43 (1) (3) (4)　　44 (1) (3) (5)　　46　48　49

43. (1) 不构成　$1\cdot(x,y)+1\cdot(x,y)=(2x,2y)$ 但 $(1+1)(x,y)=2(x,y)=(x,y)$

(3) 不构成　$h(x)=f(x)+(-f(x))\equiv 0 \notin V$

(4) 不构成　$I+(-I)=O \notin V$

44. (1) 不线性相关　$\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_3\sin x=0$

$x=0$　$\lambda_1=0$

$x=\pi$　$\lambda_1+\pi\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_2=0$

$x=\frac{\pi}{2}$　$\lambda_1+\frac{\pi}{2}\lambda_2+\lambda_3=0 \Rightarrow \lambda_3=0$　因此线性无关

(3) 线性相关　$\cos 2x=2\cos^2 x-1 \Rightarrow \cos 2x-2\cos^2 x+1=0$

(5) 线性无关　$\lambda_1\cos x+\cdots+\lambda_n\cos nx=0$

两边求4k 次导　$\lambda_1\cdot 1^{4k}\cos x+\cdots+\lambda_n\cdot n^{4k}\cos nx=0$　对 $\forall k\in\mathbb{N}^+$ 成立

取 $x=0$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 有 $\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1^4 & 2^4 & \cdots & n^4\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1^{4(n-1)} & 2^{4(n-1)} & \cdots & n^{4(n-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$

有唯一解 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

46. (1) 证: 显然 $\{1,x,\cdots,x^n\}$ 为 $F^n[x]$ 的一组基

$x^k=[(x-1)+1]^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(x-1)^i$　可被S表示

因此 $\{1,x,\cdots,x^n\}$ 与 S 等价, $n\geq rank(S)\geq rank(1,x,\cdots,x^n)=n$

故 $rank(S)=n$, 线性无关, 为 $F^n[x]$ 的一组基

(2) $[1\ x\ \cdots\ x^n]=[1\ (x-1)\ \cdots\ (x-1)^n]\begin{bmatrix}1 & C_1^0 & \cdots & C_n^0\\ & C_1^1 & \cdots & C_n^1\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & C_n^n\end{bmatrix}$　$\left[\sum_{i=0}^{n}C_i^0a_i\ \ \sum_{i=1}^{n}C_i^1a_i\ \cdots\ C_n^na_n\right]\begin{bmatrix}1\\ x-1\\ \vdots\\ (x-1)^n\end{bmatrix}$

(3) $p(x)=[1\ x\ \cdots\ x^n]\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_n\end{bmatrix}=[1\ (x-1)\ \cdots\ (x-1)^n]\begin{bmatrix}1 & C_1^0 & \cdots & C_n^0\\ & C_1^1 & \cdots & C_n^1\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & C_n^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_n\end{bmatrix}=[1\ (x-1)\ \cdots\ (x-1)^n]\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{n}C_i^0a_i\\ \sum_{i=1}^{n}C_i^1a_i\\ \vdots\\ C_n^na_n\end{bmatrix}$

48. 证：设 $B_1, B_2, B_3 \in V$，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

则 $(\lambda B_1+\mu B_2)A = \lambda B_1 A+\mu B_2 A = \lambda A B_1+\mu A B_2 = A(\lambda B_1+\mu B_2)$

故 V对矩阵加法、数乘封闭

① $B_1+B_2=B_2+B_1$　　② $(B_1+B_2)+B_3=B_1+(B_2+B_3)$

③ $0\cdot A = A\cdot 0 = 0$，故 $0\in V$，且 $B_1+0=0+B_1=B_1$

④ $B_1+(-B_1)=(-B_1)+B_1=0$

⑤ $\lambda(B_1+B_2)=\lambda B_1+\lambda B_2$　　⑥ $(\lambda+\mu)B_1=\lambda B_1+\mu B_2$

⑦ $\lambda\mu B_1=\lambda(\mu B_1)$　　⑧ $1\cdot B_1=B_1$

故V为线性空间

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3\\b_4&b_5&b_6\\b_7&b_8&b_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_7&b_8&b_9\\b_1&b_2&b_3\\4b_1-2b_4+b_7&4b_2-2b_5+b_8&4b_3-2b_6+b_9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3\\b_4&b_5&b_6\\b_7&b_8&b_9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_2+4b_3&-2b_3&b_1+b_3\\b_5+4b_6&-2b_6&b_4+b_6\\b_8+4b_9&-2b_9&b_7+b_9\end{bmatrix}$$

则有 $b_8=-2b_3$，$b_2=-2b_6$，$b_7=b_2+4b_3=4b_3-2b_6$，$b_4=b_3-b_6$，$b_5=b_1-4b_6$，$b_9=b_1-b_3$

故 $\dim V\le 3$，又 $I=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}4&-2&1\\0&0&1\\2&-2&5\end{bmatrix}$ 线性无关

故 $\dim V=3$，I, A, A^2 为V的一组基

49. 证：设 $A_1, A_2, A_3\in W$，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

则 $tr(\lambda A_1+\mu A_2)=\lambda tr(A_1)+\mu tr(A_2)=0$

故V对矩阵加法和数乘封闭

取 E_{ij} 为仅有第i行,第j列元素为1，其余元素为0的矩阵.

则 $S=\{E_{ij}\mid i\ne j,\ 1\le i,j\le n\}\cup\{E_{11}-E_{kk}\mid 2\le k\le n\}$ 中的元素线性无关

且对 $\forall A\in W$，有 $A=\sum_{i\ne j}a_{ij}E_{ij}+\sum_{k=2}^{n}a_{kk}(E_{11}-E_{kk})$

故S为W的一组基，$\dim S=n^2-1$