Homework 9

2022 年 11 月 9 日

19. 设二维随机变量(X,Y)服从二元正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2,\rho)$, 其中$\mu_1=\mu_2=1$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=0.5$, $\rho=0.5$, 记

$$Z=|X-Y|,\ U=\max\{X,Y\},\ V=\min\{X,Y\}.$$

(1) 求Z的密度函数与期望$E(Z)$;

(2) 分别求数学期望$E(U)$和$E(V)$.

Sol.

(1) 随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{4}{3}[(x-1)^2-(x-1)(y-1)+(y-1)^2]\right\},$$

而Z的分布函数为

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-z+x}^{z+x}f(x,y)dydx.$$

对z求导数, 得到Z的密度函数

$$\begin{aligned}
f(z)=&\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z+x)+f(x,-z+x)dx\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{4}{3}[(x-1)^2-(x-1)(z+x-1)+(z+x-1)^2]\right\}dx\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{4}{3}[(x-1)^2-(x-1)(-z+x-1)+(-z+x-1)^2]\right\}dx\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{4}{3}[x^2-x(z+x)+(z+x)^2]\right\}dx\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{4}{3}[x^2-x(-z+x)+(-z+x)^2]\right\}dx\\
=&\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-z^2\right\},\ z>0.
\end{aligned}$$

从而易得$E(Z)=1/\sqrt{\pi}$.

(2) 注意到$U-V=Z$ 且 $U+V=X+Y$, 因此

$$E(U)-E(V)=E(Z)=1/\sqrt{\pi},$$
$$E(U)+E(V)=E(X)+E(Y)=2.$$

所以$E(U)=1+1/(2\sqrt{\pi})$和$E(V)=1-1/(2\sqrt{\pi})$.

易错点: 没有注意到简易性质导致计算十分复杂

31. 掷两颗均匀骰子, 以X表示第一颗骰子掷出的点数, Y表示两颗骰子掷出的点数中的最大值.

(1) 求X,Y的数学期望与方差;

(2) 求$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Sol.

(1) 令(X,V)表示两颗骰子的点数, 则X,V独立且$\Pr(X=i,V=j)=1/36,\ i,j=1,\cdots,6$. 易得$E(X)=3.5$且$\mathrm{Var}(X)=35/12$. 由$Y=\max\{X,V\}$,

$$P(Y=k)=P(X=k,V<k)+P(X<k,V=k)+P(X=V=k)=\frac{2k-1}{36}.$$

从而$E(Y)=\sum_{k=1}^{6}k(2k-1)/36=161/36$和$\mathrm{Var}(Y)=2555/1296$.

(2) 随机变量(X,Y)的联合分布为

$$P(X=i,Y=j)=\begin{cases}\frac{i}{36}, & i=j;\\ \frac{1}{36}, & i<j.\end{cases}$$

从而$E(XY)=\sum_{1\le i\le j\le 6}ijP(X=i,Y=j)=154/9$ 且$\mathrm{Cov}(X,Y)=35/24$.

32. 设随机变量X,Y相互独立, 具有共同分布$N(\mu,\sigma^2)$. 设α,β为两个常数.

(1) 求$\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)$;

(2) 当α,β取何值时,$\alpha X+\beta Y$与$\alpha X-\beta Y$相互独立?

Sol.

(1)先推导一下$\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=&E[(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)]\\ &-E[\alpha X+\beta Y]E[\alpha X-\beta Y]\\ =&\alpha^2E[X^2]-\beta^2E[Y^2]\\ &-\{\alpha^2(E[X])^2-\beta^2(E[Y])^2\}\\ =&\alpha^2\mathrm{Var}(X)-\beta^2\mathrm{Var}(Y)\end{aligned}$$

注意上式与X,Y的分布无关, 也与X,Y是否独立无关!

在此题中, 由于$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=\sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$.

(2) 由于X,Y相互独立且都服从正态分布, 它们的线性组合也服从正态分布, 因此其相关性等价于独立性. 当$\alpha^2=\beta^2$时, $\alpha X+\beta Y$和$\alpha X-\beta Y$的协方差为0, 两者不相关, 从而独立.

33. 设随机变量$(X,Y)\sim N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,\rho)$, 其中$\rho>0$. 问是否存在两个常数$\alpha,\beta$使得$\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=0$?如果存在请求出,否则请说明原因.

Sol.

由上一题, 易知当$\alpha^2=\beta^2$时, α,β使得$\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=0$.

41. 设二维随机变量(X,Y)服从二元正态分布$N(1,2,4,9,0.3)$, 求$E(X|Y=2)$与$E(XY^2+Y|Y=1)$.

Sol.

由书上例4.11, 对$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2,\rho)$,

$$E(X|Y=y)=\mu_1+\rho\sigma_1\sigma_2^{-1}(y-\mu_2),$$

从而$E(X|Y=2)=1$且$E(XY^2+Y|Y=1)=E(X|Y=1)+1=1.8$.

易错点: 对二元正态分布条件期望公式不熟悉, 自己推导条件分布出错