Hw16.

Chap8.

25. 解：设A.B两种药的止痛时间为 t_A, t_B.　　方差相同且未知的成组比较.

$t_A \sim N(u_1, \sigma^2)$　$t_B \sim N(u_2, \sigma^2)$.　　$H_0: u_1 - u_2 \geq 0 \leftrightarrow H_1: u_1 - u_2 < 0$.

$\overline{t_A} = 32.8$　$\overline{t_B} = 46.3$.　　$S_A^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(t_{Ai} - \overline{t_A})^2$　　$S_B^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(t_{Bi} - \overline{t_B})^2$

$S_A^2 = 379.9556$.　$S_B^2 = 192.9$

$$S_T^2 = \frac{1}{10+10-2}\left[(10-1)S_A^2 + (10-1)S_B^2\right] = 286.4278$$

$$T = \frac{\overline{t_A} - \overline{t_B}}{S_T\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} = \frac{\sqrt{5}(32.8-46.3)}{\sqrt{286.4278}} \approx -1.7837. < -t_{18}(0.05). = -1.7341$$

∴ 在 $\alpha = 0.05$ 水平下 拒绝原假设

∴ $u_1 < u_2$.　故 A止痛药效果不如B止痛药.

26. 解：设A、B两种鞋的磨损程度为X、Y.　　成对比较，σ^2未知.

记 $Z_i = X_i - Y_i$.　　$Z_i \sim N(u, \sigma^2)$

$H_0: u = 0 \leftrightarrow H_1: u \neq 0$.

Z: −0.8　−0.6　−0.3　0.1　−1.1　0.2　−0.3　−0.5　−0.5　−0.3.

$\overline{Z} = -0.41$.　　　$S_Z^2 \approx 0.1499$

$$T = \frac{\sqrt{10}(-0.41-0)}{\sqrt{0.1499}} \approx -3.349 \qquad t_9\left(\frac{0.05}{2}\right) \approx 2.2622.$$

∴ $|T| > t_9\left(\frac{0.05}{2}\right)$.　拒绝原假设

∴ $u \neq 0$. 不可以认为这两种材料耐磨性无显著差异.　　26题另一种解法见下页

28. 解：　设训练前后体重分别为X、Y.

$X \sim N(u_1, \sigma_1^2)$　　　$Y \sim N(u_2, \sigma_2^2)$

$Z_i = X_i - Y_i \sim N(u_1 - u_2, \sigma^2)$

X	104.5	94	104.7	96.4	91.6	90.9	92	99.9	10[illegible]
Y	94.2	86.6	97.5	91.7	82.6	83.8	81.3	92.2	10[illegible]
Z	10.3	7.4	7.2	4.7	9	7.1	10.7	7.7	8.7

法1. H_0: 宣传可信 / $u \geq 8 \leftrightarrow H_1: u < 8$.

$\overline{Z} \approx 8.0889$　　　$S_Z^2 \approx 3.3486$

$$T = \frac{\sqrt{9}(\overline{Z}-8)}{S_Z} \approx 0.1457 > -t_8(0.05) \approx -1.8595.$$

∴ 不能拒绝 H_0. 认为宣传可信.

法2. H_0: 宣传不可信 / $u \leq 8 \leftrightarrow H_1: u > 8$.

$T \approx 0.1457 < t_8(0.05) \approx 1.8595$.

∴ 不能拒绝 H_0. 认为宣传不可信.

注. 结论并不矛盾. 因为两种假设 H_0 不同. 而均未拒绝 H_0.

22. 装配一个部件可以采用不同的方法, 现在关心的是哪一种方法的效率更高, 现在从两种不同的装配方法中各抽取12种产品, 记录各自的装配时间(单位: min)如下

甲方法/min	30	34	34	35	34	28	34	26	31	31	38	26
乙方法/min	26	32	22	26	31	28	30	22	31	26	32	29

假设两总体为正态总体, 且方差相等, 问这两种方法的装配时间有无显著不同($\alpha = 0.05$)?

解： 成组比较问题

设甲方法的装配时间$X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, 乙方法的装配时间$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$。

原假设和备择假设为: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

已知数据: $m = n = 12$, $\bar{x} = 31.75$, $\bar{y} = 27.9167$, $s_1 = 3.7447$, $s_2 = 3.5537$。

在H_0成立时, 检验统计量$T = \sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}\dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_T} \sim t_{m+n-2}$, 其中$S_T = \sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}}$. 水平$\alpha = 0.05$的检验拒绝域为$|T| > t_{m+n-2}(\alpha/2)$.

计算得: $t = 2.5722 > 2.0739 = t_{22}(0.025)$, 所以拒绝$H_0$.

在显著性水平$\alpha = 0.05$下认为这两种方法的装配时间有显著不同.

26.为了考察A,B两种制鞋材料的耐磨性,用它们制作了10双鞋,其中每双鞋的两只鞋分别用A,B两种材料制作(左、右两只鞋随机地采用A或B）.10个男孩试穿这10双鞋之后的磨损情况如下（数字代表磨损程度);

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	13.2	8.2	10.9	14.3	10.7	6.6	9.5	10.8	8.8	13.3
B	14.0	8.8	11.2	14.2	11.8	6.4	9.8	11.3	9.3	13.6

问是否可以认为这两种材料的耐磨性无显著差异(α=0.05)?

解：

思路一：成对比较问题

记第i个男孩试穿的A,B鞋磨损程度之差为z_i, 设磨损程度之差服从正态分布$N(\mu_z, \sigma^2)$, 由题意, 原假设和备择假设为

$H_0 : \mu_z = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu_z \neq 0.$

检验统计量为$T = \dfrac{\sqrt{n}\bar{Z}}{S}$, 检验拒绝域为$|T| > t_{n-1}(\alpha/2)$, 查表有$t_9(0.025) = 2.26$.

由表计算得$\bar{z} = -0.41$, $s = 0.3872$, 代入检验统计量$|t| = 3.3489 > 2.26$, 故拒绝H_0, 即有95%的把握认为两种材料耐磨性有差异.

思路二：符号检验问题

若A, B材料无差异，则在n个试验单元中Z_i取"+"和"-"的概率都为1/2, 故检验问题转化为$n_+ \sim b(n, p)$, $0 \leq p \leq 1$, 检验问题为

$H_0 : p = \frac{1}{2} \leftrightarrow H_1 : p \neq \frac{1}{2}$.

拒绝域$D = \{n_+ \geq c, n_+ \leq d\}$, 查表有 $\sum_{k=0}^{1}\begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix}(\frac{1}{2})^{10} = 0.011$, $\sum_{k=0}^{2}\begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix}(\frac{1}{2})^{10} = 0.055$

故水平 $\alpha = 0.05$ 的符号检验的拒绝域为 $D = \{n_+ \leq 1, n_+ \geq 9\}$, 样本中的差值取正数的个数为$n_+ = 2$, 不能拒绝$H_0$, 即两种材料的耐磨性无显著性差异.

31. 解：设甲、乙公司工资为 X、Y

$X \sim N(u_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(u_2, \sigma_2^2)$

$\bar{X} = 5407.143$ $\bar{Y} = 7281.25.$ $S_X^2 = 3236190$ $S_Y^2 = 4525670$

① 检验总体方差是否相等：

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \approx 0.7151$ $F_{6,7}(0.025) \approx 5.12$ $F_{6,7}(0.975) = \frac{1}{F_{7,6}(0.025)} = \frac{1}{5.7} \approx 0.1754$

$F_{6,7}(0.975) < F < F_{6,7}(0.025)$

∴ 不能拒绝 H_0.

∴ 认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

② 检验甲平均工资是否低于乙. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. 成组比较. $H_0: u_1 \geq u_2 \leftrightarrow H_1: u_1 < u_2$.

$S_T = \sqrt{\frac{(7-1)S_X^2 + (8-1)S_Y^2}{7+8-2}} = \sqrt{\frac{6S_X^2 + 7S_Y^2}{13}} \approx 1982.56.$

$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_T\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}} \approx -1.8265 < -t_{13}(0.05) \approx -1.7709$

∴ 拒绝 H_0.

∴ 可认为甲公司平均工资低于乙.

Chap 9.

1. 解：H_0：吸烟与患慢性气管炎独立.

	不吸烟.	吸烟	
无气管炎	121	162	283
患气管炎	13	43	56
	134	205	339

$Z = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1\cdot}n_{2\cdot}n_{\cdot 1}n_{\cdot 2}}$

$Z = \frac{339(121 \times 43 - 162 \times 13)^2}{283 \times 56 \times 134 \times 205}$

$\approx 7.4688.$

$\chi^2_{(a-1)(b-1)} = \chi^2_1$ $\chi^2_1(0.05) = 3.841$ ∴ $Z > \chi^2_1(0.05)$ 拒绝 H_0.

∴ 吸烟与患慢性气管炎不独立. 吸烟者患慢性气管炎比例较高.

3. 解：$F: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.2 & 0.15 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$ $n = \sum n_i = 600.$

H_0：各类鱼数量比例较半年前未改变 / X(属于哪一类鱼) ~ F.

$Z = \sum_{i=1}^{4} \frac{(np_i - n_i)^2}{np_i} = \frac{(120-132)^2}{120} + \frac{(90-100)^2}{90} + \frac{(240-200)^2}{240} + \frac{(150-168)^2}{150} \approx 11.1378.$

$\chi^2_{4-1}(0.05) = 7.815$ ∴ $Z > \chi^2_3(0.05)$ 拒绝 H_0.

∴ 认为各类鱼比例较半年前有变化.

5. 解：(1) H_0：男性与女性选择看电视为最普遍活动的比率相同.

(2) 男性：$\frac{248}{800} = 31\%$　　女性：$\frac{156}{600} = 26\%$

(3)

	选看电视	未选～	
男	248	552	800
女	156	444	600
	404	996	1400

$\therefore Z = \frac{1400(248\times444-552\times156)^2}{800\times600\times404\times996} \approx 4.1751 > \chi_1^2(0.05) = 3.841.$

p值 $= P(\chi_1^2 > 4.1751) \approx 0.041 < 0.05$ （用软件计算，考试能给出计算p值）.

$\therefore$ 拒绝 H_0. 男性和女性选择看电视为最普遍活动的比率有差异.

(4) 假设调查的所有人之间相互独立. 男性选择看电视：$X \sim B(1,p_1)$　样本量 $n_1 = 800$
女性 ……：$Y \sim B(1,p_2)$.　…… $n_2 = 600$

题目中比率之差应为概率之差 p_1-p_2.

利用大样本方法.

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(p_1-p_2)}{\sqrt{Var(\bar{X}-\bar{Y})}} \xrightarrow{d} N(0,1). \quad as\ n\to\infty.$$

$$Var(\bar{X}-\bar{Y}) = Var\bar{X}+Var\bar{Y} = \frac{VarX}{n_1}+\frac{VarY}{n_2} = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

$p_1 \cdot p_2$ 的MLE分别为 $\hat{p}_1 = \frac{n_{11}}{n_{1\cdot}} = \frac{248}{800} = 0.31$. $\hat{p}_2 = \frac{n_{21}}{n_{2\cdot}} = \frac{156}{600} = 0.26$.

$$\frac{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}{\sqrt{Var(\bar{X}-\bar{Y})}} \xrightarrow{P} 1 \qquad \therefore \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

$$T = \frac{0.31-0.26-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{0.31(1-0.31)}{800}+\frac{0.26(1-0.26)}{600}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \qquad 令\ -u_{\frac{\alpha}{2}} \le T \le u_{\frac{\alpha}{2}} \qquad u_{0.025} = 1.96.$$

$\therefore$ 解得 $0.00247 \le p_1-p_2 \le 0.0975$. $\therefore$ 95%置信区间为 $[0.00247, 0.0975]$

7. 解：$H_0: P(AB) = P(Ab) = P(aB) = P(ab) = \frac{1}{4}$. （孟德尔第二定律成立）.

$np_i = 2839 \times \frac{1}{4}$.

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \frac{(np_i-n_i)^2}{np_i} = 1764.682 \gg \chi_3^2(0.05)$$

$\therefore$ 拒绝 H_0. 孟德尔第二定律不成立.

10. 解. 齐一性检验.

H_0：各个工厂产品质量一致.

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{(n_{ij}-\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n})^2}{\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}} \approx 15.407 > \chi^2_{2\times2}(0.05) = 9.488$$

	甲	乙	丙	
一	58	38	30	126
二	40	44	35	119
三	11	18	26	55
	109	100	91	300

$\therefore$ 拒绝 H_0. 各工厂产品质量不一致.

从各工厂产品不同等级的比例能看出甲厂较优，丙厂较劣.

一等品：甲：0.532 > 乙：0.38 > 丙：0.33

二等品 甲：0.367 < 乙：0.44 > 丙：0.385

三等品 甲：0.1 < 乙：0.18 < 丙：0.286

2. 解： H_0：男性和女性对三类啤酒偏好无差异.

	淡	普通	黑	
男	49 (60)	31	100	180
女	51	20	49	120
	100	51	149	300

$$z=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{\left(n_{ij}-\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}}=8.1968>\chi^2_{2.1}(0.05)=5.991$$

∴ 拒绝 H_0. 偏好有显著差异.