习题课 7

20220604

一、第七章内容回顾

1. 欧式空间的定义：在线性空间中引入内积
2. 内积的性质：对称性，线性性，正定性，柯西不等式与三角不等式
3. 度量矩阵，矩阵的相合
4. 标准正交基，schmidt 正交化

设欧氏空间 V 的一组基：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n \Rightarrow$ 构造一组标准正交基?

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|},$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_k=\boldsymbol{\alpha}_k-\sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_k=\frac{\boldsymbol{\beta}_k}{|\boldsymbol{\beta}_k|},\ k=1,2,\ldots,n,$$

$\Rightarrow \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 为一组标准正交基，上述构造性算法称为 Schmidt **正交化方法**

5. 正交变换：保持内积不变的变换
6. 正交矩阵的性质
7. 对称变换和对称矩阵
8. 实对称阵的对角化

对称阵的特征值一定是实数；不同特征值对应的特征向量相互正交；对称阵可以正交对角化

9. 酉空间

二、作业题选讲

14

证：

$$A^TA=I\to A^T=A^{-1}\to\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

由于 A 为正交阵，则|A|只可能为 1 或-1。

$|A|=1$时，$a=d,b=-c,a^2+b^2=1$，令$a=\cos\theta,b=\sin\theta$

此时的正交矩阵为$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$|A|=-1$时，$a=-d,b=c,a^2+b^2=1$，令$a=\cos\theta,b=\sin\theta$

此时的正交矩阵为$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$

15

解：

先求出 A 的特征值和特征向量。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10=(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda-5)$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

A 的特征值为-1, 2, 5，

对于$\lambda=-1$，求解$(-I-A)x=0$得$x=(2,2,1)^T$

对于$\lambda=2$，求解$(2I-A)x=0$得$x=(-2,1,2)^T$

对于$\lambda=5$，求解$(5I-A)x=0$得$x=(1,-2,2)^T$

单位化并正交化得

$$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{pmatrix}$$

$$A^k=P\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{pmatrix}^k P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^k & & \\ & 2^k & \\ & & 5^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

17

由于$e_1,\dots,e_n$是 n 维空间的一组标准正交基，则对任意x_i均可以被唯一表示为$e_1,\dots,e_n$的线性组合。

设$x_i=t_{i1}e_1+\cdots+t_{in}e_n(i=1,\dots,k)$

必要性：

$$(x_i,x_j)=0\to t_{i1}t_{j1}+\cdots+t_{in}t_{jn}=0$$

$$\sum_{s=1}^{n}(x_i,e_s)(x_j,e_s)=\sum_{s=1}^{n}t_{is}t_{js}=0$$

必要性成立。
充分性：

$$\sum_{s=1}^{n}(x_i,e_s)(x_j,e_s)=\sum_{s=1}^{n}t_{is}t_{js}=0\rightarrow(x_i,x_j)=0$$

充分性成立。

三、补充题

1. 2020FA

4. (16 分) 设 V 是 3 维欧式空间, 由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 给出的度量矩阵 $=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&10&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}$. 请由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 按现在的顺序进行 Schmidt 正交化给出一组标准正交基.

解：

$$e_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-(e_1,\alpha_2)e_1=\alpha_2,e_2=\frac{\alpha_2}{\sqrt{10}}$$

$$\beta_3=\alpha_3-(e_1,\alpha_3)e_1-(e_2,\alpha_3)e_2=\alpha_3-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2$$

$$|\beta_3|=2+1+\frac{2}{5}-2-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$$

$$e_3=\frac{\sqrt{15}}{3}\left(\alpha_3-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2\right)$$

2. 2021SP

四、【12分】考虑线性空间 $V=\mathbb{R}_2[x]$, 运算为多项式的加法与数乘. 对于 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$, 定义

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

则 $(V,(,))$ 为欧氏空间. 用Schimidt正交化方法将 $1,x,x^2$ 按顺序改造成标准正交基.

解：

$$\alpha_1=1,e_1=1$$

$$\beta_2=\alpha_2-(e_1,\alpha_2)e_1=x-\frac{1}{2}$$

$$(\beta_2,\beta_2)=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$
$$e_2=\sqrt{3}(2x-1)$$
$$\beta_3=\alpha_3-(e_1,\alpha_3)e_1-(e_2,\alpha_3)e_2=x^2-\frac{1}{3}-3(2x-1)\int_0^1(2x-1)x^2dx=x^2-x+\frac{1}{6}$$
$$(\beta_3,\beta_3)=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2dx=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{1}{180}$$
$$e_3=\sqrt{5}(6x^2-6x+1)$$

3. 2021SP

4. 设 $\mathbb{R}_2[x]$ 中的某个内积在基 $\alpha_1=x-1,\alpha_2=x+1,\alpha_3=x^2$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}2&2&1\\2&5&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,

则该内积在基 $\beta_1=2x,\beta_2=-x+1,\beta_3=x^2+2$ 下的度量矩阵为__________.

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(1\ \ x\ \ x^2)\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=(1\ \ x\ \ x^2)\begin{pmatrix}0&1&2\\2&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P^TGP=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&5&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&7&1\\-2&-2&-1\\1&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}11&-4&4\\-4&2&-1\\4&-1&2\end{pmatrix}$$

4.

6. (8 分) 设 n 阶实对称方阵 A 满足 $A^2=I$, 证明:

(1) 存在正交方阵 P, 使得 $A=P\,\mathrm{diag}(I_r,-I_{n-r})P^{-1}$, 这里 $0\leqslant r\leqslant n$.

(2) 存在实对称方阵 B, 使得 $I+A=B^2$.

证：

A 的特征值只有 1 和-1，且相应的特征向量两两正交，因此 A 与对角阵正交相似。

$$I+A=2Pdiag(I_r,O)P^{-1}=Pdiag(\sqrt{2}I_r,O)P^{-1}Pdiag(\sqrt{2}I_r,O)P^{-1}=B^2$$

:

四、补充内容

1. 矩阵的 QR 分解

QR 分解的定义

m*n 矩阵 A，A 的列向量组线性无关，那么 A 可以唯一分解成 A=QR，其中 Q 是列向量组为正交单位向量组的 m*n 矩阵，R 是主对角元都是正数的 n 阶上三角阵。

QR 分解的存在性和唯一性

证法 1：用数学归纳法

证明 先证明 QR 分解的存在性. 对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，此定理就是定理 3.2.2 所述的情形，因此自然成立. 现假定已经证明定理对所有的 $p\times(n-1)$ 矩阵成立，这里假设 $p\geqslant(n-1)$. 设 $A\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 的第一列为 a_1，则由定理 3.2.2 知，存在正交矩阵 $Q_1\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$ 使得 $Q_1^{\mathrm{T}}a_1=\|a_1\|_2e_1$，于是，有

$$Q_1^{\mathrm{T}}A=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \|a_1\|_2 & v^{\mathrm{T}} \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ m-1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} & \end{array}.$$

对 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵 A_1 应用归纳法假定，得

$$A_1=Q_2\begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 Q_2 是 $(m-1)\times(m-1)$ 正交矩阵， R_2 是具有非负对角元的 $(n-1)\times(n-1)$ 上三角阵. 这样，令

$$Q=Q_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix} \|a_1\|_2 & v^{\mathrm{T}} \\ 0 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则 Q 和 R 满足定理的要求. 于是，由归纳法原理知存在性得证.

再证唯一性. 设 $m=n$ 且 A 非奇异，并假定 $A=QR=\tilde{Q}\tilde{R}$，其中 $Q,\tilde{Q}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$ 是正交矩阵， $R,\tilde{R}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是具有非负对角元的上三角阵. A 非奇异蕴含着 $R,\tilde{R}$ 的对角元均为正数. 因此，我们有

$$\tilde{Q}^{\mathrm{T}}Q=\tilde{R}R^{-1}$$

既是正交矩阵又是对角元均为正数的上三角矩阵，这只能是单位矩阵. 从而，必有 $\tilde{Q}=Q$, $\tilde{R}=R$, 即分解是唯一的. □

证法 2：用施密特正交化

设 A 的列向量组为$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$，经过正交化和单位化得到正交的单位向量组$e_1,\ldots,e_n$，以

$e_1,\ldots,e_n$作为列向量得到矩阵 Q，$R=Q^TA$

QR 分解用于最小二乘求解

$$A=QR$$
$$A^TAx=A^Tb$$
$$R^TRx=R^TQ^Tb$$
$$x=R^{-1}Q^Tb$$

2. 矩阵的奇异值分解

引理 1：

$$rank(AA^T)=rank(A^TA)=rank(A)$$

引理2. 假设$\lambda\neq 0$是$A^{\mathrm{T}}A$或AA^{T}的特征根,对应于λ:

(1) 若$\mathbf{v}$是$A^{\mathrm{T}}A$的单位特征向量,则$\mathbf{u}=A\mathbf{v}/\sqrt{\lambda}$是$AA^{\mathrm{T}}$的单位特征向量;

(2) 若$\mathbf{u}$是AA^{T}的单位特征向量,则$\mathbf{v}=A^{\mathrm{T}}\mathbf{u}/\sqrt{\lambda}$是$A^{\mathrm{T}}A$的单位特征向量。

(3) 若非0特征根的特征向量$\mathbf{v}'s$相互正交，则对应的$\mathbf{u}'s$相互正交.
反之也对。

证明：若$\mathbf{v}$是$A^{\mathrm{T}}A$的特征根λ的单位特征向量$\mathbf{v}$，则

$$A^{\mathrm{T}}A\mathbf{v}=\mathbf{v}\lambda\Rightarrow AA^{\mathrm{T}}A\mathbf{v}=A\mathbf{v}\lambda,$$

所以$\mathbf{b}=A\mathbf{v}$是AA^{T}的特征向量. 因为$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}=\mathbf{v}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\mathbf{v}=\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{v}\lambda)=\lambda$,

$\Rightarrow\mathbf{u}=\mathbf{b}/\sqrt{\lambda}=A\mathbf{v}/\sqrt{\lambda}$是$AA^{\mathrm{T}}$的单位特征向量.

同样，对于AA^{T}的特征向量$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}=A\mathbf{u}/\sqrt{\lambda}$是$A^{\mathrm{T}}A$的单位特征向量.

若$A^{\mathrm{T}}A$的非0特征根λ_1,λ_2对应的单位特征向量$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$正交($\lambda_1,\lambda_2$可能相同),

$\mathbf{u}_1=A\mathbf{v}_1/\sqrt{\lambda_1}$,$\mathbf{u}_2=A\mathbf{v}_2/\sqrt{\lambda_2}$,

则$\mathbf{u}_1{}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_1{}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\mathbf{v}_2/\sqrt{\lambda_1\lambda_2}=\mathbf{v}_1{}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_2\lambda_2/\sqrt{\lambda_1\lambda_2}=0$,这是因为$A^{\mathrm{T}}A\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2\lambda_2$.

奇异值分解定理

定理6. 任一秩为r的$n\times m$矩阵A可表示为

$$A=U_{n\times r}D_{r\times r}V^{\mathrm{T}}{}_{r\times m}$$

其中$U^{\mathrm{T}}U=V^{\mathrm{T}}V=I_r$, $D=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_r})$称为奇异值,
$\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_r>0$为$A^{\mathrm{T}}A$或$AA^{\mathrm{T}}$的$r$个正特征根，$U$的各列$\mathbf{u}_i$
为AA^{T}的特征向量，V的各列$\mathbf{v}_i$为$A^{\mathrm{T}}A$的特征向量.

定理6的证明：

我们以矩阵表达$A^{\mathsf T}A$和$AA^{\mathsf T}$所有非0特征根的特征向量的对偶关系.

由$A^{\mathsf T}A$的谱分解定理,我们可选择单位正交特征向量$\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r$,满足：

$$A^{\mathsf T}A\mathbf{v}_j=\mathbf{v}_j\lambda_j,\quad j=1,\dots,r\ \Leftrightarrow\ A^{\mathsf T}AV=V\Lambda \qquad (*)$$

令$\mathbf{u}_j=A\mathbf{v}_j/\sqrt{\lambda_j}, j=1,\dots,r$, 由引理,$\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r$是$AA^{\mathsf T}$的

对应于特征根$\lambda_1,\dots,\lambda_r$的相互正交的单位正交特征向量,即

$$AA^{\mathsf T}\mathbf{u}_j=\mathbf{u}_j\lambda_j \Leftrightarrow AA^{\mathsf T}U=U\Lambda,\ U=(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r) \qquad (**)$$

所有$A\mathbf{v}_j=\mathbf{u}_j\sqrt{\lambda_j}, j=1,\dots,r$,按列排列在一起即$AV=UD$,

由引理，所有对偶关系$A^{\mathsf T}\mathbf{u}_j=\mathbf{v}_j\sqrt{\lambda_j}, j=1,\dots,r$排列在一起

即$A^{\mathsf T}U=VD$。因此我们有矩阵形式的对偶关系：

$$\begin{cases} AV=UD \\ A^{\mathsf T}U=VD \end{cases}$$

对偶方程$AV=UD$两边同时右乘$V^{\mathsf T}$,得$AVV^{\mathsf T}=UDV^{\mathsf T}$,

因此，为证$A=UDV^{\mathsf T}$,我们只需证明$A=AVV^{\mathsf T}$.

因为V是$L(A^{\mathsf T})$的一组正交基$\Rightarrow$存在B使得$A^{\mathsf T}=VB$, 由$V^{\mathsf T}V=I_r$

$\Rightarrow AVV^{\mathsf T}=B^{\mathsf T}V^{\mathsf T}VV^{\mathsf T}=B^{\mathsf T}V^{\mathsf T}=A$, 所以$A=UDV^{\mathsf T}$.