# 基于快速傅里叶变换和角谱理论的衍射仿真

少年班学院　PB22000251　张鸣轩

物理学院　PB22020603　涂婳

2024年1月1日

**摘要**

本文以光学中的菲涅尔衍射为主题，基于快速傅里叶变换使用Python模拟衍射现象，得到了给定衍射屏的像。再通过角谱理论，分析了自由光场下光的传播模拟，探究了矩孔衍射的两种模拟实现。

**关键词：**【快速傅里叶变换】,【菲涅尔衍射】,【角谱理论】

# 目录

# 1　背景介绍

菲涅尔在1815年与1818年进行了光的波动性的计算，并构想了光以球面波连续不断的传播出去。随后在对光的波动性的认识更加深刻后，得到了菲涅尔-基尔霍夫衍射公式。随着现代计算科学的发展，对于傅里叶变换这一信号分析方法，得到了离散傅里叶变换的计算方法。在计算菲涅尔衍射中，离散傅里叶变换的近似模拟可以很好的解决衍射问题。

# 2　原理介绍

## 2.1　离散傅里叶变换

通过傅里叶变换，我们可以将时域上的函数变换为频域上的函数：

$$F(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

因为计算机采集的信号在时域中式离散的，所以实际应用中函数为离散的函数$f_s(t)$，相对应的频域上的函数$F_s(t)$也是离散的。通过采样和时域离散化等近似，可以得到频域离散化的计算结果。设离散信号的表达式为：

$$x_s(t)=\sum_{n=0}^{N-1} x(t)\delta(t-nT_s)$$

离散信号的傅里叶级数：

$$X(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_0^T (\sum_{n=0}^{N-1} x(t)\delta(t-nT_s))e^{-jkw_0t}dt$$

利用狄拉克函数的性质，得到离散的频域函数：

$$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

其中$x[n]=x(nT_s)$,$X[k]=X(k\omega_0)T_s$

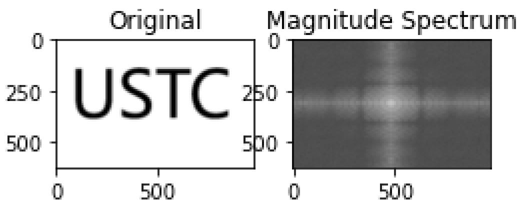


图1.离散傅里叶变换示意图

## 2.2 利用DFT与菲涅尔衍射积分的同构性模拟衍射

对于光波在空间中的自由传播，如何由已知平面上的光波复振幅分布，来获知后续空间中任意位置的光波复振幅，是光学的基本问题之一。
为此，我们构建以下情境：一束光线穿过一个孔径为$S'$的平面，在距离屏幕为d的时候，考虑在屏上的光场波函数。
该波函数可以由菲涅尔积分定义：

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = C\int_{S'}\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}cos(\theta)d^2r'$$

$$(C = \frac{k\Psi_0 e^{-itw}}{2\pi i})$$

基于菲涅尔近似，在角度$\theta$接近0度时（傍轴条件下），上式存在简化：

$$|r-r'| \approx z + \frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z}$$

此时，我们还可以假设$|r-r'| \approx d$ 于是菲涅尔积分变成：

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = R\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x',y')e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}e^{-\frac{ikx}{z}x'-\frac{iky}{z}y'}dx'dy'$$

其中：

$$R = \frac{k\Psi_0 e^{i(kz-tw)}}{2\pi iz}e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}}$$

$$f(x',y') = \begin{cases} 1, & (x',y') \in S' \\ 0, & (x',y') \notin S' \end{cases}$$

令$\mathcal{F}$为傅里叶变换，有计算公式：

$$\mathcal{F}[f(x',y')e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x',y')e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}e^{-\frac{ikx}{z}x'-\frac{iky}{z}y'}dx'dy'$$

恰与菲涅尔积分表达式积分部分相同，
从而上式可转换成傅里叶变换形式：

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = R\cdot\mathcal{F}[f(x',y')e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}]$$

综上，我们可以利用傅里叶变换来直接求解衍射屏上光场的波函数。

将以上内容写成复振幅形式，可得：

$$U(x,y,d)=\frac{e^{ikd}}{i\lambda d}e^{ik\frac{x^2+y^2}{2d}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U(x',y',0)e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)}e^{-\frac{ikx}{d}x'-\frac{iky}{d}y'}dx'dy'$$

$$=\frac{e^{ikd}}{i\lambda d}e^{ik\frac{x^2+y^2}{2d}}\mathcal{F}[U(x',y')e^{\frac{ik}{2d}(x'^2+y'^2)}]$$

另外，在菲涅尔衍射近似的基础上，还可以利用夫琅禾费近似，对二次相位因子再进一步进行近似，方法如下：

在菲涅尔衍射积分中，相位因子中存在x'与y‘（衍射屏上垂直方向的坐标）的二次项，若这一部分对相位的影响较小，即：

$$z\ll\frac{k}{2}(x'^2+y'^2)_{max}$$

此时可以忽略掉$e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}$项的影响，从而得到夫琅禾费近似的结果：

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=R\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x',y')e^{-\frac{ikx}{z}x'-\frac{iky}{z}y'}dx'dy'$$

$$R=\frac{k\Psi_0e^{i(kz-tw)}}{2\pi iz}e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}}$$

由于：

$$\mathcal{F}[f(x',y')]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x',y')^{-\frac{ikx}{z}x'-\frac{iky}{z}y'}dx'dy'$$

最终有：

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=R\cdot\mathcal{F}[f(x',y')]$$

写成复振幅形式,得：

$$U(x,y,d)=\frac{e^{ikd}}{i\lambda d}e^{ik\frac{x^2+y^2}{2d}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U(x',y',0)e^{-\frac{ikx}{d}x'-\frac{iky}{d}y'}dx'dy'$$

$$=\frac{e^{ikd}}{i\lambda d}e^{ik\frac{x^2+y^2}{2d}}\mathcal{F}[U(x',y')]$$

虽然上述夫琅禾费近似条件较为苛刻，但在透镜系统中可以很好地实现，进一步简化了运算。

## 2.3 利用角谱传播理论从频谱角度模拟衍射


图2.衍射光传播示意图

傅里叶光学中，构建了角谱传播理论，即从频谱的角度来分析光的传播规律。

其主要思路为，先对原光场进行傅里叶变换，得到其频谱后，结合亥姆霍兹方程，得到衍射位置光场的频谱，对其做傅里叶逆变换，即可得到衍射光场。

情境构造：已知z=0的平面光波（复振幅）分布为$U(x,y,0)$,求解当光传播z距离之后的光波（复振幅）分布。

对原光场进行傅里叶变换：

$$U(x,y,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A(f_x,f_y,0)e^{-i2\pi(f_x x+f_y y)}df_x df_y$$

其中$A(f_x,f_y,0)$表示在z=0平面上$U(x,y,0)$的频谱。

由于光是电磁波，且在自由空间中传播是无源的，故$U(x,y,0)$满足亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 U+k^2 U=0$$

此二阶微分方程可以利用积分变换求解如下：

由于衍射平面与xy平面平行，故我们考虑将$U(x,y,0)$在xy平面上进行傅里叶变换。

为体现与频率的关系，我们采取傅里叶变换：$\Phi x,y\Psi\leftrightarrow(f_x,f_y)$

$$\begin{cases}G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-i2\pi f_x}dx\\ g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)e^{i2\pi f_x}df\end{cases}$$

以及二维傅里叶变换：

$$\begin{cases}G(f_x,f_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)e^{-i2\pi(f_x x+f_y y)}dxdy\\ g(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(f_x,f_y)e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}df_x df_y\end{cases}$$

对$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+k^2U=0$进行二维傅里叶变换，得到：

$$-4\pi^2(f_x^2+f_y^2)G_z+\frac{d^2G_z}{dz^2}+k^2G_z=0$$

其中$G_z(f_x,f_y,z)$是$U(x,y,z)$经xy二维傅里叶变换后的结果，亦即：

$$\frac{d^2}{dz^2}G(f_x,f_y,z)+4\pi^2[\frac{1}{\lambda^2}-f_x^2-f_y^2]G(f_x,f_y,z)=0$$

此二阶微分方程的一个基元解为：

$$A(f_x,f_y,z)=A(f_x,f_y,0)e^{i2\pi z\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-f_x^2-f_y^2}}$$

从而我们得到了衍射面的频谱与初始频谱之间的关系，具体来说，主要是在不同的频率分量上引入了相位偏移。
其中具有传播的限制条件：$f_x^2+f_y^2<\frac{1}{\lambda^2}$,即光无法传播空间频率大于$\frac{1}{\lambda}$的频率。
对z距离下的频谱进行傅里叶逆变换：

$$U(x,y,z)=\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[U(x,y,0)]e^{i2\pi z\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-f_x^2-f_y^2}}\}$$

即可得到传播z距离后的光场复振幅分布：

$$U(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A(f_x,f_y,0)e^{i2\pi z\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-f_x^2-f_y^2}}circ(\frac{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}{\lambda})e^{-i2\pi(f_xx+f_yy)}df_xdf_y$$

该法未使用任何近似。

## 2.4 算法实现

**利用FFT变换图片到频域:**
本实验主要使用opencv.cv2库进行图像识别，使用numpy库中的np.fft.fft2()函数进行快速傅里叶变换，如图3,4，是采用了快速傅里叶变换后的频域函数图。

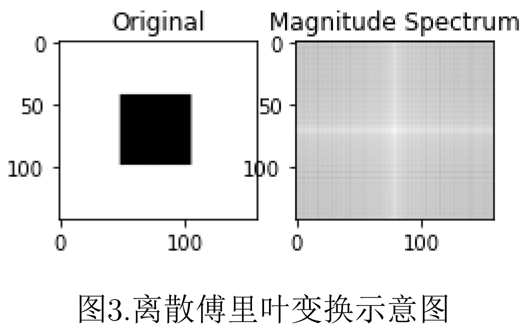


图3.离散傅里叶变换示意图

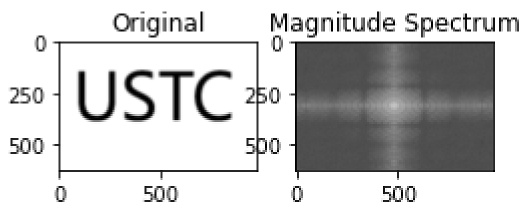

图4.离散傅里叶变换示意图

```
import cv2 as cv
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
img=cv.imread("text2.jpg",0)
A=img
fft_v = np.fft.fft2(img)
fft_v = np.fft.fftshift(fft_v)
fft_v=20*np.log(np.abs(fft_v))
plt.subplot(131),plt.imshow(img,"gray"),plt.title("Original")
plt.subplot(132),plt.imshow(fft_v,cmap='gray'),plt.title("Magnitude Spectrum")
plt.show()
```

图5.代码实现

**利用DFT与菲涅尔衍射积分的同构性模拟衍射:**

根据2.2节，菲涅尔衍射公式在近似后可表示为:

$$\mathrm{U(r,t) = R \cdot \mathcal{F}[f(x',y')e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}]}$$

$$\mathrm{\mathcal{F}[f(x',y')e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y')e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}e^{-\frac{ikx}{z}x'-\frac{iky}{z}y'}dx'dy'}$$

np.fft.fft2()可以进行傅里叶变换，但只可以处理离散情况，所以要对衍射屏进行分割，并假设可通光处为同一相位，同一振幅，即复振幅$\widetilde{U}=1$。不可通光处，$\widetilde{U}=0$。

如果将图片的长宽像素设为$L_x$和$L_y$，将他们划为等间距的$N_x$和$N_y$份，衍射屏的坐标可以表示为:

$$\mathrm{x'_{n_x} = \left\{-L_x + n_x\frac{2L_x}{N_x},\quad 0 \le n_x \le N_x - 1\right\}}$$

$$\mathrm{y'_{n_y} = \left\{-L_y + n_y\frac{2L_y}{N_y},\quad 0 \le n_y \le N_y - 1\right\}}$$

离散傅里叶变换表示为:

$$\mathrm{\mathcal{F}(u_x,u_y) = \sum_{n_x=0}^{N_x-1}\sum_{n_y=0}^{N_y-1} U(x'_{n_x},y'_{n_y})e^{-i2\pi u_x\frac{n_x}{N_x}-i2\pi u_y\frac{n_y}{N_y}}}$$

最后只需要乘$R(r,t)$就可以得到最后像的复振幅。

具体算法实现如下：

I. 设置参数，读入图片，通过像素数量计算分割为$N_x$和$N_y$份，计算出相应的坐标值。

II. 计算出函数$f(x',y')=U(x',y')e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}$，对其进行快速傅里叶展开，得到$\mathcal{FFT}(f)$。

III. 计算像屏上的函数$R(x,y)$，乘以$\mathcal{FFT}(f)$便得到像屏上的复振幅。

IV. 计算光强分布，输出图像。

```
import cv2 as cv
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
import math
img=cv.imread("text.jpg",0)
z0=1000
labda = 0.532e-3
k = 2*math.pi/labda
if np.size(img,0) < np.size(img,1):
    minl=np.size(img,0)
else:
    minl=np.size(img,1)
L0 = math.sqrt(labda*z0*minl)
xx = np.linspace(-np.size(img,1)/2,np.size(img,1)/2,np.size(img,1))
yy = np.linspace(-np.size(img,0)/2,np.size(img,0)/2,np.size(img,0))
X,Y = np.meshgrid(xx,yy)
X=X/L0
Y=Y/L0
F0=np.exp(1j*k*z0)/(1j*labda*z0)*np.exp(1j*k/2/z0*(X**2+Y**2))
F=np.exp(1j*k/2/z0*(X**2+Y**2))
img = img*F
F=np.fft.fftshift(np.fft.fft2(img))
F_field = F0*F
print(abs(F_field))
plt.imshow(abs(F_field),"gray")
```

图6.代码实现

**利用角谱传播理论从频谱角度模拟衍射:**

根据2.3节$U(x,y,z)=\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[U(x,y,0)]e^{i2\pi z\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-f_x^2-f_y^2}}\}$，设计算法如下：

1. 设置参数，读入图片，通过像素数量计算分割为$N_x$和$N_y$份，计算出相应的坐标值。

2. 计算出函数$f(x',y')=U(x',y')$，对其进行快速傅里叶展开，得到$\mathcal{FFT}(f)$。

3. 对频域函数进行判断，截断$f_x^2+f_y^2>\frac{1}{\lambda^2}$的部分。

4. 新的频域函数乘$e^{i2\pi z\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-f_x^2-f_y^2}}$，再进行一次傅里叶逆变换便得到像屏上的复振幅。

5. 计算光强分布，输出图像。

# 3 实验现象与数据处理

## 3.1 同构性模拟衍射实验现象

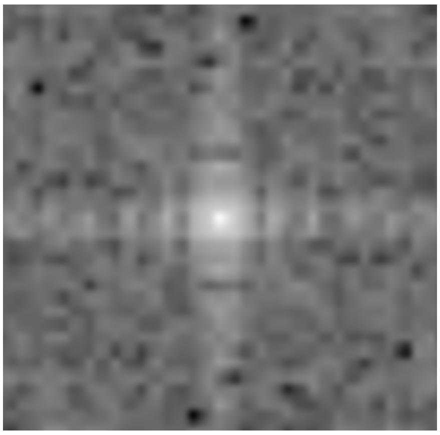

图7.矩孔衍射模拟

如图七所示，是利用DFT与菲涅尔衍射积分的同构性模拟矩孔衍射，但图像噪点较多，且实验现象不明显，仅能大致看到因为衍射而产生的间断亮暗衍射图样。分析实验判断可能是离散傅里叶变换是对图像内有限点采样模拟，在频域上的傅里叶函数并不能实现准确而产生较大误差。

## 3.2 角谱传播理论模拟衍射实验现象

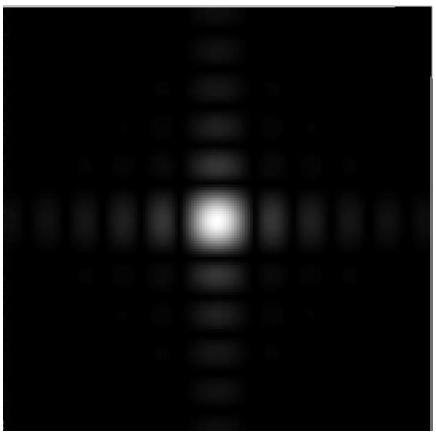

图8.矩孔衍射的角谱模拟

如图八，是利用角谱传播理论从频谱角度模拟衍射，因为角谱理论采用了较小的近似，且对高频部分进行了截断，所以实验现象较好。

# 4 展望

在本实验中，采用了快速傅里叶变换进行模拟，快速傅里叶变换在信号学，信息科学，计算机科学与固体物理等领域有较高应用价值，如密度泛函理论和图像识别都是其应用。其次，本实验还从矩孔衍射出发，探讨了多张不同图片的频谱展开，及利用其频谱展开进一步得到了衍射图样，是傅里叶光学的一种应用前景。

# 5 总结

I. 通过傅里叶变换，可以采用同构和角谱的方式来计算衍射，实验现象明显。

II. 通过快速傅里叶变换，可以得到给定图片的频域展开。

III. 矩孔衍射图像符合理论推导，出现了明暗相间的衍射图样。

**参考文献**

[1]《光学》赵凯华，钟锡华

[2]Contemporary Optical Image Processing with MATLAB ,Ting-Chung Poon

[3]Introduction to Computer Holography, Kyoji Matsushima, 2020

[4]Computational Fourier Optics a MATLAB tutorial (SPIE Tutorial Texts Vol. TT89)