第三周作业答案

P69-7

解：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+4x_4=2\\2x_1+5x_2-2x_3+x_4=1\\3x_1+8x_2-x_3-2x_4=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&4&2\\2&5&-2&1&1\\3&8&-1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&4&2\\0&1&4&-7&-3\\0&2&8&-14&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&4&2\\0&1&4&-7&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

令$x_3=t_1,x_4=t_2$，则$x_2=-4t_1+7t_2-3,x_1=11t_1-18t_2+8$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-4\\1\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}-18\\7\\0\\1\end{pmatrix}t_2+\begin{pmatrix}8\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

将常数项改为 0，则有

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&4&0\\2&5&-2&1&0\\3&8&-1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&4&0\\0&1&4&-7&0\\0&2&8&-14&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&4&0\\0&1&4&-7&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

令$x_3=t_1,x_4=t_2$，则$x_2=-4t_1+7t_2,x_1=11t_1-18t_2$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-4\\1\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}-18\\7\\0\\1\end{pmatrix}t_2$$

可以看出，$\begin{pmatrix}8\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$为方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+4x_4=2\\2x_1+5x_2-2x_3+x_4=1\\3x_1+8x_2-x_3-2x_4=0\end{cases}$的一组特解，$\begin{pmatrix}11\\-4\\1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}-18\\7\\0\\1\end{pmatrix}$为方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+4x_4=0\\2x_1+5x_2-2x_3+x_4=0\\3x_1+8x_2-x_3-2x_4=0\end{cases}$的两组线性无关的特解。

注：课本 5.5 节

设$A\in F^{m\times n},\boldsymbol{b}\in F^m,rank(A)=r$，则齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解空间的维数为$n-r$，设解空间的一组基为$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_{n-r}}$，则$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为$\boldsymbol{x}=t_1\boldsymbol{\alpha_1}+t_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\alpha_{n-r}},t_1,\dots,t_{n-r}\in F$

线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有解的充要条件为$rank(A)=rank(A,\boldsymbol{b})$，设$\boldsymbol{\beta}$为$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的一组特解，则$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的通解为$\boldsymbol{x}=t_1\boldsymbol{\alpha_1}+t_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+t_{n-r}\boldsymbol{\alpha_{n-r}}+\boldsymbol{\beta},t_1,\dots,t_{n-r}\in F$

P113-2

证：

设矩阵为 A，则有$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$，令$X=\frac{1}{2}(A+A^T),Y=\frac{1}{2}(A-A^T)$，则$X^T=\frac{1}{2}(A^T+A)=X$，即 X 为对称阵；$Y^T=\frac{1}{2}(A^T-A)=-Y$，即 Y 为反对称阵。综上，结论成立。

P113-3

解：

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -1 & -4\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}-18 & -11 & 16\\ 30 & 11 & -26\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 12 & 11\\ -5 & 13\end{pmatrix}$$

$$ABC=\begin{pmatrix}10 & -61\\ 12 & 93\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}4 & -4 & -6\\ -12 & -3 & 8\\ 8 & -4 & -11\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -15 & -4\end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 13 & 7 & 12\\ 1 & -5 & -6\end{pmatrix}$$

P113-5

解：

$$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m)\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}y_j\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}y_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{mj}y_j\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

P113-6

设$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

(1). 解：

将$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$代入得：

$$\begin{cases} x^2+yz=0 \\ w^2+yz=0 \\ y(x+w)=1 \\ z(x+w)=1 \end{cases}$$

解得$x^2=w^2, y=z=0, x=w=0$，与后两个式子矛盾，故不存在满足条件的实矩阵 A。

(2). 解：

将$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$代入得：

$$\begin{cases} x^2+yz=0 \\ w^2+yz=0 \\ y(x+w)=1 \\ z(x+w)=-1 \end{cases}$$

解得$x^2=w^2, y+z=0, x=w$，由此可得

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z=\mp\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ w=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$A=\pm\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(3). 解：

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，由于 $A^3=I$，则 $A^2=A^{-1}$，$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}, A^{-1}=$

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

则有$b(a+d)=-\frac{b}{ad-bc}$，令$b\neq 0$，则$\frac{1}{ad-bc}=-(a+d)$

代入并取等得$a^2+bc=-d(a+d),d^2+bc=-a(a+d)$

即$ad+bc=-a^2-d^2,ad-bc=-\frac{1}{a+d}$, 求得$2ad=-a^2-d^2-\frac{1}{a+d}$, 即$-\frac{1}{a+d}=(a+d)^2$,

解得$a+d=-1$，代入上面式子得$bc=-(a^2+a+1)$

即$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2+a+1}{b} & -a-1 \end{pmatrix}(b\neq 0)$

注：只要写出了满足$a+d=-1$和$bc=-(a^2+a+1)$的一个解都算对了。

P113-7

(1). 解：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

下面用数学归纳法证明：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

k=1, 2 时，结论成立，假设 k-1 时结论成立，下证 k 时结论成立。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} \cos(k-1)\theta & \sin(k-1)\theta \\ -\sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(k-1)\theta\cos\theta-\sin(k-1)\theta\sin\theta & \sin(k-1)\theta\cos\theta+\cos(k-1)\theta\sin\theta \\ -\sin(k-1)\theta\cos\theta-\cos(k-1)\theta\sin\theta & \cos(k-1)\theta\cos\theta-\sin(k-1)\theta\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

综上，结论成立。

(2). 解：

$a^2+b^2=0$时，$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

设$a=t\cos\theta, b=t\sin\theta$，则$t=\sqrt{a^2+b^2},\theta=\arctan\frac{b}{a}$（若$a=0$，则令$t=b,\theta=\frac{\pi}{2}$），则由(1)结论得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} t\cos\theta & t\sin\theta \\ -t\sin\theta & t\cos\theta \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} t^k\cos k\theta & t^k\sin k\theta \\ -t^k\sin k\theta & t^k\cos k\theta \end{pmatrix}$$

(3). 解：

令$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & I\\ O & A\end{pmatrix}$

由于$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1 & ka\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}a^k & ka^{k-1}\\ 0 & a^k\end{pmatrix}$，则有

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}A & I\\ O & A\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}A^k & kA^{k-1}\\ O & A^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & ka & k & k(k-1)a\\ 0 & 1 & 0 & k\\ 0 & 0 & 1 & ka\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(4). 解：

令$\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 1\end{pmatrix}=I+J$，其中 I 为单位阵，$J=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$

$$J^k=\begin{cases}\begin{pmatrix}O & I_{n-k}\\ O & O\end{pmatrix} & (k<n)\\ O & (k\geq n)\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 1\end{pmatrix}^k=(I+J)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iJ^i=\begin{pmatrix}1 & k & \frac{k(k-1)}{2} & \cdots & C_k^{n-1}\\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & \frac{k(k-1)}{2}\\ & & & \ddots & k\\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

注：由广义组合数的定义，当$r>n$时，$C_n^r=0$，因此上面式子在$k<n$时仍然成立。

(5). 解：

$$\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\right)^{k-1}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^{k-1}\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$$

P114-9

证：

此处只证明上三角阵的结论。

设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$, $C=AB$

对$i>j$，$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

由上三角阵的性质，$k<i$时，$a_{ik}=0$；$k>j$时，$b_{kj}=0$，因此对任意 k，$a_{ik}b_{kj}=0$，即$c_{ij}=0$对任意$i>j$成立，即C为上三角阵。

同理，当 A 和 B 为下三角阵时，乘积也为下三角阵。

P114-10

证：

令矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$与任意 n 阶方阵都可交换，取基本矩阵$E_{ij}(1\le i,j\le n)$，则有$AE_{ij}=E_{ij}A$，则左边矩阵的第 j 列为$(a_{1i},a_{2i},\ldots,a_{ni})^T$，其余列为 0；右边矩阵的第 i 行为$(a_{j1},a_{j2},\ldots,a_{jn})$，其余行为 0，则对任意$1\le i,j\le n$有$a_{ii}=a_{jj},a_{ij}=0(i\neq j)$，即 A 为单位阵。