

本课程处理问题的例子

1. 实积分： 1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$, 2) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$, 3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

2. 代数方程根的判断： 如判断方程 $z^6 - z^4 - 5z^3 + 2$ 在 $|z| < 1$ 内的根的个数。再如：可利用幅角原理证明代数学基本定理。

3. 在方程中的应用：如利用Laplace变换求解常微分方程问题：

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) \end{cases}$$

又如利用解析函数的实虚部来求调和方程的解等。

4. 保形变换

第一章 复数和平面点集

1.1节 复数

复数以及性质和运算

1) 复数定义

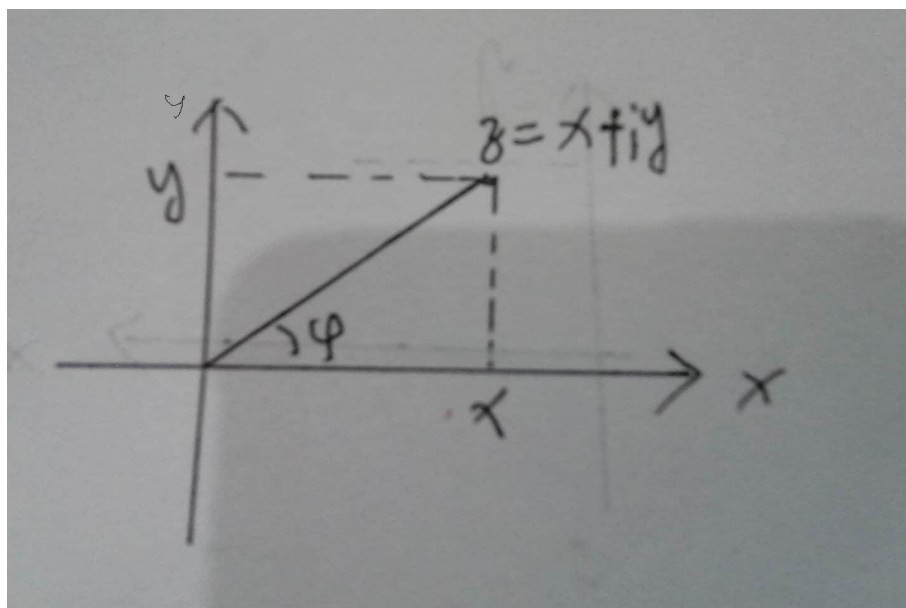
定义： $z = x + iy$, ($i^2 = -1$), 实部 $x = \operatorname{Re} z$, 虚部 $y = \operatorname{Im} z$.

复数的模： $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, , 复数共轭 $\bar{z} = x - iy$.

复数的三角表示： $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

2) 复数的幅角和幅角主值

对于复数 z , 以 x 轴的正半轴方向为始边, 向量 \vec{OZ} 为终边的角 φ 称为复数 z 的幅角, 如图所示:



幅角主值: $-\pi < \arg z \leq \pi$, 幅角: $\text{Arg} z = 2k\pi + \arg z$

例如

$$\arg 1 = 0, \text{Arg} 1 = 2k\pi, \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}, \text{Arg}(1+i) = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

3) 欧拉表示: 定义

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

例如

$$e^{2+i} = e^2 (\cos 1 + i \sin 1), e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \text{特别: } e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

借助于欧拉表示一个模为 r , 幅角为 θ 的复数可以表示为 $z = re^{i\theta}$. 进一步, 一个 a 点为中心半径为 R 的圆: $|z - a| = R$ 可表示为参数形式

$$z = a + Re^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

另外可以直接验证: 对于任意两个复数 z_1, z_2

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

4) 表示形式转化:

1. 和三角表示形式的转化

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 比如:

$$1 + i = \sqrt{1^2 + 1^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} + i \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

2. x, y 和 z, \bar{z} 的互换关系

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ \bar{z} = x - iy. \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \end{cases}$$

5) 复数的运算: 设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$,

1. 加法: $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2. 减法: $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

3. 乘法: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$. 借助欧拉表示, 又可设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则 $z_1 z_2$ 又可表示为: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

4. 除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

借助欧拉表示, 又可设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则 $\frac{z_1}{z_2}$ 又可表示为: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

5. 乘方: $z^n = \underbrace{z \times z \times \dots \times z}_{n \uparrow}$

6. 开方: 设 z 是已知复数, 方程

$$\omega^n = z$$

的所有解称为 z 的 n 次方根. 记作 $\sqrt[n]{z}$. 下面设 $\omega = \rho e^{i\varphi}$, 因此 $\omega^n = \rho^n e^{in\varphi}$. $z \neq 0$ 时, 记 $z = r e^{i\theta}$, 这样建立方程

$$\rho^n e^{in\varphi} = r e^{i\theta} \xRightarrow{\text{比较模和幅角}} \begin{cases} \rho^n = r, \\ n\varphi = 2k\pi + \theta. \end{cases} \implies \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \varphi = \frac{2k\pi + \theta}{n}. \end{cases}$$

因此得出

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right), \quad (\text{其中 } k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.1.1)$$

6) 其它一些性质:

1. $z = x + iy$ 是实数的充分必要条件是 $y = 0$, 或 $z = \bar{z}$.

2. $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$.

3. $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

$$4. \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}.$$

例1.1.1 设 $z = x + iy$, $y \neq 0$. 证明: 当且仅当 $x^2 + y^2 = 1$ 时, $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数。

证明: $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数等价于

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

即

$$z + z\bar{z}^2 = \bar{z} + \bar{z}z^2 \implies (z - \bar{z})(1 - z\bar{z}) = 0.$$

$y \neq 0$, 因此 $z - \bar{z} \neq 0$, 从而

$$1 - z\bar{z} = 0 \implies z\bar{z} = |z|^2 = 1 \implies x^2 + y^2 = 1.$$

由于以上推导每一步都可逆, 故命题得证。

例 1.1.2 证明实系数多项式的零点共轭存在。

证明: 取 n 次实系数多项式 $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$, 并假设 z_0 是 $P(z)$ 的一个零点, 即

$$P(z_0) = z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} z_0 + a_n = 0 \quad (1)$$

在上式(1)取共轭得到:

$$\bar{z}_0^n + \overline{a_1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + \overline{a_{n-1}} \bar{z}_0 + \overline{a_n} = 0 \quad (2)$$

利用 a_1, a_2, \dots, a_n 均为实数的条件, 式(2)变为

$$\bar{z}_0^n + a_1 \bar{z}_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{z}_0 + a_n = 0 \quad (3)$$

也就是 $P(\bar{z}_0) = 0$, 即 \bar{z}_0 也是 $P(z)$ 的零点, 从而命题得证。

例 1.1.3 将圆的方程

$$A(x^2 + y^2) + mx + ny + C = 0, \quad (m^2 + n^2 - 4AC > 0)$$

改写为复数形式。

解: $z = x + iy$, 相应地

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

代入方程得到:

$$A \left(\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 \right) + m \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + n \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + C = 0.$$

上式利用 $i^2 = -1$,并整理后化为:

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0, \quad \text{其中 } B = \frac{m + ni}{2}$$

例 1.1.4 求 $\sqrt[3]{-8}$ 的全部值。

解: 把 -8 表示为三角形形式为: $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$, 则

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{2k\pi + \pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{2k\pi + \pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2$$

也就是

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 + i\sqrt{3}, & k = 0 \\ -2, & k = 1 \\ 1 - i\sqrt{3}, & k = 2. \end{cases}$$

复数极限和无穷远点

定义1.1.1 复数列极限的概念 设 z_1, z_2, \dots, z_n 是一个复数序列, z_0 是已给复数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - z_0| = 0$$

则称复数 z_0 是 z_n 的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0 \quad \text{或} \quad z_n \rightarrow z_0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

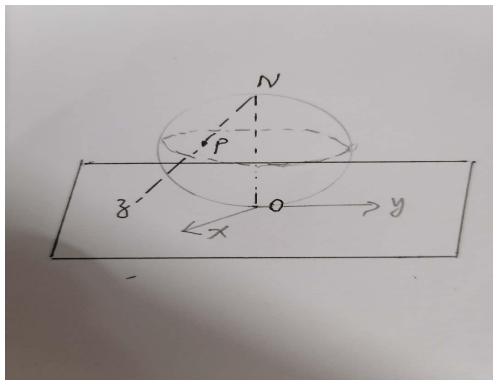
当 $z_0 \neq 0$ 时, 以上条件可等价于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = |z_0| \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arg} z_n \rightarrow \text{Arg} z_0$$

无穷远点的概念

在复平面中加一个理想点: **无穷远点**, 记为 ∞ , $|\infty| = +\infty$, 但是其实部, 虚部, 幅角都无意义。教材中借助了**球极投影**的理念来理解无穷远点:

取一个在 origin 与 Z 平面相切的单位球面, 过 O 点作 Z 平面的垂线与球面交于 N 点, N 称为**北极**。在 Z 平面取任意点 z , 作 z 点和 N 的连线交球面上一点 p 。如图



另一方面,在球面上任取不等于N的点 p' ,那么 p' 和N的连线必然与Z平面有交点 z' .从以上分析可以看出,这个单位球面如果去掉了北极点,就可以与不包含无穷远点的复平面建立一一对应.那么,北极点N对应点是什么呢?实际上,我们注意到:如果 p' 与北极N点越近,那么在Z平面的对应点 z' 距离原点O就越远.所以,如果 p' 点趋于N点,那么对应的 z' 点就趋于 ∞ .因此,北极点N对应无穷远点.

在以下叙述中,称不包含 ∞ 的复平面称为**开复平面**或有限平面,包含 ∞ 的复平面称为**闭复平面**或扩充平面

1.2节 平面点集

一. 基本概念:

1)邻域:设 z_0 是平面上一点,点集

$$\{z \mid |z - z_0| < \rho\}$$

称为 z_0 的 ρ 邻域。

2)内点, 边界点, 外点

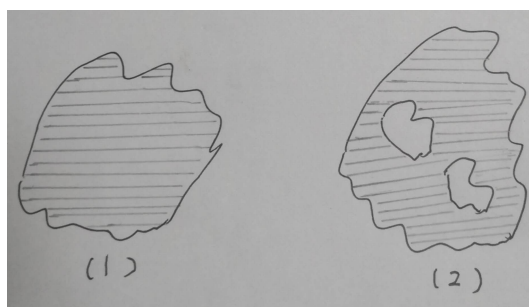
设已给集合E, 利用邻域概念可以把平面上的点分类: 设M是复平面上的一点, 如果M有一个 ρ 邻域完全属于E, M称为E的**内点**。如果M的任意一个 ρ 邻域既有属于E的点, 也有不属于E的点, 这时称M为E的**边界点**。如果M有一个 ρ 邻域完全不属于E, 则称M称为E的**外点**。

3)开集, 闭集 如果集合E的点全都是内点, E称为**开集**。如果E的边界点全都属于E, 则E称为**闭集**。

二. 区域的概念及分类.

如果集合E中任意两点可以用一条全在E中的折线连接起来, 则称E是**连通的**, 连通的开集称为**区域**, 一般用D表示区域。如果在区域D内任意任意画一条闭曲线C, C内包含的点都是区域内的点, 则称D为**单连通区域**, 否则就是**多连通区域**。

下图中(1)的阴影区域是典型的单连通区域, 而下图中(2)的阴影区域是典型的多连通区域。



本章部分习题或难题解答

附例1.1 求解以下复方程:

$$(1) z^3 = -1 + i\sqrt{3}, \quad (2) z^4 = -1$$

解: 1) 把 $-1 + i\sqrt{3}$ 表示为三角形形式为: $-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$, 则原方程表示为:

$$z^3 = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

因此, 解得方程的根为:

$$z_k = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2$$

2) 把 -1 表示为三角形形式为: $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$, 则原方程表示为:

$$z^4 = \cos \pi + i \sin \pi$$

因此, 解得方程的根为:

$$z_k = \left(\cos \frac{2k\pi + \pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

具体根表示为

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, & z_1 &= \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_2 &= \frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, & z_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

附例1.2 利用复数的指数式, 证明以下等式:

$$\sum_{k=1}^n \cos k\theta = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}, \quad (0 < \theta < \pi)$$

证明: 根据公式

$$z + z^2 + \dots + z^n = \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \neq 1)$$

取 $z = e^{i\theta}$, 代入上式得到:

$$e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

即为

$$\sum_{k=1}^n (\cos k\theta + i \sin k\theta) = \frac{[\cos \theta - \cos(n+1)\theta] + i [\sin \theta - \sin(n+1)\theta]}{(1 - \cos \theta) - i \sin \theta}$$

$$= \frac{\{[\cos \theta - \cos(n+1)\theta] + i[\sin \theta - \sin(n+1)\theta]\} [(1 - \cos \theta) + i \sin \theta]}{[(1 - \cos \theta) - i \sin \theta] [(1 - \cos \theta) + i \sin \theta]} \quad (1)$$

比较上式(1)两边的实部, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos k\theta &= \frac{[\cos \theta - \cos(n+1)\theta] (1 - \cos \theta) - \sin \theta [\sin \theta - \sin(n+1)\theta]}{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - 1 - \cos(n+1)\theta + \cos n\theta}{2 - 2 \cos \theta} = -\frac{1}{2} + \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{2 - 2 \cos \theta} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2 \sin(n + \frac{1}{2})\theta \sin \frac{\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta} \end{aligned}$$

于是结论得到证明。

附例1.3 如果 $|z| = 1$, 证明: $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = 1$

证明: 我们只要证明 $|z-a| = |1-\bar{a}z|$, 也就是 $|z-a|^2 = |1-\bar{a}z|^2$. 而

$$\begin{aligned} |z-a|^2 &= (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = |z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} = 1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2, \\ |1-\bar{a}z|^2 &= (1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) = 1 - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}z\bar{z} = 1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |z|^2|a|^2 \\ &= 1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2. \end{aligned}$$

比较以上两式就有:

$$|z-a|^2 = |1-\bar{a}z|^2 \implies \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = 1.$$

附例1.4

(1) 证明:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \geq |z_1| - |z_2| - \dots - |z_n|.$$

(2) 设 $0 < a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$, 证明: 方程

$$p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

在 $|z| < 1$ 内无根。

证明: 1) 由于复数模的不等式,

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \geq |z_1| - |(z_2 + z_3 + \dots + z_n)|, \quad (1)$$

而

$$|z_2 + z_3 + \dots + z_n| \leq |z_2| + |z_3| + \dots + |z_n| \quad (2)$$

因此, 由以上两式综合得到所要证明的结论:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \geq |z_1| - |z_2| - \dots - |z_n|.$$

2) 考虑函数 $G(z) = (1 - z)p_n(z)$, 只要证明 $G(z) = 0$ 在 $|z| < 1$ 内无根即可。而在 $|z| < 1$ 内

$$\begin{aligned} |(1 - z)p_n(z)| &= |-a_0 z^{n+1} + a_0 z^n - a_1 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots - a_{n-1} z^2 + a_{n-1} z + a_n - a_n z| \\ &= |a_n + (a_{n-1} - a_n)z + (a_{n-2} - a_{n-1})z^2 + \dots (a_0 - a_1)z^n - a_0 z^{n+1}| \\ &\geq |a_n| - |(a_{n-1} - a_n)z| - |(a_{n-2} - a_{n-1})z^2| - \dots - |(a_0 - a_1)z^n| - |a_0 z^{n+1}|. \end{aligned} \quad (3)$$

而根据已知条件: $0 < a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$, 可知: $|z| < 1$ 时, $|(a_{i-1} - a_i)z| < (a_i - a_{i-1})$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 另外 $|a_n| = a_n$, $|a_0 z^{n+1}| < a_0$, 因此

$$\begin{aligned} &|a_n| - |(a_{n-1} - a_n)z| - |(a_{n-2} - a_{n-1})z^2| - \dots - |(a_0 - a_1)z^n| - |a_0 z^{n+1}| \\ &> a_n - (a_n - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_{n-2}) - \dots - (a_1 - a_0) - a_0 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

综合以上(3)式和(4)式的结果, 在 $|z| < 1$ 时,

$$|(1 - z)p_n(z)| > 0.$$

推出 $|p_n(z)| > 0$, 也就是 $p_n(z) = 0$ 在 $|z| < 1$ 内没有根。证毕。

附例1.5 如果 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 证明 z_1, z_2, z_3 构成一个内接于单位圆的正三角形。

证明: 依条件:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= |(-z_2 - z_3) - z_2|^2 = |2z_2 + z_3|^2 = (2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= 4|z_2|^2 + |z_3|^2 + 2(z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3) = 5 + 2(z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3). \end{aligned} \quad (1)$$

同样可得到

$$|z_1 - z_2|^2 = 5 + 2(z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3) \quad (2)$$

以上两式相加除以2, 得到:

$$|z_1 - z_2|^2 = 5 + (z_1 + z_2)\bar{z}_3 + (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)z_3 = 5 - 2z_3\bar{z}_3 = 5 - 2|z_3|^2 = 3$$

于是

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$$

同理可得到

$$|z_1 - z_3| = \sqrt{3}, \quad |z_2 - z_3| = \sqrt{3}.$$

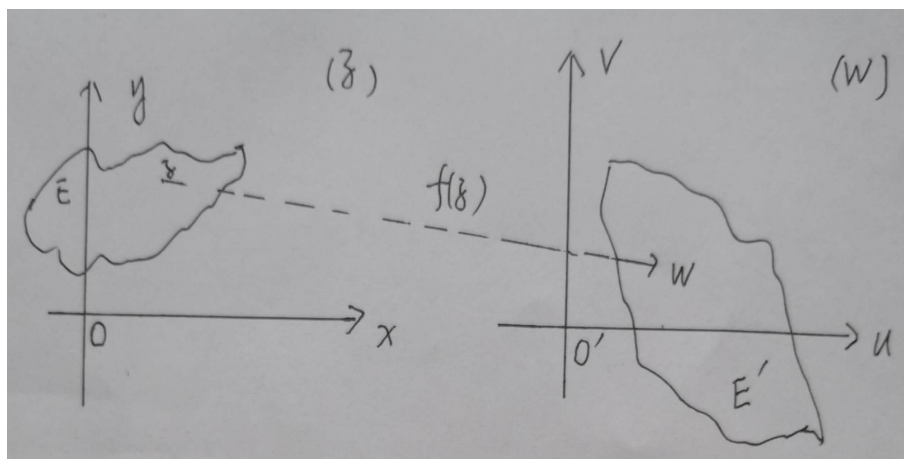
这样就证明了 z_1, z_2, z_3 构成一个内接于单位圆的正三角形(边长 $\sqrt{3}$)。

第二章 复变数函数

2.1节 复变函数的概念

复变函数的定义：

设 E 是复平面的一个点集，如果对 E 中的每个点 z ，都可以找到一个复数 ω 与之对应，就称 E 上定义了一个复变数函数。也简称为函数，记作 $\omega = f(z)$ 。



单值函数和多值函数

如果和每个点 z 对应的 ω 只有一个，这个函数为**单值函数**。如果和每个点 z 对应的 ω 不止一个，而是多个，这样函数为**多值函数**，比如函数

$$\omega = \text{Arg}z, \quad (z \neq 0)$$

每个点对应函数值有无穷多个，每两个不同的函数值之间相差一个 2π 的整数倍。所以这个函数是一个多值函数。以下讨论中，如果不加声明，所谈到函数都是指单值函数。

复变函数表示方法：

复变函数 $\omega = f(z)$ 除了可以用 z 的表示式直接来表示函数值 ω 外，也可以设

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

用实部和虚部的二元实函数来表示此复变函数。比如 $f(z) = xy + iy$ 就是一个复变函数。

复变函数的例子:

$$1. f(z) = xy + iy^2, \quad 2. f(z) = z^2, \quad 3. f(z) = az, \quad (a = r_0 e^{i\theta_0})$$

$$4. f(z) = \operatorname{Arg} z, \quad (\text{多值函数的例子}) \quad 5. f(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^3 + 5z + 3}$$

$$6. f(z) = z^3 + 3\bar{z}.$$

注2.1.1 在上一章给出了欧拉表示:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

实际上欧拉表示就给出了一个极其基础的复变函数

$$f(z) = e^z$$

建立在欧拉表示基础上, 我们可以定义复变函数的三角函数, 方法如下: 由于

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

因此

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (1)$$

进一步, 对以上定义在实轴上的三角函数定义域扩展到整个复平面, 定义

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (2)$$

$$\text{比如: } \cos i = \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \cosh 1.$$

例2.1.1 求下列曲线在 $\omega(z) = z^2$ 下的像:

- 1) 平行于y轴的直线。
- 2) 双曲线族 $x^2 - y^2 = c_1$, $2xy = c_2$.
- 3) 位于第一象限的圆弧 $z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

解: 令 $\omega(z) = u + iv$, 由于 $\omega(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$, 所以

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \quad (1)$$

- 1) 平行于y轴的直线表示为 $x = c$, 代入(1)式, 得到:

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy \quad (2)$$

当 $c \neq 0$ 时, 消去 y 得到

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}.$$

2) 双曲线族 $x^2 - y^2 = c_1$, 映为:

$$u = c_1$$

而 v 可以取任意实数。因此像对应 ω 平面的平行于 v 轴的直线。同理, $2xy = c_2$ 映为 ω 平面的平行于 u 轴的直线 $v = c_2$.

3) 令 $\omega = z^2 = \rho e^{i\varphi}$, 因为 $z = re^{i\theta}$, 因此

$$\rho e^{i\varphi} = r^2 e^{2i\theta} \implies \rho = r^2, \quad \varphi = 2\theta, \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

因而对应的像是 ω 平面内以原点为中心, r^2 为半径位于 u 轴上方的半圆周。

$$\omega = r^2 e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < \pi$$

2.2节 函数极限和连续性

定义2.2.1 设 $\omega = f(z)$ 在区域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 有定义。如果存在复常数 ω_0 , 使得

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - \omega_0| = 0,$$

则称 $z \rightarrow z_0$ 时, $f(z)$ 的极限值为 ω_0 .

定义2.2.2 如果

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

成立, 就称 $\omega = f(z)$ 函数在 z_0 连续。

由于 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, 则以上函数 $\omega = f(z)$ 在 z_0 连续的条件可以转化为实部虚部条件:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad \text{和} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

例2.2.1 连续函数的例子:

1. $f(z) = xy + iy^2$ 在全平面连续,

2. $f(z) = z^2$ 在全平面连续,

3. $f(z) = z^3 + 3\bar{z}$ 在全平面连续.

4. 有理函数

$$f(z) = \frac{z^3 + 3}{z^2 + 3z + 2}$$

在除了 $z = -1, z = -2$ 这两个使分母为0的点, 在全平面处处连续。

例2.2.2 研究函数

$$f(z) = \begin{cases} \arg z, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

的连续性。

解: 分以下几种情况考虑:

1) 取 $z_0 = 0$, 当 z 沿着正实轴和虚轴的正半轴两个不同方向趋于0时, $f(z) = \arg z$ 的值分别为0和 $\frac{\pi}{2}$. 这样 z 趋于0时, $f(z)$ 的极限不存在, 因而 $f(z)$ 在 $z = 0$ 不连续。

2) 若 $z_0 = x (< 0)$, 这时 $f(z) = \arg z$ 的自变量 z 由上半平面区域趋于 z_0 时, 极限为 π , 而当 z 由下半平面区域趋于 z_0 时, 极限为 $-\pi$, 所以 $f(z)$ 在负实轴不连续。

3) 对于其它 z_0 , 这时 $f(z) = \arg z$ 在 z_0 点连续。

2.3节 导数和解析的概念

复变函数可微的概念

定义2.3.1 设 $\omega = f(z)$ 在 z 的某个领域有定义, 如果极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

存在, 就称 $f(z)$ 在 z 点可微, 这个极限称为 $f(z)$ 在 z 点的导数或微商。记为:

$$f'(z), \quad \frac{df}{dz}, \quad \text{或} \quad \frac{d\omega}{dz}.$$

由于以上可微的条件可以改写为:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) + h(z), \quad (\text{当 } \Delta z \rightarrow 0 \text{ 时}, h(z) \rightarrow 0)$$

也就是

$$f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + h(z)\Delta z$$

根据(当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时, $h(z) \rightarrow 0$), 进一步推出 $f(z)$ 在 z 可微的等价条件:

$$f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

复变函数解析的概念

定义2.3.2 如果 $f(z)$ 在 z_0 的某个领域内可微, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析。如果 $f(z)$ 在区域D内每一点都可微, 实际上就可推出在区域D每一点都解析, 这时称 $f(z)$ 在D内解析。

5.3.1求证: 幂函数 $\omega = z^n$ 是全平面的解析函数, 并求出其导数。

证明: 由二项式定理,

$$(z + \Delta z)^n = z^n + C_n^1 z^{n-1} \Delta z + C_n^2 z^{n-2} (\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n,$$

因此极限

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} [C_n^1 z^{n-1} \Delta z + C_n^2 z^{n-2} (\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n] \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} C_n^1 z^{n-1} + C_n^2 z^{n-2} \Delta z + \dots + (\Delta z)^{n-1} = n z^{n-1}. \end{aligned}$$

这说明 $\omega = z^n$ 在全平面的任何一点都可微, 因而是全平面的解析函数。函数的导数为

$$(z^n)' = n z^{n-1}$$

5.3.1求证: $\omega = \bar{z}$ 在全平面每一点都不可微。

证明: 对于任意 z , 因为

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}. \quad (1)$$

对以上极限进行讨论:

1) 当取 $\Delta z = \Delta x$, 这时 Δz 沿着实轴趋于0, 上述极限化为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

2) 当取 $\Delta z = i\Delta y$, 这时 Δz 沿着虚轴趋于0, 上述极限化为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{i\Delta y}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

所以, Δz 沿着实轴和虚轴两个不同方向趋于0时候, 上述由式(1)表示的极限取到不同值, 所以极限不存在。这说明 $\omega = \bar{z}$ 在全平面每一点都不可微。

由于复变函数的导数的定义形式和实变数函数的导数的定义形式是一样的, 因此复变函数微商运算的基本法则也和实函数是一样的(可参看教材)。

2.4节 柯西-黎曼方程

一个复变函数可表示为

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

我们自然会提出这样一个问题：是否能直接通过已知的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 来判定复变函数 $f(z)$ 的可微性。以下定理将回答这个问题。

定理2.4.1 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z = x + iy$ 可微的充分必要条件是：

- 1) 二元函数在点 $u(x, y), v(x, y)$ 在点 $z = x + iy$ 可微。
- 2) $u(x, y)$ 以及 $v(x, y)$ 满足柯西-黎曼方程 (简称C-R方程)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

另外, $f(z)$ 可微时, $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

证明：先证明必要性, 设 $f(z)$ 在点 $z = x + iy$ 可微, 则根据可微的等价条件,

$$f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(|\Delta z|) \quad (1)$$

记 $f'(z) = a + ib$, 并根据 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, 把上式(1)实部和虚部分离得到:

$$\begin{aligned} & [u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)] \\ &= (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(\rho), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. 比较上式(2)的实部以及虚部, 得到

$$\text{实部: } u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = a\Delta x - b\Delta y + o(\rho), \quad (3)$$

$$\text{虚部: } v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = b\Delta x + a\Delta y + o(\rho), \quad (4)$$

由以上两式(3)和(4)可以知道: $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都是实可微函数, 并且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a. \quad (5)$$

由上式得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这就证明了必要性。以上步骤是可逆的, 就可得出充分性。另外, 结合以上得出的式(5), 有

$$f'(z) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

例2.4.1 试证明 $f(z) = e^z$ 在全平面解析, 且 $f'(z) = f(z)$.

证明：由欧拉表示

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

这样

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 显然是定义在全平面的可微函数, 并且有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

因此, 比较得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

也就是C-R方程成立。这说明了 $f(z)$ 在全平面上解析。再根据

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

得到

$$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z = f(z).$$

证毕。

例2.4.2 研究分式线性函数

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}$$

的解析性, 其中 a, b, c, d 为复常数。

解: $\omega(z)$ 的分子和分母都是 z 的一次函数, 是解析函数。所以按照导数的运算法则, 除了分母为0的点 $z = -\frac{d}{c}$ 外, 这个函数在全平面上处处可微, 因而除了使得分母为0的点 $z = -\frac{d}{c}$ 外, 这个函数在全平面上处处可微, 且

$$\omega'(z) = \frac{(az + b)'(cz + d) - (cz + d)'(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

例2.4.3 讨论函数 $f(z) = x^3 - y^3 + 2i(x^2y^2)$ 的可微点和解析点, 并求出可微点的导数

解: 依条件,

$$u(x, y) = x^3 - y^3, \quad v(x, y) = 2x^2y^2$$

显然, $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是定义在全平面的二元可微实函数。而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 4xy^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^2y$$

而C-R方程要求满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此,可微点要求

$$3x^2 = 4x^2y, \quad -3y^2 = -4xy^2.$$

解得满足C-R方程的点有 $(0,0)$ 和 $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, 即 $f(z)$ 在 $z_1 = 0, z_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i$ 可微, 其它点不可微, 并且

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f'(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})} = \frac{27}{16}(1+i).$$

这个函数在全平面处处不解析。

例2.4.4 讨论 $\omega = |z|^2$ 的可微性和解析性

解法1: $\omega = |z|^2 = x^2 + y^2$, 所以

$$u = |z|^2 = x^2 + y^2, \quad v = 0$$

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

而C-R方程要求满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此解得:满足C-R方程的点只有 $(0,0)$, 也就是 $\omega(z)$ 只在 $z = 0$ 可微。这时

$$\omega'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = 0.$$

由于在 $z \neq 0$ 的其它点函数不可微, 所以这个函数在全平面处处不解析。

解法2: 由于 $f_1(z) = z$ 是全平面处处可微函数且 $f_2(z) = \bar{z}$ 是全平面处处不可微函数, 因此在 $z \neq 0$ 时,

$$\omega(z) = z\bar{z} = f_1(z)f_2(z)$$

为不可微函数。在 $z = 0$ 点, 由于极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|^2 - 0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = 0$$

说明函数 $\omega(z)$ 在 $z = 0$ 点可微, 且 $\omega'(0) = 0$. 综上, 此函数除了在 $z = 0$ 外, 处处不可微, 在全平面处处不解析。

2.5节 初等函数

一.各种初等函数

1)幂函数

1. $\omega(z) = z^n$, $\omega'(z) = nz^{n-1}$, 如果 $z = re^{i\theta}$, 则 $z^n = r^n e^{in\theta}$.

2. $\omega(z) = \sqrt[n]{z}$, $z = re^{i\theta}$, 则

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.5.1)$$

2) 指数函数

$$f(z) = e^z = e^{x+iy}, \quad (e^z)' = e^z.$$

3) 对数函数

设已经给定的复数 $z \neq 0$, 满足方程 $e^\omega = z$ 的复数称为 z 的对数, 记作 $\omega = \text{Ln}z$, 把 z 看成复变数, 它就是 z 的复变函数。

设 $\omega = u + iv$, 则

$$e^{u+iv} = z \implies e^u = |z|, \quad v = \text{Arg}z.$$

即

$$u = \ln |z|, \quad v = \text{Arg}z.$$

因此就得出

$$\text{Ln}z = \ln |z| + i \text{Arg}z = \ln |z| + i(2k\pi + \arg z), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$k = 0$ 时, 对应 $\text{Arg}z$ 的主值 $\arg z$, 这时记

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

例如:

$$\text{Ln}(-1) = \ln |-1| + i(2k\pi + \arg(-1)) = i(2k\pi + \pi), \quad \ln(-1) = i\pi.$$

$$\text{Ln}(1+i) = \ln |1+i| + i(2k\pi + \arg(1+i)) = \ln \sqrt{2} + i \left(2k\pi + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\ln(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}.$$

4) 三角函数 $\cos z$, $\sin z$ 分别定义为:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

比如:

$$\begin{aligned} \sin(2+i) &= \frac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i} = \frac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-1}(\cos 2 + i \sin 2)}{2i} - \frac{e(\cos 2 - i \sin 2)}{2i} = \sin 2 \cosh 1 + i \cos 2 \sinh 1. \end{aligned}$$

$\cos z$ 和 $\sin z$ 有以下性质:

1. 周期性: $\cos z$ 和 $\sin z$ 都以 2π 为周期, 即

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z$$

证明:

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{i2\pi}e^{iz} + e^{-i2\pi}e^{-iz}}{2}$$

而 $e^{i2\pi} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 1$, 同理 $e^{-i2\pi} = 1$, 代入上式得到:

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

类似地可证明: $\sin(z + 2\pi) = \sin z$.

2. 零点

$\sin z = 0$ 在复平面的所有解为: $z_k = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\cos z = 0$ 在复平面的所有解为: $z_k = k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

以上关于零点结论我们将在下面例题中证明。

3. 导数性质

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

证明: 由于

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

根据导数运算的线性性质:

$$(\sin z)' = \frac{(e^{iz})' - (e^{-iz})'}{2i} = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

同理可证明: $(\cos z)' = -\sin z$.

4. 实的三角公式在复的情形仍然成立

例如

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} - \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{4} = 1. \end{aligned}$$

再例如

$$\begin{aligned} \sin(z_1 + z_2) &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \frac{e^{iz_1}e^{iz_2} - e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2})}{2i} + \frac{(e^{iz_2} - e^{-iz_2})(e^{iz_1} + e^{-iz_1})}{2i} = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1. \end{aligned}$$

这就证明了三角公式: $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$. 利用这个公式, 可重新计算

$$\sin(2 + i) = \sin 2 \cos i + \sin i \cos 2 = \sin 2 \cosh 1 + i \cos 2 \sinh 1.$$

5. $\cos z$ 和 $\sin z$ 是无界函数

以下以 $\cos z$ 为例来说明这个性质: 取点列 $z_n = in$,

$$\cos z_n = \cos in = \frac{e^{iin} + e^{-iin}}{2} = \frac{e^{-n} + e^n}{2} = \cosh n$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos z_n = +\infty$$

这说明 $\cos z$ 在整个复平面上是无界函数。类似地, 可说明 $\sin z$ 是无界函数。

5) 双曲函数: 类似于实变量情形, 复的双曲函数定义为:

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, & \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z}. \end{aligned}$$

6) 一般幂函数:

在中学里, 有公式 $x^n = e^{n \ln x}$, 其中 $x > 0$. 这一思路可用来定义复变函数的一般幂函数。定义

$$z^\alpha = \exp\{\alpha \operatorname{Ln} z\},$$

其中 α 为复常数。可以直接验证, 前面定义的整数幂函数和根式幂函数和此定义是一致的。我们举以下例子说明一般 α 的情况: 例如

$$i^i = \exp i \operatorname{Ln} i = \exp \left[i^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] = \exp \left(-2k\pi - \frac{\pi}{2} \right),$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 又例如

$$\begin{aligned} 2^{1+i} &= \exp [(1+i) \operatorname{Ln} 2] = \exp [(1+i)(\ln 2 + i2k\pi)] \\ &= \exp [\ln 2 - 2k\pi + i(\ln 2 + 2k\pi)] = 2e^{-2k\pi} (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2). \end{aligned}$$

7) 反三角函数 如果 $\sin \omega = z$, 则 ω 称为 z 的反正弦函数, 记为 $\omega = \operatorname{Arc} \sin z$. 类似地, 可定义 $\omega = \operatorname{Arc} \cos z$ 等其它反三角函数。

如果 $z = \sin \omega$, 则

$$z = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}.$$

得到:

$$e^{2i\omega} - 2ize^{i\omega} - 1 = 0$$

把此方程当作 $e^{i\omega}$ 的二次方程,解之得:

$$e^{i\omega} = iz + \sqrt{-z^2 + 1}$$

此式两边取对数并整理得到计算公式:

$$\omega = \text{Arc sin } z = -i \text{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

其它反三角函数也可以用类似方法推得,这儿不再赘述。

例2.5.1 求方程

$$\sin z = 0$$

的所有解。

解 原方程即为

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$$

化为

$$e^{2iz} = 1 \implies 2iz = \text{Ln } 1 = i(2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

因此, 方程解:

$$z_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

单叶函数和单叶性区域的概念

定义2.5.1 如果 $\omega = f(z)$ 是区域D内的一一的解析映射, 则称 $\omega = f(z)$ 是D内的单叶函数, D简称单叶性区域。

1. 整数幂函数的单叶性区域。

整数阶幂函数为

$$f(z) = z^n$$

以最简单的幂函数 $g(z) = z^2$ 为例, 整个复平面不是它的单叶性区域, 因为 $z_{1,2} = \pm 1$ 经过 $g(z) = z^2$ 映射到同一个点 $\omega = 1$ 。怎样找出整数阶幂函数的单叶性区域呢? 下面我们通过计算找出 $f(z) = z^n$ 的一个典型的单叶性区域:

假定区域D有两个不同点 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta}$, 使得 $f(z_1) = f(z_2)$, 即

$$z_1^n = z_2^n \implies r_1^n e^{in\theta_1} = r_2^n e^{in\theta_2} \quad (1)$$

比较上式(1)中的幅角, 可知 $n\theta_1 = 2k\pi + n\theta_2$, 也就是

$$\theta_1 - \theta_2 = k \frac{2\pi}{n} \quad (2)$$

上式(2)得出的条件是区域D不是单叶性区域的必要条件, 也就是说: 如区域D是 $f(z) = z^n$ 的单叶性区域, 那么在区域D中必定存在不同的两个点 z_1 和 z_2 , 使得 z_1 和 z_2 的幅角之差为 $\frac{2\pi}{n}$ 的非0整数倍。这样, 我们只要取以原点为顶点张角不超过 $\frac{2\pi}{n}$ 的角形域, 在这样的

区域D中任何两点 z_1 和 z_2 幅角之差不可能为 $\frac{2\pi}{n}$ 的非0整数倍。因此,以原点为顶点张角不超过 $\frac{2\pi}{n}$ 的角形域就是 $f(z) = z^n$ 的单叶性区域。用数学表达式表示此类单叶性区域就是:

$$D = \{z \mid \alpha < \arg z < \beta, \quad \beta - \alpha < \frac{2\pi}{n}\}$$

2. $f(z) = e^z$ 的单叶性区域

对于 $f(z) = e^z$ 来说,如 $f(z_1) = f(z_2)$,即

$$e^{z_1} = e^{z_2}, \quad (z_1 \neq z_2)$$

利用欧拉表示,即有

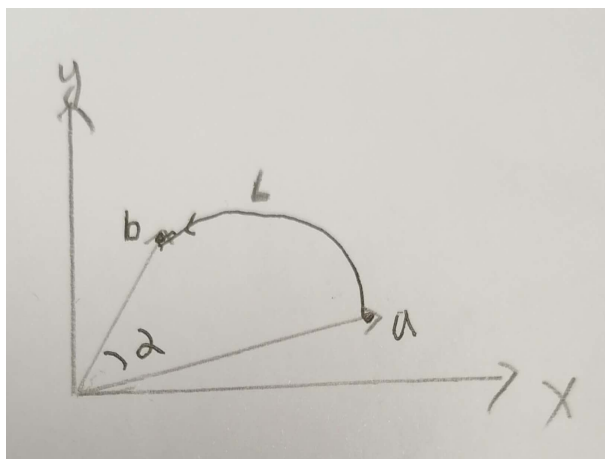
$$e^{x_1+iy_1} = e^{x_2+iy_2} \implies y_1 - y_2 = 2k\pi \quad (3)$$

根据上式(3),我们只要选取边界平行于x轴宽度不超过 2π 水平条形区域,就是 $f(z) = e^z$ 的单叶性区域。比如区域

$$D_0 = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$$

多值函数的单值解析分支:

1.幅角的变化 设在z平面上有一条起点为a终点为b的曲线l,如果选定a点的幅角为 $\operatorname{Arg} a$,当z沿着l从a向b运动时,幅角也从a向b开始连续变化,而得到b点的幅角为一个确定值: $\operatorname{Arg} b = \operatorname{Arg} a + \alpha$,如图:



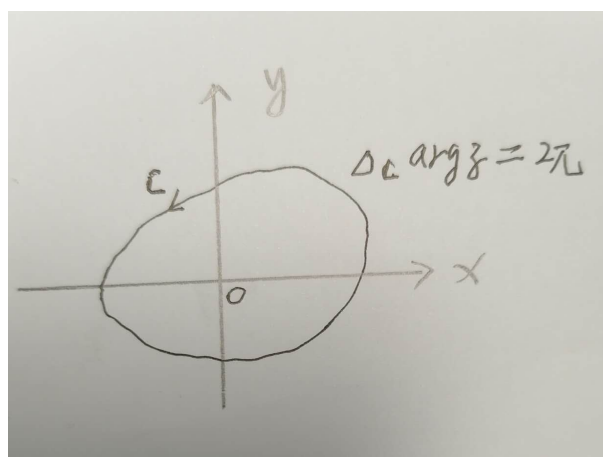
称 $\alpha = \operatorname{Arg} b - \operatorname{Arg} a$ 为沿着曲线l的幅角的变化,记为 $\Delta_l \arg z$. 显然 $\Delta_l \arg z$ 与 $\operatorname{Arg} a$ 的选定无关。

下面考虑z沿着一条闭曲线C运动时候,它的幅角发生的变化。以下给出两种典型情况:

(1) 如果我们选择闭路C内部包含原点,那么z沿着闭路C正向转一周时候

$$\Delta_C \arg z = 2\pi.$$

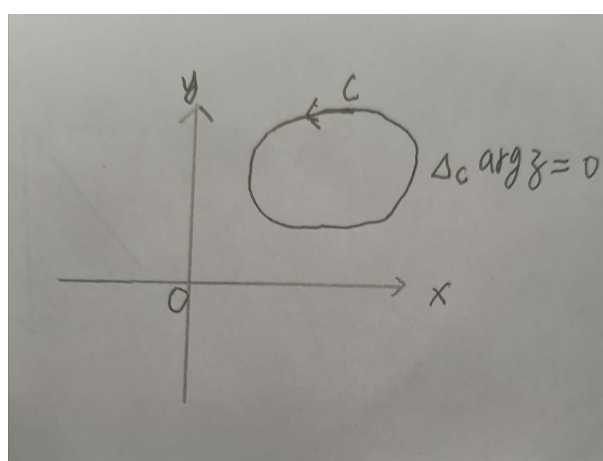
如图:



(2) 如果我们选择闭路C内部不包含原点, 那么 z 沿着闭路C正向转一周时候

$$\Delta_C \arg z = 0.$$

如图:



2.支点的定义 对于多值函数 $\omega = f(z)$, 若 $z = a$ 具有这样一个特性: 在 $z = a$ 的充分小的领域内, 作一条包围该点的闭曲线C, 当 z 从C上某个点出发, 绕C连续变动一周回到出发点时候, $f(z)$ 的值由一支变化到另外一支。就称 z 为 $f(z)$ 的支点。

比如, 从任何一个不为0的点连续绕原点一周回到原来位置时, 这个点对应的幅角增加了 2π 。因此对于多值函数 $f(z) = \text{Arg}z$ 来说, $z = 0$ 就是它的支点。另外, 由于包围 $z = 0$ 的曲线从另外一个角度上看也是包围 $z = \infty$ 的曲线, 因此 $z = \infty$ 也是 $f(z) = \text{Arg}z$ 的支点。而任取一个不同于 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 的点 z_0 , 点 z 绕 z_0 旋转一周回到出发点时, 幅角变化总和为0, 因此 z_0 不是支点。综上, $f(z) = \text{Arg}z$ 这个多值函数的支点共有 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 两个点。类似地可知, 多值函数 $\sqrt[n]{z}$ 的支点也是 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 两个点。

3. 支割线和多值函数的单值解析分支

支割线是指支点之间的连线, 在去掉支割线的复平面上, 就可以定义多值函数的单值分支。这是因为在去掉支割线的复平面(或称为割开了支割线的 z 平面), 任何一个

点不可能绕着多值函数的支点转一周, 否则就要经过支割线, 而支割线已经从复平面中去掉了。

单值解析分支的定义 $F(z)$ 是区域 D 的多值函数, $f(z)$ 是 D 内的单值解析函数。如果 $f(z)$ 在 D 内每个点的值, 都等于 $F(z)$ 在该点的一个值, 则称 $f(z)$ 是 $F(z)$ 在区域 D 内的一个单值解析分支。

对于函数 $\sqrt[n]{z}$, 它的支点是 $z = 0$ 和 $z = \infty$, 所以任何一条连接以 $z = 0$ 为起点到 $z = \infty$ 的射线, 都可以作为支割线。例如, 取负半实轴为支割线, 选定 $\text{Arg}1 = 0$, 这个割开了的 z 平面的幅角为 $-\pi < \text{Arg}z < \pi$, 在这个割开了的 z 平面上可确定 $\sqrt[n]{z}$ 的一支, 就是对应 $\sqrt[n]{z}$ 表示式(2.5.1)中 $k = 0$ 的一支, 这时 $\text{Arg}z = \text{arg}z$, 这一支相应的表示式为

$$\omega_0 = (\sqrt[n]{z})_0 = \sqrt[n]{r} \left(i \frac{\text{arg}z}{n} \right), \quad -\pi < \text{arg}z < \pi$$

如规定 $\text{Arg}1 = 2\pi$, 那么相应地割开了的 z 平面的幅角为

$$\pi < \text{Arg}z < 3\pi.$$

在此割开的复平面上可确定 $\sqrt[n]{z}$ 另外一支, 即对应 $k=1$ 的一支, 即

$$\omega_1 = (\sqrt[n]{z})_1 = \sqrt[n]{r} \exp \left(i \frac{2\pi + \text{arg}z}{n} \right), \quad -\pi < \text{arg}z < \pi$$

一般地, 如规定 $\text{Arg}1 = 2k\pi$, 那么相应地割开了的 z 平面的幅角为

$$(2k-1)\pi < \text{Arg}z < (2k+1)\pi.$$

在此割开的平面可定义第 k 支单值解析分支:

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} \exp \left(i \frac{2k\pi + \text{arg}z}{n} \right), \quad -\pi < \text{arg}z < \pi$$

ω_k 把割开的 z 平面 $(2k-1)\pi < \text{arg}z < (2k+1)\pi$ 单叶地映为区域 D_K :

$$(2k-1)\pi/n < \text{arg}\omega < (2k+1)\pi/n$$

对于以上讨论的 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个单值解析分支 $\omega_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 因 $z = \omega_k^n$, 由反函数的求导法则, 有

$$\frac{d\omega_k}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{d\omega_k}} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{nz} \quad (2.5.2)$$

类似地, 多值函数 $\text{Ln}z$ 的支点也为 0 和 ∞ , 可取正实轴为支割线, 在沿着正实轴割开的 z 平面 D_1 上, 可定义以下任意一个 $\text{Ln}z$ 的单值解析分支:

$$\omega_k = (\text{Ln}z)_k = \ln|z| + i(2k\pi + \text{arg}z), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (0 < \text{arg}z < 2\pi)$$

它们把区域 D_1 单叶地变成条形区域: $2k\pi < \text{Im}\omega < 2k\pi + 2\pi$.

例2.5.2 设 $\omega = \sqrt[3]{z}$ 确定在沿着正实轴割开的 z 平面上, 并且 $\omega(i) = -i$, 求 $\omega(-i)$ 及 $\omega'(-i)$.

解: 在割开正实轴的 z 平面上, 可分别定义的 $\omega = \sqrt[3]{z}$ 的3个单值解析分支为:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt[3]{|z|} \exp\left(i\frac{\arg z}{3}\right), \\ \omega_1 &= \sqrt[3]{|z|} \exp\left(i\frac{2\pi + \arg z}{3}\right) \\ \omega_2 &= \sqrt[3]{|z|} \exp\left(i\frac{4\pi + \arg z}{3}\right)\end{aligned}$$

由于 z 平面是由正实轴割开, 所以要保证 $\arg z$ 的连续性, 这儿取 $0 < \arg z < 2\pi$. 它们分别将沿着正实轴割开的 z 平面变成角域 $0 < \arg \omega < \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < \arg \omega < \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} < \arg \omega < 2\pi$. $-i$ 在第三个角域中, 故应取 ω_2 这一支满足 $\omega(i) = -i$. 而

$$w_2(-i) = \sqrt[3]{|-i|} \exp\left(i\frac{4\pi + \arg(-i)}{3}\right) = \exp\left(i\frac{4\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}\right) = \exp\left(i\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},$$

这样根据公式(2.5.2), 求得

$$w'_2(-i) = \frac{w_2(-i)}{3(-i)} = \frac{i}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

4. 支割线两岸的函数值 一般来说, 多值函数在支割线两岸的函数值是不同的, 例如在沿着正实轴割开的 z 平面上, 函数 $f(z) = \operatorname{Arg} z$ 在支割线的上岸的值如果规定为0, 那么沿某条曲线连续变化回到支割线下岸时候, 幅角增加了 2π , 因此 $f(z) = \operatorname{Arg} z$ 在支割线下岸的值就变为 2π 了.

类似地, 在沿着正实轴割开的 z 平面上, 定义 $f(z) = \sqrt[3]{z}$ 的单值解析分支

$$\omega_0 = \sqrt[3]{|z|} \exp\left(i\frac{\arg z}{3}\right), \quad (\text{这里定义 } 0 < \arg z < 2\pi).$$

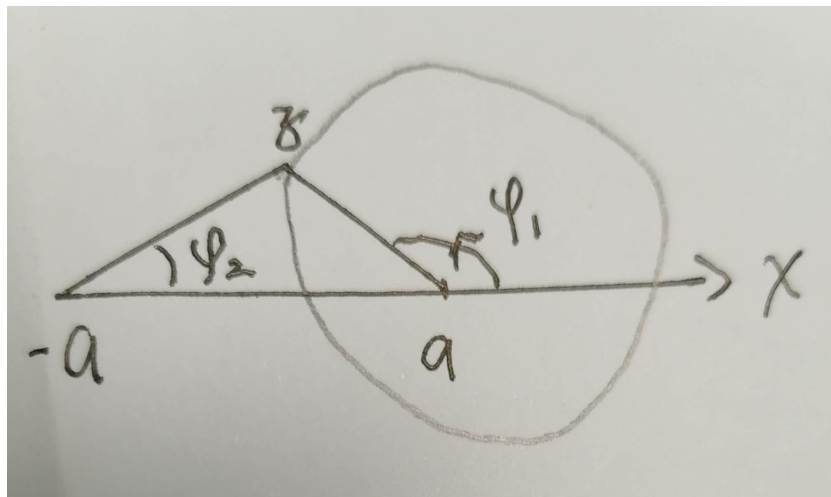
这样, 在支割线上岸: $z = xe^{i0}, x > 0$, 所以 $\omega_0 = \sqrt[3]{x}$; 而在支割线下岸, $z = xe^{i2\pi}$, 所以 $\omega_0 = \sqrt[3]{xe^{i2\pi}}$.

综上所述, 在研究一个多值函数 $\omega = f(z)$ 时候, 首先确定出它的支点, 然后用一些连接支点的简单曲线(即支割线)把平面割开。由于在割开的 z 平面上, 不可能存在包围支点的闭曲线, 所以就不可能有一个点围绕着支点转一周而使 $\omega = f(z)$ 的函数值由一支变到另外一支的现象发生, 因此在割开的 z 平面(或者说去掉支割线的复平面), 就可以定义 $\omega = f(z)$ 的单值解析分支了。

最后我们以函数 $f(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$ 为例来进一步阐明上述讨论。由于 \sqrt{z} 的支点为0和 ∞ , 所以函数 $f(z)$ 的可能支点为使得 $z^2 - a^2$ 为0和 ∞ 的点, 即 $a, -a$ 以及 ∞ . 下面我们分析以下三点是否为

$$f(z) = \sqrt{|z^2 - a^2|} \exp\left[i\frac{\operatorname{Arg}(z-a) + \operatorname{Arg}(z+a)}{2}\right] \quad (2.5.3)$$

的支点。先讨论 $z = a$, 作一条包含 $z = a$ 的简单闭曲线, 对曲线上的任意点 z , 先分别选定 $\operatorname{Arg}(z-a)$ 和 $\operatorname{Arg}(z+a)$ 的值为 φ_1 和 φ_2 , z 沿着绕 a 点的闭曲线正向转一周时, 如图:



φ_1 增加 2π , 而 φ_2 不变。因此, $f(z)$ 的幅角将增加 $(2\pi + 0)/2 = \pi$, 这样 $f(z)$ 的函数值要改变一个因子: $e^{\pi i} = -1$. 所以 $z = a$ 是 $f(z)$ 的支点。同样 $z = -a$ 也是 $f(z)$ 的支点。但是, 对于 $z = \infty$ 的领域 $|z| > a$ 内任意一条闭曲线 C , 在 C 内必含有 $z = a$ 和 $z = -a$, 当 z 沿着 C 正向运行一周时候, φ_1 和 φ_2 各增加 2π . 因而 $f(z)$ 的幅角 $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ 将增加 2π , $f(z)$ 等于乘以因子 $e^{2\pi i} = 1$. 这样 $z = \infty$ 不是 $f(z)$ 的支点。

由于 $f(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$ 的支点为 a 和 $-a$, 因此在割去 $[-a, a]$ 的平面上, 它能分别定义 $f(z)$ 的两个单值解析分支, 其一阶导数和二阶导数分别为:

$$f'(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{z}{f(z)}, \quad (2.5.4)$$

$$f''(z) = \frac{1}{f(z)} - \frac{zf'(z)}{f^2(z)} = \frac{1}{f(z)} - \frac{z^2}{f^3(z)} \quad (2.5.5)$$

例2.5.3 设 $\omega(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$ 确定在割开了 $[-a, a]$ 的 z 平面上, 并且 $\omega(z)$ 在支割线 $-a \leq z \leq a$ 上沿的取值形式为 $-bi$ ($b > 0$), 求 $f(2a)$, $f'(2a)$ 和 $f''(2a)$.

解: 在割开 $[-a, a]$ 的 z 平面上, 可分别定义的 $\omega(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$ 的 2 个单值解析分支为:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{|z^2 - a^2|} \exp \left[i \frac{\arg(z - a) + \arg(z + a)}{2} \right] \\ \omega_1 &= \sqrt{|z^2 - a^2|} \exp \left[i \frac{\arg(z - a) + \arg(z + a)}{2} + \pi i \right] = -\omega_0 \end{aligned}$$

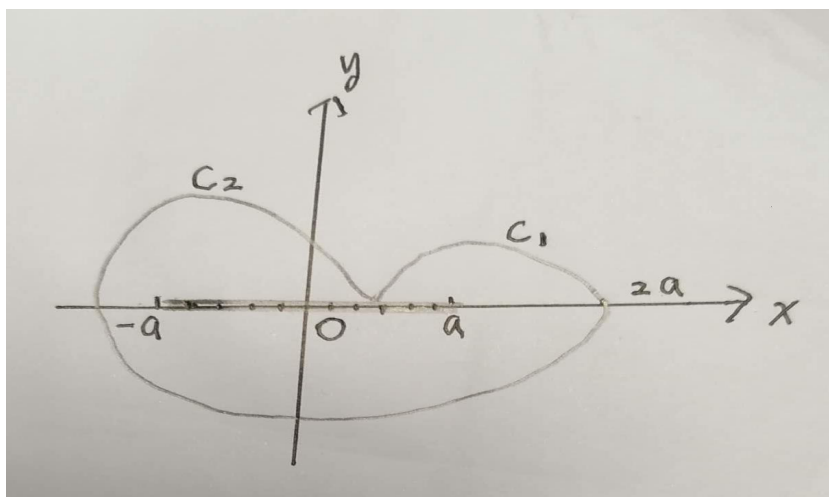
在 $(-a, a)$ 的上沿, 规定 $\arg(z - a) = \pi$, $\arg(z + a) = 2\pi$, 这样,

$$\omega_0 = \sqrt{|x^2 - a^2|} \exp \left[\frac{i(\pi + 2\pi)}{2} \right] = -bi, \quad b = \sqrt{|x^2 - a^2|}$$

因此应取 ω_0 这一支。当 z 沿着下图中曲线 C_1 , 从 $(-a, a)$ 的上沿变化到 $2a$ 点时, $\arg(z - a)$ 变化 $-\pi$, $\arg(z + a)$ 变化为 0, 这样在 $z = 2a$ 处, 有

$$\arg(z - a) = 0, \quad \arg(z + a) = 2\pi$$

所以在 $z = 2a$ 处, $\arg \omega_0(z) = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi$;



而当 z 沿着图中曲线 C_2 , 从 $(-a, a)$ 的上沿变化到 $2a$ 点时, $\text{Arg}(z - a)$ 变化 π , $\text{Arg}(z + a)$ 变化为 2π , 这样在 $z = 2a$ 处, 有

$$\text{Arg}(z - a) = 2\pi, \quad \text{Arg}(z + a) = 4\pi$$

所以在 $z = 2a$ 处, $\text{Arg}\omega_0(z) = \frac{2\pi + 4\pi}{2} = 3\pi$. 但是, 无论怎样,

$$\omega_0(2a) = \sqrt{|z^2 - a^2|} \Big|_{z=2a} e^{i\pi} = \sqrt{|z^2 - a^2|} \Big|_{z=2a} e^{i3\pi} = -\sqrt{3}a$$

这样根据公式(2.5.4), (2.5.5)求得:

$$\omega'_0(2a) = \frac{z}{\omega_0(z)} \Big|_{z=2a} = \frac{2a}{\omega_0(2a)} = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\omega''_0(2a) = \left(\frac{1}{\omega_0(z)} - \frac{z^2}{\omega_0^3(z)} \right) \Big|_{z=2a} = -\frac{1}{\sqrt{3}a} - \frac{4a^2}{-3\sqrt{3}a^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}a}.$$

本章部分习题或难题解答

附例2.1 函数 $\omega = \frac{1}{z}$ 把 z 平面曲线

$$(x - 1)^2 + y^2 = 5$$

变为 ω 平面什么曲线?

解: 利用变换

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

则原平面曲线表示为复变量形式:

$$z\bar{z} - z - \bar{z} = 4$$

把 $\omega = \frac{1}{z}$ 代入上式, 方程变为:

$$4\omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega} = 1$$

再把 $\omega = u + iv$ 代入, 得到像曲线的实形式:

$$4(u^2 + v^2) + 2u = 1$$

这在像平面是一个以 $(-\frac{1}{4}, 0)$ 为中心, $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 为半径的圆。

附例2.2 设 $P_n(z)$ 是 $n(\geq 1)$ 次多项式, 证明: $z \rightarrow \infty$ 时, $p_n(z) \rightarrow \infty$.

证明: 不妨设

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$$

则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{z^n} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \dots + a_n \frac{1}{z^n} \right) = 1$$

而

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |z^n| = +\infty$$

因此只有

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |P_n(z)| = +\infty$$

也就是

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P_n(z) = \infty$$

附例2.4 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 解析, 且

$$f(z_0) = g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) \neq 0.$$

求证:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

证明: 根据条件 $f(z_0) = g(z_0) = 0$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

证毕。

附例2.5 若 $f(z)$ 在区域D解析, 且 $|f(z)|$ 为常数, 求证 $f(z)$ 为常数。

证明: 设 $f(z) = u + iv$, 依照条件

$$u^2 + v^2 = c$$

上式两边对 x, y 分别求导, 得到:

$$uu_x + vv_x = 0, \quad uu_y + vv_y = 0. \quad (1)$$

由于 $f(z)$ 在区域 D 解析, 故有 C-R 方程成立, 即

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (2)$$

这样代入(1)有:

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0, \\ vu_x - uv_x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

上式(3)可以看成关于 u_x, v_x 的二元一次齐次方程组, 讨论如下:

1) 在区域 D 内存在点 (x_0, y_0) , 使得 $u(x_0, y_0) = 0, v(x_0, y_0) = 0$. 根据条件 $|f(z)|$ 为常数, 则在 D 内

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = u^2(x_0, y_0) + v^2(x_0, y_0) = 0 \implies f(z) = 0.$$

2) 在区域 D 内任何一点, $(u, v) \neq (0, 0)$, 这样 $u^2 + v^2 \neq 0$, 即方程组(3)的系数行列式不可能为 0, 这样只有

$$u_x = 0, \quad v_x = 0$$

进一步再用 C-R 方程

$$u_y = 0, \quad v_y = 0$$

因此 u, v 在 D 内为常数。也就是 $f(z)$ 为常数。

附例2.6 证明函数 $\omega = z^2 + 2z + 3$ 在圆 $|z| < 1$ 内为单叶映照。

证明: 显然 ω 是个单值解析函数, 下面进一步证明它是一一映射: 任取圆 $|z| < 1$ 内的两点 z_1 和 z_2 , 只要证明 $\omega(z_1) \neq \omega(z_2)$. 用反证法, 假定在圆 $|z| < 1$ 内有不同两点 z_1 和 z_2 , 使得 $\omega(z_1) = \omega(z_2)$, 则

$$z_1^2 + 2z_1 + 3 = z_2^2 + 2z_2 + 3 \implies (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + 2) = 0 \quad (1)$$

由于 $|z_1| < 1$ 和 $|z_2| < 1$, 所以 $z_1 + z_2 + 2 \neq 0$, 再结合上式(1)得出: $z_1 = z_2$. 这就造成了矛盾。证毕。

附例2.7 证明: $\omega(z) = \sqrt[4]{z(1-z)^3}$ 在线段 $0 \leq x \leq 1$ 外部能分出单值解析分支, 并且割线 $[0, 1]$ 上沿的取值正值那一支在 $z = -1$ 的函数值和导数值。

解： 我们首先证明 $\omega(z)$ 的支点为 $z = 0$ 和 $z = 1$. 由于 $\sqrt[4]{z}$ 的支点为0和 ∞ , 所以函数 $\omega(z)$ 的可能支点为使得 $z(1-z)^3$ 为0和 ∞ 的点, 即0, 1以及 ∞ . 下面我们分析以下三点是否为

$$\omega(z) = \sqrt[4]{|z(1-z)^3|} \exp \left[i \frac{\text{Arg}z + 3\text{Arg}(1-z)}{4} \right]$$

的支点。先讨论 $z = 0$, 作一条包含 $z = 0$ 的简单闭曲线, 对曲线上的任意点 z , 先分别选定 $\text{Arg}z$ 和 $\text{Arg}(1-z)$ 的值为 φ_1 和 φ_2 , 当 z 沿着闭曲线正向绕行一周时, φ_1 增加 2π , 而 φ_2 不变。因此, $\omega(z)$ 的幅角将增加 $(2\pi + 0)/4 = \frac{\pi}{2}$, 这样 $\omega(z)$ 的函数值要改变一个因子: $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$. 所以 $z = 0$ 是 $\omega(z)$ 的支点。同样 $z = 1$ 也是 $\omega(z)$ 的支点。但是, 对于 $z = \infty$ 的邻域 $|z| > 1$ 内任意一条闭曲线 C , 在 C 内必含有 $z = 0$ 和 $z = 1$, 当 z 沿着 C 正向运行一周时候, φ_1 和 φ_2 各增加 2π 因而 $f(z)$ 的幅角 $(\varphi_1 + 3\varphi_2)/4$ 将增加 2π , $\omega(z)$ 等于乘以因子 $e^{2\pi i} = 1$. 这样 $z = \infty$ 不是 $\omega(z)$ 的支点。

在割开 $[0, 1]$ 的 z 平面上, 可分别定义的 $\omega(z) = \sqrt[4]{z(1-z)^3}$ 的4个单值解析分支为:

$$\omega_0 = \sqrt[4]{|z(1-z)^3|} \exp \left[i \frac{\arg z + 3\arg(1-z)}{4} \right]$$

$$\omega_1 = \sqrt[4]{|z(1-z)^3|} \exp \left[i \frac{\arg z + 3\arg(1-z)}{4} + \frac{\pi}{2}i \right]$$

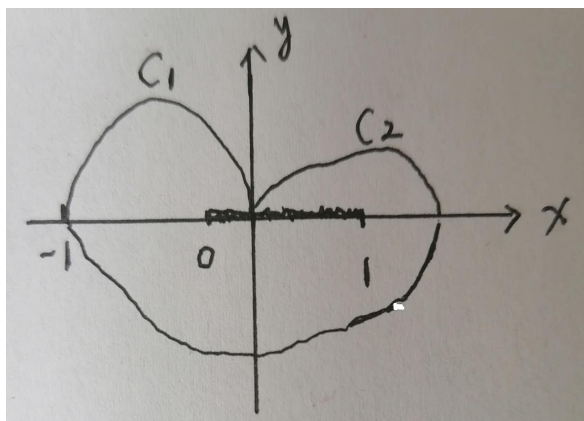
$$\omega_2 = \sqrt[4]{|z(1-z)^3|} \exp \left[i \frac{\arg z + 3\arg(1-z)}{4} + \pi i \right]$$

$$\omega_3 = \sqrt[4]{|z(1-z)^3|} \exp \left[i \frac{\arg z + 3\arg(1-z)}{4} + \frac{3\pi}{2}i \right]$$

在 $(0, 1)$ 上沿规定 $\arg z = 0$, $\arg(1-z) = 0$, 这样, 在 $(0, 1)$ 的上沿,

$$\omega_0 = \sqrt{|x(1-x)^3|}$$

因此应取 ω_0 这一支可保证在 $(0, 1)$ 上沿取正值。当 z 沿着下图中曲线 C_1 , 从 $(0, 1)$ 的上沿变化到-1点时, $\arg z$ 变化 π , $\arg(1-z)$ 变化为0.



这样在 $z = -1$ 处, 有

$$\operatorname{Arg} z = \pi, \quad \operatorname{Arg}(1 - z) = 0$$

所以在 $z = -1$ 处, $\operatorname{Arg} \omega(z) = \frac{0 + \pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

当 z 沿着图中曲线 C_2 , 从 $(0, 1)$ 的上沿变化到 -1 点时, $\arg z$ 变化 $-\pi$, $\arg(1 - z)$ 变化为 -2π , 这样在 $z = -1$ 处, 有

$$\operatorname{Arg} z = -\pi, \quad \operatorname{Arg}(1 - z) = -2\pi$$

所以在 $z = -1$ 处, $\operatorname{Arg} \omega_0(z) = \frac{-\pi + 3 \times (-2\pi)}{4} = -\frac{7\pi}{4}$; 但是, 无论怎样,

$$\omega_0(-1) = \sqrt[4]{|z(1-z)^3|} \Big|_{z=-1} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[4]{|z(1-z)^3|} \Big|_{z=-1} e^{-i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt[4]{8} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[4]{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

进一步

$$\begin{aligned} \omega'_0(-1) &= \omega'_0(z) \Big|_{z=-1} = \frac{1}{4} \left[\frac{(1-z)^3 - 3(1-z)^2 z}{\left(\sqrt[4]{z(1-z)^3} \right)^3} \right] \Big|_{z=-1} = \frac{1}{4} \left[\frac{(1-z)^3 - 3(1-z)^2 z}{\omega_0^3(z)} \right] \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{20}{8^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{3}{4}\pi}} \right) = -\frac{5}{8} \sqrt[4]{8} e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{5}{8} \sqrt[4]{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

附例2.8 判别以下极限是否存在

$$1) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^z} \qquad 2) \lim_{z \rightarrow \infty} z \sin \frac{1}{z}$$

解: 1) 取 $z = x$, z 沿着实轴趋于 ∞ , 这时

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^z} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

但取 $z = iy$, $y > 0$, 即 z 沿着虚轴正半轴趋于 ∞ , 这时

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^z} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{iy}{e^{iy}}$$

因为 $|e^{iy}| = 1$, 这样

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{iy}{e^{iy}} = \infty.$$

由于沿着不同路径极限不同, 所以 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^z}$ 不存在。

2) 取 $z = x$, z 沿着正实轴趋于 0 , 这时

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \sin \frac{1}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

但取虚轴上点列 $z_n = \frac{1}{in}$, 显然, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, 这时

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \sin \frac{1}{z} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin in}{in} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin in}{in} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2n} = +\infty$$

由于沿着不同路径趋于0时极限不同, 所以 $\lim_{z \rightarrow 0} z \sin \frac{1}{z}$ 不存在。

附例2.9 求解方程

$$\cosh z = 0$$

解: 依条件

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0$$

即有

$$e^{2z} = -1 \implies 2z = \operatorname{Ln}(-1) = i(2k\pi + \pi)$$

这样, 方程的解为

$$z_k = i(k\pi + \frac{\pi}{2})$$

第三章 解析函数的积分表示

3.1节 复变函数的积分

复变函数的曲线积分

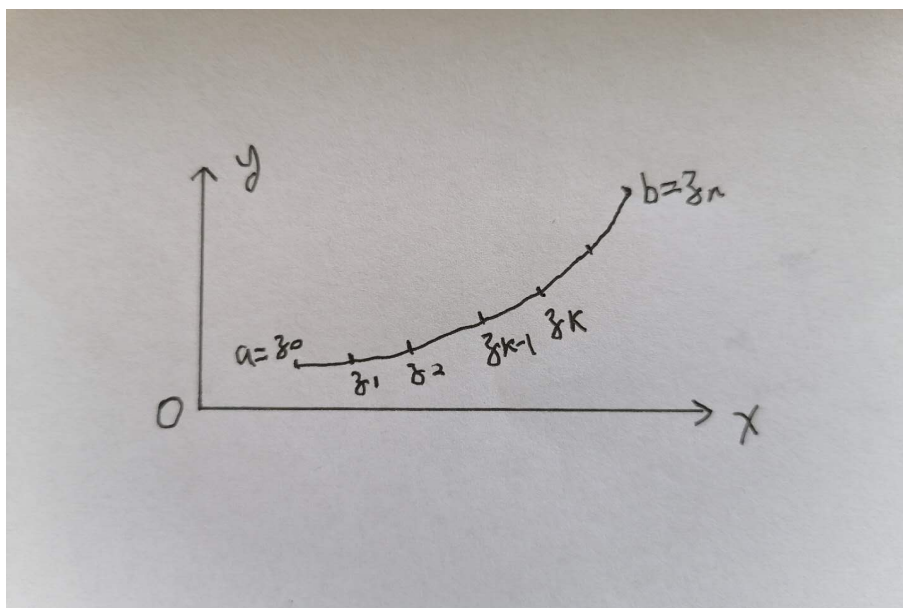
设C是平面上的一段光滑曲线, 起点a, 终点是b. $\omega(z) = f(z)$ 是定义在曲线C上的单值连续函数。任意用一系列分点

$$z_k = x_k + iy_k, \quad k = 0, 1, 2 \dots n,$$

把曲线C分为若干小段, 在每一个小段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 任取一点 ξ_k , 如图:

作和

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$



命 $\lambda = \max_k |\Delta z_k|$, 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上述和式的极限存在, 而且其值和弧段的分法和各个 ξ_k 选取无关, 则称这个极限是 $f(z)$ 沿着曲线 C 从 a 到 b 的积分记作

$$\int_C f(z) dz.$$

复积分问题转化为实的第二型曲线积分问题

记 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 则

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy \quad (3.1.1)$$

由于第二型曲线积分可以直接使用参数来积分, 这样我们如果设

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b,$$

这样

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy \\ &= \int_a^b [ux'(t) - vy'(t)] dt + i \int_a^b [vx'(t) + uy'(t)] dt \\ &= \int_a^b (u + iv) z'(t) dt = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \end{aligned}$$

例3.1.1 计算积分: $\int_L \operatorname{Re} z dz$ 其中 L 是连接 O 和 $1 + i$ 的直线。

解: L 的参数方程可以写为:

$$x = t, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

表示成复数形式则为:

$$z = (1 + i)t, \quad \operatorname{Re} z = t, \quad dz = z'(t)dt = (1 + i)dt$$

因此, 原积分

$$\int_L \operatorname{Re} z dz = (1 + i) \int_0^1 t dt = \frac{1 + i}{2}$$

例3.1.2 设 n 是整数, C 是以 a 为圆心, R 为半径的圆周, 试计算积分

$$\int_C \frac{dz}{(z - a)^n}$$

解: 圆周 C 的参数方程为: $z = a + Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. 这样

$$(z - a)^n = R^n e^{in\theta}, \quad dz = z'(\theta)d\theta = iRe^{i\theta}d\theta,$$

于是, 参数代入后, 原来积分化为:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{(z - a)^n} &= \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cos(n-1)\theta d\theta + \frac{1}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \sin(n-1)\theta d\theta \\ &= \begin{cases} 2\pi i, & \text{当 } n = 1, \\ 0, & \text{当 } n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

复函数曲线积分的运算性质:

类似于实的积分的运算性质, 复函数曲线积分也有以下的运算性质:

- 1) 如果 k 为复常数, 则 $\int_C kf(z)dz = k \int_C f(z)dz$;
- 2) $\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$;
- 3) $\int_C f(z)dz = - \int_{C^-} f(z)dz$;
- 4) 如果 C 是由 c_1 和 c_2 组成, 则 $\int_C f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz$;

5) 长大不等式:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds$$

例3.1.3 证明: $\left| \int_C e^{iz} dz \right| < \pi$, 其中C为 $|z| = R$ 的上半圆周从 R 到 $-R$

证明: 利用长大不等式以及C的参数表达式 $z = Re^{i\theta}$, 得到

$$\left| \int_C e^{iz} dz \right| \leq \int_C |e^{iz}| ds = \int_0^\pi |e^{iRe^{i\theta}}| ds = \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} R d\theta. \quad (1)$$

由于 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 有三角不等式 $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, 因此

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} R d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} R d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} R d\theta = \pi(1 - e^{-R}) < \pi$$

例3.1.4 当 ρ 充分小时, $f(z)$ 在圆弧 C_ρ

$$z = a + \rho e^{i\theta}, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

上连续, 且

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = k,$$

证明:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = i(\beta - \alpha)k.$$

证明: 令 $(z - a)f(z) = k + h(z)$, 根据条件

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = k,$$

得到:

$$\lim_{z \rightarrow a} h(z) = 0.$$

因此

$$f(z) = \frac{k}{z - a} + \frac{h(z)}{z - a}, \quad (\text{其中} \lim_{z \rightarrow a} h(z) = 0)$$

这样

$$\int_{C_\rho} f(z) dz = \int_{C_\rho} \frac{k}{z - a} dz + \int_{C_\rho} \frac{h(z)}{z - a} dz. \quad (1)$$

而

$$\int_{C_\rho} \frac{1}{z - a} dz = \int_\alpha^\beta \frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\theta = i \int_\alpha^\beta d\theta = i(\beta - \alpha). \quad (2)$$

另外, 由长大不等式

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{h(z)}{z - a} dz \right| \leq \int_{C_\rho} \left| \frac{h(z)}{z - a} \right| ds \leq \max_{z \in C_\rho} \left| \frac{h(z)}{z - a} \right| \times 2\pi\rho$$

$$= \frac{1}{\rho} \max_{z \in C_\rho} |h(z)| \times 2\pi\rho = 2\pi \max_{z \in C_\rho} |h(z)|$$

因此有以上得到的不等式, 结合 $\lim_{z \rightarrow a} h(z) = 0$ 的结论

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{h(z)}{z-a} dz = 0 \quad (3)$$

最后在式(1)中令 $\rho \rightarrow 0$, 并结合(2), (3)式, 就得出结论

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = ik(\beta - \alpha)k.$$

3.2节 柯西积分定理

定理3.2.1 设D是闭路C所围成的单连通区域, $f(z)$ 在C+D上解析, 则

$$\int_C f(z) dz = 0$$

证明: 假定 $f(z) = u + iv$, , 则有:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \\ &= - \iint \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

但是根据C-R方程,

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

所以

$$\int_C f(z) dz = 0$$

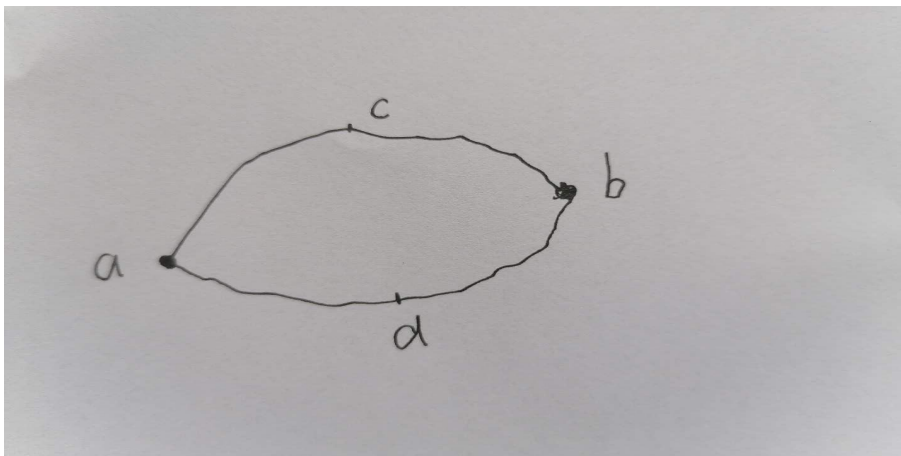
由以上定理3.2.1, 显然有以下推论:

推论3.2.1 设 $f(z)$ 在区域D内解析, C是D内的任意闭曲线, 则

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

推论3.2.2 设 $f(z)$ 在区域D内解析, a和b是D内任意两点, C是D内任意一条始点为a, 终点为b的简单曲线, 则 $\int_C f(z) dz$ 不依赖于具体路径C, 只与始点a和终点b有关。

证明: 在D内取连接a,b 两点的任意路径 \overbrace{acb} 和 \overbrace{adb} , 这样 \overbrace{acbda} 形成了一个闭路 Γ , 如图:



由以上推论3.2.1

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \implies \int_{acb} f(z) dz + \int_{bda} f(z) dz = 0 \quad (1)$$

而

$$\int_{bda} f(z) dz = - \int_{adb} f(z) dz$$

这样(1)式变为

$$\int_{acb} f(z) dz - \int_{adb} f(z) dz = 0 \quad (2)$$

也就是

$$\int_{acb} f(z) dz = \int_{adb} f(z) dz \quad (3)$$

证毕。

定理3.2.2 设 $f(z)$ 在复闭路 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \dots + C_n^-$ 及其所围的区域内解析, 则

$$\int_C f(z) dz = 0$$

或

$$\int_{c_0} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \dots + \int_{c_n} f(z) dz.$$

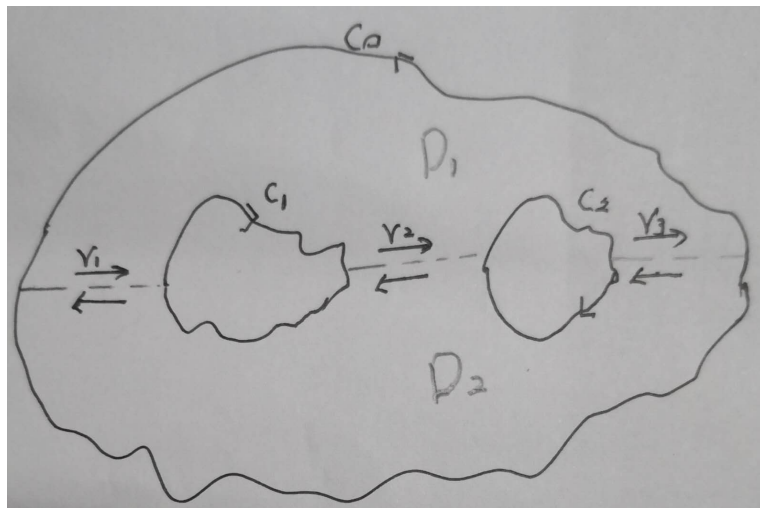
证明: 我们以下对只就 $n=2$ 的情形进行证明, 这时 $C = C_0^+ + C_1^- + C_2^-$. 以辅助线 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 将 C_0, C_1 和 C_2 连接起来, 这样就把区域 D 分成2个单连通区域 D_1 和 D_2 , 如图:

记 D_1 和 D_2 的边界分别为 L_1 和 L_2 , 根据以上定理3.2.1, 即单连通区域的柯西积分定理, 得到

$$\int_{L_1} f(z) dz = 0 \quad \text{及} \quad \int_{L_2} f(z) dz = 0.$$

因此

$$\int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz = 0. \quad (1)$$



注意到在 $L_1 + L_2$ 上积分时, 沿着辅助线 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 的积分, 正好是沿着不同方向各取一次, 在相加时互相抵消。因此 $L_1 + L_2$ 上的积分, 就等于 $C_0^+ + C_1^- + C_2^-$ 上的积分, 这样(1)式的结论就等价于

$$\int_{C_0} f(z) dz + \int_{C_1^-} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz = 0. \quad (2)$$

也就是

$$\int_C f(z) dz = 0, \quad \text{或者: } \int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz \quad (3)$$

这样就完成了证明。

例3.2.1 设 a 是闭路 C 内的任意一点, 计算积分:

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$$

解: 在 C 内作一个以 a 为中心, R 为半径的圆 C_R , 使得 C_R 包含在 C 内, 则由多连通区域的定理3.2.2,

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{C_R} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

由前面例3.1.2的结论

$$\int_{C_R} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{当 } n = 1, \\ 0, & \text{当 } n \geq 2. \end{cases}$$

因此有

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{当 } n = 1, \\ 0, & \text{当 } n \geq 2. \end{cases}$$

3.3节 原函数

定义3.3.1 如果区域D内有 $F'(z) = f(z)$, 则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。

如果 $f(z)$ 是单连通区域D内的一个解析函数, 那么它从D内某一点 z_0 积到变上限 z 的积分就确定了一个与积分路径无关函数

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

类似于微积分中的定理和结论, 我们可以证明: $F(z)$ 是解析函数, 并且 $F'(z) = f(z)$. 这样 $F(z)$ 就解析函数是 $f(z)$ 的一个原函数。于是我们有:

定理3.3.1 如果 $f(z)$ 是单连通区域的解析函数, 那么由变上限积分所确定的函数

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

也是D内解析函数, 而且 $F'(z) = f(z)$

由于任意两个 $f(z)$ 的原函数之间, 只差一个复常数, 因此 $f(z)$ 的任意一个原函数可 $H(z)$ 表示为

$$H(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz + C$$

类似于微积分的结果, 有复变函数相应的牛顿-莱布尼兹公式:

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = H(z) - H(z_0)$$

例如

$$\int_a^b \cos z dz = \sin z \Big|_a^b = \sin b - \sin a$$

积分和路径相关的例子

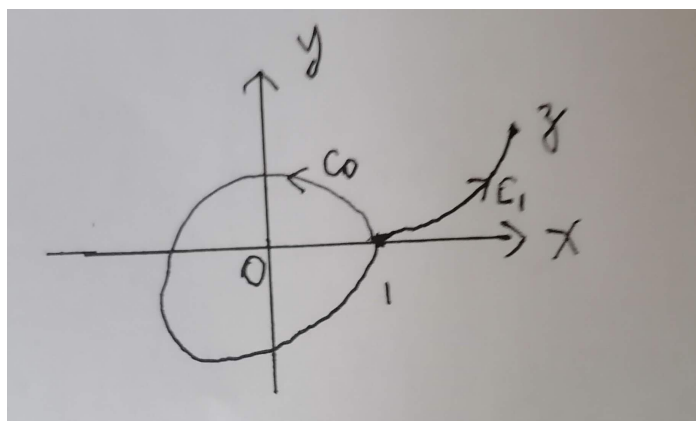
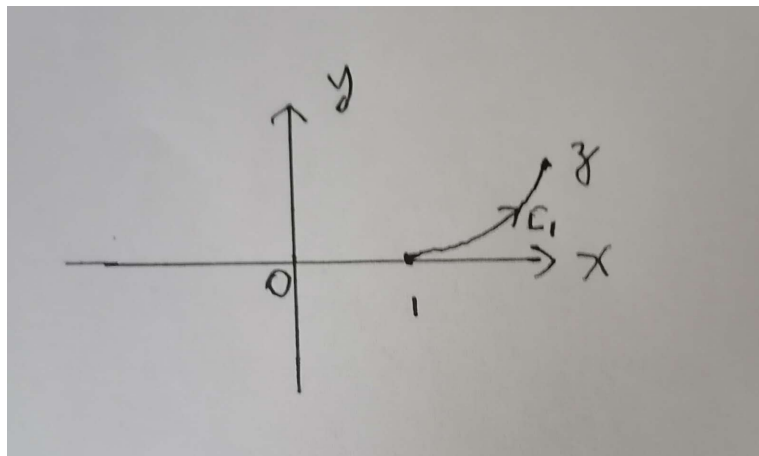
一个函数在单连通区域内解析, 则积分和路径无关。但多连通区域就没有这个性质了。如函数 $f(z) = \frac{1}{z}$, 设 D_0 是挖掉了零点的开复平面, 即 $D_0 = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

$f(z) = \frac{1}{z}$ 在 D_0 这个多连通区域解析。现在选择两条路径:

1) 取1到 z 的简单曲线 C_1 , 其中 C_1 可以完全含在一个不包含原点的单连通区域里, 如图:

这样从1到 z 的沿着路径 C_1 的积分可使用牛顿-莱布尼兹公式:

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_1^z \frac{1}{z} dz = \ln z \Big|_1^z = \ln z$$



2) 设 C_0 是一个包含 0 为内部点的闭路, 且 $z = 1 \in C_0$, 这样我们可选择以下路径 C 来完成从 1 到 z 的积分: 从 $z = 1$ 出发, 沿着 C_0 正向转一周后回到 $z = 1$, 再通过路径 C_1 到 z , 如图:

则

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0} \frac{1}{z} dz + \int_{C_1} \frac{1}{z} dz$$

由于 C_1 是一个围绕着原点的闭路, 根据例 3.2.1 的结果:

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

所以

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i + \ln z$$

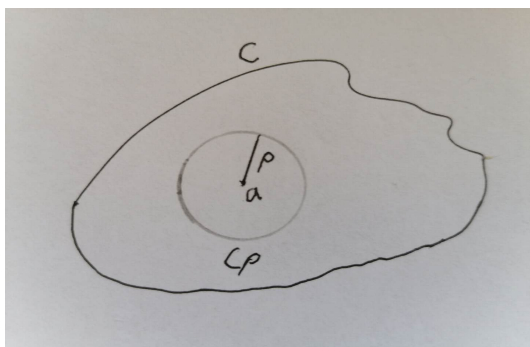
可见, $f(z) = \frac{1}{z}$ 沿着 C_1 和 C 两个不同路径从 1 到 z 的积分值是不同的。

3.4 节 柯西积分公式

定理3.4.1 设函数 $f(z)$ 在闭路(或复闭路) C 及其所围的区域 D 内解析, a 为 D 内任意一点, 则

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

证明: 因为 a 为 D 内一点, 故可以 a 为中心, ρ 为半径作圆 $C_\rho: |z-a|=\rho$, 使 C_ρ 含在 D 内, 如图:



这样, 由多连通区域的柯西积分公式:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz. \quad (1)$$

设 $f(z) = f(a) + h(z)$, 这样

$$\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{C_\rho} \frac{f(a) + h(z)}{z-a} dz = \int_{C_\rho} \frac{f(a)}{z-a} dz + \int_{C_\rho} \frac{h(z)}{z-a} dz \quad (2)$$

其中

$$\int_{C_\rho} \frac{f(a)}{z-a} dz = f(a) \int_{C_\rho} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \quad (3)$$

下面我们证明:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{h(z)}{z-a} dz = 0, \quad (4)$$

实际上, 根据长大不等式,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\rho} \frac{h(z)}{z-a} dz \right| &\leq \int_{C_\rho} \left| \frac{h(z)}{z-a} \right| ds \leq \max_{z \in C_\rho} \left| \frac{h(z)}{z-a} \right| \times 2\pi\rho \\ &= \frac{1}{\rho} \max_{z \in C_\rho} |h(z)| \times 2\pi\rho = 2\pi \max_{z \in C_\rho} |h(z)| \end{aligned} \quad (5)$$

由于解析能保证 $f(z)$ 在 a 连续, 所以 $\lim_{z \rightarrow a} h(z) = 0$, 此结果应用于上式(5), 令 $\rho \rightarrow 0$, 得到:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{C_\rho} \frac{h(z)}{z-a} dz \right| = 0 \implies \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{h(z)}{z-a} dz = 0.$$

即式(4)就得到了证明.最后在式(2)两边令 $\rho \rightarrow 0$, 于是证出结论

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

以上定理也可以改写为以下形式(教材上的形式)

定理3.4.1' 设函数 $f(z)$ 在闭路(或复闭路) C 及其所围的区域 D 内解析, 则对 D 内任意一点 z , 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

柯西积分公式还有进一步的形式, 由以下定理表示(也称为柯西积分公式)

定理3.4.2 设函数 $f(z)$ 在闭路(或复闭路) C 及其所围的区域 D 内解析, a 为 D 内任意一点, 则

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

定理3.4.2' 设函数 $f(z)$ 在闭路(或复闭路) C 及其所围的区域 D 内解析, 则对 D 内任意一点 z , 则

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

注3.4.1 根据定理3.4.2 或定理3.4.2'所给出的柯西积分定理可以注意到: 解析函数是有任意阶导数的。也就是说, 解析函数无穷次可微。从而可知: 解析函数的各阶导数也是解析函数。

例3.4.1 计算积分

$$\int_C \frac{e^z}{z(z-2i)} dz, \quad C \text{为闭路 } |z-2i|=1$$

解: 令 $f(z) = \frac{e^z}{z}$, 显然 $f(z)$ 在闭路 C 以及所围的内部区域解析, 由柯西积分公式:

$$\int_C \frac{e^z}{z(z-2i)} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-2i} dz = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi(\cos 2 + i \sin 2)$$

例3.4.2 计算积分

$$\int_C \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz, \quad \text{其中 } C \text{ 是包围 } i \text{ 点的任意闭路}$$

解: 使用定理3.4.2的柯西积分公式, 其中对应 $f(z) = \cos z$, $a = i$, $n = 2$, 则原积分为

$$\int_C \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz = 2\pi i \frac{(\cos z)''}{2!} \Big|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \cosh 1.$$

例3.4.3 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z| \leq 1$ 内解析, 且 $f(0) = 1$.

1) 证明:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) f(z) \frac{dz}{z} = 2 + f'(0)$$

2) 证明:

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \pi + \frac{\pi}{2} f'(0)$$

证: 1)

$$\int_C \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) f(z) \frac{dz}{z} = 2 \int_C \frac{f(z)}{z} dz + \int_C f(z) dz + \int_C \frac{f(z)}{z^2} dz. \quad (1)$$

根据柯西积分定理:

$$\int_C f(z) dz = 0$$

又根据柯西积分公式

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(z) \Big|_{z=0} = 2\pi i f(0), \quad \int_C \frac{f(z)}{z^2} dz = 2\pi i f'(z) \Big|_{z=0} = 2\pi i f'(0)$$

以上结果结合式(1)得到要证明的结论:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) f(z) \frac{dz}{z} = 2f(0) + f'(0) = 2 + f'(0). \quad (2)$$

2) 取圆周上的参数: $z = e^{i\theta}$, 故 $dz = e^{i\theta} d\theta$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) f(z) \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} [2 + (e^{i\theta} + e^{-i\theta})] f(e^{i\theta}) i d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) (2 + 2 \cos \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

比较(2)和(3)的结果: 得到:

$$2 + f'(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

也就是

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \pi + \frac{\pi}{2} f'(0)$$

3.5节 解析函数的性质

定理3.5.1 平均值公式 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z - a| \leq R$ 解析, 则 $f(z)$ 在圆心 a 的值, 等于它在圆周上的算数平均值, 即

$$f(a) = \frac{1}{2\pi R} \int_C f(\xi) ds.$$

其中 C 是圆周 $|z - a| = R$, ds 是 C 上的弧长的微分。

证明: 对于圆周 C 上的点 ξ , 有参数表示

$$\xi = a + Re^{i\theta}, \quad d\xi = iRe^{i\theta} d\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

由柯西积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi)}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) d\theta \quad (1)$$

由于 $ds = |d\xi| = |iRe^{i\theta} d\theta| = R d\theta$, 由上式结论

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) d\theta \implies f(a) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(\xi) R d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(\xi) ds \quad (2)$$

这样就证明了结论。

定理3.5.2 最大模原理 设 $f(z)$ 在有界域 D 内解析, 在 $C+D$ 上连续, 这里 C 是 D 的边界, 且 $f(z)$ 不恒等于常数, 那么 $|f(z)|$ 只能在边界 C 上取到它在有界闭区域 $C+D$ 上的最大值。

证明: 依条件可知, 二元函数 $|f(z)|$ 有界闭区域 $C+D$ 上连续, 所以 $|f(z)|$ 必能在这个闭域的某一点 z_0 取到整个有界区域的最大值 $|f(z_0)|$. 我们以下证明: z_0 一定在边界 C 上。用反证法, 假定 z_0 落在区域的内部, 这时可以作以 z_0 为中心, 半径为 R 且包含在 D 内的圆周 K , 现取 K 的任意同心圆 K_1 : $\xi = z_0 + re^{i\theta}$, ($0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq R$), 使用平均值公式, 有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_c f(\xi) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

由长大不等式

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \times M \times 2\pi = M \quad (1)$$

这样得到;

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

或者表示为:

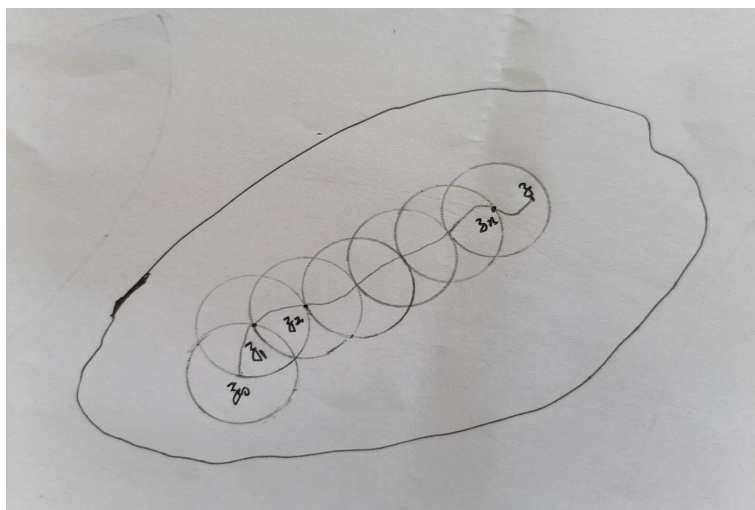
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [M - |f(z_0 + re^{i\theta})|] d\theta = 0 \quad (2)$$

上式(2)中的被积函数是非负连续函数, 所以

$$M = |f(z_0 + re^{i\theta})|. \quad (3)$$

这样, 就证明了在圆周K及其内部都有 $|f(z)| = M$.

现设 z 为D内任一点, 在D内用一条逐段光滑的曲线L将 z_0 和 z 连接起来, 设 ρ 为L与C的最小距离。今作圆链如下: 以 z_0 为中心, $\rho_1 (< \rho)$ 为半径作圆 K_0 (不妨设 K_0 包含在K内), 以 K_0 和L的交点 z_1 为中心, ρ_1 为半径作圆 K_1 , 这样继续作下去, 由于L是有限的, 故作到某个 K_n , 必使 z 落在 K_n 内或 K_n 上, 如图:



由上面讨论可知, 在 K_0 内以及圆周上, $|f(z)| = M$, 因此对于 K_0 圆周上的点 z_1 , $|f(z_1)| = M$, 类似于前面的证明步骤, 可证明在 K_1 内以及圆周上, $|f(z)| = M$, 特别对于 K_1 圆周上的点 z_2 , $|f(z_2)| = M$, 以此类推, 有:

$$|f(z)| = |f(z_n)| = \dots = |f(z_1)| = |f(z_0)| = M.$$

由 z 的任意性, 这样在D内有 $|f(z)| = M$,

$$|f(z)| = M = \text{常数}$$

最后根据第二章的已知结论: 在区域D内解析且模为常数的复变函数在D内为恒为常数, 我们推得 $f(z)$ 在D内为常数, 这与已知条件矛盾。因此, z_0 不可能落在区域的内部。证毕。

定理3.5.3 柯西不等式 设 $f(z)$ 在区域D内解析, 以D内任意一点 z 为圆心, 作一个包含在D内的圆周C: $|\xi - z| = R$, 设 $M(R)$ 是 $|f(z)|$ 在圆周C上的最大值, 则

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M(R)}{R^n}.$$

证明：由柯西积分公式

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

利用长大不等式

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \right| ds \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \max_{\xi \in C} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \right| \times 2\pi R. \end{aligned} \quad (1)$$

又由于 $M(R)$ 是 $|f(z)|$ 在圆周 C 上的最大值, 以及 $|\xi - z| = R$, ($\xi \in$ 圆周 C), 因此

$$\max_{\xi \in C} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \right| = \frac{1}{R^{n+1}} \max_{\xi \in C} |f(\xi)| \leq \frac{M(R)}{R^{n+1}} \quad (2)$$

以上求得的式(2)代入(1), 则有

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \times \frac{M(R)}{R^{n+1}} \times 2\pi R = \frac{n!M(R)}{R^n}$$

证毕。

整函数的概念： 如果 $f(z)$ 在有限复平面上解析, 则 $f(z)$ 称为整函数。

例如, 多项式, e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$ 等都是整函数。

定理3.5.4 (刘维尔定理) 如果整函数 $f(z)$ 在整个复平面上有界, 即对所有的 z 满足不等式 $|f(z)| < M$, 则 $f(z)$ 必为常数。

证明：设 z 是复平面上任意一点, 以 z 为中心, 作半径为 R 的圆 C_R , 根据定理5.3的柯西不等式, 得到:

$$|f'(z)| \leq \frac{M(R)}{R} \quad (1)$$

其中 $M(R)$ 是 C_R 上 $|f(z)|$ 的最大值。由于对任何 z 满足不等式 $|f(z)| < M$, 因此 $M(R) < M$, 这样由上式(1)的不等式进一步推出

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \quad (2)$$

由于 R 可以任意大, 根据式(2)必有 $|f'(z)| = 0$, 也就是 $f'(z) = 0$, 再根据点 z 的任意性, 故则 $f(z)$ 必为常数。

作为刘维尔定理的一个应用, 我们给出以下例题:

例3.4.2 证明代数学基本定理: 任何复系数多项式

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geq 1, a_0 \neq 0$$

必有零点, 亦即方程 $f(z) = 0$ 必有根。

证明: 若 $a_n = 0$, $z = 0$ 就是 $f(z)$ 的零点, 因此不妨设 $a_n \neq 0$. 下面用反证法, 假定 $f(z)$ 没有零点, 因为 $f(z)$ 在全平面解析, 所以 $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ 也在全平面解析。这样

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)} = 0.$$

所以 $|\varphi(z)|$ 有界, 由刘维尔定理, $\varphi(z)$ 必为常数。因而 $f(z)$ 也是常数。这就造成了矛盾。证毕。

定理3.5.5(莫雷拉定理) 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 中是连续的, 并且对 D 中任意曲线闭 C 有

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析。

证明: $f(z)$ 沿着 D 中任意的闭曲线积分为0, 因此, 积分

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

就只依赖于上限 z , 而与 z_0 到 z 的积分路径无关。类似于定理3.3.1的结论, 可知 $F(z)$ 是区域 D 内的解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$. 由于解析函数的各阶导数仍然是解析函数, 所以 $f(z)$ 也是解析函数。

本章部分习题或难题解答

附例3.1 计算积分 $\int_{-i}^i |z| dz$, 其中积分路径为

- (1) 沿着直线段。
- (2) 沿着 $|z| = 1$ 的左半圆。

解: 1) 沿着直线段时, $z = iy$, $-1 \leq y \leq 1$, 这时

$$\text{原积分} = \int_{-1}^1 |iy| d(iy) = i \int_{-1}^1 |y| dy = i$$

沿着 $|z| = 1$ 的左半圆时, $z = e^{i\theta}$, 在积分过程中 θ 由 $\frac{3\pi}{2}$ 变化到 $\frac{\pi}{2}$, 这时

$$\text{原积分} = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |e^{i\theta}| d(e^{i\theta}) = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d(e^{i\theta}) = e^{i\theta} \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = i - (-i) = 2i$$

附注3.1 上例说明了: 在起点和终点一定的情况下, 一个复变函数沿着不同的积分路径积分, 积分值有可能不同。

附例3.2 证明: $\left| \int_i^{2+i} \frac{dz}{z^2} \right| \leq 2$, 积分路径是直线段。

证明: 记*i*到2+i的直线段为*L*, 在*L*上 $|z| \geq 1$, 故 $\left| \frac{1}{z^2} \right| \leq 1$. 而线段*L*的长度为 $|(2+i) - i| = 2$. 再由长大不等式:

$$\left| \int_i^{2+i} \frac{dz}{z^2} \right| \leq \max_{z \in L} \left| \frac{1}{z^2} \right| \times (\text{线段 } L \text{ 的长度}) \leq 1 \times 2 = 2.$$

附例3.3 若多项式 $Q(z)$ 比多项式 $P(z)$ 高两次, 试证明:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

证明: 不妨设

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad Q(z) = z^{n+2} + b_1 z^{n+1} + \dots + b_{n+1} z + b_{n+2}.$$

这样

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{P(z)}{Q(z)}}{\frac{1}{z^2}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{n+2} + a_1 z^{n+1} + \dots + a_{n-1} z^3 + a_n z^2}{z^{n+2} + b_1 z^{n+1} + \dots + b_{n+1} z + b_{n+2}} = 1$$

所以 $\exists M$, 使得 $|z| > M$ 时,

$$\left| \frac{\frac{P(z)}{Q(z)}}{\frac{1}{z^2}} \right| < 2 \implies \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| < \left| \frac{2}{z^2} \right|$$

这样 $R > M$ 时, 在圆 $|z| = R$ 上成立

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| < \frac{2}{R^2}$$

利用长大不等式, $R > M$ 时

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| &\leq \int_{|z|=R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| ds \\ &\leq \max_{|z|=R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \times 2\pi R \leq \frac{2}{R^2} \times 2\pi R = \frac{4\pi}{R} \end{aligned} \quad (1)$$

在上式(1)中, 令 $R \rightarrow +\infty$, 就得到结论:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

附例3.4 计算 $\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2(z+1)(z-1)}, \quad r < 1$

解: 环路中只有唯一奇点 $z = 0$, 由柯西积分公式

$$\text{原积分} = \int_{|z|=r} \frac{\frac{1}{z^2-1}}{z^2} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z^2-1} \right)' \Big|_{z=0} = 2\pi i \left(\frac{-2z}{(z^2-1)^2} \right) \Big|_{z=0} = 0$$

附例3.5 证明不存在这样的函数, 它在闭单位圆 $|z| \leq 1$ 上解析, 而在单位圆上值为 $\frac{1}{z}$.

证明: 用反证法, 假定存在这样函数 $f(z)$, 这样 $f(z)$ 在闭单位圆 $|z| \leq 1$ 上解析, 根据单连通区域内的柯西积分定理,

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 0 \quad (1)$$

而又 $f(z)$ 在单位圆上值为 $\frac{1}{z}$, 因此

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i. \quad (2)$$

比较以上(1)式和(2)式, 就得出了矛盾。证毕。

附例3.6 设 $f(z)$ 在闭路 C 及其所围的外部区域 D 解析, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \neq \infty$. 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} -f(z) + A, & z \in D \\ A, & z \in C \text{ 的内部区域} \end{cases}$$

证明:

1) 当 $z \in D$ 时, 可作一个半径充分大的圆 $C_R: |z| = R$, 使得 z 在 C_R 内部。这样, 以 C_R 为外边界, 以 C 为内边界形成了一个包含 z 为内部点的多连通区域, 其边界记为 $H = C_R - C$. 因此, 使用多连通区域的柯西积分公式, 则有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_H \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z)$$

也就是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \quad (1)$$

由于 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \neq \infty$, 因此,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i A \quad (2)$$

在(1)式中令 $R \rightarrow +\infty$, 并利用结论(2), 得出

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = -f(z) + A \quad (3)$$

2) 当 $z \in C$ 的内部区域时, 被积函数 $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ 在 C 和 C_R 所围成的多连通区域内解析, 则根据多连通区域的柯西积分定理;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (4)$$

类似地, 在上式(4)中令 $R \rightarrow +\infty$, 并利用结论(2), 得出这时

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = A \quad (5)$$

附例3.7 如果 $f(z)$ 是在区域 D 内不恒为常数的解析函数, 且没有零点, 证明: $|f(z)|$ 不可能在区域 D 内取到最小值。

证明: 令 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, $f(z)$ 是在区域 D 内的解析函数, 且没有零点。因此, $g(z)$ 是 D 内的解析函数。下面用反证法, 假定在 D 内的点 z_0 取到 $|f(z)|$ 的最小值, 也就是取到 $|g(z)|$ 的最大值, 这时, 可找到闭圆: $C_\rho: |z - z_0| \leq \rho$, 使得 C_ρ 包含在区域 D 内。又 $f(z)$ 是在区域 D 内不恒为常数的解析函数, 所以在 C_ρ 不恒为常数(否则可以用滚圆法推出 $f(z)$ 在区域 D 内恒为常数)。因此, 根据最大模原理, $|g(z)|$ 在闭圆 C_ρ 上的最大值只能在圆周边界上取到, 不可能在圆心 z_0 取到。这就导致了矛盾。因此 $|f(z)|$ 不可能在区域 D 内取到最小值。

第四章 调和函数

4.1 节 解析函数和调和函数的关系

调和函数的定义:

如果实函数 $u(x, y)$ 满足调和方程;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4.1.1)$$

则称 $u(x, y)$ 为调和函数。

解析函数的实部和虚部都是调和函数：

我们以下说明：解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 都满足调和方程，即它们都是调和函数。证明如下： $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.1.2)$$

上式的两个方程分别对 x 和 y 求导得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (4.1.3)$$

把此式中的两个子式相加，并考虑到偏导数的交换性：得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

这样就证明了 $u(x, y)$ 为调和函数。同理可证明 $v(x, y)$ 也为调和函数。

如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析，那么它的实部和虚部称为该区域内的**共轭调和函数**。

由调和函数寻求相应的解析函数：

反过来，给定一个调和函数，我们就可以用它作为某个解析函数的实部或虚部。不失一般性，我们假定已知调和函数 $v(x, y)$ ，如果用此调和函数 $v(x, y)$ 充当某个解析函数的虚部，我们就能找出相应的实部 $u(x, y)$ ，从而找出对应的解析函数。在此，我们提供两种常用方法：

1) 方法1 利用曲线积分求 $u(x, y)$ ： 因为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \implies u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + C$$

而由C-R方程，即有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

因此

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) dy + C$$

这样，实部 $u(x, y)$ 就可以用已知的虚部 $v(x, y)$ 算出了，并进一步得出相应的解析函数 $f(z)$ 。

2) 方法2 直接解方程求 $u(x, y)$ ：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

上式左边的子式两边积分得到:

$$u = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx + \varphi(y),$$

其中 $\int \frac{\partial v}{\partial y} dx$ 表示 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 的某个取定的原函数。再代入右边的子式, 即代入式

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

确定出 $\varphi(y)$. 这样 $u(x, y)$ 就最后确定了。

例 4.1.1 求一个解析函数 $f(z)$, 使其虚部 $v = 2x^2 - 2y^2 + x$, 且满足条件 $f(0) = 1$.

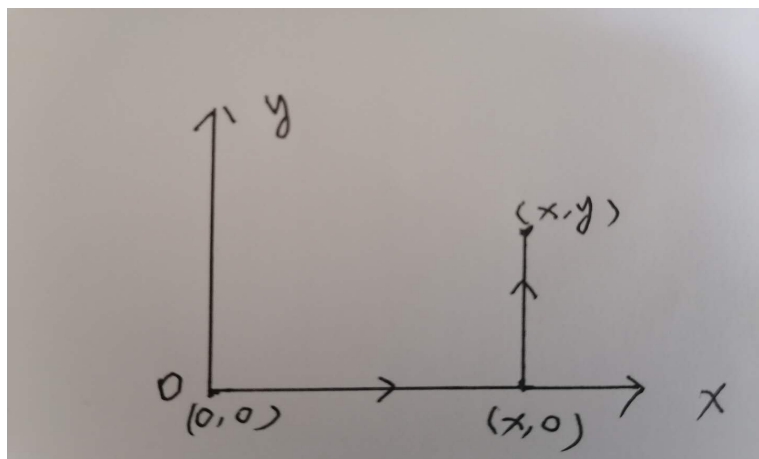
解法1: 可以直接验证 v 是一个调和函数, 可以作为解析函数的虚部。由 C-R 方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -4y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(4x + 1)$$

利用曲线积分

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + C = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -4y dx - (4x + 1) dy + C. \quad (1)$$

在上式的曲线积分中, 选择 $(0, 0)$ 到 (x, y) 的路径 L 为: $L = L_1 + L_2$, 其中 L_1 是 $(0, 0)$ 到 $(x, 0)$ 的直线段, 而 L_2 是 $(x, 0)$ 到 (x, y) 的直线段。如图:



这样

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} -4y dx - (4x + 1) dy + \int_{(x,0)}^{(x,y)} -4y dx - (4x + 1) dy + C$$

在各段积分使用参数, 即得

$$u(x, y) = \int_0^x 0 dx - \int_0^y (4x + 1) dy + C = -4xy - y + C$$

再利用条件 $f(0) = 1$, 可得 $C = 1$, 这样

$$f(z) = -4xy - y + 1 + i(2x^2 - 2y^2 + x) = i(2z^2 + z) + 1$$

解法2: 由C-R方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -4y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(4x + 1)$$

由上式的左边的子式两边对 x 积分得到:

$$u = \int (-4y)dx + \varphi(y) = -4xy + \varphi(y)$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -(4x + 1) \implies \varphi'(y) = -1 \implies \varphi(y) = -y + c$$

这样 $u(x, y) = -4xy - y + C$, 再利用条件 $f(0) = 1$, 定出 $C = 1$ 后, 同样得出

$$f(z) = i(2z^2 + z) + 1$$

关于共轭调和函数, 还有以下定理描述几何性质:

定理4.1.1 设 $f(z)$ 是一解析函数, 且 $f'(z) \neq 0$, 那么等值曲线族

$$u(x, y) = C_1, \quad v(x, y) = C_2$$

在公共点永远是正交的。

证明: 两族曲线的法分向分别为:

$$\vec{n}_1 = (u_x, u_y), \quad \vec{n}_2 = (v_x, v_y)$$

则

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (u_x, u_y) \cdot (v_x, v_y) = u_x v_x + u_y v_y = v_y v_x + (-v_x) v_y = 0$$

所以它们相交成直角。

4.2节 调和函数性质和狄利克雷问题

类似于解析函数性质, 调和函数有具有以下若干性质: (为了叙述方便, 我们把 $u(x, y)$ 简记为 $u(z)$)

定理4.2.1 (平均值定理) 设 $u(z)$ 是闭圆 $D: |z - z_0| \leq R$ 上的调和函数, 则

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_c u(z) ds \quad (4.2.1)$$

证明: $u(z)$ 是 D 上的调和函数, 因此可作出 D 内以 $u(z)$ 为实部的解析函数

$$f(z) = u(z) + iv(z).$$

由解析函数的平均值定理:

$$u(z_0) + iv(z_0) = f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_C f(z) ds = \frac{1}{2\pi R} \int_C [u(z) + iv(z)] ds$$

此式两边取实部, 就证明了结论。

定理4.2.2(极值原理) 若函数 $u(z)$ 是有界区域内的调和函数, 且在有界闭域 $C + D$ 上连续, 这里 C 是 D 的边界, 并且 u 不恒等于常数。则 $u(z)$ 只能在 D 的边界 C 上取到最大值和最小值。

证明: 我们首先证明 $u(z)$ 只能在边界 C 上取到最大值。利用反证法, 假定在 D 内的点 z_0 取到 $u(z)$ 的最大值。在 D 内作圆闭 $G: |z - z_0| \leq \rho$, 并作出 G 内以 $u(z)$ 为实部的解析函数 $f(z)$, 于是 G 内解析函数 $e^{f(z)}$ 的模 $e^{u(z)}$ 在点 z_0 取到最大值。但是 $u(z)$ 不恒等于常数, 从而 $f(z)$ 以及 $e^{f(z)}$ 不恒等于常数, 这与最大模原理矛盾。所以 $u(z)$ 只能在 D 的边界 C 上取到 $C+D$ 上的最大值。考虑 $-u(z)$ 就可知 $u(z)$ 只能在 C 上取到 $C+D$ 上的最小值。

定理4.2.3 设 $u(z)$ 是闭圆 $\bar{D}: |z - z_0| \leq R$ 上的调和函数, 则对此圆内部任一点 $z = z_0 + re^{i\varphi} (r < R)$, 有

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta, \quad (4.2.2)$$

这里记 $u(z_0 + re^{i\varphi}) = u(r, \varphi)$, $u(z_0 + Re^{i\varphi}) = u(R, \varphi)$ 。

证明: 在 \bar{D} 内作出以 $u(z)$ 为实部的解析函数 $f(z)$, 对圆周 $C: |z - z_0| = R$, 内部任意一点 $z = z_0 + re^{i\varphi}$, 根据柯西积分公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - re^{i\varphi}} d\theta \quad (1)$$

z_0 关于圆周 C 的对称点为: $z_1 = z_0 + \frac{R^2}{r}e^{i\varphi}$, 由于 z_1 在圆的外部, 所以

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_1} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - \frac{R^2}{r}e^{i\varphi}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta} - Re^{i\varphi}} d\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

以上(1)式减去(2)式, 得到:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \left(\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - re^{i\varphi}} - \frac{Re^{i\theta}}{re^{i\theta} - Re^{i\varphi}} \right) d\theta. \quad (3)$$

而其中

$$\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - re^{i\varphi}} - \frac{Re^{i\theta}}{re^{i\theta} - Re^{i\varphi}} = \frac{-(R^2 - r^2)e^{i(\theta+\varphi)}}{Rre^{i2\theta} + Rre^{i2\varphi} - (R^2 + r^2)e^{i(\theta+\varphi)}}$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2) - Rr[e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)}]} = \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2) - 2Rr \cos(\theta - \varphi)}$$

此结果代入(3)式, 就证明了:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

以上公式 (4.2.2)称为泊松公式, 它说明若已知一个闭圆上的调和函数在圆周上的值, 则在圆内任何一点这个调和函数的值就确定了。这一原理可推广到到方程的定解问题上就是在物理上有广泛应用的狄利克雷问题:

狄利克雷问题 (Dirichlet): 用数学表示就是:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, z \in D \\ u(z)|_C = u(\xi) \end{cases}$$

可以证明此问题的解是唯一的, 也是稳定的。所谓解稳定的, 是指边界值变化很小时, 解的变化也很小。这些性质证明可以利用以下定理:

定理4.2.4 设函数 u_1 及 u_2 在有界区域 D 内调和, 在有界闭域 $\bar{D} = C + D$ 上连续, 且 u_1 和 u_2 在边界 C 上相差不超过 ϵ , 即当 $\xi \in C$ 时候, $|u_1(\xi) - u_2(\xi)| \leq \epsilon$, 则在整个 \bar{D} 上也有

$$|u_1(z) - u_2(z)| \leq \epsilon, \quad z \in \bar{D}$$

证明: $u_1 - u_2$ 也在 D 内调和, 在 \bar{D} 上连续。依条件, $\xi \in C$ 时, 有

$$-\epsilon \leq u_1(\xi) - u_2(\xi) \leq \epsilon$$

所以

$$-\epsilon \leq \min_{\xi \in C} [u_1(\xi) - u_2(\xi)] \leq \max_{\xi \in C} [u_1(\xi) - u_2(\xi)] \leq \epsilon.$$

根据调和函数的极值原理, 有

$$\min_{\xi \in D} [u_1(\xi) - u_2(\xi)] = \min_{\xi \in C} [u_1(\xi) - u_2(\xi)]$$

$$\max_{\xi \in D} [u_1(\xi) - u_2(\xi)] = \max_{\xi \in C} [u_1(\xi) - u_2(\xi)]$$

这样

$$-\epsilon \leq \min_{\xi \in D} [u_1(\xi) - u_2(\xi)] \leq \max_{\xi \in D} [u_1(\xi) - u_2(\xi)] \leq \epsilon.$$

也就是

$$|u_1(z) - u_2(z)| \leq \epsilon, \quad z \in D.$$

附例4.1 设 $f(z)$ 是解析函数, 证明: $\ln |f(z)|$ 是调和函数($f(z) \neq 0$)

证明: 由于 $f(z)$ 是解析函数且 $f(z) \neq 0$, 所以复合函数 $\ln f(z)$ 是解析函数。而 $\ln f(z)$ 的实部为 $\ln |f(z)|$, 所以 $\ln |f(z)|$ 是调和函数。

附例4.2 设 u 调和函数, 且不恒等于常数, 请问对怎样的 f , 函数 $f(u)$ 为调和函数?

解: 如果 $f(u)$ 为调和函数, 则

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(u)}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

而

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u)}{\partial x} &= f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2} &= f''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + f'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

同样也可以得到

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial y^2} = f''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + f'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

以上两式代入(1)整理得到:

$$f''(u) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + f'(u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

由于 u 是调和函数, 因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 利用此式代入上式(2)得到:

$$f''(u) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] = 0. \quad (3)$$

已知 u 不恒等于常数, 因此 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ 不恒为0. 这样要使上式(3)成立, 只有

$$f''(u) = 0.$$

从而解出

$$f(u) = au + b,$$

其中 a, b 为任意常数。

附例4.3 设 $u(z)$ 是全平面的有界调和函数, 证明 $u(z)$ 恒等于常数。

证明: 由于 $u(z)$ 是全平面的有界调和函数, 所以能找到全平面的解析函数 $f(z)$, 使得 $u(z)$ 为其实部, 即

$$f(z) = u(z) + iv(z).$$

又根据有界性的条件, $\exists M > 0$, 使得 $|u(z)| < M$, 因此

$$|e^{f(z)}| = e^{u(z)} \leq e^{|u(z)|} < e^M.$$

这样 $e^{f(z)}$ 在全平面有界，而 $e^{f(z)}$ 在全平面解析，根据刘维尔定理： $e^{f(z)}$ 为常数，因此 $f(z)$ 为常数，并进一步得出 $u(z)$ 为常数。证毕。

第五章 解析函数的级数展开

5.1节 复级数以及基本性质

复级数以及其敛散性

$\{z_n\}$ 是一复数列，表达式

$$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (5.1.1)$$

称为复数项的无穷级数。此级数的敛散性通过以下方式来判断：考察级数的前 n 项部分和：

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

如 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ (有限复数)，则称此级数是收敛的，如果 $\{S_n\}$ 没有极限，则称级数发散。

如设 $z_k = a_k + ib_k$ ，则

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n a_k + i \sum_{k=1}^n b_k$$

因此又有等价条件判断以上复级数敛散性：

定理5.1.1 以上级数(5.1.1)收敛的充分必要条件是，级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛(于 a)且级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 收敛(于 b)

由以上级数收敛的部分和有极限的等价定义，也有类似于实级数收敛的柯西收敛准则

定理5.1.2 级数(5.1.1)收敛的充分必要条件是：对于任意取定 $\epsilon > 0$ ，存在正整数 $N(\epsilon)$ ，使当 $n > N$ ， $p = 1, 2, 3, \dots$ 时，有

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \epsilon$$

由以上柯西收敛准则,能得到级数收敛的一个重要的必要条件:

推论5.1.1 级数(5.1.1)收敛的必要条件是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

级数的绝对收敛:

如果级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |z_k| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots$$

收敛,就称级数(5.1.1)绝对收敛。

根据级数收敛的柯西收敛准则,可推知;级数绝对收敛一定收敛。

例5.1.1 判别级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{n} \right)$ 的敛散性。

解: 由于实部对应的级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散,故由定理5.1.1可知,原级数发散。

例5.1.2 讨论级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的敛散性。

解:分两种情况讨论:

1) 当 $|z| < 1$ 时,正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n$ 收敛,因此级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 绝对收敛,其部分和

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

因 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

2) 当 $|z| \geq 1$ 时, $|z|^n \geq 1$,级数通项趋于0这一级数收敛的必要条件不满足,因此,级数发散。

复变函数项级数

设 $f_n(z)$ 是定义在平面点集 E 上的复变函数列,则称

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (5.1.3)$$

为 E 上的(复变)函数项级数。设 $z_0 \in E$, 如复数项级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z_0) = f_1(z_0) + f_2(z_0) + \dots + f_n(z_0) + \dots$$

收敛, 就称函数项级数(5.1.3)在 z_0 收敛。如在 E 上任何一点级数都收敛, 就称级数在 E 上收敛。

要进一步讨论这些函数项级数的性质, 比如连续性和解析性等性质, 我们还要经常考虑函数项级数的一致收敛的性质。

函数列一致收敛的定义

设 $g_n(z)$ 是定义在集合 E 上的函数列, 此函数列在 E 上**一致收敛**于函数 $g(z)$ 是指: 对于任取 $\epsilon > 0$, 可以找到一个与 z 无关的自然数 $N(\epsilon)$, 使 $n > N$ 时, 对于任意 $z \in E$ 都有

$$|g_n(z) - g(z)| < \epsilon$$

成立。

函数级数的一致收敛 函数项级数(5.1.3)的前 n 项部分和为:

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$$

如果在 E 上 $S_n(z)$ 一致收敛于函数 $S(z)$, 则称级数(5.1.3)一致收敛于 $S(z)$ 。

类似地, 对于一致收敛的判别, 也有相应的柯西收敛准则:

定理5.1.3 函数级数(5.1.3)一致收敛的充分必要条件是: 对于任意取定 $\epsilon > 0$, 存在正整数 $N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$, $p = 1, 2, 3, \dots$ 时, 对于任意 $z \in E$ 都有

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \epsilon$$

利用以上级数一致收敛的柯西收敛准则, 就可以得出以下的一致收敛比较判别法:

定理5.1.4 比较判别法 (维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法) 如果对集合 E 上所有点 z 都有

$$|f_k(z)| \leq M_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

而正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ 收敛, 则级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ 在 E 上绝对一致收敛。

证明: 由于对于任何取定的 $z_0 \in E$, $|f_k(z_0)| \leq M_k$, 而正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ 收敛, 根据正项级数的比较判别法, 级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(z_0)|$$

收敛。这样就证明了函数项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ 在 E 上绝对收敛。下面证明此函数项级数也一致收敛, 为此, 使用柯西收敛准则来证明: 由于数项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ 收敛, 则对于任意取定 $\epsilon > 0$, 存在正整数 $N(\epsilon)$, 使当 $n > N$, $p = 1, 2, 3, \dots$ 时, 有

$$|M_{n+1} + M_{n+2} + \dots + M_{n+p}| < \epsilon$$

而对集合E上所有点 z 都有: $|f_k(z)| \leq M_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$. 这样当 $n > N, p = 1, 2, 3, \dots$ 时, 亦成立:

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \epsilon \quad (1)$$

根据上式(1), 利用函数级数一致收敛的柯西收敛的准则(定理5.1.3), 可知级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ 在E上一致收敛。证毕。

以上定理中, 正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ 称为 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ 的强级数。

例5.1.3 证明级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ 在闭圆 $|z| \leq r, r < +\infty$ 上绝对一致收敛。

证明: 在此闭圆内, $|z| \leq r$, 因此

$$\left| \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{r^k}{k!}$$

而数项级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k}{k!}$ 收敛, 由Weierstrass判别法, 级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ 在闭圆 $|z| \leq r, r < +\infty$ 上绝对一致收敛。

例5.1.4 证明级数 $z + (z^2 - z) + \dots + (z^n - z^{n-1}) + \dots$ 在闭圆 $|z| \leq r, r < 1$ 上绝对一致收敛。

证明: 由于 $|z| \leq r, r < 1$, 因此

$$|z^n - z^{n-1}| \leq |z^n| + |z^{n-1}| \leq r^n + r^{n-1}$$

因此原函数项级数有强级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n + r^{n-1}$. 由Weierstrass判别法, 级数在闭圆 $|z| \leq r, r < 1$ 上绝对一致收敛。

例5.1.5 证明级数 $z + (z^2 - z) + \dots + (z^n - z^{n-1}) + \dots$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内收敛, 但是不一致收敛。

证明: 级数的前 n 项部分和

$$S_n = z + (z^2 - z) + \dots + (z^n - z^{n-1}) = z^n.$$

因而, 根据条件 $|z| < 1$, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0.$$

所以, 此级数在单位圆 $|z| < 1$ 内收敛到0. 下面证明此级数不一致收敛: 用反证法, 假定级数一致收敛, 则对于任意取定的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时,

$$|S_n(z) - 0| = |z|^n < \epsilon.$$

但如果我们取点列 $z_n = 1/\sqrt[n]{2} < 1$, 虽然 z_n 在单位圆 $|z| < 1$ 内, 但始终有: $|z_n|^n = \frac{1}{2}$, 这与以上要求的一致收敛的条件矛盾. 因此级数不一致收敛.

定理5.1.4 如果 $f_k(z)$, $k = 1, 2, \dots$ 都是域 D 内的连续函数, 级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ 在 D 内一致收敛于 $f(z)$, 则和函数 $f(z)$ 也是 D 内的连续函数.

证明: 级数部分和为 $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$, 对于 D 内的任意点 z_0 , 由于

$$f(z) - f(z_0) = f(z) - S_n(z) + S_n(z) - S_n(z_0) + S_n(z_0) - f(z_0)$$

因此

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S_n(z_0) - f(z_0)| \quad (1)$$

任意取定 $\epsilon > 0$, 由一致收敛的条件, 可取到某个充分大的固定 n , 使得:

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |S_n(z_0) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (2)$$

另外, 由于 $S_n(z)$ 是连续函数, 因此存在 $\delta > 0$, 当 $|z - z_0| < \delta$ 时,

$$|S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

综合以上式(1), (2)和(3)得出的结论, 当 $|z - z_0| < \delta$ 时,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

这就证明了 $f(z)$ 在 D 内的任意点 z_0 的连续性, 从而 $f(z)$ 为区域 D 的连续函数.

类似地可证明:

定理5.1.5 如果 $f_k(z)$, $k = 1, 2, \dots$ 都在曲线 C 上连续, 且级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ 在 C 上一致收敛于 $f(z)$, 则沿着 C 可以逐项积分, 即为

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_C f_k(z) dz$$

定理5.1.6 设 $f_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 在域 D 内解析, 且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 一致收敛到 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析, 并且可以逐项求导到任意多阶, 即有

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z)$$

证明: 设 z_0 是 D 内任意一点, 取它的领域 $G: |z - z_0| < \rho$, 任意取 G 内的闭路 C , 由于 $f_n(z)$ 解析而 C 所包围区域为单连通区域, 所以 $\int_C f_n(z) dz = 0$. 再由级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 一致收敛到 $f(z)$ 的条件, 得到

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_C f_n(z) dz = 0.$$

这样函数 $f(z)$ 在 G 内沿着任何闭曲线 C 积分都为0, 则 $f(z)$ 在 G 内解析, 特别是在 z_0 解析. 这样就证明了 $f(z)$ 是 D 内的解析函数.

下面证明级数可以求逐项导到任意阶导数, 依条件可得

$$\frac{k!}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$$

易见, 在 G 的边界 C_1 上, 上式右段级数一致收敛于左端, 于是在 C_1 上可以逐项积分, 即有:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

再使用柯西积分公式, 即得到:

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z_0)$$

由 z_0 的任意性, 故结论得证.

5.2节 幂级数

最简单的函数项级数是幂级数, 幂级数一般形式为:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - a)^n = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots, \quad (5.2.1)$$

其中 a 以及 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 为复常数. 幂级数的通项

$$f_n(z) = a_n(z - a)^n$$

是幂函数, 显然是全平面的解析函数. 关于幂级数, 我们首先研究以下两个问题:

(1) 此幂级数的收敛区域是什么?

(2) 它的和函数是否在收敛区域内解析?

为了回答这些问题, 我们有下列定理:

定理5.2.1 如果幂级数(5.2.1)在某一点 $z_0 (\neq a)$ 收敛, 则它在圆: $|z - a| < |z_0 - a|$ 内绝对收敛。

证明: 对于区域 $|z - a| < |z_0 - a|$ 内任意取定点 z ,

$$|a_n(z - a)^n| = |a_n(z_0 - a)^n| \frac{|z - a|^n}{|z_0 - a|^n} = |a_n(z_0 - a)^n| q^n \quad (1)$$

其中 $q = \frac{|z - a|}{|z_0 - a|} < 1$. 由于已知级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0 - a)^n$ 收敛, 由级数收敛的必要条件得到: 此级数通项趋于0, 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(z_0 - a)^n = 0 \quad (2)$$

因此存在正数 M , 使得

$$|a_n(z_0 - a)^n| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

这样, 结合(1)式, 得到:

$$|a_n(z - a)^n| < Mq^n, \quad (q < 1)$$

而正项等比级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} Mq^n$ 收敛, 根据正项级数比较判别法, 得知级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(z - a)^n|$ 收敛, 也就是级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - a)^n$ 绝对收敛。

推论5.2.1 如果幂级数(5.2.1)在某一点 $z_0 (\neq a)$ 发散, 则它在圆外域: $|z - a| > |z_0 - a|$ 发散。

证明: 用反证法, 假定存在 $|z - a| > |z_0 - a|$ 内某一点 z_2 , 使得级数(5.2.1)收敛, 由以上的定理5.2.1, 得知级数在点 $z_0 (\neq a)$ 收敛, 这与假设矛盾。结论得证。

从以上定理5.2.1和推论5.2.1可以看出, 幂级数在以 a 为中心的某个圆域 $|z - a| < R$ 收敛, 在圆外 $|z - a| > R$ 级数一定发散。可以举例说明: 在圆周 $|z - a| = R$ 上级数有可能收敛, 也有可能发散。 R 一般情况下为非0的有限数, 但有两种特殊情况: $R = 0$ 时, 表示级数除了 $z = a$ 外都不收敛, $R = +\infty$ 时候, 说明级数在复平面的任何点都收敛。以上的 R 称为收敛半径, 但这样确定收敛半径呢?

利用定理5.2.1容易看出, 在级数5.2.1的收敛半径内实际上是绝对收敛的, 也就是在收敛半径内级数5.2.1收敛问题等价于它的绝对收敛问题, 即非负的数项级数:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(z - a)^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n, \quad x = |z - a|$$

的收敛问题。因此，我们得出结论：如果实系数幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n \quad (5.2.2)$$

收敛半径为 R ，则原级数(5.2.1)收敛半径也为 R 。再结合实系数幂级数的收敛法则，就可以给出判断(5.2.1)收敛的两个充分性条件：如果

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R} \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

则 R 为收敛半径。

幂级数和函数的解析性 幂级数的每一项都是幂函数为解析函数，自然会问：在幂级数的收敛半径内幂级数的和函数是否是解析函数，答案是肯定的。为了证明这个事实，我们首先有以下定理：

定理5.2.2 设幂级数(5.2.1)的收敛半径为 $R \neq 0$ ，对于任意取定的 $r_0 < R$ ，幂级数(5.2.1)在闭圆 $|z - a| \leq r_0$ 一致收敛。

证明：由于在收敛半径内级数绝对收敛，则 $|z - a| = r_0$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n (z - a)^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r_0^n$$

收敛。另外 $|z - a| \leq r_0$ 时， $|a_n (z - a)^n| \leq |a_n| r_0^n$ ，根据Weierstrass判别法，幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n$$

在 $|z - a| \leq r_0$ 时（绝对）一致收敛。

定理5.2.3 幂级数(5.2.1)在收敛半径内所收敛到的和函数 $f(z)$ 是解析的。

证明：设 z_0 是幂级数(5.2.1)收敛半径内的任意一点，所以存在相应的 $r_0 < R$ ，使得 z_0 属于闭圆 $|z - a| \leq r_0$ ，根据定理5.2.2，幂级数在闭圆 $|z - a| \leq r_0$ 一致收敛。而幂级数的每一项 $(z - a)^n$ 为解析函数。这样再由定理5.1.6知：幂级数在闭圆 $|z - a| \leq r_0$ 一致收敛到解析函数，特别是在 z_0 点解析，由 z_0 的任意性，幂级数(5.2.1)在收敛半径内所收敛到的和函数 $f(z)$ 是解析函数。

另外，由一致收敛的性质， $f(z)$ 可逐项求导到任意阶，即

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} [a_n (z - a)^n]^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (z - a)^{n-k}$$

5.3节 解析函数的泰勒展开

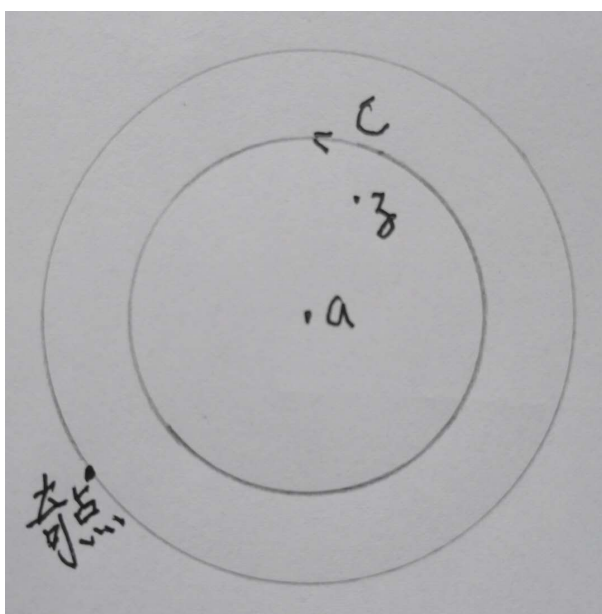
上一节说明了：幂级数在收敛半径内收敛到一个解析函数。现在的反问题是：是否每个解析函数都能展开成幂级数？以下定理将回答这个问题：

定理5.3.1 设函数 $f(z)$ 在 a 点解析， R 是 a 点和 $f(z)$ 所有奇点的最短距离(如果是无穷多个奇点，可以理解为 a 点和 $f(z)$ 奇点距离的下确界)，则在圆内区域： $|z - a| < R$ ， $f(z)$ 可以展开成幂级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n$$

这里 $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ 。

证明： 设 z 是上述圆域上的一点，在 D 内可以作一个以 a 为中心作一个半径为 r 的圆周 C ，使 z 包含在 C 内，如图：



根据柯西积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (1)$$

当 $\xi \in C$ 时，有 $\left| \frac{z-a}{\xi-a} \right| = q < 1$ ，因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z-a}{\xi-a} \right)} \\ &= \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \end{aligned} \quad (2)$$

以上展开式(2)代入(1)式, 得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} (z - a)^n \right) d\xi. \quad (3)$$

由于

$$\left| \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} (z - a)^n \right| = \left| \frac{f(\xi)}{\xi - a} \right| \left| \frac{z - a}{\xi - a} \right|^n \leq \frac{M}{r} q^n.$$

其中 r 为圆 C 的半径, $M = \max_{\xi \in C} |f(\xi)|$, 而 $q = \left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| < 1$. 由于级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{r} q^n$ 收敛, 这样根据Weierstrass 比较判别法, 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} (z - a)^n$ 关于 $\xi \in C$ 一致收敛, 利用这一结论就可在(3)式右边逐项积分得到:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right) (z - a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \quad (4)$$

其中 $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$. 又根据柯西积分公式 $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$,

于是 $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

注5.3.1 以上给出泰勒展开式的系数公式与实的情况完全相同, 所以 $e^z, \cos z, \sin z$ 在 $z = 0$ 的泰勒展开式, 与实的形式相似:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

例5.3.1 求函数 $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ 在 $z = 0$ 的泰勒展开。

解: 由于 $|z| < 1$ 时,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

上式两边对 z 求导得到:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.$$

例5.3.2 求函数 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ 在 $z = i$ 的泰勒展开。

解: $f(z)$ 有唯一的奇点 $z = 1$, 因此收敛半径 $R = |1 - i| = \sqrt{2}$. 在 $|z - i| < \sqrt{2}$ 时, $\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} \\ &= \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n, \quad |z-i| < \sqrt{2} \end{aligned}$$

例5.3.2 将 $e^z \cos z$ 以及 $e^z \sin z$ 展开为 z 的幂级数。

解:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

因此

$$e^z (\cos z + i \sin z) = e^z e^{iz} = e^{(1+i)z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} z^n \quad (1)$$

同样可以得到:

$$e^z (\cos z - i \sin z) = e^z e^{-iz} = e^{(1-i)z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} z^n. \quad (2)$$

两式相加除以2得到:

$$\begin{aligned} e^z \cos z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{[\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^n + [\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})]^n}{2} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} z^n, \end{aligned}$$

同样可得到

$$e^z \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4} z^n, \quad |z| < +\infty$$

例5.3.2 把复平面 z 沿着负实轴从 -1 到 $-\infty$ 割破, 可定义 $\ln(1+z)$, 求其在 $z = 0$ 的泰勒展开式。

解:

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1 \quad (1)$$

上式(1)两边积分得到:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + c, \quad |z| < 1$$

在上式中令 $z=0$, 再利用 $\ln(1+z)|_{z=0} = \ln 1 = 0$, 定出 $c=0$. 这样

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1$$

例5.3.4 设 $t(-1 \leq t \leq 1)$ 是参数, 求 $f(z) = \frac{4-z^2}{4-4zt+z^2}$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

解: 当 $|t| \leq 1$ 时, $f(z)$ 分母为0的点: $4-4zt+z^2=0 \Rightarrow z_{1,2} = 2t \pm 2i\sqrt{1-t^2}$, $f(z)$ 的两个奇点 $|z_{1,2}| = |2t \pm 2i\sqrt{1-t^2}| = 2$, 故 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 解析. 而

$$f(z) = \frac{4-z^2}{4-4zt+z^2} = -1 + \frac{8-4zt}{4-4zt+z^2} \quad (1)$$

在上式(1)中, 令 $t = \cos u$, 则 $f(z)$ 可以化为:

$$\begin{aligned} f(z) &= -1 + \frac{1}{1 - \frac{z}{2}e^{iu}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{2}e^{-iu}} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n e^{inu} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n e^{-inu} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nu}{2^{n-1}} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n \arccos t)}{2^{n-1}} z^n. \quad |z| < 2 \end{aligned}$$

其系数 $T_n(t) = \frac{\cos(n \arccos t)}{2^{n-1}}$ 是一个 t 的 n 次多项式, 称为切比雪夫多项式.

例5.3.5 求 $\sec z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式(计算到前5项).

解: 离 $z=0$ 最近的奇点为 $z = \frac{\pi}{2}$, 故 $\sec z$ 在 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 解析, 设

$$\sec z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

因为 $\sec z$ 是偶函数, 所以

$$\sec z = \sec(-z) = a_0 - a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n (-1)^n z^n + \dots$$

以上两式相加除以2, 得到:

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots, \quad |z| < \frac{\pi}{2},$$

即

$$1 = (a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots) \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right).$$

此式比较同次幂的系数得到:

$$z^0: a_0 = 1, \quad z^2: a_2 - \frac{a_0}{2} = 0, \quad z^4: a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24} = 0.$$

这样

$$a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{5}{24}.$$

所以

$$\sec z = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \dots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}$$

例5.3.6 求 $f(z) = \exp\left(\frac{z}{z-1}\right)$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式的前四项。

解: 因为 $z=0$ 最近的奇点为 $z=1$, 故 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 解析, 按要求只要展开到 z^3 . 以下用 $O(z^k)$ 代表这样一个幂级数: 它的项从 z^k 开始。因为

$$\frac{z}{z-1} = -z[1+z+z^2+O(z^3)] = -[z+z^2+z^3+O(z^4)],$$

所以

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - [z+z^2+z^3+O(z^4)] + \frac{1}{2!}[z+z^2+z^3+O(z^4)]^2 - \frac{1}{3!}[z+z^2+z^3+O(z^4)]^3 + O(z^4) \\ &= 1 - [z+z^2+z^3+O(z^4)] + \frac{1}{2}[z^2+2z^3+O(z^4)] - \frac{1}{6}[z^3+O(z^4)] + O(z^4) \\ &= 1 - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + O(z^4). \end{aligned}$$

解析函数的零点

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 且 $f(z_0) = 0$, 则 z_0 是 $f(z)$ 的零点。这样 $f(z)$ 在 z_0 的某个领域 U 的泰勒展开式是

$$f(z) = a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

如果 $f(z)$ 在 U 内不恒为 0, 那么存在自然数 $m, a_m \neq 0$, 而 $a_0 = \dots = a_{m-1} = 0$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点。特别 $m=1$ 时, 称 z_0 是 $f(z)$ 的单零点。由于 $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, 所以, 上面 m 级零点的条件等价于

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

而 $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ 。

例5.3.7 $f(z) = z - \sin z$, 求证: $z=0$ 是 $f(z)$ 的 3 级零点。

证法 1: $f(z)$ 在 $z=0$ 附近的泰勒展开式为:

$$f(z) = z - \sin z = z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots$$

因此, $z=0$ 是 $z - \sin z$ 的 3 级零点。

证法2：由于 $f(z) = z - \sin z$, 这样

$$f(0) = (z - \sin z)|_{z=0} = 0, \quad f'(0) = (1 - \cos z)|_{z=0} = 0,$$

$$f''(0) = \sin z|_{z=0} = 0, \quad f^{(3)}(0) = \cos z|_{z=0} = 1 \neq 0.$$

因此, $z = 0$ 是 $f(z) = z - \sin z$ 的3级零点。

根据 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点的定义, $f(z)$ 在 z_0 的某个领域 U 的泰勒展开式是

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

$$= (z - z_0)^m [a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots] = (z - z_0)^m g(z)$$

其中 $g(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots$, $g(z)$ 是定义在 U 内关于 $z - z_0$ 的幂级数, 因此 $g(z)$ 在 z_0 解析, 且 $g(z_0) = a_m \neq 0$. 所以, z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点, 则 $f(z)$ 又可等价地表示为:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 解析且 } g(z_0) \neq 0$$

关于解析函数的零点, 还有以下的一个重要性质——孤立零点原理:

定理5.3.2(孤立零点原理) 设 $f(z)$ 在 z_0 点解析, 且 z_0 是它的一个零点, 那么 $f(z)$ 或者在 z_0 的一个领域内恒等于0, 或者存在 z_0 的一个领域, 使得在领域内, z_0 是 $f(z)$ 的唯一零点。

证明: 若 $f(z)$ 在 z_0 的任何领域内都不恒为0, 则不妨设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点, 这样在 z_0 的某个领域 U 有表示式:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 解析且 } g(z_0) \neq 0$$

由于 $g(z_0) \neq 0$, 这样, 根据 $g(z)$ 的连续性, 存在 z_0 的领域 V (不妨设 $V \subset U$), 在 V 内成立 $g(z) \neq 0$, 而 $(z - z_0)^m$ 只有 z_0 这个唯一零点, 因此 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ 在 z_0 的领域 V 内只有唯一零点 z_0 . 命题得证。

5.4节 罗朗级数

罗朗级数的定义: 形如

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

的级数称为罗朗级数。

罗朗级数可以看成由两个级数组成, 这两个级数分别为:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots \quad (5.4.2)$$

以及幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n. \quad (5.4.3)$$

(5.4.2)表示的级数的一般项为 $(z-a)^{-k}$ 形式, 称为这个罗朗级数的**主要部分**, 而(5.4.3)表示的幂级数称为这个罗朗级数的**正则部分**。

以下我们来研究罗朗级数的收敛区域: 首先称为这个罗朗级数的 主要部分(5.4.2)可以看成以变数 $\xi = \frac{1}{z-a}$ 构成的幂级数。化为

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n}\xi^n. \quad (5.4.4)$$

设此幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{r}$, 回到原变量 z 可知级数(5.4.2)在圆外区域 $D_1: |z-a| > r$ 收敛。另外(5.4.3)是我们熟悉的幂级数, 设其收敛圆为 $D_2: |z-a| < R$. 这样罗朗级数(5.4.1)在 D_1 和 D_2 的公共部分, 即在环形区域

$$r < |z-a| < R$$

收敛。

以上我们知道, 罗朗级数(5.4.1)在一个环形区域 $D: r < |z-a| < R$ 收敛, 类似于幂级数的相关讨论, 我们可以知道罗朗级数(5.4.1)在此环形区域内收敛到一个解析函数。以下我们考虑上述问题的反问题: 如果函数 $f(z)$ 在环形区域 $D: r < |z-a| < R$ 解析, 那么是否 $f(z)$ 能在此环形区域展开成罗朗级数, 答案是肯定的, 这一事实我们用以下定理来描述:

定理5.4.1 设 $f(z)$ 在圆环区域 $D: r < |z-a| < R$ 中解析, 则 $f(z)$ 一定能在这个圆环中展开成罗朗级数, 即

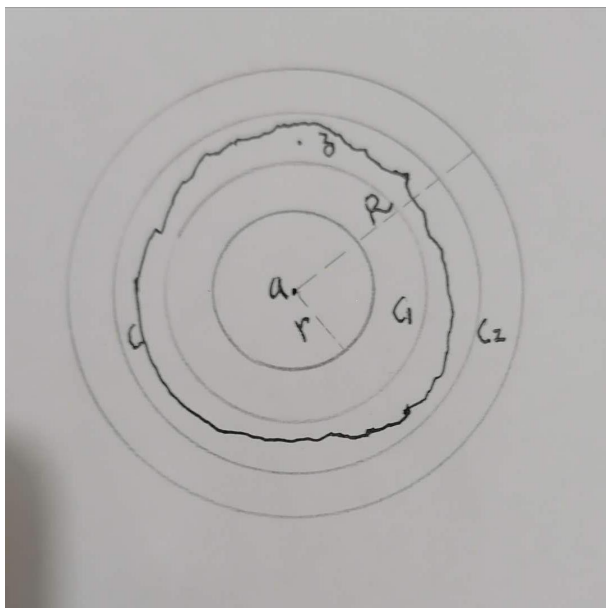
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n, \quad (5.4.5)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.4.6)$$

而 C 是区域 D 内包围 a 点的任意闭路。

证明: 设 z 是上述环域上的一点, 在 D 内可以作一个以 a 为中心作同心圆 C_1, C_2 , 使 z , 使 z 夹在两同心圆之间: 如图:



根据多连通区域的柯西积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (1)$$

当 $\xi \in C_2$ 时, $|z - a| < |\xi - a|$, 因此有 $\left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| = q(\text{常数}) < 1$, 类似于上一节幂级数展开定理5.3.1的证明方法, 可得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right) (z - a)^n. \quad (2)$$

当 $\xi \in C_1$ 时, $|z - a| > |\xi - a|$, 因此,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= -\frac{1}{(z - a) - (\xi - a)} = -\frac{1}{z - a} \left(\frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z - a}} \right) \\ &= -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\xi - a}{z - a} \right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z - a)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

类似地, 代入后得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right) (z - a)^n. \quad (4)$$

再由多连通区域的柯西积分定理,

$$\int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \quad (5)$$

其中C是区域D内包围a点的任意闭路。最后综合式(1), (2), (4), (5)得到:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

注5.4.1 以上的定理5.4.1中的罗朗展开区域如果具体为孤立奇点a附近的特殊环形区域: $C_\rho: 0 < |z-a| < \rho$, 而C是 C_ρ 中任意包围点a的闭曲线, 则当 $n = -1$ 时, 根据(5.4.6)式, 得到

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \Rightarrow \int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

上式说明了:

如果C是围绕 $f(z)$ 的孤立奇点a的环路, 则求 $f(z)$ 在C上的积分问题可以转化为求 $f(z)$ 的罗朗级数展开 $(z-a)^{-1}$ 的系数 a_{-1} 的问题。即

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (5.4.7)$$

例5.4.1 求函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在区域 $D_1: 0 < |z-1| < 1$ 以及 $D_2: 2 < |z| < +\infty$ 内的罗朗展开。

解: 1)在区域 D_1 :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)} \frac{1}{(z-2)} \quad (1)$$

由于 $\frac{1}{z-2}$ 在 $z=1$ 解析, 因此可以 $z=1$ 为中心展开成幂级数得到:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1$$

因此

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n \right) = -\sum_{n=-1}^{+\infty} (z-1)^n.$$

2) 在区域 $D_2: 2 < |z| < +\infty$ 内,

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}$$

例5.4.2 求函数 $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$ 在 $|z-1| > 0$ 的罗朗展开。

$$\begin{aligned} \text{解: } \sin \frac{z}{z-1} &= \sin \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \sin 1 \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{1}{z-1} \\ &= \sin 1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \cos 1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}. \end{aligned}$$

例5.4.3 设 t 是实参数, 求函数 $f(z) = \exp\{\frac{t}{2}(z - \frac{1}{z})\}$ 在区域 $0 < |z| < +\infty$ 的罗朗展开。

解法1: $f(z)$ 在环域 $0 < |z| < +\infty$ 解析, 因此展为罗朗级数, 此罗朗级数设为:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\exp\{\frac{t}{2}(z - \frac{1}{z})\}}{z^{n+1}} dz,$$

这里 C 可取圆周 $|z| = 1$. 于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it \sin \theta}}{e^{i(n+1)\theta}} \cdot i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(t \sin \theta - n\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t \sin \theta - n\theta) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t \sin \theta - n\theta) d\theta \end{aligned}$$

下面证明上式的虚部为0, 为此, 作代换, $\varphi = 2\pi - \theta$ 得

$$\int_0^{2\pi} \sin(t \sin \theta - n\theta) d\theta = \int_{2\pi}^0 \sin(-t \sin \varphi + n\varphi - 2n\pi)(-d\varphi) = - \int_0^{2\pi} \sin(t \sin \theta - n\theta) d\theta,$$

因而

$$\int_0^{2\pi} \sin(t \sin \theta - n\theta) d\theta = 0.$$

这样

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t \sin \theta - n\theta) d\theta.$$

解法2: 直接展开为

$$f(z) = \exp\left\{\frac{t}{2}z\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{t}{2}\frac{1}{z}\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^k z^k \cdot \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{t}{2}\right)^l \left(-\frac{1}{z}\right)^l$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{k!l!} \left(\frac{t}{2}\right)^{k+l} z^{k-l} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l} \right\} z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left\{ \sum_{l=-n}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l} \right\} z^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t) z^n.
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_n(t) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
J_{-n}(t) &= \sum_{l=n}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!(-n+l)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2l} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!m!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(t)
\end{aligned}$$

注5.4.2 在上例5.4.3 用两种不同方法得出的罗朗展开式的系数应该是同样的, 因此, 我们比较得到

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t \sin \theta - n\theta) d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

5.5节 孤立奇点分类

定义5.5.1 a 是 $f(z)$ 的一个奇点, 如存在 a 的某个领域: $|z - a| < \rho$ 内除了 a 点外都是解析的, 则称 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则由上一节的罗朗级数展开定理, $f(z)$ 在圆环 $|z - a| < \rho$ 可以展开成罗朗级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}}_{\text{主要部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n}_{\text{正则部分}}. \quad (5.5.1)$$

根据罗朗展开级数主要部分的具体情形, 可对孤立奇点分为以下三类:

1) 罗朗展开式中不含有主要部分, 这时 a 称为可去奇点。则罗朗展开式为:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots, \quad 0 < |z-a| < \rho.$$

例如函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, 它在 $|z| > 0$ 的罗朗展开为:

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

其展开式中不含有主要部分, 因此 $z = 0$ 为可去奇点。

2) 罗朗展开式中主要部分含有有限多项, 这时 a 称为极点。如罗朗展开为:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-a)^k. \quad (a_{-m} \neq 0)$$

称 $z = a$ 为 m 级极点。例如函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{3}{(z-1)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-1)^n$$

它的奇点 $z = 1$ 是2级极点。

3) 罗朗展开式中主要部分有无穷多项, 这时 a 为本性奇点。比如 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, 其在 $|z| > 0$ 的罗朗展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$z = 0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。

孤立奇点类型的进一步讨论:

定理5.5.1 设 a 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 那么 a 是可去奇点的充分必要条件是: 存在某个正数 ρ , 使得在环域 $0 < |z-a| < \rho$ 内 $f(z)$ 有界。

证明: 先证必要性, 设 a 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么在 a 的一个去心邻域 $0 < |z-a| < \rho$ 中 $f(z)$ 解析且可展为

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots,$$

因此,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = a_0$$

这样在 $0 < |z-a| < \rho$ 中, $f(z)$ 有界。

充分性: 设在 $0 < |z-a| < \rho$ 内有

$$|f(z)| \leq M,$$

取闭路 $C: |z-a| = \rho_0 < \rho$, 用长大不等式估计罗朗展开系数得到

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho_0^{n+1}} \times 2\pi\rho_0 = \frac{M}{\rho_0^n}$$

当 $n = -1, -2, \dots$ 时, 令 $\rho_0 \rightarrow 0$ 时, $\rho_0^n \rightarrow +\infty$, 得到 $a_n = 0$, 这就证明了 a 是 $f(z)$ 的可去奇点。

定理5.5.2 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $f(z)$ 是 m 级极点的充分必要条件是: $f(z)$ 在 a 为中心的某个环域内可表示为:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad (\varphi(z) \text{ 在 } a \text{ 点解析且 } \varphi(a) \neq 0) \quad (5.5.2)$$

证明: 先证必要性: 由于 $z = a$ 为 m 级极点, $f(z)$ 在 a 为中心的某个环域内 $0 < |z - a| < \rho$ 罗朗展开为:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k. \quad (a_{-m} \neq 0)$$

即

$$f(z) = (z-a)^{-m} \left[a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^{k+m} \right]$$

$$\text{记 } \varphi(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^{k+m},$$

则

$$f(z) = (z-a)^{-m} \varphi(z).$$

而 $\varphi(a) = a_{-m} \neq 0$. 另外, 由于 $\varphi(z)$ 展开式是 $z-a$ 的幂级数, 所以在 $|z-a| < \rho$ 内 $\varphi(z)$ 解析, 特别在 $z=a$ 解析. 这样必要性得到了证明.

下面证明充分性, 这时 $f(z)$ 在 a 为中心的某个环域内可表示为:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad (\varphi(z) \text{ 在 } a \text{ 点解析且 } \varphi(a) \neq 0)$$

使用证明以上必要性的逆过程, 可推出在 a 为中心的某个环域内 $f(z)$ 可展为以下形式罗朗级数:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k. \quad (a_{-m} \neq 0)$$

即 $z=a$ 为 $f(z)$ 的 m 级极点。

定理5.5.3 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为极点的充分必要条件是

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

证明: 必要性: 假定 a 为极点, 不妨设为 m 级极点, 则 $f(z)$ 在 a 的某个环域内可表示为

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad (\text{其中 } \varphi(z) \text{ 在 } a \text{ 解析, 且 } \varphi(a) \neq 0)$$

由于 $\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(z-a)^m} = \infty$, 因此

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

充分性: 假定已知 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, 由于 a 是孤立奇点, 故存在 a 的去心邻域 D_ρ : $0 < |z - a| < \rho$, 使在 D_ρ 中, $f(z)$ 解析且不为 0. 令 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, 则 $g(z)$ 在 D_ρ 中解析, 又

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0,$$

因此 a 是 $g(z)$ 的可去奇点, 补充定义后 a 为 $g(z)$ 的零点, 不妨设为 m 级零点, 这样在 D_ρ 中, $g(z)$ 可表示为

$$g(z) = (z - a)^m \phi(z), \quad (\text{其中 } \phi(z) \text{ 在 } a \text{ 解析, 且 } \phi(a) \neq 0)$$

相应地, 就有

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^m}, \quad (\text{其中 } \varphi(z) = \frac{1}{\phi(z)} \text{ 在 } a \text{ 解析, 且 } \varphi(a) \neq 0)$$

根据定理 5.5.2, a 为 $f(z)$ 的 m 级极点。证毕。

由孤立奇点的三种分类并结合定理 5.5.1 和定理 5.5.3 的结论, 易得以下关于本性奇点的结论:

定理 5.5.3 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本性奇点的充分必要条件是 $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ 不存在有限或无限的极限。

例如, $z = 0$ 是 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点, 当 z 沿着负实轴趋于零时, $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0 \ (x \rightarrow 0^-)$; 当 z 沿着正实轴趋于零时, $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty \ (x \rightarrow 0^+)$ 。

这就是说 $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在, 因而 $z = 0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点。

例 5.5.1 求函数

$$f(z) = \frac{(z - 5) \sin z}{(z - 1)^2 z^2 (z + 1)^3}$$

的奇点, 并确定它们的类别。

解: 显然 $z = 0, z = 1, z = -1$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 先考虑 $z = 0$, 因为

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[\frac{(z - 5)}{(z - 1)^2 (z + 1)^3} \frac{\sin z}{z} \right] = \frac{1}{z} \varphi(z)$$

而

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z - 5)}{(z - 1)^2 (z + 1)^3} \frac{\sin z}{z} = -5$$

所以 $z = 0$ 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点, 可补充定义 $\varphi(0) = -5$ 成为解析点。因而 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的一级极点。另外, 类似讨论得到: $z = 1$ 为 2 级极点, $z = -1$ 为 3 级极点。

例 5.5.2 求函数

$$f(z) = \cos \frac{1}{z + i}$$

的奇点, 并判别其类别。

解:

$$\cos \frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n!} \frac{1}{(z+i)^{2n}}$$

它的主要部分有无穷多项, 因而 $z = -i$ 为本性奇点。

例5.5.3 设 a 是 $f(z)$ 的解析点, 是 $g(z)$ 的本性奇点, 求证 a 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的本性奇点。

证明: 用反证法, 假定 a 不是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的本性奇点。那么 a 只能是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点或极点, 不论是何种情形, 在 a 附近, $\frac{f(z)}{g(z)}$ 可表示为

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-a)^m \varphi(z), \quad (\text{其中 } \varphi(z) \text{ 在 } a \text{ 解析, 且 } \varphi(a) \neq 0)$$

而 m 为某个整数(负整数也可以)。又 a 是 $f(z)$ 的解析点, 故有表示式:

$$f(z) = (z-a)^n h(z), \quad (\text{其中 } n \geq 0, h(z) \text{ 在 } a \text{ 解析, 且 } h(a) \neq 0)$$

由上两式解得:

$$g(z) = (z-a)^{n-m} \frac{h(z)}{\varphi(z)} = (z-a)^{n-m} H(z), \quad (1)$$

其中 $H(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}$ 在 a 解析且 $H(a) \neq 0$ 。由以上 $g(z)$ 表示式(1), $g(z)$ 在 $z = a$ 只可能为极点或可去奇点, 不可能为本性奇点, 这就造成了矛盾, 证毕。

例5.5.4 设 a 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 求证: $f(z)$ 在 a 点的罗朗展开式的 $(z-a)^{-1}$ 的系数 a_{-1} 有以下计算公式:

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \quad (5.5.3)$$

证明: 由于 a 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 所以在 a 附近, $f(z)$ 可以表示为:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \quad (a_{-m} \neq 0)$$

令 $g(z) = (z-a)^m f(z)$, 则

$$g(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^{n+m}.$$

由于补充定义 $g(a) = a_{-m}$ 后 $g(z)$ 就在 $z = a$ 解析, 而 a_{-1} 是 $(z-a)^{m-1}$ 的系数, 根据解析函数幂级数展开的系数确定公式

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

也就是

$$a_{-1} = \frac{[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)!} \Big|_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$$

这样就完成了证明。

∞ 孤立奇点 如果 $f(z)$ 在 ∞ 点的某个领域(即某个圆外的区域: $R < |z| < +\infty$) 解析, 则 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点。

设 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 作代换 $\xi = \frac{1}{z}$ 得到函数

$$\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

这一变换将区域 $R < |z| < +\infty$ 变为 $\xi = 0$ 为中心的环形区域 $0 < |\xi| < \frac{1}{R}$. 这样函数 $\varphi(\xi)$ 在 $\xi = 0$ 对应的奇点类型就是 $f(z)$ 的孤立奇点 $z = \infty$ 的奇点类型。

设 $\varphi(\xi)$ 在 $0 < |\xi| < \frac{1}{R}$ 罗朗展开式为:

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \xi^n.$$

换回到变量 z , 则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n, \quad (\text{其中 } b_n = a_{-n}) \quad (5.5.4)$$

由此可知, 就展开式而言, $f(z)$ 在 $z = \infty$ 孤立奇点的类型判别法则为:

1. $z = \infty$ 是 $f(z)$ 可去奇点的充分必要条件是: 展开式 (5.5.4) 中不含有 z 的正次幂。
2. $z = \infty$ 是 $f(z)$ 极点的充分必要条件是: 展开式 (5.5.4) 中只含有有限多项 z 的正次幂, 如 z 的最高次正次幂是 z^m , 则为 m 级极点。
3. $z = \infty$ 是 $f(z)$ 本性奇点的充分必要条件是: 展开式 (5.5.4) 中含有无穷多项 z 的正次幂。

类似地, 也有利用数值特征判断 $z = \infty$ 奇点类型的法则:

- 1) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \text{有限}$, $z = \infty$ 为可去奇点。
- 2) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, $z = \infty$ 为极点。
- 3) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 不存在, $z = \infty$ 为本性奇点。

例如:

1. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2 + 2}{z^2 + 4} = 2$, 则 $z = \infty$ 是 $f(z) = \frac{2z^2 + 2}{z^2 + 4}$ 的可去奇点。
 2. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^4 + 2}{z^2 + 4} = \infty$, 所以 $z = \infty$ 是 $f(z) = \frac{2z^4 + 2}{z^2 + 4}$ 的极点。进一步, 由于

$$f(z) = \frac{2z^4 + 2}{z^2 + 4} = z^2 \frac{2z^2 + \frac{2}{z^2}}{z^2 + 4} = z^2 g(z), \quad \text{其中 } g(z) = \frac{2z^2 + \frac{2}{z^2}}{z^4 + 2}$$

而 $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 2$, 这样 $z = \infty$ 是 $g(z)$ 的可去奇点, 因而, $g(z)$ 有如下形式的展开式:

$$g(z) = 2 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots$$

因此得出 $f(z)$ 的展式

$$f(z) = z^2 \left(2 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots \right)$$

这样 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的2级极点。

3. 取 $f(z) = e^z$, 其展开式为:

$$e^z = 1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

展开项中有无穷多项 z 的正次幂, 这样 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

本章部分习题或难题解答

附例5.1 把 $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ 在 $z = 0$ 展开成幂级数。

解:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

上式两边求导为:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}, \quad (|z| < 1)$$

所以

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^{n+1}, \quad (|z| < 1)$$

附例5.2 设 a 为实数, 且 $|a| < 1$, 证明以下等式:

$$(1) \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos n\theta, \quad (2) \frac{a \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin n\theta$$

$$(3) \ln(1 - 2a \cos \theta + a^2) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \cos n\theta$$

证明: 考虑函数: $f(z) = \frac{1}{1-az}$, $f(z)$ 在 $z=0$ 解析, $f(z)$ 在 $z=0$ 的幂级数展开为:

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^n, \quad (|z| < 1) \quad (1)$$

当 $|z|=1$ 时, $z=e^{i\theta}$, 代入上式(1), 得到:

$$\frac{1}{1-ae^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n (e^{i\theta})^n, \quad (|z| < 1) \quad (2)$$

即

$$\frac{1}{1-a\cos\theta-ia\sin\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{in\theta}$$

上式左端分母乘以其共轭化为:

$$\frac{1-a\cos\theta+ia\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

比较上式的实, 虚部得到前两个等式, 即

$$\frac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos n\theta, \quad \frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin n\theta$$

上式右边的子式对 θ 积分后, 得到

$$\ln(1-2a\cos\theta+a^2) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \cos n\theta + c$$

在此式中, 令 $\theta=0$, 即有

$$2\ln(1-a) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} + c \quad (1)$$

再利用(5.3.2)的结论, 即

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1$$

把其中 z 取为 $-a$, 即得到

$$\ln(1-a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-a)^{n+1}}{n+1} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}, \quad |a| < 1 \quad (2)$$

结果(2)代入(1), 从而定出 $c=0$. 从而

$$\ln(1-2a\cos\theta+a^2) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \cos n\theta$$

附例5.3 a 是 $f(z)$ 的极点及 $g(z)$ 的本性奇点, 求证: a 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的本性奇点。

证明: 由于 a 是 $f(z)$ 的极点及 $g(z)$ 的本性奇点, 所以 a 也是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的孤立奇点。以下我们用反证法来证明 a 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的本性奇点。为此, 假定 a 不是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的本性奇点, a 只有可能是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的极点或可去奇点, 但是无论何种情况, 都存在 a 的去心邻域 $V: 0 < |z - a| < \rho$, 使得在 V 内, $\frac{f(z)}{g(z)}$ 可以表示为:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - a)^{-n} \varphi(z) \quad (1)$$

其中 n 是整数(可去奇点时 $n \leq 0$, 极点时 $n > 0$), 而 $\varphi(z)$ 在 V 内解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$ 。由于 a 是 $f(z)$ 的极点, 因此不妨设在 V 内

$$f(z) = (z - a)^{-m} h(z), \quad (m > 0, h(z) \text{在} V \text{内解析}, h(a) \neq 0) \quad (2)$$

(2)式代入(1)可知:

$$g(z) = (z - a)^{n-m} \frac{h(z)}{\varphi(z)} \quad (3)$$

上式(3)说明 a 只可能为 $g(z)$ 的极点或可去奇点, 这与是其本性奇点的条件矛盾。证毕。

第六章 留数及其应用

6.1节 留数及留数定理

留数的定义:

设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, C 是 a 充分小邻域内把 a 包含在其内部的一个闭路, 则称积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

为 $f(z)$ 在 a 点的**留数或残数**, 记为 $\text{Res}[f(z), a]$ 。根据上一章的罗朗级数展开定理中的展开系数的积分公式:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

把此公式应用于在孤立奇点 a 附近的罗朗级数展开, 并取 $n = -1$ 时,

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi) d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.1.1)$$

这样得出留数的等价定义:

$$\mathbf{a}_{-1} = \mathbf{Res}[f(z), \mathbf{a}] \quad (6.1.2)$$

由以上留数的定义可以看出, 围绕孤立奇点的闭路 C 上的积分

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \mathbf{Res}[f(z), a] = 2\pi i a_{-1} \quad (6.1.3)$$

留数的计算方法:

1. 如果 a 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则在罗朗展开式中没有负次项, 则这时

$$\mathbf{Res}[f(z), \mathbf{a}] = a_{-1} = 0$$

2. 如果 a 是 $f(z)$ 的极点, 有以下两种系统性方法计算留数:

- 1) 可以用罗朗级数展开得出 \mathbf{a}_{-1} , 即留数。
- 2) 利用上一章最后一节中对于 m 级极点计算 a_{-1} 的式子:

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$$

所以对 m 级极点, 其留数又可以用下式计算:

$$\mathbf{Res}[f(z), \mathbf{a}] = \frac{1}{(\mathbf{m}-1)!} \lim_{z \rightarrow \mathbf{a}} \frac{d^{\mathbf{m}-1}}{dz^{\mathbf{m}-1}} [(z-\mathbf{a})^{\mathbf{m}} f(z)] \quad (6.1.4)$$

特别当 $n = 1$ 时, 一级极点留数可简化为以下公式:

$$\mathbf{Res}[f(z), \mathbf{a}] = \lim_{z \rightarrow \mathbf{a}} (z-\mathbf{a})f(z) \quad (6.1.5)$$

3. 如果 a 是 $f(z)$ 的本性奇点, 系统性方法就是用罗朗级数展开得出 \mathbf{a}_{-1} , 即留数。

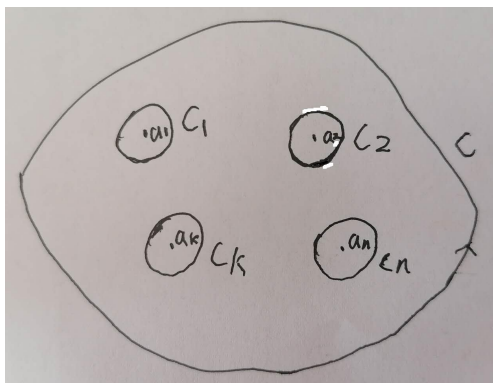
定理6.1(留数定理) 如 $f(z)$ 在闭路 C 上解析, 在 C 内除了 n 个孤立奇点 a_1, a_2, \dots, a_n 外都解析, 则

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathbf{Res}[f(z), a_k]$$

证明: 以每点 a_k 为心作小圆 C_k , 使得这些小圆都在闭路 C 内, 而且它们彼此相隔, 如图:

由多联通区域的柯西积分定理得

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz \quad (6.1.6)$$



而

$$\int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), a_k],$$

代入(6.1.6)就证明了

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), a_k] \quad (6.1.7)$$

如果 a 是以下形式函数的一级极点, 计算留数还可以使用如下引理给出的特别方法:

推论6.1.1 设 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 在 a 解析, 且 $P(a) \neq 0$, $Q(a) = 0$, $Q'(a) \neq 0$. 则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, a\right] = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

证明: 依条件, a 为 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的一级极点, 因此

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, a\right] = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{[(z - a)P(z)]'}{Q'(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{P(z) + (z - a)P'(z)}{Q'(z)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

证毕。

例6.1.1 设 $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^3}$, 求它在各极点的留数。

解: $f(z)$ 有一级极点 $z = 1$ 和三级极点 $z = 0$. 这样由于公式(6.1.5), 得到:

$$\operatorname{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{1}{z^3(z - 1)} = 1.$$

而由公式(6.1.4), 3级极点 $z = 0$ 的留数为:

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[z^3 \frac{1}{z^3(z - 1)} \right]'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - 1} \right)'' \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \frac{2}{(z - 1)^3} \Big|_{z=0} = -1$$

注6.1.1 上例中, 对于三级极点 $z = 0$, 也可以用罗朗展开方法求 a_{-1} 得出留数, 具体利用

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

得到:

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)} = -\frac{1}{z^3} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right)$$

所以

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = a_{-1} = -1.$$

例6.1.2 计算积分 $\int_C \tan \pi z dz$. 其中 C 分别为圆周 $|z| = \frac{1}{3}$ 及 $|z| = n$, n 为正整数.

解: $\tan \pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$, 解方程 $\cos \pi z = 0$, 得到被积函数 $\tan \pi z$ 的所有奇点为

$$z_k = k + \frac{1}{2}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \text{为一级极点}$$

1) 在 $|z| = \frac{1}{3}$ 内部没有 $\tan \pi z$ 的奇点, 故由柯西积分定理,

$$\int_{|z|=\frac{1}{3}} \tan \pi z dz = 0.$$

2) 在 $|z| = n$ 内部奇点为: $z_k = k + \frac{1}{2}$, 其中 $|k + \frac{1}{2}| < n$, 具体为 $2n$ 个极点, 即为 $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm (n - \frac{1}{2})$. 因此, 根据留数定理:

$$\int_{|z|=n} \tan \pi z dz = 2\pi i \sum_{|k+\frac{1}{2}|<n} \operatorname{Res} \left(\tan \pi z, k + \frac{1}{2} \right). \quad (1)$$

由推论6.1.1,

$$\operatorname{Res} \left(\tan \pi z, k + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'} \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi}. \quad (2)$$

所以

$$\int_{|z|=n} \tan \pi z dz = 2\pi i \times \left(2n \times \left(-\frac{1}{\pi} \right) \right) = -4ni.$$

例6.1.3 计算积分 $\int_{|z|=1} z^3 \sin^5 \frac{1}{z} dz$.

解: $f(z) = z^3 \sin^5 \frac{1}{z}$ 在 $|z| = 1$ 内有唯一奇点 $z = 0$, 为本性奇点, 利用罗朗展开:

$$f(z) = z^3 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \dots \right)^5 = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^4} - \dots \right)^5$$

由上式可见, 在 $f(z)$ 的展开式中 z^{-1} 的系数 $a_{-1} = 0$, 即 $\operatorname{Res}[f(z), 0] = 0$. 这样

$$\int_{|z|=1} z^3 \sin^5 \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), 0] = 0.$$

注6.1.2 以上例题也可作变换 $\xi = \frac{1}{z}$, 再利用柯西积分公式, 具体化为:

$$\int_{|z|=1} z^3 \sin^5 \frac{1}{z} dz = \int_{|\xi|=1} \frac{\sin^5 \xi}{\xi^5} d\xi = 2\pi i \frac{(\sin^5 \xi)^{(4)}}{4!} \Big|_{\xi=0} = 0$$

例6.1.4 计算积分 $\int_{|z|=1} \frac{z \sin z}{(1 - e^z)^3} dz$.

解法1: 被积函数 $f(z) = \frac{z \sin z}{(1 - e^z)^3}$, $z = 0$ 是 $f(z)$ 分子 $z \sin z$ 的2级零点, 是分母 $(1 - e^z)^3$ 的3级零点, 因此 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的一级极点, 这样

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z \sin z}{(1 - e^z)^3} = \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1 - e^z} \right)^2 \times \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{1 - e^z} = -1$$

所以

$$\int_{|z|=1} \frac{z \sin z}{(1 - e^z)^3} dz = 2\pi i \times \text{Res}[f(z), 0] = -2\pi i.$$

解法2: 被积函数 $f(z) = \frac{z \sin z}{(1 - e^z)^3}$, 用罗朗展开计算 $f(z)$ 在 $z = 0$ 的留数, 具体为:

$$\frac{z \sin z}{(1 - e^z)^3} = \frac{z(z - \frac{z^3}{3!} + \dots)}{-(z + \frac{z^2}{2!} + \dots)^3} = -\frac{1}{z} \frac{(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots)}{(1 + \frac{z}{2!} + \dots)^3} = -\frac{1}{z} \varphi(z) \quad (1)$$

其中

$$\varphi(z) = \frac{(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots)}{(1 + \frac{z}{2!} + \dots)^3}. \quad (2)$$

易见 $\varphi(z)$ 的分子和分母在 $z = 0$ 解析, 且分母在 $z = 0$ 取值不为0, 因此 $\varphi(z)$ 在 $z = 0$ 解析. 又因为把 $z = 0$ 代入有 $\varphi(0) = 1$, 所以 $\varphi(z)$ 的泰勒展开式可设为

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad (a_0 = \varphi(0) = 1) \quad (3)$$

此展开式代入(1), 则

$$f(z) = -\frac{1}{z} (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \quad (4)$$

可见

$$a_{-1} = \text{Res}[f(z), 0] = -1 \Rightarrow \text{原积分} = 2\pi i \times \text{Res}[f(z), 0] = -2\pi i$$

6.2节 留数在实积分中的应用

三种基本的积分计算中的应用:

1) $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 型积分, ($R(\cos \theta, \sin \theta)$ 是关于 $\cos \theta, \sin \theta$ 的有理函数)

为了计算此积分, 令 $z = e^{i\theta}$, 这样 $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\sin \theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$, 由于 $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, 因此, $d\theta = \frac{dz}{iz}$.

在此变换下原积分就单位圆周上的闭路积分, 就可以用复变函数的知识解决了。

例6.2.1 计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2}, \quad 0 < p < 1$$

解: 令 $z = e^{i\theta}$, 这样 $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$, 则

$$\frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} = \frac{\frac{dz}{iz}}{1 - 2p(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})) + p^2} = \frac{dz}{i(1 - pz)(z - p)}$$

因此, 原积分变化为:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{i(1 - pz)(z - p)},$$

记 $f(z) = \frac{1}{i(1 - pz)(z - p)}$, 则 $f(z)$ 在闭路 $|z| = 1$ 内有唯一奇点 $z = p$, 而

$$Res[f(z), p] = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)f(z) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p) \frac{1}{i(1 - pz)(z - p)} = \frac{1}{i(1 - p^2)}$$

所以

$$\text{原积分} = 2\pi i Res[f(z), p] = 2\pi i \frac{1}{i(1 - p^2)} = \frac{2\pi}{1 - p^2}$$

例6.2.2 计算积分

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{5 - 4 \cos x} dx$$

解: 记 $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin mx}{5 - 4 \cos x} dx$, 则原积分

$$I_1 = Re(I_1 + iI_2) = Re \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}}{5 - 4 \cos x} dx.$$

令 $z = e^{ix}$, 这样 $\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $e^{imx} = z^m$, $dx = \frac{dz}{iz}$, 因此

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}}{5 - 4\cos x} dx = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^m}{5z - 2(1+z^2)} dz$$

上式的被积函数 $f(z) = \frac{1}{i} \frac{z^m}{5z - 2(1+z^2)}$ 在闭路 $|z| = 1$ 内只有奇点 $z_1 = \frac{1}{2}$, 而

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[f(z), \frac{1}{2} \right] &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{i} \frac{z^m}{5z - 2(1+z^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} -\frac{1}{i} \left(z - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{z^m}{2(z - \frac{1}{2})(z - 2)} = \frac{1}{3 \cdot 2^m i} \end{aligned}$$

所以, 积分

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left[f(z), \frac{1}{2} \right] = 2\pi i \frac{1}{3 \cdot 2^m i} = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{m-1}}$$

取此积分的实部, 最后得出

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{5 - 4\cos x} dx = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{m-1}}.$$

以下是由于积分限为无穷的广义积分的两种情形:

2) 有理函数积分: $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$

这里 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理函数, 并假定 $Q(x)$ 在实轴上无零点, 且分母 $Q(x)$ 比分子 $P(x)$ 至少高两次。

3) $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos mx dx$ 和 $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin mx dx$, $m > 0$ 型积分

这里 $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理函数, $R(z)$ 在实轴上除了可能有有限个单极点 x_1, x_2, \dots, x_l 外都解析, 并且分母 $Q(z)$ 比分子 $P(z)$ 至少高一次。

为了解决以上两种广义积分, 我们先给出以下引理:

引理1 如果当 R 充分大时, $f(z)$ 在圆弧 $C_R: z = Re^{i\theta}, \alpha \leq \theta \leq \beta$ 上连续, 且

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0,$$

则

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

证明: 记 $h(z) = zf(z)$, 则根据条件 $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$, 得到: 当 $z \rightarrow \infty$ 时 $h(z) \rightarrow 0$. 而

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_R} \frac{h(z)}{z} dz,$$

由长大不等式,

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{h(z)}{z} \right| ds \leq \max_{z \in C_R} \left| \frac{h(z)}{z} \right| \times 2\pi R = \frac{1}{R} \max_{z \in C_R} |h(z)| \times 2\pi R = 2\pi \max_{z \in C_R} |h(z)| \quad (1)$$

由于 $z \rightarrow \infty$ 时, $h(z) \rightarrow 0$. 所以结合上式(1), 推得:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = 0 \implies \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

于是就证明了结论。

引理2 当 ρ 充分小时, $f(z)$ 在圆弧 C_ρ

$$z = a + \rho e^{i\theta}, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

上连续, 且

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = k,$$

则有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = i(\beta - \alpha)k.$$

证明: 此引理结论就是第三章第一节的例3.1.4的结论, 已经得到了证明。

引理2 的推论 设 a 是 $f(z)$ 的一级极点, 则

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}[f(z), a].$$

证明: 由于 a 是 $f(z)$ 的一级极点, 则

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = \operatorname{Res}[f(z), a],$$

因此根据引理2的结论, 得出

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}[f(z), a].$$

证毕。

引理3(约当引理) 当 R 充分大时, $g(z)$ 在圆弧 $C_R: |z| = R, \operatorname{Im} z > -\alpha (\alpha > 0)$ 上连续, 且

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0,$$

则对于任何正数 λ

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(z) \exp(i\lambda z) dz = 0.$$

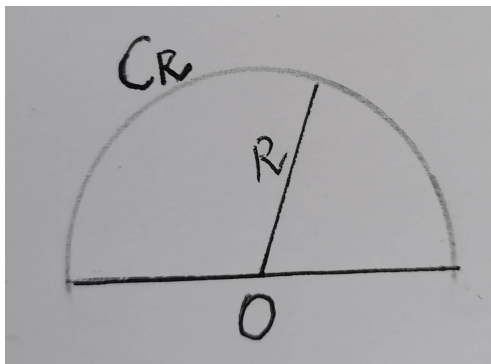
有了这些引理，我们就可以解决以上的两种广义积分了：

定理6.2.1 设 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理函数，并假定 $Q(x)$ 在实轴上无零点，且分母 $Q(x)$ 比分子 $P(x)$ 至少高两次。则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[R(z), a_k] \quad (6.2.1)$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_n 为 $R(z)$ 在上半平面的所有奇点。

证明：作闭路 $C = [-R, R] + C_R$ ，其中 $C_R = \{z \mid |z| = R, \text{Im} z > 0\}$ ，即 C_R 为上半圆，闭路 C 如下图所示：



显然，只要 R 充分大，闭路 C 内就包含了上半平面的 $R(z)$ 的所有奇点，而且在 C 上没有 $R(z)$ 的奇点。这样由留数定理

$$\int_C R(z) dz = \int_{-R}^R R(x) dx + \int_{C_R} R(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[R(z), a_k] \quad (1)$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_n 为 $R(z)$ 在上半平面的所有奇点。另外，依条件 $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ，分母 $Q(z)$ 比分子 $P(z)$ 至少高两次，所以

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zR(z) = 0,$$

由于引理1，

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z) dz = 0. \quad (2)$$

最后，在式(1)中，令 $R \rightarrow +\infty$ ，并利用上式(2)的结论，就证明了：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[R(z), a_k]$$

注6.2.1 以上 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的值是指积分主值, 即是指 $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, 也就是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx.$$

例6.2.3 用两种方法计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

解法1: 微积分方法:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

解法2: 复变函数方法, 由定理6.2.1

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{1+z^2}, i\right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} \\ &= 2\pi i \frac{1}{z+i} \Big|_{z=i} = 2\pi i \times \frac{1}{2i} = \pi \end{aligned}$$

例6.2.4 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}, \quad a > 0$$

解: 取 $R(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^3}$, $R(z)$ 在上半平面有3级极点 ai . 这样

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}[R(z), ai]$$

而

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[R(z), ai] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{(z-ai)^3}{(z^2+a^2)^3} \right] = \frac{1}{2} [(z+ai)^{-3}]'' \Big|_{z=ai} \\ &= \frac{6}{(z+ai)^5} \Big|_{z=ai} = \frac{6}{(2ai)^5} = \frac{3}{16a^5 i} \end{aligned}$$

最后就得到原积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = 2\pi i \frac{3}{16a^5 i} = \frac{3\pi}{8a^5}$$

定理6.2.2 设 $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理函数, $R(z)$ 在实轴上除了有限个单极点 x_1, x_2, \dots, x_l 外都解析, 并且分母 $Q(z)$ 比分子 $P(z)$ 至少高一次。则积分

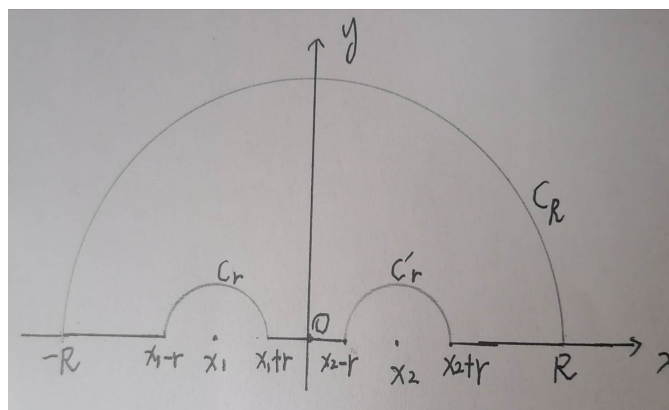
$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[R(z) e^{imz}, a_k] + \pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{Res}[R(z) e^{imz}, x_k]. \quad (6.2.2)$$

其中 $a_1, a_2 \dots a_n$ 为 $R(z)$ 在上半平面的所有奇点。

证明: 记 $F(z) = R(z)e^{imz}$, 不失一般性, 不妨设 $l = 2$. 作闭路

$$C = [-R, x_1 - r] + C_r + [x_1 + r, x_2 - r] + C'_r + [x_2 + r, R] + C_R$$

如图:



其中 C_R 为上半圆周: $|z| = R, \operatorname{Im} z > 0$. 而 C_r 和 C'_r 分别为 x_1 及 x_2 为圆心, r 为半径的上半圆周. 当 R 充分大时且 r 充分小时, 闭路 C 内包含了 $F(z)$ 的在上半平面的所有奇点, 因此

$$\begin{aligned} \int_C F(z) dz &= \int_{-R}^{x_1-r} F(x) dx + \int_{C_r} F(z) dz + \int_{x_1+r}^{x_2-r} F(x) dx + \int_{C'_r} F(z) dz \\ &\quad + \int_{x_2+r}^R F(x) dx + \int_{C_R} F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(z), a_k] \quad (1) \end{aligned}$$

其中 $a_1, a_2 \dots a_n$ 为 $R(z)$ 在上半平面的所有奇点. 由于 $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$, 且 $m > 0$, 根据约当引理(引理3),

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} F(z) dz = 0. \quad (2)$$

再由引理2, 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} F(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}[F(z), x_1], \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C'_r} F(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}[F(z), x_2]. \quad (3)$$

在(1)中令 $r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty$, 并结合式(2), (3)的结论, 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[R(z)e^{imz}, a_k] + \pi i \operatorname{Res}[R(z)e^{imz}, x_1] + \pi i \operatorname{Res}[R(z)e^{imz}, x_2].$$

证毕。

例6.2.5 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)^2} dx, \quad a > 0$$

解: 所求积分

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + a^2)^2} dx,$$

取 $R(z) = \frac{1}{z(z^2 + a^2)^2}$, $R(z)$ 在上半平面二极极点 ai , 在实轴上有单极点 0 . 这样

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + a^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, ai] + \pi i \operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, 0]$$

而其中

$$\operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, ai] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{z(z + ai)^2} \right) = \frac{-e^{-a}(a + 2)}{4a^4}$$

$$\operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^4}$$

因此,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + a^2)^2} dx = 2\pi i \frac{-e^{-a}(a + 2)}{4a^4} + \pi i \frac{1}{a^4}$$

最后就得到原积分

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{-\pi e^{-a}(a + 2)}{4a^4} + \frac{\pi}{2a^4},$$

例6.2.6 计算积分 $I = V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx$

解: $R(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}$ 在上半平面没有奇点, 在实轴上有单极点 $z = 2, z = 3$. 因此根据定理6.2.2

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 5x + 6} dx = \pi i \{ \operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, 2] + \operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, 3] \}.$$

而其中

$$\operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, 2] = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2) \frac{ze^{iz}}{z^2 - 5z + 6} = \frac{ze^{iz}}{z - 3} \Big|_{z=2} = -2e^{2i} = -2(\cos 2 + i \sin 2)$$

$$\operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, 3] = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3) \frac{ze^{iz}}{z^2 - 5z + 6} = \frac{ze^{iz}}{z - 2} \Big|_{z=3} = 3e^{3i} = 3(\cos 3 + i \sin 3)$$

因此

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 5x + 6} dx = \pi i [(-2 \cos 2 + 3 \cos 3) + i(-2 \sin 2 + 3 \sin 3)]$$

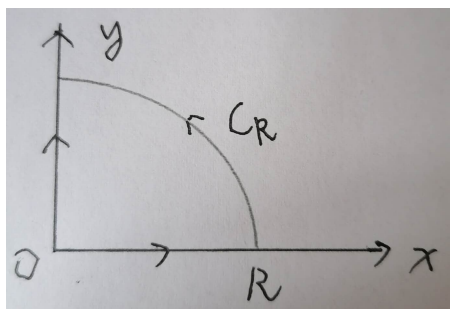
取上式的实部

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx = \pi(2 \sin 2 - 3 \sin 3)$$

杂例

例6.2.7 求 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx$

解: 令 $f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z}$, 它在全平面解析($z=0$ 为可去奇点), 作闭路 C 如下图所示:



由留数定理

$$\int_C f(z) dz = \int_0^R \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_R^0 \frac{e^{-y} - e^{-iy}}{y} dy = 0$$

即

$$2 \int_0^R \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z} dz = 0. \quad (1)$$

由约当引理, 有 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$, 又令 $\xi = iz$, 则

$$\int_{C_R} \frac{e^{-z}}{z} dz = \int_{C'_R} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi,$$

其中 C'_R 是圆周 $|\xi| = R$ 落在第二象限的四分之一圆周, 同样根据约当引理有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{e^{-z}}{z} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C'_R} \frac{e^{i\xi}}{\xi} d\xi = 0.$$

最后在(1)两端令 $R \rightarrow +\infty$, 得出原积分 $I = 0$.

例6.2.8 计算积分 $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ 以及 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

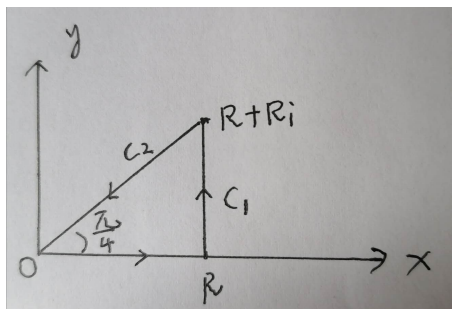
解: 考虑函数 $f(z) = \exp(iz^2)$, 并取三角形闭路 $C = [0, R] + C_1 + C_2$, 如图:

因为 C 的内部 $f(z)$ 无奇点, 所以

$$\int_C f(z) dz = \int_0^R \exp(ix^2) dx + \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0 \quad (1)$$

在 C_1 上, $z = R + iy$, $0 \leq y \leq R$, 有

$$\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq \int_{C_1} |f(z)| |dz| = \int_0^R |\exp[i(R + iy)^2]| dy = \int_0^R \exp(-2Ry) dy$$



$$= \frac{1}{2R} [1 - \exp(-2R^2)] \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

在 C_2 上, $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$, $z^2 = ir^2$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}R$, $dz = e^{i\frac{\pi}{4}} dr$. 故

$$\int_{C_2} \exp(iz^2) dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{2}R}^0 \exp(-r^2) dr \quad (3)$$

在等式(1)中令 $R \rightarrow +\infty$, 得到:

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \exp\{-r^2\} dr = 0$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \sqrt{\pi}$$

比较实部和虚部, 得到

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

例6.2.9 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \cos bx dx$, $a > 0$.

解:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 - ibx) dx \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-a\left(x + \frac{bi}{2a}\right)^2\right] dx = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \int_L \exp(-az^2) dz. \end{aligned} \quad (1)$$

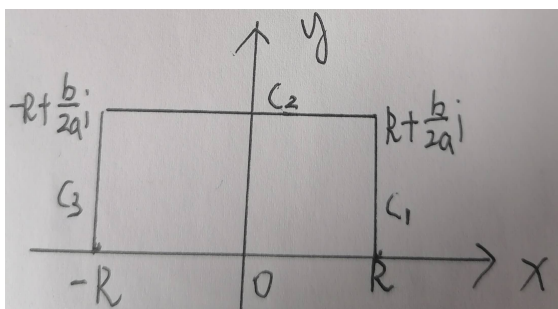
上式中 L 是直线: $z = x + \frac{b}{2a}i$, $-\infty < x < +\infty$, 且积分为从左到右方向。取 $f(z) = \exp(-az^2)$ 并取闭路

$$C = [-R, R] + C_1 + C_2 + C_3$$

如图:

由于 $f(z)$ 在全平面解析, 故

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^R \exp(-ax^2) dx + \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz = 0 \quad (2)$$



在 C_1 上, $z = R + iy$, $0 \leq y \leq \frac{b}{2a}$, 有

$$\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq \int_0^{\frac{b}{2a}} \left| \exp[-a(R + iy)^2] \right| dy = \exp(-aR^2) \int_0^{\frac{b}{2a}} \exp(ay^2) dy \rightarrow 0, \quad (R \rightarrow +\infty).$$

同理

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_3} f(z) dz = 0.$$

又

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_2} f(z) dz = - \int_L f(z) dz.$$

利用以上结论并在式(2)中令 $R \rightarrow +\infty$, 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx - \int_L f(z) dz = 0.$$

这样

$$I = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \int_L \exp(-az^2) dz = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right).$$

多值函数的积分

例6.2.10 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x^2 + 1)^2}$

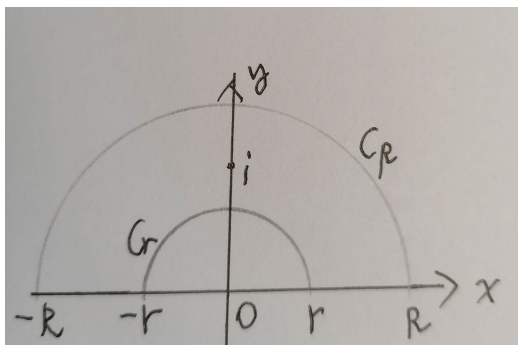
解: 取辅助函数

$$f(z) = \frac{\operatorname{Ln} z}{(z^2 + 1)^2}$$

这是一个以 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 为支点的多值函数, 选取闭路 $C = [-R, -r] + C_r + [r, R] + C_R$, 如图:

由于 $\operatorname{Ln} z$ 的支点 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 在闭路 C 外, 所以在 C 内可把 $\operatorname{Ln} z$ 取为单值解析分支 $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$. 这样 $f(z)$ 在 C 内除了二极极点 $z = i$ 外都单值解析。根据留数定理:

$$\int_C f(z) dz = \int_{[-R, -r]} f(z) dz + \int_{C_r} f(z) dz + \int_r^R \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), i]. \quad (1)$$



由于 i 是 $f(z)$ 的2级极点, 所以

$$\operatorname{Res}[f(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z-i)^2 f(z)] = \left(\frac{\ln z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{\pi + 2i}{8}$$

在 $[-R, -r]$ 上, $z = xe^{i\pi}$, $x > 0$, 于是 $\ln z = \ln x + i\pi$, $dz = -dx$, 所以

$$\int_{[-R, -r]} f(z) dz = \int_R^r \frac{\ln x + i\pi}{(1+x^2)^2} (-dx) = \int_r^R \frac{\ln x + i\pi}{(1+x^2)^2} dx;$$

在 $[r, R]$ 上, $z = x$, $x > 0$, 于是 $\ln z = \ln x$, $dz = dx$, 所以

$$\int_{[r, R]} f(z) dz = \int_r^R \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx;$$

另外, 在 C_R 上, $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, 于是有

$$|\ln z| = \sqrt{\ln^2 R + \theta^2} \leq \sqrt{\ln^2 R + \pi^2} < \ln R + \pi$$

以及

$$\frac{1}{|z^2 + 1|^2} \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2}$$

所以

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| ds \leq \frac{\ln R + \pi}{(R^2 - 1)^2} \times \pi R \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty$$

即有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

类似可得:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = 0$$

在(1)式中令 $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow +\infty$ 取极限得到:

$$\frac{\pi^2 i}{4} - \frac{\pi}{2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx + \pi i \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

比较实部得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$$

以下讨论常见积分:

$$\int_0^{+\infty} x^p R(x) dx.$$

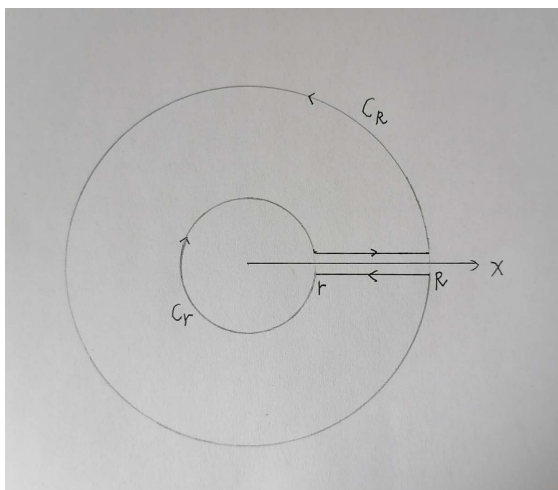
这里假设 p 不是整数, $R(z)$ 是正实轴上没有奇点的有理函数, 且满足条件

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{p+1} R(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^{p+1} R(z) = 0.$$

令 $f(z) = z^p R(z)$, 这是一个以 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 为支点的多值函数。以正实轴为分割线, 并约定正实轴上岸 $\arg z = 0$, 这样正实轴下岸 $\arg z = 2\pi$, 这时,

在割痕上岸: $f(z) = x^p R(x)$, 在割痕下岸: $f(z) = (xe^{i2\pi})^p R(x) = xe^{i2p\pi} R(x)$,

选取闭路 C , 如图:



C 是在割开正实轴的复平面上定义的闭路: 从正实轴的上岸 $x = r$, $r > 0$ 出发, 沿着正实轴正向到 $x = R$, 再沿着圆周 $C_R: |z| = R$ 正向转一周到正实轴的下岸 $z = Re^{i2\pi}$ 处, 最后沿着正实轴的下岸负向到 $z = re^{i2\pi}$ 处, 然后沿着圆周 $C_r: |z| = r$ 负向转一周到达出发点。于是

$$\int_C f(z) dz = \int_r^R x^p R(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz + e^{i2p\pi} \int_R^r x^p R(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res} f(z). \quad (1)$$

其中 $\sum \text{Res} f(z)$ 表示在 C 内 $f(z)$ 奇点的留数之和。根据所设条件有

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0.$$

因此

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

最后在式(1)两边令 $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow +\infty$, 取极限得到

$$\int_0^{+\infty} x^p R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2p\pi i}} \sum \text{Res} z^p R(z). \quad (6.2.3)$$

其中圆周 $\sum \text{Res} z^p R(z)$ 代表 $z^p R(z)$ 按照以上取定的单值解析分支在除了原点以外的平面上所有奇点留数之和。

例6.2.11 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx, \quad -1 < p < 0.$$

解: 由 $-1 < p < 0$, 有 $0 < p+1 < 1$, 从而

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{p+1} \frac{1}{1+z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^{p+1} \frac{1}{1+z} = 0.$$

函数 $\frac{1}{1+z}$ 只有 $z = -1$ 这一点为一极极点, 且

$$\text{Res}\left[\frac{z^p}{1+z}, -1\right] = \lim_{z \rightarrow -1} \left[(1+z) \frac{z^p}{1+z}\right] = (-1)^p.$$

由前面推导公式时, 对沿着正实轴割开的平面的幅角所作的规定, 应有 $-1 = e^{\pi i}$. 于是

$$\text{Res}\left[\frac{z^p}{1+z}, -1\right] = e^{p\pi i}$$

所以, 根据公式(6.2.3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2p\pi i}} e^{p\pi i} = \frac{2\pi i}{e^{-p\pi i} - e^{p\pi i}} = -\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

6.3节 幅角原理

引理6.3.1 设 a, b 分别是函数 $f(z)$ 的 m 级零点和 n 级极点, 则 a, b 都是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点, 且

$$\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right] = m, \quad \text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, b\right] = -n$$

证明: 因为 a 是 $f(z)$ 的 m 级零点, 故在 a 的某个领域内有

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z) \quad \varphi(a) \neq 0 \text{ 且解析}$$

则

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

由于 $\varphi(a) \neq 0$, 故 $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在 a 点解析, 从而 a 是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点, 且

$$\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right] = m$$

类似的推导可得到:

$$\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, b\right] = -n$$

利用此引理以及留数定理, 易得:

定理6.3.1 设 $f(z)$ 在闭路 C 内部可能有有限多个极点, 除去这些极点外, $f(z)$ 在 C 以及内部解析, 且在 C 上无零点, 则

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P) \quad (6.3.1)$$

这里, N 和 P 分别表示 $f(z)$ 在 C 内的零点和极点总数。(约定每个 k 级零点或极点算 k 个零点或极点)。

下面讨论定理6.3.1的几何意义: 设闭曲线 C 经过 $\omega = f(z)$ 在像平面画出闭曲线 L , 设 L 的方程表示为: $\omega = \rho(\varphi)e^{i\varphi}$, 于是

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_L \frac{d\omega}{\omega} = \int_L \frac{d\rho}{\rho} + i \int_L d\varphi = i \int_L d\varphi = i\Delta_L \arg \omega = i\Delta_C \arg f(z). \quad (6.3.2)$$

比较式(6.3.1)和(6.3.2)的结果, 得到以下幅角原理:

定理6.3.2(幅角原理) 设 $f(z)$ 在闭路 C 内部可能有有限多个极点, 除去这些极点外, $f(z)$ 在 C 以及内部解析, 且在 C 上无零点, 则

$$\Delta_C \arg f(z) = 2\pi(N - P) \quad (6.3.3)$$

这里, N 和 P 分别表示 $f(z)$ 在 C 内的零点和极点总数。(约定每个 k 级零点或极点算 k 个零点或极点)。

例6.3.1 $f(z) = \frac{(z^2 + 1)(z - 4)}{\sin^3 z}$, 闭路 C 为 $|z| = 3$, 求 $\Delta_C \arg f(z)$

解: 在 $|z| = 3$ 内有两个一级零点 $z = \pm i$ 和一个3级极点 $z = 0$, 因此 $N = 2, P = 3$, 所以

$$\Delta_C \arg f(z) = 2\pi(N - P) = -2\pi$$

定理6.3.3 儒歇定理 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在闭路 C 以及内部解析, 且在 C 上有不等式

$$|f(z)| > |g(z)|$$

则在 C 内部 $f(z) + g(z)$ 和 $f(z)$ 的零点个数相等。

证明: 由于在 C 上, $|f(z)| > |g(z)|$, $|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$, 故 $f(z) + g(z)$ 以及 $f(z)$ 在 C 上无零点, 根据幅角原理有:

$$\Delta_C \arg[f(z) + g(z)] = \Delta_C \left[\arg f(z) + \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right] = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right). \quad (1)$$

另外, 当 $z \in C$ 时, $|f(z)| > |g(z)|$, 所以

$$\left| \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) - 1 \right| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$$

这就是说, 当 z 在 C 上变动时候, $1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ 在像平面落在以1为圆心, 1为半径的圆内, 从而原点在曲线 $1 + \frac{g(z)}{f(z)}$, $z \in C$ 的外部。所以

$$\Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0$$

此结论代入(1),

$$\Delta_C \arg[f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg f(z). \quad (2)$$

根据定理6.3.2(幅角原理),

$$\Delta_C \arg[f(z) + g(z)] = 2\pi N, \quad \Delta_C \arg f(z) = 2\pi N' \quad (3)$$

其中 N 为 $f(z) + g(z)$ 在 C 内零点个数, 而 N' 为 $f(z)$ 在 C 内零点个数。比较(2), (3)的结论, 则 $f(z) + g(z)$ 和 $f(z)$ 在 C 内零点个数相同。证毕。

例6.3.2 利用儒歇定理证明: n 次多项式 $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ 在复平面上有 n 个零点

证明: 取 $f(z) = z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. 由于 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0$, 所以存在 N , 使得 $|z| > N$ 时, $|f(z)| > |g(z)|$. 记 C_R 是以原点为圆心半径为 R 的圆周, 则 $R > N$ 时, 在 C_R 上有 $|f(z)| > |g(z)|$ 成立。而 $f(z) = z^n$ 在 C_R 内有 n 级零点 $z = 0$, 由儒歇定理, $P_n(z) = f(z) + g(z)$ 和 $f(z) = z^n$ 在 C_R 内有相同零点个数, 即为 n 个。最后令 $R \rightarrow +\infty$, 就证明了 n 次多项式 $P_n(z)$ 在复平面上有 n 个零点。

例6.3.3 求多项式

$$P(z) = z^6 - z^4 - 5z^3 + 2$$

在 $|z| < 1$ 内有多少零点?

解: 取 $f(z) = -5z^3$, $g(z) = z^6 - z^4 + 2$. 在 $|z| = 1$ 上, $|f(z)| = 5$, $|g(z)| \leq |z^6| + |z^4| + 2 = 4$, 因此在 $|z| = 1$ 上, $|f(z)| > |g(z)|$, 根据儒歇定理: $f(z) + g(z)$ 和 $f(z)$ 在 $|z| = 1$ 内有相同的零点个数, 而 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内有一个三级零点 $z = 0$, 故 $P(z) = z^6 - z^4 - 5z^3 + 2 = f(z) + g(z)$ 在 $|z| < 1$ 有3个零点。

定理6.3.4 设多项式 $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ 在虚轴上无零点, 如果当 z 自下而上沿着虚轴从 $-\infty$ 走向 $+\infty$ 过程中 $P(z)$ 绕原点转了 k 圈, 即

$$\Delta_{y(-\infty \rightarrow +\infty)} \arg P(iy) = 2k\pi$$

则 $P(z)$ 在左半平面有 $\frac{(n+2k)}{2}$ 个零点。

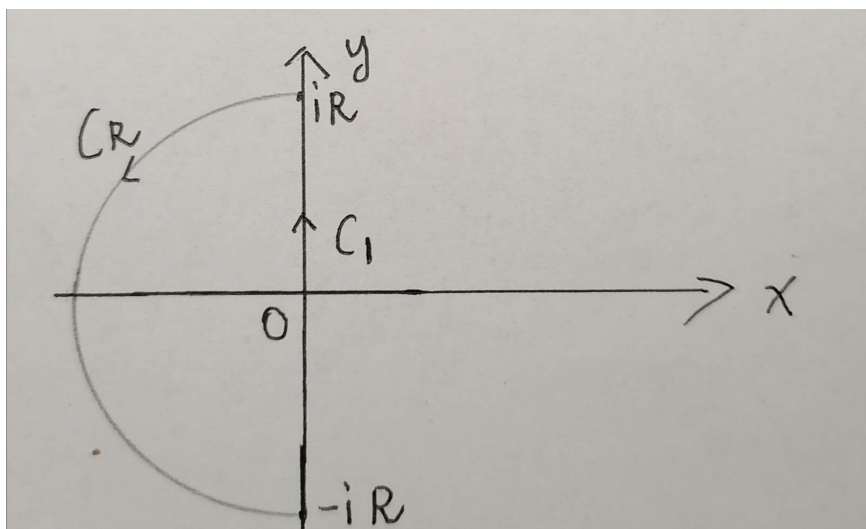
证明: 设 $P(z)$ 在左半平面有 $m(\leq n)$ 个零点, 取如图所示的闭路 $C = C_R + C_1$: 如图:

对于充分大的 R , C 必把左半平面的所有 m 个零点包围在内。根据幅角原理,

$$\Delta_C \arg P(z) = 2m\pi$$

故

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \Delta_C \arg P(z) = 2m\pi.$$



另外

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \Delta_C \arg P(z) = \lim_{R \rightarrow +\infty} [\Delta_{C_1} \arg P(z) + \Delta_{C_R} \arg P(z)] . \quad (1)$$

由于

$$P(z) = z^n (1 + \varphi(z)), \quad \varphi(z) = \frac{a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{z^n}$$

所以

$$\Delta_{C_R} \arg P(z) = \Delta_{C_R} \arg z^n + \Delta_{C_R} \arg (1 + \varphi(z)) = n\pi + \Delta_{C_R} \arg (1 + \varphi(z)) \quad (2)$$

由于

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} (1 + \varphi(z)) = 1 \implies \lim_{R \rightarrow +\infty} \Delta_{C_R} \arg (1 + \varphi(z)) = 0 .$$

此结论代入(2),

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \Delta_{C_R} \arg P(z) = n\pi \quad (3)$$

最后在(1)两边令 $R \rightarrow +\infty$, 得到

$$2m\pi = n\pi + 2k\pi \implies m = \frac{n + 2k}{2}$$

因此命题得证。

例6.3.4 研究多项式

$$f(z) = z^5 + z^2 + 1$$

在左半平面有多少个零点。

解: 在虚轴上: $z = iy, -\infty < y < +\infty$,

$$f(z) = f(iy) = (iy)^5 + (iy)^2 + 1 = (1 - y^2) + iy^5$$

由上式可见, $f(z)$ 在虚轴上无零点。设

$$\omega = f(z) = u + iv$$

那么, 当 z 自下而上沿着虚轴从 $-\infty$ 走向 $+\infty$ 时, $\omega = f(z)$ 在 ω 平面上描绘的曲线由下列参数方程决定:

$$u = 1 - y^2, \quad v = y^5, \quad u' = -2y, \quad v' = 5y^4$$

进一步可得到以下变化表:

y	$-\infty$	-1^-	0	1^-	$+\infty$
u	$-\infty \nearrow$	$0^- \nearrow$	$1 \searrow$	$0^+ \searrow$	$-\infty$
v	$-\infty \nearrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$+\infty$
$\frac{v}{u}$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\arg f(z)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

由此可知, 当 y 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时候, $\omega = f(iy)$ 点的幅角由 $-\frac{\pi}{2}$ 变化到 $+\frac{\pi}{2}$, 增加了 π , 也就是说, ω 绕原点转了 $\frac{1}{2}$ 圈, 根据定理6.3.4, $f(z)$ 在左半平面的零点个数是

$$m = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

本章部分习题或难题解答

附例6.1 已知 $f(z) = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{(z+1)^n} \right]$, 求 $f(z)$ 在各极点的留数。

解:

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{(z+1)^n} \right) = n$$

为了求 $f(z)$ 在 $z = -1$ 的留数, 先把 $\frac{1}{z}$ 展开成 $z+1$ 的幂级数, 即

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{1 - (z+1)} = -\sum_{k=0}^{+\infty} (z+1)^k, \quad (|z+1| < 1)$$

因此

$$f(z) = -\sum_{k=0}^{+\infty} (z+1)^k \left(\frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{(z+1)^n} \right)$$

在上式中, 可看出 $f(z)$ 在 $z = -1$ 罗朗展开式的系数 a_{-1} 为

$$\operatorname{Res}[f(z), -1] = a_{-1} = -\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n \text{ 个}} = -n$$

附例 6.2 设 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点(即 $f(z)$ 在某个区域 $D: |z| > R$ 内解析), 则称

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz$$

为 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数。这里 C^- 是区域 D 的任一闭路, 并取负方向, 这个方向使得 ∞ 点始终在它的左边, 因而可以看成绕 ∞ 点的正方向。

(1) 证明函数在 ∞ 的留数等于这个函数在 ∞ 领域的罗朗展开式的负一次方系数反符号。

(2) 若 $f(z)$ 在闭复平面上除去有限个奇点 a_1, a_2, \dots, a_n 以及 ∞ 外都解析, 试证明: $f(z)$ 在 a_1, a_2, \dots, a_n 以及 ∞ 点的留数之和为0。

(1) 证明: 由于 $f(z)$ 在环域 $D: R < |z| < +\infty$ 解析, 因此 $f(z)$ 在 D 内有罗朗式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

而 C 是区域 D 内包围 $z = 0$ 点的任意闭路(从另外角度看 C^- 也是绕 ∞ 点的闭路)。特别

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

也就是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = -a_{-1}$$

(2) 证明: 依条件, C 内奇点为 a_1, a_2, \dots, a_n , 因此, 由留数定理

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), a_k]$$

另一方面

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = \operatorname{Res}[f(z), \infty]$$

以上两式相加得到:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), a_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = 0$$

证毕。

附例6.4 求 $\int_0^\pi \tan(\theta + ia) d\theta$,

解:

$$\tan(\theta + ia) = \frac{\sin(\theta + ia)}{\cos(\theta + ia)} = \frac{e^{-a}e^{i\theta} - e^ae^{-i\theta}}{i(e^{-a}e^{i\theta} + e^ae^{-i\theta})}$$

令 $z = e^{i\theta}$, 则

$$\int_0^\pi \tan(\theta + ia) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tan(\theta + ia) d\theta = \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{e^{-a}z - e^a \frac{1}{z}}{i \left(e^{-a}z + e^a \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz}$$

即

$$\int_0^\pi \tan(\theta + ia) d\theta = -\frac{1}{2} \int_{|z|=1} f(z) dz$$

而

$$f(z) = \frac{e^{-a}z^2 - e^a}{(e^{-a}z^2 + e^a)z}$$

当 $a > 0$, $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内只有奇点 $z = 0$,

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{e^{-a}z^2 - e^a}{(e^{-a}z^2 + e^a)} \Big|_{z=0} = -1$$

因此

$$\int_0^\pi \tan(\theta + ia) d\theta = -\frac{1}{2} \int_{|z|=1} f(z) dz = -\frac{1}{2} (2\pi i \operatorname{Res}[f(z), 0]) = \pi i$$

当 $a < 0$ 时, 作变换 $b = -a$, $\theta = -\varphi$, 这样 $b > 0$ 并有

$$\int_0^\pi \tan(\theta + ia) d\theta = -\int_0^{-\pi} \tan(-\varphi - ib) d\varphi = -\int_0^\pi \tan(\varphi + ib) d\varphi = -\pi i$$

附例6.2 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$

解: $R(z) = \frac{1+z^2}{1+z^4}$, $R(z)$ 在上半平面有奇点 $z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$, $z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$,

而

$$\operatorname{Res}[R(z), z_1] = \frac{1+z^2}{(1+z^4)'} \Big|_{z=z_1} = \frac{1+z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1+i}{4(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

同样可得到:

$$\operatorname{Res}[R(z), z_2] = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \times 2\pi i (\operatorname{Res}[R(z), z_1] + \operatorname{Res}[R(z), z_2]) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

附例 6.5 求 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

解: 方法1: (微积分方法):

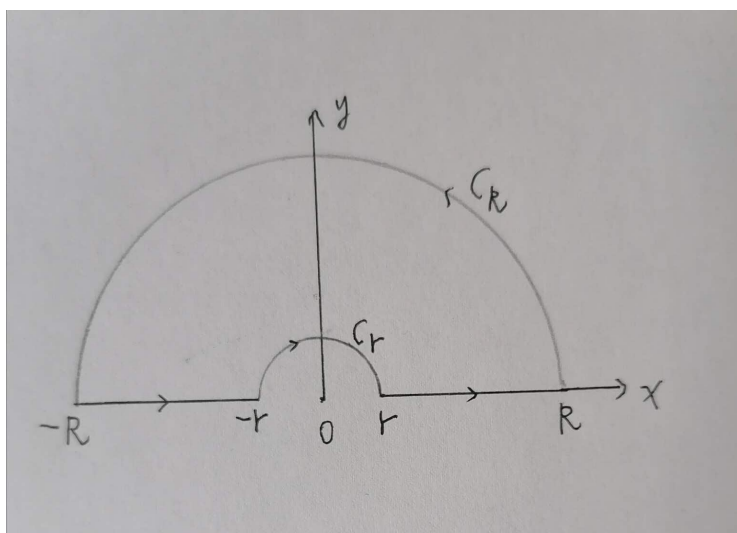
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx &= -\int_0^{+\infty} \sin^2 x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \sin^2 x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} d(\sin^2 x) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x} d(2x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

其中最后一步, 用到微积分方法已经推出的狄利克雷积分结论: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

方法2: 复变函数方法: 由于被积分函数 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{2ix}}{2x^2} \right)$, 因此选择

$$f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{2z^2}$$

$f(z)$ 在上半平面没有奇点, 在实轴上有一级极点 $z = 0$, 取闭路 $C = [-R, -r] + C_r + [r, R] + C_R$, 如图:



由于 $f(z)$ 在闭路 C 以及内部无奇点, 因此

$$\int f(z) dz = \int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz + \int_r^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad (1)$$

由引理1和引理3(约当引理), 得到

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

由引理2

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r} f(z) dz = i(-\pi) \operatorname{Res}[f(z), 0] = i(-\pi) \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \frac{1 - e^{2iz}}{2z^2} \right) = (-i\pi)(-i) = -\pi$$

最后, 在式(1)中令 $R \rightarrow +\infty$ 且 $r \rightarrow 0$, 则有

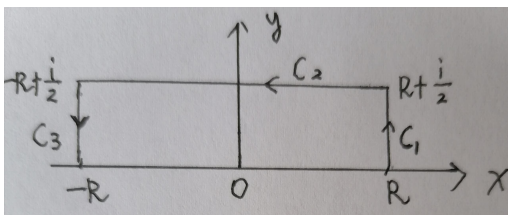
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2ix}}{2x^2} dx = \pi$$

此式取实部, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} dx = \pi \implies \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

附例6.6 求 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx$.

解: 取 $f(z) = \frac{z}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}$, 取如图所示矩形闭路 $C = [-R, R] + C_1 + C_2 + C_3$:



由于 $f(z)$ 在全平面除了可去奇点 $z=0$ 外无其它奇点, 因此

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz = 0 \quad (1)$$

在 C_1 上 $z = R + iy$, $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$. 因此在 C_1 上,

$$f(z) \big|_{z=R+iy} = \frac{R+iy}{e^{\pi(R+iy)} - e^{-\pi(R+iy)}}$$

因此在 C_1 上, 当 $R \rightarrow +\infty$ 时, $f(z) \rightarrow 0$, 这样进一步有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_1} f(z) dz = 0 \quad (2)$$

同理可得

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_3} f(z) dz = 0 \quad (3)$$

在 C_2 上, $z = x + \frac{i}{2}$,

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{x + \frac{i}{2}}{e^{\pi(x+\frac{i}{2})} - e^{-\pi(x+\frac{i}{2})}} dx = \int_{-R}^R \frac{ix}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} dx - \int_{-R}^R \frac{\frac{1}{2}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} dx. \quad (4)$$

由于 $\frac{ix}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}$ 是奇函数, 所以

$$\int_{-R}^R \frac{ix}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} dx = 0. \quad (5)$$

而

$$\int_{-R}^R \frac{\frac{1}{2}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} dx = \int_{-e^{\pi R}}^{e^{\pi R}} \frac{\frac{1}{2}}{t + \frac{1}{t}} d\left(\frac{1}{\pi} \ln t\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-e^{\pi R}}^{e^{\pi R}} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2\pi} (\arctan e^{\pi R} - \arctan e^{-\pi R}). \quad (6)$$

在(4)中令 $R \rightarrow +\infty$, 并结合(5), (6)的结果, 得到

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_2} f(z) dz = -\frac{1}{4} \quad (7)$$

最后在式(1)中令 $R \rightarrow +\infty$, 并利用(2), (3), (7)的结果, 得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \frac{1}{8}$$

第七章 解析开拓

7.1 唯一性定理和解析开拓的概念

我们知道, 对于实变数可微函数, 如果它在定义域中某一部分的函数值, 不能断定这个函数在其它部分的值, 但是对于解析函数, 如果已经知道它在定义域中某些部分的值, 则此函数在其它部分的值就确定了。

定理7.1.1(唯一性定理) 如果区域 D 内两个解析函数 $f(z)$ 以及 $g(z)$ 在一系列不同点列

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$$

上值相等, 并且这个点列以 D 内某一点 a 为极限, 那么两个函数在 D 内相等, 即

$$f(z) \equiv g(z), \quad z \in D.$$

证明: 令 $F(z) = f(z) - g(z)$, 则 $F(a_k) = 0, k = 1, 2, \dots$, 且根据连续性有,

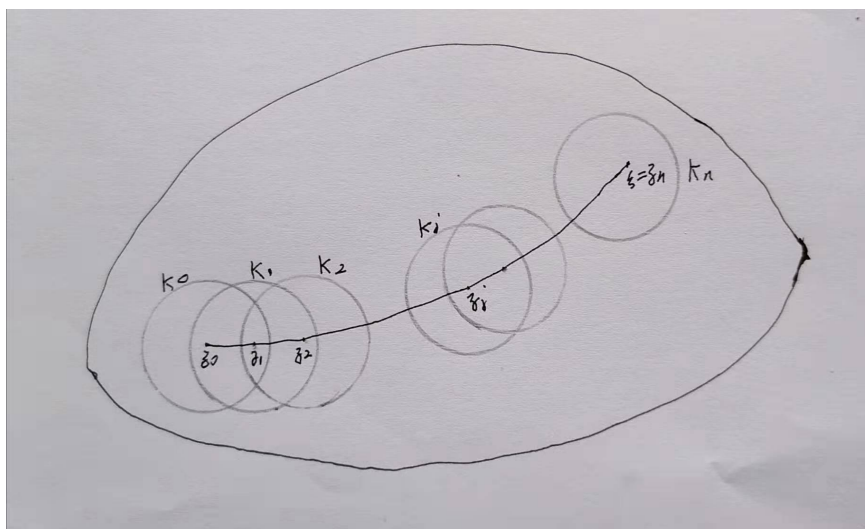
$$F(a) = \lim_{k \rightarrow +\infty} F(a_k) = 0.$$

即 a 也是 $F(z)$ 在 D 内的零点。因为 $a_k \rightarrow a$, 故在 a 点的任何邻域中, $F(z)$ 有异于 a 点的零点。这样, 根据孤立零点原理, $F(z)$ 在 a 点的某个邻域 $K_0: |z - a| < \delta_1$ 恒为0。

对于 D 内任意一点 ξ , 下面我们证明: $F(\xi) = 0$. 为此目的, 用在 D 内的曲线 l 连接 $z_0 = a$ 和 ξ , 设 δ_2 表示 l 到边界 D 的最短距离, 再取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 用点

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = \xi$$

将 l 分为许多小段, 且每段长度都小于 δ , 以 z_j 为圆心 δ 为半径作圆 $K_j, j = 1, 2, 3, \dots$ 如图:



1) 这些小圆不会落到D外去, 因此在每个 K_j 内 $F(z)$ 解析

2) 后面一个圆的圆心落在前面一个圆的内部, 这个形成一个圆链。

由于在 K_0 内, $F(z) \equiv 0$, 而 $z_1 \in K_0$, 故 $F^{(k)}(z_1) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$, 于是以 z_1 为中心, 在圆 K_1 内对 $F(z)$ 展开有

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n = 0$$

这样在圆 K_1 内, $F(z) \equiv 0$. 以此类推, 可证圆 K_2, K_3, \dots, K_n 内都有 $F(z) \equiv 0$, 特别在 K_n 中 $F(\xi) = 0$.

利用以上唯一性定理显然有以下推论:

推论7.1.1 设 $f(z)$ 以及 $g(z)$ 在区域D内解析, 且在D内的某一段曲线上它们值相等, 则这两个函数在D内相等。

推论7.1.2 设 $f(z)$ 以及 $g(z)$ 在全平面解析, 且在实轴上它们值相等, 则这两个函数在全平面相等。

定义7.1.1 $f(z)$ 在集合E上有定义, D是一个包含E的更大区域, 如果存在D内的解析函数 $F(z)$, 使得 $z \in E$ 时, 有 $F(z) = f(z)$, 则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在区域D的解析开拓。

定义7.1.2 如果 $f_1(z)$ 在区域 D_1 解析, $f_2(z)$ 在区域 D_2 解析, 而 D_1 和 D_2 相交于区域D, 且在D内有 $f_1(z) = f_2(z)$, 则称 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 互为解析开拓。

例7.1.1 求证: e^z 是实函数 $f(x) = e^x$ 在全平面的唯一的解析开拓。

证明: 设 $g(z)$ 是实函数 e^x 在全平面的一个解析开拓。由于在实轴上

$$e^z \big|_{y=0} = e^x (\cos y + i \sin y) \big|_{y=0} = e^x$$

且 e^z 在全平面解析, 因此由推论7.1.2, $g(z) = e^z$. 证毕。

例7.1.2 求证: 在整个复平面上有 $\sin 2z = \sin z \cos z$.

证明:

$$\sin 2x = \sin x \cos x$$

又由于 $\sin 2z$ 和 $\sin z \cos z$ 都是全平面内解析, 因此由推论7.1.2, 在整个复平面上有

$$\sin 2z = \sin z \cos z.$$

解析开拓的一些典型方法

1) 把实的幂级数中 x 换成相应的 z 从而得到的复的幂级数来进行解析开拓。例如, 设实系数幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad (a_n \text{ 为实数}, R < x < R)$$

由幂级数理论可以知: 复变数级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

是 $f(x)$ 在区域 $|z| < R$ 内的解析开拓。

2) 利用作幂级数扩大解析区域的方法, 具体如下: 在已有的 $f(z)$ 的解析区域 D 内取点 z_0 , 以 z_0 为中心作幂级数, 此幂级数可表示为

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

若以上级数的收敛圆域为 $D_1: |z - z_0| < R_1$, 则 $g(z)$ 在 D_1 内解析. 如果区域 D_1 有一部分已经在 D 之外, 那么 $f(z)$ 和 $g(z)$ 互为直接解析开拓, 也就是说, 把 $f(z)$ 从 D 解析开拓到区域 $D + D_1$ 上了. 例如, 设有幂级数定义的函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

可直接求出 $f(z)$ 是收敛圆 $D: |z| < 1$ 内的解析函数, 并且

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

由于幂级数在 D 外任意一点都发散, 这样确定的函数在 D 外没有任何意义。

任意取 $a \in D$, 可求得 $f(z)$ 在 a 点的泰勒展开式为:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-a)^{-n-1} (z-a)^n.$$

易算出上式右端收敛半径为 $R_1 = |1-a|$. 如果取 $a = \frac{i}{2}$, 由于圆 $D_1: |z - \frac{i}{2}| < |1 - \frac{i}{2}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 已经有一部分在 D 外, 因而函数

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \frac{i}{2})^{-n-1} (z - \frac{i}{2})^n, \quad z \in D_1$$

和函数 $f(z)$ 互为解析开拓, 也就是说, 把 $f(z)$ 从 D 解析开拓到区域 $D + D_1$ 上了。

3) 利用含参变量积分的方法, 这一方法将在下一节中以实例说明。

7.2 含参变量的积分和 Γ 函数

定义7.2.1 设1) $f(t, z)$ 对于 $t \geq a$ 以及区域 D 内所有 z 有定义, 则对每一点 $z \in D$, 广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(t, z) dt \quad (7.2.1)$$

收敛。2) 对任意 $\epsilon > 0$, 总存在 $T(\epsilon)$, 使得 $T_2 > T_1 > T(\epsilon)$ 时, 不等式

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} f(t, z) dt \right| < \epsilon$$

对于所有的 $z \in D$ 成立, 则称积分(7.2.1)在 D 内一致收敛。

类似于复变函数的级数的一致收敛的相关判别法和性质, 广义积分的一致收敛有以下判别法, 以及相关性质:

定理7.2.1 如果存在实函数 $\varphi(t)$, 使得对所有 $z \in D$ 有 $|f(t, z)| \leq \varphi(t)$, 而且 $\int_a^{+\infty} \varphi(t) dt$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(t, z) dt$ 在 D 内绝对一致收敛。

定理7.2.2 设1) $f(t, z)$ 是 t, z 的连续函数, 这里 $t \geq a$, z 在区域 D 内; 2) 对于任何 $t \geq a$, $f(t, z)$ 在 D 内解析; 3) 积分 $\int_a^{+\infty} f(t, z) dt$ 在 D 内绝对一致收敛, 则函数

$$F(z) = \int_a^{+\infty} f(t, z) dt$$

在 D 内解析, 且

$$F'(z) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt$$

例7.2.1 求证: $f(z) = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ 是整函数, 这里规定多值函数 t^{z-1} 取主值。即 $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$

证: $t \geq 1$ 时, 被积函数

$$e^{-t} t^{z-1} = e^{-t+(z-1)\ln t}$$

是 t 和 z 的连续函数。而且对任意 $t \geq 1$ 为 z 的整函数。在 z 平面中任意取有界闭区域 \bar{D} 并设 α 是 \bar{D} 中 $\operatorname{Re} z$ 的最大值, 则对所有的 $z = x + iy \in D$, 有

$$|e^{-t} t^{z-1}| = |e^{-t+(x-1)\ln t} e^{iy \ln t}| \leq e^{-t} t^{\alpha-1}$$

而广义积分 $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ 收敛, 因此 $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ 在 \bar{D} 中一致收敛。因此 $f(z)$ 在 D 解析, 再由 D 的任意性, $f(z)$ 是整函数。证毕。

例7.2.2 求证: $\varphi(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ 在右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ 解析, 这里规定多值函数 t^{z-1} 取主值。即 $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$

证: 在 $\operatorname{Re} z > 0$ 内任意取有界闭区域 \bar{D} , 设 p 是有界闭区域 \bar{D} 内 $\operatorname{Re} z$ 的最小值。当 $0 < t \leq 1$, $\ln t < 0$, 则对所有的 $z = x + iy \in D$, 有

$$|e^{-t} t^{z-1}| = |e^{-t+(x-1)\ln t} e^{iy \ln t}| \leq e^{-t} t^{p-1}$$

而积分 $\int_0^1 e^{-t} t^{p-1} dt$ 收敛, 因此 $\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ 在 \bar{D} 中一致收敛。因此 $\varphi(z)$ 在 D 解析, 再由 D 的任意性, $\varphi(z)$ 在 $\operatorname{Re} z > 0$ 解析。

下面来定义复的 Γ 函数, 实的 Γ 函数定义为

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

把它推广到复的情形, 把上式中 x 推广为 z , $x > 0$ 推广为 $\operatorname{Re} z > 0$ 有

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

$\Gamma(z)$ 在 $\operatorname{Re} z > 0$ 为解析函数。

现在把 $\Gamma(z)$ 解析开拓到左半平面, 因为 $\Gamma(z)$ 在实轴上有递推关系

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$$

根据解析开拓的原理, 以上关系式在右半平面成立, 即

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0$$

由于 $\Gamma(z+1)$ 的在 $\operatorname{Re} z > -1$ 解析, 所以可按照以上递推公式定义:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad \operatorname{Re} z > -1$$

这样 $\Gamma(z)$ 在 $\operatorname{Re} z > -1$ 除了极点 $z=0$ 外都解析, 再次使用此递推公式, 则所定义的 $\Gamma(z)$ 可在 $\operatorname{Re} z > -2$ 除了极点 $z=0, -1$ 外解析, ... 这样不断地作下去, 则利用此递推公式 $\Gamma(z)$ 就可以定义在左半平面了。这样定义的 $\Gamma(z)$ 在全平面除了极点 $z=0, -1, -2, -3, \dots$ 外都解析。

本章部分习题或难题解答

附例7.1 在原点解析, 而在 $z = \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$ 处取下列值的函数是否存在? 请说明理由。

$$(1) \quad 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots, 0, \frac{1}{2k}, \dots;$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

解: (1) 这样的函数不存在。用反证法, 假定有满足条件的函数 $f(z)$ 存在, 则依条件: $f(z)$ 在点列 $a_n = \frac{1}{2n-1}, n=1, 2, 3, \dots$ 取值为0, 而在点列 $b_n = \frac{1}{2n}, n=1, 2, 3, \dots$ 取值为点列 $\frac{1}{2n}$. 即

$$f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$$

因此由唯一性定理: $f(z) = 0$ 且 $f(z) = z$. 这就造成矛盾, 证毕。

(2) 这样的解析函数存在, 取 $f(z) = \frac{1}{1+z}$ 即可。

附例7.2 证明: z^{-2} 是函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(z+1)^n, \quad |z+1| < 1$$

在区域 $|z+1| < 1$ 向外的解析开拓。

证明：在 $|z+1| < 1$ 时，

$$\frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{1-(z+1)} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (z+1)^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(z+1)^n = f(z)$$

而函数 $g(z) = \frac{1}{z^2}$ 的定义域是 $z \neq 0$ ，因此 $g(z) = \frac{1}{z^2}$ 是函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(z+1)^n, \quad |z+1| < 1$$

在区域 $|z+1| < 1$ 向外的解析开拓。

第八章 保形变换及其应用

8.1节 导数的几何意义

设 $\omega = f(z)$ 在区域 D 内解析，而 $z_0 \in D$ ，且 $f'(z_0) \neq 0$ 。在 D 内作一条过 z_0 的有向的简单光滑曲线 C ，

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

并假定 $z'(t) \neq 0$ 。记 $z(t_0) = z_0$ ，则曲线 C 在 z_0 的切向量是

$$z'(t_0) = x'(t_0) + y'(t_0)i,$$

它与实轴的夹角为 $\arg z'(t_0)$ 。

函数 $\omega = f(z)$ 把曲线 C 变为过 $\omega_0 = f(z_0)$ 的简单曲线 C' ：

$$\omega(t) = f(z(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

因为 $\omega'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$ ，故曲线 C' 在 ω_0 也有切线，且切线与 ω 平面上 u 轴的夹角为

$$\arg \omega'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

也就是

$$\arg \omega'(t_0) - \arg z'(t_0) = \arg f'(z_0) \quad (8.1.1)$$

上式(8.1.1)说明了： C 在 z_0 的切线和在 C' 相应点 ω_0 的切线所夹的角就是 $\arg f'(z_0)$ 。因此我们可以认为 C 在 z_0 的切线通过变换后绕着 z_0 转动了一个角度 $\arg f'(z_0)$ 。它称为 $\omega = f(z)$ 在 z_0 的旋转角，它仅与 z_0 有关，与过 z_0 的具体曲线 C 无关。

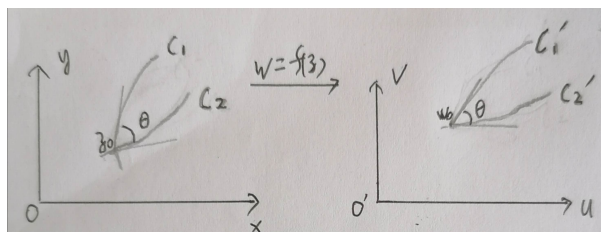
如果取过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 , 而它们在 ω 平面的像曲线分别为 C'_1, C'_2 , 记 α_1, α_2 分别为 C_1 和 C_2 在 z_0 的切线和 x 轴的正半轴的夹角, 而记 β_1, β_2 分别为 C'_1 和 C'_2 在 ω_0 的切线和 u 轴的正半轴的夹角。于是有:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \arg f'(z_0), \quad \beta_2 = \alpha_2 + \arg f'(z_0)$$

即有

$$\beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2. \quad (8.1.2)$$

由上式(8.1.2)可以看出: 在变换 $\omega = f(z)$ 之下, 通过 z_0 的任意两条曲线的交角保持不变, 即 $\omega = f(z)$ 在 z_0 具有保角性。如图:



下面讨论导数模的几何意义: 由于

$$|f'(z_0)| = \frac{|d\omega|}{|dz|} \Big|_{z=z_0}$$

所以 $|f'(z_0)|$ 反映了 z_0 点的 dz 的长度和像点 ω_0 对应的 $d\omega$ 的长度之间的比例关系。如果 $|f'(z_0)| > 1$, $|d\omega| > |dz|$, 说明局部放大了, 如果 $|f'(z_0)| < 1$, $|d\omega| < |dz|$, 说明局部缩小了。因此我们称 $|f'(z)|$ 为伸张系数。

由导数的几何意义可以看出, $\omega = f(z)$ 把 z_0 附近一个不太大的几何图形变为和原来大致一样的图形。

8.2节 保形变换的概念

定理8.2.1 设 $f(z)$ 是 D 内的单叶函数, 则在 D 内任意一点 z 有 $f'(z) \neq 0$.

证明: 用反证法, 假定在区域 D 内的某一个点 z_0 , $f'(z_0) = 0$, 则函数 $f(z) - f(z_0)$ 以 z_0 为一个 $n \geq 2$ 阶的零点。由于 $f(z)$ 不是常数, 故由零点的孤立性, 可在 D 中找到一个闭圆 $|z - z_0| \leq \delta$, 使得在圆周 C 上有 $f(z) - f(z_0) \neq 0$, 且其内部 $f'(z)$ 除了 z_0 外无其它零点。设 m 为 $|f(z) - f(z_0)|$ 在这个圆周上的最小值。取正数 α , 使得 $0 < \alpha < m$, 于是在圆周上有

$$|\alpha| < |f(z) - f(z_0)|,$$

所以根据儒歇定理, 函数 $f(z) - f(z_0) - \alpha$ 在此圆的内部有 n 个零点, 并且这些零点都是一阶的(因为 $f'(z) \neq 0$). 这就是说, $f(z)$ 把圆内 n 个不同的点变为同一个点 $f(z_0) + \alpha$, 这与 $f(z)$ 是一一映射矛盾。

从以上定理 8.2.1 可以看出, 单叶函数的 $f'(z) \neq 0$, 但是逆命题并不正确, 如 $f(z) = e^z$ 在 z 平面上处处不为 0, 但是它在整个 z 平面上并不是单叶的。

我们称单叶函数所确定的变换为**保形变换**, 它具有上一节所说的保角性质。

注 8.2.1 为了以后的称述, 我们规定: 如变换 $T_1: v = f(z)$ 把 z 平面点集 L 变为 v 平面的点集 M , 而变换 $T_2: w = g(v)$ 把 v 平面点集 M 变为 w 平面的点集 N , 则

$$w = g(f(z))$$

相当于一个新的变换, 把 L 变为 N , 这个变换称为 T_1 和 T_2 的乘积, 记为 $T_2 T_1$.

保形变换的基本问题: 一个区域 D 是否能和单位圆内部 $D_1: \omega < 1$ 建立保形变换? (如果此问题解决了, 如有两个都能单位圆内部建立保形变换的区域 G_1 和 G_2 , 它们之间就自然可以建立保形变换了)

对于此问题, 我们有以下讨论:

(1) D 不能是多连通区域。事实上, 如果 D 是多连通区域, 在 D 内作一条闭曲线 l , 使得 l 内部含有 D 的边界点。而 $\omega = f(z)$ 将 l 变为单位圆内 D_1 的一条闭曲线 l_1 , 当 l_1 在 D_1 内收缩到一点时候, 由于变换函数的连续性, l 在 D 内相应收缩为一点, 这是不可能的, 因为 l 内含不属于有 D 的点。

(2) D 不可能是闭复平面和开复平面, 否则此保形变换所定义的函数 $f(z)$ 为整函数, 且有 $|f(z)| \leq 1$, 由刘维尔定理, $f(z)$ 为常数, 矛盾。

(3) D 不可能是去掉某个点 a 的闭复平面。事实上如果存在变换 $\omega = f(z)$ 把 D 变为单位圆内部区域 D_1 , 那么 $\omega = f(a + \frac{1}{\xi})$ 把开复平面 ξ 变为 D_1 , 但是根据以上 (2) 的结论这是不可能的。

综合以上讨论, 如果保形变换把区域 D 变为单位圆内 D_1 的话, 要求 D 是边界至少包含两个点的单连通区域, 反之, 有如下定理:

黎曼定理 如果 D 是复平面中边界至少包含两个点的单连通区域, 则存在单叶函数 $\omega = f(z)$ 把 D 变为单位圆内部 D_1 . 如果还要求把 D 中的一个已知点 z_0 变为 D_1 内指定点 ω_0 , 并指定变换在该点的转动角, 即要求 $f(z)$ 满足条件:

$$f(z_0) = \omega_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0,$$

其中 α_0 为已知常数, 则这个变换是唯一的。

8.3 节 分式线性变换

分式线性变换 M 定义为

$$\omega(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad \neq bc) \quad (8.3.1)$$

如果规定:

$$\omega(\infty) = \frac{a}{c}, \quad \omega(-\frac{d}{c}) = \infty.$$

那么 $\omega(z)$ 是闭复平面到闭复平面的一个一一映射, 其逆映射为:

$$M^{-1}: \quad z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

$$\text{而 } z(\frac{a}{c}) = \infty, \quad z(\infty) = -\frac{d}{c}.$$

当 $z \neq -\frac{d}{c}$ 以及 ∞ 时, 有

$$\omega'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

因此分式线性变换(8.3.1)是除去 $z = -\frac{d}{c}$ 和 ∞ 的闭复平面内的单叶函数。为了研究它在 $z = -\frac{d}{c}$ 以及 $z = \infty$ 点的保形性, 我们作以下规定:

定义8.3.1 如果 $t = \frac{1}{f(z)}$ 或 $t = \frac{1}{f(1/\xi)}$ 把 $z = z_0$ 或 $\xi = 0$ 的一个邻域保形映照成 $t = 0$ 的一个邻域, 则称 $\omega = f(z)$ 把 $z = z_0$ 或 $z = \infty$ 的一个邻域保形映照为 $\omega = \infty$ 的一个邻域。

分式线性变换包含的基本变换

分式线性变换

$$\omega(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad \neq bc)$$

有以下几种特殊情形:

- 1) 平移变换: $T: \omega = z + b.$
- 2) 旋转变换: $R: \omega = e^{i\theta}z.$
- 3) 相似变换: $T: \omega = rz, (r > 0)$
- 4) 倒数变换: $I: \omega = \frac{1}{z}.$

反之, 任何一个分式线性变换可写成以上四种变换的乘积。

分式线性变换的最大特点就是把圆周经过变换后照样变为圆周, 这一性质叫做**保圆性**, 这里的所谓圆周包括直线在内(直线可以看成通过无穷远点的圆周, 或者可以看成半径为无穷大的圆周)。

定理8.3.1 分式线性变换把圆周变为圆周。

证明: 由于分式线性变换可以表示为平移, 旋转, 相似和倒数变换四种变换的乘积, 前三种变换显然把圆周变为圆周, 故只要证明 $\omega = \frac{1}{z}$ 也把圆周变换为圆周, 实际上, 圆周或直线方程可以表示为

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$$

经过变换 $\omega = \frac{1}{z}$ 后, 上述方程变为

$$C\omega\bar{\omega} + B\omega + \bar{B}\bar{\omega} + A = 0.$$

这样 ω 的方程仍然代表圆周或直线。定理得证。

定义8.3.1 设已知圆周 $C: |z - z_0| = R$, 如果有两个有限点 z_1 及 z_2 在自 z_0 出发的同一射线上, 且

$$|z_1 - z_0||z_2 - z_0| = R^2.$$

则 z_1 及 z_2 关于圆周 C 对称。

由定义可见, 圆周上的点和自身对称, 我们还规定圆心 z_0 及 ∞ 关于圆周 C 对称。

分式线性变换不仅具有保圆性, 还能把某一圆周的对称点变为对这个圆周的像圆周对称的点。

定理8.3.2 任意给定 z 平面上的不同三个点 z_1, z_2, z_3 和 ω 平面上的不同三个点 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, 存在唯一的分式线性变换, 把 z_1, z_2, z_3 变为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 。

证明: 考虑隐函数关系所确定变换

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} \cdot \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (8.3.2)$$

它的确把 z_1, z_2, z_3 变为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, 并且可以把此式解出显式 $\omega(z)$ 后就是分式线性变换的形式。

下面我们说明满足条件的分式线性变换是唯一的, 为此, 用反证法, 假定

$$M_1: K_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1},$$

以及

$$M_2: K_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2},$$

同时将 z_1, z_2, z_3 变为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. 由于 $M_2^{-1}M_1$ 是 z 平面到 z 自身的分式线性变换, 因此可设

$$M_2^{-1}M_1: g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

而 $g(z) = z$ 意味着

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0 \quad (1)$$

又由于 z_1, z_2, z_3 这3个点都满足方程 $g(z) = z$, 方程(1)有3个不同解, 矛盾。证毕。

注8.3.1 在以上定理8.3.2中式(8.3.2)所表示的分式线性变换中, 如某一个 z_k 或 ω_k 是 ∞ , 只需要把式中的含有这个数的因子换成1即可。例如, 在公式(8.3.2)中, 当 $\omega_2 = \infty, z_1 = \infty$ 时, (8.3.2)具体化为:

$$\frac{\omega - \omega_1}{1} \cdot \frac{1}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{1}.$$

如果分式线性变换只要求把两点 z_1, z_2 变为像平面的两点 ω_1, ω_2 , 即分式线性变换只要求

$$\omega(z_1) = \omega_1, \omega(z_2) = \omega_2$$

那么在定理8.3.2中所给的式(8.3.2)导出的分式线性变换中: z_3, ω_3 就是自由的。因此可把(8.3.2) 改写为

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (8.3.3)$$

其中 $k = \left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \right) / \left(\frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_1} \right)$. 特别, 如果要求

$$\omega(z_1) = 0, \omega(z_2) = \infty$$

则有

$$\omega = k \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (8.3.4)$$

例8.3.1 求一个分式线性变换, 把上半平面 $Imz > 0$ 变为单位圆 $|\omega| < 1$, 并且把上半平面的指定点 z_0 变为 $\omega = 0$.

解: 依条件, 所求的分式线性变换 $\omega(z)$ 把 z_0 变为0, 由于 z_0 关于上半平面边界的对称点为 \bar{z}_0 , 根据分式线性变换的性质, $\omega(z)$ 把 $z = \bar{z}_0$ 变为 $\omega = \infty$. 因此由式(8.3.4), $\omega(z)$ 满足:

$$\omega(z) = k \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

又由于上半平面的边界实轴 $z = x$ 要映成相应的像区域的边界 $|\omega| = 1$, 因此要求

$$1 = |\omega(x)| = |k| \frac{|x - z_0|}{|x - \bar{z}_0|} = |k|$$

这样取 $k = e^{i\theta}$ 即可。最后, 得到所求的保形变换

$$\omega(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad (\text{其中}\theta\text{任意})$$

例8.3.2 求一个分式线性变换, 把单位圆 $|z| < 1$ 变为单位圆 $|\omega| < 1$, 并且把单位圆内的指定点 z_0 变为 $\omega = 0$.

解: 依条件, 所求的分式线性变换 $\omega(z)$ 把 z_0 变为0, 由于 z_0 关于圆周 $|z| = 1$ 的对称点为 $\frac{1}{\bar{z}_0}$, 根据分式线性变换的性质, $\omega(z)$ 把 $\frac{1}{\bar{z}_0}$ 变为 $\omega = \infty$. 因此, $\omega(z)$ 满足:

$$\omega(z) = k_1 \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} = k \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \quad (k = -k_1\bar{z}_0)$$

又由于边界 $|z| = 1$ 应映成相应的像区域的边界 $|\omega| = 1$, 因此要求当 $|z| = 1$ 时

$$1 = |\omega(z)| = |k| \frac{|z - z_0|}{|1 - z\bar{z}_0|} = |k| \frac{|z - z_0|}{|z\bar{z} - z\bar{z}_0|} = |k| \frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - \bar{z}_0|} = |k|$$

这样取 $k = e^{i\theta}$ 即可. 最后, 得到所求的保形变换

$$\omega(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \quad (\text{其中}\theta\text{任意})$$

注8.3.2 在上例8.3.2所得到的变换 $\omega(z)$ 中, 有一点值得注意, 即

$$\omega'(z_0) = e^{i\theta} \frac{1 - z\bar{z}_0 + \bar{z}_0(z - z_0)}{(1 - z\bar{z}_0)^2} \Big|_{z=z_0} = e^{i\theta} \frac{1}{1 - |z_0|^2}$$

因此

$$\arg \omega'(z_0) = \theta$$

也就是说, 这个变换的转动角是 θ .

例8.3.3 求一个分式线性变换, 把圆周 $C_1: |z - 3| = 9$, 以及 $C_2: |z - 8| = 16$, 所界的偏心圆区域 D 变为中心在 $\omega = 0$ 的同心环区域 D' , 并使其外半径为1.

解: 设点 z_1, z_2 满足:

$$\omega(z_1) = \omega_1 = 0, \quad \omega(z_2) = \omega_2 = \infty$$

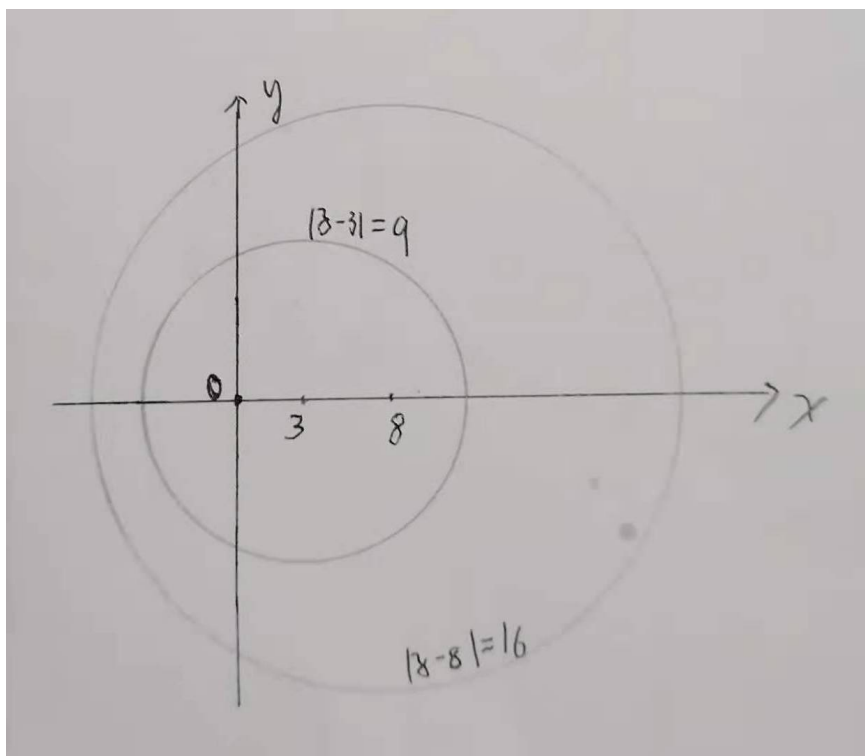
由于 ω_1, ω_2 关于中心在 $\omega = 0$ 的同心环区域 D' 的两个边界圆周对称, 故中心在 z_1, z_2 同时关于圆周 C_1 和 C_2 对称. 由此可知, z_1, z_2 在圆 C_1 和 C_2 的圆心的连线上, 即在实轴上, 这样进一步可设: $z_1 = x_1, z_2 = x_2$. 并由关于圆周对称的条件有:

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 81, \quad (x_1 - 8)(x_2 - 8) = 256.$$

解得: $x_1 = -24, x_2 = 0$ 或者 $x_1 = 0, x_2 = -24$.

现取 $\omega(-24) = 0, \omega(0) = \infty$, 变换应有以下形式:

$$\omega(z) = k \frac{z + 24}{z}.$$



为了确定 k , 我们注意 $z=0$ 在 C_1 和 C_2 内部, 经过变换后成 $\omega=\infty$, 因此变换把内部圆 C_1 变为外边界 $\omega=1$. 特别, 取圆周 C_1 上点 $z=12$ 有:

$$1 = |\omega(12)| = |k| \left| \frac{12+24}{12} \right| = 3|k|$$

即 $k = e^{i\theta}/3$. 因而所求变换为

$$\omega(z) = e^{i\theta} \frac{z+24}{3z}.$$

如取 $\omega(0)=0$, $\omega(-24)=\infty$, 类似可得到另一解:

$$\omega(z) = e^{i\theta} \frac{3z}{z+24}.$$

8.4节 初等函数的映照

一. $\omega = z^n$, $\omega = \sqrt[n]{z}$

1. $\omega = z^n$ 把以原点为顶点的角域:

$$\alpha < \arg z < \beta, \quad \beta - \alpha \leq 2\pi/n.$$

保形映为角域

$$n\alpha < \arg \omega < n\beta.$$

2. $\omega = \sqrt[n]{z}$ 是幂函数 $\omega = z^n$ 的反函数, 如果取正实轴为支割线, 在割开的复平面上可以定义 n 个单值解析分支:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1, z=re^{i\varphi})$$

这些分支都可以用来作区域的保形变换。它们分别把D内的角域 $\alpha < \arg z < \beta$ 保形地映为角域

$$\left(\frac{2k\pi}{n} \leq\right) \frac{\alpha + 2k\pi}{n} < \arg \omega < \frac{\beta + 2k\pi}{n} \left(\leq \frac{2(k+1)\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

在具体作保形变换时候, 最常用第零支, 这一支可以表示为:

$$\omega = \sqrt[n]{z}, \quad \omega(1) = 1.$$

特别, 如果取正实轴为分割线, 分支

$$\omega = \sqrt{z}, \quad \sqrt{1} = 1$$

把区域D保形映照成上半平面 $\operatorname{Im} \omega > 0$.

例8.4.1 求一个保形变换, 将上半单位圆 $D: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ 变成上半平面。

解: 区域D可以看成半圆周及其直径所界的二角形区域

(1) 取分式线性变换 $t(z)$, 使得

$$t(-1) = 0, \quad t(1) = \infty, \quad t(0) = 1$$

这样, 根据分式线性变换的保圆性以及其变换的保角性, 变换后D将变为张角为 $\frac{\pi}{2}$ 的角

域。再由 $t(0) = 1$ 的条件, 此角域为 t 平面的第一象限 D' 。具体计算 $t(z)$ 步骤为: 由于 $t(-1) = 0, t(1) = \infty$, 所以

$$t(z) = k \frac{z+1}{z-1}.$$

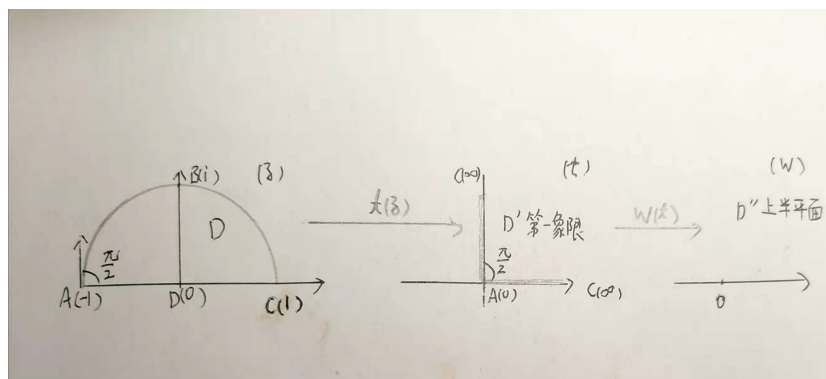
再要求 $t(0) = 1$, 定出 $k = -1$, 这样 $t(z)$ 具体为:

$$t(z) = -\frac{z+1}{z-1}.$$

(2)

$$\omega = t^2$$

把第一象限变为上半平面。



最后, 综合(1)和(2)的乘积

$$\omega(z) = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$$

合于所求。

例8.4.2 求一个保形变换, 将中心在 $z=0$ 和 $z=1$, 半径为1的两段圆弧 l_1, l_2 所围成的区域 D 变成上半平面。

解: 这两个圆周的交点是

$$z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

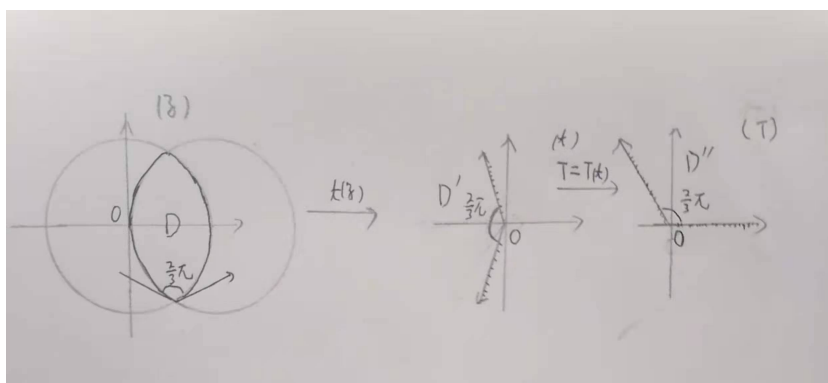
在交点处的交角为 $\frac{2\pi}{3}$ 。

(1) 取分式线性变换 $t(z)$ 使得: $t(z_1) = 0, t(z_2) = \infty$, 具体可取为

$$t(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{2z-(1-i\sqrt{3})}{2z-(1+i\sqrt{3})}$$

$t(z)$ 把区域 D 变为以 $z=0$ 为顶点的张角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的角区域 D' 。又注意到区域 D 边界 l_1 上点 $z_3=1$ 变为 $t_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, 而 $\arg t_3 = \frac{2\pi}{3}$, 这样 D' 具体为 $\frac{2\pi}{3} < \arg t < \frac{4\pi}{3}$

(2) 变换 $T = e^{-i\frac{2\pi}{3}}t$, 变成角形区域 D'' : $0 < \arg T < \frac{2\pi}{3}$



(3) 变换 $\omega = T^{\frac{3}{2}}$ (以正实轴为割线, $\omega(1) = 1$ 的一支), 把 D'' 变成了上半平面。

最后, 综合以上(1), (2), (3)

$$\omega = - \left[\frac{2z-(1-i\sqrt{3})}{2z-(1+i\sqrt{3})} \right]^{\frac{3}{2}}$$

合于所求。

例8.4.3 求一个保形变换, 把去掉正实轴上两条射线 $1 \leq x \leq +\infty$ 和 $-\infty \leq x \leq -1$ 的 z 平面的区域 D 变换为上半平面。

解: (1) 取分式线性变换 $t(z)$ 使得: $t(-1) = 0, t(1) = \infty, t(\infty) = 1$, 具体此变换为

$$t(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

显然, 此变换把实轴变为实轴, 把实轴上的这两条射线变为 t 平面上的正实轴, 因此区域 D 变成去掉正实轴的 t 平面区域 D' .

(2) 取

$$\omega = \sqrt{t}, \quad (\text{以正实轴为交割线, } \sqrt{1} = 1 \text{ 的一支})$$

把 D' 变为上半平面。

作以上变换(1)和(2)的乘积, 得到合于要求的变换:

$$\omega(z) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$$

二. 变换 $\omega = e^z$ 和 $\omega = \operatorname{Ln} z$

$\omega = e^z$ 把条形区域 $a < \operatorname{Im} z < b, b - a \leq 2\pi$ 保形映照为角域 $a < \arg \omega < b$

$\omega = \operatorname{Ln} z$ 是 $\omega = e^z$ 的反函数, 取正实轴为交割线, 在沿着正实轴割开的 z 平面上 D 内, 可分出它的无穷多个单值解析分支

$$(\operatorname{Ln} z)_n = \ln |z| + i\theta + 2n\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, 0 < \theta < 2\pi$$

其中任何一个分支都可以作保形变换, 它们把顶点在 $z = 0$ 的角形域变换为条形域

$$2n\pi + a < \operatorname{Im} \omega < 2n\pi + b,$$

其中最常用的是 $n = 0$ 的一支,

$$\ln z = \ln |z| + i\theta, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

例8.4.4 求一个保形变换, 把如图的月牙形区域变为条形区域 $0 < \operatorname{Im} \omega < h$.

解: (1) 先求一个分式线性变换 $t(z)$, 使得 $t(-a) = 0, t(a) = \infty$. 这样

$$t(z) = k \frac{z+a}{z-a}$$

再要求 $t(0) = 1$, 这样 $t(z)$ 具体为:

$$t(z) = -\frac{z+a}{z-a}$$

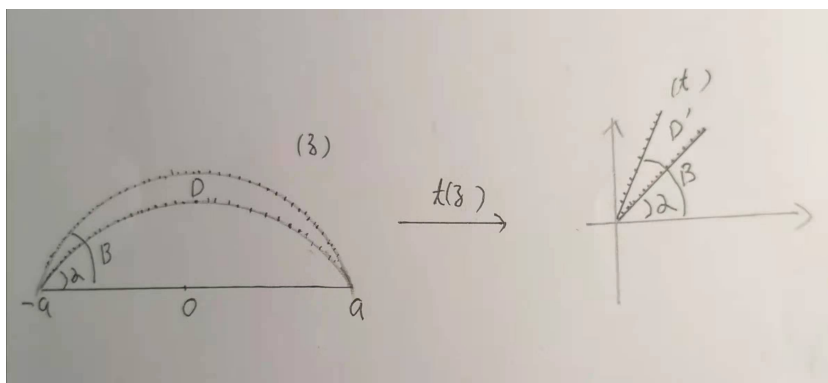
由于分式线性变换的保圆性, 以及有 $t(-a) = 0, t(a) = \infty$, 这样 $t(z)$ 把原月牙形区域变为两个边界变为以 $t = 0$ 为顶点的射线, 再因为 $t(0) = 1$, 因此 $t(z)$ 把线段 $[-a, a]$ 映成正实轴, 这样相应的月牙形区域 D 变为张角为 $\beta - \alpha$ 的在第一象限的角形域 D' . 如图:

(2) 变换 $u = \ln t = \ln |t| + i\theta, 0 < \theta < 2\pi$ 把这个角形域 D' 变为条形区域

$$\alpha < \operatorname{Im} u < \beta$$

(3) 变换

$$\omega = \frac{h}{\beta - \alpha} [u - \alpha i]$$



把条形域变为所求区域。

因此, 综合以上变换(1), (2), (3), 则变换

$$\omega = \frac{h}{\beta - \alpha} \left[\ln \frac{z + a}{a - z} - \alpha i \right]$$

合于所求。

儒可夫斯基变换

定义为

$$\omega = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

除了 $z = 0$ 外, 它在全平面处处解析, 下面确定它的单叶性区域: 如 $z_1 \neq z_2$, 但是 $\omega_1 = \omega_2$, 则有

$$\frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 1$$

所以区域 D 不是单叶性区域的充分必要条件是区域内不含有互为倒数的两点。比如单位圆内部就是这个变换的一个单叶性区域。

作参数代换:

$$z = e^{i\varphi}, \quad \omega = u + iv.$$

则

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi \\ v = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right) \sin \varphi \end{cases}$$

这样, 圆周 $|z| = r, r < 1$ 变成椭圆族:

$$E_r: \frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r} \right)^2} = 1$$

其长短轴分别为:

$$a_r = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right). \quad (r < 1)$$

$r \rightarrow 0$ 时, $a_r, b_r \rightarrow +\infty$, 但是 $a_r - b_r \rightarrow 0$, 故知这时椭圆族 E_r 逐渐变大变圆。 $r \rightarrow 1^-$ 时, $a_r \rightarrow 1$, 但是 $b_r \rightarrow 0$, 故知这时椭圆族 E_r 逐渐变被压扁。最后极限情况就压缩为线段 $[-1, 1]$. 由此可见, 儒可夫斯基变换把单位圆内部 D 单叶地变为 ω 平面上除去线段 $[-1, 1]$ 的区域 D_1 .

本章部分习题或难题解答

附例8.1 设保形变换 $\omega = f(z)$ 将区域 D 变为 G , 证明 G 的面积为:

$$\iint_D |f'(z)|^2 dx dy$$

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 则 G 的面积为:

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy \quad (1)$$

其中 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ 是因变量 $u(x, y), v(x, y)$ 对自变量 x, y 的雅克比行列式, 即

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

由于保形变换 $\omega = f(z)$ 是解析映射, 所以 $u(x, y), v(x, y)$ 满足柯西-黎曼方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

综合以上结论代入 (1), 有:

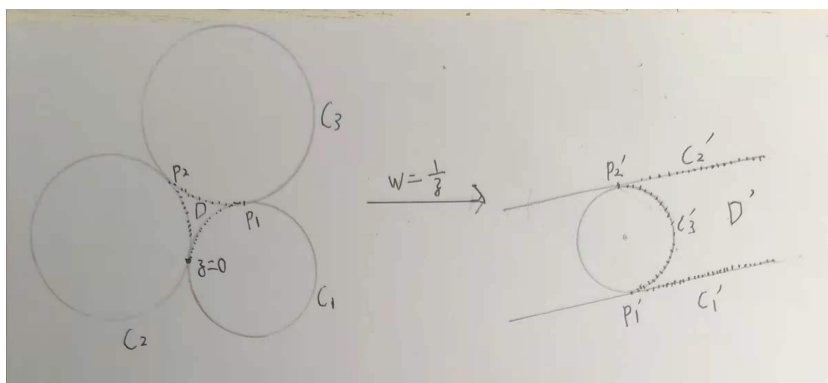
$$S = \iint_D \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right| dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (3)$$

由于 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, 于是结合上式 (3) 就证明了:

$$S = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy$$

附例8.2 z 平面上有三个互相外切的圆周, 且切点之一为原点, 函数 $\omega = \frac{1}{z}$ 将此三个圆周所围的区域 D 变成 ω 平面的什么区域?

解: 设此三个相切圆周分别为 C_1, C_2, C_3 , 切点分别为 P_1, P_2, P_3 , 且 $P_3 = 0$ 为 C_1 和 C_2 的切点。由于 $\omega(z) = \frac{1}{z}$ 把 C_1 和 C_2 的唯一公共点即切点 P_3 变为 ∞ , 这样, 根据分式线性变换的保圆性, 经过函数 $\omega = \frac{1}{z}$ 变换, C_1 和 C_2 的像是 ω 平面内的两条平行直线 C'_1 和 C'_2 .



而 C_3 上没有点变为 ∞ , 因此再由保圆性, C_3 的像 C'_3 仍然是一个圆, 且与平行直线 C'_1 和 C'_2 都相切。按照边界对应关系, 原来三个圆周所围的区域 D 变为缺了半圆的半条形区域 D' 。如图:

附例8.3 求将点 $-1, \infty, i$ 变为 $\infty, i, 1$ 的分式线性变换 $\omega(z)$

解: 这里 $z_1 = -1, z_2 = \infty, z_3 = i$, 而要求 $\omega(z_1) = \infty, \omega(z_2) = i, \omega(z_3) = 1$, 根据把不同3个点变为指定3点的分式线性变换公式(8.3.2), 并把其中的含有 ∞ 的项换成1, 则有

$$\frac{1}{\omega - i} \cdot \frac{1 - i}{1} = \frac{z + 1}{1} \cdot \frac{1}{i + 1}.$$

也就是:

$$\omega(z) = \frac{iz + 2 + i}{z + 1}.$$

附例8.4 求保形变换将区域 $D: |z| < 1$ 映为带域 $0 < \text{Im}\omega < 1$, 且使得 $\omega(-1) = \infty, \omega(1) = \infty, \omega(i) = i$

解: 区域 D 的边界 $|z| = 1$ 可以看成 $z = -1$ 为顶点, 张角为 π 的特殊二角形区域。因此:

(1) 作变换 $t(z)$, 使得 $t(-1) = 0, t(1) = \infty$ 且 $t(i) = -1$, 具体可表示为

$$t(z) = i \frac{z + 1}{1 - z}.$$

此变换使得边界单位圆周变为了实轴, 并使得圆内点 $z = 0$ 变为 t 平面上半平面的点 $t = i$, 因此经过变换 $t(z)$ 后区域 D 变为 t 平面的上半平面 $D': 0 < \arg t < \pi$.

(2) 保形变换 $\omega = \frac{1}{\pi} \ln t = \ln |t| + i \arg t, 0 < \arg t < 2\pi$ 把上半平面变为带域 $0 < \text{Im}\omega < 1$, 并且把 -1 变为 i . 这样, 综合以上(1)和(2),

$$\omega = \frac{1}{\pi} \ln \left(i \frac{z + 1}{1 - z} \right)$$

合于所求。

附例8.5 求保形变换将第一象限变为上半平面, 且使得 $z = \sqrt{2}i, 0, 1$ 变为 $\omega = -1, 1, \infty$.

解: (1) 取 $t(z) = z^2$, 则第一象限变为上半平面, 同时 $z = \sqrt{2}i, 0, 1$ 这3个点分别变为 t 平面中3个点: $t = -2, 0, 1$.

(2) 作分式线性变换 $\omega(t)$, 使得 $t = -2, 0, 1$ 三个点变分别为 $\omega = -1, 1, \infty$. 具体为:

$$\omega(t) = \frac{2t+1}{1-t}.$$

此变换上半平面的边界实轴仍然变为实轴, 把上半平面的 $t = i$ 的点仍然变为 ω 平面的上半平面的点, 因此变换 $\omega(t)$ 把上半平面仍然变为上半平面

综合以上步骤(1)和(2),

$$\omega(z) = \frac{2z^2+1}{1-z^2}.$$

合于所求。

附例8.6 将沿着线段 $[0, 1+i]$ 有割缝的第一象限变为上半平面

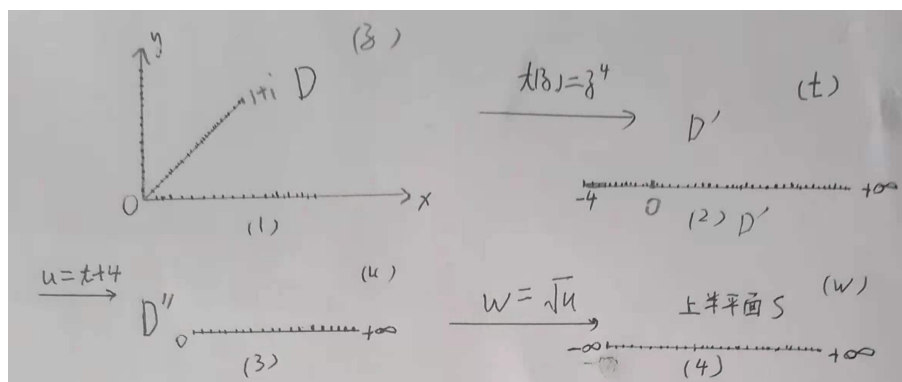
解: (1) 取 $t(z) = z^4$, 则 $t(z)$ 把沿着线段 $[0, 1+i]$ 有割缝的第一象限变为去掉 $[-4, +\infty)$ 的 t 平面 D' .

(2) 变换 $u = t + 4$ 把 D' 变成 u 平面上去掉正实轴的区域 D''

(3)

$$\omega = \sqrt{u}, \quad \sqrt{1} = 1$$

变为上半平面 S 。



最后, 综合步骤(1),(2),(3),

$$\omega(z) = \sqrt{z^4 + 4}$$

合于所求。

第九章 Laplace 变换

9.1 Laplace 变换定义

Laplace 变换的定义:

设 $f(t)$ 是定义在 $t \geq 0$ 上的实值或复值函数, 则

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (9.1.1)$$

称为 $f(t)$ 的 Laplace 变换, 也记为 $L[f(t)]$, 即 $F(p) = L[f(t)]$

按照此定义, 可直接算出

$$L[1] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$$

$$L[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt} dt = \frac{1}{p-a}, \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a)$$

在实际研究中, 我们规定 $t < 0$ 时候, 规定 $f(t) = 0$. 因此

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

如果记

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$h(t)$ 称为单位函数。以下讨论中 $f(t)$ 均为 $f(t) = h(t)f(t)$.

Laplace 变换的条件:

在作 Laplace 变换时候, 要保证积分存在和收敛, 要对本函数 $f(t)$ 要求以下条件:

1) $f(t)$ 在 t 轴的任何有限区间内, $f(t)$ 以及 $f'(t)$ 除了有限个第一类间断点外处处连续。

2) $f(t)$ 是指数增长型的, 即存在常数 $K > 0, c \geq 0$ 使得

$$|f(t)| \leq K e^{ct}$$

利用含参变量积分的一致收敛性质, 可证明: 如果 $F(p)$ 满足以上两条件, 则像函数 $F(p)$ 在 $\operatorname{Re} p > c$ 有意义, 而且是个解析函数。

9.2 Laplace 变换的性质

性质1 线性关系:

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)]$$

例如:

$$L[\cos \omega t] = L\left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} [e^{i\omega t}] + \frac{1}{2} [e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

同理

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad L[\cosh \omega t] = \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad L[\sinh \omega t] = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2},$$

性质2 相似定理: 设 $L[f(t)] = F(p)$, 则对任意 $\alpha > 0$ 有

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha c.$$

性质3 位移定理: 设 $L[f(t)] = F(p)$, 则对任何复常数 λ 有

$$L[e^{\lambda t} f(t)] = F(p - \lambda)$$

证明:

$$L[e^{\lambda t} f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p - \lambda)$$

例如:

$$L[e^{\lambda t} \cos \omega t] = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$$

性质4 像函数微分法: 设 $L[f(t)] = F(p)$, 则

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

证明:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \implies F'(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt = L[-t f(t)]$$

即

$$L[tf(t)] = (-1)^1 F'(p)$$

进一步对 p 求导下去, 就可以得到

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

特别: 取 $f(t) = 1$, 则 $L[f(t)] = \frac{1}{p}$, 因此

$$L[t^n] = (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

性质5 微分性质: $L[f'(t)] = pF(p) - f(+0)$.

证明: 由分部积分得到:

$$L[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + p \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(+0)$$

进一步, 有

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$$

特别

$$L[f''(t)] = p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0)$$

例 9.2.1 求初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}, \\ y|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

解: 设 $L[y(t)] = Y(p)$, 则有

$$L[y'(t)] = pY(p) - y(0) = pY(p) - 0 = pY(p)$$

另外 $L[e^{-t}] = \frac{1}{p+1}$. 这样, 对以上初值问题作Laplace变换有:

$$pY(p) + 2Y(p) = \frac{1}{p+1} \implies Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

作逆变换得到:

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] = e^{-t} - e^{-2t}.$$

例 9.2.2 求初值问题

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y|_{t=0} = y'|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

解: 设 $L[y(t)] = Y(p)$, 则有

$$L[y''(t)] = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p)$$

另外 $L[t] = \frac{1}{p^2}$. 这样, 对以上初值问题作Laplace变换有:

$$p^2 Y(p) + Y(p) = \frac{1}{p^2} \implies Y(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1}$$

作逆变换得到:

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{p^2 + 1}\right] = t - \sin t.$$

性质6 本函数积分法: 设 $L[f(t)] = F(p)$, 则

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

证明: 记 $g(t) = \int_0^t f(t) dt$, 并设 $L[g(t)] = G(p)$, 根据以上性质5(微分性质),

$$L[g'(t)] = L[f(t)] = pL[g(t)] - g(0) = pG(p) = F(p)$$

因此

$$G(p) = L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

例 9.2.3 求解积分方程

$$R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi = E$$

解: 作Laplace变换, 设 $L[i(t)] = I(p)$, 则 $L\left[\int_0^t i(\xi) d\xi\right] = \frac{I(p)}{p}$, 因此对方程作Laplace变换有:

$$RI(p) + \frac{1}{Cp} I(p) = \frac{E}{p}$$

解得:

$$I(p) = \frac{E}{p} / \left(R + \frac{1}{Cp}\right) = \frac{E}{R(p + \frac{1}{CR})}$$

作反变换:

$$i(t) = L^{-1}[I(p)] = \frac{E}{R} e^{-t/CR}$$

性质7 卷积性质:

函数 $f(x) * g(x)$ 定义为:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi$$

由于作Laplace变换的函数 $f(t)$ 在 $t < 0$ 时候满足 $f(t) = 0$, 所以在Laplace 变换中的函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积可简化为

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\xi)g(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^0 f(t-\xi)g(\xi)d\xi + \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi \\ &\quad + \int_t^{+\infty} f(t-\xi)g(\xi)d\xi = \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

因此作Laplace变换的卷积定义简化为:

$$f(t) * g(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi, & t > 0 \end{cases}$$

作Laplace 变换时卷积有以下性质:

$$L[f(t) * g(t)] = L[f(t)]L[g(t)] = F(p)G(p)$$

或者为

$$L^{-1}[F(p)G(p)] = f(t) * g(t)$$

例9.2.4 解积分型方程

$$y(t) = at + \int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau) d\tau.$$

解: 设 $L[y(t)] = Y(p)$, 则

$$L\left[\int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau) d\tau\right] = L[y(t) * \sin t] = L[\sin t]L[y(t)] = \frac{1}{p^2+1}Y(p)$$

将以上积分型方程两边作Laplace 变换, 得到

$$Y(p) = \frac{a}{p^2} + \frac{1}{p^2+1}Y(p),$$

解得:

$$Y(p) = \frac{a}{p^2} + \frac{a}{p^4}$$

作反变换

$$y(t) = a\left(t + \frac{t^3}{6}\right)$$

性质8 延时定理:

将函数 $f(t)$ 延时一个时刻, 即

$$f(t-\tau) = \begin{cases} f(t-\tau), & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

则

$$L[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p).$$

例9.2.5已知

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

求 $L[f(t)]$.

解: $f(t)$ 可改写为:

$$f(t) = th(t) - (t-1)h(t-1).$$

由于 $L[th(t)] = \frac{1}{p^2}$, 再根据延时定理:

$$L[(t-1)h(t-1)] = e^{-p} \frac{1}{p^2}$$

所以

$$L[f(t)] = \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p})$$

9.3 Laplace 反变换

一.划部分分式方法

对于有理真分式, 可先分解为部分分式, 然后进行反变换:

例 9.3.1 求 $F(p) = \frac{p+7}{(p-1)(p^2+2p+5)}$ 的本函数。

解: 设

$$F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+5} = \frac{p+7}{(p-1)(p^2+2p+5)}$$

两边比较后:

$$A(p^2+2p+5) + (Bp+C)(p-1) = p+7$$

比较系数得到:

$$p^2: A+B=0, \quad p: 2A-B+C=1, \quad p^0: 5A-C=7,$$

解得: $A=1, B=-1, C=-2$. 所以

$$F(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{p+2}{p^2+2p+5} = \frac{1}{p-1} - \frac{(p+1) + \frac{1}{2}}{(p+1)^2 + 2^2}$$

所以

$$L[f(p)] = L^{-1} \left[\frac{1}{p-1} \right] - L^{-1} \left[\frac{(p+1)}{(p+1)^2 + 2^2} \right] - \frac{1}{2} L^{-1} \left[\frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} \right]$$

$$= e^t - e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

反变换的一般性公式

1. Fourier 变换和 Laplace 变换的联系

函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换定义为:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (9.3.1)$$

反变换:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

下面我们讨论 Laplace 变换(9.1.1)和以上的 Fourier 变换的联系: 实际上, 在 Laplace 变换(9.1.1)中, 令 $p = \sigma + is$, 并记

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

因此 Laplace 变换(9.1.1)就被改为了 Fourier 变换的形式:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{f}(t) e^{-\sigma t}] e^{-ist} dt.$$

由 Fourier 反变换公式:

$$\hat{f}(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{ist} ds.$$

当 σ 固定时, $dp = ids$. 当 s 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时候, $p = \sigma + is$ 就在直线 $Re p = \sigma$ 从 $\sigma - i\infty$ 变到 $\sigma + i\infty$. 这时上式就化为:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{\sigma t} e^{ist} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (t > 0) \quad (9.3.2)$$

此式(9.3.2)所代表的反演公式称为傅里叶—梅林公式。

傅里叶—梅林公式本质上是直线上的无穷积分, 利用类似于第六章采用的计算实轴上无穷积分的留数方法, 我们得出傅里叶—梅林公式的一个很有实用性的推论:

定理9.3.1 设 $F(p)$ 在 p 复平面中除了有限个奇点 p_1, p_2, \dots, p_n 外都解析, 且 $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, 则 $F(p)$ 的本函数

$$f(t) = \sum_{k=1}^n Res[F(p) e^{pt}, p_k] \quad (9.3.3)$$

例 9.3.2 求 $F(p) = \frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$ 的本函数。

解: $F(p)$ 在全平面有奇点 $p_1 = ai$, $p_2 = -ai$ 为2级极点, 而

$$\begin{aligned} \text{Res}[F(p)e^{pt}, ai] &= \lim_{p \rightarrow ai} \left[(p - ai)^2 \frac{e^{pt}}{(p^2 + a^2)^2} \right]' = \left(\frac{e^{pt}}{(p + ai)^2} \right)' \Big|_{p=ai} \\ &= [te^{pt}(p + ai)^{-2} - 2e^{pt}(p + ai)^{-3}] \Big|_{p=ai} = -\frac{te^{ait}}{4a^2} + \frac{e^{ait}}{4a^3 i} \end{aligned}$$

同理

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}, -ai] = -\frac{te^{-ait}}{4a^2} - \frac{e^{-ait}}{4a^3 i}$$

所以

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \text{Res}[F(p)e^{pt}, ai] + \text{Res}[F(p)e^{pt}, -ai] = -\frac{t}{2a^2} \cos at + \frac{1}{2a^3} \sin at$$

方程组Laplace变换

Laplace变换解方程组也是类似方法, 如方程组有两个因变量 $x(t)$, $y(t)$, 这时可设 $L[x(t)] = X(p)$, $L[y(t)] = Y(p)$. 这样常微分方程就被化为代数方程了。

例 9.3.3 解方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x - 2y = t, \\ -2x + \frac{dy}{dt} - y = t, \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 4. \end{cases}$$

解: 作Laplace变换, 并设 $L[x(t)] = X(p)$, $L[y(t)] = Y(p)$, 这样

$$L\left[\frac{dx}{dt}\right] = pX(p) - x(0) = pX(p) - 2, \quad L\left[\frac{dy}{dt}\right] = pY(p) - y(0) = pY(p) - 4, \quad L[t] = \frac{1}{p^2}$$

因此, 作Laplace变换后方程组为:

$$\begin{cases} (p - 1)X(p) - 2Y(p) = \frac{1}{p^2} + 2, \\ -2X(p) + (p - 1)Y(p) = \frac{1}{p^2} + 4, \end{cases}$$

解得:

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} p - 1 & -2 \\ -2 & p - 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{p^2} + 2 & -2 \\ \frac{1}{p^2} + 4 & p - 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p - 1 & \frac{1}{p^2} + 2 \\ -2 & \frac{1}{p^2} + 4 \end{vmatrix}.$$

进一步化简得到:

$$X(p) = \frac{2p^3 + 6p^2 + p + 1}{p^2(p^2 - 2p - 3)}, \quad Y(p) = \frac{4p^3 + p + 1}{p^2(p^2 - 2p - 3)}.$$

作反变换:

$$x(t) = \text{Res}[X(p)e^{pt}, 3] + \text{Res}[X(p)e^{pt}, -1] + \text{Res}[X(p)e^{pt}, 0],$$

$$y(t) = \text{Res}[Y(p)e^{pt}, 3] + \text{Res}[Y(p)e^{pt}, -1] + \text{Res}[Y(p)e^{pt}, 0].$$

而

$$\text{Res}[X(p)e^{pt}, 3] = \lim_{p \rightarrow 3} (p-3) \frac{(2p^3 + 6p^2 + p + 1)e^{pt}}{p^2(p+1)(p-3)} = \frac{28}{9}e^{3t};$$

$$\text{Res}[Y(p)e^{pt}, 3] = \lim_{p \rightarrow 3} (p-3) \frac{(4p^3 + p + 1)e^{pt}}{p^2(p+1)(p-3)} = \frac{28}{9}e^{3t};$$

$$\text{Res}[X(p)e^{pt}, -1] = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) \frac{(2p^3 + 6p^2 + p + 1)e^{pt}}{p^2(p+1)(p-3)} = -e^{-t};$$

$$\text{Res}[Y(p)e^{pt}, -1] = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) \frac{(4p^3 + p + 1)e^{pt}}{p^2(p+1)(p-3)} = e^{-t};$$

$$\text{Res}[X(p)e^{pt}, 0] = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p^2 \frac{(2p^3 + 6p^2 + p + 1)e^{pt}}{p^2(p+1)(p-3)} \right)' = \left(\frac{(2p^3 + 6p^2 + p + 1)e^{pt}}{p^2 - 2p - 3} \right)' \Big|_{p=0} = -\frac{1}{9} - \frac{t}{3};$$

$$\text{Res}[Y(p)e^{pt}, 0] = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p^2 \frac{(4p^3 + p + 1)e^{pt}}{p^2(p+1)(p-3)} \right)' = \left(\frac{(4p^3 + p + 1)e^{pt}}{p^2 - 2p - 3} \right)' \Big|_{p=0} = -\frac{1}{9} - \frac{t}{3};$$

因此

$$x(t) = \frac{28}{9}e^{3t} - \frac{t}{3} - e^{-t} - \frac{1}{9}, \quad y(t) = \frac{28}{9}e^{3t} - \frac{t}{3} + e^{-t} - \frac{1}{9}.$$

本章部分习题或难题解答

附例9.1 直接求出以下像函数的本函数

$$(1) F(p) = \frac{p+2}{p^2+4p+5}, \quad (2) F(p) = \frac{1}{(p+1)^4}$$

解: (1)

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+2)^2+1}$$

而 $L^{-1} \left[\frac{p}{p^2+1} \right] = \cos t$, 因此再根据位移定理

$$L^{-1} \left[\frac{p+2}{(p+2)^2+1} \right] = e^{-2t} \cos t$$

(2) 由于

$$L^{-1} \left[\frac{1}{p^4} \right] = \frac{1}{3!} L^{-1} \left[\frac{3!}{p^4} \right] = \frac{1}{6} t^3$$

再由位移定理

$$L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^4}\right] = \frac{1}{6}e^{-t}t^3$$

附例9.2 $F(p) = \frac{1}{p(p-2)^2}$, 用化部分分式和留数两种方法计算本函数

解法1 设

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{(p-2)^2} = \frac{1}{p(p-2)^2}$$

即:

$$A(p-2)^2 + Bp(p-2) + Cp = 1$$

比较 p 的各次方的系数, 得到:

$$p^2: A+B=0, \quad p: -4A-2B+C=0, \quad p^0: 4A=1$$

解得: $A=1/4, B=-1/4, C=1/2$. 因此

$$F(p) = \frac{\frac{1}{4}}{p} - \frac{\frac{1}{4}}{p-2} + \frac{\frac{1}{2}}{(p-2)^2}$$

则本函数为:

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}.$$

解法2 $F(p)$ 在全平面的奇点有一级极点 $p=0$ 和二级极点 $p=2$. 本函数为:

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \text{Res}[F(p)e^{pt}, 0] + \text{Res}[F(p)e^{pt}, 2] \quad (1)$$

而

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}, 0] = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{e^{pt}}{p(p-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}, 2] = \lim_{p \rightarrow 2} \left[(p-2)^2 \frac{e^{pt}}{p(p-2)^2} \right]' = \left[\frac{e^{pt}}{p} \right]' \Big|_{p=2} = \left[\frac{te^{pt}p - e^{pt}}{p^2} \right] \Big|_{p=2} = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}$$

以上两式结果代入(1)式, 同样得到:

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}.$$

附例9.3 $F(p) = \frac{p^3}{p^4 + a^4}$, 求 $L^{-1}[F(p)]$

解: $F(p)$ 的奇点为:

$$p_1 = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad p_2 = a \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad p_3 = a \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad p_4 = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

则

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \sum_{k=1}^4 \text{Res}[F(p)e^{pt}, p_k]$$

而由于 $p = p_k$ 为 $F(p)$ 分母的一级零点且不是分子的零点, 因此为 $F(p)$ 的一级极点, 这样

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}, p_k] = \frac{p^3 e^{pt}}{(p^4 + a^4)'} \Big|_{p=p_k} = \frac{p^3 e^{pt}}{4p^3} \Big|_{p=p_k} = \frac{e^{p_k t}}{4}$$

所以

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4} (e^{p_1 t} + e^{p_2 t} + e^{p_3 t} + e^{p_4 t}) \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{(\frac{\sqrt{2}a}{2} + i\frac{\sqrt{2}a}{2})t} + e^{(-\frac{\sqrt{2}a}{2} + i\frac{\sqrt{2}a}{2})t} + e^{(-\frac{\sqrt{2}a}{2} - i\frac{\sqrt{2}a}{2})t} + e^{(\frac{\sqrt{2}a}{2} - i\frac{\sqrt{2}a}{2})t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\sqrt{2}a}{2}t} + e^{-\frac{\sqrt{2}a}{2}t} \right) \cos \frac{\sqrt{2}a}{2}t = \cosh \frac{\sqrt{2}a}{2}t \cos \frac{\sqrt{2}a}{2}t. \end{aligned}$$

附例9.4 $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}$, 求 $L^{-1}[F(p)]$

解: 由于作Laplace变换时候, $\text{Re } p > 0$, 因此 $|e^{-\pi p}| < 1$, 这样

$$\frac{1}{1 - e^{-\pi p}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-\pi p})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\pi p}$$

因而

$$F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p}{p^2 + 1} e^{-n\pi p} \quad (1)$$

而

$$L^{-1} \left[\frac{p}{p^2 + 1} \right] = \cos t, \quad (2)$$

因此利用(1), (2)式并结合延时定理,

$$L^{-1}[F(p)] = \sum_{n=0}^{+\infty} h(t - n\pi) \cos(t - n\pi).$$

附例9.5 利用Laplace变换求解:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = te^t \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

解: 设 $L[y(t)] = Y(p)$, 则有

$$L[y''(t)] = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p)$$

另外 $L[te^t] = \frac{1}{(p-1)^2}$. 这样, 对以上初值问题作Laplace变换有:

$$(p-1)^2 Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} \implies Y(p) = \frac{1}{(p-1)^4}$$

作逆变换得到:

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = \frac{1}{6} t^3 e^t$$

附例9.6利用Laplace变换求解方程:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

解: 设 $L[y(t)] = Y(p)$, 则有

$$L[y''(t)] = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p)$$

另外记 $L[f(t)] = F(p)$. 这样, 对以上初值问题作Laplace变换有:

$$(p^2 + \omega^2)Y(p) = F(p) \implies Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 + \omega^2}$$

作逆变换得到:

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2 + \omega^2}\right] * L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{\omega} \sin \omega t * f(t)$$

即

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(u) \sin \omega(t - u) du.$$