复变 A　1-4 周习题部分答案

一、1-2 周

第三周周二（即9.13）须交的作业：
1. (9.1) 第一章，1 (3) (4)，2 (1) (2)，3，4，5 (2)，7 (2)
2. (9.6) 第一章，9，14 (1) (2)，15
3. (9.8) 第一章，16 (2) (3) (4) (5)，17 (2) (5) (7) (10)，18，19 (1) (2)，20。第二章，1 (3) (5)

开始之前，值得注意的事情：

(1)　描述一个角度时，谨慎使用 arc 函数，因其有自己的值域，可能与想描述的角度差了π之类。同样的，不要人为定义 arc 函数的值域。

(2)　注意区分 arg 与 Arg。arg一般取$(-\pi,\pi]$，而Arg则是arg转上整数圈。

(3)　一个数列趋于 0 对其幅角不再有要求。

1　(4) $z = 1-\cos\theta + i\sin\theta.$

首先注意到，z=0 时幅角是没有意义的，题述 z 恰好有零点为$\theta = 2k\pi$，所以一定要单独进行说明。

其余情况（或者描述为：当$\theta=\theta_0+2k\pi,\theta_0\in(0,2\pi)$时），对 z 进行如下变换，即$z = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)i$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)i\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)i\right)$$

然后变为指数式即可。

5

$$(2)\ \sum_{k=1}^{n}\sin k\theta = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta},\ 0<\theta<\pi.$$

利用$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})(1-e^{-i\theta})}{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})} = \frac{e^{i\theta}-1+e^{in\theta}-e^{i(n+1)\theta}}{2-2cos\theta}$

两边取虚部，使用适当的三角公式（和差化积，不能再多说了）即可。

16

过程没什么好讲的，要注意：分母不为 0；α的特殊值带来特殊情况

第二章

1

1. 函数 $w = \frac{1}{z}$ 把 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线？

(1) $x = 1$；　(2) $y = 0$；　(3) $y = x$；

(4) $x^2 + y^2 = 4$；　(5) $(x-1)^2 + y^2 = 5$.

即$|z-1| = \sqrt{5} \to \left|\frac{1}{w} - 1\right| = \sqrt{5} \to \left|\frac{w-1}{w}\right| = \sqrt{5}$, 参照 16 题, 这是一个圆。

现在进行一些必要的说明来确定这个圆：

(1) 对于满足$\left|\frac{w-1}{w}\right| = \sqrt{5}$的$w$,其共轭也满足该方程。这说明这个圆关于实轴对称，故实轴必定是其直径。

(2) 令w为实数，求出其在直径（实轴）上的两个点，从而确定半径、圆心。

(3) $|z-1| = \sqrt{5}$中, z的幅角连续取遍$(-\pi, \pi]$, 则 w 的幅角也连续取遍$(-\pi, \pi]$。（对于π，仍变为π）则 w 平面上，这确实转满了一个圆。

二、第 3 周

第四周周二（即9.20）须交的作业:

1. (9.13) P47:2，3，4 (1)　(2)

2. (9.15) P47:5 (1)　(2)，6 (3)，7，8 (3)　(5)，10，11 (1)，12

开始之前，值得注意的事情：

(1) 如果 C-R 方程的解为一个点，这个点是可导的，但不会是解析的。

(2) 对于 C-R 方程中分母为 0 的点，审视其是否满足 u、v 可导。

5

$$(2)\ f(z)=\begin{cases}|z|z, & |z|<1\\ z^2, & |z|\geqslant 1.\end{cases}$$

一些同学如此证明：由于$|z|$不解析而z解析，则相乘必定不解析。这是田老师上课讲的，不过有些问题。例如，我们可以证明：

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|\Delta z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}|\Delta z|=0$$

通法仍然是 C-R 方程。

8

8. 证明区域 D 内满足下列条件之一的解析函数必为常数：
(1) $f'(z)=0$； (2) $\overline{f(z)}$ 解析； (3) $\mathrm{Re}f(z)=$ 常数；
(4) $\mathrm{Im}f(z)=$ 常数； (5) $|f(z)|=$ 常数；
(6) $\arg f(z)=$ 常数.

田老师讲义上有，这里主要做一点说明。当我们证明了$f'(z)=0$后，如何才能说明 f 就是常数？这并不是一件很显然的事情，因为复变函数中没有学习过对应的中值定理来取出反例。

10

10. 证明在极坐标下，C-R 方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

并验证函数 $f(z)=z^n$ 及 $\ln z=\ln r+\mathrm{i}\theta, z=re^{\mathrm{i}\theta}, -\pi<\theta\leqslant\pi$，满足 C-R 方程.

举一例即可：$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}sin\theta$

三、第 4 周

第五周周二（即9.27）须交的作业:
1.（9.20）P48 16（1）（3），18（1），19（1），21，22，23 [Ln(-1)，ln(-2+3i)，1^√2，2^i，cos(2+i)，cot(π/4-iln2)，coth(2+i)，Arcsini]
2.（9.22）P67 1（1）（3），2（1）（3），4，5，6（1）（2）

开始之前，值得注意的事情:

(1) 不同于数学分析，复变函数中，一个趋于正无穷的数列被认为是有极限的，其极限为无穷远点。想证明无极限需要取不同路径。

(2) $\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}}{2}$*，很多同学忘记乘 i 了。*

(3) 作为最终结果，尽量让分母中不出现 i，例如: $\frac{1}{-i}=i$

(4) $1+\sqrt{2}$*求模得*$\sqrt{3}$*的同学请去反省*

(5) 注意区分 ln、Ln。满足$e^{w}=z$*的复数*w*称为*z*的对数，记作*$w=Lnz$*。*

$Lnz=ln|z|+iArgz$*，常取*$lnz=ln|z|+iargz$*作为*Lnz*的主值。其中*$ln|z|$*即正常的实对数。*

其他没什么特别难的。讲最后两个求值

$$\coth(2+i)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}[e^{2}(cos1+isin1)+e^{-2}(cos1-isin1)]}{\frac{1}{2}[e^{2}(cos1+isin1)-e^{-2}(cos1-isin1)]}$$

$$=\frac{cosh2cos1+isinh2sin1}{sinh2cos1+icosh2sin1}$$

$$=\frac{(cosh2cos1+isinh2sin1)(sinh2cos1-icosh2sin1)}{(sinh2cos1+icosh2sin1)(sinh2cos1-icosh2sin1)}$$

$$=\frac{sinh2cosh2cos^{2}1+sinh2cosh2sin^{2}1+i(sinh^{2}2sin1cos1-cosh^{2}2sin1cos1)}{sinh^{2}2cos^{2}1+cosh^{2}2sin^{2}1}$$

$$= \frac{sinh2cosh2 - isin1cos1}{sinh^2 2(1 - sin^2 1) + (1 + sinh^2 2)sin^2 1}$$

$$= \frac{sinh4 - isin2}{2(sinh^2 2 + sin^2 1)}$$

$Arcsin(i) = -iLn(-1 + \sqrt{2})$ （书 P46）

但要注意的是，书上说明了，$\sqrt{\quad}$是一个双值的运算符号，而$-1 \pm \sqrt{2}$的幅角是不同的，所以在作答时必须将正负情况全部讨论。