光学第一周作业答案

2022/9/7

本次作业考察折射定律的应用。

2.1 入射角为 i，反射角也为 i，反射光与折射光成直角，故折射角为 $90^\circ - i$。由折射定律：

$$\frac{\sin i}{\sin(90^\circ - i)} = \frac{\sin i}{\cos i} = \tan i = n \tag{1}$$

知 $\tan i = n$.

2.3 光从玻璃射到空气，全反射临界角 $i_C = \arcsin \frac{1}{n}$，故对红光和紫光，其全反射最小角分别为：

$$\begin{aligned} i_C^R &= \arcsin \frac{1}{1.51} = 41.47^\circ \\ i_C^V &= \arcsin \frac{1}{1.53} = 40.81^\circ \end{aligned} \tag{2}$$

当白光以 41° 角入射时，发生色散，紫光等波长较短的光被全反射，红色等波长较长的光仍能出射，故在空气一侧会看到波长较长的彩色光。

2.5 通过折射定律或光的可逆性原理容易证明，入射光线与出射光线平行。设入射角为 i_1，折射角为 i_2，则侧向平移距离为

$$\Delta x = t \tan i_1 - t \tan i_2 = t(\tan i_1 - \tan i_2) \tag{3}$$

当入射角 i_1 很小时，用最低阶近似 $\tan i \sim \sin i \sim i$，并利用折射定律 $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{i_1}{i_2} = n$，得到 $\Delta x = \frac{n-1}{n} i_1 t$. 也可以理解为两平行线的垂直距离，则位移 $\Delta x = t(\tan i_1 - \tan i_2)/\cos i_1 = \frac{n-1}{n} i_1 t$.

2.11 由折射定律知 θ_1 与 θ_2 关系：

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin(90^\circ - \theta_2)} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2} = n \tag{4}$$

光在棒内发生全反射条件为 $\sin\theta_2 \geq \frac{1}{n}$，即

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_2 = 1 - \cos^2\theta_2 = 1 - \frac{\sin^2\theta_1}{n^2} &\geq \frac{1}{n^2} \\ n^2 &\geq \sin^2\theta_1 + 1 \end{aligned} \tag{5}$$

要求对 $\forall\theta_1$ 都成立，故 $n^2 \geq 2$ 或 $n \geq \sqrt{2}$.

2.13

(1) 光在一侧的折射角和另一侧的入射角都为 α（满足 $\sin i_1/\sin\alpha = n$），故入射角与另一侧的出射角都为 i_1，不会发生全反射。

(2) 简单的几何分析知 $\delta = \pi - 2(2\alpha - i_1)$.

(3) 用变分法，假设令入射角 i 改变微小的角度 δi，折射角 α 相应地改变 $\delta\alpha$，则有

$$\begin{aligned}\sin(i+\delta i) &= n\sin(\alpha+\delta\alpha)\\ \sin i + \cos i\cdot\delta i &= n(\sin\alpha + \cos\alpha\cdot\delta\alpha)\\ \cos i\cdot\delta i &= n\cos\alpha\cdot\delta\alpha\end{aligned} \tag{6}$$

偏向角最小时有 $2\delta\alpha - \delta i = 0$，代入上式得

$$2\cos i = n\cos\alpha = n\sqrt{1-\sin^2 i/n^2} = \sqrt{n^2-\sin^2 i} \tag{7}$$

解得 $i = \arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$.