

Homework 14

2023 年 2 月 15 日

记 u_α 为正态分布的上 α 分位数, $t_n(\alpha)$, $F_{m,n}(\alpha)$, $\chi_n^2(\alpha)$ 分别为自由度为 n 的 t 分布, 自由度为 m, n 的 F 分布, 自由度为 n 的卡方分布的上 α 分位数. \bar{X} 为样本均值, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 为样本方差.

4. 随机从一批钉子中抽取9枚, 测得其长度(单位: cm)为

2.15, 2.13, 2.10, 2.14, 2.15, 2.16, 2.12, 2.11, 2.13.

假设钉子长度服从正态分布, 分别在下列两种情况下, 求出总体均值的90%置信区间:

(1) $\sigma = 0.01$; (2) σ 未知.

Sol.

(1) σ 已知, 枢轴变量

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

只与 μ 和 \mathbf{X} 有关, 因此一个 $1-\alpha=90\%$ 置信区间为 $[\bar{X} - u_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + u_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$, 代入数值, $\bar{X} = 2.132$, $u_{\alpha/2} = 1.65$, 置信区间为 $[2.127, 2.138]$.

(2) σ 未知, 枢轴变量

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1},$$

因此 $1-\alpha$ 置信区间为 $[\bar{X} - t_{n-1}(\alpha/2)S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{n-1}(\alpha/2)S/\sqrt{n}]$, 代入数值, $S = 0.020$, $t_8(0.05) = 1.86$, 置信区间为 $[2.120, 2.145]$.

8. 假设(0.4, 2.5, 1.8, 0.7)是来自总体 X 的简单随机样本. 已知 $Y = \ln X$ 服从正态 $N(\mu, 1)$.

(1) 求 X 的数学期望 $a = E(X)$;

(2) 求 μ 的95%和90%置信区间;

(3) 求 a 的95%和90%置信区间.

Sol.

(1) Y 的概率密度函数为 $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(y-\mu)^2}{2}\}$, 由密度变换公式, X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2}\} I(x > 0)$, 易得期望 $a = \exp(\mu + 1/2)$.

(2) $Y = \ln X$ 的样本为 $(-0.916, 0.916, 0.588, -0.357)$, $\bar{Y} = 0.0578$, $2(\bar{Y} - \mu) \sim N(0, 1)$, 因此 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $[\bar{Y} - u_{\alpha/2}/2, \bar{Y} + u_{\alpha/2}/2]$, $u_{0.025} = 1.96$, $u_{0.05} = 1.645$, μ 的95%置信区间为 $[-0.922, 1.038]$, 90%置信区间为 $[-0.765, 0.880]$.

(3) 设 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间 $[U, L]$, 则 a 的 $1-\alpha$ 的置信区间为 $[\exp(U+1/2), \exp(L+1/2)]$, 因此 a 的95%置信区间为 $[0.656, 4.654]$, 90%置信区间为 $[0.767, 3.976]$.

11. 一家企业更换了领导, 采取了新的经营策略. 随机选取公司11种商品, 更换经营策略前后一个季度的销量(单位:万元)如下, 假设销量服从正态分布:

前	69.3	38.0	131.4	123.1	127.3	57.7	95.7	89.4	93.8	102.0	73.3
后	72.5	33.5	132.1	129.8	121.2	54.0	104.6	92.6	119.4	84.7	85.1

(1) 求更换经营策略前平均销量的95%置信区间;

(2) 求更换经营策略后平均销量的95%置信区间;

(3) 求更换经营策略前后平均销量差异的95%置信区间.

Sol.

记 $\bar{X} = 91$ 和 $S_1^2 = 883.58$ 是之前的销量的样本均值和样本方差, $\bar{Y} = 93.59$ 和 $S_2^2 = 1011.89$ 是之后的样本均值和样本方差.

(1) 方差未知, $\alpha = 0.05$, $1 - \alpha$ 置信区间为 $[\bar{X} - S_1 t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}, \bar{X} + S_1 t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}]$, 代入数值得 $[71.03, 110.97]$.

(2) 方差未知, $1-\alpha$ 置信区间为 $[\bar{Y} - S_2 t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}, \bar{Y} + S_2 t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}]$, 代入数值为 $[72.22, 114.96]$.

(3) 记 $Z_i = X_i - Y_i$, $\bar{Z} = -2.59$, $S_3^2 = 123.63$ 为 Z_1, \dots, Z_n 的样本方差, 则 $1 - \alpha$ 置信区间为 $[\bar{Z} - S_3 t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}, \bar{Z} + S_3 t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}]$, 代入数值为 $[-10.06, 4.88]$

12. 试求第11题种,

(1) 更换经营策略前销量方差的95%置信区间;

(2) 更换经营策略后销量方差的95%置信区间;

(3) 更换经营策略前后销量差方差的95%置信区间.

Sol.

(1) 因为枢轴变量 $(n-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi_{n-1}^2$, 因此 σ_1^2 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $[(n-1)S_1^2/\chi_{n-1}^2(\alpha/2), (n-1)S_1^2/\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)]$, 代入数值得 σ_1^2 的置信系数为 95% 的置信区间为 $[431.37, 2721.25]$.

(2) 类似(1), 用 Y_1, \dots, Y_n , 得到 σ_2^2 的置信系数为 95% 的置信区间为 $[494.01, 3116.42]$.

(3) 类似(1), 用 Z_1, \dots, Z_n , 前后销量差方差的置信系数为 95% 的置信区间为 $[60.36, 380.75]$.

17. 假设咏机器包装精盐的质量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 现从生产线上随机抽取 10 袋, 测得其质量(单位: g)为

501.5, 500.7, 492.0, 504.7, 483.0, 512.8, 504.0, 490.3, 486.0, 520.0.

试在下列两种情况下分别求总体方差的 95% 和 90% 置信区间:

(1) $\mu = 500\text{g}$; (2) μ 未知.

Sol.

(1) $\mu = 500\text{g}$, 记 $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = 124.776$, 枢轴变量 $nS_n^2/\sigma^2 \sim \chi_n^2$, σ^2 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $[nS_n^2/\chi_n^2(\alpha/2), nS_n^2/\chi_n^2(1-\alpha/2)]$, 代入数值,

置信系数为 95% 的置信区间为 $[60.92, 384.28]$,

置信系数为 90% 的置信区间为 $[68.16, 316.67]$.

(2) μ 未知, 样本方差 $S^2 = 138.36$, 枢轴变量 $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$, 代入数值,

置信系数为 95% 的置信区间为 $[65.46, 461.14]$,

置信系数为 90% 的置信区间为 $[73.60, 374.50]$.

31. 试求 4 题中, 分别在下列两种情况下, 这批钉子总体标准差的 95% 置信上限:

(1) $\mu = 2.12$; (2) μ 未知.

Sol.

(1) 记 $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = 0.0005$, $nS_n^2/\sigma^2 \sim \chi_n^2$, σ^2 的 $1-\alpha$ 置信上限为 $nS_n^2/\chi_n^2(1-\alpha) = 1.35 \times 10^{-3}$, σ 的 $1-\alpha$ 置信上限为 $\sqrt{nS_n^2/\chi_n^2(1-\alpha)} = 3.68 \times 10^{-2}$.

(2) μ 未知时, $\alpha = 0.05$, σ^2 的 $1-\alpha$ 置信上限为 $(n-1)S^2/\chi_{n-1}^2(1-\alpha) = 1.15 \times 10^{-3}$, σ 的 $1-\alpha$ 置信上限为 $\sqrt{(n-1)S^2/\chi_{n-1}^2(1-\alpha)} = 3.40 \times 10^{-2}$.

常见错误汇总: (1) 均值方差算错; (2) 11.(3) 认为前后方差相等; (3) 错误或者不好的枢轴变量; (4) 31 题置信限算成置信区间的上界