Homework 7

2022 年 11 月 1 日

3. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi((x-4)/2)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 求 $E(X)$.

Sol.

令 $\phi(x)$ 表示标准正态密度函数, 则 X 的密度函数为

$$f(x) = 0.5\phi(x) + 0.25\phi((x-4)/2).$$

注意到对标准正态随机变量, 其均值为 0, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)dx = 0$, 因此

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
&= 0.5\int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)dx + 0.25\int_{-\infty}^{\infty} x\phi((x-4)/2)dx \\
&= 0.5\int_{-\infty}^{\infty} (2x+4)\phi(x)dx = 2.
\end{aligned}$$

10. 设随机变量 X 的概率质量函数为 $P(X=k) = C/k!, k = 0, 1, 2, \cdots$, 求 $E(X^2)$.

Sol.

为求 $E(X^2)$, 先求 $E(X^2-X)$ 和 $E(X)$. 由 $\sum_{k=0}^{\infty} C/k! = 1$ 知

$$\begin{aligned} E(X^2-X) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C/k! \\ &= C\sum_{k=2}^{\infty} 1/(k-2)! \\ &= C\sum_{k=0}^{\infty} 1/k! = 1. \\ E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} C/(k-1)! = 1. \end{aligned}$$

因此 $E(X^2) = 2$. 实际上, 由泊松分布的概率质量函数知 X 服从参数为 1 的泊松分布, 从而 $C = e^{-1}$ 且 $E(X) = 1$.

12. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布.

(1) 对任意常数 $c > 0$, 证明 cX 服从参数为 λ/c 的指数分布;

(2) 对任意正整数 $n \geq 1$, 计算 $E(X^n)$.

Sol.

(1) 此题用密度变换公式或者用分布函数的定义均可证明, 略.

(2) 由 (1), $Y = \lambda X$ 服从参数为 1 的指数分布, 由分部积分

$$\begin{aligned} E(Y^n) &= \int_0^{\infty} y^n e^{-y} dy \\ &= n\int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy \\ &= \cdots = n!\int_0^{\infty} e^{-y} dy = n!. \end{aligned}$$

所以 $E(X^n) = E((Y/\lambda)^n) = n!/\lambda^n$.

13. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = 2(x-1)$, $1 < x < 2$. 试求随机变量 $Y = e^X$ 和 $Z = 1/X$ 的数学期望.

Sol.

直接由书上 129 页性质 (3),

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_1^2 2(x-1)e^x dx = 2e; \\ E(Z) &= \int_1^2 2(x-1)/x dx = 2 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

17. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

试求 $E(\min\{|X|, 1\})$.

Sol.

$$\begin{aligned}
E(\min\{|X|, 1\}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \min\{|x|, 1\} f(x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} |x| f(x) dx + \int_{1}^{\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^{1} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2)|_0^1 + \frac{2}{\pi} \arctan x|_1^{\infty} \\
&= \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$