中国科学技术大学 2020 - 2021 学年第一学期
复变函数 A　考试试题[1]

一、填空题（30 分）（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

1. 设方程为 $e^{z}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$，那么方程的全部根为：____________

2. 若函数 $f(z)=x^3-3xy^2+\mathrm{i}\left(ax^2y-y^3-1\right)$ 是复平面上的解析函数，那么实常数 $a=$____________

3. 设函数 $f(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 是平面上的诗和函数，其中 a,b,c,d 为是实数常数。那么实常数 a,b,c,d 应满足下面条件：____________

4. $\displaystyle\int_0^{\pi+2t}\left(e^{-z}-\cos\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}z=$____________

5. 设 $f(z)=\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z-1}}}{(e^{2z}-1)\sin z}$，给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 ∞），并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）：____________

6. $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(z-1)^{2021}}\right),1\right)=$____________，

$\mathrm{Res}\left(z^2\sin\dfrac{1}{z-\mathrm{i}},\mathrm{i}\right)=$____________

7. 对函数 $f(t)$，记 $F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$ 为它的 Laplace 变换，并且记 $f(t)=\mathrm{L}^{-1}[F(p)]$：

(1) 设 $f(t)$ 满足 $\begin{cases} f''(t)-f(t)=4\sin t+5\cos 2t \\ f(0)=-1, f'(0)=-2 \end{cases}$，那么 $F(p)=$____________

(2) $\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{3p+7}{p^2+2p+2}\right]=$____________

8. 方程 $z^5+13z^2+15=0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 和圆环 $2<|z|<3$ 内根的个数分别为______和______

[1]水平有限，疏漏难免，欢迎联系Shiyaowei040126@mail.ustc.edu.cn纠错或提出建议

二、计算题（40 分）（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

1. 求函数 $f(z)=\dfrac{z}{e^z+1}$ 在 $z=0$ 处泰勒（Taylor）展开前 5 项（即展开到 z^4 为止），并且给出所得幂级数的收敛半径.

2. 将函数 $f(z)=z^2\sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<+\infty\}$ 内展成罗朗（Laurent）级数.

3. 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin(z-1)}{(z^2-z)\sin z}\,\mathrm{d}z$.

4. 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z(1-\cos 2z)\sin 3z}{(1-e^{3z})^5}\,\mathrm{d}z$.

5. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\cos\theta)^2}$, $\quad(0<b<a)$.

6. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x$.

三、综合题（30 分）（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

1.（7 分）设函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析, 在有界用域 $C+D$ 上连续, 这里 C 为 D 的边界。证明：如果函数 $f(z)$ 没有零点, 并且对于 $z\in C$ 有 $|f(z)|=M(M>0$ 为常数 $)$, 那么存在实数 α 使得 $f(z)=Me^{\mathrm{i}\alpha}$.

2.（7 分）计算积分 $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|x|=R}\frac{z+a}{z-a}\frac{\mathrm{d}z}{z}$, $(|a|<R)$, 并且由此证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{\left|Re^{\mathrm{i}\theta}-a\right|^2}\,\mathrm{d}\theta=1.$$

3.（7 分）函数 $w=f(z)=\dfrac{3z-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}z-1}$ 把下半平面 $\operatorname{Im} z<0$ 变成复平面中的什么区域?（给出你的答案和论证过程）

4.（9 分）设 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$0<r<1$. 证明：

(1) $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=0,\quad(n\geq 1)$.

(2) 设 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则 $a_n=\dfrac{1}{\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{u(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z,(n\geq 1)$.

(3) $\overline{f(0)}=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$，其中 $|z_0|<r$.