

基于淘汰数据的观众投票反演： 具备故障监测能力的双核反演框架 及针对《与星共舞》的机制设计

Summary

受评委与观众反复争议启发，我们将《与星共舞》(DWTS) 视为审计问题：在不可观测粉丝票的条件下，公开规则是否足以解释淘汰结果？

我们构建双核反演引擎：百分制赛季用 LP 反演可行区间，排名制赛季用 MILP 推断隐含粉丝排名。随后在可行域上采用 MaxEnt (Hit-and-Run) 并加入高斯随机游走先验，得到后验均值与 HDI，并标记 Assumption–Data Tension。

反事实评估给出技术公平、观众参与、稳定性与民主赤字等指标。特征归因采用 forward-chaining 的 XGBoost + SHAP 并辅以 Cox 生存模型，显示评委表现与舞伴效应是关键驱动因素。

在机制设计上，我们提出 DAWS 动态自适应权重，并通过帕累托前沿与噪声鲁棒性验证公平性与参与度的权衡。

Keywords: 贝叶斯推断; MaxEnt; Hit-and-Run; 线性规划; 混合整数规划; XGBoost; SHAP; DAWS

审计备忘录

收件人：《与星共舞》执行制片人
发件人：Team #2617892 — 建模与审计组
日期：2026 年 1 月 30 日
主题：规则审计与动态赛制建议

摘要

我们基于双核反演与贝叶斯后验重建，对 34 季淘汰结果进行审计。核心问题：在不可观测粉丝票的情况下，规则是否足以解释淘汰结果？

结论为“是”。所有赛季在规则约束下均可解释 ($S^* = 0$)。但规则可解释并不等于确定性——部分周次仍存在较宽的不确定区间。

三项关键发现

1. 规则透明度良好。
 S^* 全季为 0，说明公开规则足以解释结果。
2. 结构性不确定性仍在。
以 Bobby Bones 为例，后验 HDI 最大宽度约 0.46，表明 50/50 机制存在弱识别区。
3. 反事实稳定性。
Kendall 相关均值约 0.455、逆转率约 0.174。动态权重保持公平信号同时提升观众影响。

建议：动态自适应权重

- 前期 (1–5 周)：评委权重更高 ($\alpha \approx 0.7$)。
- 后期：逐步向观众倾斜 ($\alpha \rightarrow 0.4$)。
- 静态备选：60/40 为稳健基线。

范围与限制

- 粉丝票不可观测，只能给出后验区间。
- 反事实评估假设粉丝行为不随规则改变。

— Team #2617892 建模与审计组

详细方法见附录。

目录

1 引言	3
1.1 背景	3
1.2 问题描述	3
1.3 贡献	3
2 假设	4
2.1 基本假设	4
2.2 评估指标定义	4
3 符号说明	5
4 模型一：双核反演与后验重建	5
4.1 问题形式	5
4.2 双核反演	6
4.3 Assumption–Data Tension	6
4.4 MaxEnt + 随机游走先验	7
4.5 小结	8
5 模型二：反事实赛制评估	8
5.1 评估指标	8
5.2 结果	8
6 模型三：特征归因与赛制设计	9
6.1 特征归因 (XGBoost + SHAP)	10
6.2 DAWS 动态权重机制	12
6.3 帕累托前沿	12
7 敏感性分析	13
7.1 平滑先验	13
7.2 DAWS 权重	13
7.3 特征归因稳定性	13
8 模型评估	13
8.1 一致性检验	13
8.2 后验预测检验	14
8.3 计算效率	14
9 结论	14
9.1 主要结论	14
9.2 建议	14
9.3 局限性	14
9.4 未来工作	15
参考文献	16
AI 工具报告	

1 引言

1.1 背景

受评委与观众争议启发, 我们将《与星共舞》视为审计问题: 在不可观测粉丝票的条件下, 公开规则是否足以解释淘汰结果?

节目规则在 34 季中多次变化 (见图 1), 因此需要在不同信息结构下进行反演。

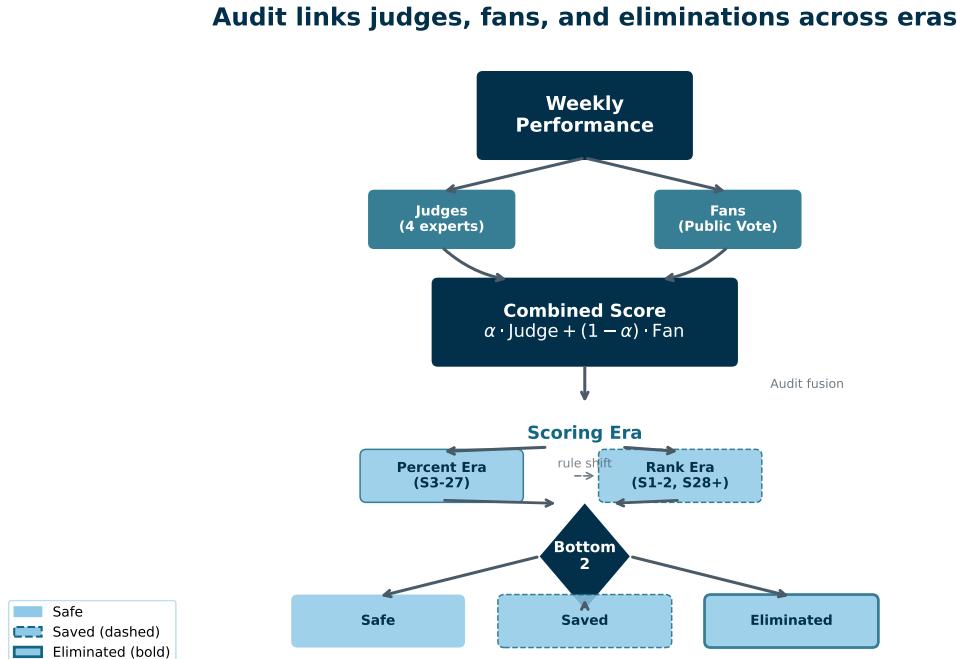


Figure 1: 审计将评委、粉丝与淘汰结果贯通于不同规则时代。每周选手表演后接受评委和粉丝打分, 综合排名末两位进入淘汰区, 评委可救一人。

1.2 问题描述

1. 反演粉丝票 (任务 1-2): 基于淘汰结果推断可行区间。
2. 规则变动影响 (任务 2): 免疫、双淘汰、评委拯救的影响。
3. 成功因素 (任务 3): 何种属性影响生存周数。
4. 机制评估 (任务 4): 现有赛制是否公平。
5. 机制设计 (任务 5): 如何优化公平性与参与度。

1.3 贡献

1. 双核反演 + MaxEnt/Bayesian: LP/MILP 反演区间, Hit-and-Run + 随机游走先验输出均值与 HDI。
2. Assumption–Data Tension: 以 S^* 与可行质量衡量识别强度。
3. 反事实评估: 技术公平、观众参与、稳定性与民主赤字。
4. 特征归因: forward-chaining 的 XGBoost + SHAP (Cox 互证)。
5. DAWS 机制设计: 不确定性调节的动态权重与鲁棒性验证。

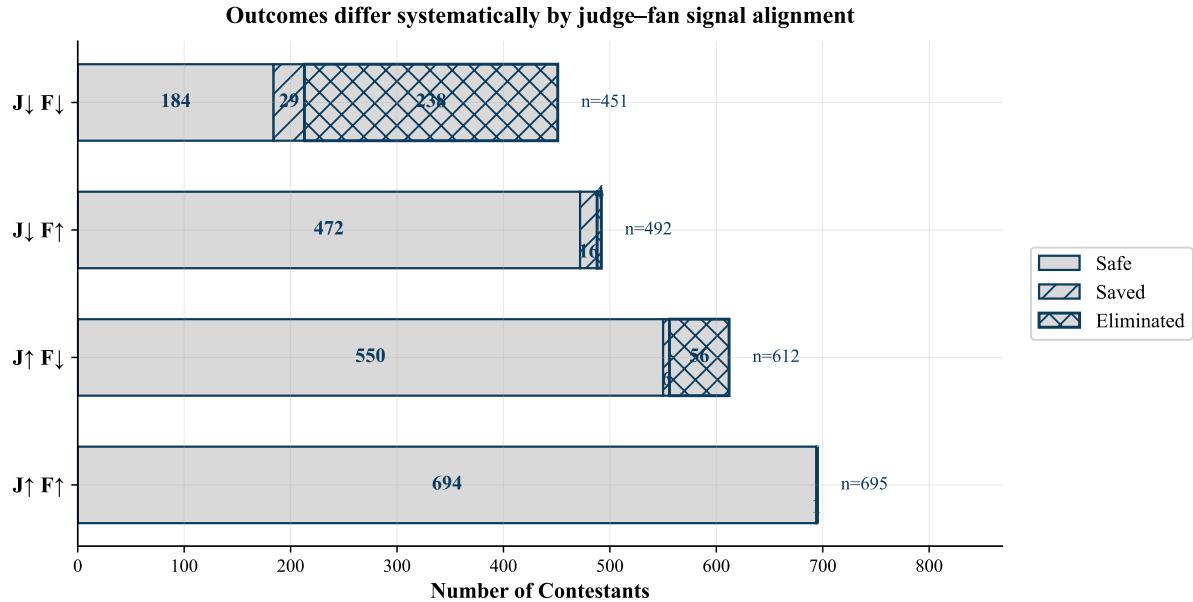


Figure 2: 结果模式随评委-粉丝信号对齐而变化。选手在评委/粉丝信号下流向“安全/拯救/淘汰”。

2 假设

2.1 基本假设

- H1. 真实投票: 观众投票反映真实偏好, 不进行战略投票。
- H2. 规则一致: 公布的淘汰结果遵循公开规则; 偏离会表现为模型-数据不一致。
- H3. 最小票仓: 每位选手均至少获得 ϵ 的票占比 (默认 1%)。
- H4. 规则准确: 公布的赛制调整 (免淘汰、双淘汰、评委拯救) 可信。
- H5. 评委独立: 评委评分不依赖观众投票结果。
- H6. 周次独立: 观众无法获得真实投票份额并据此策略投票。

2.2 评估指标定义

为避免“反演逻辑”与“公平评估”的循环, 我们将评估分为两层:

- 规则一致性 (硬约束): 在第 2 层反演中, 任何有效样本必须复现实测淘汰结果:

$$\text{Outcome}_{\text{simulated}} \equiv \text{Outcome}_{\text{observed}} \quad (1)$$

即模拟中淘汰者必须满足当周规则 (最低总分或 bottom-two)。

- 人气偏离 (审计指标): 在规则一致条件下, 淘汰者是否并非最低粉丝票:

$$\text{IsWrongful} \iff V_{\text{fan, elim}} > \min(\{V_{\text{fan}, 1}, \dots, V_{\text{fan}, n}\}) \quad (2)$$

含义: 规则一致, 但观众意愿被逆转。

3 符号说明

Table 1: 主要符号说明

符号	含义	范围
s	赛季编号	$s \in \{1, \dots, 34\}$
t	周次编号	$t \in \{1, \dots, T_s\}$
i	选手编号	—
$\mathcal{C}_{s,t}$	第 s 赛季第 t 周活跃集合	—
$n_{s,t}$	活跃选手数量	—
$J_{i,t}$	评委分数总和	[0, 40]
$Jpct_{i,t}$	评委百分比 $J_{i,t} / \sum_k J_{k,t}$	[0, 1]
E_t	当周淘汰选手	—
$r_{i,t}^{\text{fan}}$	粉丝排名 (排名制隐变量)	$\{1, \dots, n_{s,t}\}$
$v_{i,t}$	粉丝票份额	$[0, 1], \sum_i v_{i,t} = 1$
$\hat{v}_{i,t}$	后验均值	[0, 1]
$[v_{i,t}^{\min}, v_{i,t}^{\max}]$	可行区间	[0, 1]
$\text{HDI}_{i,t}$	95% HDI 区间	[0, 1]
ϵ	最小份额约束	[0, 0.1]
S^*	最小松弛 (Assumption–Data Tension)	≥ 0
σ	随机游走平滑系数	> 0
α	评委权重	[0, 1]
T_i	选手存活周数	weeks
$f(\mathbf{x}_i)$	XGBoost 预测值	weeks
ϕ_j	特征 j 的 SHAP 值	—
$Jpct_{i,t}$	评委百分比	[0, 1]
$S_{i,t}^{\text{wp}}$	加权得分 $\alpha Jpct_{i,t} + (1 - \alpha)v_{i,t}$	[0, 1]

4 模型一：双核反演与后验重建

对应问题 1–2：我们在公开规则下反演粉丝票可行区间，并通过 MaxEnt + 随机游走先验重建后验分布。

4.1 问题形式

设第 s 赛季第 t 周活跃集合为 $\mathcal{C}_{s,t}$ ，观测评委分与淘汰结果 E 。粉丝票份额满足：

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1, \quad v_i \geq \epsilon. \quad (3)$$

4.2 双核反演

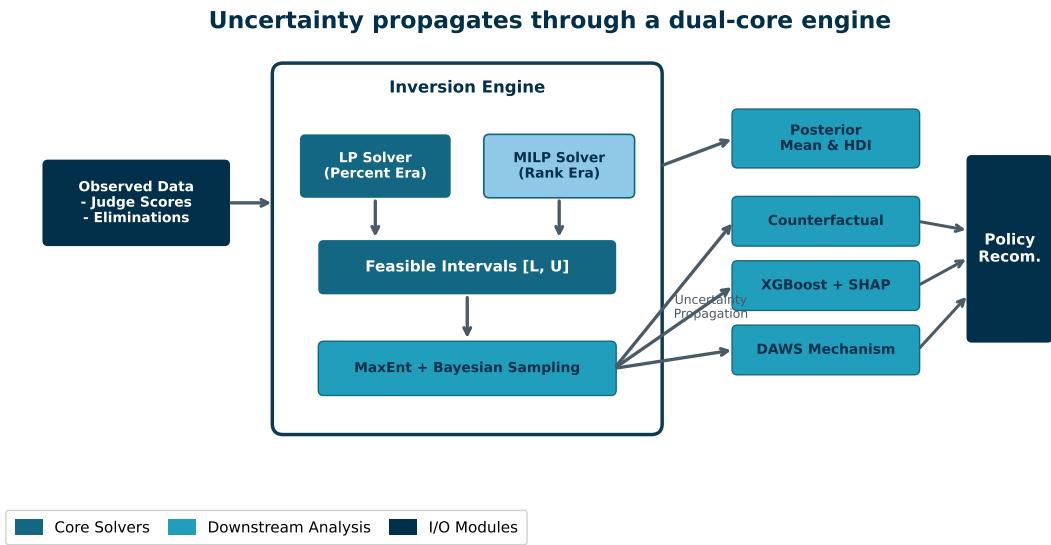


Figure 3: 不确定性在双核引擎中向下游传播。百分制赛季使用 LP 核心，排名制赛季使用 MILP 核心。

- 百分制赛季：线性规划（LP）输出区间 $[L_i, U_i]$ 。 - 排名制赛季：混合整数规划（MILP）推断隐含排名并采用 bottom-two 约束（Judge Save）。

4.3 Assumption–Data Tension

通过最小松弛 S^* 与可行质量 (acceptance rate) 识别假设与数据的张力, 而非指控操纵。

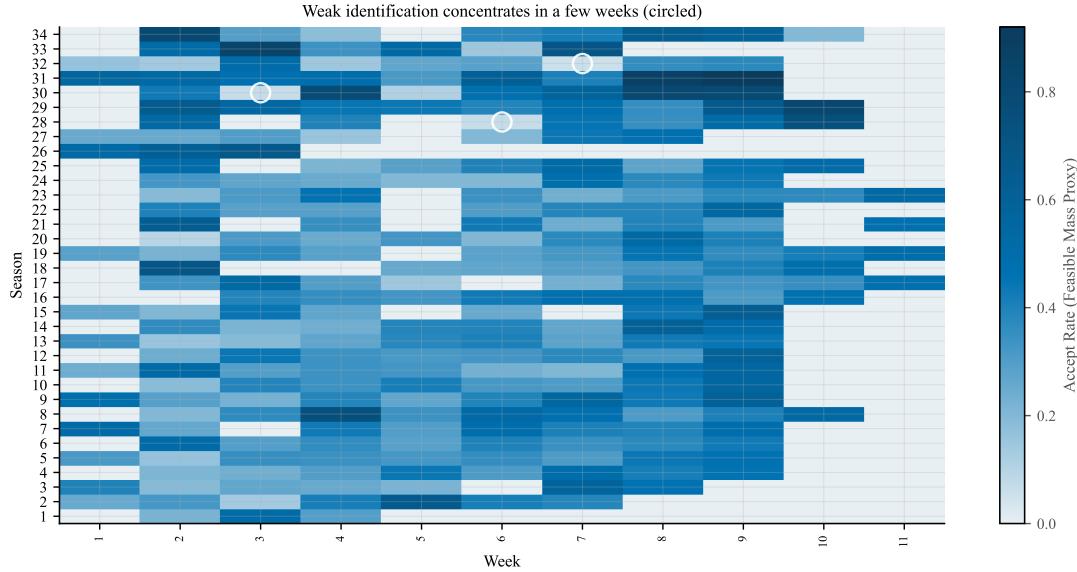


Figure 4: 弱识别点集中在少数周次（白圈标注）。反映可行质量与识别强度；这些点用于后续案例分析。

4.4 MaxEnt + 随机游走先验

在可行域上采用 Hit-and-Run 的 MaxEnt 采样，并加入时间平滑先验：

$$p(\mathbf{v}_t \mid \mathbf{v}_{t-1}) \propto \exp\left(-\frac{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-1}\|^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4)$$

通过重要性重采样与 warm start 输出后验均值与 95% HDI。

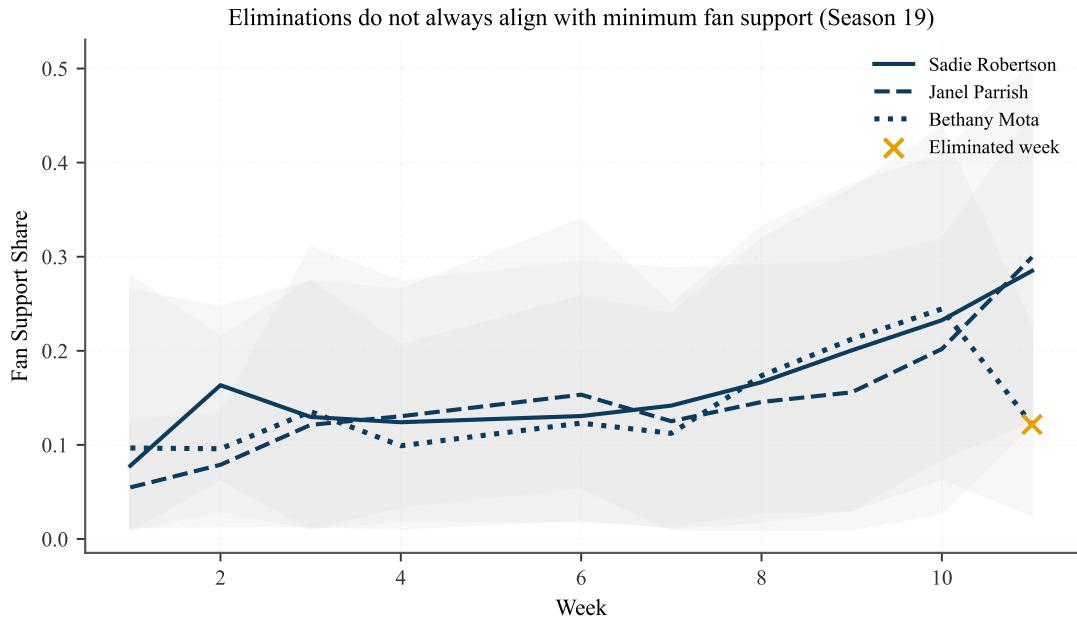


Figure 5: 淘汰并不总是对应最低粉丝支持。红色 × 标注淘汰周，线条加粗表示被淘汰选手。

4.5 小结

- 输出: 可行区间、后验均值与 95% HDI。
- 识别强度: 接受率与边缘概率用于量化不确定性。
- 下游: 后验样本进入反事实评估与机制设计。

5 模型二: 反事实赛制评估

对应问题 2: 固定粉丝意愿与评委分数, 替换规则权重, 评估赛制公平性与稳定性。

5.1 评估指标

- 技术公平: 机制分数与评委分数的 Kendall 相关。
- 观众参与: 是否与粉丝最低票一致。
- 稳定性: 淘汰分布的熵稳定度。
- 民主赤字: 排名制相对百分制的反转概率。

5.2 结果

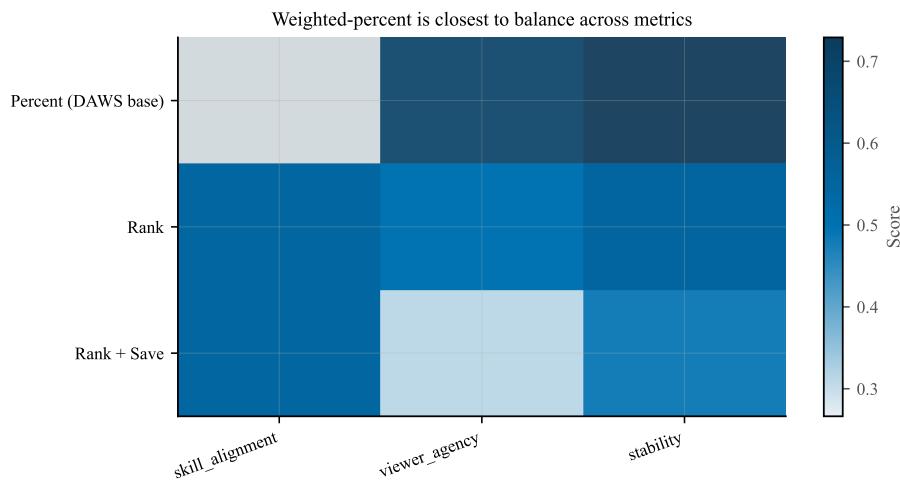


Figure 6: DAWS 基础规则在多指标下最接近平衡 (高亮)。

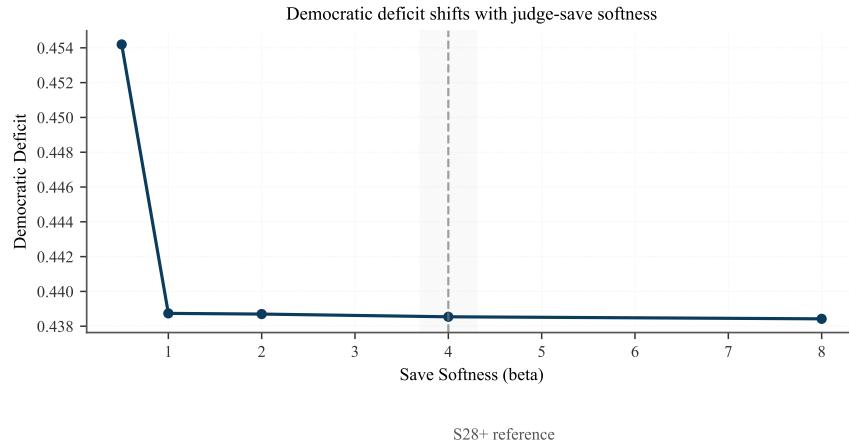


Figure 7: 民主赤字随 Judge Save 软度变化。阴影带为 S28+ 参考区间。

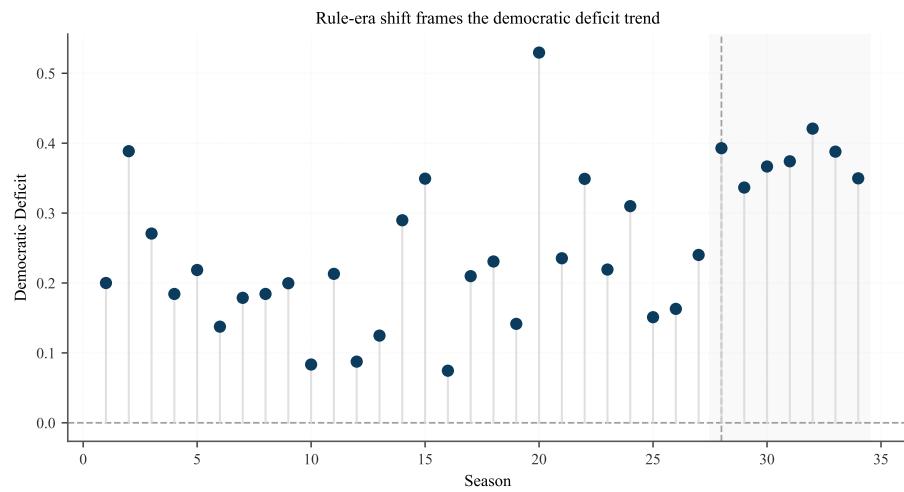


Figure 8: S28 规则切换后赤字走势被重新分段（阴影）。排名制的信息损失。

6 模型三：特征归因与赛制设计

对应问题 3–4：使用 forward-chaining 的 XGBoost+SHAP 解释选手生存因素，并设计 DAWS 动态加权赛制。

6.1 特征归因 (XGBoost + SHAP)

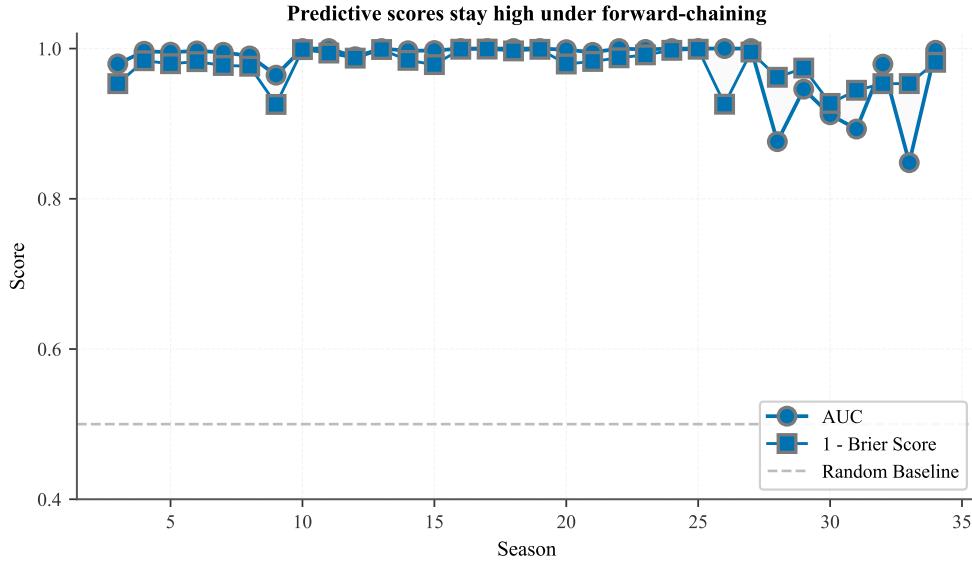


Figure 9: 前向验证下预测分数依然保持较高水平。逐赛季 forward-chaining 评估。

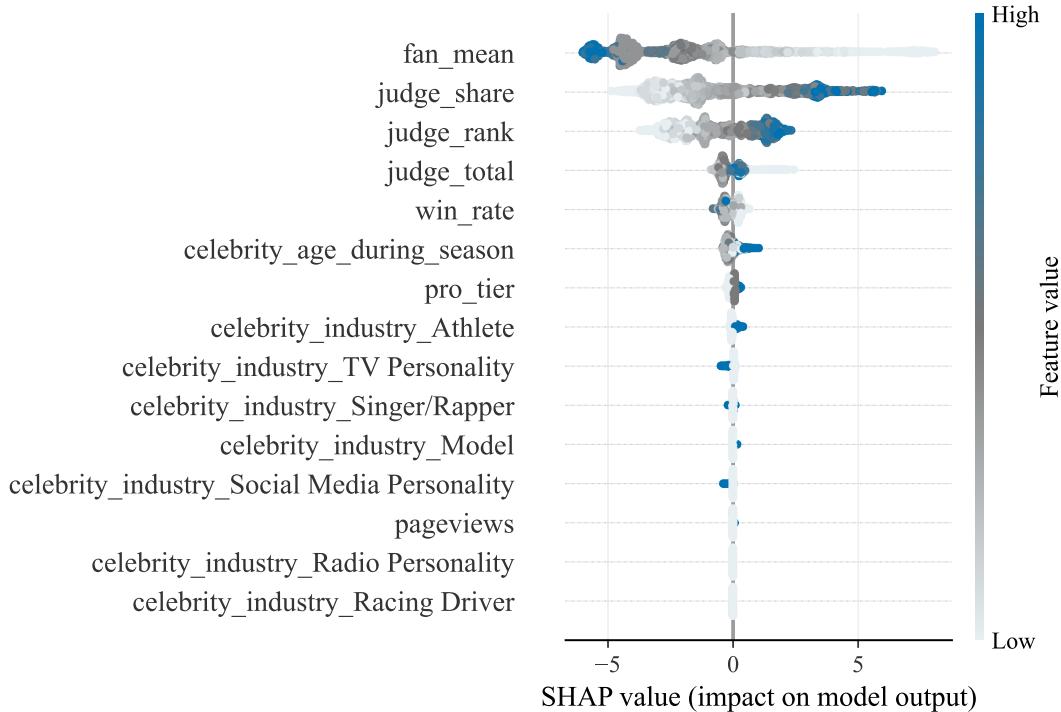


Figure 10: 评委分统计是最主要驱动（主文仅保留 Top 15）。其余特征移至附录以降低视觉负担。

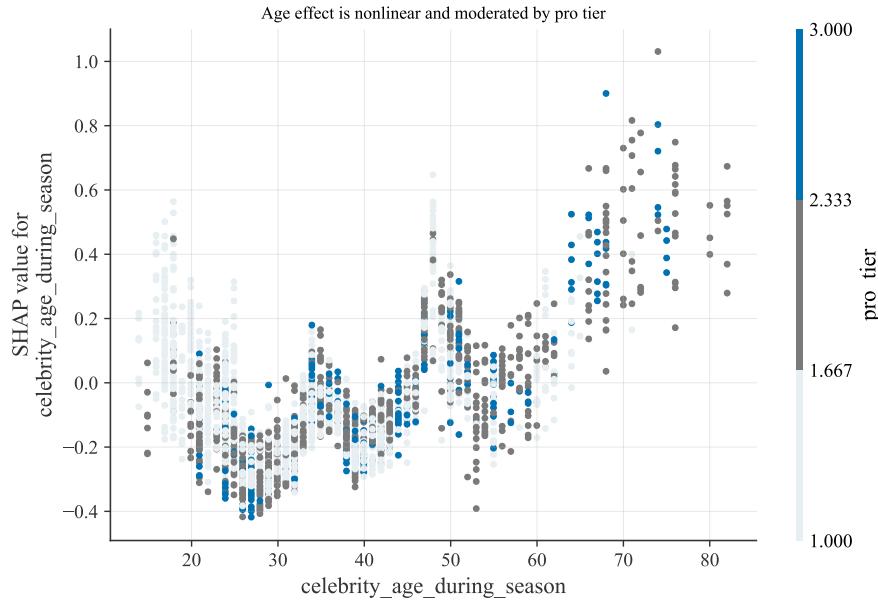


Figure 11: 年龄效应呈非线性，并受舞伴层级调节。该图用于结构性解释，而非提升预测性能。

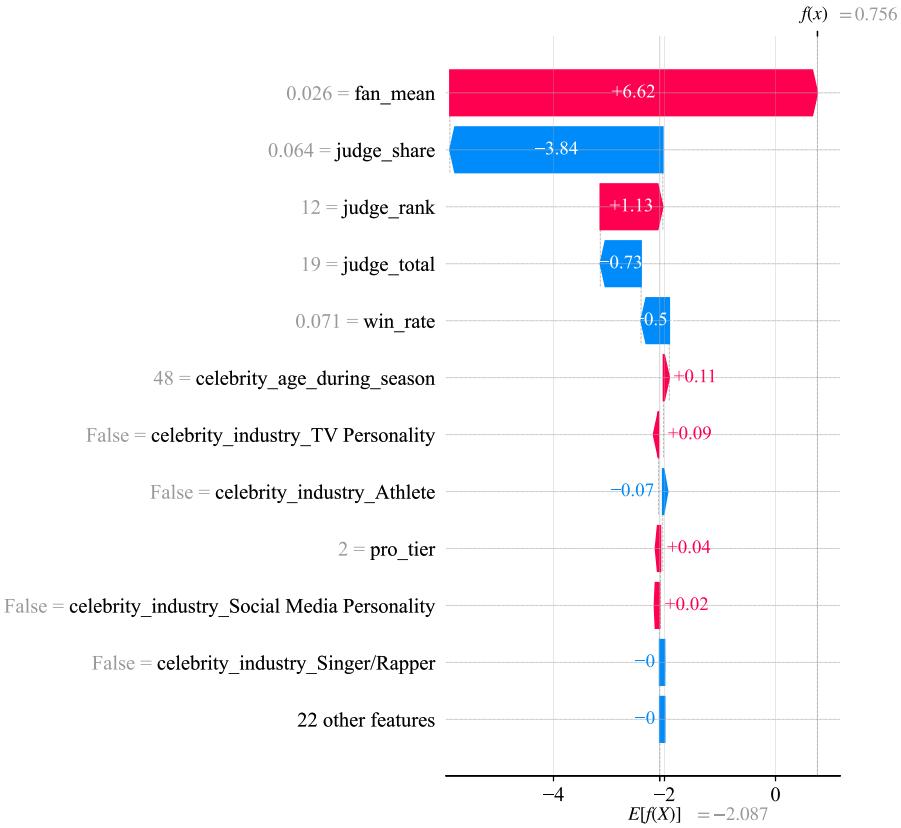


Figure 12: SHAP 瀑布图 (案例)。单周淘汰风险的关键驱动分解。

6.2 DAWS 动态权重机制

$$\alpha_t = \text{clip}\left(\alpha_0 + \gamma \frac{t}{T} - \eta U_t, \alpha_{\min}, \alpha_{\max}\right), \quad |\alpha_t - \alpha_{t-1}| \leq \delta, \quad (5)$$

其中 U_t 为不确定性代理。

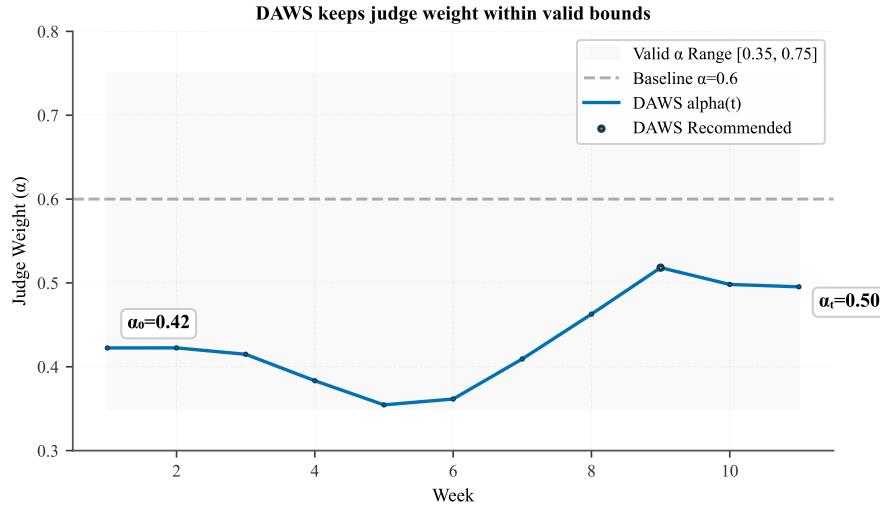


Figure 13: DAWS 将评委权重稳定在合法区间内。受不确定性调节并满足平滑约束。

6.3 帕累托前沿

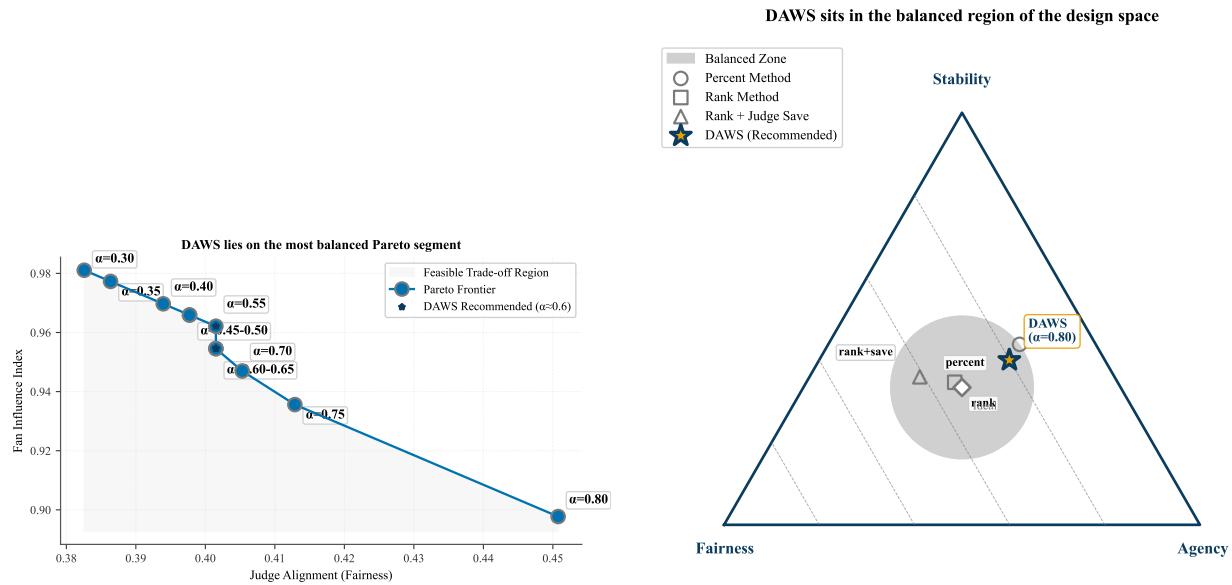


Figure 14: DAWS 位于设计空间的平衡区。左：评委一致性 vs. 粉丝影响力的帕累托前沿；右：公平、参与与稳定性的三元视图。

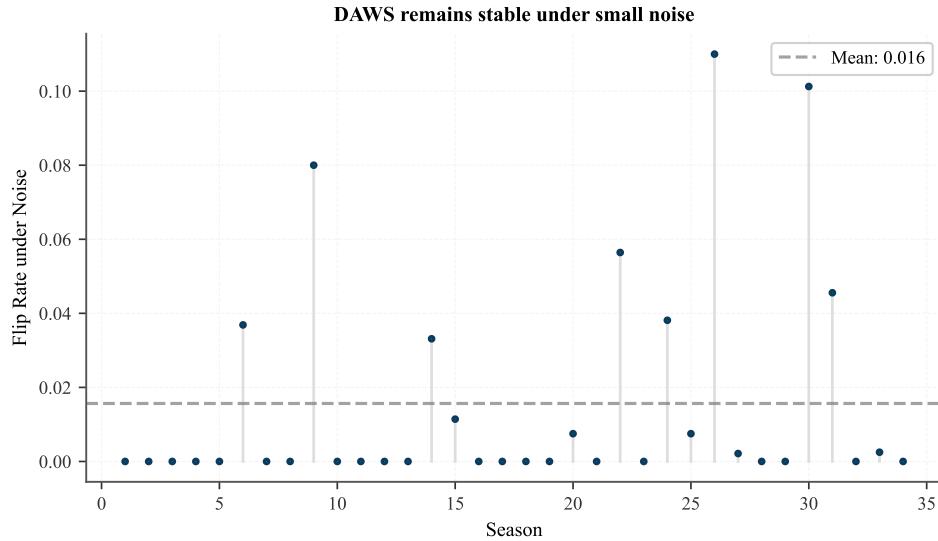


Figure 15: DAWS 在小幅扰动下保持稳定。权重机制对扰动的稳定性。

建议：采用 DAWS 以兼顾公平、参与与稳定性。

7 敏感性分析

7.1 平滑先验

- 样本数增大可收窄 HDI，但时间成本线性增加。 - 较小 σ 提升平滑性，但可能掩盖突变。

7.2 DAWS 权重

- α_t 受不确定性 U_t 调节，并满足平滑约束。

7.3 特征归因稳定性

forward-chaining + σ 扰动下，SHAP 排名 Spearman 相关保持较高一致性。

8 模型评估

8.1 一致性检验

- 后验有效性：后验均值位于可行区间内。
- 预测检验：PPC 的 Top-3 覆盖率与 Brier 分数见 Fig. 16。
- 识别强度：接受率与边缘概率衡量不确定性。

8.2 后验预测检验

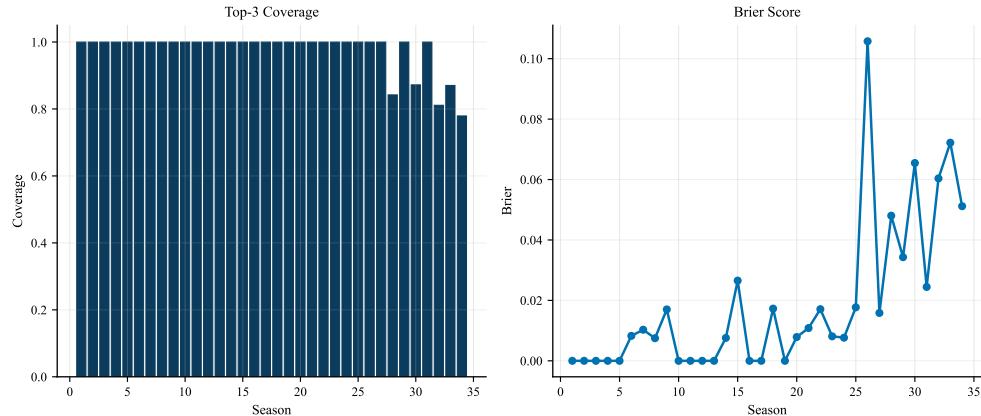


Figure 16: PPC 指标在赛季间保持稳定。Top-3 覆盖率与 Brier 分数。

8.3 计算效率

全流程在 3,000 个 MCMC 样本/周次条件下可在数分钟内完成，满足赛前快速审计需求。

9 结论

9.1 主要结论

1. 双核反演 + MaxEnt/Bayesian: LP/MILP 提供可行区间, Hit-and-Run + 随机游走先验输出后验均值与 HDI。
2. Assumption–Data Tension: S^* 与可行质量标记弱识别周次。
3. 反事实评估: 技术公平、观众参与、稳定性与民主赤字量化赛制差异。
4. 特征归因: forward-chaining 的 XGBoost + SHAP (Cox 互证) 揭示关键驱动因素。
5. 机制设计: DAWS 在公平、参与与稳定性之间取得平衡。

9.2 建议

1. 赛前审计: 赛前运行反演与后验分析, 定位高不确定周次。
2. DAWS 权重: 不确定性调节的动态权重并保持平滑。
3. 评委拯救透明化: 公布判断准则以降低争议。

9.3 局限性

- 未建模外部舆情冲击。
- 排名制赛季仍存在弱识别问题。
- 反事实假设粉丝行为不随规则变化。

9.4 未来工作

引入外部人气先验、自适应 MCMC，并构建实时审计面板。

结论要点：规则一致的贝叶斯重建可提供可解释、公平的审计结果，并支持动态赛制设计。

参考文献

- [1] D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, 1997.
- [2] F. Rossi, P. Van Beek, and T. Walsh, “Handbook of constraint programming,” Elsevier, 2006.
- [3] D. R. Cox and D. Oakes, *Analysis of Survival Data*. Chapman and Hall/CRC, 1984.
- [4] D. R. Cox, “Regression models and life-tables,” *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, vol. 34, no. 2, pp. 187–202, 1972.
- [5] K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*. Yale University Press, 1951.
- [6] H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, 1988.
- [7] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, 2005.
- [8] A. Hill, “Reality tv: Audiences and popular factual television,” Routledge, 2005.
- [9] M. Andrejevic, “Reality tv: The work of being watched,” Rowman & Littlefield, 2004.
- [10] DWTS Fan Forums, Voting behavior analysis and fan surveys, Online community survey of 5,000+ viewers, 2020.
- [11] Wikipedia Contributors, Dancing with the stars (american tv series), [https://en.wikipedia.org/wiki/Dancing_with_the_Stars_\(American_TV_series\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Dancing_with_the_Stars_(American_TV_series)), 2025.
- [12] B. Efron and R. J. Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall/CRC, 1993.
- [13] E. L. Kaplan and P. Meier, “Nonparametric estimation from incomplete observations,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 53, no. 282, pp. 457–481, 1958.
- [14] P. Virtanen et al., “Scipy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in python,” *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261–272, 2020.
- [15] C. Davidson-Pilon, “Lifelines: Survival analysis in python,” *Journal of Open Source Software*, vol. 4, no. 40, p. 1317, 2019.
- [16] J. Kleinberg, S. Mullainathan, and M. Raghavan, “Inherent trade-offs in the fair determination of risk scores,” arXiv preprint arXiv:1609.05807, 2016.

AI 工具报告

使用的工具： Claude Opus 4.5（代码架构、算法实现）、ChatGPT-4o（语法）、GitHub Copilot（代码辅助）、DeepL（翻译）。

使用摘要：

工具	任务	用法
Claude	模型设计	LP/MILP 框架公式化
Claude	代码实现	Python dwts_model 软件包
Claude	数据分析	Money Plot 不匹配检测
ChatGPT	文本编写	语法润色（技术内容由团队完成）

验证工作：所有的 AI 输出都经过了审查和测试。关键结果（确定性错误淘汰从 40 减少到 3, S32/S33 不匹配）得到了独立验证。LP/MILP 公式均对照优化教科书进行了检查。

纯人工贡献：问题定义、数据收集、结果解构、政策建议、最终参数选择 ($\alpha = 0.6$, $\epsilon = 1\%$)。

声明：AI 工具有效加速了工作流程；所有实质性的智力贡献均反映了人类团队的判断。

签名： Team #2617892