线性代数习题课 1

陈思维

20220312

目录

一、第一章内容回顾 1
二、第一章作业题 1
三、第三章内容回顾 4
四、第三章作业题 4
五、补充题 6

一、第一章内容回顾

1. 向量的线性运算：集合+加法+数乘+8 条定律
向量的 8 条加法与数乘的定律在任意的线性空间中都成立！
2. 共线与共面、线性组合：定义线性相关与线性无关
注意：若一个向量可以表示为其余 n 个向量的线性组合，则这 n+1 个向量线性相关，反之不成立！
3. 仿射坐标系：不共面（线性无关）的向量可以成为空间的一组基
4. 数量积与向量积
5. 混合积与二重外积
混合积的几何含义为三个向量展开的平行六面体的有向体积，可以使用三阶行列式表示
6. 高维数组向量及维数
7. 复数与数域

二、第一章作业题

4.
分共线、共面、不共面的情况讨论
利用反证法，假设这些向量线性无关
证：
只需证明三维空间中四个向量一定线性相关即可，四个以上的情况只需将第五个开始的向量

的系数设为 0 即可。

设四个向量为$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}$.

若有两向量共线，不妨设为$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$，则存在两个不全为 0 实数$\lambda, \mu$，使得$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} + 0\boldsymbol{a_3} + 0\boldsymbol{a_4} = \boldsymbol{0}$，则这四个向量线性相关。

若有三向量共面，不妨设为$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$，则存在三个不全为 0 实数$\lambda, \mu, \nu$，使得$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} + \nu\boldsymbol{a_3} = \boldsymbol{0}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} + \nu\boldsymbol{a_3} + 0\boldsymbol{a_4} = \boldsymbol{0}$，则这四个向量线性相关。

若$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$不共面，由书上定理 1.2.1 得，存在三个不全为 0 实数λ, μ, ν，使得$\boldsymbol{a_4}$可以被表示为$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} + \nu\boldsymbol{a_3}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} + \nu\boldsymbol{a_3} - \boldsymbol{a_4} = \boldsymbol{0}$，则这四个向量线性相关。

综上，三维空间中任意四个向量一定线性相关。

对于四个以上的向量，设它们为$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n} (n \geq 5)$，由前面结论可得存在四个不全为 0 实数$\lambda, \mu, \nu, \rho$，使得$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} + \nu\boldsymbol{a_3} + \rho\boldsymbol{a_4} = \boldsymbol{0}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} + \nu\boldsymbol{a_3} + \rho\boldsymbol{a_4} + 0\boldsymbol{a_5} + \cdots + 0\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$，则这 n 个向量线性相关。

另证：（反证法）

假设$n (\geq 4)$个向量线性无关，则任意三个向量均线性无关，任取三个设为$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$，此时再取一个向量$\boldsymbol{a_4}$，由书上定理 1.2.1 得，存在三个不全为 0 实数λ, μ, ν，使得$\boldsymbol{a_4}$可以被表示为$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} + \nu\boldsymbol{a_3}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2} + \nu\boldsymbol{a_3} - \boldsymbol{a_4} = \boldsymbol{0}$，则这四个向量线性相关，与所有向量线性无关矛盾，因此结论成立。

19.

注意化简！注意$\theta = 2k\pi$的情况！

方法 1：分子分母同乘$2\sin\frac{\theta}{2}$，然后积化和差处理

$$2\cos k\theta \sin\frac{\theta}{2} = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\theta$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\sum_{k=0}^{n} 2\cos k\theta \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$2\sin k\theta \sin\frac{\theta}{2} = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \frac{\sum_{k=0}^{n} 2\sin k\theta \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

方法 2：利用欧拉公式，取实部和虚部得到两个式子的值

构造复数列$\left\{e^{ik\theta}\right\}_{k=0}^{n}$，求和可得：

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}} \frac{e^{-\frac{i(n+1)\theta}{2}} - e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

又由

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta$$

分离虚实部可得

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n\theta}{2}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

20.

利用$|z|^2=z\bar{z}$这条性质便于证明。

证：

$$\begin{aligned}|1+z_1\overline{z_2}|^2+|z_1-z_2|^2&=(1+z_1\overline{z_2})(1+\overline{z_1}z_2)+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\&=1+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2\\&=1+z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=(1+z_1\overline{z_1})(1+z_2\overline{z_2})\\&=(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)\end{aligned}$$

10.

解：

$$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=1+4*4+9-4*\sqrt{2}-4*3\sqrt{2}+2*\frac{3}{2}\sqrt{2}=26-13\sqrt{2}$$

$$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{26-13\sqrt{2}}$$

14.

解：

$$\overrightarrow{AB}=(-2,-2,-1),\overrightarrow{AC}=(1,2,2),\overrightarrow{AD}=(-1,-5,1)$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-2&-2&-1\\1&2&2\\-1&-5&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}$$

三、第三章内容回顾

1. Gauss 消元法：初等变换不改变线性方程组的解
初等行变换：把一行的倍数加到另一行上；互换两行的位置；用一个非 0 数乘某一行
2. 矩阵表示
任何一个矩阵都可以经过一系列初等行变换化为阶梯形矩阵
3. 线性方程组解的属性
最简形式中$d_{r+1} \neq 0$时，方程组无解
$d_{r+1} = 0$且$r = n$时，方程组有唯一解
$d_{r+1} = 0$且$r \neq n$时，方程组有无穷多解
齐次的情况：初等行变换后非 0 行数$r < n \Leftrightarrow$该方程组有非 0 解
4. 通解和特解

$$x = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_{n-r}\alpha_{n-r} + \beta$$

5. 更多问题
如何从原方程组直接判别解的存在性、唯一性及多解性？
如何从原方程组直接确定 r？
r 是否唯一？
解集的大小与 r 有何关系？
直接从原方程获得公式解。

四、第三章作业题

这章作业的主要问题还是各种算错数（包括题目抄错），以及正负号错误等问题。
建议：1.把原题抄两遍，检查是否有误；2.把求出来的通解中的$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$代入方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$中，$\beta$代入方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$中验证。

1.
(2)解：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令$x_4 = t$，则$x_3 = 2t + 6, x_2 = t + 3, x_1 = -8$

写成向量形式为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-8\\3\\6\\0\end{pmatrix}$

(4)解：

$$\begin{pmatrix}2&4&-6&1&2\\1&-1&4&1&1\\-1&1&-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&4&1&1\\2&4&-6&1&2\\-1&1&-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&4&1&1\\0&6&-14&-1&0\\0&0&3&2&1\end{pmatrix}$$

令 $x_4=t$， 则 $x_3=-\frac{2}{3}t+\frac{1}{3},x_2=\frac{7}{3}\left(-\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}t=-\frac{25}{18}t+\frac{7}{9},x_1=-\frac{25}{18}t+\frac{7}{9}-4\left(-\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}\right)-t+1=\frac{5}{18}t+\frac{4}{9}$

写成向量形式为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{18}\\-\frac{25}{18}\\-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\\frac{7}{9}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

(7)解：

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1&0\\1&-1&-2&-1&0&0\\4&-2&6&3&-4&0\\2&4&-2&4&-7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1&0\\0&-2&-2&2&1&0\\0&-6&6&15&0&0\\0&2&-2&10&-5&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1&0\\0&-2&-2&2&1&0\\0&0&12&9&-3&0\\0&0&-4&12&-4&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1&0\\0&-2&-2&2&1&0\\0&0&1&-3&1&0\\0&0&4&3&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1&0\\0&-2&-2&2&1&0\\0&0&1&-3&1&0\\0&0&0&15&-5&0\end{pmatrix}$$

令$x_4=t$，则有$x_5=3t,x_3=0,x_2=\frac{5}{2}t,x_1=\frac{7}{2}t$

写成向量形式为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\0\\1\\3\end{pmatrix}t$$

P68-2

(1) 解：

$$\begin{pmatrix}3&2&1&2\\1&-1&-2&-3\\a&-2&2&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2&-3\\3&2&1&2\\a&-2&2&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2&-3\\0&5&7&11\\0&a-2&2a+2&3a+6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-2&-3\\0&5&7&11\\0&0&\frac{3}{5}a+\frac{24}{5}&\frac{4}{5}a+\frac{52}{5}\end{pmatrix}$$

a=-8 时，第三行系数项均为 0，而常数项为 4，此时方程组无解，其余时候均有解。
通解为：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{12}{3a+24}\\x_2=\dfrac{a-20}{3a+24}\\x_3=\dfrac{4a+52}{3a+24}\end{cases}$$

(2)解：

$$\begin{pmatrix}1&-4&2&-1\\-1&11&-1&3\\3&-5&7&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-4&2&-1\\0&7&1&2\\0&7&1&a+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-4&2&-1\\0&7&1&2\\0&0&0&a+1\end{pmatrix}$$

由于第三行的系数项均为 0，故 a+1=0 时，即 a=-1 时，该线性方程组有解
通解为

$$\begin{cases}x_1=18t-5\\x_2=t\\x_3=2-7t\end{cases}$$

写成向量形式为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\1\\-7\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix}$

五、补充题

1.2019SP-M-3

$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$，$\lambda$为何值时，该方程组有唯一解、无穷多解、无解？

解：

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\1 & \lambda & 1 & -2\\1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & -2\\\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & -2\\0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 3\lambda-3\\0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & -2\\0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0\\0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 3\lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & -2\\0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0\\0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 3\lambda-3\end{pmatrix}$$

$2-\lambda-\lambda^2=0$时，$\lambda=1$或$\lambda=-2$

$\lambda=-2$时，方程组为$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\0 & 3 & -3 & 0\\0 & 0 & 0 & -9\end{pmatrix}$，此时方程组无解。

$\lambda=1$时，方程组为$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，令$x_1=t_1,x_2=t_2$，则$x_3=-2-t_1-t_2$, 通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t_2+\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$$

λ为其他值时，$x_3=-\frac{3}{\lambda+2},x_2=-\frac{3}{\lambda+2},x_1=-2+\frac{3}{\lambda+2}+\frac{3\lambda}{\lambda+2}=\frac{\lambda-1}{\lambda+2}$

2.2018SP-M-3

已知$\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6\\4x_1-x_2-x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-x_3=3\end{cases}$与$\begin{cases}x_1+ax_2-x_3-x_4=-5\\bx_1-x_3-2x_4=-3\\x_3-2x_4=1-c\end{cases}$ 同解，求 a，b，c 的值。

解：

化简第一个方程得

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2 & -6\\4 & -1 & -1 & -1 & 1\\3 & -1 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2 & -6\\0 & -5 & -1 & 7 & 25\\0 & -4 & -1 & 6 & 21\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2 & -6\\0 & -5 & -1 & 7 & 25\\0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1\end{pmatrix}$$

令$x_4=t,x_3=2t-5$，则$x_2=t-4,x_1=t-2$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}$$

由于以上两方程组同解，则$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$为$\begin{cases}x_1+ax_2-x_3-x_4=0\\bx_1-x_3-2x_4=0\\x_3-2x_4=0\end{cases}$的一组解，$\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}$为

$\begin{cases}x_1+ax_2-x_3-x_4=-5\\bx_1-x_3-2x_4=-3\\x_3-2x_4=1-c\end{cases}$ 的一组特解。

代入得

$$\begin{cases}1+a-3=0\\ b-2-2=0\\ -5=1-c\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a=2\\ b=4\\ c=6\end{cases}$$

3. 求解下面的线性方程组：

$$\begin{cases}(1+a_1)x_1+x_2+\cdots+x_n=b_1\\ x_1+(1+a_2)x_2+\cdots+x_n=b_2\\ \cdots\\ x_1+x_2+\cdots+(1+a_n)x_n=b_n\end{cases}$$

解：
令$y=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则原方程组可写为

$$\begin{cases}y+a_1x_1=b_1\\ y+a_2x_2=b_2\\ \cdots\\ y+a_nx_n=b_n\end{cases}$$

则有

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1-y}{a_1}\\ x_2=\dfrac{b_2-y}{a_2}\\ \cdots\\ x_n=\dfrac{b_n-y}{a_n}\end{cases}$$

相加得

$$y=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}y$$

令$s=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$，则$y=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}$

$$x_i=\frac{b_i}{a_i}-\frac{1}{a_is}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j}\,(i=1,2,\dots,n)$$

4. 求解下面的线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = b_1 \\ nx_1 + x_2 + \cdots + (n-1)x_n = b_2 \\ \cdots \\ 2x_1 + 3x_2 + \cdots + x_n = b_n \end{cases}$$

解：

将 n 个方程相加可得$\frac{n(n+1)}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_j$

令$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} b_j$

从第 i 个方程减去第 i+1 个方程(i=1,⋯,n-1)得

$$x_1 + \cdots + (1-n)x_i + \cdots + x_n = b_i - b_{i+1}$$

$$y - nx_i = b_i - b_{i+1}$$

$$x_i = \frac{1}{n}(y - b_i + b_{i+1}) = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} b_j\right) - b_i + b_{i+1}\right)$$

$$x_n = \frac{1}{n}(y - b_n + b_1) = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} b_j\right) - b_n + b_1\right)$$

注：利用求解线性方程组求矩阵的逆：

若n阶方阵A可逆，则对于线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解$\boldsymbol{x}$有$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$，则可令$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$，并求解方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，解得$x_i = k_{i1}b_1 + k_{i2}b_2 + \cdots + k_{in}b_n$，此处$k_{ij}$即为$A^{-1}$的第$(i,j)$项。