第十周作业

1

(1)解：

$$\mathcal{A}(a_1,b_1)+\mathcal{A}(a_2,b_2)=(a_1+b_1,a_1^2)+(a_2+b_2,a_2^2)=(a_1+a_2+b_1+b_2,a_1^2+a_2^2)$$
$$\mathcal{A}(a_1+a_2,b_1+b_2)=(a_1+a_2+b_1+b_2,a_1^2+a_2^2+2a_1a_2)\neq\mathcal{A}(a_1,b_1)+\mathcal{A}(a_2,b_2)$$

因此不是线性变换。

(3)解：

$$\mathcal{A}(X)+\mathcal{A}(Y)=AX-XB+AY-YB=A(X+Y)-(X+Y)B=\mathcal{A}(X+Y)$$
$$\mathcal{A}(\lambda X)=A(\lambda X)-(\lambda X)B=\lambda(AX-XB)=\lambda\mathcal{A}(X)$$

满足线性变换的两个条件，因此是线性变换。

2

(1)解：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(2)解：

$$e_0=1,e_1=x,\dots,e_n=\frac{x^n}{n!}$$
$$\mathcal{A}(e_0)=0,\mathcal{A}(e_1)=1,\dots,\mathcal{A}(e_n)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0&0\\ &0&1&\cdots&0\\ & &\ddots&\ddots&\vdots\\ & & &\ddots&1\\ & & & &0\end{pmatrix}$$

(3)解：

$$(e^{ax}\cos bx)'=-be^{ax}\sin bx+ae^{ax}\cos bx=a\alpha_1-b\alpha_2$$
$$(e^{ax}\sin bx)'=be^{ax}\cos bx+ae^{ax}\sin bx=b\alpha_1+a\alpha_2$$
$$(xe^{ax}\cos bx)'=e^{ax}\cos bx-bxe^{ax}\sin bx+axe^{ax}\cos bx=\alpha_1+a\alpha_3-b\alpha_4$$
$$(xe^{ax}\sin bx)'=e^{ax}\sin bx+bxe^{ax}\cos bx+axe^{ax}\sin bx=\alpha_2+b\alpha_3+a\alpha_4$$

矩阵为$\begin{pmatrix}a&b&1&0\\-b&a&0&1\\0&0&a&b\\0&0&-b&a\end{pmatrix}$

(4)解：

设$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$\mathcal{A}(e_1)=\begin{pmatrix}0 & -b\\ c & 0\end{pmatrix},\mathcal{A}(e_2)=\begin{pmatrix}-c & a-d\\ 0 & c\end{pmatrix},\mathcal{A}(e_3)=\begin{pmatrix}b & 0\\ d-a & -b\end{pmatrix},\mathcal{A}(e_4)=\begin{pmatrix}0 & b\\ -c & 0\end{pmatrix}$$

矩阵为$\begin{pmatrix}0 & -c & b & 0\\ -b & a-d & 0 & b\\ c & 0 & d-a & -c\\ 0 & c & -b & 0\end{pmatrix}$