HW 11 Note：本次答案中提到的"习题课"均为11.26习题课.

11. Sol. (1) 原式 $=\int_0^{x^2}\sin t^2\,dt$，故 $f'(x)=\sin x^4\cdot(x^2)'=2x\sin x^4$.

(2) $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2+\cos^2 x}$.

(3) $f'(x)=2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$.

(4) 记 $g(x)=\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin t^2\,dt\right)dy\right)$，$\varphi(x)=\sin\left(\int_0^x(\sin t^2)\,dt\right)$. 则

$f(x)=\sin[g(x)]$，$g(x)=\int_0^x\varphi(y)\,dy$. 于是 $f'(x)=\cos[g(x)]\cdot g'(x)=$

$\cos[g(x)]\cdot\varphi(x)=\cos\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^y\sin t^2\,dt\right)dy\right)\cdot\sin\left(\int_0^x\sin t^2\,dt\right)$. #

12. Sol. (1) $y=1+\sin(\sin t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非负，且在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内大于0，故 $[f(x)]\big|_{x=0}=0$

$f(x)=\int_0^x(1+\sin(\sin t))\,dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于0；而在 $(-\infty,0)$ 上恒小于0.

故 $f(x_0)=0\Leftrightarrow\overset{x_0}{\boxed{f(0)}}=0$. 因此 $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{[f'(x)]\big|_{x=0}}=\dfrac{1}{[1+\sin(\sin x)]\big|_{x=0}}=1$.

(2) 与(1)的分析类似，可得 $y_0=f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=1$. 因此 $(f^{-1})'(0)=$

$\dfrac{1}{[f'(x)]\big|_{x=1}}=\dfrac{1}{(e^{-x^2})\big|_{x=1}}=e$. #

13. Sol. $F(x)=\int_0^x xf(t)\,dt=x\int_0^x f(t)\,dt$，故 $F'(x)=\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)$. #

14. 习题课已讲 (e.g 6)

15. Sol. (1) 原式 $=2$

(3) 原式 $=2\ln 2-1$.

(2) 原式 $=\frac{1}{a+1}$.

(4) 原式 $=\int_2^3 \frac{1}{(2x-1)(x+2)}dx = \frac{1}{5}\int_2^3 [(x-\frac{1}{2})^{-1}-\frac{1}{x+2}]dx = \frac{1}{5}[\ln(x-\frac{1}{2})]\Big|_2^3$

$-\frac{1}{5}[\ln(x+2)]\Big|_2^3 = \frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$.

16. Sol. (1) 当 $-1\le x<0$ 时, $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^x (-1)dt = -x-1$.

(2) 当 $x=0$ 时, $F(x)=\int_{-1}^0 f(t)dt = \int_{-1}^0 (-1)dt = -1$.

(3) 当 $x\in(0,1]$ 时, $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = x-1$.

综上所述, $F(x)=\begin{cases} -x-1, & -1\le x<0 \\ -1, & x=0 \\ x-1, & 0<x\le 1 \end{cases} = |x|-1,\ x\in[-1,1]$.

由 $g(x)=|x|$ 的可微性可知 $F(x)$ 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 内可微, 在 $x=0$ 处不可微. #

18. Sol. (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\,dt}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(\tan^2 x)(\tan x)'}{3x^2} =$ #

$\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2\cos^2 x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{3}$. #

19. Sol. (1) 由积分中值定理, $\exists\, \xi_n \in (a,b)$ s.t. $\int_a^b e^{-nx^2}dx =$

$e^{-n\xi^2}(b-a) < e^{-na^2}(b-a)$, 而 $e^{-na^2}(b-a)\to 0$, 由夹逼准则知原式 $=0$.

(2) Note：根据提示，此处不能直接使用积分中值定理，~~若~~否则可能出现类似 $\xi_n^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 的情形；亦即可能有 $\xi_n\to 1$. 为此，我们进行

（大部分用积分中值定理趋近于1，一小部分由区间长度控制）

分段讨论.（Ref：《学习指导》Page 171, e.g 142(3)）

$\forall \xi\in(0,1)$，由于在 $[1-\xi,1]$ 上 $0\leq\frac{x^n}{1+x}\leq 1$，故 $0\leq\int_{1-\xi}^{1}\frac{x^n}{1+x}dx\leq\int_{1-\xi}^{1}1dx=\xi$

而在 $[0,1-\xi]$ 上，$0\leq\frac{x^n}{1+x}\leq(1-\xi)^n$，故 $0\leq\int_0^{1-\xi}\frac{x^n}{1+x}dx\leq(1-\xi)^{n+1}$.

由于 $0<1-\xi<1$，故 $(1-\xi)^{n+1}\to 0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1-\xi}\frac{x^n}{1+x}dx=0$.

再由极限定义，对上述给定 ξ，$\exists N(\xi)\in\mathbb{N}$ s.t. $n>N$ 时 $\int_0^{1-\xi}\frac{x^n}{1+x}dx<\xi$.

故当 $n>N$ 时 $0\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^{1-\xi}\frac{x^n}{1+x}dx+\int_{1-\xi}^{1}\frac{x^n}{1+x}dx<\xi+\xi=2\xi$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+n}dx=0$.

另解：① $\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leq\int_0^1 x^n dx$

② （推广积分中值定理）$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx$

(3) 由积分中值定理，$\exists\xi_n\in(n,n+a)$ s.t. $\int_n^{n+a}\frac{\sin x}{x}dx=a\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}$.

又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，故由 Heine Thm，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a}\frac{\sin x}{x}dx=a\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}$

$\xrightarrow{n\to\infty\Rightarrow\xi_n\to+\infty} 0$ #

有误，订正于反面.

21. Sol. $f(x+T)=f(x)$，令 $u=x+T$ 换元即得结果. #

22. Sol. (1) 参考习题课 e.g 8；结果为4.

(3) $f(x)=\cos x$ 是偶函数，而对 $g(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$，$g(x)+g(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln\frac{1-x}{1+x}=0$

$\Rightarrow g(x)$ 是奇函数，故 $f(x)g(x)$ 奇 $\xRightarrow[\text{可直接使用}]{(Ex20)}\int_{-1}^{1}\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=0$.

21. 证: $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \xlongequal{x+T=u} \int_a^0 f(x)dx$

$+\int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(u-T)du \xlongequal{(周期为T)} \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(u)du$

$= \int_0^T f(x)dx.$ #

(5) 令 $e^{-x}=t$，则 $x=-\ln t$，$dx=-\frac{1}{t}dt$. 故原式=

$$\int_1^{\frac12}\sqrt{1-t^2}\cdot\left(-\frac1t\right)dt=\int_{\frac12}^{1}\frac1t\sqrt{1-t^2}\,dt\xlongequal{t=\sin\theta}\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi2}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta=$$

$$\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi2}\csc\theta\, d\theta-\int_{\frac\pi6}^{\frac\pi2}\sin\theta\, d\theta=[\ln|\csc\theta-\cot\theta|]\Big|_{\frac\pi6}^{\frac\pi2}-\frac{\sqrt3}{2}=\ln(2+\sqrt3)-\frac{\sqrt3}{2}.$$

Note：本题解答过程中出现两次换元，可能出现积分上下限错误.

因此，以第一处换元为例，说明换元的"四步走".

换元分为四步：①确定换元表达式；②确定换元后积分上下限,代入；③确定积分变量间的变换并代入；④将①中表达式代入原被积函数.

令 $\overset{①}{e^{-x}}=t$，则 $dx=\boxed{-\frac1t}dt$. 故（$x=0$ 时 $t=1$；$x=\ln 2$ 时 $t=\frac12$. 这部分在草稿上写好，写在正式解答亦可）

$$\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\ln 2}}\boxed{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,\boxed{dx}=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{\frac12}}\sqrt{1-t^2}\;\boxed{\boxed{-\frac1t}dt}$$

② ③ ④

第二处换元与此处略有差异，但"四步走"仍可套用.

(7) "反对幂、指、三"（最后两字可互换），具体解释见附图.

原式 $=(x^3e^x)\Big|_0^1-\int_0^1 3x^2e^x dx=e-3\int_0^1 x^2e^x dx=e-3\cdot$

$[(x^2e^x)\Big|_0^1-2\int_0^1 xe^x dx]=e-3\cdot[e-2\int_0^1 xe^x dx]=$

$e-3\{e-2\cdot[(x-1)e^x]\Big|_0^1\}=e-3(e-2)=6-2e.$

(11)(12)均可直接利用Wallis公式(点火公式).

$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 所围面积

(11) $\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx \xlongequal{x=\sin\theta} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,d\theta\right] =$

$2\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$.

(12) 原式 $= 4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi$. #

23. Sol. 引理: $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$;

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x)+f(a+b-x)]\,dx$. (Ref: 《学习指导》P195 e.g 164

Pf: 令 $x=a+b-t$, 则 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(a+b-t)\,d(a+b-t) = \int_a^b f(a+b-t)\,dt$

令 $F(x)=f(x)+f(a+b-x)$, 则 $F(a+b-x)=F(x) \Rightarrow F(x)$ 以 $x=\frac{a+b}{2}$ 为对称轴; 再由于 $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\,dx$, 故 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x)+f(a+b-x)]\,dx$.

由引理, $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{xf(\sin x)+(\pi-x)f[\sin(\pi-x)]\}\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [xf(\sin x)+\pi f(\sin x) - xf(\sin x)]\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$.

因此 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}\,dx = -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} \xlongequal{\cos x=t}$

$\pi\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4}$. #

Ex 5.3

1\. Sol.

(1) 由 Ex 4.1 3(2)，$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}+C$.

故由公式 $S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$，得 $S_1=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+4x^2}\,dx=2\cdot$

$$\int_0^a\sqrt{1+4x^2}\,dx\overset{t=2x}{=\!=}\int_0^{2a}\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\left[\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+x\sqrt{x^2+1}\right]\Big|_0^{2a}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\ln(\sqrt{4a^2+1}+2a)+2a\cdot\sqrt{4a^2+1}\right].$$

(2) 由公式 $S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$，得 $S_2=a\int_0^{2\pi}\sqrt{[(\cos^3t)']^2+[(\sin^3t)']^2}\,dt$

$$\overset{(对称性)}{=\!=}4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\sin^2t\cos^2t}\,dt=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=6a.$$

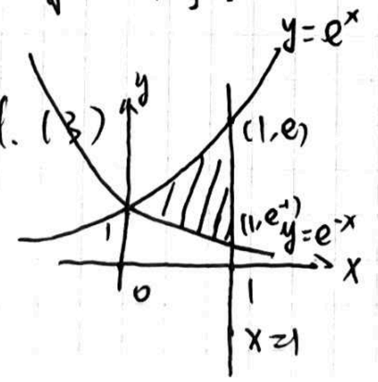
(3) $r=a\theta$，$r'=a$. 故由公式 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$，得

$$S_3=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta=\frac{a}{2}\cdot\left[\ln(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi)\right.$$

$$\left.+2\pi\cdot\sqrt{4\pi^2+1}\right].$$

\#

2\. Sol. (3)



故 $S_3=\int_0^1(e^x-e^{-x})\,dx=$

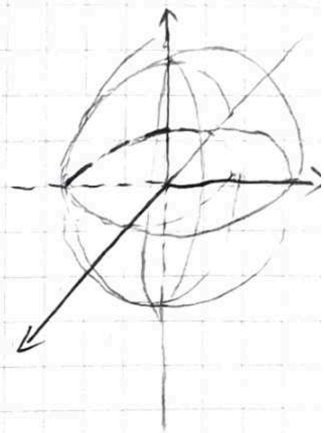
$$(e^x)\Big|_0^1-(e^{-x})\Big|_1^0=e+e^{-1}-2.$$

3. Sol. (3) 由公式 $V=\pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)|\varphi'(t)|dt$，得

$V_3=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\cdot(1-\cos t)dt=\pi\cdot\left(\int_0^{2\pi}dt-3\int_0^{2\pi}\cos t\,dt+\right.$

$\left.3\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt-\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt\right)=\pi\cdot(2\pi-0+3\pi-0)=5\pi^2.$ #

4. Sol. 球缺：(Ref: 百度百科 - 球缺) 一个球被平面截下一部分.



因此，它可被视作圆弧 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in(R-h,R)$，

$\underbrace{x=R-h}_{}$ 高为h 和x轴围成的曲边梯形绕x轴一圈得到的

旋转体. 故 $V=\int_{R-h}^{R}\pi y^2dx=\pi\int_{R-h}^{R}(R^2-x^2)dx$

$=\pi R^2h-\frac{\pi}{3}(x^3)\Big|_{(R-h)}^{R}=\pi R^2h-\frac{\pi}{3}(3R^2h-3Rh^2+h^3)=\pi Rh^2-\frac{\pi}{3}h^3$ #

5. Sol. (4) 由公式 $S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$，得 $S=$

$2\pi\int_0^{\pi}a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2\cdot a^2\sin^2\theta}\,d\theta=2\pi\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot$

$\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=2\sqrt{2}\pi a^2\int_\pi^0(1+\cos\theta)\sqrt{1+\cos\theta}\,d(\cos\theta)\xlongequal{\cos\theta=t}2\sqrt{2}\pi a^2\cdot$

$\int_{-1}^{1}(1+t)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{4\sqrt{2}}{5}\pi a^2\left[(1+t)^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_{-1}^{1}=\frac{32}{5}\pi a^2.$ #

Ex 5 | Sol. (1) 由积化和差公式，$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]$，故 2π 是 $\sin mx\cdot\cos nx$ 的周期. 因此 $\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx$. 又由于 $y=\sin mx$ 是奇函数，$y=\cos nx$ 是偶函数，

故 $y=\sin mx\cdot\cos nx$ 是奇函数 $\Rightarrow$ 原式 $=0$.

(2) 仿照 (1) 证明，$\sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]$，以 2π 为周期. 故 $\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]\,dx$

若 $m=n$，则原式 $=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1-\cos 2mx]=\pi-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin 2mx}{2m}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi$；

若 $m\neq n$，则原式 $=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}-\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}\right\}=\frac{1}{2}\cdot(0-0)=0$.

同理可得 $\int_0^{2\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]\,dx$.

若 $m=n$，则原式 $=\pi+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2mx}{2m}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi$；若 $m\neq n$，则原式 $=$

$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}+\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}\right\}=0$.

综上，$\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=\int_0^{2\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=\begin{cases}\pi, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$. #

18. Sol. 见 11.21, lect 32, Page 3~5. #

3. 分部积分法

(1) 思想.

$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$，这个方法主要适用于求$\int u\mathrm{d}v$ 比较困难，而$\int v\mathrm{d}u$ 比较容易的情形.

(2) 方法.

①u,v **的选取原则.**

反三角函数.

反　对　幂　指（三）　三（指）

相对位置在左边的宜选作 u，用来求导；相对位置在右边的宜选作 v，用来积分. 即

a. 被积函数为 $P_n(x)e^{kx}$，$P_n(x)\sin ax$，$P_n(x)\cos ax$ 等形式时，一般来说选取 $u = P_n(x)$；

b. 被积函数为 $e^{ax}\sin bx$，$e^{ax}\cos bx$ 等形式时，u 可以取其中两因子中的任意一个；

c. 被积函数为 $P_n(x)\ln x$，$P_n(x)\arcsin x$，$P_n(x)\arctan x$ 等形式时，一般分别选取

$$u = \ln x, u = \arcsin x, u = \arctan x.$$

② **推广公式(表格法).**

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x.$$

d. 给抽象函数——根据题目决定 u,v.

【注】证　在公式$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$中以$v^{(n)}$代替$v$，则

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}[v^{(n)}] = uv^{(n)} - \int v^{(n)}\mathrm{d}u = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}\mathrm{d}x.$$

同理可得

$$\int u'v^{(n)}\mathrm{d}x = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x,$$

$$\int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}\mathrm{d}x,$$

……

$$\int u^{(n)}v'\mathrm{d}x = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x.$$

联立以上式子，并保留第一个和最后一个积分，便可得到**分部积分法的推广公式**：

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x.$$

事实上，可写成如下表格

e.g a.

u的各阶导数	u	u'	u''	u'''	…	$u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	$v^{(n-2)}$	…	v

⊕ ⊖ ⊕ ⊖ $(-1)^{n+1}$ 作积分.

计算方法：以u作起点左上、右下错位相乘，各项符号“+”“−”相间，最后一项为$(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$.

对于
$$\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x, \int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x, \int P_n(x)\cos bx\mathrm{d}x$$
三种积分，其中$P_n(x)$是x的n(n为正整数)次多项式，令$u = P_n(x)$，则$u^{(n+1)} = 0$，于是积分便可顺利算出.

b. 对于$\int e^{ax}\sin bx\,dx$形式（$\int e^{ax}\cos bx\,dx$同理），
u求导两次即可（u无论是e^{ax}还是$\sin bx$均可）

比如，求不定积分$\int(x^3+2x+6)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. 则

x^3+2x+6	$3x^2+2$	$6x$	6	0
e^{2x} (+)	$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ (−)	$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$ (+)	$\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}$ (−)	$\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}$

利用上述表格，可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x^3+2x+6)\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right) - (3x^2+2)\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right) + \\ &\quad 6x\left(\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}\right) - 6\left(\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}\right) + \int 0\cdot\left(\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{17}{8}\right)\mathrm{e}^{2x} + C.\end{aligned}$$