# 中国科学技术大学数学科学学院
# 2022～2023 学年第 1 学期期中考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

| | | | |
|---|---|---|---|
| 课程名称 | 数学分析 (B1) | 课程编号 | MATH1006 |
| 考试时间 | 2022 年 11 月 12 日 | 考试形式 | 闭卷 |
| 姓 名 | | 学 号 | |
| 学 院 | | | |

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | |

一、 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{kx}=\frac{1}{\mathrm{e}}$, 则参数 $k=($　　　$)$. $(\frac{1}{2})$

化为公式形式

思路. $\left(\frac{x-2}{x}\right)^{kx}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{-2}}\right)^{\frac{x}{-2}}\right]^{(-2k)}=-1$. □

$x\to\infty$ $(1+\frac{1}{x})^x\to e$.

(2) 设有参数曲线 $\begin{cases}x=t\sin t+\cos t,\\ y=\sin t.\end{cases}$ 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=($　　　$)$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=($　　　$)$. $(\frac{1}{t};\ -\frac{1}{t^3\cos t})$

思路. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{t}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1/t)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-1/t^2}{t\cos(t)}$. □

求n阶导的本质是求… 把常数…加法都吸收进 $x^n$ 了.

(3) $f(x)=\ln(\cos x)$ 的 Maclaurin 多项式 $x^4$ 项的系数是 (　　　). $(-\frac{1}{12})$

后面的 o 一定是 x 的 无穷小量

思路:

不论以何种方法, 达到 $x^4$ 即可 ☆

$$\ln(\cos(x))=\ln\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)$$

保证足够多项相乘, 因为给了被 $o(x^4)$ 吸收

$$=\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)$$

$$=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4).$$ □

或用"o"取精确…引入

$(\ )=(\ )\pm o(\ )$

这部分不计算

$\tan x\sim\sin x$

$=x^3$

二者相差仅为 $\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$ (用一推一, 只需中间套就) ☆

(4) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+f(x)}{x^3}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x+f(x)}{x^3}=($　　　$)$. $(\frac{1}{2})$

得到x高次→泰勒!!

思路. 由条件可知 $f(x)=-\sin(x)+o(x^3)=-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, 故 $\tan(x)+f(x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x)-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)=\frac{x^3}{2}+o(x^3)$. □

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近有反函数, 且二阶可导, 满足当 $x\to x_0$ 时有 $f(x)=1+2(x-x_0)+3(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$, 则 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)=1$ 处的二阶导数等于 (　　　). $(-\frac{3}{4})$

$f'(x_0)\neq0$.

思路. 由条件可知, 在 $x = x_0$ 处, $y'(x) = 2$, $y''(x) = 6$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right)}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{-\frac{y''(x)}{(y'(x))^2}}{y'(x)} = -\frac{y''(x)}{y'(x)^3}.$$

故所求为 $-\frac{6}{2^3} = -\frac{3}{4}$. □

二、 选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

(B) (1) 已知函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 可导, 则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} =$ (    ).

A. $f'(x_0)$  B. $2f'(x_0)$  C. 0  D. $f''(x_0)$

思路. $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}$. □

看题!

(C) (2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 则其导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处 (    ).

A. 没有定义  B. 连续但不可导  C. 不连续  D. 连续且可导

思路. 易见当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x\cos(1/x) + \sin(1/x)$, 从而 $x \to 0$ 时 $f'(x)$ 不收敛. □

(A) (3) 设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数, $F(x) = f(\cos x)$, 则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值的一个充分条件是 (    ).

翻笔记!!!

不动点: $f(x)=x$

稳定点: $f'(x)=0$

(驻点)

A. $f'(1) < 0$  B. $f'(1) > 0$  C. $f''(1) < 0$  D. $f''(1) > 0$

思路. $F'(x) = f'(\cos(x))(-\sin(x))$, 故 $F'(0) = 0$, $x = 0$ 为 $F(x)$ 的稳定点. $F''(x) = f''(\cos(x))\sin^2(x) - f'(\cos(x))\cos(x)$, 故 $F''(0) = -f'(1)$. 若 $f'(1) < 0$, 则 $F''(0) > 0$. 由 $f''$ 的连续性可知, 这说明在 $x = 0$ 附近 $F''(x) > 0$, 即 $F(x)$ 为凸函数. 这说明 $x = 0$ 为 $F(x)$ 的极小值点. (这一题里其实 $f''$ 存在导数就可以了, 由 $F''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{F'(x) - F'(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{F'(x)}{x}$ 可知, 在 $x < 0$ 时, 局部地有 $F'(x) < 0$, 从而 $F(x)$ 严格单调递减; $x > 0$ 时可类似讨论) □

找f(x)与f(u)的联系

(C) (4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2)}{x^2} = 1$, 则 (    ).

A. $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0) = 1$  B. $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 1$

C. $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0) = 1$  D. $f(0) = 1$ 且 $f'(0) = 1$

思路. 若令 $u = x^2$, 若 $x \to 0$, 则 $u \to 0^+$. 由 $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u} = 1$, 可以推出 $f(0) = \lim\limits_{u \to 0^+} f(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} u = 0$, 以及 $f'_+(0) = \lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u) - f(0)}{u} = \lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u} = 1$. □

必只有个e

(5) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)} = \mathrm{e}^{y}\ln 2022$ 确定, 其中 $f(x)$ 具有二阶导数, $f'(x) \neq 1$, 则 $\mathrm{d}y = (\qquad)$. (A)

A. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1-f'(y))}$ B. $\dfrac{1}{x(1-f'(y))}$ C. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{f(y)}(1-f'(y))}$ D. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{f(y)}(1-f'(y))}$

思路. 化简方程, 我们有 $x = \ln(2022)\mathrm{e}^{y-f(y)}$, 对 $x$ 求导后, 有 $1 = \ln(2022)\mathrm{e}^{y-f(y)}(1-f'(y))y'$, 即 $1 = x(1-f'(y))y'$. □

三、 简单计算推理题. (每题 6 分, 共 30 分)

(1) 用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!} = 0$.

证明. 注意到

$$\left|\frac{2^n}{n!} - 0\right| = \frac{2\cdot 2\cdots 2}{1\cdot 2\cdots n} < 2\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n},$$

于是, 对任意的正数 $\varepsilon$, 若取 $N = [\frac{4}{\varepsilon}] + 1$, 则当 $n > N$ 时有

$$\left|\frac{2^n}{n!} - 0\right| = \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \varepsilon.$$

由定义, 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!} = 0$. □

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n + b_n) = 7$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + 2b_n) = 4$. 证明数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限存在, 并求出它们的极限值.

证明. 我们有

直线组乘

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(2\left(3a_n + b_n\right) - \left(a_n + 2b_n\right)\right) = \frac{1}{5}(2\cdot 7 - 4) = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left((3a_n + b_n) - 3a_n\right) = 7 - 3\cdot 2 = 1.$$

特别地, $\{a_n\}_n$ 与 $\{b_n\}_n$ 有极限. □

(3) 求出函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 的单调性和凹凸性区间.

解. 我们有 $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$. 故 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 是严格单调递增; $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 是严格单调递减.

同时我们又有 $f''(x) = (4x^2 - 2)\mathrm{e}^{-x^2}$. 这说明在 $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ 和 $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ 这两个区间上, 皆有 $f''(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 都是凸函数; 在区间 $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ 上, 有 $f''(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 为凹函数. □

(4) 已知数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2}$.

解. 用 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n)-(a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1})}{n^2-(n-1)^2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

$x_{2n}=\frac{x_{2n-1}+2}{x_{2n-1}+1}=\frac{\frac{x_{2n-2}+2}{x_{2n-2}+1}+2}{\frac{x_{2n-2}+2}{x_{2n-2}+1}+1}=\frac{3x_{2n-2}+4}{2x_{2n-2}+3}$

$\therefore x_{2n}-x_{2n-2}=\frac{-2x_{2n-2}^2+4}{2x_{2n-2}+3}=\frac{2(2-x_{2n-2}^2)}{2x_{2n-2}+3}$

(5) 数列 $\{x_n\}$ 由递推公式定义: $x_0=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$, 其中 $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$. 试求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

可想奇偶列分别单调!

(先得结果再证结果).

解. 注意到 $f(x)=1+\frac{1}{1+x}$, 由于 $x_0=1$, 用归纳法不难验证, $\{x_n\}_n$ 是一个正数数列. 假定 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, 对于递推公式取极限, 可得 $a=1+\frac{1}{1+a}$, 又由于 $a>0$, 这说明极限 $a=\sqrt{2}$. 下面证明 $\{x_n\}_n$ 确实以 $\sqrt{2}$ 为极限, 为此, 注意到

$x_0=1<\sqrt2 \Rightarrow \{x_{2n}\}\uparrow$ 同理 $\{x_{2n-1}\}\downarrow$

$$
|x_{n+1}-\sqrt{2}|=\left|\left(1+\frac{1}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\right|=\frac{|x_n-\sqrt{2}|}{(1+\sqrt{2})\,(1+x_n)}<\frac{|x_n-\sqrt{2}|}{(1+\sqrt{2})}.
$$

$1-\sqrt2=\frac{-1}{1+\sqrt2}$

由此不难推出所证的结果. □

四、 (本题 10 分) 对于函数

$$
f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin(x)}, & x<0,\\[2mm] 6, & x=0,\\[2mm] \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\cdot\sin(x/4)}, & x>0,\end{cases}
$$

问参数 $a$ 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; 参数 $a$ 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

解. 我们有

☆ 用直接代换 (后面再用洛必达

$$
\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin(x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}=-6a,
$$

(用完后就要注意问题了, 不要拘束, 能用什么用什么!))

另一方面, 我们同时有

$$
\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\cdot\sin(x/4)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+ax+\frac{(ax)^2}{2}+o(x^2)\right)+x^2-ax-1}{x^2/4}=2a^2+4.
$$

→ 用直接代换

令 $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)$, 我们有 $-6a=2a^2+4$, 即 $a=-1$ 或 $-2$.

(i) 若 $a=-1$, 则 $\lim_{x\to0}f(x)=6=f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(ii) 若 $a=-2$, 则 $\lim_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有可去间断点. □

五、 (本题 12 分) 求方程 $k \cdot \arctan(x) - x = 0$ 的不同实根的个数, 其中 $k$ 为参数.

解. 令 $f(x) = k \arctan(x) - x$. 为了讨论其零点个数, 由于 $f$ 为奇函数, 我们不妨先考虑 $x \geq 0$ 的情形. 容易看到,

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \text{以及} \qquad f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1.$$

(i) 若 $k \leq 1$, 则当 $x > 0$ 时 $\frac{k}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} < 1$, 于是 $f'(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递减, 仅有 $x = 0$ 为零点. 这说明 $f(x)$ 在实轴上仅有一个根.

(ii) 若 $k > 1$, 则 $f'(x) = 0$ 在 $x > 0$ 时仅有一个根 $x_0 = \sqrt{k-1}$. 当 $0 < x < x_0$, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 严格单调递增; 当 $x > x_0$, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 严格单调递减. 由于 $f(0) = 0$ 而 $f(+\infty) = -\infty$, 这说明 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时恰有一个实根 $x_1$, 并且 $x_1 > x_0$. 综上, 这说明 $f(x)$ 在实轴上恰有三个根: $-x_1, 0, x_1$. □

六、 (本题 12 分) 设 $y = f(x)$ 二阶可导且 $f''(x) > 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. 求

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 f(u)}{f(x) \sin^2 u},$$

其中 $u = u(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上点 $P = (x, f(x))$ 处切线在 $x$ 轴上的截距.

解. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x, f(x))$ 处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x).$$

若令 $Y = 0$, 则 $X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. 这说明截距 $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. 经计算, 我们有 → 某值与导数构造.

$$\lim_{x \to 0} u = \lim_{x \to 0} \left( x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = -\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = -\lim_{x \to 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} = -\frac{f'(0)}{f''(0)} = 0.$$

差商.

我们没有假设 $f''$ 连续, 因此上面的计算不能用洛必达法则. 另外, 上面的计算表明, $x \to 0$ 时 $u(x)$ 是一个无穷小量; 我们必须验证这一点, 下面才可以用 $\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则. 函数 $f(x)$ 有麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{u}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} 1 - \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x f'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{x f'(x)} = 1 - \lim_{x \to 0} \frac{\frac{f''(0)}{2} + o(1)}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(0)}{f''(0)} = \frac{1}{2}.$$

这说明 $u$ 是 1 阶无穷小量. 由此可知

需$u\to0$条件

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(u)}{f(x)\sin^2u}\xlongequal{\sin(u)\sim u}\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\frac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^2\left(\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=1.\qquad\square$$

七、 (本题 6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 是有二阶导函数, 且 $f(0)=f'(0)$, $f(1)=f'(1)$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $f(\xi)=f''(\xi)$.

形式同+凑零点

用中值定理

去掉$f'(x)$.

证明. 考虑辅助函数 $F(x)=(f(x)-f'(x))\mathrm{e}^x$. 由于 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 满足 $F(0)=F(1)$, 由 Rolle 定理可知, 存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $F'(\xi)=0$, 即 $(f(\xi)-f''(\xi))\mathrm{e}^\xi=0$. 由于 $\mathrm{e}^\xi\neq0$, 这说明 $f(\xi)=f''(\xi)$. $\square$

$\mathrm{e}^x\left(f(x)-f'(x)+f'(x)-f''(x)\right)$