# 中国科学技术大学 2021 - 2022 学年第一学期

# 复变函数 A　考试试题[1]

## 一、填空题（30 分）

**1.** $\mathrm{Ln}\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}=$________________________

**2.** 曲线 $|z-1|=1$ 在函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 下的像为（写出表达式）________________________

**3.** 若函数 $f(z)=my^3+nx^2y+\mathrm{i}\left(x^3+lxy^2\right)$ 是复平面上的解析函数，那么实数常数 $m,n,l$ 值分别为____________

**4.** 如果函数 $f:D\to G$ 是区域 $D$ 到区域 $G=\{w\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,w>0\}$ 的解析函数, 那么函数 $\arg f(z)$ ____（填写"是"或"否"）为调和函数.

**5.** 设 $u(x,y)=y^2-x^2+2021y$, 那么它的共轭调和函数 $v(x,y)$ 为________________________

**6.** 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 $R$, 那么级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^n-1\right)a_nz^n$ 的收敛半径为________________________

**7.** 设 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{3}{z-2}}}{z\left(1-e^{-z}\right)}$, 给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 $\infty$），并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）:

____________________________________________________________________

____________________________________________________________________

**8.** $\mathrm{Res}\left(z^3\cos\dfrac{1}{z-2},2\right)=$________________________

设 $n$ 为正整数, 那么 $\mathrm{Res}\left(z^n\sin\dfrac{1}{z},0\right)=$________________________

**9.** 方程 $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$ 在区域 $|z|<1$ 内根的个数为________________________

[1]水平有限，疏漏难免，欢迎联系Shiyaowei040126@mail.ustc.edu.cn纠错或提出建议

## 二、计算题（40 分）（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

**1.** 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ 在 $z=0$ 处泰勒（Taylor）展开，并且给出所得幂级数的收敛半径.

**2.** 将函数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)\left(z^2+1\right)}$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$ 内展成罗朗（Laurent）级数.

**3.** 设 $D=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>-\dfrac{1}{2}\right\}$, 设 $\gamma$ 为区域 $D$ 内从 0 到 1 的不经过 $i$ 任意简单曲线, 计算积分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$.

**4.** 计算积分 $\displaystyle\int_C \frac{e^z\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}$，其中 $C$ 为不过点 0 和 1 的简单闭曲线.

**5.** 计算积分 $\displaystyle\int_0^\pi \cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x$.

**6.** 利用留数计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

## 三、综合题（30 分）（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

**1.** 利用拉氏（Laplace）变换求解微分方程:

$$\begin{cases} y'(t)-4y(t)+4\displaystyle\int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

**2.** 设 $f:D\to\mathbb{C}$ 为区域 $D$ 内的解析函数，$\gamma$ 为 $D$ 内简单闭曲线，其内部包含于 $D$. 设 $a$ 为 $f(z)$ 在 $\gamma$ 内部的 $n$ 阶零点，$b$ 为 $f(z)$ 在 $\gamma$ 内部的 $m$ 阶极点，$f(z)$ 在 $\gamma$ 内除了 $b$ 外没有其它奇点，在 $\gamma$ 上没有零点和奇点. 证明:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\sin z\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}(n\sin a-m\sin b).$$

**3.** 求一保形变换 $w=f(z)$，将区域 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z-1|>1,|z|<2\}$ 映为单位圆盘 $|w|<1$，并且满足 $f(-1)=0$.（请画出必要的示意图）

**4.** 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且满足 $\left|f\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\le 2,\ 0\le\theta\le\pi;\ \left|f\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\le 3,\ \pi\le\theta\le 2\pi$. 证明:

$$|f(0)|\le\sqrt{6}$$