

Homework 1

2022 年 9 月 24 日

6.

Hint : Venn diagram.

Sol. (1) 令 $a \wedge b$ 表示 $\min\{a, b\}$, 注意到 $P(AB) \leq P(A) \wedge P(B)$ 以及 $P(A) < P(B)$.

因此当 $A \subset B$ 时, $P(AB) = P(A) = 0.7$ 是最大的.

(2) 注意到

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B). \quad (1)$$

当 $P(A \cup B)$ 增加, $P(AB)$ 下降. 因为 $P(A) + P(B) > 1$, $P(A \cup B)$ 的最大值为 1. 当 $A \cup B = \Omega$ 时, $P(AB)$ 达到最小值 0.5.

常见错误: (1) 当 $A \subset B$ 时 $AB = B$;

(2) 认为 A, B 独立或者 $AB = \emptyset$ 时最小.

8.

Hint : (a) Venn Diagram; (b) A, B, C 至少发生一个即为 $A \cup B \cup C$.

Sol. 由于 $P(ABC) \leq P(AC) = 0$, ABC 是不可能事件. 根据容斥原理,

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) \\ &\quad + P(ABC) \\ &= 3/4. \end{aligned} \quad (2)$$

因此, A, B, C 至少发生一个的概率为 $3/4$.

12.

Sol. 欲求在哪一种赛制下甲获胜的概率更大.

(a) 三局两胜

$$\begin{aligned}\Pr(\{\text{甲获胜}\}) &= \Pr(\{\text{甲三局全胜}\}) + \Pr(\{\text{甲获胜两局}\}) \\ &= p^3 + 3p^2(1-p) = p^2(3-2p).\end{aligned}\quad (3)$$

(b) 五局三胜

$$\begin{aligned}\Pr(\{\text{甲获胜}\}) &= \sum_{i=3}^5 \Pr(\{\text{甲获胜}i\text{局}\}) \\ &= p^5 + 5p^4(1-p) + 10p^3(1-p)^2 \\ &= p^3(10-15p+6p^2).\end{aligned}\quad (4)$$

当 $p > 1/2$ 时, $p^3(10-15p+6p^2) > p^2(3-2p)$, 因此五局三胜制对甲更有利.

常见错误: 在计算五局三胜制甲获胜的概率时, 有遗漏或者有重复.

14.

Hint: 运用乘法原理和排列组合.

Sol. (1) 要求 $N > 2n - 1$. 先把人的顺序排好, 再用插空法在 $N - n + 1$ 个位置插入 n 个.

$$\Pr = \frac{A_{N-n+1}^n}{A_N^n}.\quad (5)$$

(2) 要求 n 是偶数. 先将 n 个人两两捆绑, 再使用上述思路.

$$\Pr = \frac{A_n^n C_{N-n+1}^{n/2}}{A_N^n}.\quad (6)$$

(3) 要求 $N \geq 2n - 1$. 如果 N 是奇数, 则中间座位可坐人也可不坐人, 如果 $N = 2n - 1$, 则中间座位必须坐人, 此时

$$\Pr = \frac{n A_{n-1}^{n-1} 2^{n-1}}{A_N^n},\quad (7)$$

如果 $N > 2n - 1$, 则

$$\Pr = \frac{A_{(N-1)/2}^n 2^n + n A_{(N-1)/2}^{n-1} 2^{n-1}}{A_N^n}. \quad (8)$$

如果 N 是偶数, 则

$$\Pr = \frac{A_{N/2}^n 2^n}{A_N^n}. \quad (9)$$

21.

Sol. 样本空间 $\Omega = \{(B, C), B, C = 1, \dots, 6\}$, 则

$$\begin{aligned} \Pr(\{\text{方程有实根}\}) &= \Pr(\{B^2 - 4C \geq 0\}) \\ &= \Pr(\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, C), (6, C)\}) \\ &= \frac{19}{36}, \end{aligned} \quad (10)$$

且

$$\Pr(\{\text{方程有重根}\}) = \Pr(B^2 - 4C = 0) = \frac{1}{18}. \quad (11)$$

常见错误: 遗漏(5,6)的情形.

22.

Sol. (1)

$$\Pr(\{8 \text{人在不同车站下车}\}) = \frac{A_{10}^8}{10^8}.$$

(2)

$$\Pr(\{8 \text{人在同一车站下车}\}) = \frac{C_{10}^1}{10^8}.$$

(3)

$$\Pr(\{8 \text{人中恰有3人在终点站下车}\}) = \frac{C_8^3 9^5}{10^8}.$$

常见错误: 先选出三个人, 认为剩下的5个人在剩下9个车站下车的种类数是 A_9^5 .