2, 3(2), 4, 5, 7, 10(2) (4), 12, 14, 17, 19(2)

2. $3\vec{a}_1+2\vec{a}_2-\vec{a}_3=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}_3=3\vec{a}_1+2\vec{a}_2$ 因此三个向量共面

3. (2) $\vec{b}=-\vec{a}_1-5\vec{a}_2$

4. $\vec{e}_1=(1,0,0,0)=\vec{a}_1$

$\vec{e}_2=(0,1,0,0)=\vec{a}_2-\vec{a}_1$

$\vec{e}_3=(0,0,1,0)=\vec{a}_3-\vec{a}_2$

$\vec{e}_4=(0,0,0,1)=\vec{a}_4-\vec{a}_3$

因此对 $\forall\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in F^4$

有 $\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3+b_4\vec{e}_4$

$=(b_1-b_2)\vec{a}_1+(b_2-b_3)\vec{a}_2+(b_3-b_4)\vec{a}_3+b_4\vec{a}_4$

若表示不唯一，设 $\vec{b}=\mu_1\vec{a}_1+\mu_2\vec{a}_2+\mu_3\vec{a}_3+\mu_4\vec{a}_4$

得 $\vec{0}=(\mu_1-b_1+b_2)\vec{a}_1+(\mu_2-b_2+b_3)\vec{a}_2+(\mu_3-b_3+b_4)\vec{a}_3+(\mu_4-b_4)\vec{a}_4$

即 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_4$ 线性相关，与 $\det\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\\vec{a}_2\\\vec{a}_3\\\vec{a}_4\end{pmatrix}=1$ 推出 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_4$ 线性相关矛盾

因此表示唯一

5. $P_i\ (i=1,2,3,4)$ 共面 $\Leftrightarrow$ $P_1P_2,\ P_1P_3,\ P_1P_4$ 共面 $\Leftrightarrow P_1P_2,\ P_1P_3,\ P_1P_4$ 线性相关

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$$

题中条件可化为

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 0=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

因此 $P_i\ (i=1,2,3,4)$ 共面 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$

7. 设 $\vec{b}_i = c_{i1}\vec{a}_1 + \cdots + c_{ir}\vec{a}_r = \sum_{k=1}^{r} c_{ik}\vec{a}_k \quad (i=1,\cdots,s)$

则 $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{s}\left(\lambda_i \sum_{k=1}^{r} c_{ik}\vec{a}_k\right) = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i c_{ik}\right)\vec{a}_k$ 即为 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 的线性组合

注：也可以用矩阵乘法写为：

$$\begin{bmatrix}\vec{b}_1\\ \vec{b}_2\\ \vdots\\ \vec{b}_s\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sr}\end{bmatrix}}_{\text{记为}C}\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_r\end{bmatrix},\quad \text{则 } \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\vec{b}_i = \underbrace{[\lambda_1 \cdots \lambda_s]}_{\text{记为}\vec{\lambda}}\begin{bmatrix}\vec{b}_1\\ \vec{b}_2\\ \vdots\\ \vec{b}_s\end{bmatrix} = \vec{\lambda} C\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_r\end{bmatrix}$$

10. (2) 若 $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使 $\lambda_1\vec{\alpha}_1 + \lambda_2\vec{\alpha}_2 + \lambda_3\vec{\alpha}_3 = 0$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0\\ -4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0\end{cases}$$

解唯一解为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

因此 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关

(4) $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = 0$，因此 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4$ 线性相关

12. (1) 错误，如 $\vec{\alpha}_1 = (1,0)$，$\vec{\alpha}_2 = (-1,0)$，$\vec{\alpha}_3 = (0,1)$

$\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + 0\cdot\vec{\alpha}_3 = \vec{0}$，但 $\vec{\alpha}_3$ 不能表示为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 的线性组合

(2) 错误，如 $\vec{\alpha}_1 = (1,0,0)$，$\vec{\alpha}_2 = (0,1,0)$，$\vec{\alpha}_3 = (1,1,0)$

(3) 正确　证明见定理 5.2.3

(4) 正确　推论 5.2.1

(5) 错误　如 $s=2$ 时，$(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2) - (\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_1) = 0$

(6) 正确　$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s+\vec{\alpha}_1$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_s$ 表示

故 $\operatorname{rank}(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s+\vec{\alpha}_1) \le \operatorname{rank}(\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_s) < s$，即线性相关

(7) 正确　定理 5.2.5

18) 错误　如 $\vec{a}_1=(1,0)$, $\vec{a}_2=(-1,0)$

加长向量 $\vec{b}_1=(1,0,0)$, $\vec{b}_2=(-1,0,1)$

（$\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1}$ 不全为0）

14. 证：$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关，则有 $\lambda_1\vec{\alpha}_1+\cdots+\lambda_n\vec{\alpha}_n+\lambda_{n+1}\vec{b}=\vec{0}$

由 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$ 线性无关知 $\lambda_{n+1}\neq 0$ ，否则矛盾

故 $\vec{b}=-\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1\vec{\alpha}_1+\cdots+\lambda_n\vec{\alpha}_n)=\lambda_1'\vec{\alpha}_1+\cdots+\lambda_n'\vec{\alpha}_n$　①

若存在不同的表示 $\vec{b}=\mu_1\vec{\alpha}_1+\cdots+\mu_n\vec{\alpha}_n$　②

由①-②得 $\vec{0}=(\lambda_1'-\mu_1)\vec{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_n'-\mu_n)\vec{\alpha}_n$ ，与 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$ 线性无关矛盾

综上对 $\forall\,\vec{b}\in F^n$ ，均可表示为唯一的 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$ 的线性组合

17. $r\geq \mathrm{rank}(\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_r)\geq \mathrm{rank}(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r)=r$

因此 $\mathrm{rank}(\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_r)=r$ ，即 $\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_r$ 线性无关

19. (2) $$\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则 $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4\}$, $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_5\}$, $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4\}$, $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_5\}$, $\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_4,\vec{\alpha}_5\}$

$\{\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4\}$, $\{\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_5\}$, $\{\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4,\vec{\alpha}_5\}$, $\{\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4,\vec{\alpha}_5\}$ 为极大无关组