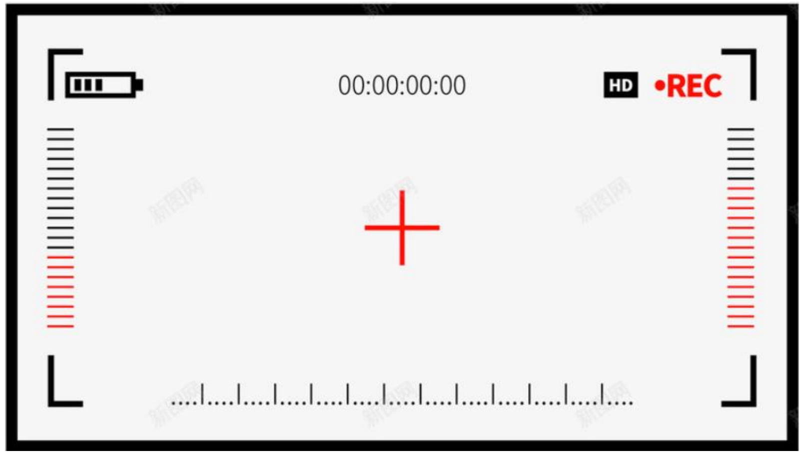
习题课1

助教：廖潇宇

一、区别参考系与坐标系

以一张相片的拍摄为例

参考系：相机



坐标系：取景框

参考系与参考系下物体的运动状态密切相关，
物体动与不动，速度，加速度等

坐标系与物体运动的描述相关，

$$\begin{cases} x = vt \\ y = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{y_0^2 + v^2t^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y_0}{vt} \end{cases}$$

参考系与坐标系

二、常见的参考系

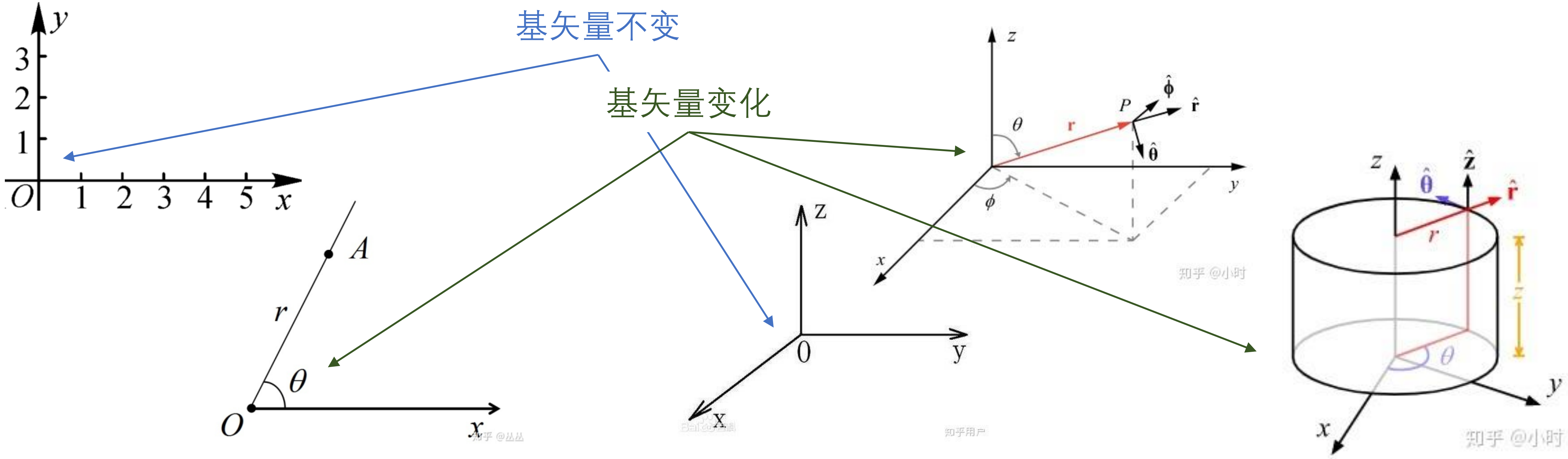
惯性系：地面、匀速运动的物体
非惯性系：自由落体系、旋转系

（二者的区别将会在后边的课程详细讲述）

三、常见的坐标系

二维：直角坐标系、极坐标系

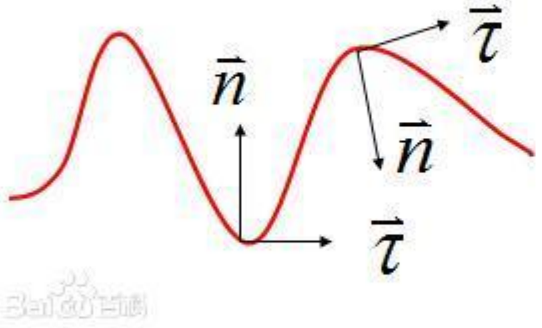
三维：直角坐标系、球坐标系、柱坐标系



三、常见的坐标系

自然坐标系

（前、后、左、右）（固定坐标系：东、南、西、北）

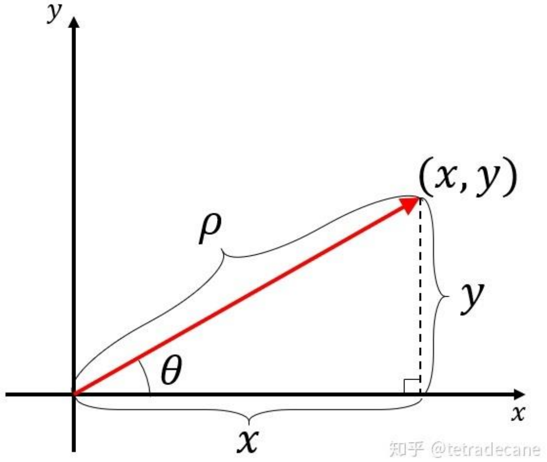


tau

$\boldsymbol{\tau}$：物体在这一点的运动方向

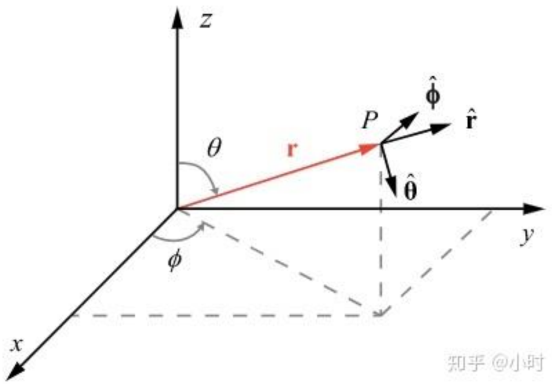
$\boldsymbol{n}$：与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直

四、坐标系之间的转换



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

五、广义坐标

更一般的，我们可以把坐标表示为 q_i，运动方程为 $f(q_i, \dot{q}_i, \dots, t) = 0$ 进行纯理论分析（理论力学）

矢量与矢量运算

一、矢量表示

在不同坐标系下同一物理量（位置、速度……）表示不同，不便于一般分析

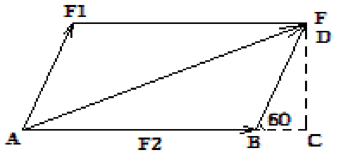
记 $\boldsymbol{r}$ 为质点的位置，其在直角坐标下等同于 (x,y,z)，在球坐标系下等同于 (r,θ,ϕ) … …

手写体矢量 $\vec{r}$

同理 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{F},\boldsymbol{g}$ … …

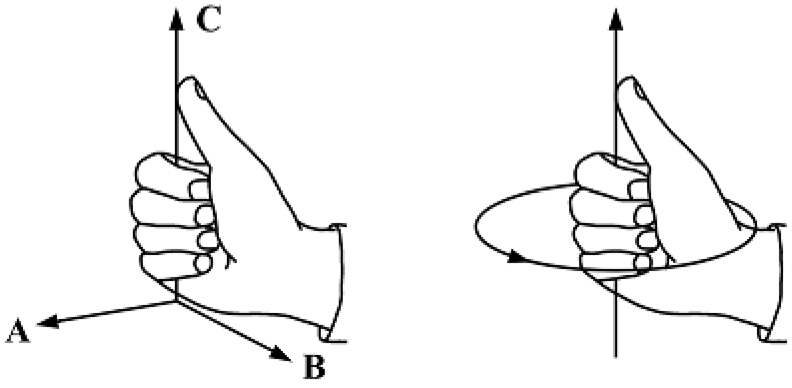
二、矢量运算

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$



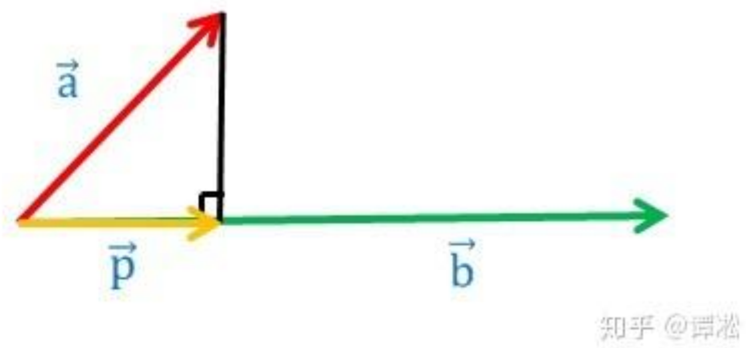
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$　　方向：右手定则



三、矢量运算的物理意义

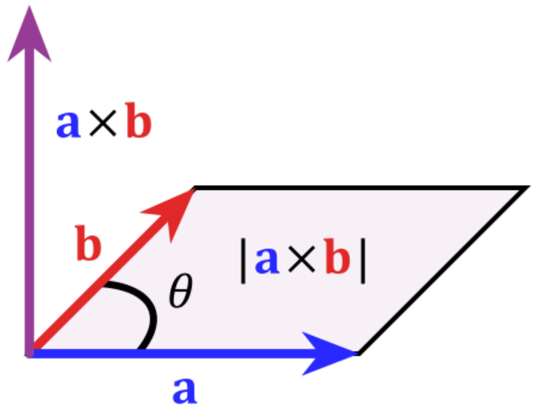
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$



$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影乘以b

力在运动方向上的分量乘以位移：功

$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$



$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 张成的平行四边形的面积

矢量与矢量运算

四、矢量运算公式

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$
$$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$
$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

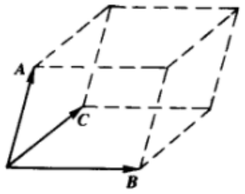
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

在直角坐标系下

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$



一、求任意时刻的速度

$$x = 3t^2 + 5t$$

$$a = 6, v_0 = 5$$

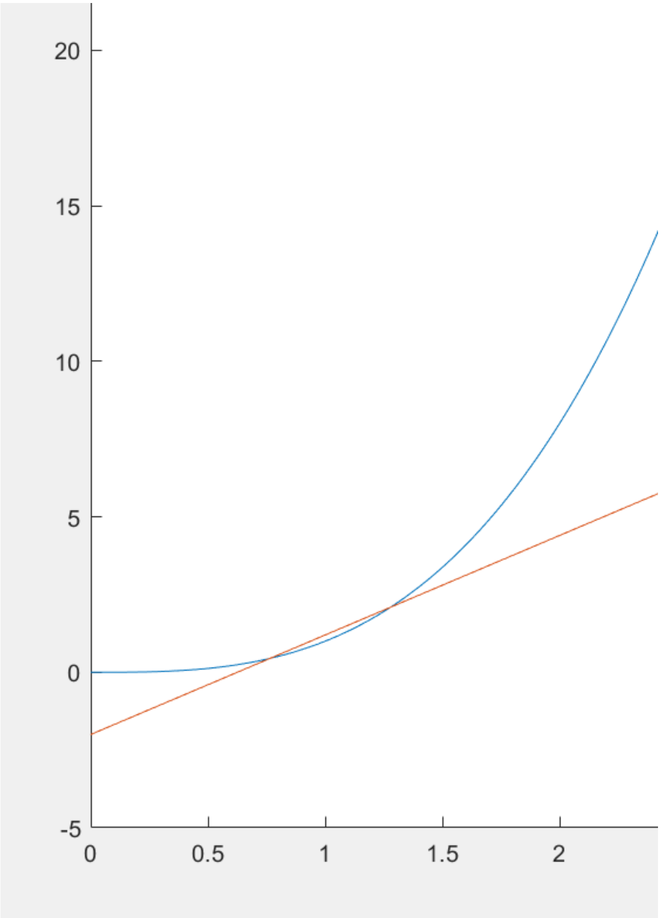
$$\therefore v = 6t + 5$$

$x = t^3$ **?**

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^3 - t^3}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2 \to 3t^2$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \coloneqq \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t)$$

特别的，常把函数 f 对 t 的导数记为 $\dot{f}$，如 $a = \dot{v}$，$v = \dot{x}$



二、导数的表示与运算

导数的表示方式

$$f'(x), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\partial y}{\partial x} \cdots$$

基本函数的导数

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^{x})' = e^{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

导数的求导法则

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$f[g(x)]' = f'[g(x)]g'(x)$$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

例1 通过导数的乘法法则 $(fg)'$ 与复合函数求导法则 $[f(g)]'$ 证明导数的除法法则 $(f/g)'$

例2 求函数 $f(x) = a^x$ 和 $g(x) = \log_b x$ 的导数

隐函数!

例3 求函数 $f(x) = \tan x$ 的导数

例4 求函数 $f(x) = \arcsin x$ 的导数 $y=$ $\sin y = x$ $\cos y \cdot y' = 1$ $y' = \frac{1}{\cos y}$

$\frac{(xy)'}{xy} = \frac{y+xy'}{xy}$

例5 隐函数函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^2 + x^2 = \ln xy$ 确定，求 $f'(x) = g(x,y)$

$2x+2yy'=0$

例6 求函数 $f(x) = x^x$ 的导数

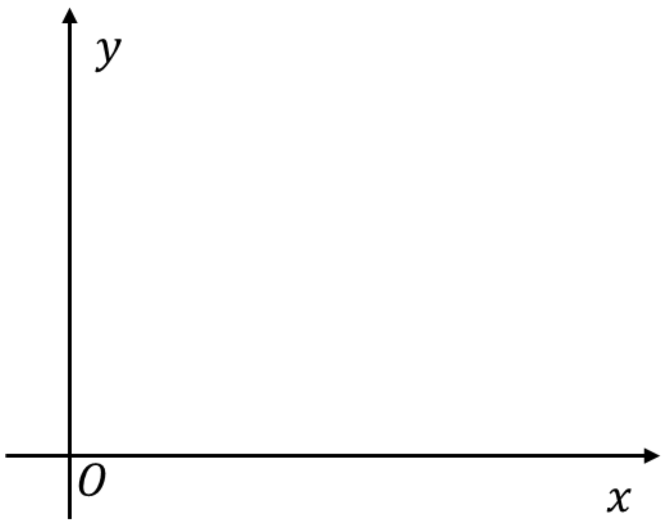
$y=a(x)^{b(x)}$ $y'=a(x)^{b(x)-1}\cdot a(x)$ $x^2+y^2=1$ $y'=g(x,y)$

$\frac{b'(x)}{\ln a(x)}$

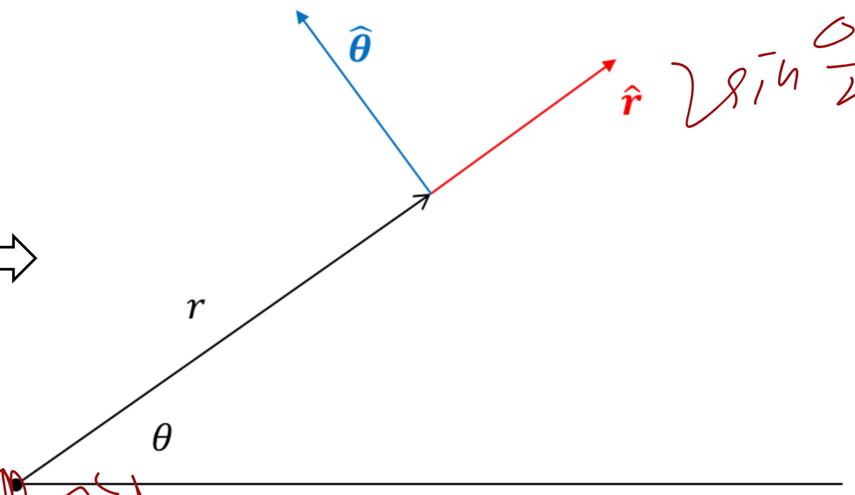
例7 求函数 $f(x) = x^3(\sin x + \cos x)^2 e^x$ 的导数

$\frac{f'(x)}{f(x)}$

$\ln f(x) = 3\ln x + 2\ln(s+c) + x$



$\Longleftrightarrow$



$2\sin\frac{d\theta}{2} = d\theta$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}} \qquad h(x) = f(x)g(x)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} \quad \cancel{?} \quad ? \qquad h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} \xRightarrow{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=0} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

特殊的是直角坐标系！ 直角坐标系是“好”的

矢量与求导

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

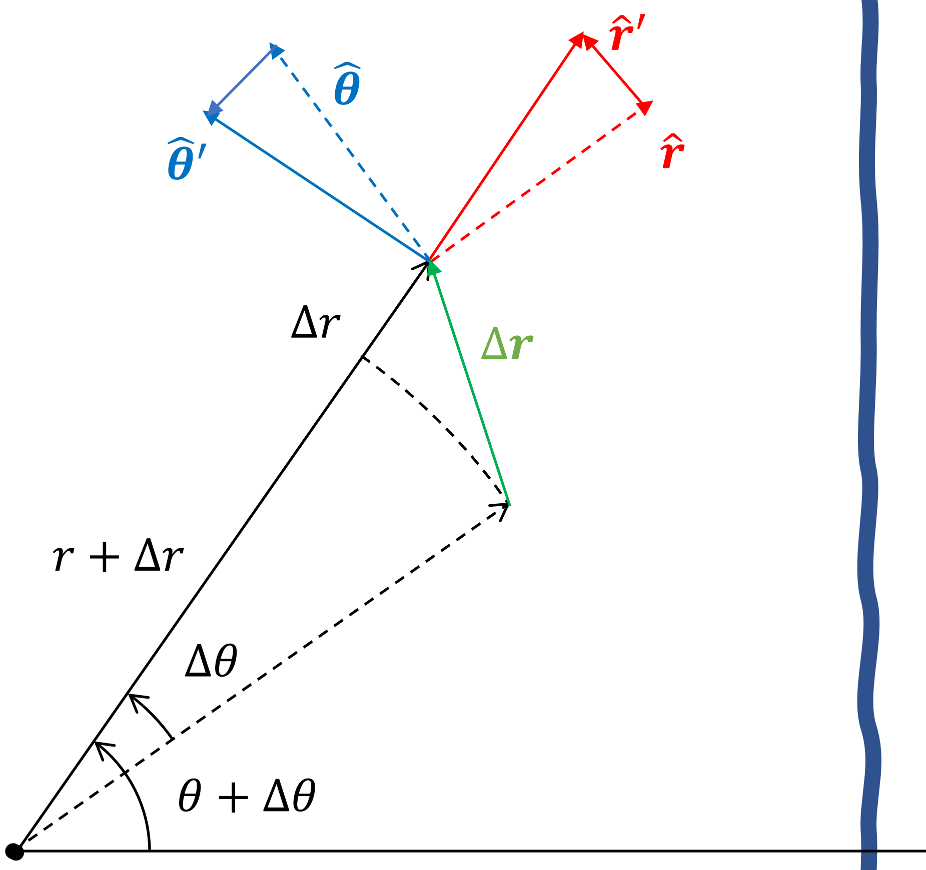
$$= \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \ddot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$



1.33 杆以匀角速度 ω_0 绕过其固定端 O 且垂直于杆的轴转动. 在 $t=0$ 时，位于 O 点的小珠从相对于杆静止开始沿杆作加速度为 a_0 的匀加速运动. 求小珠在时刻 t 的速度和加速度.

答：$\boldsymbol{v}=a_0 t\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{2}a_0\omega_0 t^2\hat{\boldsymbol{\theta}}$，$\boldsymbol{a}=(a_0+\frac{1}{2}a_0\omega_0^2 t^2)\hat{\boldsymbol{r}}+2a_0\omega_0 t\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

解：(1) 设切向的单位向量为 $\vec{i}$，法向单位向量为 $\vec{j}$

$$v=a_0t\vec{j}+\frac{1}{2}a_0\omega_0t^2\vec{i}$$

(2) $$v_t=\omega_0\cdot\frac{1}{2}a_0t^2$$

$$\frac{dv_t}{dt}=a_1=\omega_0a_0t$$

$$a_{n_1}=-\frac{v_t^2}{R},\qquad R=\frac{1}{2}a_0t^2$$

$$a_{n_1}=-\frac{1}{2}a_0\omega_0^2t^2$$

$$a_{n_2}=\left(a_0-\frac{1}{2}\omega_0^2t^2\right)\vec{j}+a_0\omega_0t\vec{i}$$

三、求一个不均匀杆的质量

$$m = \lambda \cdot l$$

每个地方的密度不同?

将长度切割为非常小的小块，近似认为每一小块密度均匀

$$m = \sum_i \lambda_i \Delta l_i$$

继续分割，直到小块区域无穷小（足够小）

$$m = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \lambda_i \Delta l_i \coloneqq \iint \lambda \mathrm{d}l$$

三、求一个不规则盘的质量

极坐标的微积分

$$m = \rho \cdot S$$

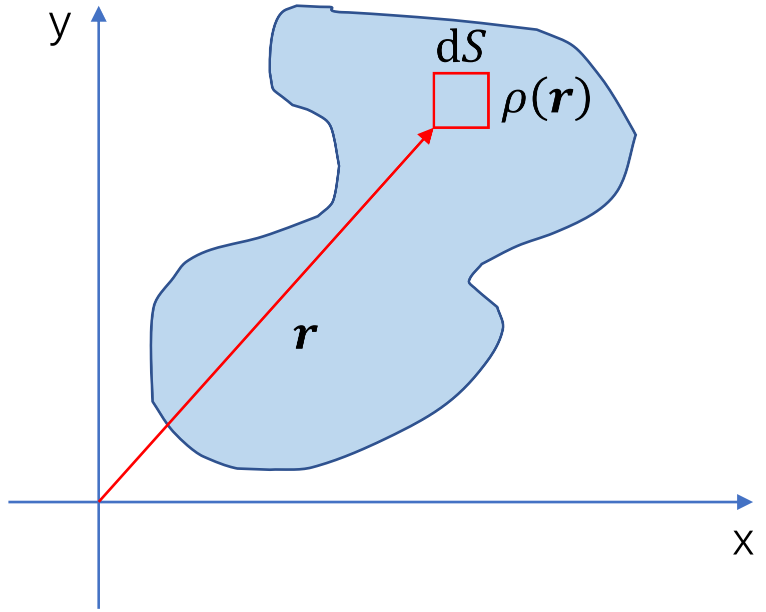
每个地方的密度不同?

将面积切割为非常小的小块，近似认为每一小块密度均匀

$$m = \sum_i \rho_i \Delta S_i$$

继续分割，直到小块区域无穷小（足够小）

$$m = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \rho_i \Delta S_i \coloneqq \iint \rho \mathrm{d}S$$



四、积分的表示与运算

不定积分

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

定积分

$$F(x) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

其中 $F'(x) = f(x)$

由此可得基本函数的积分公式

$$\int x^\mu \mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C\ (\mu \neq 1)$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$$

注：部分积分无法用简单函数表示

微元法与微积分

第一类换元法（凑微分法）

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(g(x))\mathrm{d}g(x)$$

三角函数积分

例1 求 $\int \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x$

$-\int \cos^2 x \, d(\cos x)$

$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

高次幂积分

例2 求 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^{100}}$

$\int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^{100}}$

$= \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^{99}}$

特殊微分形式

例3 求 $\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$\frac{dx}{1+x^2}$

$d(\arctan x)$

第二类换元法

根式换元

例4 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$\sqrt{x}=y$

三角、双曲函数换元

例5 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

倒数代换

例6 求 $\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x$

分项积分法

有理分式积分

例6 求 $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} \mathrm{d}x$

分布积分法

幂函数与对数或反三角函数的乘积

例7 求 $\int x^3 \ln x \, \mathrm{d}x$

指数函数与幂函数的乘积

例8 求 $\int e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

利用分部积分，构造方程

例9 求 $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$

五、高阶导数、偏导数与曲线积分、多重积分

若函数的导函数 $g(x) = f'(x)$ 依然可导，那么他的导数 $h(x) = g'(x)$ 称为 $f(x)$ 的二阶导数，记作 $f''(x)$ 或 $f^{(2)}(x)$，同理有更高阶的导数

二元函数 $f(x,y)$ 可对其中某一变量如 x 求导，在对其中某一变量如 x 求导时，y 为例的其他变量视为常数，记作 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ 或 $f_x'(x,y)$ 或 $f_1'(x,y)$ 或 $\partial_x f(x,y)$，同理有高阶偏导数，同理多元函数

第一类曲线积分 $I = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，其中 $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ 是曲线的线元长度，当 $f(x,y) = 1$ 时，积分即为曲线的长度

二元函数 $f(x,y)$ 可以对 x、y 积分，记作 $I = \iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示的是二维平面上的面积微元，同理有更多重的积分

六、微分

$$\mathrm{d}y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}y(x+\Delta x)-y(x)$$

表示变量微小的变化，可正可负，是一个无穷小量

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

导数又称微商，是函数微分和自变量微分的商

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

积分是一系列微小量的和

函数的微分求法

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

多元函数的全微分

$$\mathrm{d}f=\partial_x f(x,y)\mathrm{d}x+\partial_y f(x,y)\mathrm{d}y$$

一阶微分不变性

若 $h(x)=g\big(f(x)\big)$

则 $\mathrm{d}h=h'(x)\mathrm{d}x=g'\big(f(x)\big)f'(x)\mathrm{d}x=g'\big(f(x)\big)\mathrm{d}f$

七、函数的展开

当 x 很小的时，我们知道有 $\sin x \approx x$，那 $\sin x - x \approx ?$

实际上 $\sin x - x \approx -\frac{1}{3!}x^3$

当 $x = 0.00024$ 时，$\sin x - x = -2.30399998 \times 10^{-12}$，$-\frac{1}{3!}x^3 = -2.304 \times 10^{-12}$

那 $\sin x - x + \frac{1}{3!}x^3 \approx ?$

Taylor 级数展开

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots$$

七、微分方程

形如 $F\left(y^{(n)},\ldots,y'',y';x\right)=0$ 的方程称为微分方程，其中最高阶导数的阶数称为方程的阶数

对于简单的一阶微分方程 $F(y',y;x)=0$，若可以将方程化为可分离变量的形式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x)}{g(y)}$，那么可以通过分离变量将其化为 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$，两边积分即可得到方程的解

例10 质量为 m 的一维运动物体受回复力 $F=-kx$ 作用，试求其运动方程

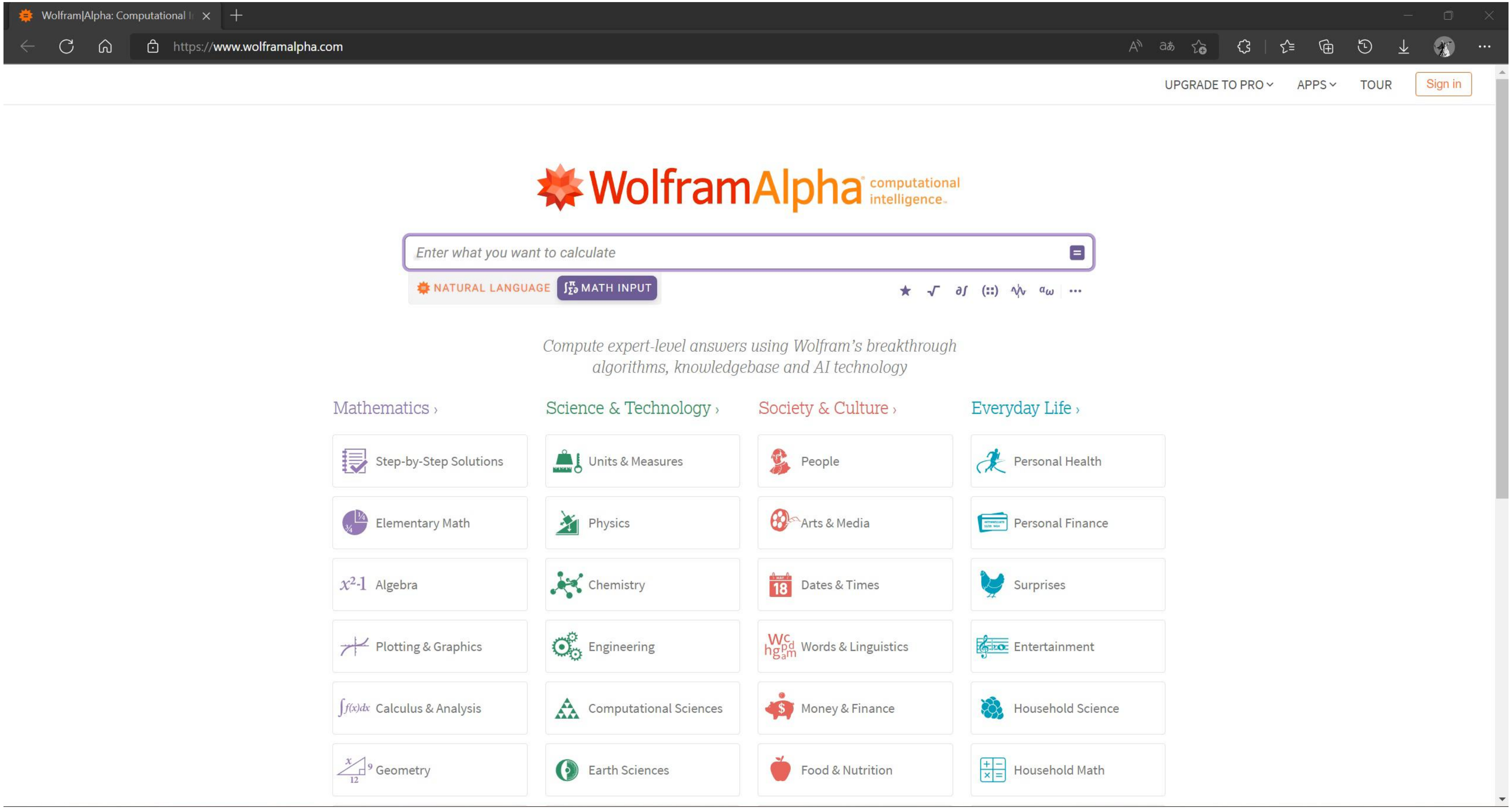
例11 质量为 m 的一维运动物体受恒定驱动力 F 与线性空气阻力 $f=-kv$ 作用，试求其运动方程

例12 试求一阶线性微分方程 $P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=f(x)$ 的通解

数学不够怎么办


WolframAlpha
computational intelligence
Enter what you want to calculate
NATURAL LANGUAGE
MATH INPUT

数学不够怎么办


Wolfram|Alpha: Computational I
https://www.wolframalpha.com
UPGRADE TO PRO
APPS
TOUR
Sign in
WolframAlpha computational intelligence.
Enter what you want to calculate
NATURAL LANGUAGE
MATH INPUT
Compute expert-level answers using Wolfram's breakthrough algorithms, knowledgebase and AI technology
Mathematics ›
Science & Technology ›
Society & Culture ›
Everyday Life ›
Step-by-Step Solutions
Units & Measures
People
Personal Health
Elementary Math
Physics
Arts & Media
Personal Finance
Algebra
Chemistry
Dates & Times
Surprises
Plotting & Graphics
Engineering
Words & Linguistics
Entertainment
Calculus & Analysis
Computational Sciences
Money & Finance
Household Science
Geometry
Earth Sciences
Food & Nutrition
Household Math

例 试估算平抛运动的最大射程

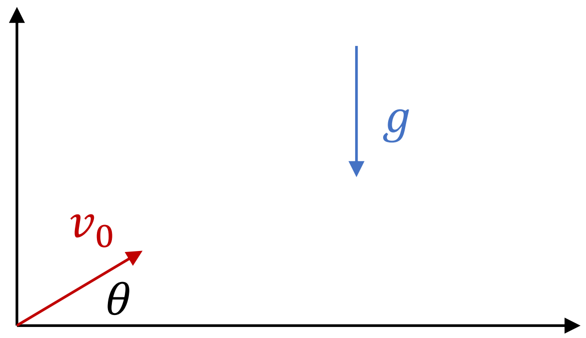
$$l = l(v_0, g, \theta)$$

$$l \propto v_0^{\alpha}, l \propto 1/g^{\beta}$$

$$\dim v_0 = LT^{-1}, \dim g = LT^{-2}, \dim l = L$$

$$l(v_0, g, k\pi/2) = 0$$

$$l \propto \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$



感谢聆听～