2022 年中国科学技术大学新生入学考试

数学试卷

院系__________ 姓名__________ 学号______________ 总分__________

说明：试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟．须写出必要的计算和证明过程．结果须化简．禁止使用手机、计算器等电子设备．

1. (10 分) 设 $\theta = 100°$，求 $P = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - 4\sin\theta\cos\theta)$ 的值．

2. (10 分) 袋中共有 $m+n$ 个小球，m 个红球、n 个蓝球，除了颜色之外完全相同．每次从袋中随机取出一个小球，若为红球则放回袋中，若为蓝球则不放回，直至取出所有蓝球．求取球次数的数学期望．

3. (20 分) 设映射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(1) = 2,\ f(m+n) = \frac{1}{2}f(2n) + 2f(m) - f(m-n) - n,\ \forall m \geqslant n.$$

   求 $f(2022)$ 的值．

4. (20 分) 设点 A 是圆 C_1 的圆心，线段 AB 是圆 C_2 的直径，圆 C_1, C_2 相交于两点 E, F，点 G 是线段 EF 的中点，点 H 是 G 关于 A 的对称点，线段 BH 是圆 C_3 的直径，圆 C_1, C_3 相交于两点 P, Q．证明：线段 PQ 是 C_1 的直径．

5. (20 分) 设 a, b, c 都是正数且 $a+b+c=1$．求

$$S = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{b^2+c^2}$$

   的取值范围．

6. (20 分) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_5$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中任意 5 个非零向量．证明：必存在非零向量 $\beta \in \mathbb{R}^3$，它与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_5$ 中至多一个向量的夹角是钝角．

试题解答和评分参考

1. (10 分) 设 $\theta = 100°$，求 $P = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - 4\sin\theta\cos\theta)$ 的值.

   解答. $P = \sin\theta + \cos\theta - 2(1-\cos 2\theta)\cos\theta - 2\sin\theta(1+\cos 2\theta) = -\sin\theta - \cos\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta - 2\sin\theta\cos 2\theta = \cos 3\theta - \sin 3\theta = \cos 60° + \sin 60° = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. (10 分)

2. (10 分) 袋中共有 $m+n$ 个小球，m 个红球、n 个蓝球，除了颜色之外完全相同. 每次从袋中随机取出一个小球，若为红球则放回袋中，若为蓝球则不放回，直至取出所有蓝球. 求取球次数的数学期望.

   解答. 设 a_n 是所求数学期望. $a_0 = 0$，$a_n = 1 + \frac{m}{m+n}a_n + \frac{n}{m+n}a_{n-1}$，$\forall n \geqslant 1$. (5 分)
   由此可得，$a_n = \frac{m+n}{n} + a_{n-1} = \cdots = n + m\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. (5 分)

3. (20 分) 已知映射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(1) = 2$，$f(m+n) = \frac{1}{2}f(2n) + 2f(m) - f(m-n) - n$，$\forall m \geqslant n$. 求 $f(2022)$ 的值.

   解答. 在题设中，令 $m = n = 0$，得 $f(0) = 0$；令 $m = n = 1$，得 $f(2) = 6$. (5 分)
   令 $n = 1$，得 $f(m+1) = 2f(m) - f(m-1) + 2$, $\forall m \geqslant 1$. (5 分)
   $f(m+1) - f(m) = f(m) - f(m-1) + 2 = \cdots = f(1) - f(0) + 2m = 2(m+1)$. (5 分)
   $f(2022) = 2(1 + 2 + \cdots + 2022) = 2022 \times 2023 = 4090506$. (5 分)

4. (20 分) 已知点 A 是圆 C_1 的圆心，线段 AB 是圆 C_2 的直径，圆 C_1, C_2 相交于两点 E, F，点 G 是线段 EF 的中点，点 H 是 G 关于 A 的对称点，线段 BH 是圆 C_3 的直径，圆 C_1, C_3 相交于两点 P, Q. 证明：线段 PQ 是 C_1 的直径.

   证明. 建立直角坐标系，设 $A(0,0)$，$B(b,0)$，$C_1 : x^2 + y^2 = 1$，$C_2 : x^2 - bx + y^2 = 0$. (5 分)
   联立 C_1, C_2 方程，得 $G, H = (\pm\frac{1}{b}, 0)$，其中 $b > 1$. (5 分)
   从而 $C_3 : (x-b)(x+\frac{1}{b}) + y^2 = 0$. (5 分)
   联立 C_1, C_3 方程，得 $P, Q = (0, \pm 1)$. 故 PQ 是 C_1 的直径. (5 分)

5. (20 分) 设 a, b, c 都是正数且 $a + b + c = 1$. 求 $S = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{b^2+c^2}$ 的取值范围.

   解答. 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$. 取定 c，$S = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{a^2+b^2+2c^2}{a^2b^2+(a^2+b^2)c^2+c^4} = \frac{1}{(1-c)^2-2ab} + \frac{(1-c)^2-2(ab-c^2)}{(ab-c^2)^2+c^2(1-c)^2}$
   可视为 $x = ab - c^2$ 的函数，$S = f(x) = \frac{1}{(1-c)^2-2c^2-2x} + \frac{(1-c)^2-2x}{x^2+c^2(1-c)^2}$. (5 分)
   由 $f'(x) = \frac{2}{(a^2+b^2)^2} - \frac{2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} - \frac{2x(a^2+b^2-2c^2)}{[(a^2+c^2)(b^2+c^2)]^2} \leqslant 0$，$0 < c \leqslant \frac{1}{3}$，$(1-c)^2 + 4c^2 < 1$，
   得 $S \geqslant f(\frac{(1-c)^2}{4} - c^2) = \frac{2}{(1-c)^2} + \frac{8}{(1-c)^2+4c^2} > 2 + 8 = 10$. (10 分)
   当 $(a,b,c) \to (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 时，$S \to 10$. 当 $(a,b,c) \to (1,0,0)$ 时，$S \to +\infty$.
   由函数的连续性，S 的取值范围是 $(10, +\infty)$. (5 分)

6. (20 分) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_5$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中任意 5 个非零向量. 证明：必存在非零向量 $\beta \in \mathbb{R}^3$，它与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_5$ 中至多一个向量的夹角是钝角.

   证明. 设 $\alpha_i = \overrightarrow{OA_i}$. 情形 1：$O, A_1, \cdots, A_5$ 中存在四点共面 (此平面记作 π).
   若 $O \notin \pi$，$A_1, \cdots, A_4 \in \pi$，则存在 π 的法向量 β，它与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ 的夹角都是锐角. (5 分)
   若 $O, A_1, A_2, A_3 \in \pi$，则存在 π 的法向量 β，它与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的夹角是直角，与 α_4 的夹角是锐角或直角. (5 分)
   情形 2：$O, A_1, \cdots, A_5$ 中任意三点不共线、任意四点不共面.
   若 O 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外部，则可过 O 作平面 π，使得 $A_1, \cdots, A_4$ 在 π 的同侧. 存在 π 的法向量 β，它与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ 的夹角都是锐角. (5 分)
   若 O 在 $A_1A_2A_3A_4$ 的内部，则无论 A_5 在 $A_1A_2A_3A_4$ 的内部或外部，O 必在 $A_1A_2A_3A_5$、$A_1A_2A_4A_5$、$A_1A_3A_4A_5$、$A_2A_3A_4A_5$ 之一的外部. 同上，存在 β 满足题目要求. (5 分)