复变函数 ygw 2021 Fall B卷

一、填空题：

1. $f(z)=\ln\left(1+z^3\right)$ 在 $z=0$ 处的 2022 阶导数为：____________。
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!z^{4n}}$ 的和函数为：____________。
3. $f(z)$ 为整函数，在 $\mathbb{C}$ 上有 $|f(z)|\leq|z|^2$，$[f(i)]^2+\sqrt{2}f(i)+\frac{1}{4}=0$，$f(z)=$ ____________。
4. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\frac{(4n)^n}{n!})^3z^{2n}$ 的收敛半径为 ____________。
5. $f(z)=\sin\left(|z|^2+2iz+\bar{z}^2\right)$，求 $\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=i\pi}=$ ____________。
6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}\sinh\frac{i}{\sqrt{n}})z^n$ 在 $z=e^{\frac{i\pi}{6}}$ 处的敛散性为 ____________。
7. C 为椭圆 $x^2+4y^2=9$ 的正向曲线，$\oint_C\bar{z}\,\mathrm{d}z$ = ____________。

二、用留数计算定积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x$$

三、考虑 $f(z)=z\cos\frac{z}{z-1}+\frac{1}{z}-\frac{1}{\sin z}$

1. 给出 f 在扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上所有奇点的类型，并说明原因
2. 令 $f(z)$ 在 $0<|z-1|<1$ 上的 Laurent 展开式为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(z-1)^n$，求 c_{-2021}
3. 在 $f(z)$ 所有非可去奇点的孤立奇点处求留数

四、$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是整函数，$v(x,y)=e^{2\pi x}\sin(Ay)+Bx^2+Cxy-2y^2$，其中 $A,B,C\in\mathbb{R}$ 且 $A\leq 0$，$f(1+i)=i$，求 $f(z)$

五、$f(z)$ 是整函数，令 $f'(z)=A(x,y)+iB(x,y)$，令 $K=\{f(z)\text{ 是整函数 }\mid f'(z)\text{ 满足 }A^2+4A\leq 0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1. 写出 K 集合
2. 证明你的结论。