同理可证

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos pxdx=0.$$

25. 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续正值函数. 令 $M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$. 证明

$$M=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^ndx}.$$

证 显然

$$\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^ndx}\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b M^ndx}=M\sqrt[n]{b-a},$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^ndx}\leqslant\lim_{n\to\infty}M\sqrt[n]{b-a}=M.$$

因 f 在 $[a,b]$ 上连续, 故必存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=M$. 不妨设 $a<x_0<b$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)>M-\varepsilon(x_0\leqslant x<x_0+\delta)$, 故

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^ndx}&\geqslant\sqrt[n]{\int_{x_0}^{x_0+\delta}[f(x)]^ndx}\\&\geqslant\sqrt[n]{\int_{x_0}^{x_0+\delta}(M-\varepsilon)^ndx}=(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\delta},\end{aligned}$$

所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^ndx}\geqslant\lim_{n\to\infty}(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\delta}=M-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^ndx}\geqslant M\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^ndx},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^ndx}=M.$$

26. 设 φ 和 f 都是区间 $[a,b]$ 上的正值连续函数. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^ndx}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

证 令 $\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)=f(\zeta)\ (a\leqslant\zeta\leqslant b)$. 任给 $\varepsilon\ (0<\varepsilon<f(\zeta))$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-\zeta|<\delta$ 时就有

$$0<f(\zeta)-\varepsilon<f(x)\leqslant f(\zeta).$$

从而

$$\int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}[f(\zeta)-\varepsilon]^n\varphi(x)dx\leqslant\int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}[f(x)]^n\varphi(x)dx$$
$$\leqslant\int_a^b[f(x)]^n\varphi(x)dx\leqslant[f(\zeta)]^n\int_a^b\varphi(x)dx.$$

所以

$$[f(\zeta)-\varepsilon]^n\int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}\varphi(x)dx\leqslant\int_a^b[f(x)]^n\varphi(x)dx$$
$$\leqslant[f(\zeta)]^n\int_a^b\varphi(x)dx.$$

上式中若 $\zeta-\delta<a$, 则下限用 a 代替; 若 $\zeta+\delta>b$, 则上限用 b 代替. 于是

$$[f(\zeta)-\varepsilon]\sqrt[n]{\int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}\varphi(x)dx}\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^ndx}$$
$$\leqslant f(\zeta)\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)dx}.$$

令 $n\to\infty,\varepsilon\to 0$, 即得所证.

27. 设函数 φ 与 f 在区间 $[a,b]$ 上正值连续. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^{n+1}dx}{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^ndx}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

证

$$I_n=\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^ndx=\int_a^b\sqrt{\varphi(x)}[f(x)]^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\varphi(x)}[f(x)]^{\frac{n+1}{2}}dx.$$
$$I_n^2\leqslant\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^{n-1}dx\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^{n+1}dx=I_{n-1}I_{n+1},$$

故

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}\geqslant\frac{I_n}{I_{n-1}}.$$

因此, 数列 $\left\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 是递增的. 又

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)\frac{I_n}{I_n}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x),$$

故 $\left\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 有界. 于是, $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}.$$

由本章问题 26 知, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^{n+1}dx}{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^n dx}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

28. 证明: 不存在区间 $[0,1]$ 上的正值连续函数 f, 使得

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\quad \int_0^1 f(x)xdx=\alpha,\quad \int_0^1 f(x)x^2dx=\alpha^2,$$

此处 α 为给定的实数.

证　第一方程乘 α^2, 第二方程乘 -2α, 第三方程乘 1, 相加得到

$$\int_0^1 f(x)(\alpha-x)^2dx=0.$$

因此, $f(x)\equiv 0$. 可见对任何实数 α, 不存在满足上述方程的正值连续函数 f.

29. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

证明: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 f 恒为零.

证　当 $x=0$ 时, $f(0)=0$. 因 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 故 $f'(x)=f(x)$, 即

$$\frac{df(x)}{f(x)}=dx.$$

因而 $\ln f(x)=x+\ln C$, $f(x)=Ce^x$. 由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 故 $f(x)\equiv 0$.

30. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 均有

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leqslant M(\beta-\alpha)^{1+\delta}\quad (M>0,\delta>0).$$

证明 $f(x)\equiv 0$.