Homework 15

2023 年 2 月 11 日

5. 设样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自参数为λ的泊松分布总体, 对检验问题

$$H_0 : \lambda = \frac{1}{2} \leftrightarrow H_1 : \lambda \neq \frac{1}{2},$$

取检验的拒绝域为$\{(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 1 \text{ or } \geq 12\}$.

(1) 求此检验在$\lambda = 0.25, 0.5, 1$时的功效函数值, 并求出该检验的水平;

(2) 求犯第一类错误的概率及在$\lambda = 0.25, 0.75$时犯第二类错误的概率.

Sol.

(1) 功效函数值

$$\begin{aligned}\beta_\Psi(\lambda) &= 1 - P_\lambda(1 < \sum_{i=1}^{10} X_i < 12) \\ &= 1 - \sum_{i=2}^{11} \frac{(10\lambda)^i}{i!} e^{-10\lambda},\end{aligned}$$

$\beta_\Psi(0.25) = 0.287$, $\beta_\Psi(0.5) = 0.046$, $\beta_\Psi(1) = 0.304$. 检验水平为0.046.

(2) 犯第一类错误的概率为$\beta_\Psi(0.5) = 0.046$, $\lambda = 0.25$时犯第二类错误的概率为$1 - \beta_\Psi(0.25) = 0.713$, $\lambda = 0.75$时犯第二类错误的概率为$1 - \beta_\Psi(0.75) = 0.916$.

6. 设总体为均匀分布$U(0, \theta)$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一组样本. 考虑检验问题

$$H_0 : \theta \geq 3 \leftrightarrow H_1 : \theta < 3,$$

拒绝域取为$W = \{X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \leq 2.5\}$,

(1) 求此检验的功效函数和显著性水平;

(2) 为使显著性水平达到0.05, 样本量n至少应取多大?

Sol.

(1) 功效函数

$$\begin{aligned}\beta_\Psi(\theta) =&P(X_{(n)}\leq 2.5)\\ =&\left(\frac{2.5}{\theta}\right)^n,\end{aligned}$$

当$\theta\geq 3$时, $\beta_\Psi(\theta)\leq(5/6)^n$, 因此显著性水平为$(5/6)^n$.

(2) 要使得$(5/6)^n\leq 0.05$, $n\geq 16.43$, 因此n至少取17.

12. 某机器制造出来的肥皂厚度为5cm. 今欲了解机器性能是否良好, 随机抽取10块肥皂作为样本, 测得平均厚度为5.3cm, 标准差为0.3cm, 设肥皂厚度服从正态分布, 试分析显著性水平0.05, 0.01下检验机器是否工作良好.

Sol.

考虑检验

$$H_0:\ \mu=5\ v.s.\ H_1:\ \mu\neq 5,$$

显著性水平为α的一个检验为: 当$-t_9(\alpha/2)<\sqrt{10}(\bar{X}-5)/S<t_9(\alpha/2)$时接受$H_0$, 否则拒绝$H_1$. 计算$\sqrt{10}(\bar{X}-5)/S\approx 3.16$, 查表知$t_9(0.025)\approx 2.26$, $t_9(0.005)\approx 3.25$, 因此在显著性水平为0.05下拒绝H_0, 在显著性水平为0.01下接受H_0, 也即在显著性水平为0.05下认为工作并非良好, 而在显著性水平为0.01下认为工作良好.

14. 令$(X_1,X_2,\cdots,X_9)$是从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的随机样本, 假设样本均值$\bar{X}=48$, 样本方差$\sigma^2=64$, 在显著性水平5%下, 检验

(1) $H_0:\mu\leq 40\leftrightarrow H_1:\mu>40$;

(2) $H_0':\sigma^2\geq 70\leftrightarrow H_1':\sigma^2<70$.

Sol.

(1) $T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S=3$, $t_8(0.05)=1.86<T$, 因此拒绝H_0.

(2) $\chi^2=(n-1)S^2/70\approx 7.31$, $\chi^2_8(0.95)\approx 2.73<\chi^2$, 因此不能拒绝$H_0$.

22. 装配一个部件可以采用不同的方法, 现在关心的是哪一种方法的效率更高. 现在从两种不同的装配方法中各抽取12种产品, 记录各自的装配时间(单位:min)如下:

甲方法/min	30	34	34	35	34	28	34	26	31	31	38	26
乙方法/min	26	32	22	26	31	28	30	22	31	26	32	29

假设两总体为正态总体, 且方差相等, 问这两种方法的装配时间有无显著不同 ($\alpha=0.05$)?

Sol.

记甲方法的样本为$X_1, \cdots, X_{12}$独立同分布于$N(\mu_1, \sigma^2)$, 样本均值为$\bar{X} = 31.75$, 样本方差为$S_X^2 = 14.02$, 乙方法的样本为$Y_1, \cdots, Y_{12}$独立同分布于$N(\mu_2, \sigma^2)$, 样本均值为$\bar{Y} = 27.92$, 样本方差为$S_Y^2 = 12.63$, 检验问题为

$$H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = 0 \ v.s. \ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq 0,$$

记

$$T = \frac{\sqrt{n/2}(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{(11S_X^2 + 11S_Y^2)/22}} \approx 2.57,$$

查表知$t_{22}(0.025) = 2.0739$, $|T| > t_{22}(0.025)$, 因此拒绝H_0, 即在显著性水平为0.05下认为两种方法的装配时间有显著不同.