Ex 6.1 3 Sol. 前一部分证明过程参见第40讲(三)(1).

(1) 仿照上述证明思路. 可化作 $\frac{dv}{du}=-\frac{v+u}{v-u}$ (令 $u=x+2$, $v=y+1$), 由 e.g. 6.1.3 结论得通解为 $\sqrt{u^2+v^2}=Ce^{\arctan\frac{v}{u}}$ $(C>0)$, 代回得原方程通解为 $\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}=Ce^{\arctan\frac{y+1}{x+2}}$ $(C>0)$.

(2) 仿照上述证明思路, 令 $z=x+2y$. 可化为 $\frac{dz}{dx}=\frac{5z+7}{z+1}$. $z=-\frac{7}{5}$ 成立, 即特解 $x+2y+\frac{7}{5}=0$. 而 $5z+7\neq0$ 时, 有 $\frac{z+1}{5z+7}dz=dx$. 两边同时积分得 $\frac{1}{5}z-\frac{2}{25}\ln|5z+7|=x+C_1$. 化简得 $5y-10x-\ln|5x+10y+7|=C$ $(C=5C_1)$. 因此通解为 $5y-10x-\ln|5x+10y+7|=C$, 特解为 $5x+10y+7=0$. #

4. Sol. (5) 该题为 $n=2$ 的伯努利方程. 特解 $y=0$; 原式化作 $y^{-2}\frac{dy}{dx}-y^{-1}\tan x=\cos x$, 令 $z=y^{-1}$ 得 $\frac{dz}{dx}+z\tan x=-\cos x$, 由一阶线性方程通解公式, 得 $z=$

$$e^{-\int\tan x dx}\left(\int\cos x\cdot e^{\int\tan x dx}dx+C\right)=e^{\ln|\cos x|}\left(C+\int\cos x\cdot e^{-\ln|\cos x|}dx\right)$$

$\cos x>0$ 时, $z=(C+x)\cos x$; $\cos x<0$ 时 $z=(C-x)\cos x$.

综上, 通解为 $z=(C-x)\cos x\Rightarrow y=\frac{1}{(C-x)\cos x}$; 特解 $y=0$.

(6) 该题为 $n=2$ 的伯努利方程. 特解为 $y=0$; $y\neq0$ 时原式化作 $y^{-2}\frac{dy}{dx}-y^{-1}\sec x=\sin x-1$. 令 $z=y^{-1}$, 则有 $\frac{dz}{dx}+z\sec x=1-\sin x$.

由一阶线性方程通解公式. $z=e^{-\int \sec x dx}\left(\int(1-\sin x)e^{\int \sec x dx}dx+C\right)$

$=\frac{1}{\sec x+\tan x}\cdot\left[\int\left(\sec x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)dx+C\right]=\frac{\cos x}{\sin x+1}(\sin x+C)$,

因此 $y=\frac{\sin x+1}{\cos x(\sin x+C)}$ 为通解；特解 $y=0$. #

8. Sol. 设曲线方程为 $y=y(x)$. 由题意，$y(2)=3$. 对曲线任一点 (x_0,y_0),

(切线与x轴交点的横坐标恰为切点横坐标2倍)

切线方程为 $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$. 令 $y=0$ 得 $x_0-\frac{y_0}{y'(x_0)}=x=2x_0$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$.

因此 $y=y(x)$ 满足方程 $\frac{y}{y'}=-x$，即 $\int_3^y\frac{dy}{y}=-\int_2^x\frac{dx}{x}$，因此

$\ln\frac{y}{3}=-\ln\frac{x}{2}\Rightarrow y=\frac{6}{x}$. #

9. Sol. 由于 $f(x)$ 连续，故 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, s.t. $F'(x)=f(x)$. 并且由

Newton-Leibniz 公式，$\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$. 由于 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$,

故 $F'(x)=F(x)-F(0)\Leftrightarrow F'(x)-F(x)=-F(0)$. 由一阶线性方程通解

公式，$F(x)=e^{-\int -1dx}\cdot\left(\int -F(0)\cdot e^{\int -1dx}dx+C\right)=Ce^x-F(0)$. 因此

$f(x)=F'(x)=Ce^x$, $C\in\mathbb{R}$. #

10. Sol. Note: 规定 $k>0$. 由已知量，$\begin{cases}x'(t)=-kx(t)\\x(0)=a\end{cases}$. 分离

变量，$\frac{dx}{x}=-kdt$，积分得 $\int_a^x\frac{dx}{x}=-k\int_0^t dt\Rightarrow\ln\frac{x}{a}=-kt\Rightarrow x(t)=ae^{-kt}$. #

12. Sol. (2) $y''=\frac{y'}{x}+x \Leftrightarrow y''-\frac{1}{x}y'=x$. 由一阶微分方程通解，得 $y'=e^{\int\frac{1}{x}dx}[\int xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C]=x(x+C_1)$. 故 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$，即 $y=\frac{1}{3}x^3+Cx^2+C_2$，$C$，$C_2$无关，为任意常数.

(3) $y''=y'+x \Leftrightarrow y''-y'=x$. 代入公式得 $y'=e^{-\int(-1)dx}[\int xe^{\int -1dx}dx+C]$
$=Ce^x-x-1$，故 $y=Ce^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_1$，$C$,$C_1$无关，为任意常数.

(4) 记 $y'=u$，则 $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$. 于是原方程化作
$u\frac{du}{dy}+u^2=2e^{-y}$. $u=0$不成立；$u\neq 0$时即为 $\frac{du}{dy}+u=2e^{-y}\cdot u^{-1}$，为$u$关于$y$的$n=-1$的伯努利方程. 令 $z=u^2$，则方程化为
$\frac{dz}{dy}+2z=4e^{-y}$，故 $z=4e^{-y}+Ce^{-2y}$；因此 $u=\pm\sqrt{4e^{-y}+Ce^{-2y}}$，

再由 $u=y'$，得 $\int\frac{dy}{\sqrt{4e^{-y}+Ce^{-2y}}}=\pm\int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{4e^y+C_1}=\pm(x+C_2)$，

故 $y=\ln(x^2+C_1'x+C_2')$，C_1',C_2'为任意常数.

另解一：由观察可得 $(e^y)''=[y''+(y')^2]e^y$，因此原方程即为
$(e^y)''=2 \Rightarrow y=\ln(x^2+C_1x+C_2)$.

另解二：设 $u=e^y \Rightarrow y'=\frac{1}{u}u'$，$y''=-\frac{(u')^2}{u^2}+\frac{1}{u}u''$，代入原方程得

$u''=2$，以下与另解一类似.

13. Sol. (2) 令 $u=y'$，仿照 (2)(2) 思路可得 $u'=u\frac{du}{dy}$，故 $y^3\cdot u\frac{du}{dy}=-1 \Leftrightarrow$

$\frac{du}{dy}=-\frac{1}{y^3u} \Leftrightarrow \int_0^u u\,du=-\int_1^y \frac{dy}{y^3}$，因此 $\frac{1}{2}u^2=\left(\frac{y^{-2}}{-2}\right)\Big|_y^1 \Rightarrow$

$u^2=y^{-2}-1 \Leftrightarrow (y')^2=\frac{1-y^2}{y^2}$. 故 $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \Rightarrow \int_1^y \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\int_1^x dx$

$\Rightarrow -\sqrt{1-y^2}=\pm(x-1) \Rightarrow y=\pm\sqrt{2x-x^2}$. 又由于 $y(1)=1$，故 $y=-\sqrt{2x-x^2}$

舍去，而对 $y=\sqrt{2x-x^2}$，$y(1)=1$，$y'(1)=0$. 故特解为 $y=\sqrt{2x-x^2}$. #

Ex 6.2 1 Sol. ~~(1)~~ 由 Liouville 公式，在有一特解 $y_1(x)$ 情况下，另一特解

$$y_2(x)=y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}\,dx.$$

(1) $y_1=\frac{\sin x}{x}$. $y_2=\frac{\sin x}{x}\int \frac{x^2}{\sin^2 x} e^{-\int \frac{2}{x}dx}\,dx=\frac{\sin x}{x}\int \csc^2 x\,dx=$

$\frac{\sin x}{x}\cdot(-\cot x)=-\frac{\cos x}{x}$. 故通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\frac{\sin x}{x}+$

$C_2\frac{\cos x}{x}$. $C_1, C_2\in\mathbb{R}$.

(2) $y''\sin^2 x=2y \Leftrightarrow y''-\frac{2}{\sin^2 x}y=0$. $y_1=\cot x$, $y_2=\cot x\cdot\int \tan^2 x\,dx=$ $1-x\cot x$，故通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\cot x+C_2(1-x\cot x)$，$C_1,C_2\in\mathbb{R}$

(3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \Rightarrow y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{2}{1-x^2}y=0$. $y_1=x$, $y_2=$ $x\cdot\int\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\int-\frac{2x}{1-x^2}dx}dx=\frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}-1$. 故通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2=$ $C_1x+C_2\left(x\ln\frac{1+x}{1-x}-2\right)$，$C_1,C_2\in\mathbb{R}$. #

2\. Sol. (1) $y_1=x$ 为一特解. 则化简原方程，得 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0$，$y_2=$ $x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int-\frac{2}{x}dx}dx=x^2$，故通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1x+C_2x^2\ (x\neq0)$，? $C_1,C_2\in\mathbb{R}$. (PS：$y_2=x^2$ 亦可观察得出，但本题要求"观一求通")

(2) $y_1=x+1$ 为一特解. 化简原方程，得 $y''-\frac{x+1}{x}y'+\frac{1}{x}y=0$，$y_2=(x+1)\cdot$ $\int\frac{1}{(x+1)^2}e^{-\int-\frac{x+1}{x}dx}dx=(x+1)\cdot\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=e^x$，故通解为 $y=$ $C_1y_1+C_2y_2=C_1(x+1)+C_2e^x$，$C_1,C_2\in\mathbb{R}$. (与上题类似)

3. Sol. 方法一：直接化作一阶线性微分方程.

记 $y'=u$，则 $y''=u'$，原方程化作 $u'+\frac{2x}{1+x^2}u=\frac{6x^2+2}{1+x^2}$，因此

$$u=e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int\frac{6x^2+2}{1+x^2}e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C\right]=\frac{1}{x^2+1}\left[\int(6x^2+2)dx+C_1\right]$$

$=2x+\frac{C_1}{x^2+1}$. 从而得 $y=\int\left(2x+\frac{C_1}{x^2+1}\right)dx=x^2+C_1\arctan x+C_2$,

为方程通解. 将 $y(-1)=0$, $u(-1)=y'(-1)=0$ 代入，得 $\begin{cases}1-\frac{\pi}{4}C_1+C_2=0\\-2+\frac{C_1}{2}=0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}C_1=4\\C_2=\pi-1\end{cases}\Rightarrow$ 特解为 $y=x^2+4\arctan x+\pi-1$.

方法二：非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特解

解方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$，得 $y_h=C_1\arctan x+C_2$. 故原方程

的通解 $y=y_h+y_1=C_1\arctan x+C_2+x^2$，以下与法一~~类似~~相同. #

4. Sol. (1) 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-1=0$，解 $\lambda_1=1+\sqrt{2}$，$\lambda_2=1-\sqrt{2}$.

故通解为 $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$.

(2) 特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+2=0$，解为 $\lambda_1=-1+i$，$\lambda_2=-1-i$；故通解

为 $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

(3) 特征方程为 $\lambda^2+\lambda-6=0$，解为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$，故通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$.

#

5. Sol. (1) 特解 $y=\frac{8}{3}\sin\frac{x}{2}$.

(2) 特解 $y=(x+3)e^{2x}$.

(详见附图)

9. Sol. (1) 特征方程为 $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$. 解得 $\lambda=-1$ (三重), 因此通解为 $x=(C_0+C_1t+C_2t^2)e^{-t}$.

(2) 特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$, 解得 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$, 因此通解为 $x=C_1e^{2t}+C_2\cos t+C_3\sin t$.

(3) 特征方程为 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$. 解得 $\lambda_1=\lambda_2=i$, $\lambda_3=\lambda_4=-i$. 因此通解为 $x=(C_1+C_2t)\cos t+(C_3+C_4t)\sin t=C_1\cos t+C_3\sin t+C_2t\cos t+C_4t\sin t$. (参考 lect 40 Page 9, (五)(2))

#