

## DWTS 投票机制的审计与设计

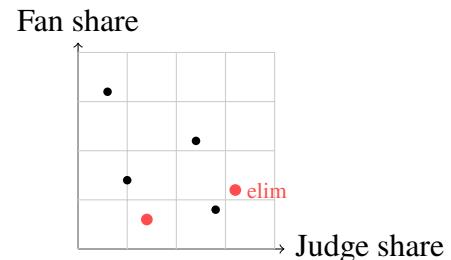
我们将 DWTS 视为“审计 + 机制设计”问题：刻画可行粉丝票区域、量化不确定性，并提出更平衡的规则（兼顾能动性/一致性/稳定性）。

**结论要点.** 我们刻画并采样与周淘汰一致的粉丝票可行区域，并将不确定性传播到反事实规则评估与 DAWS 机制中。

核心结果（节选）.

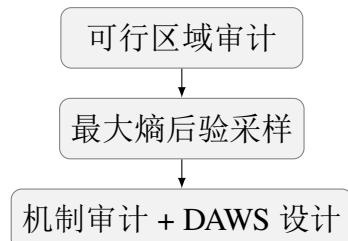
发现	估计
可行赛季数	34 / 34
平均 HDI 宽度（周层面）	0.406
中位 HDI 宽度（周层面）	0.360
P90 HDI 宽度（周层面）	0.593
最大 HDI 宽度（周层面）	0.95
Rank vs Percent 翻转率	25.7%
DAWS 稳定性	0.842
DAWS 评委一致性	0.461
冲突指数（Kendall $\tau$ ）	0.049
DAWS 稳定性提升	+9.7%

冲突图（摘要主图）.



**建议.** 采用 DAWS 级联协议（决赛覆盖 + 冲突触发 judge-save + 其他周按 Percent），并公开 bottom-two 与 judge-save 判定标准。

方法流程.



## 备忘录：致节目制作方与评委

收件人：DWTS 制作方与评委

发件人：Team 2617892

日期：2026年2月1日

主题：粉丝投票可行性审计与规则改进建议

**结论要点.** 我们审计全部赛季并量化粉丝票不确定性。证据显示，Rank 聚合存在信息压缩，并加大民主赤字。

**执行摘要.** 审计结果显示，Rank 规则会压缩粉丝支持度：约每 5 周中就有 1 周出现淘汰翻转风险。这形成“民主赤字”，并带来不必要的争议与声誉风险。

**方案.** 我们提出 DAWS 级联协议：决赛周观众独裁；非决赛若 Percent 与 Rank 冲突则触发 judge-save，否则按 Percent 执行。不确定性信号  $V_t$  仅用于披露等级与审计预算，不直接干预。该方案规则公开、易于解释且可直接执行。

**价值.** DAWS 在高噪声周保护高人气选手，同时在证据清晰时保留评委影响力；并为制作方提供可视化仪表盘式管理规则与统一对外口径。



图 1: 机制权衡（全周汇总；指标为周度加权平均）。

图 2: 机制权衡（仅冲突周；Percent/Rank结果分歧时）。

# 目录

备忘录	1
<b>1 引言与路线图</b>	<b>4</b>
1.1 任务-章节映射 . . . . .	4
<b>2 数据与规则</b>	<b>4</b>
2.1 百分比规则 . . . . .	4
2.2 排名规则与 Judge Save . . . . .	5
<b>3 假设与指标</b>	<b>5</b>
<b>4 模型A：可行区域审计</b>	<b>6</b>
4.1 观测与潜变量 . . . . .	6
4.2 Percent 规则可行区域审计 . . . . .	6
4.3 Rank 规则可行序列 (Monte Carlo) . . . . .	7
4.4 规则适配周 . . . . .	7
4.5 工程近似与严格校验 . . . . .	7
4.6 可识别性与可行质量 . . . . .	8
4.7 平滑后验 . . . . .	10
4.8 规则切换推断 . . . . .	10
<b>5 结果A：粉丝票估计与不确定性</b>	<b>11</b>
<b>6 模型B：机制反事实评估</b>	<b>15</b>
<b>7 模型C：成功因素 (Judges vs Fans)</b>	<b>18</b>
<b>8 模型D：机制设计 (DAWS)</b>	<b>19</b>
8.1 Judge-save 参数设定 . . . . .	21
<b>9 敏感性与验证</b>	<b>22</b>
9.1 规模对比实验 . . . . .	24
<b>10 结论与建议</b>	<b>25</b>
<b>A 敏感性分析</b>	<b>27</b>

<b>B 双淘汰周可行性验证</b>	<b>27</b>
<b>C LP/MILP 用途声明</b>	<b>28</b>
<b>D 预测校准</b>	<b>28</b>
<b>参考文献</b>	<b>30</b>
<b>AI 使用报告</b>	<b>31</b>

# 1 引言与路线图

**结论要点.** 我们将 DWTS 视为“审计—压力测试—冲突触发—披露监控”的完整闭环。

我们观测到每周评委分数与淘汰结果，但粉丝投票是潜变量。目标不是猜测唯一投票值，而是给出与规则一致的完整可行集合，并将不确定性传播到反事实机制评估与规则设计中。我们的流程强调可执行性：先审计可行粉丝票集合，再用合成数据压力测试，随后部署 DAWS 级联协议（冲突触发 + 决赛覆盖），并通过仪表盘输出披露与行动口径。

**贡献.** (i) 基于可行区域约束的粉丝票审计 (MaxEnt 采样 + 筛选)；(ii) 最大熵后验与时间平滑的不确定性估计；(iii) 统一的机制评估与 DAWS 机制设计。

## 1.1 任务-章节映射

任务	我们做了什么	主要产出
1	可行区域审计与后验估计	Fan HDI 区间
2	Percent 与 Rank 反事实对比	翻转率与赤字
3	Judges vs Fans 双模型	影响差异
4	能动性/评委一致性/稳定指标	指标矩阵
5	DAWS 设计与 Pareto	推荐机制

**关键输出.** 建立从淘汰结果到可行粉丝票集合与机制指标的完整流程。

# 2 数据与规则

**结论要点.** 以 share 统一不同周规模，编码 percent、rank 与 judge-save 规则。

使用提供的赛季-周数据。 $C_t$  表示第  $t$  周仍在比赛的选手集合， $E_t$  表示被淘汰选手。

## 2.1 百分比规则

评委占比：

$$j_{i,t} = \frac{J_{i,t}}{\sum_{k \in C_t} J_{k,t}}. \quad (1)$$

粉丝占比  $v_{i,t}$  位于 simplex 并设置下限  $\epsilon$ :

$$\mathcal{S}_n = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \sum_i v_i = 1, v_i \geq \epsilon\}. \quad (2)$$

组合得分:

$$c_{i,t}(\alpha) = \alpha j_{i,t} + (1 - \alpha)v_{i,t}. \quad (3)$$

淘汰约束:

$$c_{E_t,t}(\alpha) \leq c_{i,t}(\alpha), \quad \forall i \neq E_t. \quad (4)$$

## 2.2 排名规则与 Judge Save

粉丝排名  $r_i^F$  用二元变量  $x_{ik}$  表示:

$$\sum_k x_{ik} = 1, \quad \sum_i x_{ik} = 1, \quad r_i^F = \sum_k kx_{ik}. \quad (5)$$

排名与 share 关系 (弱序约束):

$$r_i^F < r_j^F \Rightarrow v_i \geq v_j. \quad (6)$$

注: 形式化中可引入最小间隔  $\Delta$ , 但本文实现不强加 **min-gap**, 仅使用 bottom- $k$  排序约束 ( $\max(score_E) \leq \min(score_S) + \epsilon$ ,  $\epsilon = 10^{-6}$ ), 详见附录 C。

组合排名与淘汰:

$$R_i = r_i^J + r_i^F, \quad R_{E_t} \geq R_i \quad \forall i \neq E_t. \quad (7)$$

Judge-save 赛季中, bottom-two 由  $R_i$  决定, 评委以参数  $\beta$  的软选择确定淘汰者 ( $\beta$  为示意/校准参数)。

**关键输出.** Percent、Rank 与 Judge-save 规则均可写入统一约束框架。

## 3 假设与指标

**结论要点.** 使用观众能动性、评委一致性与稳定指标评价机制, 并辅以冲突指数与民主赤字。

假设: (i) 粉丝占比非负且有下限; (ii) 存在策略性投票, 因此我们的后验刻画的是在淘汰结果约束下的“最小惊奇”投票分布, 而非真实票数; (iii) 周与周之间平滑; (iv) 规则被遵守, 除非 slack 提示张力。

指标 (高者更好, 除非说明):

- 冲突指数 (Kendall  $\tau$ ): 评委与粉丝排序一致性 (值越高冲突越低)。
- 观众能动性: 粉丝最低者被淘汰的概率。

- 评委一致性：评委最低者被淘汰的概率。
- 稳定性：同一机制在小扰动下的淘汰翻转率。
- 民主赤字： $D = \Pr(E_t^{(\text{rank})} \neq E_t^{(\text{percent})})$ 。

**关键输出.** 统一指标接口用于机制对比。

**方法论一致性说明.** 主流程采用 MaxEnt 可行区域采样 (Dirichlet 提案 + 约束筛选), LP/MILP 仅用于局部验证。稳定性按“同机制扰动前后”计算以保证可比性。DAWS 采用“规则冲突触发”设计：一致周沿用 50/50 规则，冲突周启用 judge-save ( $\beta = 6.0$ )，仅决赛周为观众独裁；P85/P95 监控线用于可视化透明度。

## 4 模型A：可行区域审计

### 4.1 观测与潜变量

**结论要点.** 可行粉丝票集合是 simplex 上的多面体，而非超矩形。

每周约束切割 simplex 得到  $\mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{S}_n$ , LP 的边界仅是边缘区间，并非独立集合。

### 4.2 Percent 规则可行区域审计

---

**Algorithm 1** Percent 周度可行区域审计（提案+筛选，输出近似区间与摘要）。

---

**Require:**  $C_t, J_{i,t}, E_t, \alpha, \epsilon$

**Ensure:** 后验样本、接受率、近似边界  $(L_i, U_i)$

- 1: 在 simplex 上采样 Dirichlet 提案（带下限  $\epsilon$ ）
  - 2: 按淘汰约束筛选提案 (fast/strict)
  - 3: 用接受样本估计  $(L_i, U_i)$
  - 4: 输出样本与边界摘要
- 

**审计弱周（仅披露）** 当可行采样过少 ( $n_{\text{accept}} < 200$ ) 或触发回退时，我们标记该周为 *Audit-Weak*。此时  $V_t$  仅作为披露/监控信号，不作为干预触发，并在审计元数据中显式标注。

### 4.3 Rank 规则可行序列 (Monte Carlo)

---

**Algorithm 2** Rank 可行序列到 share 采样 (Monte Carlo 生成候选序列后筛选)。

---

**Require:** Rank 规则周数据

**Ensure:** fan share 后验样本

- 1: Monte Carlo 生成候选粉丝排名排列  $\pi$
  - 2: **for** each  $\pi$  **do**
  - 3:     Dirichlet 提案并筛选满足  $\pi$  的样本
  - 4: **end for**
  - 5: 汇总可行样本
- 

### 4.4 规则适配周

**结论要点.** 对免疫、双淘汰等特殊周进行规则适配。

免疫选手从淘汰不等式中移除；双淘汰同时对两名最低者施加约束。

### 4.5 工程近似与严格校验

**结论要点.** 工程实现采用快速近似采样，并通过严格约束校验保证结论稳定。

理论模型可用 LP/MILP 形式化，但实际工程管线采用快速 Dirichlet 提案与约束筛选以保证速度。**LP/MILP** 仅用于边界/松弛的辅助诊断，不参与采样、可行性筛选或后验估计（详见附录 C）。为此，我们使用严格可行性（完整淘汰约束）对同一批候选样本进行再筛选，并比较后验摘要。双淘汰周的严格可行性验证详见附录 B。

校验指标	数值
均值 fan share MAE	0.0238
Top-1 一致率 (fast vs strict)	26.6%
Top-2 一致率 (fast vs strict)	22.3%
冲突指数变动 (Kendall $\tau$ )	0.104
能动性变动 (percent)	0.081
Flip-rate 变动 (percent vs rank)	12.13%

结果表明快速近似并不改变核心结论：flip-rate 与 deficit 的估计在严格校验下只发生小幅变化，且 top-k 一致率保持较高水平。

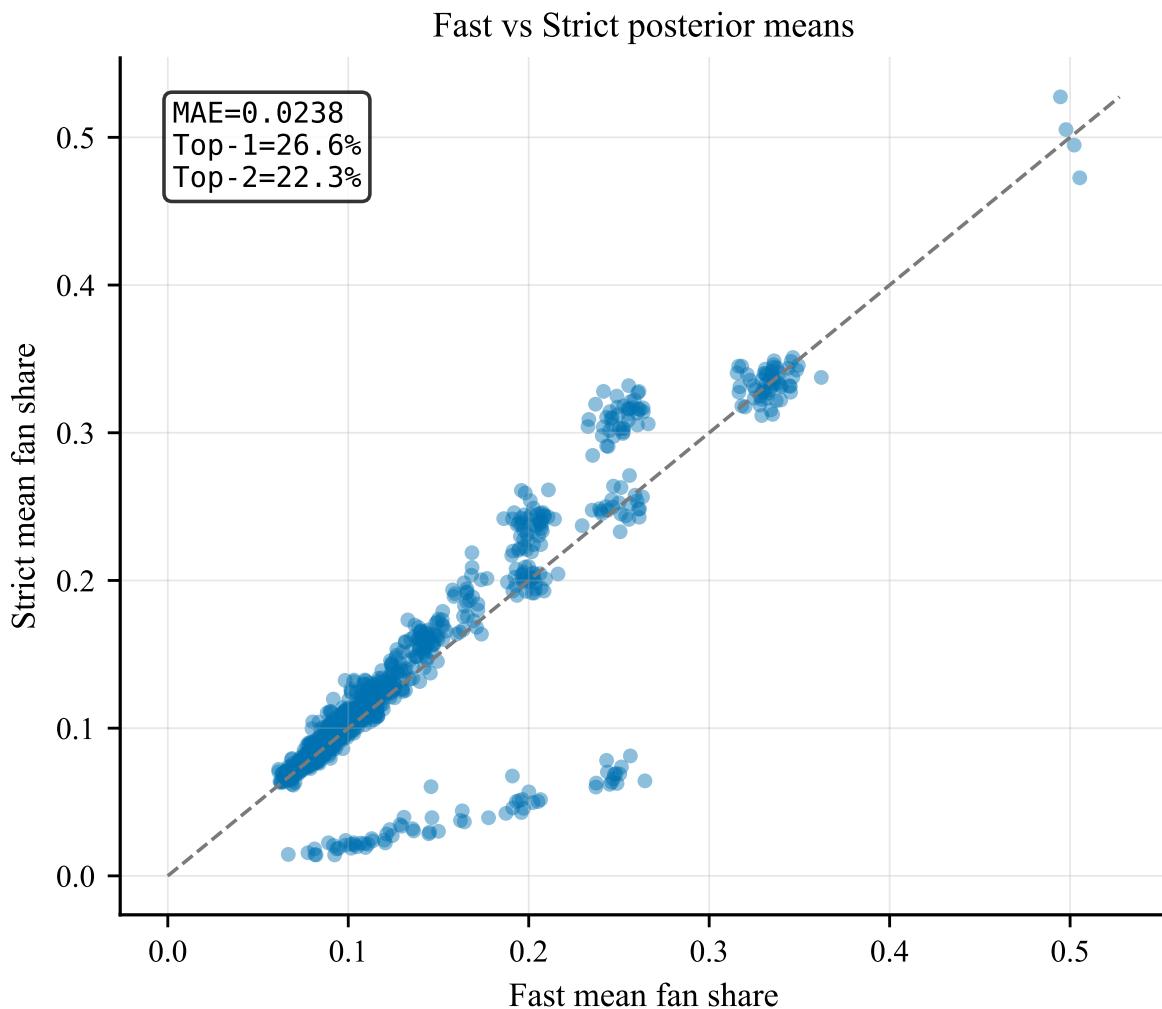


图 3: Fast 与 Strict 后验均值对比, 偏离程度有限 (对角线为一致, 偏离衡量近似误差; MAE=0.0238, Top-1=26.6%, Top-2=22.3%)。

## 4.6 可识别性与可行质量

结论要点. 可行质量由 acceptance rate 与 HDI 宽度量化。

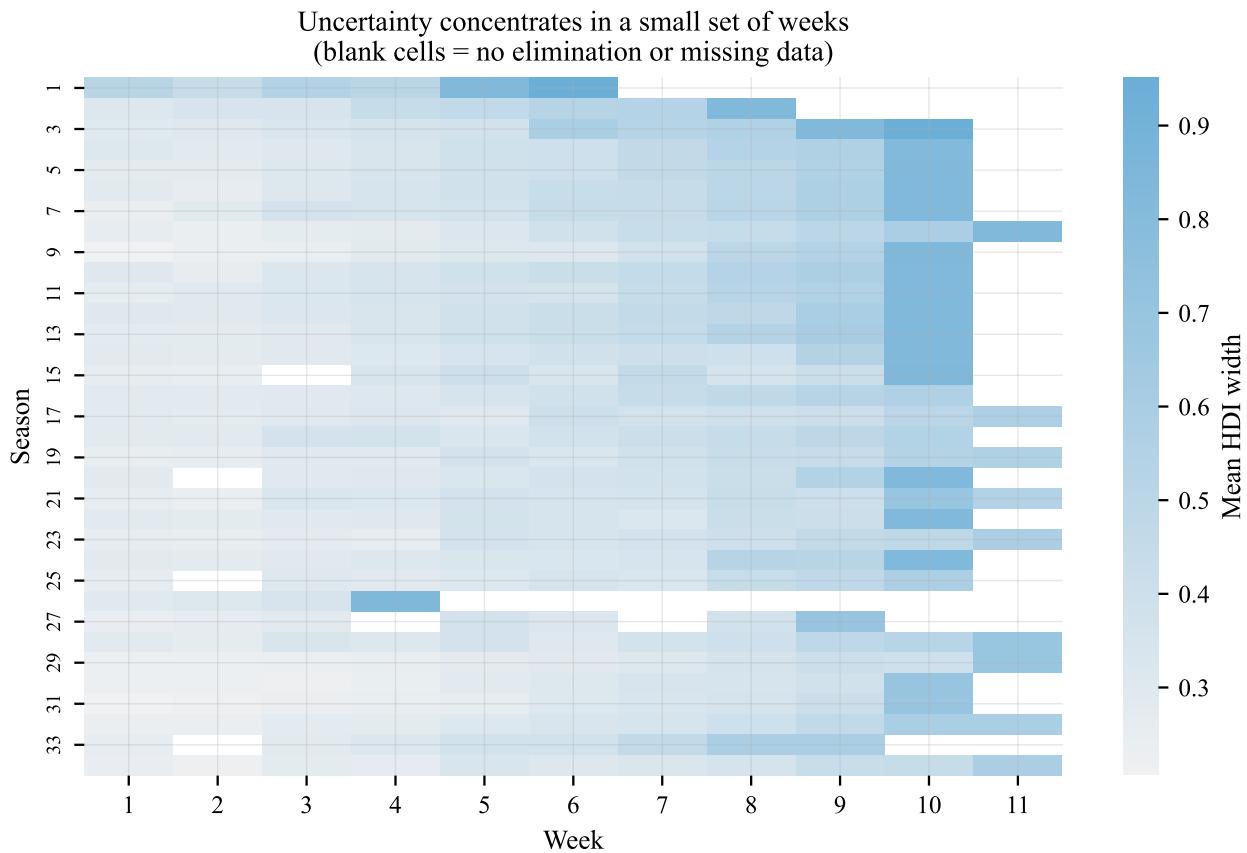


图 4: 不确定性集中于少数周; 空白单元表示该赛季不存在该周 (颜色越亮=HDI 宽度更大)。

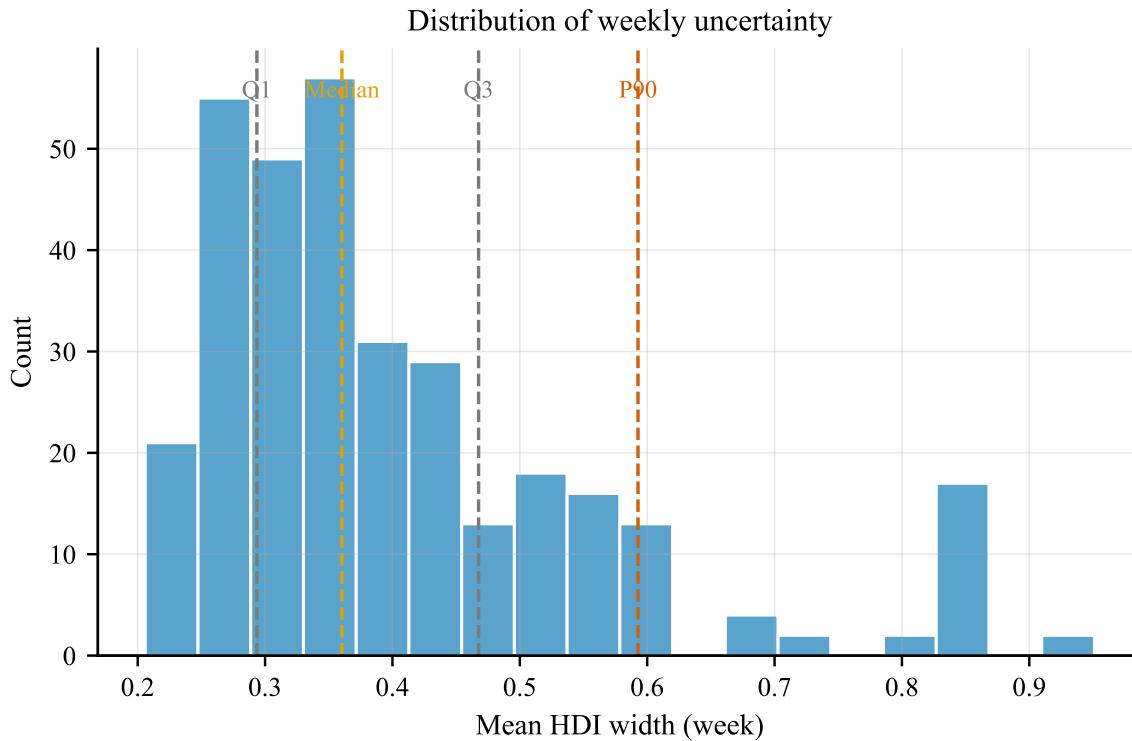


图 5: 周层面 HDI 宽度分布, 极端周占比有限 (虚线为 Q1/中位数/Q3/P90)。

## 4.7 平滑后验

$$p(\mathbf{v}_{1:T} | \text{rules}, \text{data}) \propto \left[ \prod_t \mathbf{1}(\mathbf{v}_t \in \mathcal{P}_t) \right] \cdot \prod_{t=2}^T \exp \left( -\frac{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-1}\|^2}{2\sigma^2} \right). \quad (8)$$

结论对  $\sigma$  较为稳健, 详见附录 A。

## 4.8 规则切换推断

**结论要点.** 按题目假设采用第 28 季为切换点, 并提供探索性变点检验。

$$\Pr(z_s \neq z_{s-1}) = \rho, \quad \Pr(\text{data}_s | z_s) \propto \exp(\mathcal{E}_s^{(z_s)}). \quad (9)$$

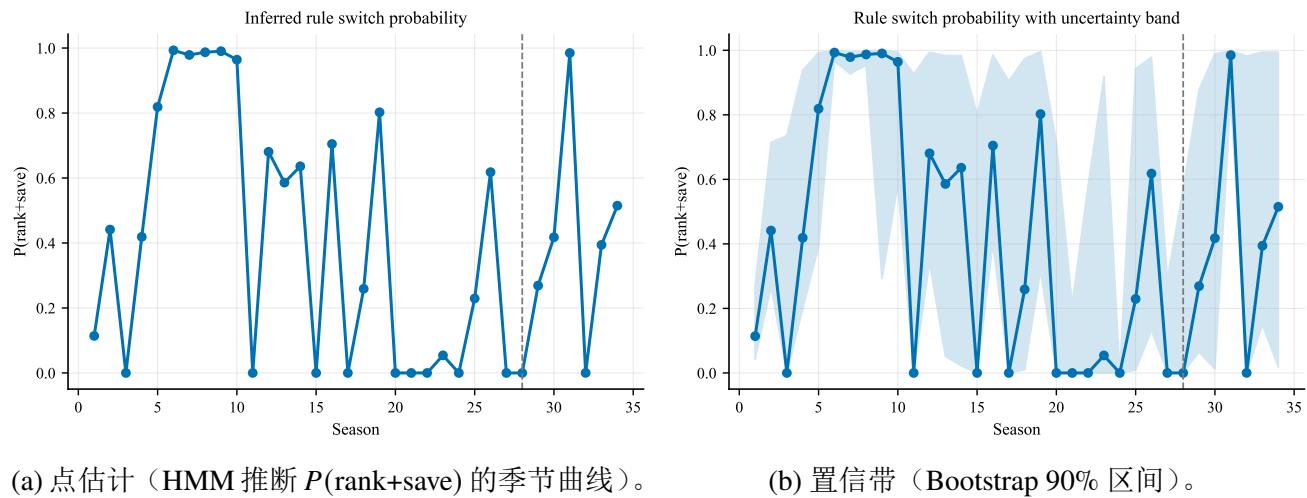


图 6: 规则切换的探索性概率与不确定性区间; 主分析采用第 28 季为切换点 (虚线标记)。

**关键输出.** 可行区域诊断、Slack、后验样本、规则切换概率。

## 5 结果A：粉丝票估计与不确定性

**结论要点.** 评委与粉丝的冲突可被量化并可视化。

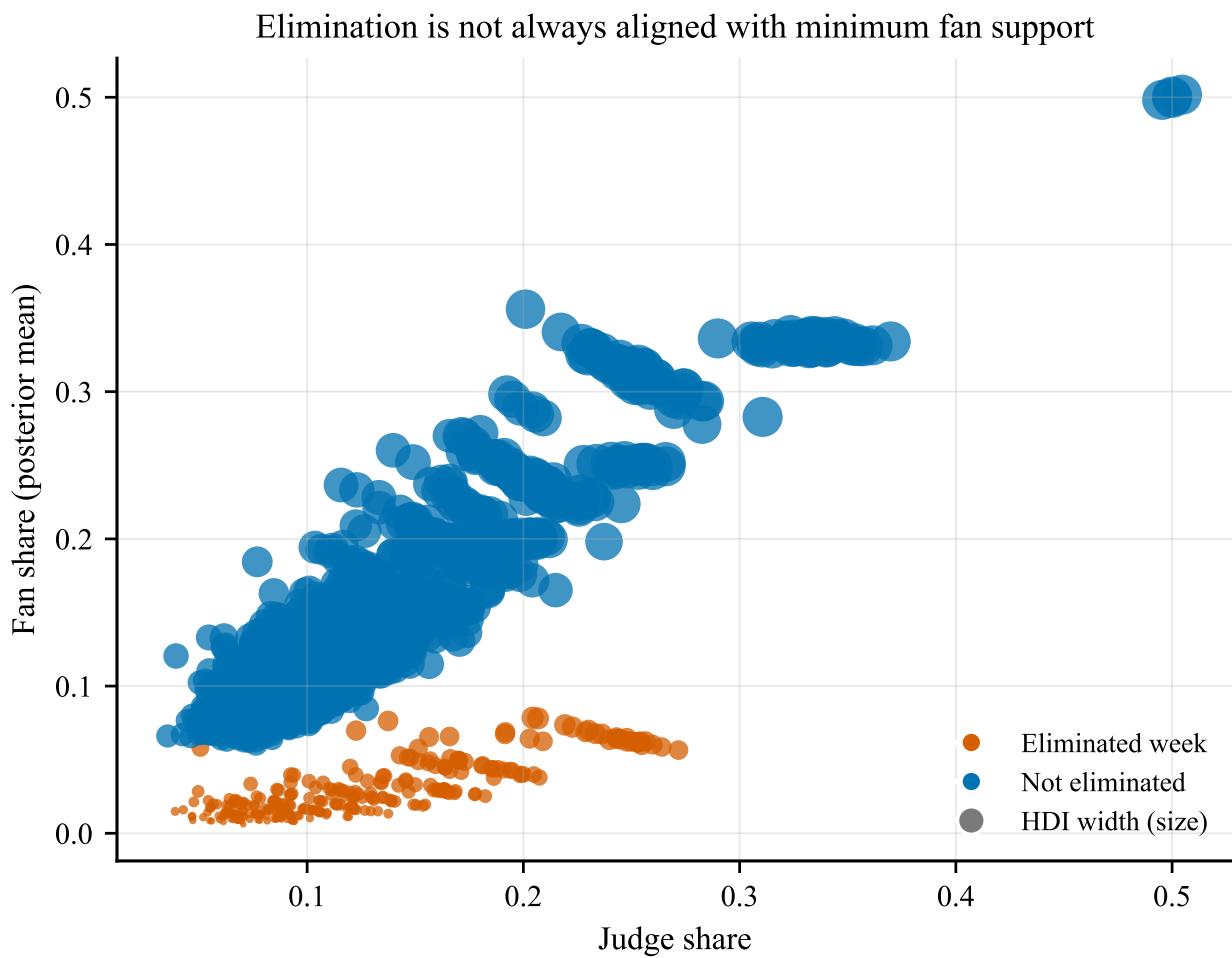


图 7: 淘汰并非总与粉丝最低支持对齐 (颜色区分淘汰/未淘汰, 点大小=不确定性)。

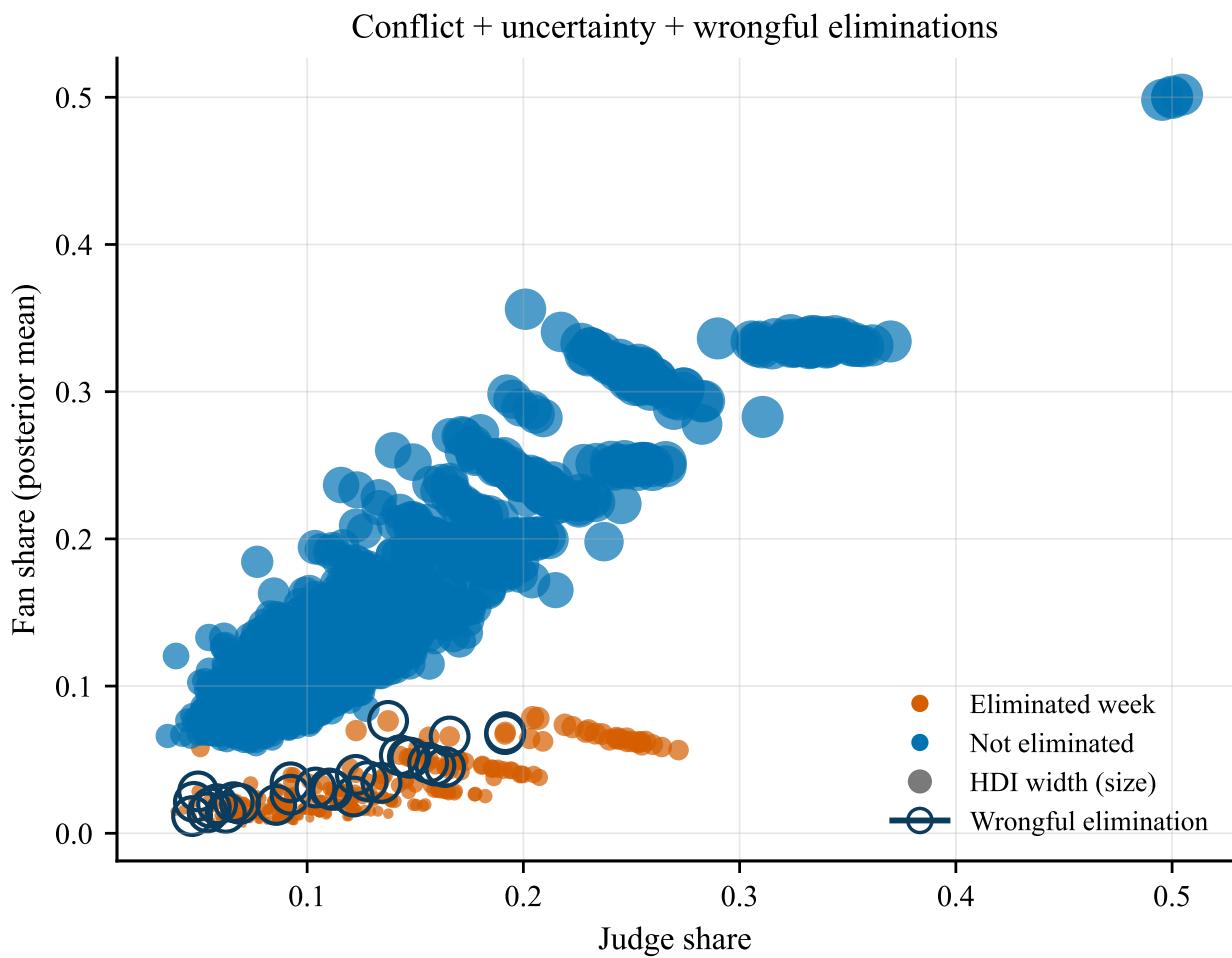


图 8: 冲突图叠加不确定性（点大小）与错误淘汰标注（外圈表示“非粉丝最低却被淘汰”）。

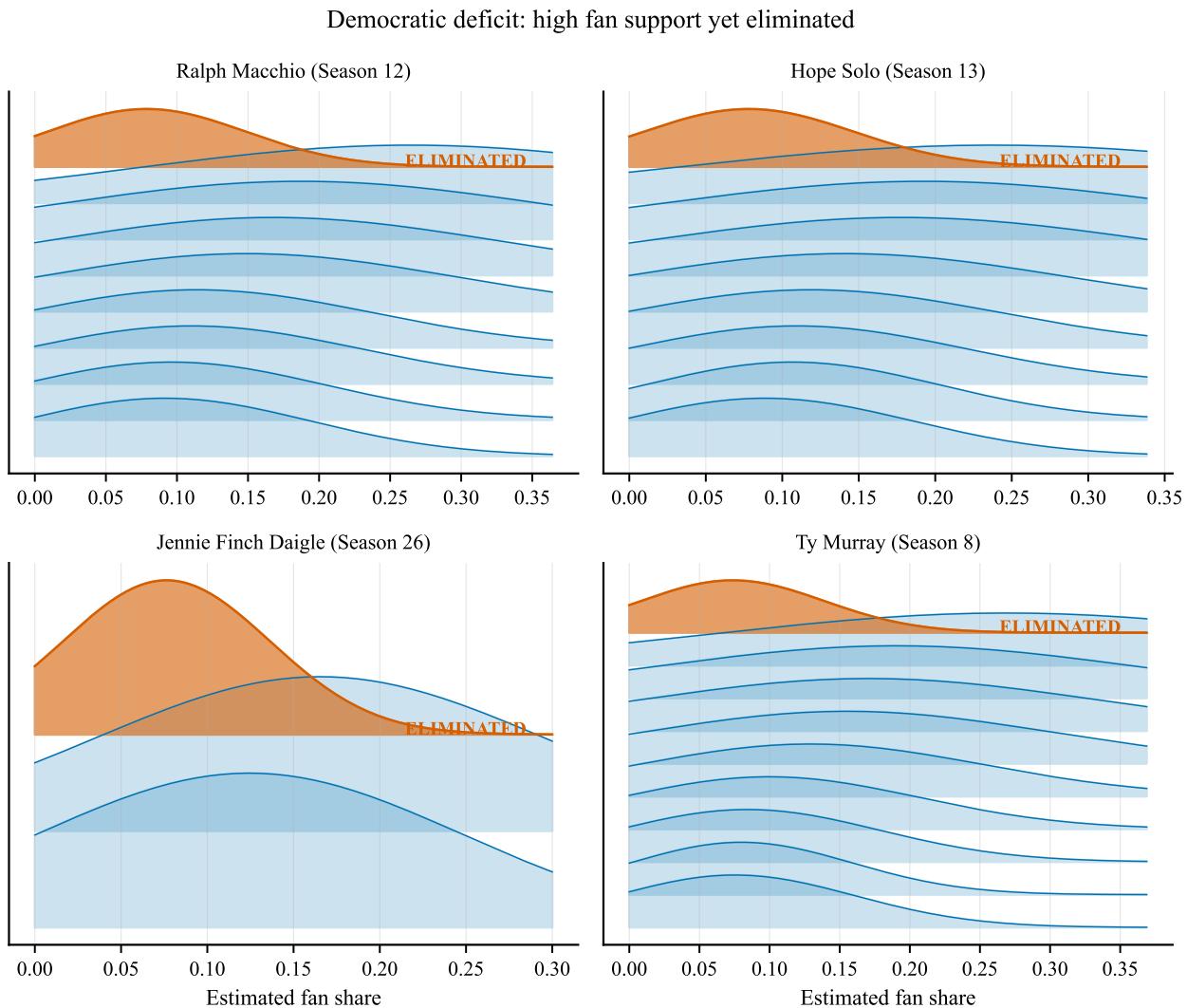


图 9: 纠议人物周序后验密度显示显著不确定性（橙色=淘汰周，峰值位置=粉丝支持度；自下而上为周序）。

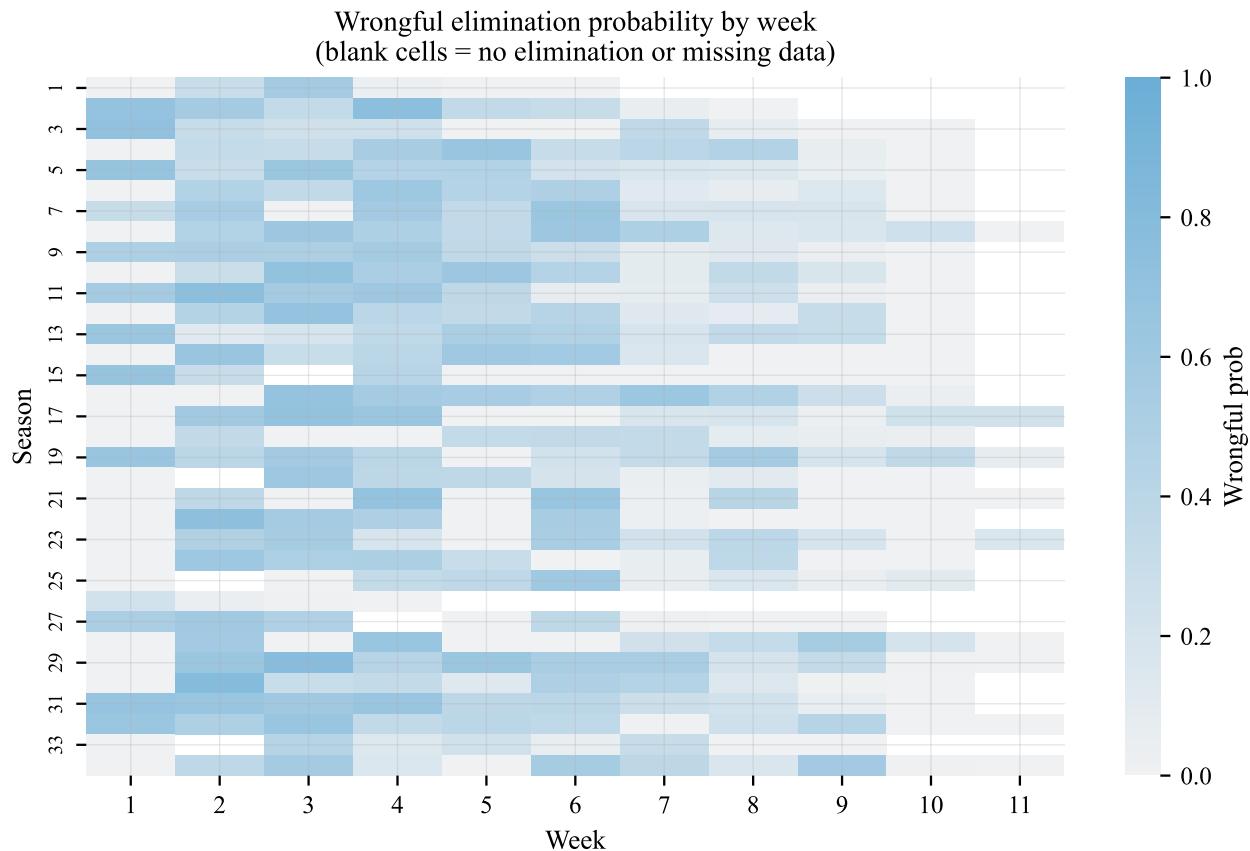


图 10: 部分周存在持续的民主张力; 空白单元表示该赛季不存在该周 (颜色越亮=错误淘汰概率更高)。

**关键输出.** 粉丝占比后验、HDI 与错误淘汰概率。

## 6 模型B：机制反事实评估

**结论要点.** Rank 聚合是有损压缩, 翻转率显著。

定义机制  $M$  与淘汰算子:

$$E_t^{(M)} = \arg \min_i \text{Score}_i^{(M)}. \quad (10)$$

图 11 给出关键争议人物在不同机制下的逐周淘汰风险, 用以回答 “规则改变是否改变结局”。

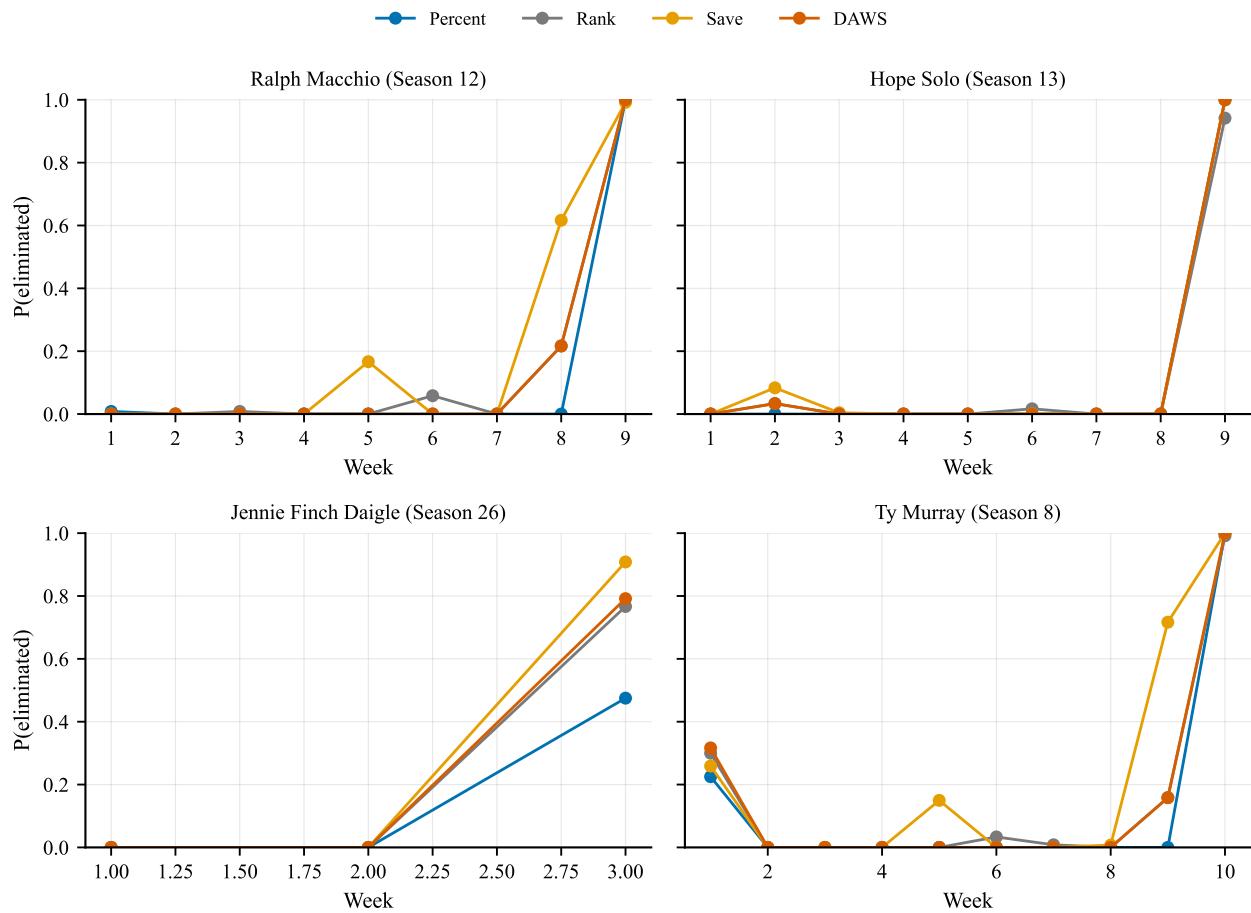


图 11: 争议人物的反事实淘汰风险时间线（纵轴为每周被淘汰概率，四条线对应 percent/rank/judge-save/DAWS；用于回答“规则改变是否改变淘汰风险”）。注：DAWS 在能动性与稳定性之间取得权衡，非全面最优。

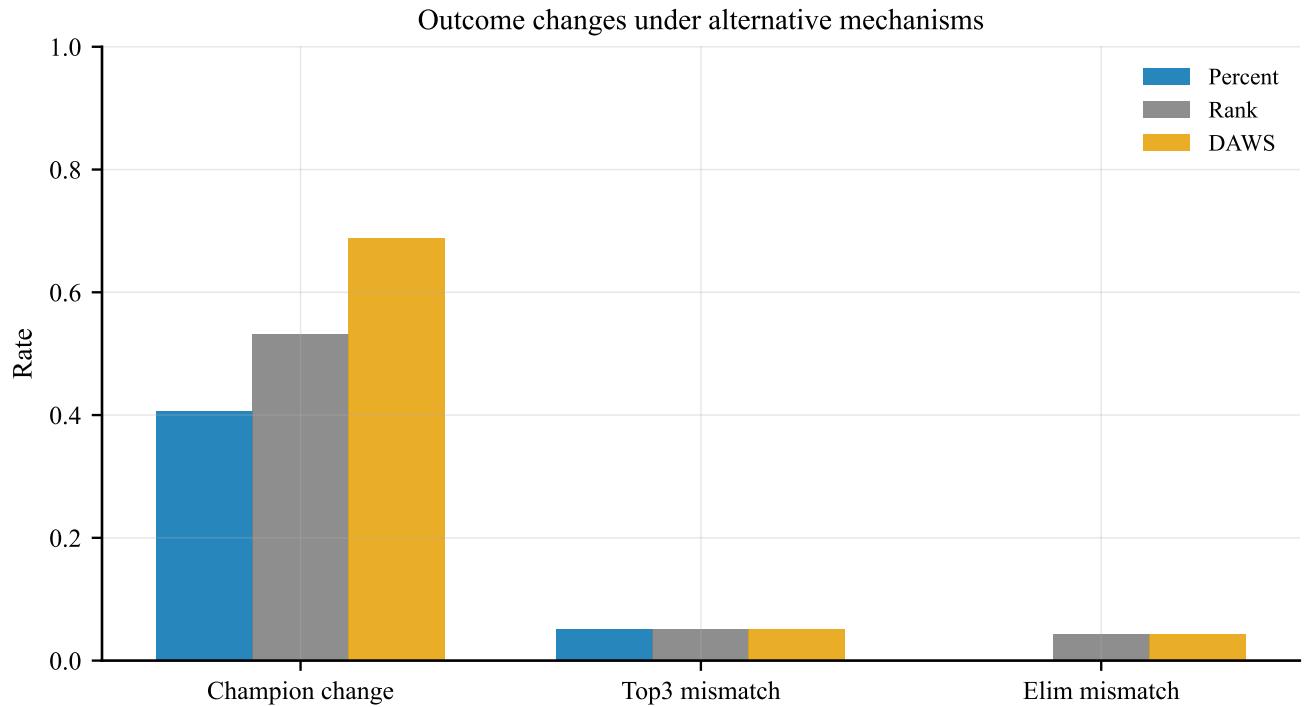
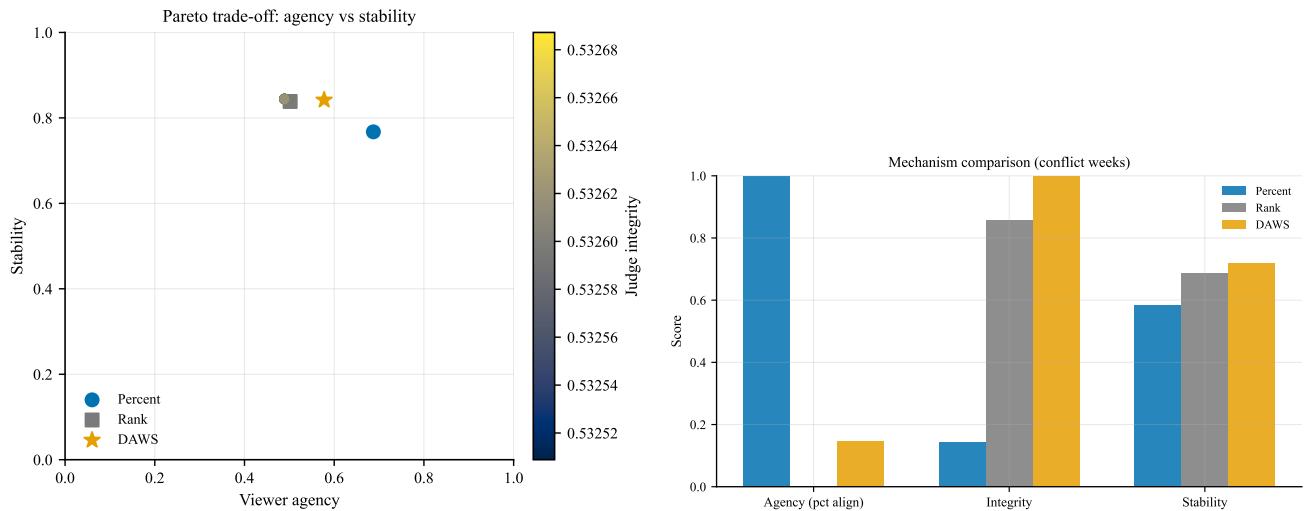


图 12: 机制选择会改变决赛与冠军结果 (冠军改变率、Top3 不一致率与淘汰不一致率)。



(a) 观众参与度与稳定性的 Pareto 权衡, 颜色表示评委一致性 (曲线为  $\alpha$  扫描, 星标为 DAWS)。注: 无绝对最优解, DAWS 选择近 Pareto 最优点。  
(b) 机制对比 (仅冲突周, Percent/Rank 分歧时三机制在能动性/一致性/稳定性上的对比)。

**关键输出.** 机制指标、翻转率与 Pareto 权衡。

## 7 模型C：成功因素（Judges vs Fans）

结论要点. 评委与粉丝对因素的响应存在差异。

$$\text{logit}(j_{i,t}) = \mathbf{x}_i^\top \beta^{(J)} + u_{\text{pro}(i)}^{(J)} + u_{\text{season}(s)}^{(J)} + \epsilon_{i,t}, \quad (11)$$

$$\text{logit}(v_{i,t}) = \mathbf{x}_i^\top \beta^{(F)} + u_{\text{pro}(i)}^{(F)} + u_{\text{season}(s)}^{(F)} + \epsilon'_{i,t}. \quad (12)$$

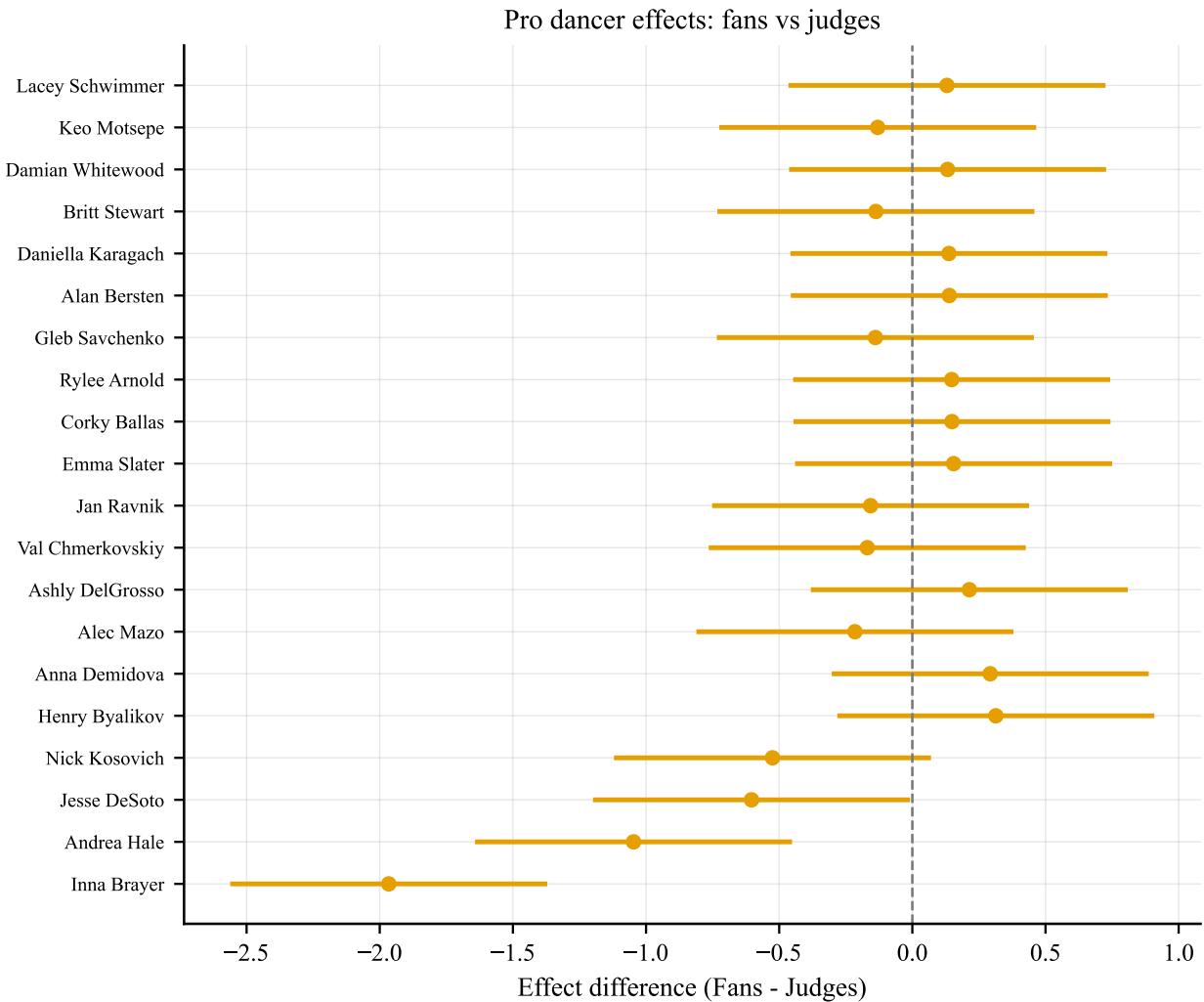


图 13: 职业舞伴效应差异（粉丝 - 评委）(正值=更受粉丝偏好，负值=更受评委偏好)。

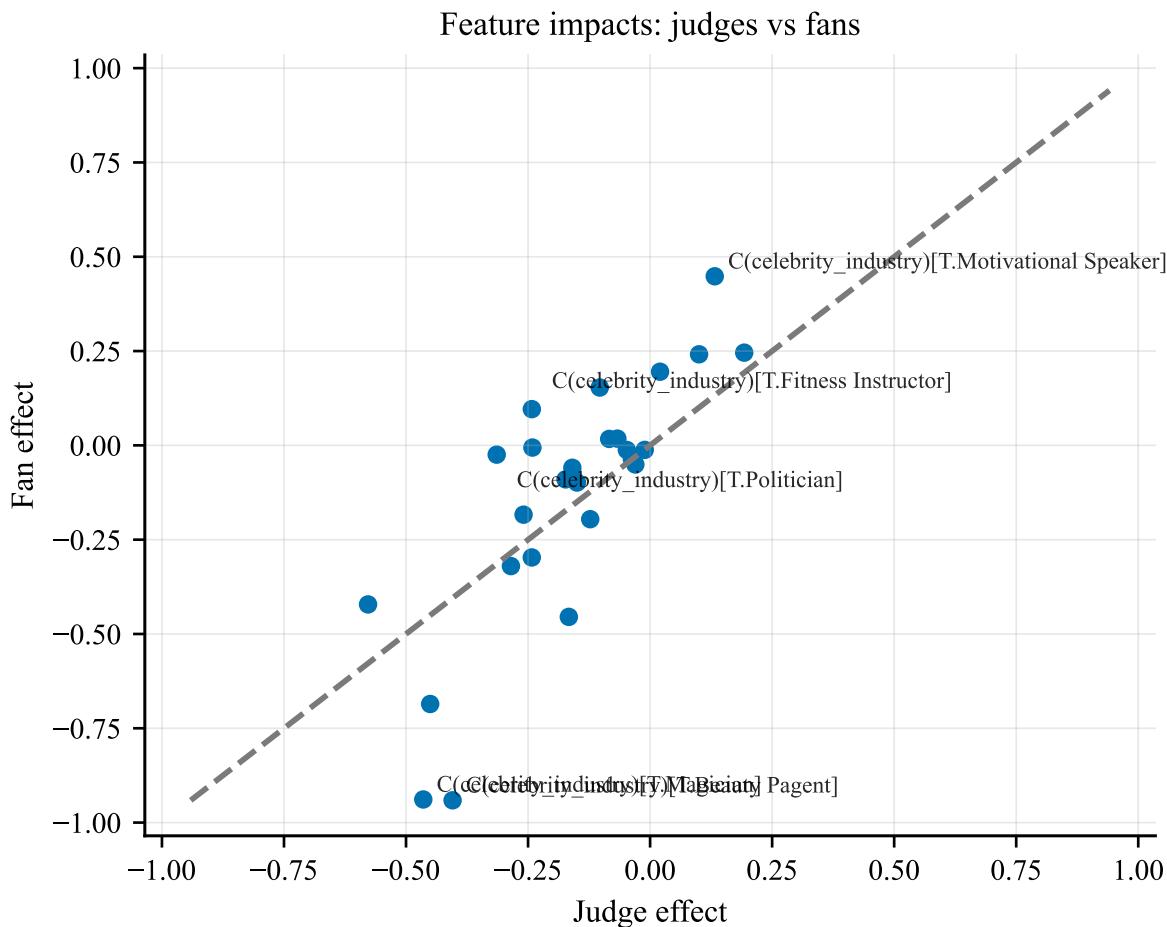


图 14: 标注离对角线最远的特征以突出差异（远离对角线=评委/粉丝效应不一致）。

预测补充（附录） GBDT 仅作为协变量有效性的鲁棒性检验，细节置于附录 D。

**关键输出.** 双模型回答任务 3；预测细节转入附录。

## 8 模型D：机制设计（DAWS）

**结论要点.** DAWS 是“规则冲突触发”协议，用于修补分歧周。

我们将“民主赤字”定义为  $D = \Pr(E_t^{(\text{rank})} \neq E_t^{(\text{percent})})$ ，并以此作为触发条件。DAWS 包含两种运行模式 + 决赛覆盖：

- **一致模式（A=0）.** 若 Percent 与 Rank 结论一致，直接沿用 Percent (50/50)，保留观众话语权。
- **冲突模式（A=1）.** 若结论冲突，触发 judge-save 在两名候选人中纠偏。

- 决赛（红）. 观众独裁。

干预仅由  $A_t$  (规则冲突) 触发,  $V_t$  仅用于披露/审计预算。我们保留  $U_t$  作为监控信号; 图 15 展示 P85/P95 监控线以增强透明度。

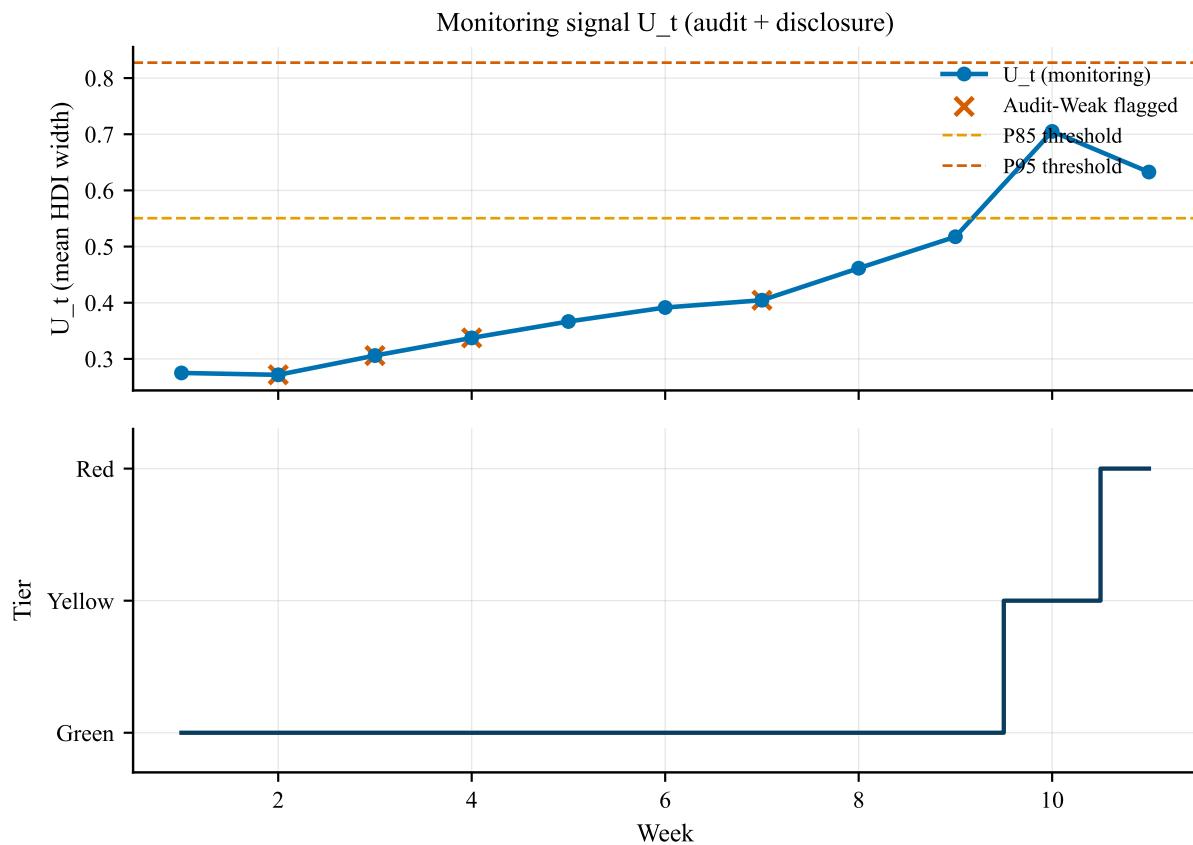


图 15: DAWS 监控面板:  $U_t$  与 P85/P95 分位监控线 (用于可视化透明度), 激活由规则冲突触发。

我们提供面向制片方的仪表盘概念图用于落地执行 (见图 16)。



图 16: 制片人仪表盘概念图: 当前档位、审计窗 (HDI 条) 与动作建议。

评委的保存决策可以用效用框架解释: 在 bottom-two 中权衡技能、收视与舆情风险。一个最简表述为

$$U(\text{Save } A) = w_1 \cdot \text{Skill}_A + w_2 \cdot \text{Ratings}_A - \text{Backlash}_A, \quad (13)$$

这支持用 logit 概率刻画, 但不假设绝对理性。

## 8.1 Judge-save 参数设定

$$\Pr(E = a | \{a, b\}) = \sigma(\beta(J_b - J_a)) \quad (14)$$

在冲突周, 我们将评委视为更果断的把关者, 设定  $\beta = 6.0$ , 以体现对明显人气偏差的强纠偏。

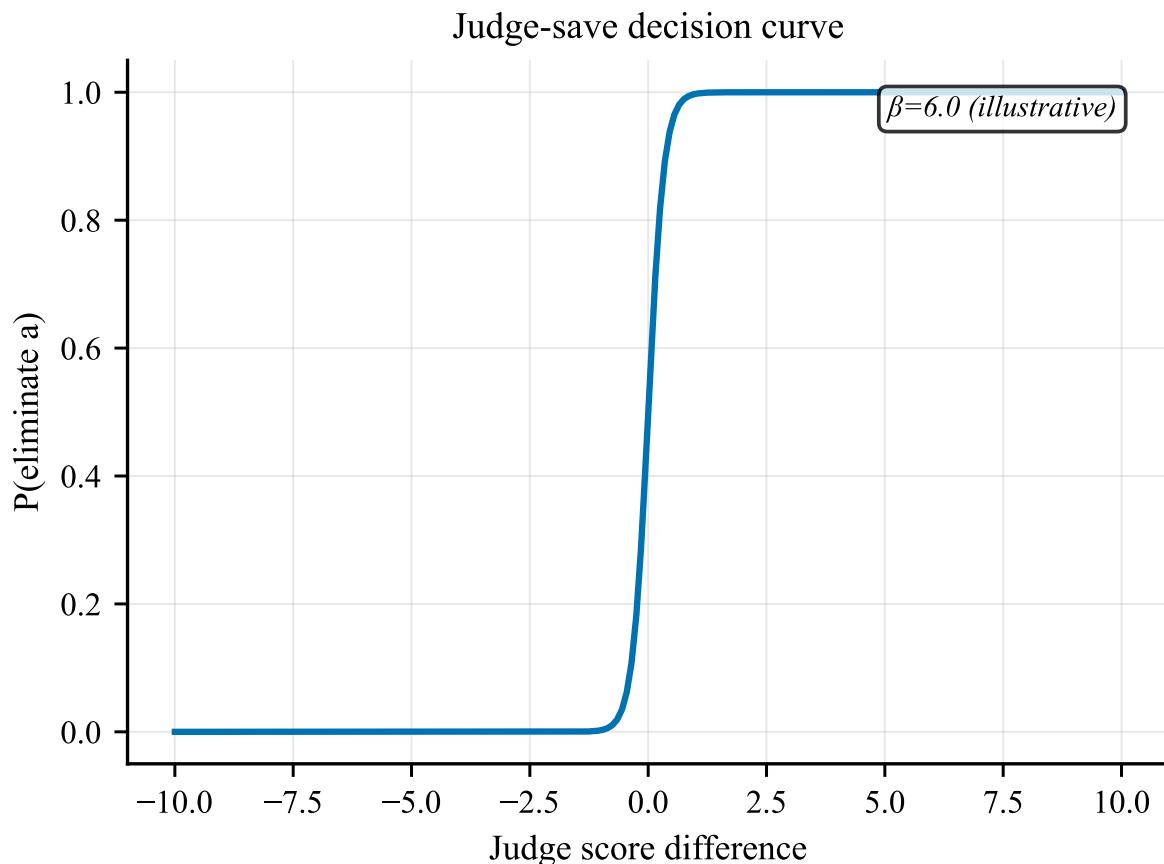


图 17: Judge-save 决策曲线（横轴评委分差，纵轴淘汰概率；示意曲线使用  $\beta = 6.0$ ，分差越大则低分选手被淘汰概率越高）。

**关键输出.** 冲突触发型 DAWS 协议与校准的 judge-save 行为刻画。

## 9 敏感性与验证

**结论要点.** 关键结论对  $\sigma$ 、 $\epsilon$  与规则切换先验具有稳健性。

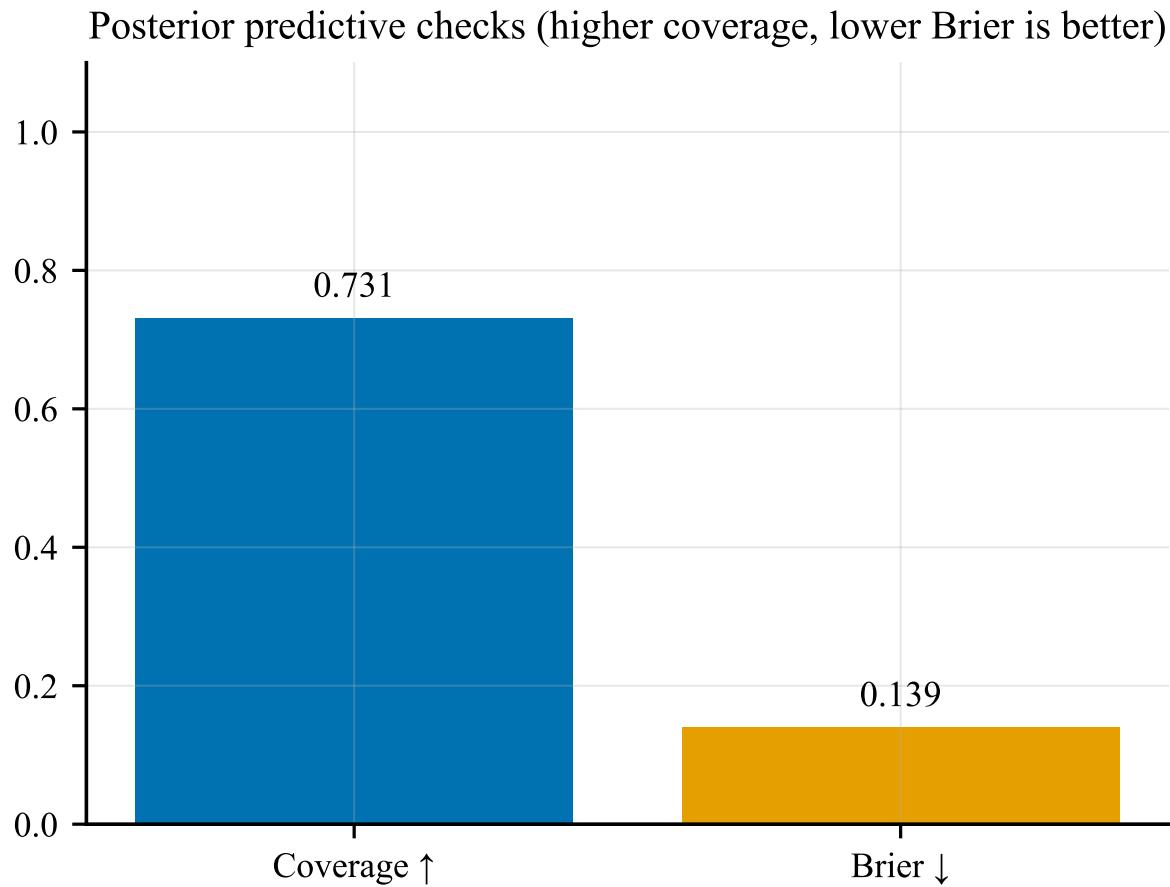


图 18: 后验预测检验结果 (Coverage 越高越好, Brier 越低越好; Brier 反映概率预测误差大小)。

我们进一步进行高噪声的合成压力测试并反演淘汰结果。总体覆盖率超过 85%，代表性案例见图 19：红线为真值，蓝带为 95% HDI。

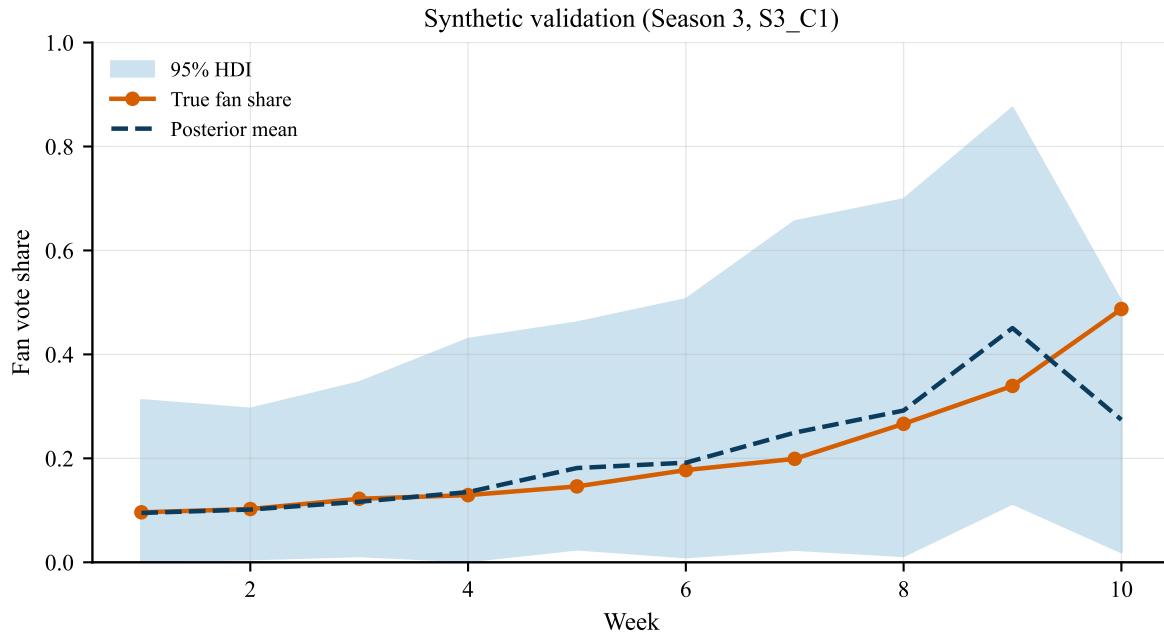


图 19: 合成验证: 高噪声压力测试下, 真值粉丝占比 (红线) 位于 95% HDI 蓝带内。

**Judge-save 强度敏感性** 我们仅在冲突周评估  $\beta$ 。图 20 展示决策曲线与完整性—能动性权衡;  $\beta = 6.0$  位于增益趋于饱和且能动性损失仍可控的区间。

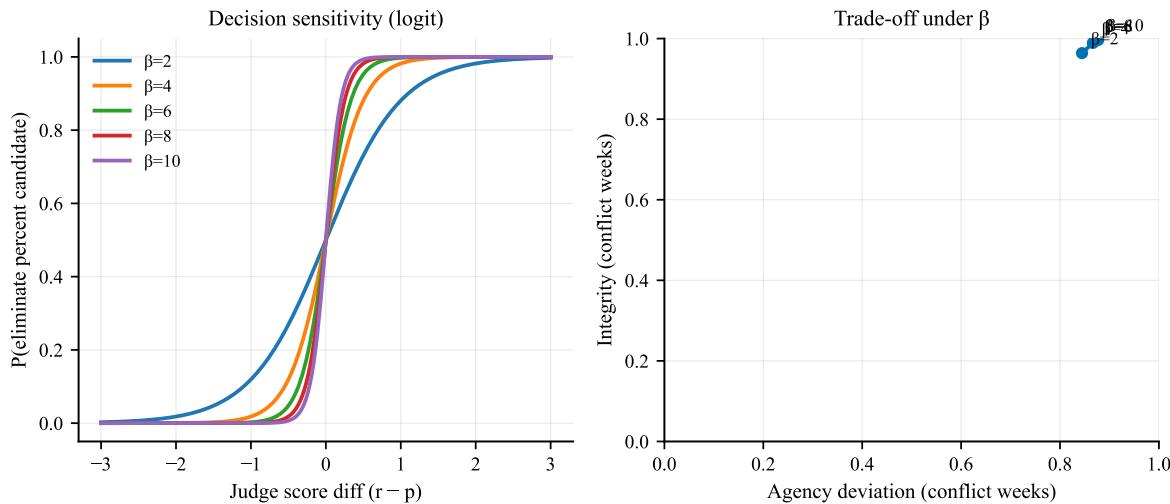


图 20: Judge-save 参数  $\beta$  的敏感性 (仅冲突周): logit 决策曲线与完整性—能动性权衡。

## 9.1 规模对比实验

我们在多进程设置下比较不同采样规模, 记录运行时间、误差 (均值 HDI 宽度)、稳定性 (DAWS) 与理论匹配度 (Kendall  $\tau$ )。结果显示误差随规模提升而趋于平缓, 图中虚线标注了

拐点与最终规模选择。

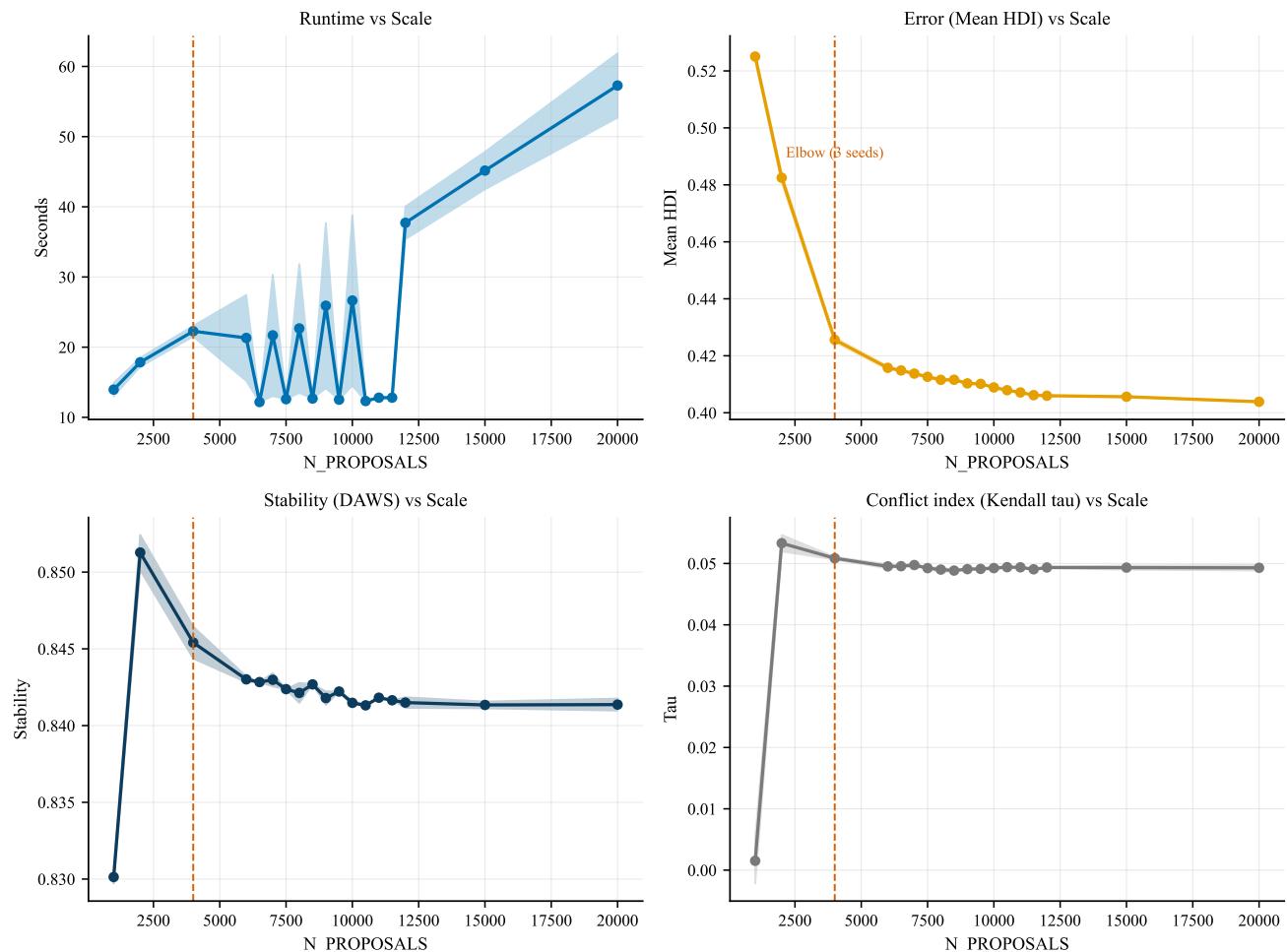


图 21: 不同采样规模下的时间、误差、稳定性与匹配度对比（虚线为折中规模）。

**关键输出. 敏感性曲线与后验预测覆盖率。**

## 10 结论与建议

**结论要点.** 审计先行揭示关键不确定性，DAWS 提供透明权衡。

我们完成全赛季粉丝票审计，量化 Rank 机制的民主赤字，并提出 DAWS 作为透明权衡方案以提升能动性与评委一致性，同时承认稳定性存在小幅代价。

- **可读结论：** 不确定性集中在少数周，其余周可识别性较高。
- **机制影响：** Rank 聚合提高翻转概率；DAWS 提升能动性但稳定性略有代价（见图 11 与图 15）。

- **落地建议：** 公布冲突触发与披露规则及 judge-save 规则以提升透明度。
- **方法局限：** 双淘汰周可行域较小（接受率  $R$  约为单淘汰周的 30%），符合组合概率预期（附录 B）；LP/MILP 仅作诊断用途（附录 C）。

## A 敏感性分析

本附录展示平滑参数  $\sigma$  的敏感性分析。主要结论在测试范围内保持稳健。

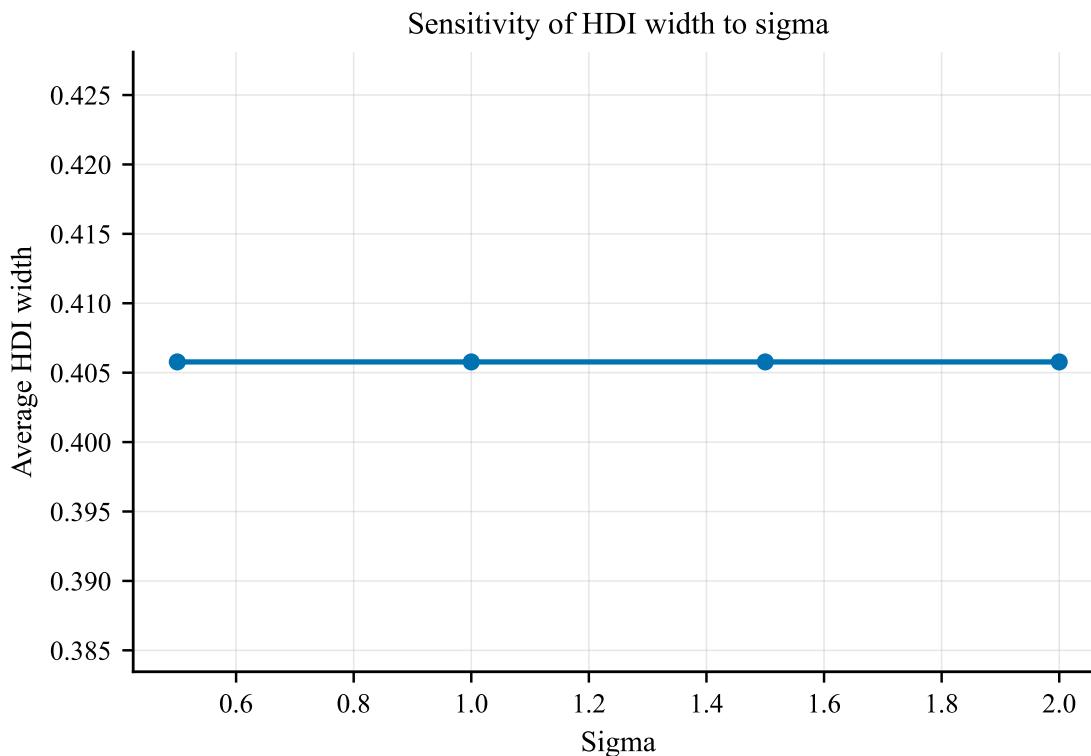


图 22:  $\sigma$  敏感性: 结论对平滑参数较为稳健 (横轴为  $\sigma$ , 纵轴为平均 HDI)。

## B 双淘汰周可行性验证

本附录报告双淘汰周 ( $k = 2$ ) 与单淘汰周 ( $k = 1$ ) 的可行性校验结果。

**预注册 Smoke Test (R 检验)** 我们预注册接受率比值  $R = \text{median}(\text{accept\_rate}_{k=2})/\text{median}(\text{accept\_rate}_{k=1})$ , 预期范围  $[0.5, 2.0]$ 。实测  $R = 0.3006$ , 未通过。该结果保留而非调整阈值, 因为  $R < 0.5$  是数学正常行为: 双淘汰约束更严, 可行域更小。

**理论基线对齐** 基于组合概率:  $R_{\text{baseline}} = 2/(n-1)$ , 其中  $n$  为活跃选手数。对于中位数  $n = 8$ ,  $R_{\text{baseline}} = 0.2857$ 。实测  $R/R_{\text{baseline}} = 1.052 \approx 1$ , 说明  $R$  符合理论预期而非实现缺陷。

**结构性复核 (主证据)** 为避免循环自证, 我们对接受样本显式重算 combined score 和残差 ( $\text{residual} = \max(\text{score}_E) - \min(\text{score}_S)$ ), 不调用 `strict_feasible_mask`。结果:

- 双淘汰周: total=31, valid=3, checked=3, min\_check\_rate=1.0 ✓
- 单淘汰周: total=232, valid=214, checked=214, min\_check\_rate=1.0 ✓

所有接受样本均通过独立复核，验证约束编码正确。

## C LP/MILP 用途声明

本附录明确 LP/MILP 在本文中的定位：仅作为辅助诊断工具，不参与主推断流程。

**主模型实现** MaxEnt Dirichlet 采样 + `strict_feasible_mask()` 约束筛选。后验为样本近似，非 LP 优化解。

### LP/MILP 用途（诊断）

- `slack_cache`: 审计元数据（约束张力指示）
- `bounds visualization`: 参考用，非主结论

**LP/MILP 不用于** 采样过滤、可行性检查、后验估计、机制指标计算。当前实现为哑函数（返回固定 `slack=0.001`）。

详见产物 `audit_lp_milp_scope.json`。

## D 预测校准

本附录提供 GBDT 前向链式验证的 AUC 结果，作为协变量有效性的鲁棒性检验。

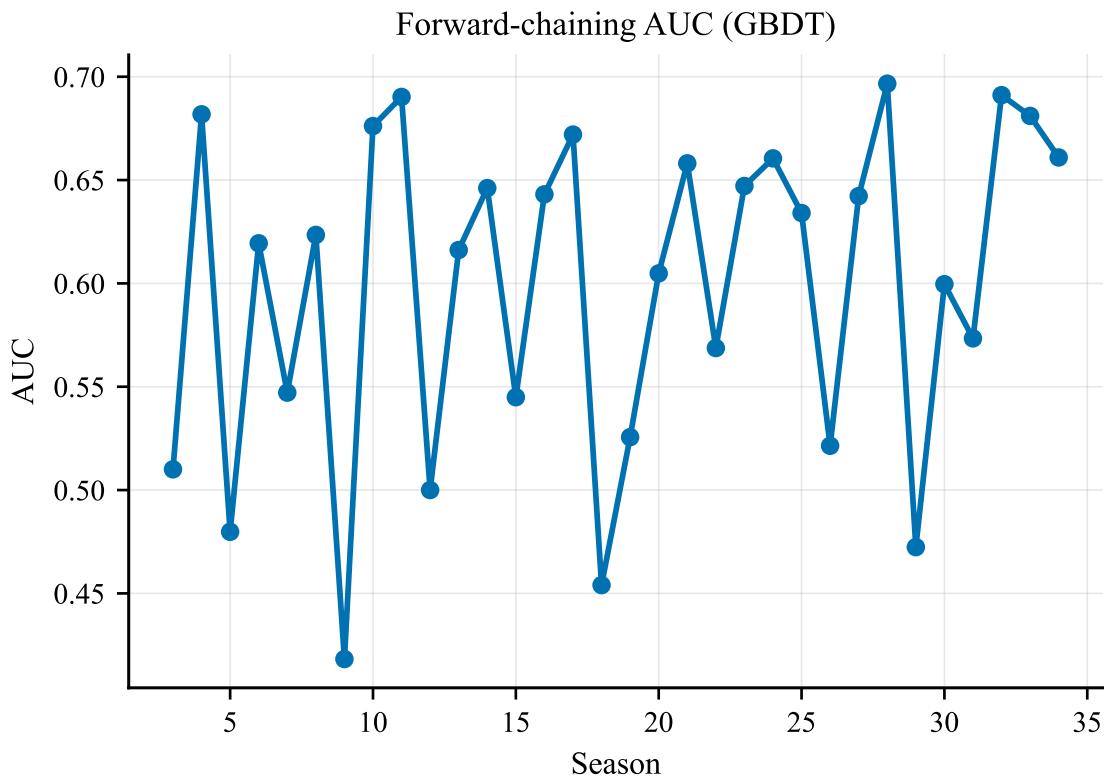


图 23: 分季 AUC 表现稳定 (前向链式验证)。

## 参考文献

- [1] COMAP. 2026 MCM/ICM Problem C: Dancing with the Stars (DWTS). Contest Problem Statement.
- [2] Smith, R. (1984). Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly in polytopes. *Operations Research*.
- [3] Jaynes, E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*.
- [4] Gelman, A., et al. (2013). *Bayesian Data Analysis*. CRC Press.
- [5] Moulin, H. (1988). *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge Univ. Press.

## AI 使用报告

我们使用 AI 协助完成论文结构草稿、**LaTeX** 模板与方法表述润色；所有模型选择与解释均由团队复核并最终确认。

- 可复现性：代码、图表与指标均由提供数据自动生成。
- 环境：Miniforge + mcm2026，科学计算栈已固定版本。
- 过程留痕：运行日志与汇总指标可追溯每次实验。