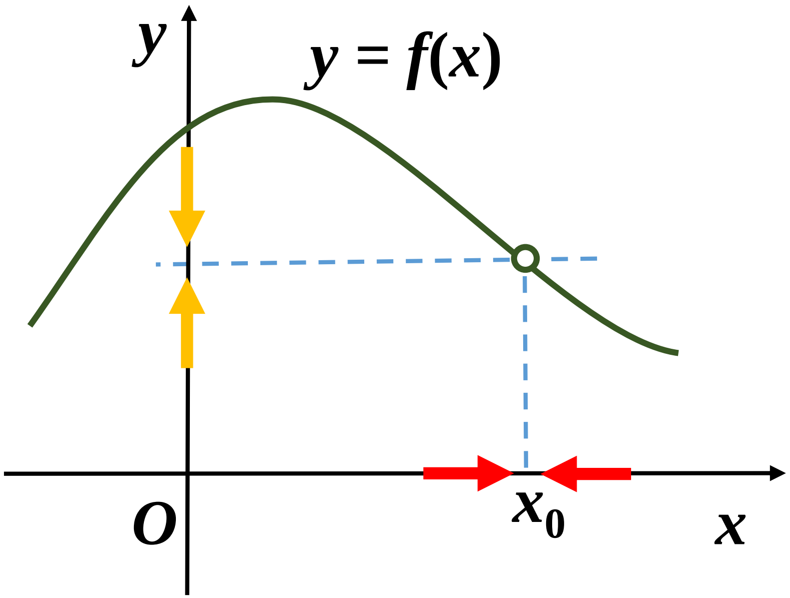
湖南大学理工类必修课程

# 大 学 数 学 AII

## —— 多元微积分学

## 2.2 多元函数的极限连续


- 主讲：于红香


y
y = f(x)
O
x0
x

# 第二章　多元函数微分学

## 第二节  多元函数的极限与连续性

一、多元函数的极限

二、多元函数的连续性

三、有界闭区域上连续函数的性质

四、二次极限*

# 第二节  多元函数的极限与连续性

本节教学要求：

- 理解二元函数的极限与连续性的概念
- 了解有界闭区域上连续函数的性质

## 一元函数极限的概念

设 $y=f(x)$，$x\in \mathrm{I}$, $x_0$ 为 I 的聚点 .

若 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当点 $x\in \hat{\mathrm{U}}(x_0,\delta)$ 时,

$f(x)\in \mathrm{U}(a,\varepsilon)$, 即 $|f(x)-a|<\varepsilon$, 则称

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a\ .$$

# 一、多元函数的极限

$u = f(X)\ \ X \in \Omega$　　　$X_0$ 为$\Omega$的聚点

设 $y = f(x)$ , $x \in \mathrm{I}$, $x_0$ 为 I 的聚点 .

$X \in \hat{\mathrm{U}}(X_0,\delta)$

若 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 当点 $x \in \hat{\mathrm{U}}(x_0,\delta)$ 时,

$f(X) \in \mathrm{U}(a,\varepsilon)$　　　$|\,f(X) - a\,| < \varepsilon$

$f(x) \in \mathrm{U}(a,\varepsilon)$, 即 $|\,f(x) - a\,| < \varepsilon$, 则称

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = a$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\ .$$

## 二元函数极限的定义

设 $z = f(X)$，$X = (x, y) \in D \subset R^2$，$X_0 = (x_0, y_0)$ 为$D$的聚点．

若 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 当点 $X \in \hat{U}(X_0, \delta) \cap D$ 时,有 $|f(X) - a| < \varepsilon$,

则称 $a$ 为 $z = f(X)$ 当 $X \to X_0$时的(二重)极限,记为

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a.$$

也可记为$f(X) \to a(X \to X_0)$.

**说明：**

$X_0$为$D$的聚点，为了保证在$X_0$的任意近旁总有点$X$

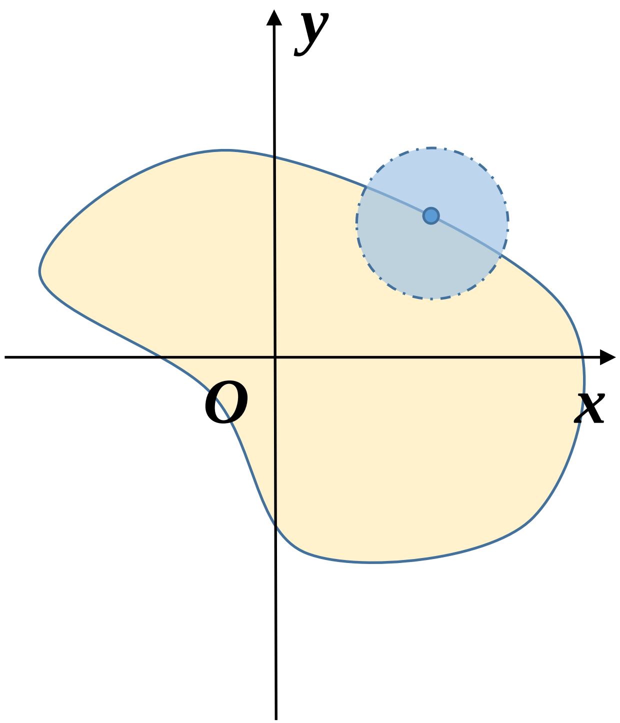
使得$f(X)$存在，才有可能判断$|f(X)-a|$是否小于$\varepsilon$.

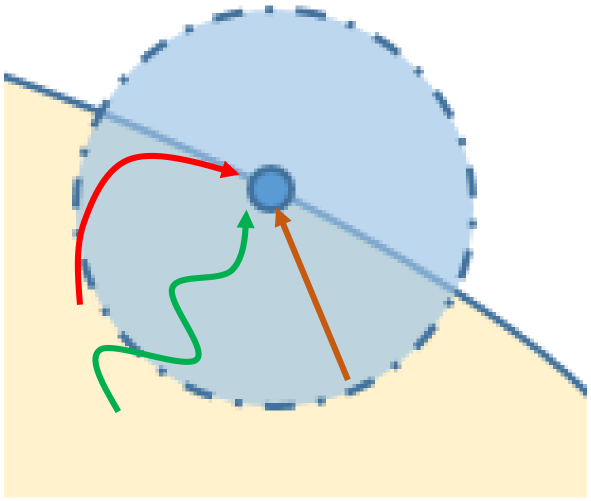
函数在点 $X_0$ 及 $\mathrm{U}(X_0,\delta)$ 内的某些点可无定义.

$X \in \hat{\mathrm{U}}(X_0,\delta)\bigcap \mathrm{D}$，即 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

且 $f(X)$ 在点 $X$ 处有定义.

# 一、多元函数的极限



# 一、多元函数的极限

$\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = a$的充要条件是点 $X$ 以任意方式沿任何方向趋于$X_0$时，$f(X)$的极限都存在且为$a$.

- 如果当$X$以某几种特殊方式趋于$X_0$时，$f(X)$的极限为$a$.

不能断定二重极限 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = a$.

- 若$X$以不同方式趋于$X_0$时，$f(X)$的极限不同或极限不存在，则可肯定二重极限 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$不存在.

特殊方式不能证是，只能证否！

【例】 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

夹逼定理

【解】 由于

$$0 \le \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \frac{x^2}{|x|+|y|} + \frac{y^2}{|x|+|y|}$$

$$< \frac{x^2}{|x|} + \frac{y^2}{|y|} = |x|+|y|$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (|x|+|y|) = 0$, 故由夹逼定理, 得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$$

# 思考题1：

求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

## 一、多元函数的极限

【例】 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ .

无穷小量的性质

【解】 由于 $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le 1$ (有界量)

又 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$ (无穷小量)

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$ .

【例】 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$.

有理化 (平方差公式)

【解】

$$\text{原式}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)}{(1+x^2+y^2)-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)=2$$

**【例】** 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

$\sin\varphi \sim \varphi \quad (\varphi \to 0)$

**【解1】** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} y = 2.$

**等价无穷小替代**

**【解2】** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{y\sin xy}{xy}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} y \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{xy} = 2$

**利用重要极限**

# 一、多元函数的极限

【例】 求 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to 5}}\left[1+\dfrac{1}{x}\right]^{\frac{x^2}{x+y}}$.

利用重要极限

【解】

$$原式=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to 5}}\left[1+\frac{1}{x}\right]^{x\cdot\frac{x}{x+y}}=e^{1}=e,$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to 5}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to 5}}\dfrac{x}{x+y}=1$.

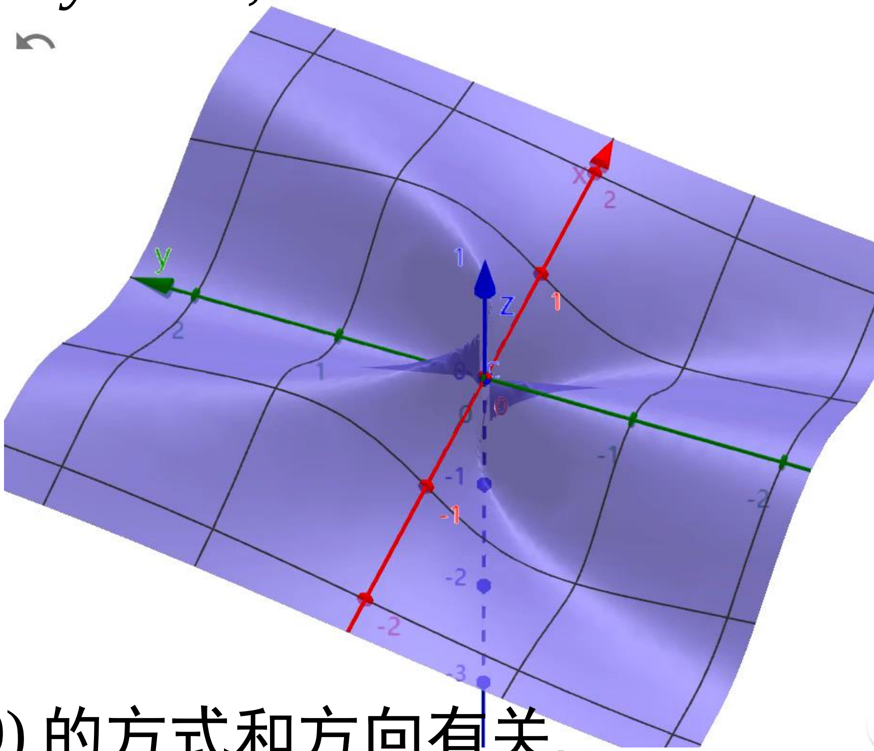
# 一、多元函数的极限

**【例】** 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

**【解】** 取 $y=kx$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\cdot kx}{x^4+k^2x^2}=0.$$

若取 $y=kx^2$，则



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\cdot kx^2}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}.$$

由于极限存在与 $(x,y)\to(0,0)$ 的方式和方向有关,

故原极限不存在.

该例说明

不代表任意方向

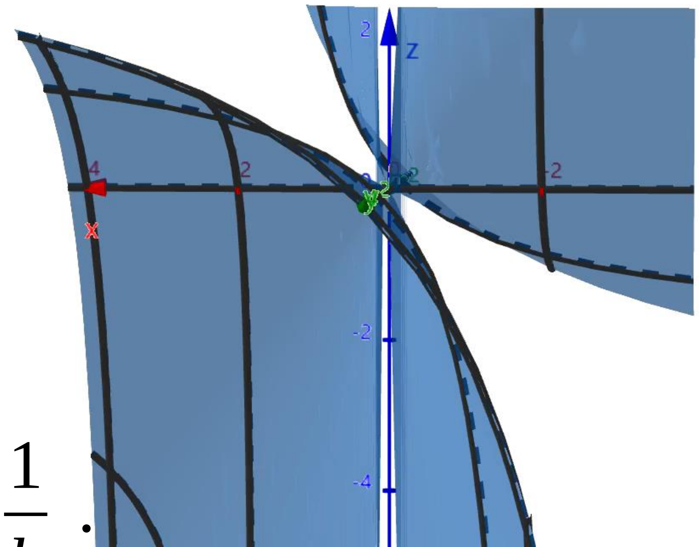
虽然沿无穷多个方向：$y = kx$,

当 $(x, y) \to (0,0)$ 时，函数极限均为 0，

但函数的极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ 不存在．

# 一、多元函数的极限

**【练】** 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$.



**【解】**

取 $y=kx^2-x$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(kx^2-x)}{kx^2}=\lim_{x\to 0}(x-\frac{1}{k})=-\frac{1}{k}.$$

由于极限存在与 $(x,y)\to(0,0)$ 的方式和方向有关，

故原极限不存在.

# 二、多元函数的连续性

请点击

1.多元函数连续性的定义

2.多元连续函数的运算

3.多元初等函数

4.有界闭区域上连续函数的性质

# 二、多元函数的连续性

## 1.多元函数连续性的定义

设 $z = f(X), X \in \Omega \subset R^n, X_0$为$\Omega$的聚点 .

若 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$

$n = 2$时: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

则称 $f(X)$ 在$X_0$处连续，$X_0$称为$f(X)$ 的连续点。

否则称 $f(X)$ 在$X_0$处间断(不连续)，$X_0$称为$f(X)$ 的间断点。

若函数$f(X)$在区域$\Omega$上的每一点都连续,则称

函数$f(X)$在区域$\Omega$上连续,记为$f(X) \in C(\Omega)$ .

## 2.多元连续函数的运算

在一定的条件下,

连续的多元函数的和、差、积、

商(分母不能为零)仍是连续函数;

连续的多元函数的复合函数仍连续.

【例】 证明函数在点 (0, 0) 处连续：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|(y-x)y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\,, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

【解】 根据函数连续的定义,只需证明

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0\,.$$

## 二、多元函数的连续性

**运用极坐标** $x = r\cos\theta$， $y = r\sin\theta$，

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (x, y) \to (0, 0) \Longleftrightarrow r \to 0^+$$

**运用夹逼定理:**

$$0 \le \frac{|(y-x)x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2\,|(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta|}{r} \le 2r$$

$$\lim_{r\to 0^+} 2r = 0 \implies \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|(y-x)x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

**故函数在点(0, 0)处连续.**

# 思考题2:

**判断以下结论是否正确，并说明理由。**

若对每一个固定的$\theta$,极限 $\lim\limits_{\rho\to 0^+} f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta)=A$,

且$A$与$\theta$无关,则必有$\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y)=A$.其中$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

## 3.多元初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成的多元函数，称为多元初等函数.

$$z = e^{x+y}\ln(1+x^2+y^2)$$

$$u = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$$

## 3.多元初等函数

多元初等函数在其有定义的区域内是连续的.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\sin xy}(x^2+y^2+1) \quad =1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{2-xy}{x^2+y^2} \quad =2$$

## 4.多元函数的间断点

### 寻找间断点的方法

(1) 函数无定义的点;

(2) 极限不存在的点;

(3) 极限存在但不等于函数在该点的函数值的点.

多元函数的间断点可以构成直线、曲线、曲面等, 也可以是某些点的集合.

【例】 求函数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的间断点．

【解】 **由分母不能为零,**

当 $x^2 + y^2 = 0$ 时，函数无定义．

**故点 $(0, 0)$ 为函数的间断点.**

# 二、多元函数的连续性

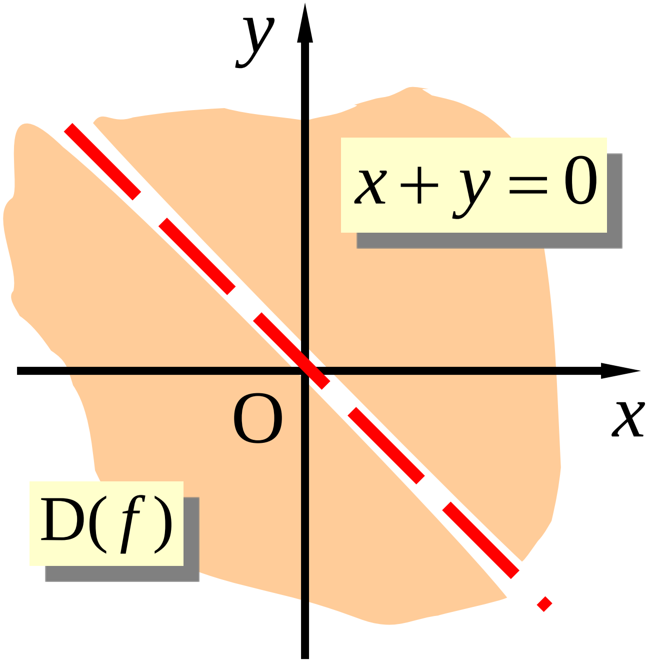
**【例】** 求函数 $z=\dfrac{xy}{x+y}$ 的间断点 .

**【解】** 由分母不能为零,

**直线** $x+y=0$ 上

的一切点均为函

数的间断点.



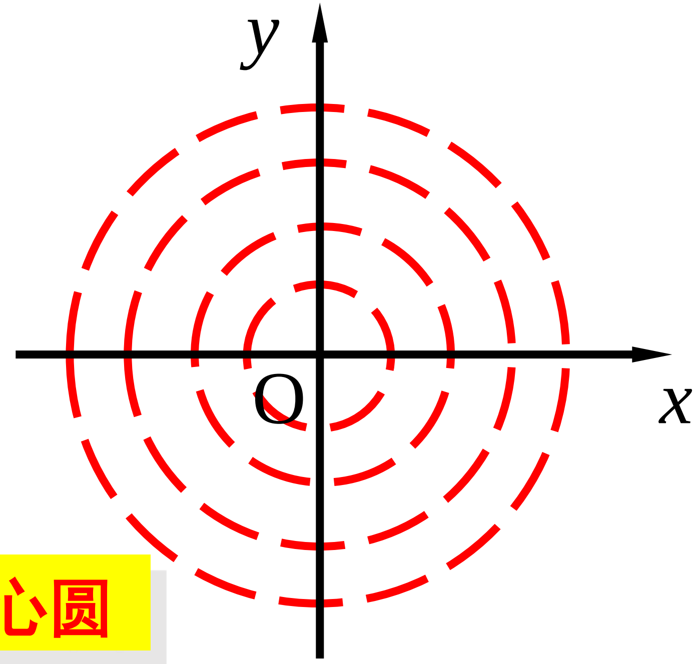
**【例】** 求函数 $z=\tan(x^2+y^2)$ 的间断点 .

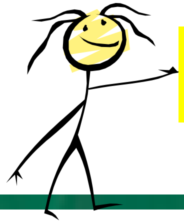
**【解】** 由三角函数知识可知,

所求间断点为

$$x^2+y^2=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$



同心圆

在一维空间中，闭区间一定是有界的.

在空间 $R^n$ $(n \geq 2)$ 中，闭区域不一定有界.

一元连续函数在闭区间上的性质，推广到多元函数中应是连续函数在有界闭区域上的性质.

## 三、有界闭区域上连续函数的性质

### 性质1(最大值最小值定理)

设 $\overline{\Omega} \subset R^n$ 为有界闭区域, 若 $f(X) \in C(\overline{\Omega})$,

则 $f(X)$在$\overline{\Omega}$上必取得最大值和最小值,

即 $\exists X_1, X_2 \in \overline{\Omega}$, 使得

$$f(X_1) = \max_{X \in \overline{\Omega}} f(X),$$

$$f(X_2) = \min_{X \in \overline{\Omega}} f(X).$$

## 性质2(有界性定理)

设 $\overline{\Omega}\subset R^n$ 为有界闭区域, 若 $f(X)\in C(\overline{\Omega})$,

则 $f(X)$在$\overline{\Omega}$上有界，即$\exists M>0$,使得$\forall X\in\overline{\Omega}$,

有$|f(X)|\leq M$.

## 性质3(介值定理)

设$\bar{\Omega} \subset R^n$为有界闭区域，若$f(X) \in C(\bar{\Omega})$，

则$f(X)$在$\bar{\Omega}$上必取得介于最大值和最小值之间

的任何值，即$\forall X_1, X_2 \in \bar{\Omega}, f(X_1) \neq f(X_2)$，则对

任何介于$f(X_1)$与$f(X_2)$之间的数$C$，存在$X_0 \in \bar{\Omega}$，

使得$f(X_0) = C$.

# 四、二次极限*

二次极限是指的下列极限

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) \triangleq \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))$$

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) \triangleq \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$$

一般说来，　这两个极限不一定相等.

一般情况下，运算顺序不能随便交换.

# 四、二次极限

**结论1：**

**证否**

若两个二次极限存在，但不相等：

则二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在。

如 $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ 在点 (0, 0) .

**结论2：**

两个二次极限即使都存在，

也不一定相等。

如 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) .

**结论3:**

两个二次极限存在且相等,

也不一定能推出二重极限存在.

如$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$在点$(0,0)$。

**结论4:**

二重极限存在不一定能推出累次极限存在.

如$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$在点$(0,0)$.

# 定理

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y),\ \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

**三个极限如果都存在，则三者相等。**

**仅知其中一个存在，推不出其它二者存在.**

$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$ 在点$(0,0)$.

# 本节小结

求二重极限

夹逼定理

无穷小量乘有界量

有理化

等价无穷小

重要极限

极坐标变换

（不能用洛必达）

证二重极限不存在

法1：不同路径的极限不等；

二重极限证否

法2：累次极限存在不等。

| | |
|---|---|
| 多元函数的连续性 | 连续的多元函数的和差积商及复合函数，均连续。<br>多元初等函数在其有定义的区域内连续。 |
| 有界闭区域上的连续函数的性质 | 最值定理；<br>介值定理；<br>有界性定理。 |
| 寻找间断点的方法 | 无定义的点；<br>无极限的点；<br>极限值与函数值不等的点。 |
| 证明某点的连续性 | 求二重极限或证明二重极限不存在。 |