Homework 5

2022 年 10 月 12 日

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = a(b + \arctan x)(c + \arctan y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) 确定常数 a, b, c;

(2) 求 $P(X > 0, Y > 0)$;

(3) 求 X 和 Y 的边缘密度函数.

Sol.

(1) 令 $x \to -\infty$, 由 $F(x,y) \to 0$ 可知 $b = \pi/2$. 同理可得 $c = \pi/2$. 再由 $x, y \to \infty$, $F(x,y) \to 1$ 知 $a = 1/\pi^2$.

(2) 分别令 $x \to \infty$ 和 $y \to \infty$, 得 X, Y 的边缘分布

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right);$$
$$F_Y(y) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan y + \frac{\pi}{2}\right);$$

将区域看成一个 $(0, \infty) \times (0, \infty)$ 的矩形, 则

$$P(X > 0, Y > 0) = 1 - F_X(0) - F_Y(0) + F(0,0) = 1/4.$$

(3) 对上述边缘分布求导数即得边缘密度函数

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

常见错误: (a) 第 (2) 题认为 $P(X > 0, Y > 0) = 1 - F(0,0)$;

(b) 第 (3) 题遗漏或者求的是边缘分布.

11. 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$;

(2) 求条件概率 $P(X\leq 1|Y\leq 1)$.

Sol..

(1) X 的边缘密度为

$$f(x)=\int_0^x e^{-x}dy=xe^{-x}I(x>0),$$

从而条件密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{x}I(0<y<x).$$

(2) 先求

$$P(X\leq 1,Y\leq 1)=\int_0^1\int_y^1 e^{-x}dxdy=1-2e^{-1};$$
$$P(Y\leq 1)=\int_0^1\int_y^\infty e^{-x}dxdy=1-e^{-1}.$$

再由条件概率的公式得 $P(X\leq 1|Y\leq 1)=(1-2e^{-1})/(1-e^{-1})$.

常见错误: 第 (2) 题求成了 $P(X\leq 1,Y\leq 1)$ 或者直接对 $f(x|y)$ 积分.

16. 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2<R^2, \\ 0, & x^2+y^2\leq R^2. \end{cases}$$

(1) 求 c 的值;

(2) 求 (X,Y) 落在圆 $\{(x,y):x^2+y^2\leq r^2\}$ $(r<R)$ 内的概率.

Sol.

(1) 令 $X=T\cos\Theta$ 和 $Y=T\sin\Theta$, 其中 $0\leq T\leq R$ 和 $0\leq\Theta\leq 2\pi$, 由密度变换公式, (T,Θ) 的联合密度函数为

$$f(t,\theta)=c(R-t)t,\quad 0\leq t\leq R, 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

易得 $c=3/\pi R^3$.

(2) 由上 (T,Θ) 的联合密度函数得

$$\Pr = \int_0^{2\pi}\int_0^r f(t,\theta)dtd\theta = \frac{3r^2}{R^2} - \frac{2r^3}{R^3}.$$

常见错误: 积分求错.

17. 设 (X,Y) 是二维随机变量, X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

在给定 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下, Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$;

(2) 求 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$.

Sol.

(1) 由条件密度的定义,

$$f(x,y) = \frac{9y^2}{x} I(0 < y < x < 1).$$

(2) 对上面的联合密度函数关于 x 求积分, 即得

$$f_Y(y) = -9y^2 \ln y I(0 < y < 1).$$

18. 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x) = xe^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$, 而随机变量 Y 服从 $(0,X)$ 上的均匀分布, 求

(1) (X,Y) 的联合分布函数;

(2) 随机变量 Y 的分布函数.

Sol.

(1) 给定 $X = x$ 下 Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} I(0 < y < x),$$

因此联合密度为

$$f(x,y) = e^{-x} I(0 < y < x).$$

联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\int_0^y\int_s^x e^{-t}dtds=1-e^{-y}-ye^{-x}, & 0<y<x;\\ \int_0^x\int_s^x e^{-t}dtds=1-e^{-x}-xe^{-x}, & 0<x\le y;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 对上述联合分布函数, 令 $x\to\infty$, 得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

常见错误: 只求了密度函数, 没有求联合分布函数和分布函数.