线性代数习题课 3

陈思维

20220409

目录

一、4.3-4.4 节作业题 1
二、补充题（1）：初等变换的应用 5
三、4.5 节内容回顾 7
四、4.5 节作业题 8
五、补充题（2）：矩阵的秩 9
六、5.1-5.3 节内容回顾 10

一、4.3-4.4 节作业题

23

(4)先对 k=2 的情况求解，将前 n1 行进行 Laplace 展开，然后得到两个分块行列式的乘积，如此进行下去，即可得到结果。

(6)

很多同学用的是初等变换方法，这样有一个问题，就是要讨论是否有a_i为 0，此处介绍一个不需要讨论a_i的情况的方法。

先证明一个引理：A 为 n 阶方阵，t 为常数，记$A(t)=\left(a_{ij}+t\right)_{n\times n}$，则

$$|A(t)|=|A|+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

证：对行列式按每一列进行展开，得到2^n个式子，其中≥ 2列全为 t 的式子值为 0，对于只有一列为 t 的式子，对该列进行展开，得到$t\sum_{i=1}^{n}A_{ij}$，因此将所有拆分的式子相加可得$|A(t)|=|A|+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$

可利用该引理得到原行列式结果为$a_1a_2\dots a_n+\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}a_j$

(7)每次对第一行和最后一行进行 Laplace 展开，就可以得到结果。

注：$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det(A)\det(D-CA^{-1}B)$，不少同学把这个公式用错了。

(8)原矩阵=$\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$，可直接利用 Cauchy-Binet 公式得到结论。

26

(1)直接用伴随矩阵的定义和行列式的性质验证即可。

(2)（不用讨论 A,B 不可逆的方法）用 Cauchy-Binet 公式的推论求矩阵乘积的子式。

证：设$C=AB$，M_{ij},N_{ij},P_{ij}为A,B,C对应元素的余子式，A_{ij},B_{ij},C_{ij}为A,B,C对应元素的代数余子式，则B^*A^*的第(i,j)元素为$\sum_{k=1}^n B_{ki}A_{jk}$

C^* 的 第 (i,j) 元 素 为 $C_{ji}=(-1)^{i+j}P_{ji}=(-1)^{i+j}\sum_{k=1}^n M_{jk}N_{ki}=\sum_{k=1}^n(-1)^{j+k}M_{jk}(-1)^{i+k}N_{ki}=\sum_{k=1}^n A_{jk}B_{ki}$

结论成立。

(3)要注意矩阵行列式为 0 的情况，将矩阵表示为可逆矩阵和对角矩阵的乘积，然后利用(2)的结论。

证：

A 可逆时，两边同取行列式可得到结果。

A 不可逆时，则存在可逆矩阵 P,Q，使得$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，其中 r<n

$$0=|(PAQ)^*|=|Q^*A^*P^*|=|Q^*||A^*||P^*|$$

因此$|A^*|=0$

28

用 26(3)的结论和$AA^*=|A|I$即可。

13

$$I=I-(-A)^k=(I+A)(I-A+A^2-\cdots+(-1)^{k-1}A^{k-1})$$

35

(1)(2)直接初等变换，(3)调换行的顺序再初等变换，(4)分块初等变换

(5)

以下解法均针对a_i全不为 0 的情况。

法 1：计算伴随矩阵

令$s=1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$$|A|=s\prod_{j=1}^n a_j$$

$$A_{ii}=\frac{\prod_{j=1}^{n}a_j}{a_i}(s-\frac{1}{a_i})$$
$$b_{ii}=\frac{A_{ii}}{|A|}=\frac{1}{sa_i}\left(s-\frac{1}{a_i}\right)=\frac{1}{a_i}-\frac{1}{sa_i^2}$$
$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\frac{(-1)^{i+j-1}\prod_{k=1}^{n}a_k}{a_ia_j}=-\frac{\prod_{k=1}^{n}a_k}{a_ia_j}$$
$$b_{ij}=\frac{A_{ij}}{|A|}=-\frac{1}{sa_ia_j}$$

法 2：初等变换

令$s=1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$$\begin{pmatrix}
1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & & & \\
1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\
1 & 1 & \cdots & 1+a_n & & & & 1
\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}
1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & & & \\
\frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & & \frac{1}{a_2} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\
\frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & & & & \frac{1}{a_n}
\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}
s & s & \cdots & s & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\
\frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & & \frac{1}{a_2} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\
\frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & & & & \frac{1}{a_n}
\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\
\frac{1}{a_2} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & & \frac{1}{a_2} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\
\frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} & & & & \frac{1}{a_n}
\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ & 1 & & & -\frac{1}{sa_1a_2} & \frac{1}{a_2}-\frac{1}{sa_2^2} & \cdots & -\frac{1}{sa_na_2} \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -\frac{1}{sa_1a_n} & -\frac{1}{sa_2a_n} & \cdots & \frac{1}{a_n}-\frac{1}{sa_n^2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & & & & \frac{1}{a_1}-\frac{1}{sa_1^2} & -\frac{1}{sa_1a_2} & \cdots & -\frac{1}{sa_1a_n} \\ & 1 & & & -\frac{1}{sa_1a_2} & \frac{1}{a_2}-\frac{1}{sa_2^2} & \cdots & -\frac{1}{sa_2a_n} \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -\frac{1}{sa_1a_n} & -\frac{1}{sa_2a_n} & \cdots & \frac{1}{a_n}-\frac{1}{sa_n^2} \end{pmatrix}$$

法 3：Sherman-Morrison 公式

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

令$D=-I$，将矩阵化为准对角阵，可以得到如下公式：

$$(A+BC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

令$A=diag(a_1,a_2,\dots,a_n),B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

则$(A+BC)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1}-\frac{1}{sa_1^2} & -\frac{1}{sa_1a_2} & \cdots & -\frac{1}{sa_1a_n} \\ -\frac{1}{sa_1a_2} & \frac{1}{a_2}-\frac{1}{sa_2^2} & \cdots & -\frac{1}{sa_2a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{sa_1a_n} & -\frac{1}{sa_2a_n} & \cdots & \frac{1}{a_n}-\frac{1}{sa_n^2} \end{pmatrix}$

法 4：求解线性方程组

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1+x_2+\cdots+x_n=b_1 \\ x_1+(1+a_2)x_2+\cdots+x_n=b_2 \\ \cdots \\ x_1+x_2+\cdots+(1+a_n)x_n=b_n \end{cases}$$

求解过程在习题课 1 讲义中，此处直接写出方程组的解。

解得$x_i=\frac{b_i}{a_i}-\frac{1}{a_is}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j}(i=1,2,\dots,n)$

$$k_{ii}=\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_i^2s},k_{ij}=-\frac{1}{sa_ia_j}$$

19
利用$tr(AB) = tr(BA)$推出矛盾，即得到结论。

20
习题课 2 已讲

30
必要性：反证法+Cramer 法则
充分性：$rank(A) = r < n$

二、补充题（1）：初等变换的应用

1. 课本 P115 29 题
证：
考虑如下 n+1 阶矩阵的行列式：

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{pmatrix}$$

将行列式按最后一行和最后一列展开得

$$|B| = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j$$

另一方面，把 B 的第二行至第 n 行加到第一行上，第二列至第 n 列加到第一列上，得到第一行和第一列除了最后一个元素以外均为 0，并按照第一行和第一列展开，得

$$|B| = -A_{11}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j$$

比较上述两个结果，由于每个x_i和y_j都是任意取值，因此对任意的i,j，均有$A_{11} = A_{ij}$，结论成立。

2. A 为 n 阶可逆矩阵，证明：只用第三种初等变换就可以把 A 化为$diag\{1,1,\dots,|A|\}$的形状
证：若(1, 1)元素为 0，则可以用第三种初等变换把该元素变为非 0
不妨设(1, 1)元素不为 0
则可以通过第三种初等变换将第一行和第一列的其他元素都化为 0，得到一个准对角阵，依次下去可以化为一个对角阵。
下证可以将对角矩阵化为$diag\{1,1,\dots,|A|\}$的形状

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & ab \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

因此可以通过这种方式将原矩阵化为$diag\{1,1,\dots,|A|\}$的形状。

3. n 阶矩阵 A 的顺序主子式都不为 0，证明：存在 n 阶下三角阵 B，使得 BA 为上三角阵。

证：利用数学归纳法

n=1 时，结论成立

假设 n-1 时结论成立，n 时，设$A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix}$，由归纳假设可得存在 n-1 阶下三角阵 B1 使得B_1A_1为上三角阵。

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ -\beta A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta A_1^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ -\beta A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta A_1^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

令$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ -\beta A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}$即可。

4. (2012FA-7)设 A 是行满秩的$n \times (n+1)$矩阵，若齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解为$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})^T$，证明：$x_i = (-1)^{n+i}cd_i$，c 为任意常数，$d_i$为矩阵 A 删去第 i 列后得到的 n 阶子矩阵的行列式，$i = 1, \dots, n+1$

证：

设 A 的前 n 列为 A1，各列为$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$

假设$x_{n+1} = 0$，$rank(A) = n$→A 的列向量的极大无关组的元素为 n→不妨设极大无关组为$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，则 A1 为$n \times n$满秩矩阵，$A_1\boldsymbol{x} = 0$的解为 0

$x_{n+1} \neq 0$时，设$y_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$，则有$a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n + a_{n+1} = 0$

由 Cramer 法则，$y_i = \frac{\det(a_1,\dots,a_{i-1},-a_{n+1},a_{i+1},\dots,a_n)}{\det(a_1,a_2,\dots,a_n)} = \frac{(-1)^{n-i+1}d_i}{d_{n+1}} = \frac{x_i}{x_{n+1}}$

则有$\frac{x_i}{(-1)^i d_i} = \frac{x_{n+1}}{(-1)^{n+1}d_{n+1}} = (-1)^n c$，即$x_i = (-1)^{n+i}cd_i$

5. 证明：任意 n 阶矩阵都可以表示为若干个形如$I_n + a_{ij}E_{ij}$这样的矩阵之积

证:设 n 阶矩阵$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q, P, Q$为可逆矩阵,因此$P, Q$可表示为若干个初等矩阵的乘积。

下面只需要证初等矩阵和$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$可以表示为形如$I_n + a_{ij}E_{ij}$这样的矩阵之积。

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = (I_n - E_{r+1,r+1}) \dots (I_n - E_{nn})$$

对于第一种初等矩阵，$S_{ij} = (I_n - E_{ij})(I_n + E_{ji})(I_n - 2E_{jj})(I_n + E_{ij})$

对于第二种初等矩阵，$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$

对于第三种初等矩阵，$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$

综上，结论成立。

三、4.5 节内容回顾

1. 等价关系与等价类：自反性，对称性，传递性
相抵，相似，相合
代表元与不变量
2. 秩与相抵的定义

相抵标准型：$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

秩的定义：非 0 子式的最大阶数
初等变换不改变矩阵的秩
3. 秩的性质
4. 秩的计算
5. 相抵标准型的应用

一些常用的等式与不等式：

$$k\neq 0, rank(kA)=rank(A)$$
$$rank(AB)\leq \min\{rank(A), rank(B)\}$$
$$rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=rank(A)+rank(B)$$
$$rank\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\geq rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, rank\begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix}\geq rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$
$$rank\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\leq rank(A)+rank(B), rank\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\leq rank(A)+rank(B)$$
$$rank(A\pm B)\leq rank(A)+rank(B)$$
$$rank(AB)\geq rank(A)+rank(B)-n$$
$$rank(ABC)\geq rank(AB)+rank(BC)-rank(B)$$
$$A^2=A\Leftrightarrow rank(A)+rank(I_n-A)=n$$
$$A^2=I_n\Leftrightarrow rank(I_n+A)+rank(I_n-A)=n$$

$$\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & A \\ O & I-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A-A^2 & A \\ O & I \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A-A^2 & O \\ O & I \end{pmatrix}$$

1. 秩为 r 的矩阵可以表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和
2. 满秩分解

$$A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}I_r\\ O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & O\end{pmatrix}Q$$

令$B=P\begin{pmatrix}I_r\\ O\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}I_r & O\end{pmatrix}Q$

四、4.5 节作业题

39
用相抵标准型，分三种情况讨论。
证：

设$A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q,r=rank(A),P,Q$为可逆矩阵，因此$P^*,Q^*$也为可逆矩阵。

$r=n$时，$A=PQ$，$A^*=Q^*P^*$也为可逆矩阵，因此$rank(A^*)=n$

$r=n-1$时，$\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & 0\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}O & O\\ O & 1\end{pmatrix}$，$A^*=Q^*\begin{pmatrix}O & O\\ O & 1\end{pmatrix}P^*$，$rank(A^*)=1$

$r\le n-2$时，$\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & 0\end{pmatrix}^*=O$，$A^*=Q^*\begin{pmatrix}O & O\\ O & O\end{pmatrix}P^*=O$，$rank(A^*)=0$

42
用两种形式分块初等变换。
证：
分别对第一行和第二行做初等变换得

$$\begin{pmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_m & A\\ O & I_n-BA\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_m & O\\ O & I_n-BA\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_m-AB & O\\ B & I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_m-AB & O\\ O & I_n\end{pmatrix}$$

因此$rank\begin{pmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}I_m & O\\ O & I_n-BA\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}I_m-AB & O\\ O & I_n\end{pmatrix}$，即$m+rank(I_n-BA)=n+rank(I_m-AB)$

43
用初等变换。
解：
对$diag(I+A,I-A)$做初等变换得

$$\begin{pmatrix} I+A & O \\ O & I-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I+A & I+A \\ O & I-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I+A & I+A \\ I+A & 2I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I-A^2) & I+A \\ O & 2I \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I-A^2) & O \\ O & 2I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & O \\ O & 2I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

由上面的初等变换可得

$$rank(I+A) + rank(I-A) = rank\begin{pmatrix} I+A & O \\ O & I-A \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} = n$$

结论成立。

五、补充题（2）：矩阵的秩

1. m 个 n 阶矩阵 $A_1, A_2, \ldots, A_m$，证明 $rank(A_1) + rank(A_2) + \cdots + rank(A_m) \le rank(A_1A_2 \ldots A_m) + (m-1)n$

证：m=2 时，该结论即为 Sylvester 不等式，结论成立

假设 m-1 时结论成立，m 时，$rank(A_1) + rank(A_2) + \cdots + rank(A_m) \le rank(A_1A_2 \ldots A_{m-1}) + rank(A_m) + (m-2)n \le rank(A_1A_2 \ldots A_m) + (m-2)n + n = rank(A_1A_2 \ldots A_m) + (m-1)n$

因此原结论成立。

2. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，A 为可逆矩阵，证明$rank(M) = rank(A) + rank(D - CA^{-1}B)$

证：初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$rank(M) = rank(A) + rank(D - CA^{-1}B)$$

3. $AB = BA$，证明：$rank(A+B) \le rank(A) + rank(B) - rank(AB)$

证：

$$\begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -B \\ I & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & -AB+BA \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}$$

$$rank(A) + rank(B) = rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \ge rank\begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -B \\ I & A \end{pmatrix} \ge rank\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}$$

$$\ge rank(A+B) + rank(AB)$$

4. (2019FA-6) n 阶矩阵A满足$A^2 = 0$，证明$rank(A) \le \frac{n}{2}$，并对每个 n 给出一个满足$rank(A) =$

$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$的矩阵$A$

证：用证明 Sylvester 不等式的初等变换思路

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & O \\ O & A^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & O \\ A & A^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & -A \\ A & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & I \\ O & A \end{pmatrix}$$

$$n \geq 2 * rank(A) \to rank(A) \leq \frac{n}{2}$$

$$\begin{pmatrix} O & I_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} \\ O & O \end{pmatrix}$$

5. (2017SP-6)n 阶方阵 A，rank(A)=1，tr(A)=c，证明$A^2 = cA$，并计算$\det(I + A)$

解：由满秩分解的结论，$rank(A) = 1 \to \exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\ \ s.t.\quad A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$

$$tr(A) = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$$

$$A^2 = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T = (\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T = cA$$

由$\det(I - AB) = \det(I - BA)$可得

$$\det(I + A) = \det(I + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T) = \det(I + \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}) = 1 + c$$

六、5.1-5.3 节内容回顾

1. n 维数组空间
2. 子空间的定义
3. 线性相关与线性无关
4. 极大无关组
5. 向量组的等价
6. 向量组的秩，矩阵的行秩与列秩相等

线性相关与线性无关的区别

1. 线性组合
2. 是否存在向量被向量组中的其他向量线性表出
3. 齐次线性方程组是否有非 0 解
4. 行列式是否为 0
5. 向量组表出一个向量的方式是否唯一
6. 向量组与它的部分的关系
7. 向量组与延伸/缩短组的关系