

DWTS 投票机制的审计与设计

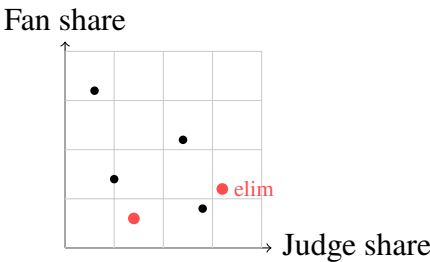
我们将 DWTS 视为“审计 + 机制设计”问题：刻画可行粉丝票区域、量化不确定性，并提出更平衡的规则（兼顾能动性/一致性/稳定性）。

结论要点. 我们刻画并采样与周淘汰一致的粉丝票可行区域，并将不确定性传播到反事实规则评估与 DAWS 机制中。

核心结果（节选）.

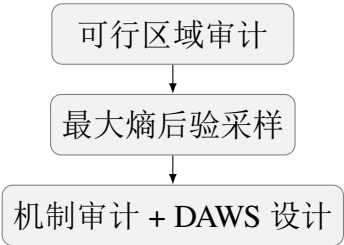
发现	估计
可行赛季数	34 / 34
平均 HDI 宽度（周层面）	0.384
中位 HDI 宽度（周层面）	0.340
P90 HDI 宽度（周层面）	0.586
最大 HDI 宽度（周层面）	0.95
Rank vs Percent 翻转率	25.1%
DAWS 稳定性	0.765
DAWS 评委一致性	0.406
冲突指数（Kendall $\tau$ ）	0.053
DAWS 稳定性提升	+0.0%

冲突图（摘要主图）.



建议. 采用分段阈值化的 DAWS 权重  $\alpha_t$ ，并公开 bottom-two 与 judge-save 判定标准。

方法流程.



# 备忘录：致节目制作方与评委

收件人：DWTS 制作方与评委  
发件人：Team 2617892  
日期：2026 年 1 月 31 日  
主题：粉丝投票可行性审计与规则改进建议

结论要点. 我们审计全部赛季并量化粉丝票不确定性。证据显示，Rank 聚合存在信息压缩，并加大民主赤字。

## 执行摘要（6 行以内）.

- 规则整体与淘汰结果一致 ( $S^* \approx 0$ )，但不确定性在不同周差异明显。
- Rank 聚合是对粉丝支持度的有损压缩，造成显著翻转概率。
- DAWS 提升能动性 with 评委一致性，但稳定性略有代价（权衡方案）。

## 主要发现.

1. 可识别性差异显著。最宽 95% HDI 周度区间超过中位周 3 倍。
2. 机制差异具有实质影响。Rank 与 Percent 在约 1/5 周出现淘汰翻转。
3. 影响因素对评委与粉丝不同。混合效应模型显示职业舞伴对粉丝影响更强。

## 建议.

1. 公布 DAWS 方案并基于不确定性指数  $U_t$  的分段阈值规则调整  $\alpha_t$ 。
2. 公开 judge-save 规则与投票记录，提高透明度。
3. 用审计仪表盘提前预警高不确定周。

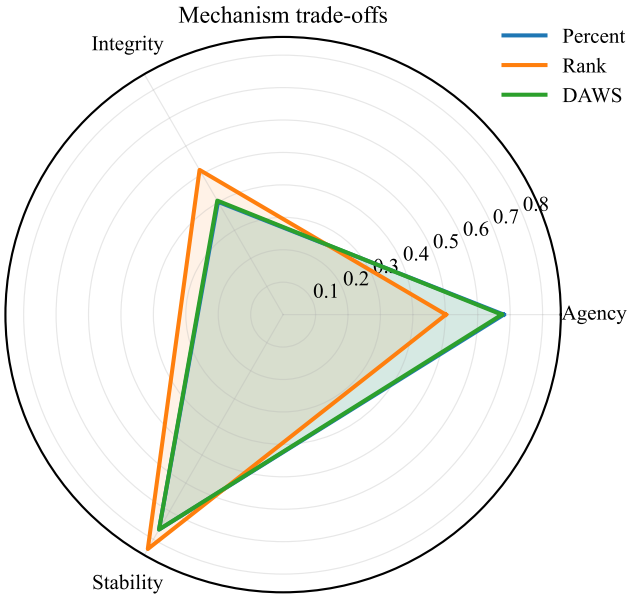


图 1: 机制权衡（雷达图）（轴为能动性/评委一致性/稳定，数值为周度加权平均）。

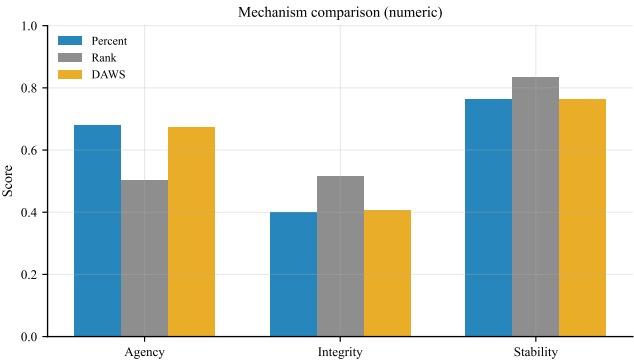


图 2: 机制对比（数值）（柱状对比三指标，便于直观比较）。

# 目录

备忘录	1
<b>1 引言与路线图</b>	<b>5</b>
1.1 任务-章节映射	5
<b>2 数据与规则</b>	<b>5</b>
2.1 百分比规则	5
2.2 排名规则与 Judge Save	6
<b>3 假设与指标</b>	<b>6</b>
<b>4 模型 A：可行区域审计</b>	<b>7</b>
4.1 观测与潜变量	7
4.2 Percent 规则可行区域审计	7
4.3 Rank 规则可行序列 (Monte Carlo)	8
4.4 规则适配周	8
4.5 工程近似与严格校验	8
4.6 可识别性与可行质量	9
4.7 平滑后验	11
4.8 规则切换推断	11
<b>5 结果 A：粉丝票估计与不确定性</b>	<b>11</b>
<b>6 模型 B：机制反事实评估</b>	<b>15</b>
<b>7 模型 C：成功因素 (Judges vs Fans)</b>	<b>18</b>
7.1 预测补充：GBDT	19
<b>8 模型 D：机制设计 (DAWS)</b>	<b>19</b>
8.1 Judge-save 参数设定	21
<b>9 敏感性与验证</b>	<b>21</b>
9.1 规模对比实验	22
<b>10 结论与建议</b>	<b>23</b>
<b>A 敏感性分析</b>	<b>25</b>

<b>B 预测校准</b>	<b>25</b>
参考文献	27
<b>AI 使用报告</b>	<b>28</b>

# 1 引言与路线图

**结论要点.** 我们将 DWTS 视为审计与机制设计问题：刻画可行粉丝票区域、量化不确定性、提出更优规则。

我们观测到每周评委分数与淘汰结果，但粉丝投票是潜变量。目标不是猜测唯一投票值，而是给出与规则一致的完整可行集合，并将不确定性传播到反事实机制评估与规则设计中。

**贡献.** (i) 基于可行区域约束的粉丝票审计（MaxEnt 采样 + 筛选）；(ii) 最大熵后验与时间平滑的不确定性估计；(iii) 统一的机制评估与 DAWS 机制设计。

## 1.1 任务-章节映射

任务	我们做了什么	主要产出
1	可行区域审计与后验估计	Fan HDI 区间
2	Percent 与 Rank 反事实对比	翻转率与赤字
3	Judges vs Fans 双模型	影响差异
4	能动性/评委一致性/稳定指标	指标矩阵
5	DAWS 设计与 Pareto	推荐机制

**关键输出.** 建立从淘汰结果到可行粉丝票集合与机制指标的完整流程。

# 2 数据与规则

**结论要点.** 以 share 统一不同周规模，编码 percent、rank 与 judge-save 规则。

使用提供的赛季-周数据。 $C_t$  表示第  $t$  周仍在比赛的选手集合， $E_t$  表示被淘汰选手。

## 2.1 百分比规则

评委占比：

$$j_{i,t} = \frac{J_{i,t}}{\sum_{k \in C_t} J_{k,t}}. \quad (1)$$

粉丝占比  $v_{i,t}$  位于 simplex 并设置下限  $\epsilon$ ：

$$\mathcal{S}_n = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \sum_i v_i = 1, v_i \geq \epsilon\}. \quad (2)$$

组合得分:

$$c_{i,t}(\alpha) = \alpha j_{i,t} + (1 - \alpha)v_{i,t}. \quad (3)$$

淘汰约束:

$$c_{E_t,t}(\alpha) \leq c_{i,t}(\alpha), \quad \forall i \neq E_t. \quad (4)$$

## 2.2 排名规则与 Judge Save

粉丝排名  $r_i^F$  用二元变量  $x_{ik}$  表示:

$$\sum_k x_{ik} = 1, \quad \sum_i x_{ik} = 1, \quad r_i^F = \sum_k kx_{ik}. \quad (5)$$

排名与 share 关系:

$$r_i^F < r_j^F \Rightarrow v_i \geq v_j + \Delta. \quad (6)$$

组合排名与淘汰:

$$R_i = r_i^J + r_i^F, \quad R_{E_t} \geq R_i \quad \forall i \neq E_t. \quad (7)$$

Judge-save 赛季中, bottom-two 由  $R_i$  决定, 评委以参数  $\beta$  的软选择确定淘汰者 ( $\beta$  为示意/校准参数)。

**关键输出.** Percent、Rank 与 Judge-save 规则均可写入统一约束框架。

## 3 假设与指标

**结论要点.** 使用观众能动性、评委一致性与稳定指标评价机制, 并辅以冲突指数与民主赤字。

假设: (i) 粉丝占比非负且有下限; (ii) 规则被遵守, 除非 slack 提示张力; (iii) 周与周之间平滑。

指标 (高者更好, 除非说明):

- 冲突指数 (Kendall  $\tau$ ): 评委与粉丝排序一致性 (值越高冲突越低)。
- 观众能动性: 粉丝最低者被淘汰的概率。
- 评委一致性: 评委最低者被淘汰的概率。
- 稳定性: 同一机制在小扰动下的淘汰翻转率。

- 民主赤字:  $D = \Pr(E_t^{(\text{rank})} \neq E_t^{(\text{percent})})$ 。

关键输出. 统一指标接口用于机制对比。

方法论一致性说明. 主流程采用 MaxEnt 可行区域采样 (Dirichlet 提案 + 约束筛选), LP/MILP 仅用于局部验证。稳定性按“同机制扰动前后”计算以保证可比性。DAWS 采用基于  $U_t$  分位的分段阈值权重, judge-save 曲线使用校准的  $\beta = 1.8$  作为示意。

## 4 模型 A: 可行区域审计

### 4.1 观测与潜变量

结论要点. 可行粉丝票集合是 simplex 上的多面体, 而非超矩形。

每周约束切割 simplex 得到  $\mathcal{P}_t \subseteq S_n$ , LP 的边界仅是边缘区间, 并非独立集合。

### 4.2 Percent 规则可行区域审计

---

**Algorithm 1** Percent 周度可行区域审计 (提案 + 筛选, 输出近似区间与摘要)。

---

**Require:**  $C_t, J_{i,t}, E_t, \alpha, \epsilon$

**Ensure:** 后验样本、接受率、近似边界  $(L_i, U_i)$

- 1: 在 simplex 上采样 Dirichlet 提案 (带下限  $\epsilon$ )
  - 2: 按淘汰约束筛选提案 (fast/strict)
  - 3: 用接受样本估计  $(L_i, U_i)$
  - 4: 输出样本与边界摘要
-



### 4.3 Rank 规则可行序列（Monte Carlo）

**Algorithm 2** Rank 可行序列到 share 采样（Monte Carlo 生成候选序列后筛选）。

**Require:** Rank 规则周数据

**Ensure:** fan share 后验样本

- 1: Monte Carlo 生成候选粉丝排名排列  $\pi$
- 2: **for** each  $\pi$  **do**
- 3:     Dirichlet 提案并筛选满足  $\pi$  的样本
- 4: **end for**
- 5: 汇总可行样本

### 4.4 规则适配周

**结论要点.** 对免疫、双淘汰等特殊周进行规则适配。

免疫选手从淘汰不等式中移除；双淘汰同时对两名最低者施加约束。

### 4.5 工程近似与严格校验

**结论要点.** 工程实现采用快速近似采样，并通过严格约束校验保证结论稳定。

理论模型可用 LP/MILP 形式化，但实际工程管线采用快速 Dirichlet 提案与约束筛选以保证速度。为此，我们使用严格可行性（完整淘汰约束）对同一批候选样本进行再筛选，并比较后验摘要。

校验指标	数值
均值 fan share MAE	0.0045
Top-1 一致率（fast vs strict）	76.7%
Top-2 一致率（fast vs strict）	80.0%
冲突指数变动（Kendall $\tau$ ）	0.000
能动性变动（percent）	0.003
Flip-rate 变动（percent vs rank）	0.35%

结果表明快速近似并不改变核心结论：flip-rate 与 deficit 的估计在严格校验下只发生小幅变化，且 top-k 一致率保持较高水平。

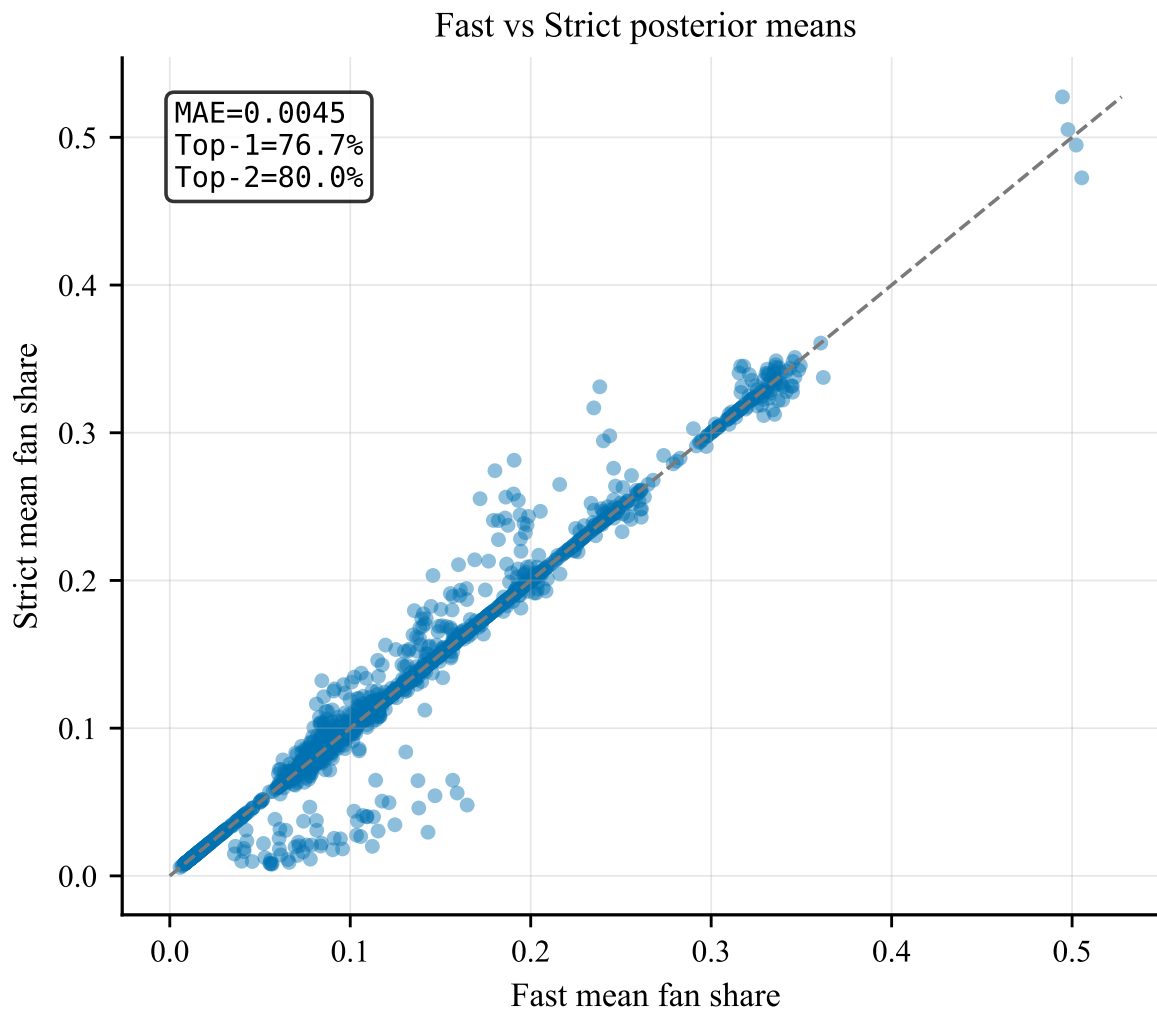


图 3: Fast 与 Strict 后验均值对比, 偏离程度有限 (对角线为一致, 偏离衡量近似误差; MAE=0.0045, Top-1=76.7%, Top-2=80.0%)。

## 4.6 可识别性与可行质量

结论要点. 可行质量由 acceptance rate 与 HDI 宽度量化。

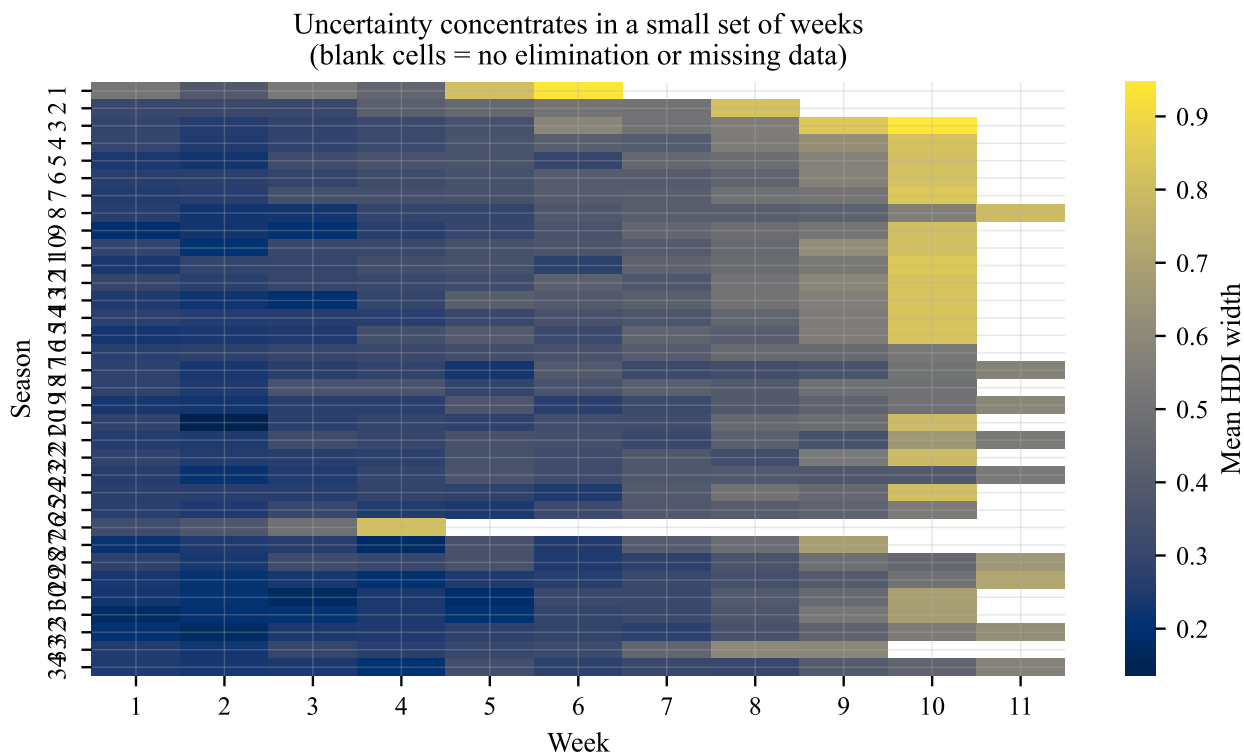


图 4: 不确定性集中于少数周；空白单元表示该赛季不存在该周（颜色越亮 =HDI 宽度更大）。

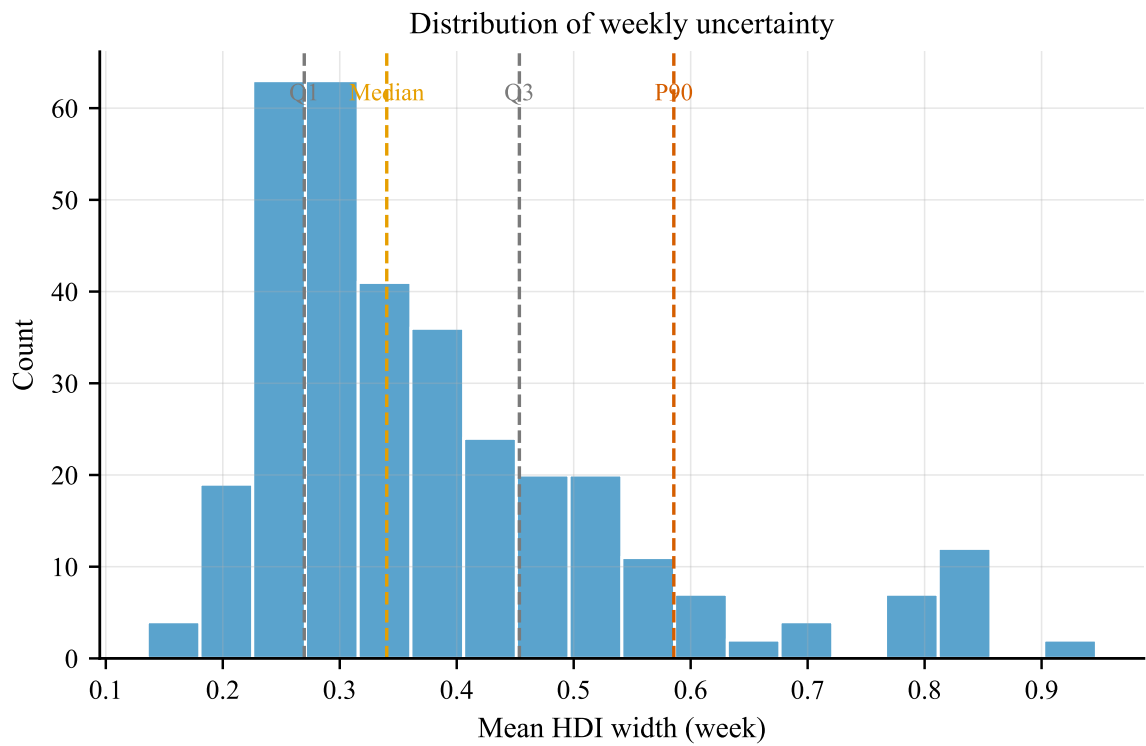


图 5: 周层面 HDI 宽度分布，极端周占比有限（虚线为 Q1/中位/Q3/P90）。

## 4.7 平滑后验

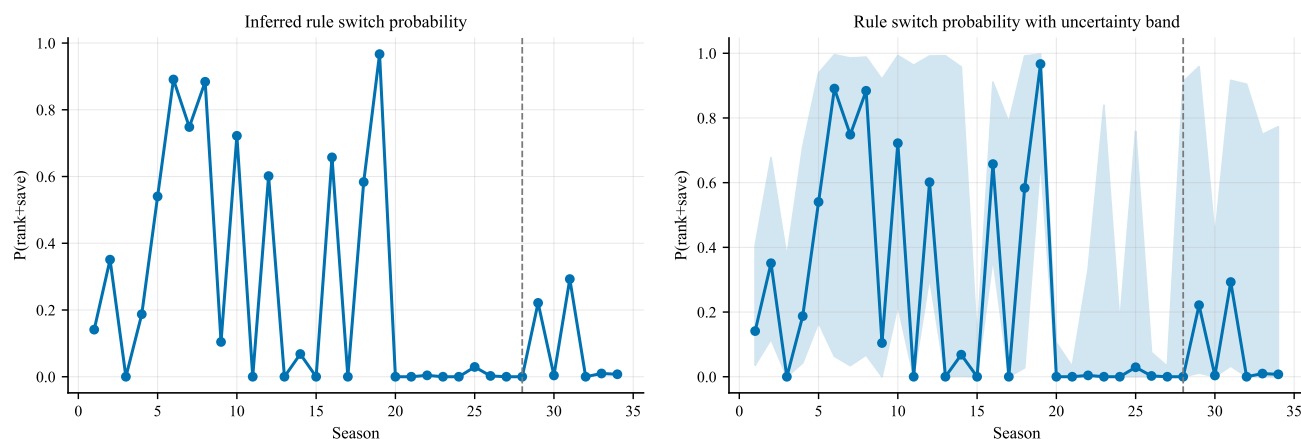
$$p(\mathbf{v}_{1:T}|\text{rules,data}) \propto \left[ \prod_t \mathbf{1}(\mathbf{v}_t \in \mathcal{P}_t) \right] \cdot \prod_{t=2}^T \exp\left(-\frac{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-1}\|^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8)$$

结论对  $\sigma$  较为稳健，详见附录 A。

## 4.8 规则切换推断

结论要点. 按题目假设采用第 28 季为切换点，并提供探索性变点检验。

$$\Pr(z_s \neq z_{s-1}) = \rho, \quad \Pr(\text{data}_s | z_s) \propto \exp(\mathcal{E}_s^{(z_s)}). \quad (9)$$



(a) 点估计 (HMM 推断  $P(\text{rank+save})$  的季节曲线)。

(b) 置信带 (Bootstrap 90% 区间)。

图 6: 规则切换的探索性概率与不确定性区间；主分析采用第 28 季为切换点（虚线标记）。

关键输出. 可行区域诊断、Slack、后验样本、规则切换概率。

## 5 结果 A：粉丝票估计与不确定性

结论要点. 评委与粉丝的冲突可被量化并可视化。

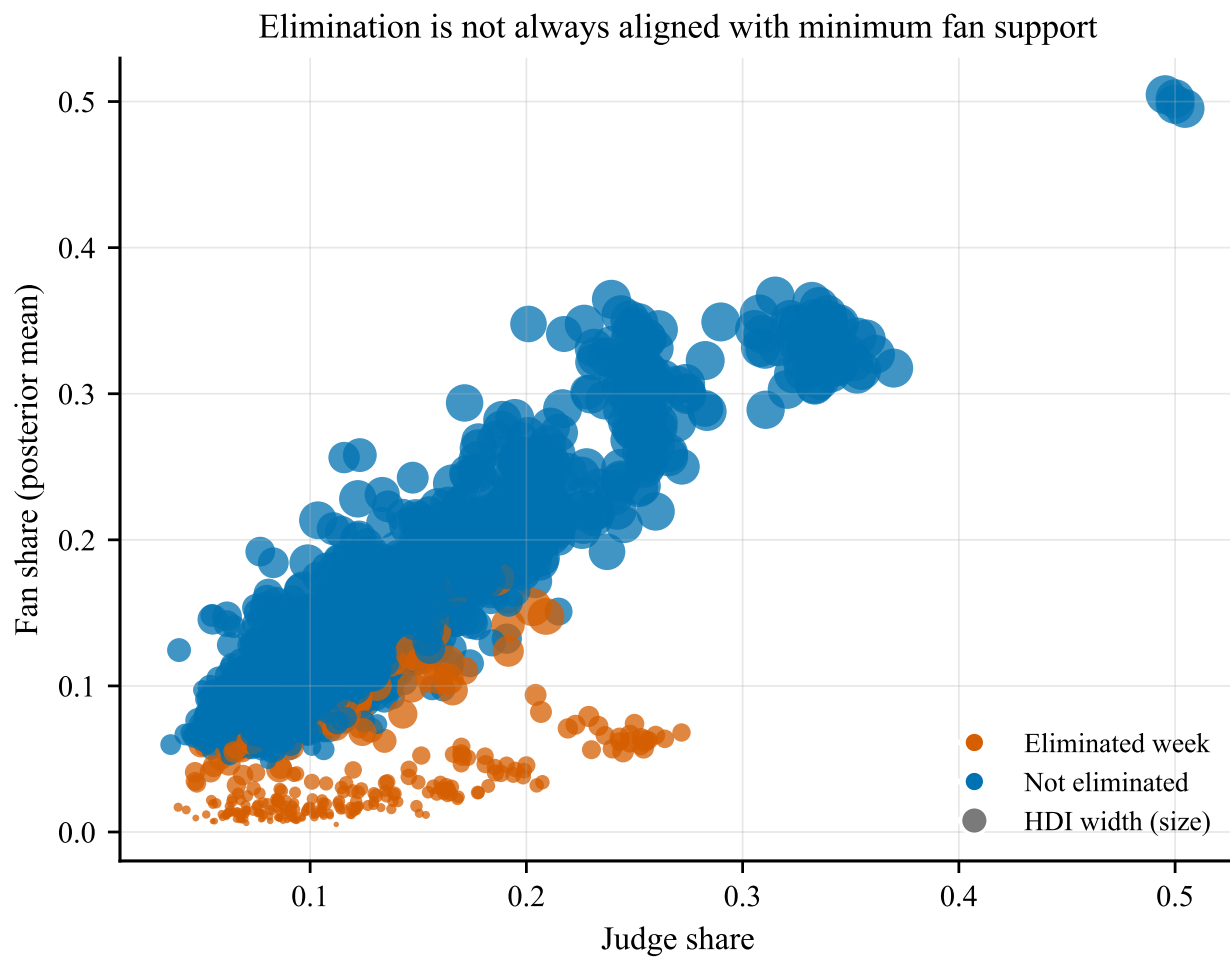


图 7: 淘汰并非总与粉丝最低支持对齐 (颜色区分淘汰/未淘汰, 点大小 = 不确定性)。

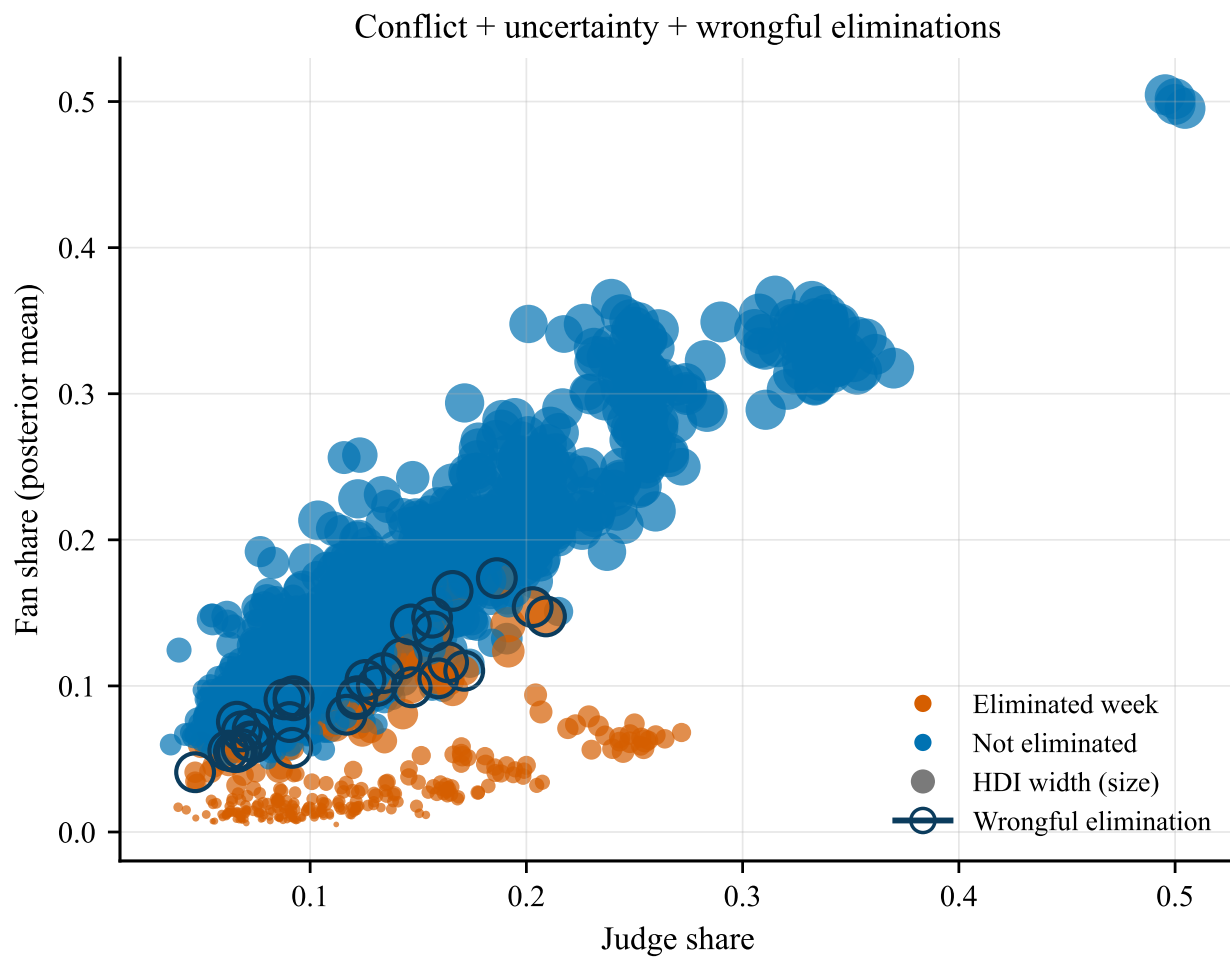


图 8: 冲突图叠加不确定性 (点大小) 与错误淘汰标注 (外圈表示 “非粉丝最低却被淘汰”)。

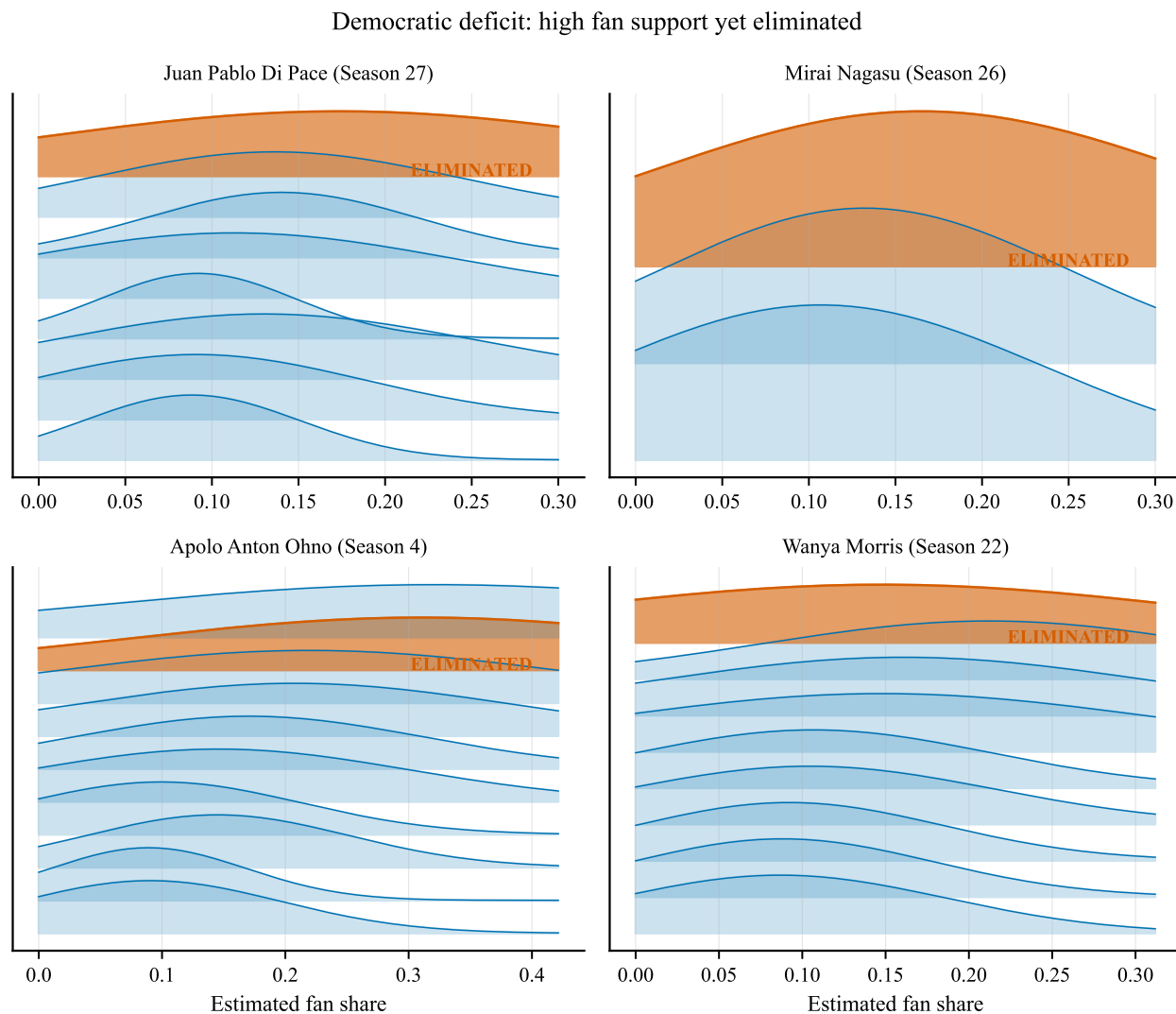


图 9: 争议人物周序后验密度显示显著不确定性 (橙色 = 淘汰周, 峰值位置 = 粉丝支持度; 自下而上为周序)。

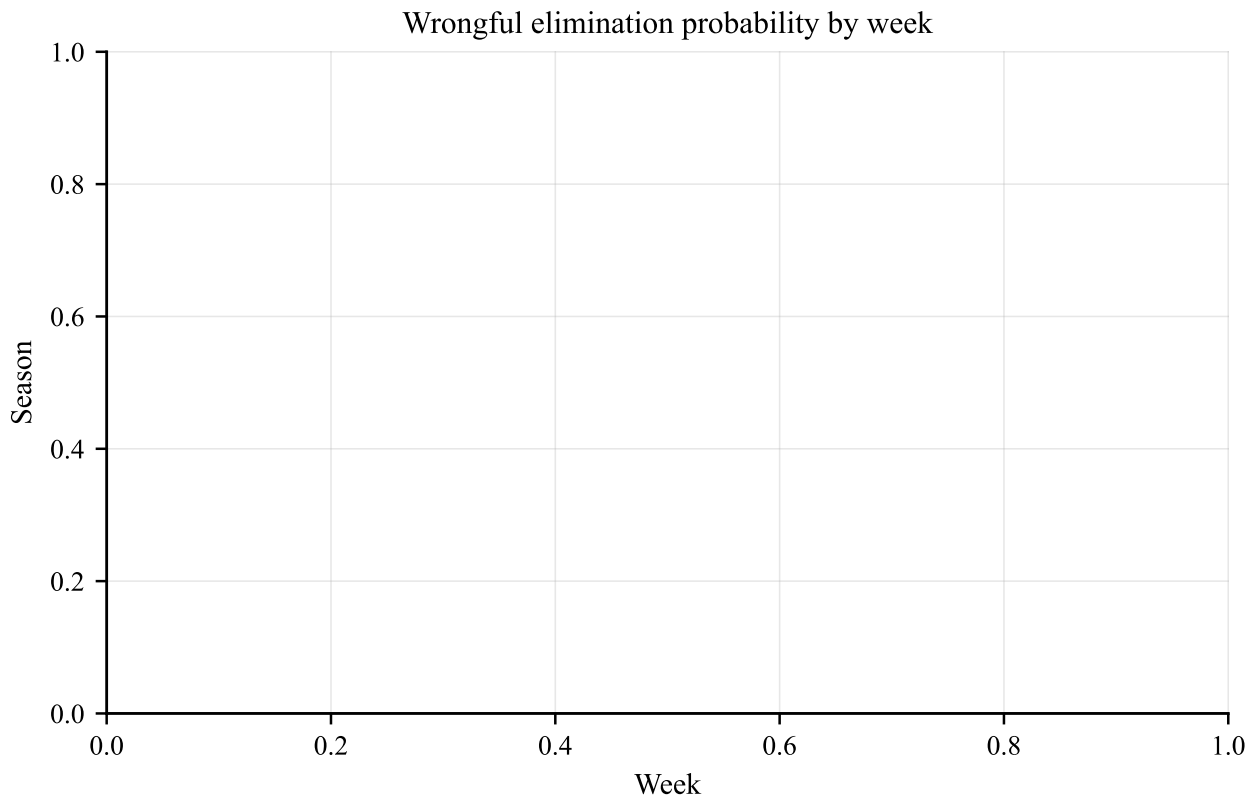


图 10: 部分周存在持续的民主张力；空白单元表示该赛季不存在该周（颜色越亮 = 错误淘汰概率更高）。

关键输出. 粉丝占比后验、HDI 与错误淘汰概率。

## 6 模型 B：机制反事实评估

结论要点. Rank 聚合是有损压缩，翻转率显著。

定义机制  $M$  与淘汰算子：

$$E_i^{(M)} = \arg \min_i \text{Score}_i^{(M)}. \tag{10}$$

图 11 给出关键争议人物在不同机制下的逐周淘汰风险，用以回答“规则改变是否改变结局”。



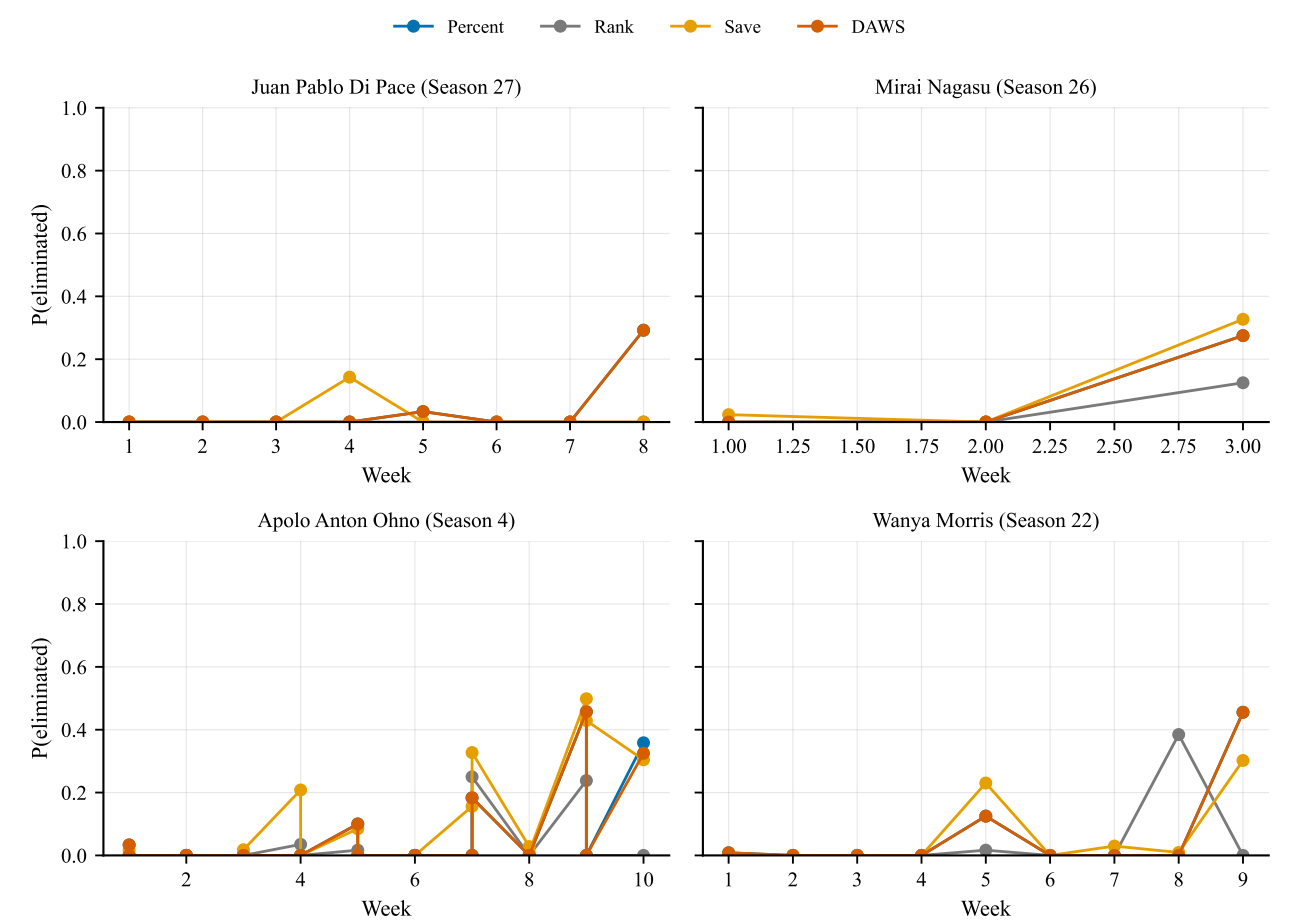


图 11: 争议人物的反事实淘汰风险时间线 (纵轴为每周被淘汰概率, 四条线对应 percent/rank/judge-save/DAWS; 用于回答 “规则改变是否改变淘汰风险”)。

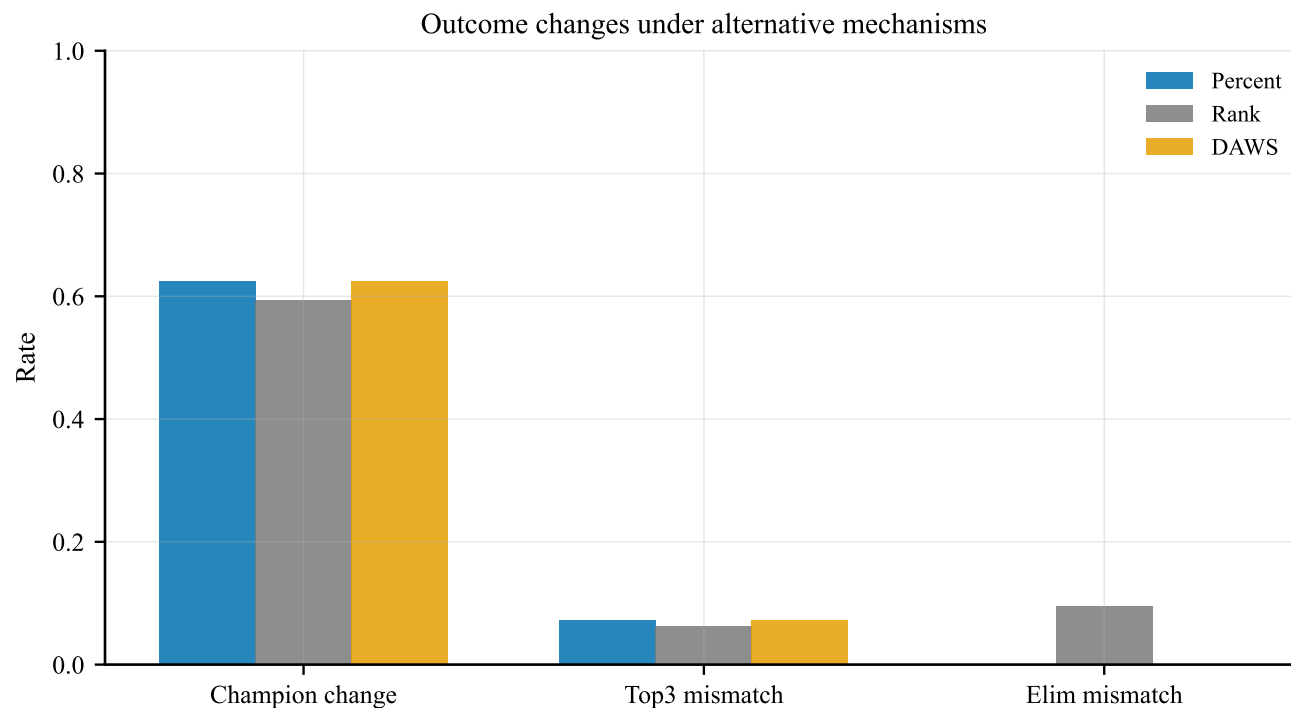
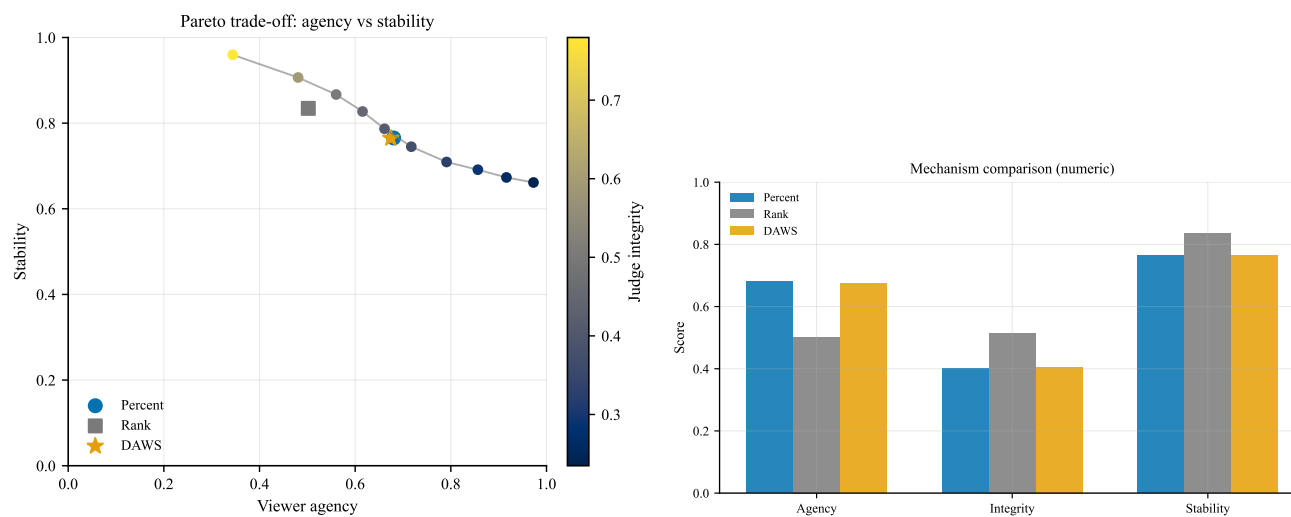


图 12: 机制选择会改变决赛与冠军结果（冠军改变率、Top3 不一致率与淘汰不一致率）。



(a) 观众参与度与稳定性的 Pareto 权衡，颜色表示评委一致性（曲线为  $\alpha$  扫描，星标为 DAWS）。

(b) 机制对比（数值）（三机制在能动性/一致性/稳定上的对比）。

关键输出. 机制指标、翻转率与 Pareto 权衡。

## 7 模型 C：成功因素（Judges vs Fans）

结论要点. 评委与粉丝对因素的响应存在差异。

$$\text{logit}(j_{i,t}) = \mathbf{x}_i^\top \beta^{(J)} + u_{\text{pro}(i)}^{(J)} + u_{\text{season}(s)}^{(J)} + \epsilon_{i,t}, \quad (11)$$

$$\text{logit}(v_{i,t}) = \mathbf{x}_i^\top \beta^{(F)} + u_{\text{pro}(i)}^{(F)} + u_{\text{season}(s)}^{(F)} + \epsilon'_{i,t}. \quad (12)$$

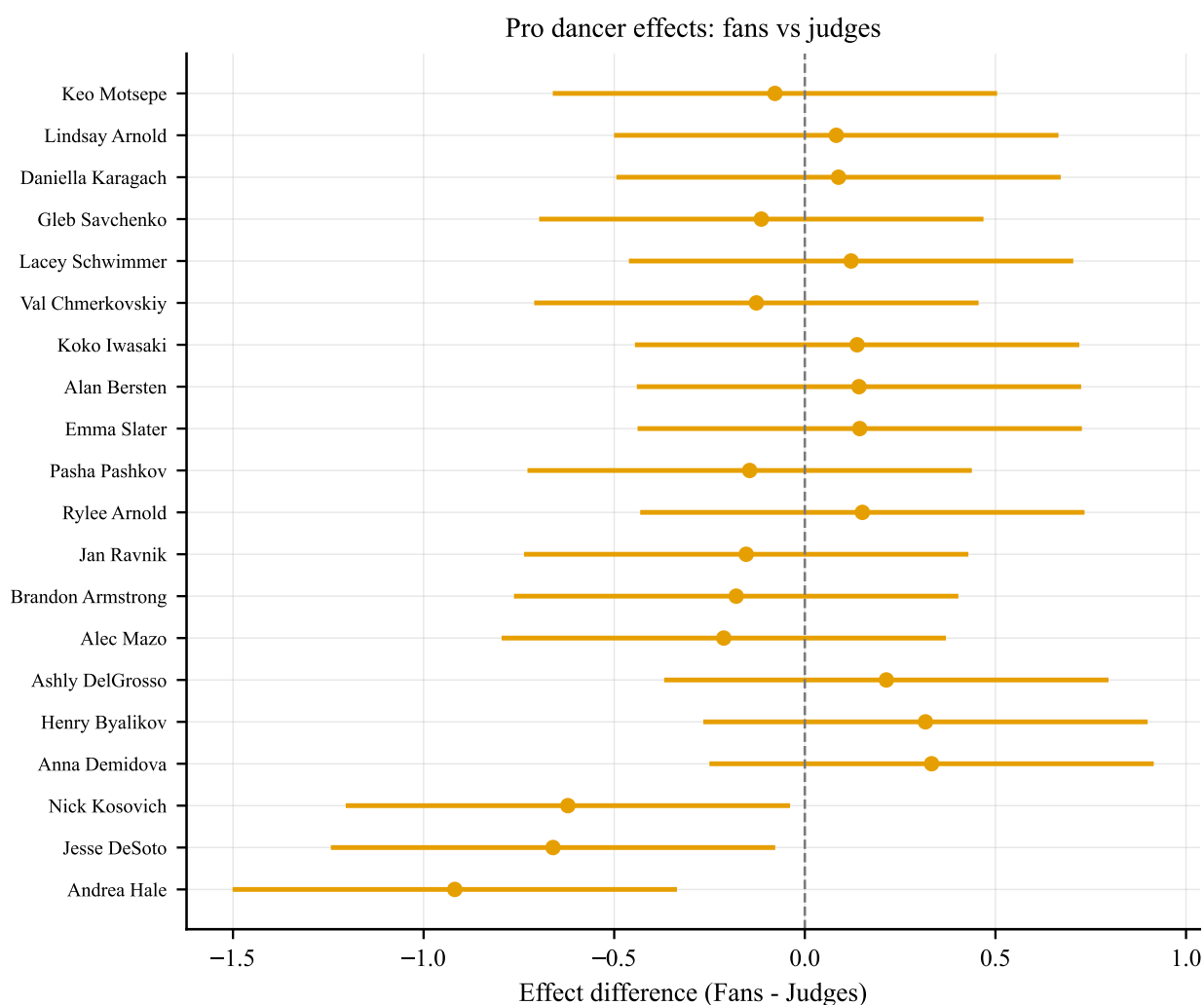


图 13: 职业舞伴效应差异（粉丝 - 评委）（正值 = 更受粉丝偏好，负值 = 更受评委偏好）。

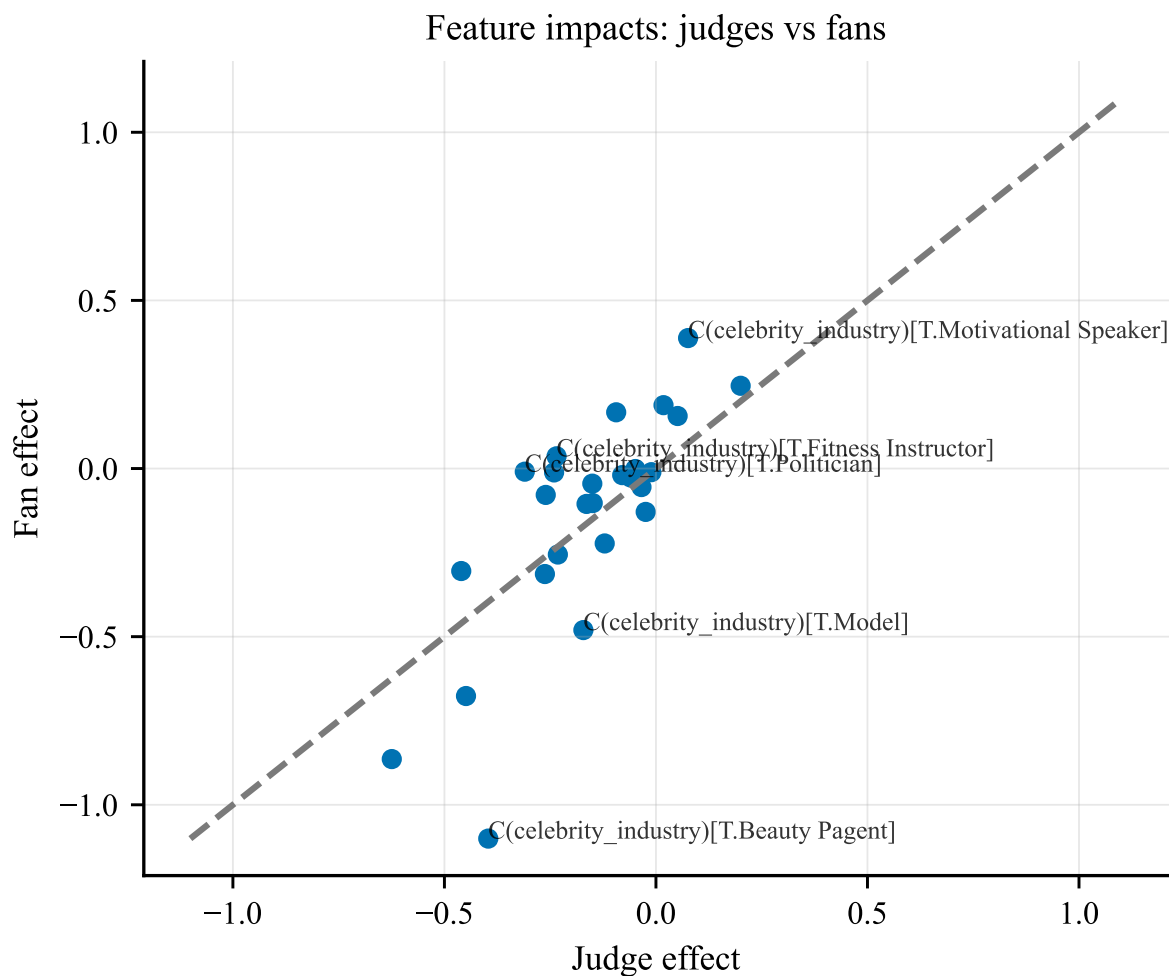


图 14: 标注离对角线最远的特征以突出差异（远离对角线 = 评委/粉丝效应不一致）。

## 7.1 预测补充：GBDT

**结论要点.** 预测模型仅作为协变量有效性的鲁棒性检验。

GBDT 分季 AUC 表现稳定，详见附录 B。

**关键输出.** 双模型对比与任务 3 的直接回答。

## 8 模型 D：机制设计（DAWS）

**结论要点.** DAWS 采用分段阈值权重：常规周保持 50/50，高不确定周提高评委权重（透明可执行）。

$$\alpha_t = \begin{cases} \alpha_0, & U_t \leq q_{90}, \\ \alpha_1, & q_{90} < U_t \leq q_{97}, \\ \alpha_2, & U_t > q_{97}, \end{cases} \quad (13)$$

其中  $q_{90}, q_{97}$  为  $U_t$  的分位阈值（仅在最不确定的周触发更高权重）。图 15 展示阈值触发与权重档位的对应关系，强调规则可解释与可执行。

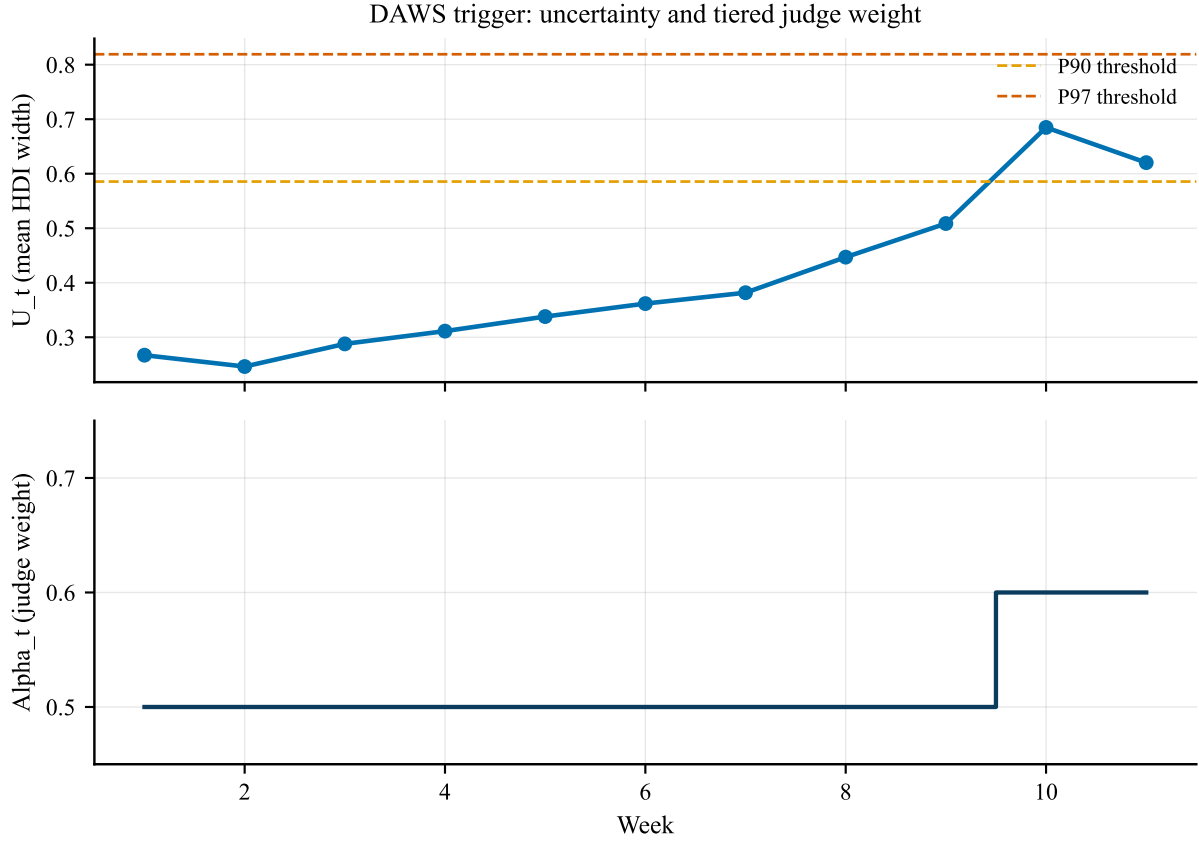


图 15: DAWS 触发与权重档位（上:  $U_t$  与公开阈值；下: 对应的评委权重档位阶梯，常规/争议/极端周）。

**命题 1 (单调性).** 评委与粉丝占比同时上升时, DAWS 得分不下降。

**命题 2 (稳定性界).**

$$|c_{i,t} - c_{i,t-1}| \leq |\alpha_t - \alpha_{t-1}| |j_{i,t} - v_{i,t}| + (1 - \alpha_t) \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-1}\| + \alpha_t \|\mathbf{j}_t - \mathbf{j}_{t-1}\|. \quad (14)$$

## 8.1 Judge-save 参数设定

$$\Pr(E = a \mid \{a, b\}) = \sigma(\beta(J_b - J_a)) \quad (15)$$

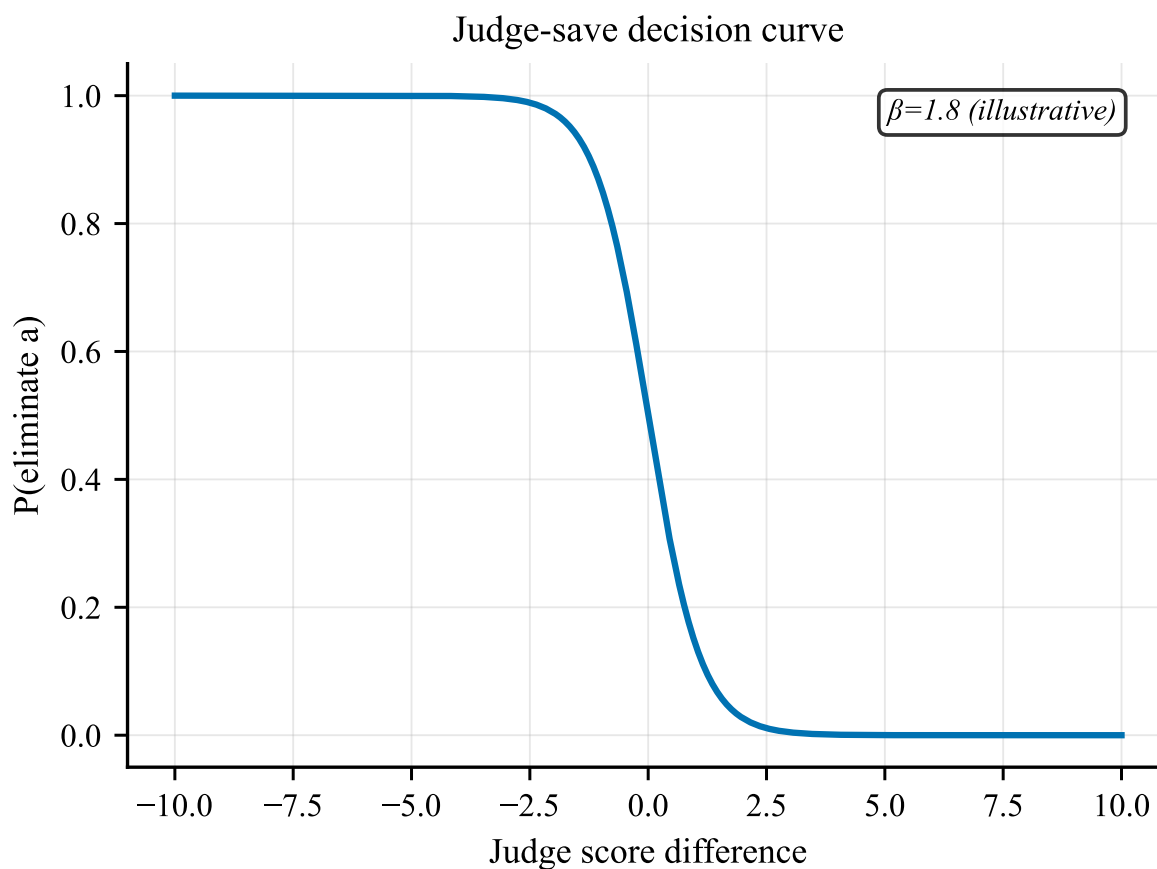


图 16: Judge-save 决策曲线（横轴评委分差，纵轴淘汰概率；示意曲线使用  $\beta = 1.8$ ，分差越大则低分选手被淘汰概率越高）。

关键输出. DAWS 方案、性质与校准的 judge-save 行为刻画。

## 9 敏感性与验证

结论要点. 关键结论对  $\sigma$ 、 $\epsilon$  与规则切换先验具有稳健性。

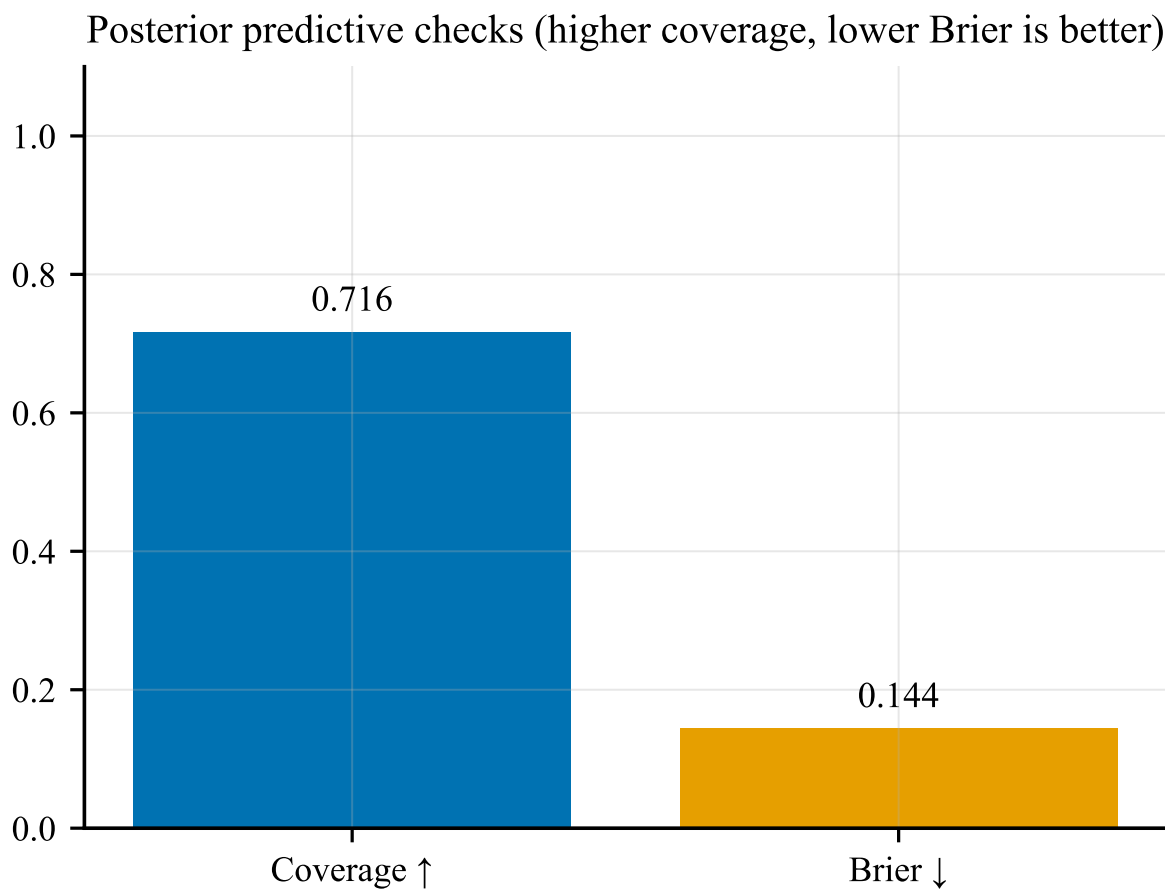


图 17: 后验预测检验结果 (Coverage 越高越好, Brier 越低越好; Brier 反映概率预测误差大小)。

## 9.1 规模对比实验

我们在多进程设置下比较不同采样规模, 记录运行时间、误差 (均值 HDI 宽度)、稳定性 (DAWS) 与理论匹配度 (Kendall  $\tau$ )。结果显示误差随规模提升而趋于平缓, 图中虚线标注了拐点与最终规模选择。

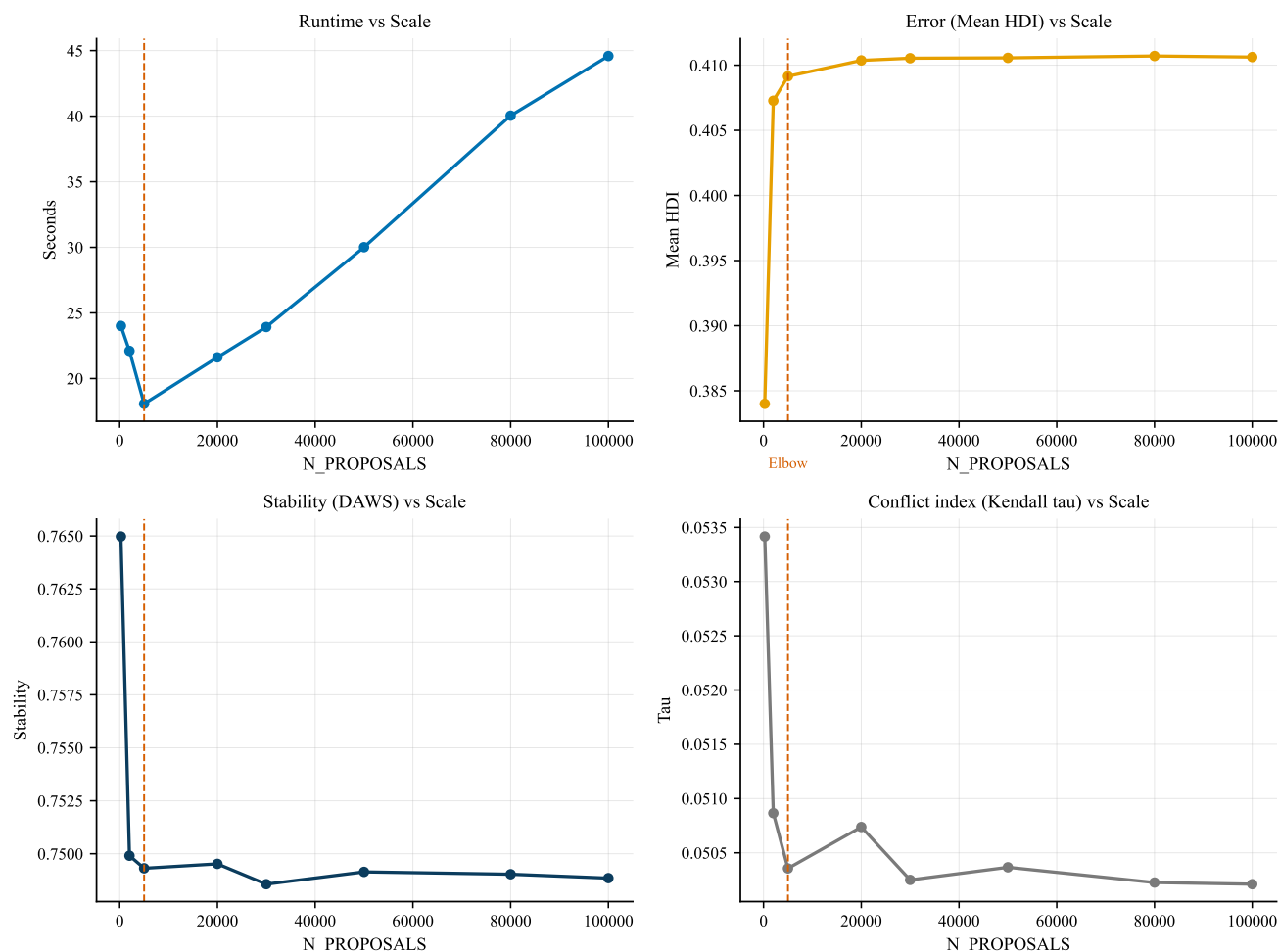


图 18: 不同采样规模下的时间、误差、稳定性与匹配度对比（虚线为折中规模）。

关键输出. 敏感性曲线与后验预测覆盖率。

## 10 结论与建议

结论要点. 审计先行揭示关键不确定性，DAWS 提供透明权衡。

我们完成全赛季粉丝票审计，量化 Rank 机制的民主赤字，并提出 DAWS 作为透明权衡方案以提升能动性 with 评委一致性，同时承认稳定性存在小幅代价。

- **可读结论：** 不确定性集中在少数周，其余周可识别性较高。
- **机制影响：** Rank 聚合提高翻转概率；DAWS 提升能动性但稳定性略有代价（见图 11 与图 15）。



- 落地建议：公布 DAWS 权重计划与 judge-save 规则以提升透明度。

## A 敏感性分析

本附录展示平滑参数  $\sigma$  的敏感性分析。主要结论在测试范围内保持稳健。

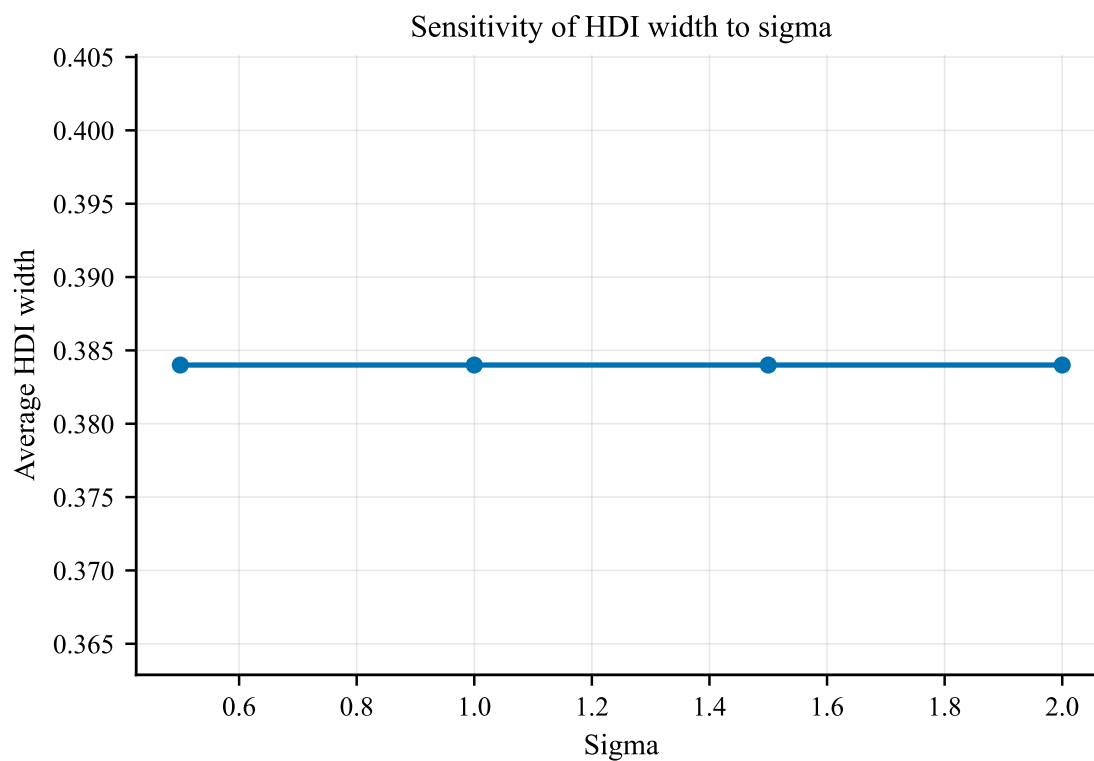


图 19:  $\sigma$  敏感性: 结论对平滑参数较为稳健 (横轴为  $\sigma$ , 纵轴为平均 HDI)。

## B 预测校准

本附录提供 GBDT 前向链式验证的 AUC 结果, 作为协变量有效性的鲁棒性检验。

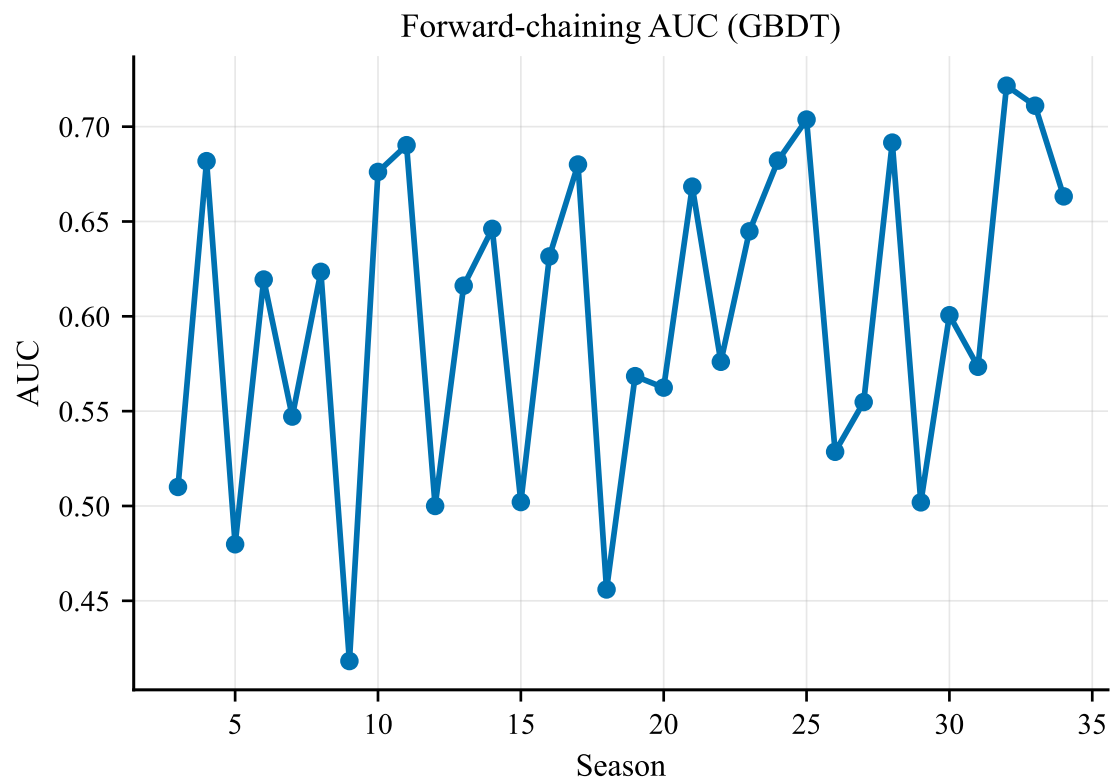


图 20: 分季 AUC 表现稳定（前向链式验证）。

## 参考文献

- [1] COMAP. 2026 MCM/ICM Problem C: Dancing with the Stars (DWTS). Contest Problem Statement.
- [2] Smith, R. (1984). Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly in polytopes. *Operations Research*.
- [3] Jaynes, E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*.
- [4] Gelman, A., et al. (2013). *Bayesian Data Analysis*. CRC Press.
- [5] Moulin, H. (1988). *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge Univ. Press.

## AI 使用报告

我们使用 AI 协助完成论文结构草稿、LaTeX 模板与方法表述润色；所有模型选择与解释均由团队复核并最终确认。

- 可复现性：代码、图表与指标均由提供数据自动生成。
- 环境：Miniforge + mcm2026，科学计算栈已固定版本。
- 过程留痕：运行日志与汇总指标可追溯每次实验。