

DWTS 投票机制的审计与设计

我们将 DWTS 视为“审计 + 机制设计”问题：先反推可行粉丝票，再量化不确定性，并提出更平衡的规则。

结论要点. 我们刻画并采样与周淘汰一致的粉丝票可行区域，并将不确定性传播到反事实规则评估与 DAWS 机制中。

核心结果（节选）.

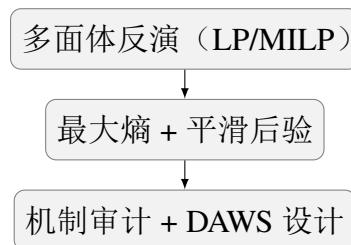
| 发现 | 估计 |
|----------------------------|---------|
| 可行赛季数 | 34 / 34 |
| 平均 HDI 宽度（周层面） | 0.384 |
| 中位 HDI 宽度（周层面） | 0.340 |
| P90 HDI 宽度（周层面） | 0.586 |
| 最大 HDI 宽度（周层面） | 0.95 |
| Rank vs Percent 翻转率 | 25.1% |
| DAWS 稳定性 | 0.745 |
| DAWS 公平性 (Kendall τ) | 0.053 |
| DAWS 稳定性提升 | +2.7% |

冲突图（摘要主图）.



建议. 采用随周变化的 DAWS 权重 α_t ，并公开 bottom-two 与 judge-save 判定标准。

方法流程.



备忘录：致节目制作方与评委

收件人：DWTS 制作方与评委

发件人：Team 2617892

日期：2026 年 1 月 31 日

主题：粉丝投票可行性审计与规则改进建议

结论要点. 我们审计全部赛季并量化粉丝票不确定性。证据显示，Rank 聚合存在信息压缩，并加大民主赤字。

执行摘要（6 行以内）.

- 规则整体与淘汰结果一致 ($S^* \approx 0$)，但不确定性在不同周差异明显。
- Rank 聚合是对粉丝支持度的有损压缩，造成显著翻转概率。
- DAWS 在公平、主权与稳定三指标上实现更好折中。

主要发现.

1. 可识别性差异显著。最宽 95% HDI 周度区间超过中位周 3 倍。
2. 机制差异具有实质影响。Rank 与 Percent 在约 1/5 周出现淘汰翻转。
3. 影响因素对评委与粉丝不同。混合效应模型显示职业舞伴对粉丝影响更强。

建议.

1. 公布 DAWS 方案并基于不确定性指数 U_t 调整 α_t 。
2. 公开 judge-save 规则与投票记录，提高透明度。
3. 用审计仪表盘提前预警高不确定周。

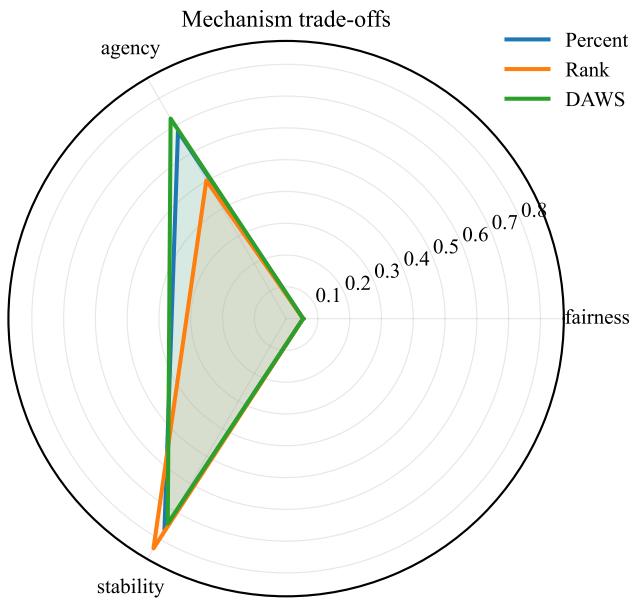


图 1: 机制权衡 (雷达图)。

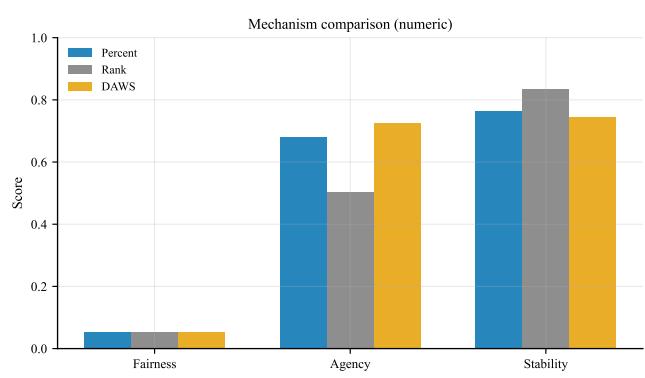


图 2: 机制对比 (数值)。

目录

| | |
|--------------------------------------|-----------|
| 备忘录 | 1 |
| 1 引言与路线图 | 5 |
| 1.1 任务-章节映射 | 5 |
| 2 数据与规则 | 5 |
| 2.1 百分比规则 | 5 |
| 2.2 排名规则与 Judge Save | 6 |
| 3 假设与指标 | 6 |
| 4 模型 A: 多面体反演审计 | 7 |
| 4.1 观测与潜变量 | 7 |
| 4.2 Percent 规则 LP 审计 | 7 |
| 4.3 Rank 规则 MILP 与有序 share | 7 |
| 4.4 规则适配周 | 7 |
| 4.5 工程近似与严格校验 | 8 |
| 4.6 可识别性与可行质量 | 9 |
| 4.7 平滑后验 | 11 |
| 4.8 规则切换推断 | 12 |
| 5 结果 A: 粉丝票估计与不确定性 | 13 |
| 6 模型 B: 机制反事实评估 | 17 |
| 7 模型 C: 成功因素 (Judges vs Fans) | 18 |
| 7.1 预测补充: GBDT | 20 |
| 8 模型 D: 机制设计 (DAWS) | 21 |
| 8.1 Judge-save 参数学习 | 22 |
| 9 敏感性与验证 | 22 |
| 9.1 规模对比实验 | 23 |
| 10 结论与建议 | 24 |
| 参考文献 | 25 |

AI 使用报告

26

1 引言与路线图

结论要点. 我们将 DWTS 视为审计与机制设计问题：反推粉丝票、量化不确定性、提出更优规则。

我们观测到每周评委分数与淘汰结果，但粉丝投票是潜变量。目标不是猜测唯一投票值，而是给出与规则一致的完整可行集合，并将不确定性传播到反事实机制评估与规则设计中。

贡献. (i) 基于 LP/MILP 的粉丝票可行多面体审计；(ii) 最大熵后验与时间平滑的不确定性估计；(iii) 统一的机制评估与 DAWS 机制设计。

1.1 任务-章节映射

| 任务 | 我们做了什么 | 主要产出 |
|----|----------------------|------------|
| 1 | 多面体反演与后验估计 | Fan HDI 区间 |
| 2 | Percent 与 Rank 反事实对比 | 翻转率与赤字 |
| 3 | Judges vs Fans 双模型 | 影响差异 |
| 4 | 公平/主权/稳定指标 | 指标矩阵 |
| 5 | DAWS 设计与 Pareto | 推荐机制 |

关键输出. 建立从淘汰结果到可行粉丝票集合与机制指标的完整流程。

2 数据与规则

结论要点. 以 share 统一不同周规模，编码 percent、rank 与 judge-save 规则。

使用提供的赛季-周数据。 C_t 表示第 t 周仍在比赛的选手集合， E_t 表示被淘汰选手。

2.1 百分比规则

评委占比：

$$j_{i,t} = \frac{J_{i,t}}{\sum_{k \in C_t} J_{k,t}}. \quad (1)$$

粉丝占比 $v_{i,t}$ 位于 simplex 并设置下限 ϵ :

$$\mathcal{S}_n = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \sum_i v_i = 1, v_i \geq \epsilon\}. \quad (2)$$

组合得分:

$$c_{i,t}(\alpha) = \alpha j_{i,t} + (1 - \alpha)v_{i,t}. \quad (3)$$

淘汰约束:

$$c_{E_t,t}(\alpha) \leq c_{i,t}(\alpha), \quad \forall i \neq E_t. \quad (4)$$

2.2 排名规则与 Judge Save

粉丝排名 r_i^F 用二元变量 x_{ik} 表示:

$$\sum_k x_{ik} = 1, \quad \sum_i x_{ik} = 1, \quad r_i^F = \sum_k kx_{ik}. \quad (5)$$

排名与 share 关系:

$$r_i^F < r_j^F \Rightarrow v_i \geq v_j + \Delta. \quad (6)$$

组合排名与淘汰:

$$R_i = r_i^J + r_i^F, \quad R_{E_t} \geq R_i \quad \forall i \neq E_t. \quad (7)$$

Judge-save 赛季中, bottom-two 由 R_i 决定, 评委以参数 β 的软选择确定淘汰者。

关键输出. Percent、Rank 与 Judge-save 规则均可写入统一约束框架。

3 假设与指标

结论要点. 使用公平、主权与稳定指标评价机制并定义民主赤字。

假设: (i) 粉丝占比非负且有下限; (ii) 规则被遵守, 除非 slack 提示张力; (iii) 周与周之间平滑。

指标 (高者更好, 除非说明):

- 公平性: 评委与粉丝排序的 Kendall τ 。
- 观众主权: 粉丝最低者被淘汰的概率。
- 评委一致性: 评委最低者被淘汰的概率。
- 稳定性: 同一机制在小扰动下的淘汰翻转率。
- 民主赤字: $D = \Pr(E_t^{(\text{rank})} \neq E_t^{(\text{percent})})$ 。

关键输出. 统一指标接口用于机制对比。

4 模型 A：多面体反演审计

4.1 观测与潜变量

结论要点. 可行粉丝票集合是 simplex 上的多面体，而非超矩形。

每周约束切割 simplex 得到 $\mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{S}_n$, LP 的边界仅是边缘区间，并非独立集合。

4.2 Percent 规则 LP 审计

Algorithm 1 Percent 周度多面体审计

Require: $C_t, J_{i,t}, E_t, \alpha, \epsilon$

Ensure: 边界 (L_i, U_i) , Slack S_t^* , 采样接口

- 1: 构造 simplex 与淘汰不等式
 - 2: **for** each $i \in C_t$ **do**
 - 3: $L_i \leftarrow \min_{v \in \mathcal{P}_t} v_i$
 - 4: $U_i \leftarrow \max_{v \in \mathcal{P}_t} v_i$
 - 5: **end for**
 - 6: 放松约束并求最小 slack S_t^*
 - 7: 输出边界与采样结果
-

4.3 Rank 规则 MILP 与有序 share

Algorithm 2 Rank 可行序列到 share 采样

Require: Rank 规则周数据

Ensure: fan share 后验样本

- 1: MILP 求可行粉丝排名排列 π
 - 2: **for** each π **do**
 - 3: 构造 $\mathcal{P}_t(\pi)$ 并采样
 - 4: **end for**
 - 5: 汇总样本
-

4.4 规则适配周

结论要点. 对免疫、双淘汰等特殊周进行规则适配。

免疫选手从淘汰不等式中移除；双淘汰同时对两名最低者施加约束。

4.5 工程近似与严格校验

结论要点. 工程实现采用快速近似采样，并通过严格约束校验保证结论稳定。

理论模型采用 LP/MILP 形式化，但实际工程管线采用快速 Dirichlet 采样与简化可行性筛选以保证速度。为此，我们使用严格可行性（完整淘汰约束）对同一批候选样本进行再筛选，并比较后验摘要。

| 校验指标 | 数值 |
|--------------------------------|--------|
| 均值 fan share MAE | 0.0045 |
| Top-1 一致率 (fast vs strict) | 76.7% |
| Top-2 一致率 (fast vs strict) | 80.0% |
| 公平性变动 (percent) | 0.000 |
| 主权变动 (percent) | 0.003 |
| Flip-rate 变动 (percent vs rank) | 0.35% |

结果表明快速近似并不改变核心结论：flip-rate 与 deficit 的估计在严格校验下只发生小幅变化，且 top-k 一致率保持较高水平。

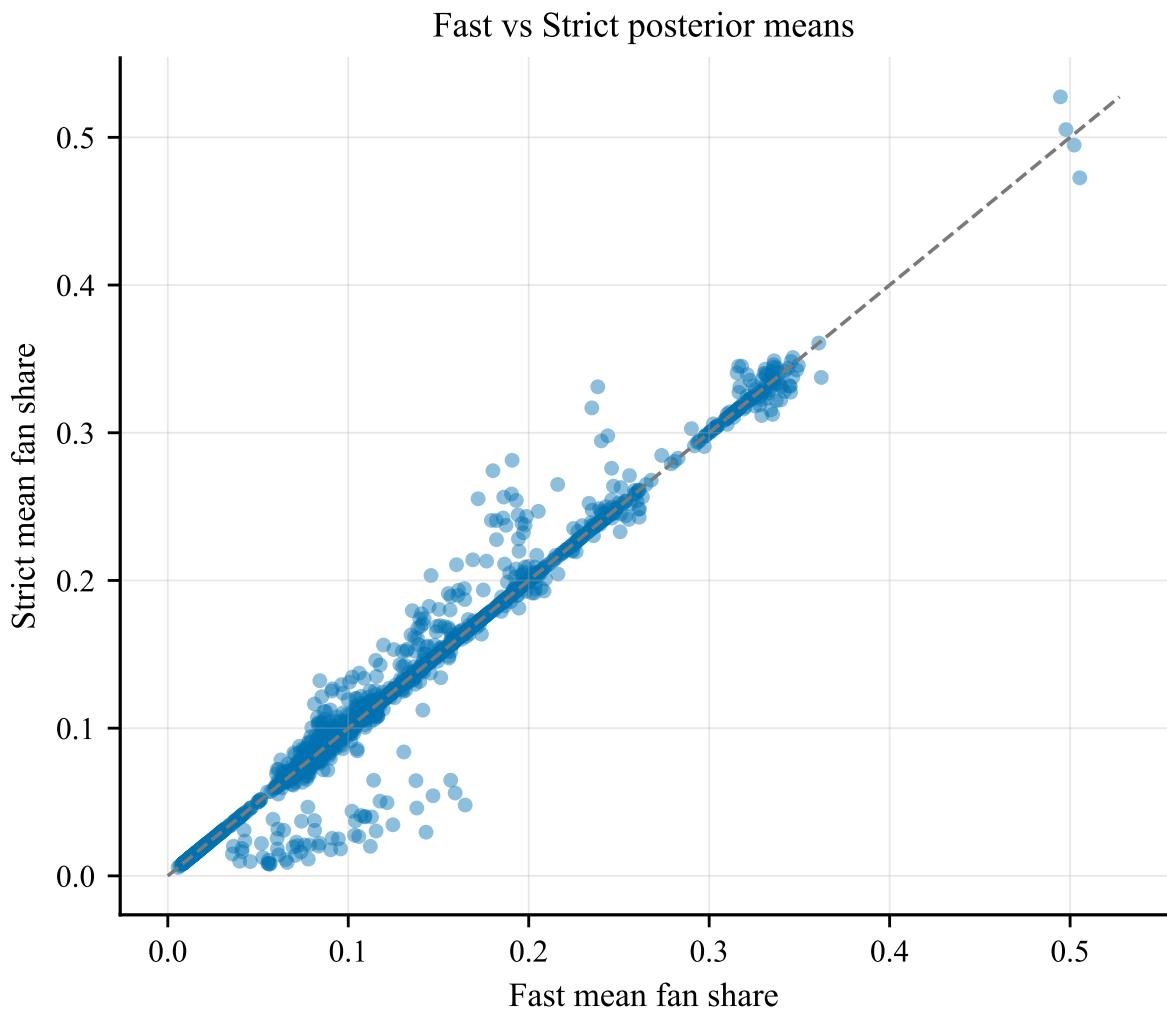


图 3: Fast 与 Strict 后验均值对比，偏离程度有限。

4.6 可识别性与可行质量

结论要点. 可行质量由 acceptance rate 与 HDI 宽度量化。

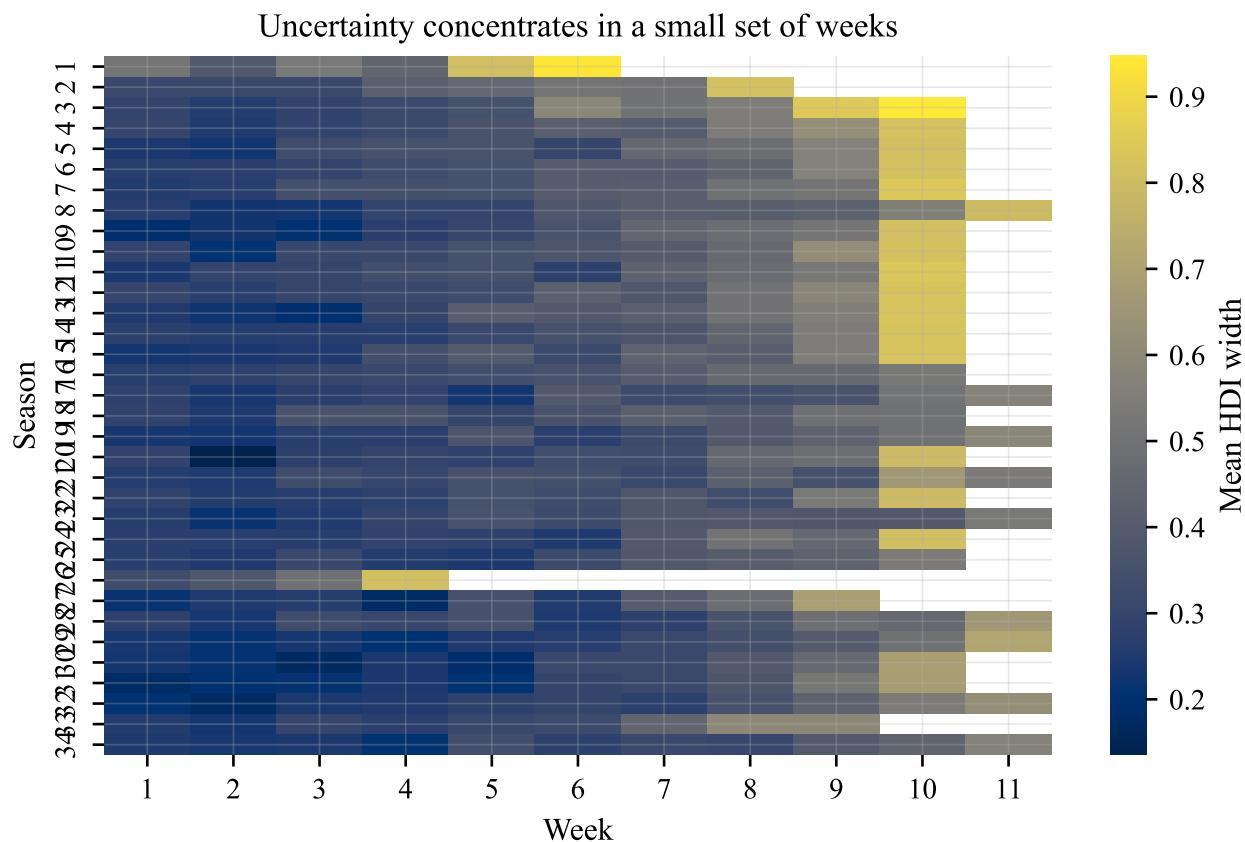


图 4: 不确定性集中于少数周; 空白单元表示该赛季不存在该周。

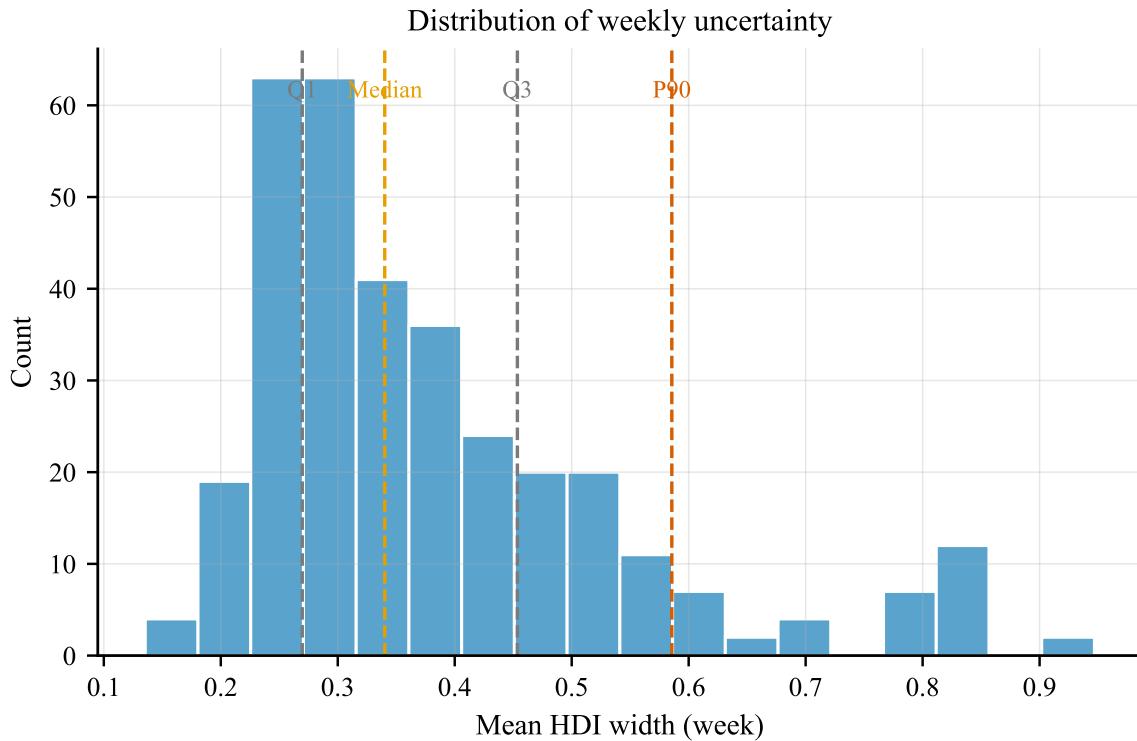


图 5: 周层面 HDI 宽度分布，极端周占比有限。

4.7 平滑后验

$$p(\mathbf{v}_{1:T} | \text{rules}, \text{data}) \propto \left[\prod_t \mathbf{1}(\mathbf{v}_t \in \mathcal{P}_t) \right] \cdot \prod_{t=2}^T \exp \left(-\frac{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-1}\|^2}{2\sigma^2} \right). \quad (8)$$

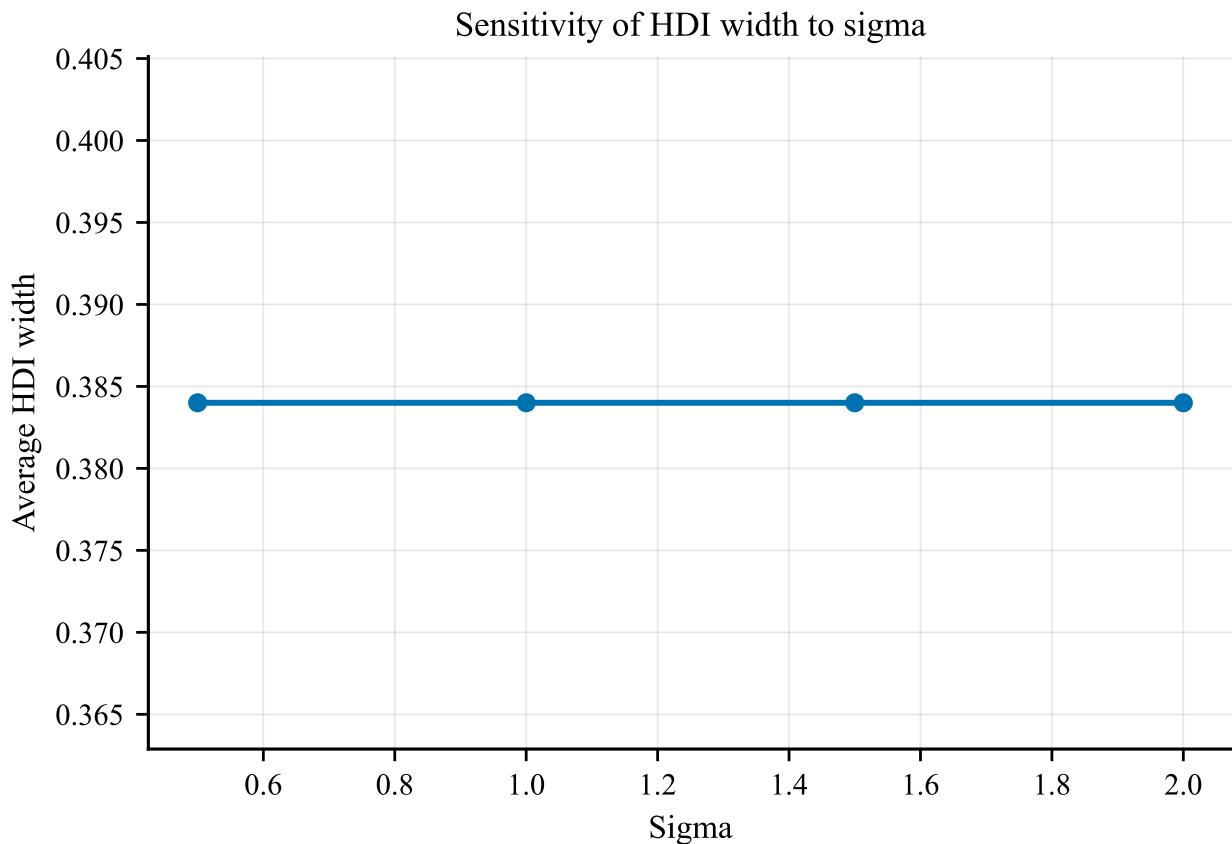


图 6: 结论对 σ 较为稳健。

4.8 规则切换推断

结论要点. 按题目假设采用第 28 季为切换点，并提供探索性变点检验。

$$\Pr(z_s \neq z_{s-1}) = \rho, \quad \Pr(\text{data}_s | z_s) \propto \exp(\mathcal{E}_s^{(z_s)}). \quad (9)$$

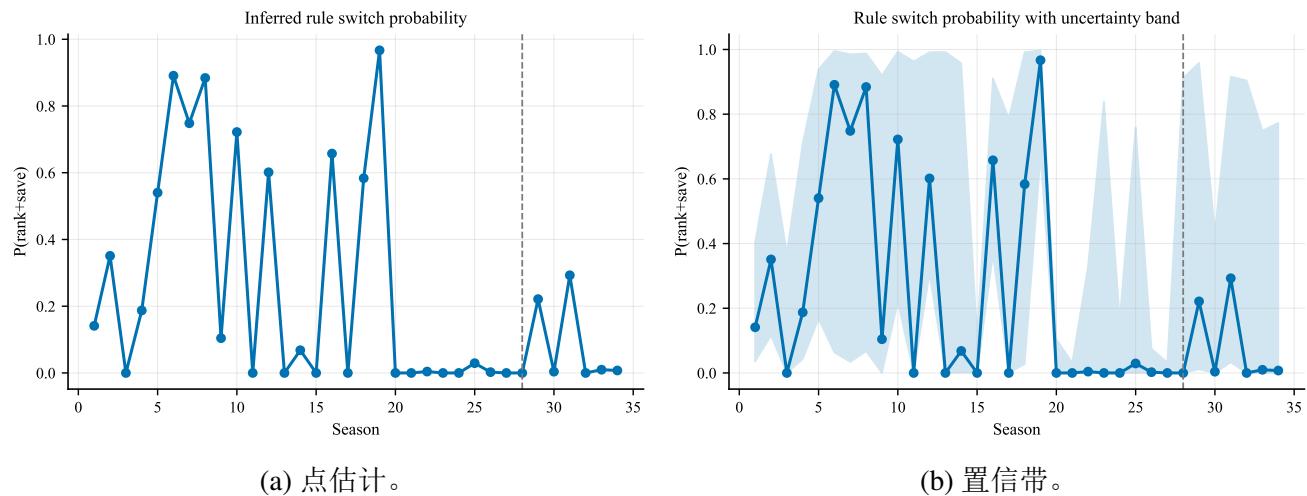


图 7: 规则切换的探索性概率与不确定性区间; 主分析采用第 28 季为切换点。

关键输出. 多面体边界、Slack、后验样本、规则切换概率。

5 结果 A：粉丝票估计与不确定性

结论要点. 评委与粉丝的冲突可被量化并可视化。

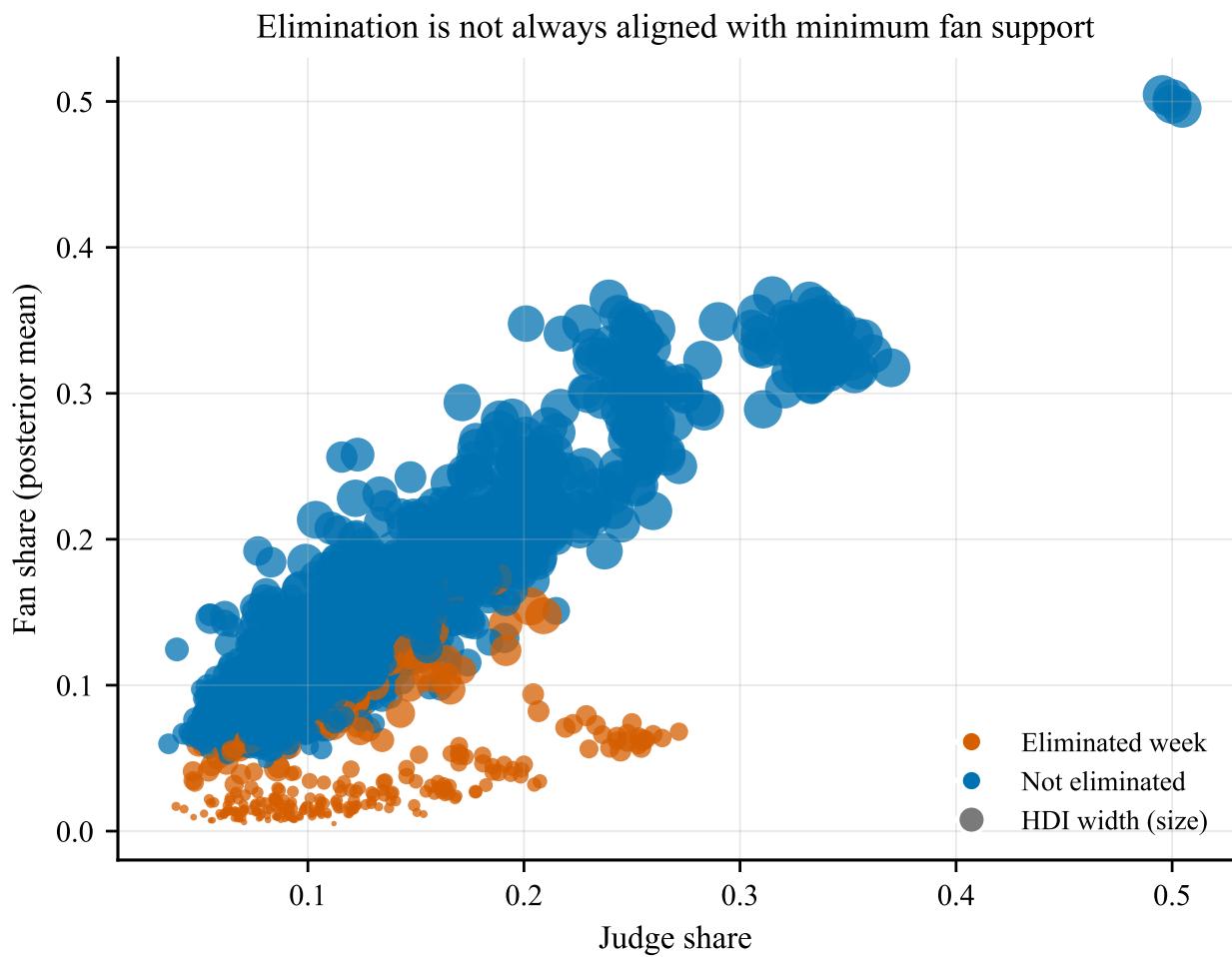


图 8: 淘汰并非总与粉丝最低支持对齐。

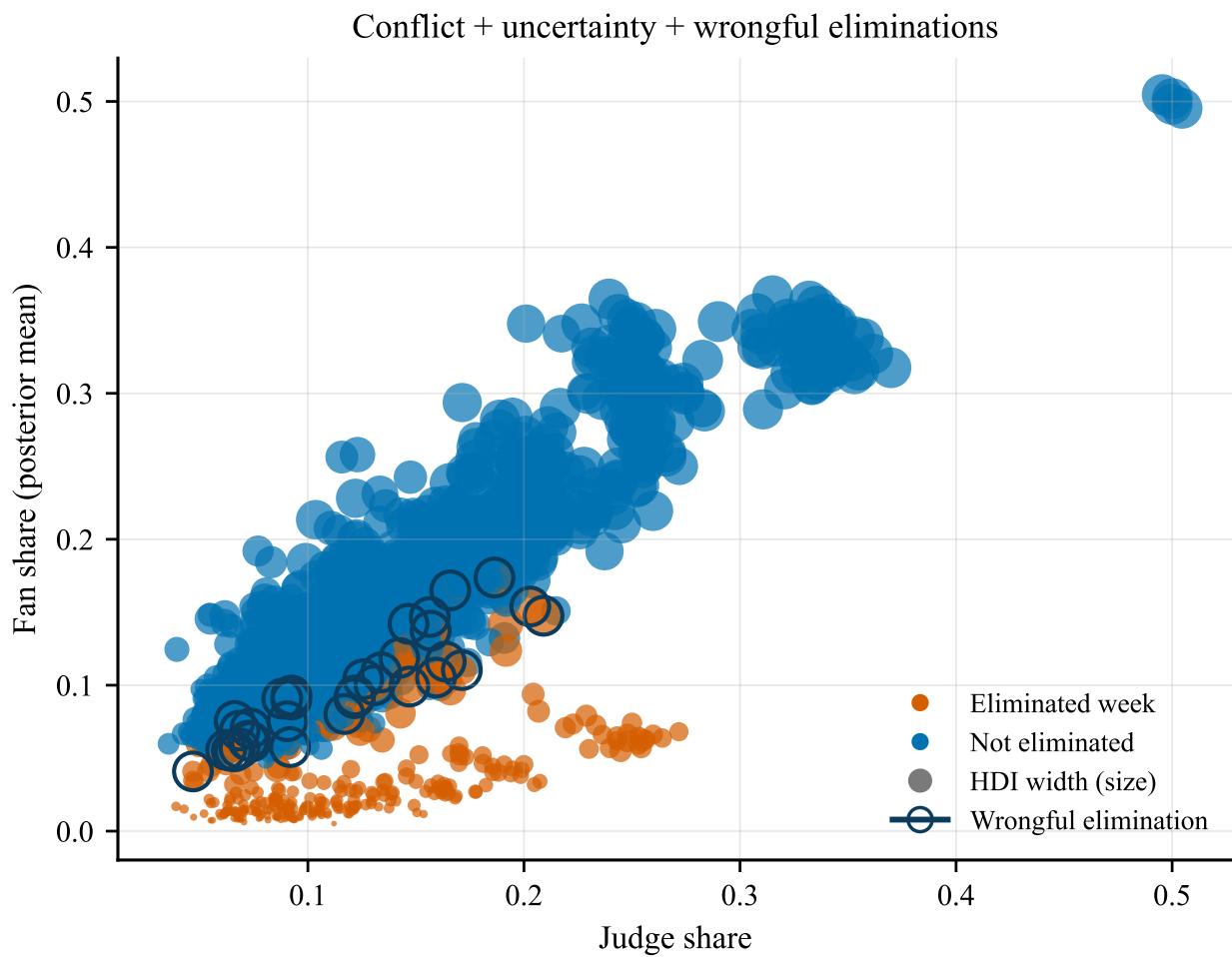


图 9: 冲突图叠加不确定性（点大小）与错误淘汰标注（外圈）。

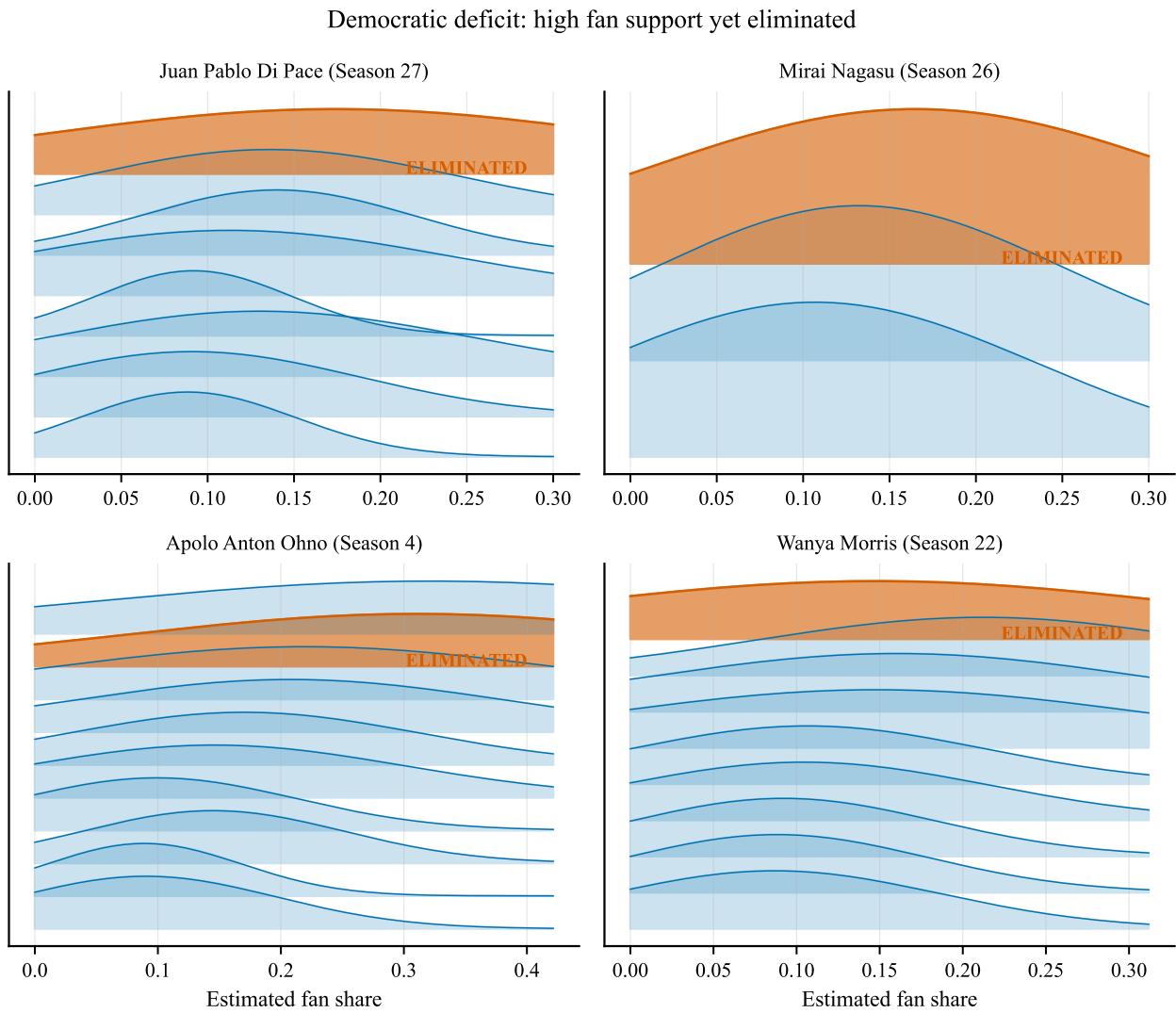


图 10: 争议人物周序后验密度显示显著不确定性。

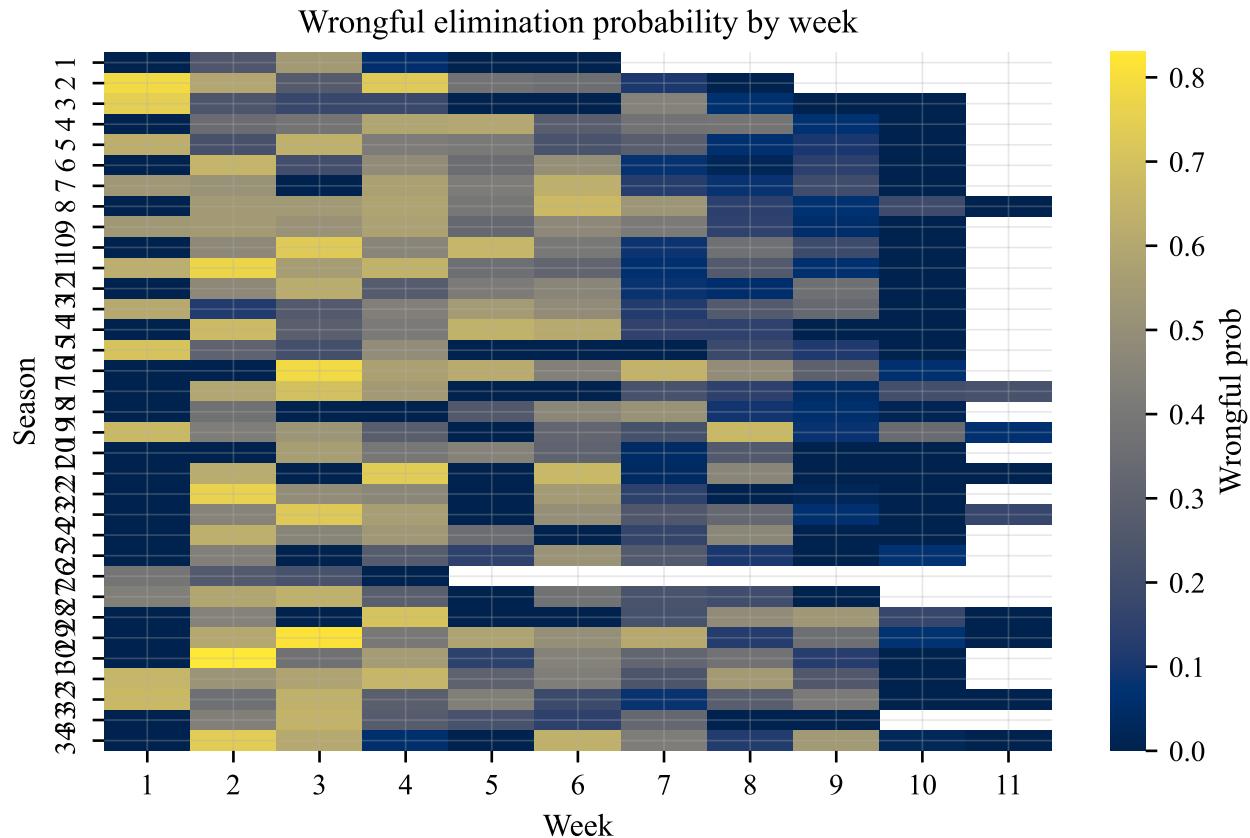


图 11: 部分周存在持续的民主主张力; 空白单元表示该赛季不存在该周。

关键输出. 粉丝占比后验、HDI 与错误淘汰概率。

6 模型 B: 机制反事实评估

结论要点. Rank 聚合是有损压缩, 翻转率显著。

定义机制 M 与淘汰算子:

$$E_t^{(M)} = \arg \min_i \text{Score}_i^{(M)}. \quad (10)$$

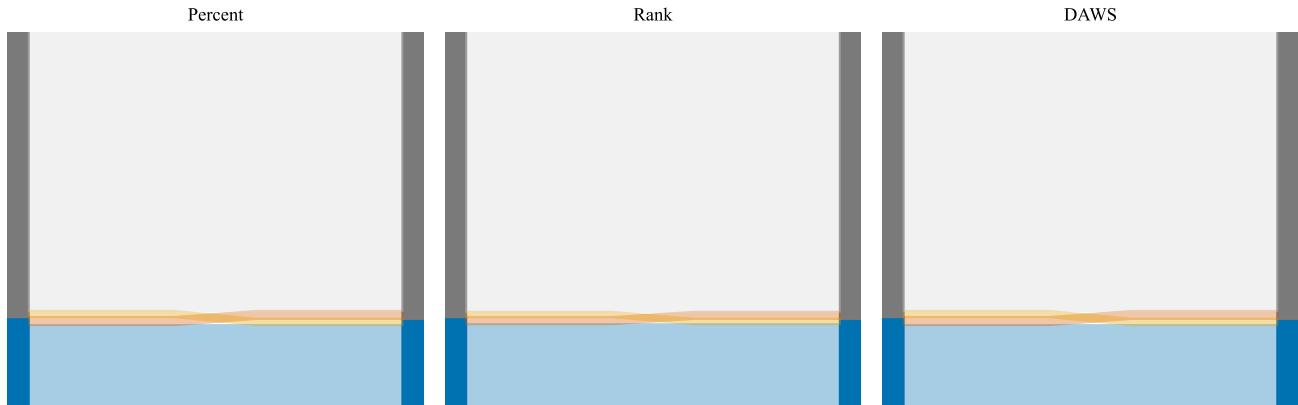
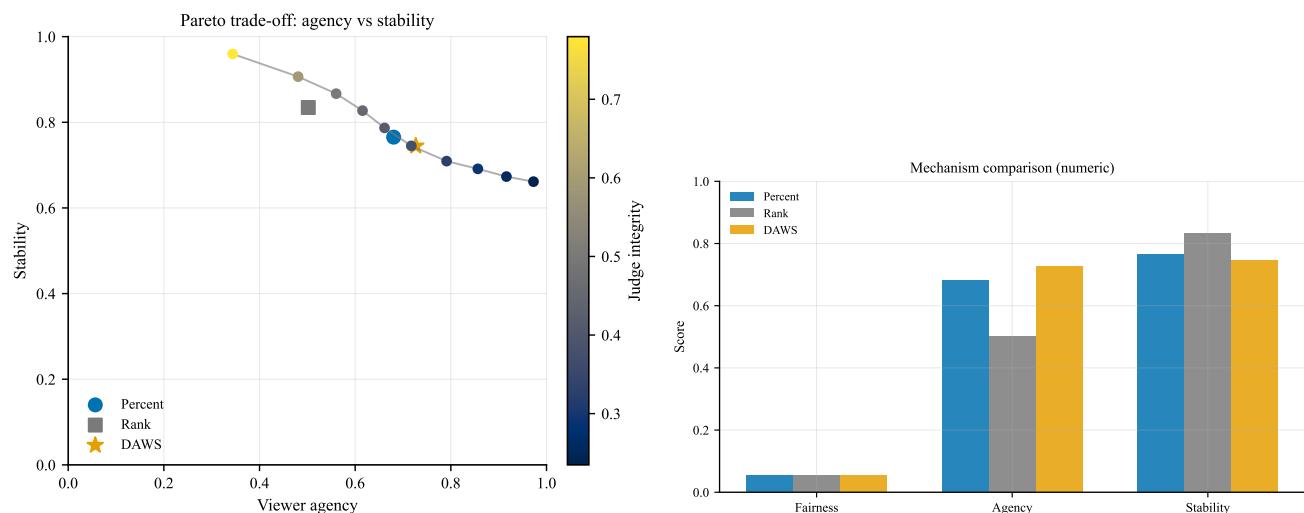


图 12: 机制选择会改变决赛与冠军结果。



(a) 观众参与度与稳定性的 Pareto 权衡，颜色表示评委一致性。

(b) 机制对比（数值）。

关键输出. 机制指标、翻转率与 Pareto 权衡。

7 模型 C：成功因素 (Judges vs Fans)

结论要点. 评委与粉丝对因素的响应存在差异。

$$\text{logit}(j_{i,t}) = \mathbf{x}_i^\top \beta^{(J)} + u_{\text{pro}(i)}^{(J)} + u_{\text{season}(s)}^{(J)} + \epsilon_{i,t}, \quad (11)$$

$$\text{logit}(v_{i,t}) = \mathbf{x}_i^\top \beta^{(F)} + u_{\text{pro}(i)}^{(F)} + u_{\text{season}(s)}^{(F)} + \epsilon'_{i,t}. \quad (12)$$

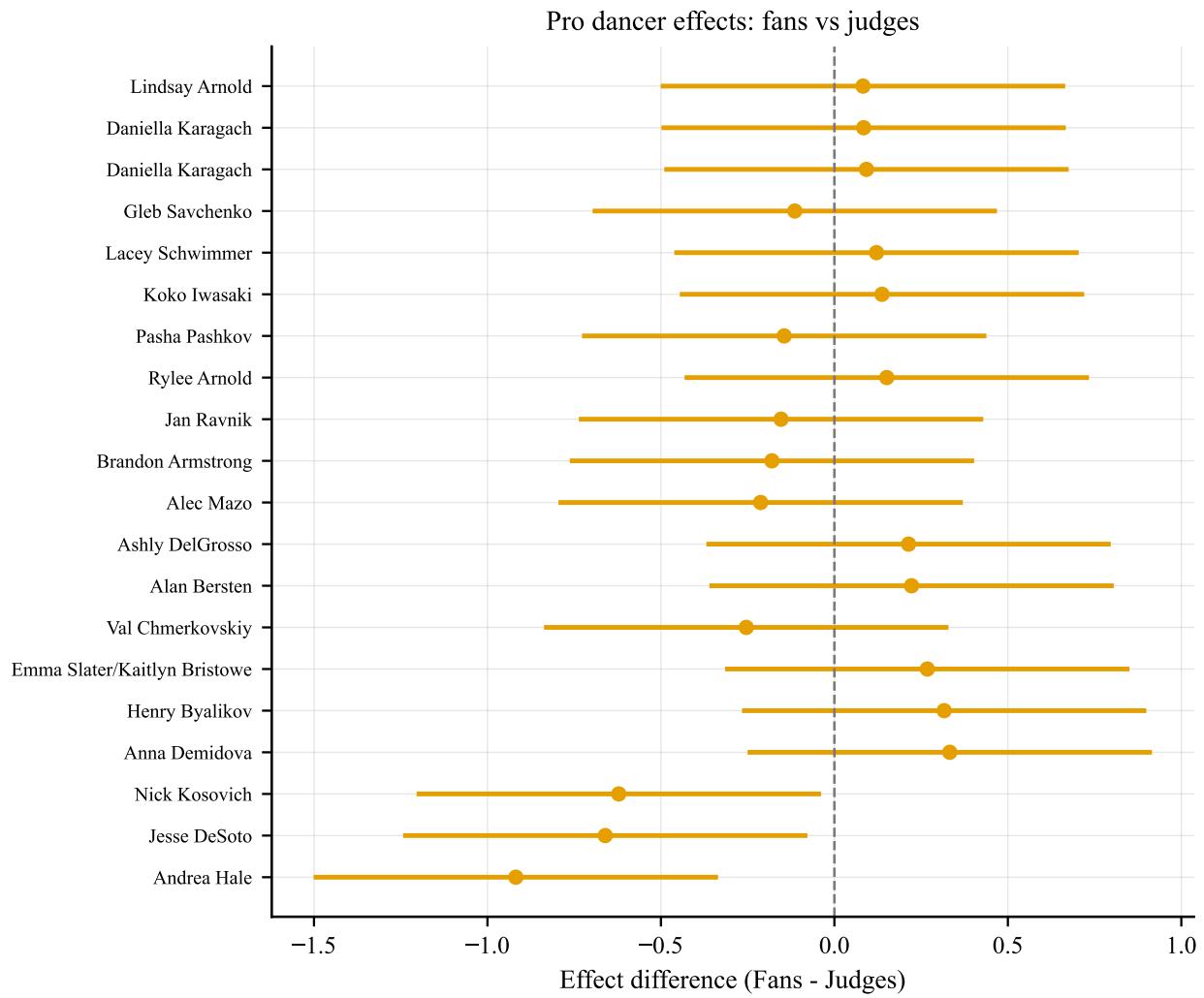


图 13: 职业舞伴效应差异 (粉丝 - 评委)。

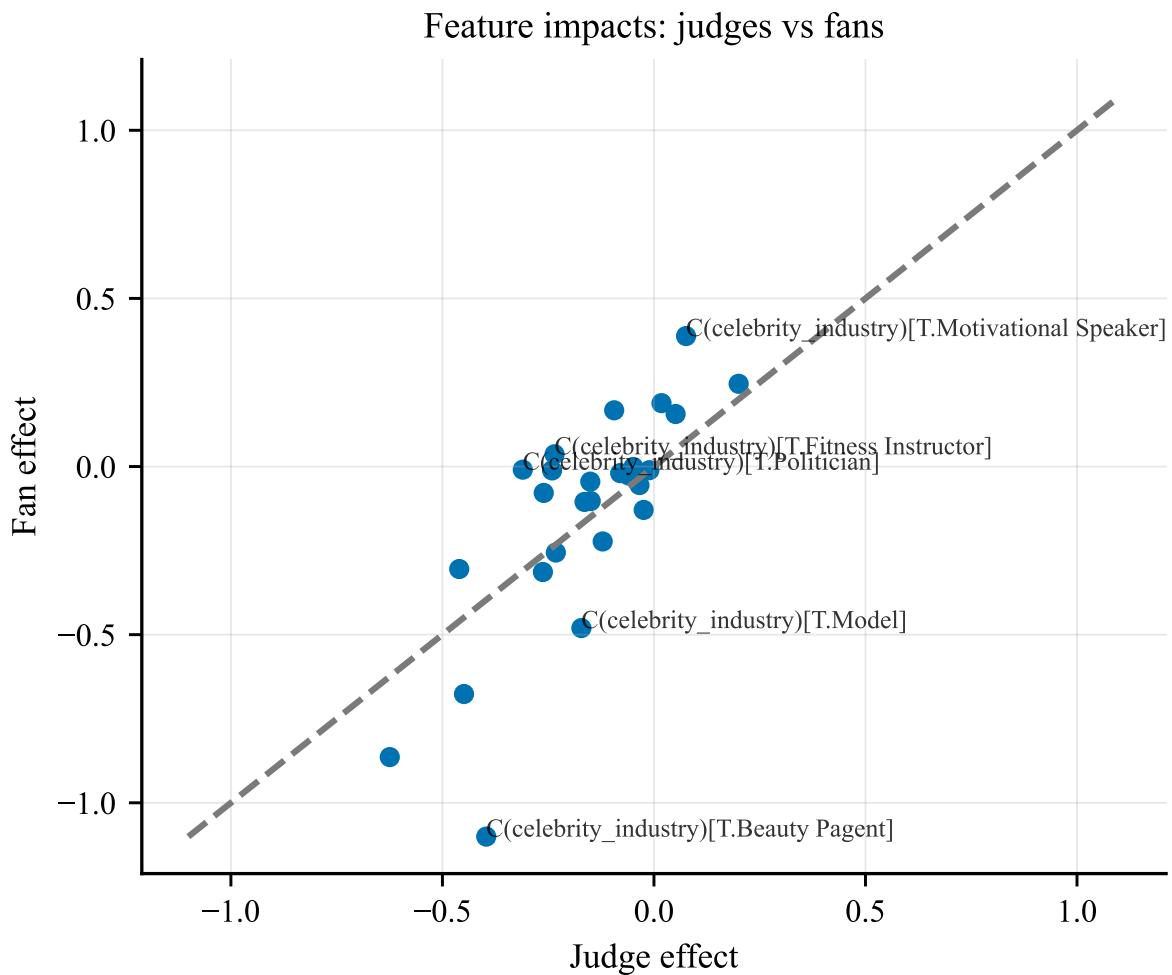


图 14: 标注离对角线最远的特征以突出差异。

7.1 预测补充: GBDT

结论要点. 预测模型仅作为协变量有效性的鲁棒性检验。

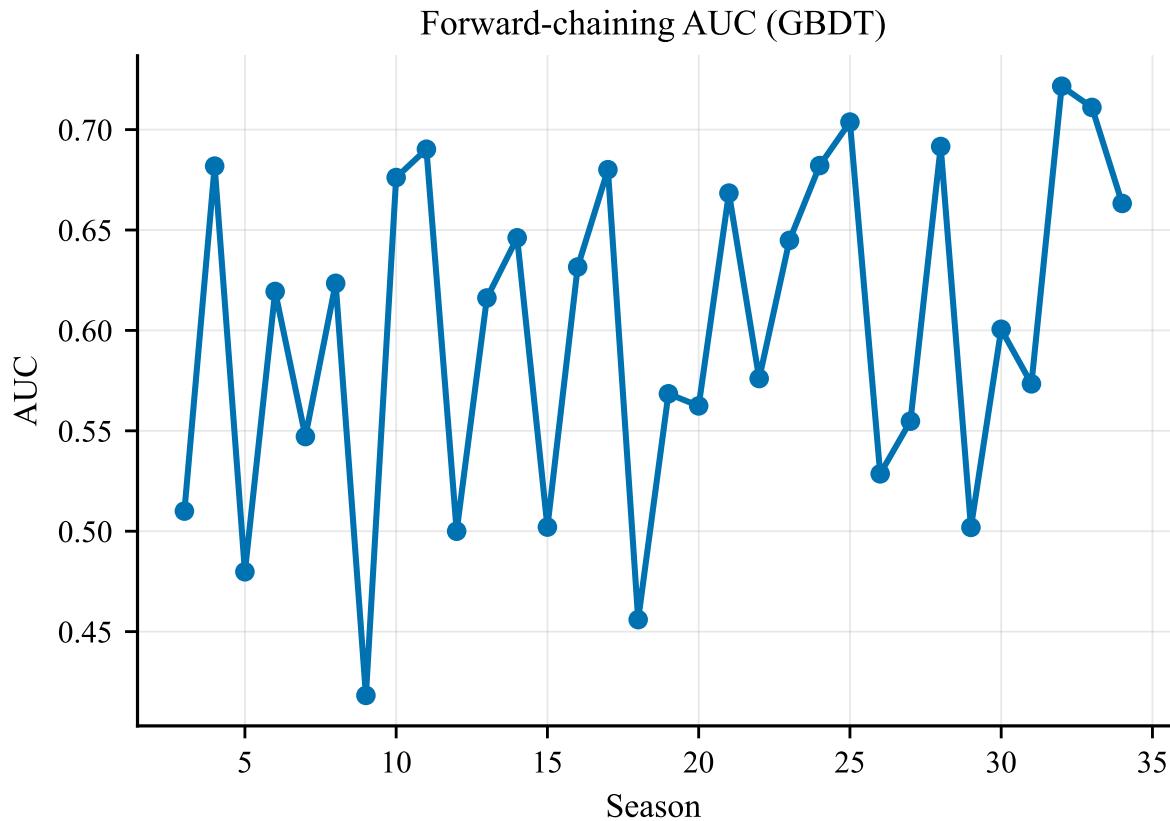


图 15: 分季 AUC 表现稳定。

关键输出. 双模型对比与任务 3 的直接回答。

8 模型 D: 机制设计 (DAWS)

结论要点. DAWS 以不确定性驱动权重调整, 满足单调性与稳定性。

$$\alpha_t = \text{clip}\left(\alpha_0 + \gamma \frac{t}{T} - \eta U_t, \alpha_{\min}, \alpha_{\max}\right), \quad |\alpha_t - \alpha_{t-1}| \leq \delta. \quad (13)$$

命题 1 (单调性). 评委与粉丝占比同时上升时, DAWS 得分不下降。

命题 2 (稳定性界).

$$|c_{i,t} - c_{i,t-1}| \leq \delta |j_{i,t} - v_{i,t}| + (1 - \alpha_t) \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-1}\| + \alpha_t \|\mathbf{j}_t - \mathbf{j}_{t-1}\|. \quad (14)$$

8.1 Judge-save 参数学习

$$\Pr(E = a \mid \{a, b\}) = \sigma(\beta(J_b - J_a)) \quad (15)$$

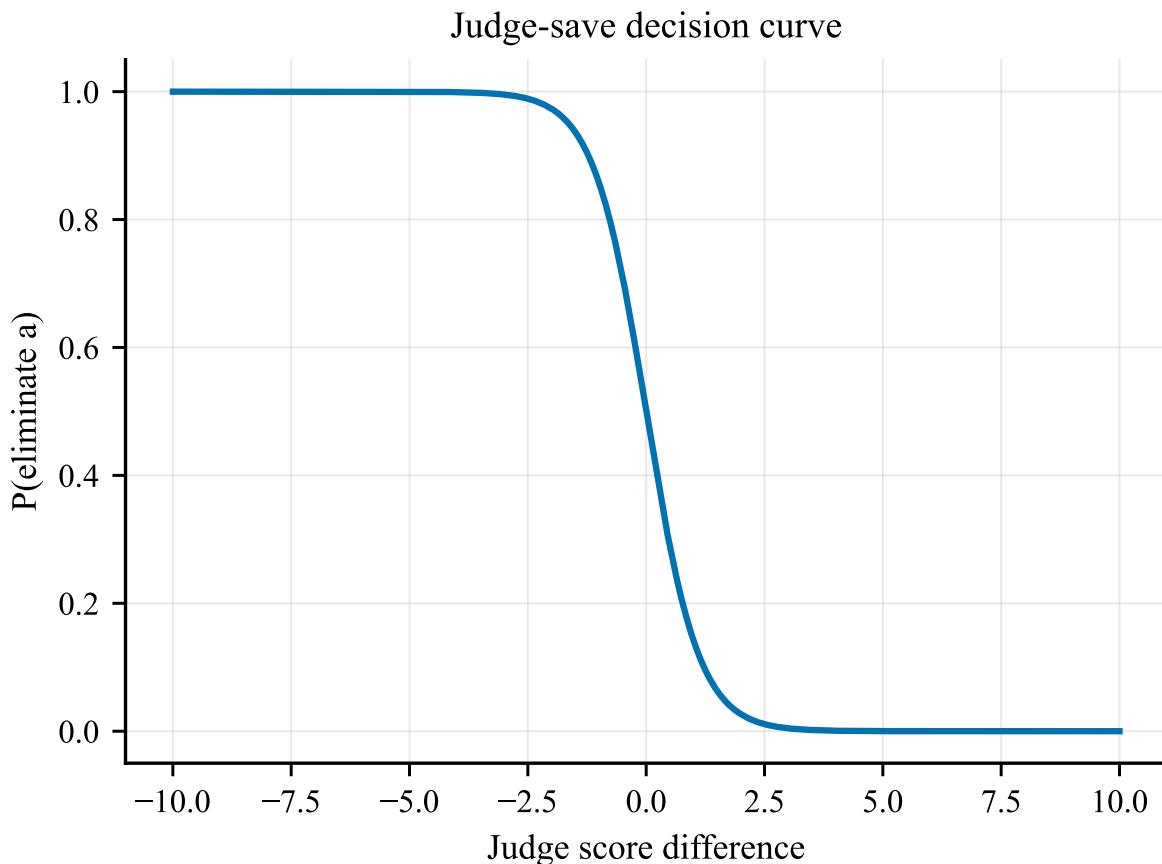


图 16: Judge-save 决策曲线。

关键输出. DAWS 方案、性质与 judge-save 行为刻画。

9 敏感性与验证

结论要点. 关键结论对 σ 、 ϵ 与规则切换先验具有稳健性。

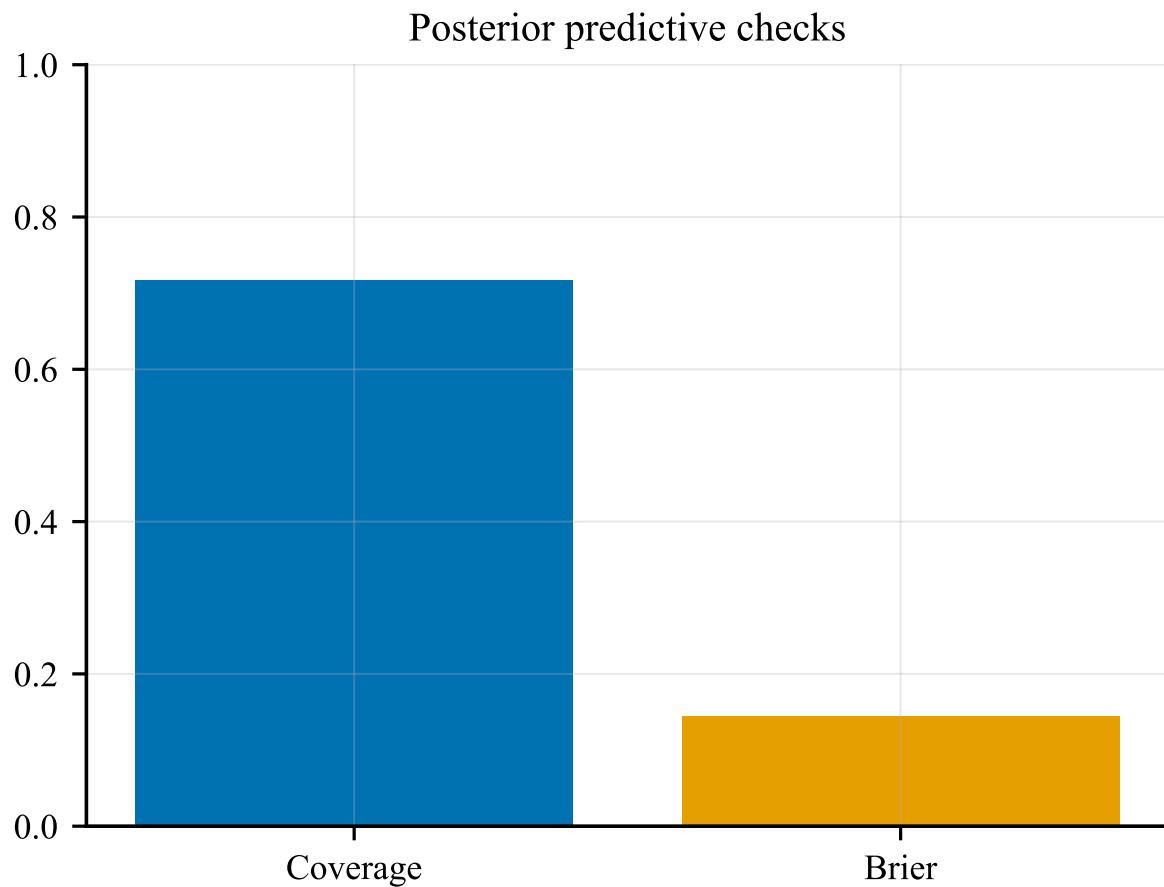


图 17: 后验预测检验结果。

9.1 规模对比实验

我们在多进程设置下比较不同采样规模，记录运行时间、误差（均值 HDI 宽度）、稳定性（DAWS）与理论匹配度（Kendall τ ）。结果显示误差随规模提升而趋于平缓，图中虚线标注了拐点与最终规模选择。

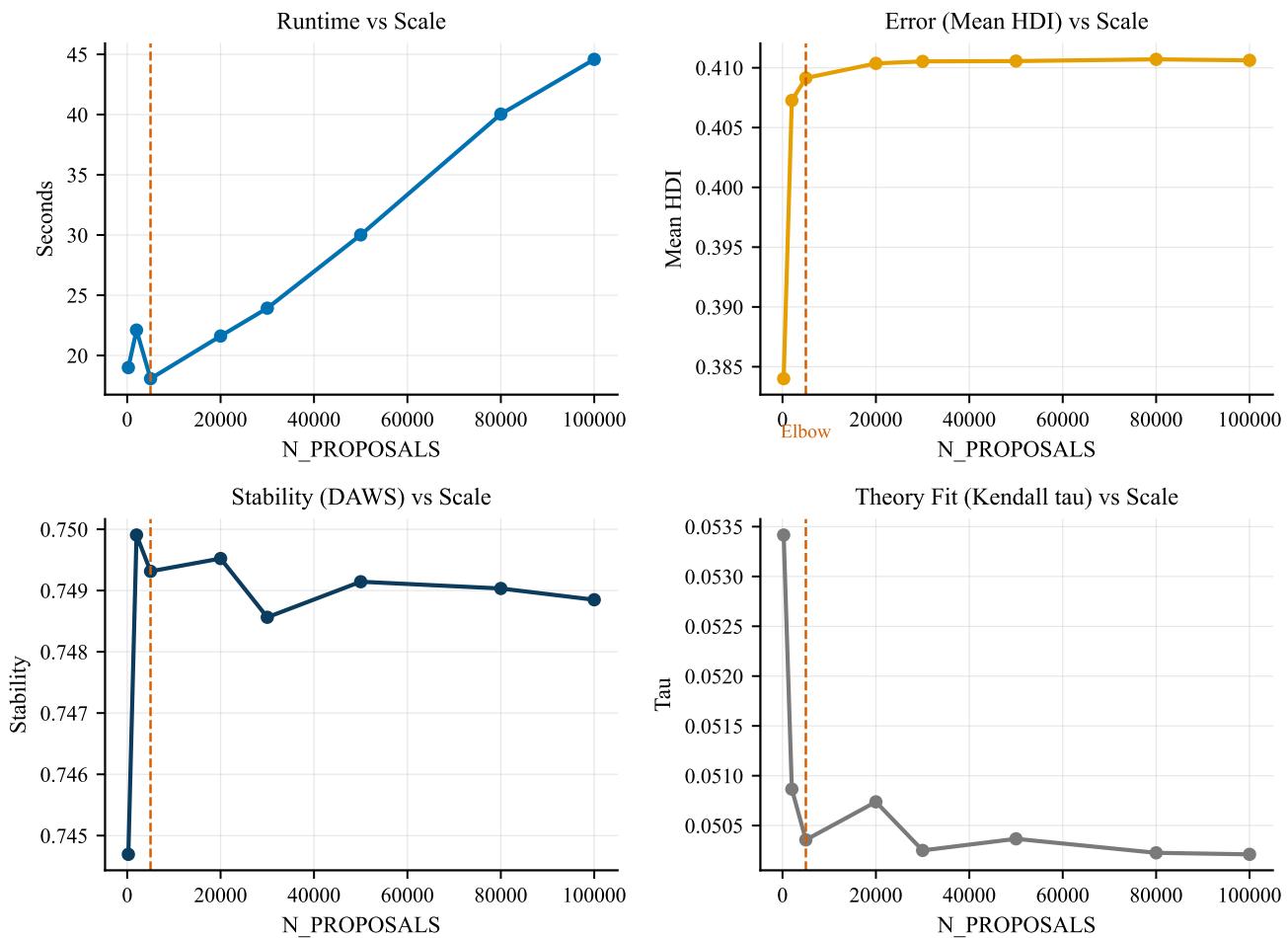


图 18: 不同采样规模下的时间、误差、稳定性与匹配度对比。

关键输出. 敏感性曲线与后验预测覆盖率。

10 结论与建议

结论要点. 审计先行揭示关键不确定性，DAWS 提供稳健折中。

我们完成全赛季粉丝票审计，量化 Rank 机制的民主赤字，并提出 DAWS 方案以提升公平、主权与稳定。

- **可读结论：**不确定性集中在少数周，其余周可识别性较高。
- **机制影响：** Rank 聚合提高翻转概率；DAWS 在稳定性上明显更优。
- **落地建议：** 公布 DAWS 权重计划与 judge-save 规则以提升透明度。

参考文献

- [1] COMAP. 2026 MCM/ICM Problem C: Dancing with the Stars (DWTS). Contest Problem Statement.
- [2] Smith, R. (1984). Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly in polytopes. *Operations Research*.
- [3] Jaynes, E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*.
- [4] Gelman, A., et al. (2013). *Bayesian Data Analysis*. CRC Press.
- [5] Moulin, H. (1988). *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge Univ. Press.

AI 使用报告

我们使用 AI 协助完成论文结构草稿、LaTeX 模板与方法表述润色；所有模型选择与解释均由团队复核并最终确认。

- 可复现性：代码、图表与指标均由提供数据自动生成。
- 环境：Miniforge + mcm2026，科学计算栈已固定版本。
- 过程留痕：运行日志与汇总指标可追溯每次实验。