10/19.

3.4/1/1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{\text{L法则}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{m}\alpha(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-1}-\frac{\beta}{n}(1+\beta x)^{\frac{1}{n}-1}}{1}$

$=\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}$

(12) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{\text{L法则}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}1-\dfrac{1}{x}$

$=0$

(13) 原式 $=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}e^{(2x-\pi)\ln\tan x}$

$=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}e^{\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}}$ $\quad\frac{1}{x}\to-\frac{1}{x^2}$ 能约么!!

$\overset{\text{L法则}}{=\!=}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}e^{\frac{\cot x\cdot\sec^2 \cancel{\tan} x}{\frac{-2}{(2x-\pi)^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}e^{\frac{(2x-\pi)^2}{-\sin 2x}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)\longrightarrow$ 调整分.

$\overset{\text{L法则}}{=\!=}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}e^{-\frac{2(2x-\pi)\cancel{2}}{2\cos 2x}}=e^0=1.$

~~$\overset{\text{L法则}}{=\!=}e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{4^2}{2\sin 2x}}$~~

~~(14) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{\frac1x}}{e}\right)^{\frac1x}$ 1^∞~~

~~L法则 $e^{\frac1x\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac1x}-1}$ $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac1x(\ln(1+x)^{\frac1x}-1)}$~~

~~L法则 $\lim\limits_{x\to0} e^{(\ln(1+x)^{-\frac1x})'}$~~

(14) 原式 $= \lim\limits_{x\to0} e^{\frac1x(\ln(1+x)^{\frac1x}-1)}$

$= \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$ → 指中不能确讲→同乘.

$\overset{\text{L法则}}{=} \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}$ 变为指数运算.

$= \lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{2(1+x)}}$

$= e^{-\frac12}$

(15) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\overset{-\infty}{\ln(1-x)}}{\underset{\infty}{\cot\pi x}} + \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\overset{-\infty}{\tan\frac{\pi}{2}x}}{\underset{\infty}{\cot\pi x}}$ 不能拆分 -∞(-) 再拆

简化(但需先求出各部分极限则说明极限存在,即可拆)

只是顺序问题

$\overset{\text{L法则}}{=} \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x-1}+\sec^2\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{\csc^2\pi x\cdot\pi}$

$= \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sin^2\pi x}{(x-1)\pi} + \frac12\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sin^2\pi x}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}$

$\overset{\text{L法则}}{=} \lim\limits_{x\to1^-}\frac{2\sin\pi x\cdot\pi}{\pi} + \frac12\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2\sin\pi x\cdot\pi}{2\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}$

$= 0 + \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sin\pi x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$\overset{\text{L法则}}{=} \lim\limits_{x\to1^-}\frac{\cos\pi x\cdot\pi}{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}$

$= 2$

扫描全能王 创建

说明给方…… 可构造辅助函数.

Chapter 3.

13. $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处 c

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$

$F(h)=f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)$ 在 定义域内 c ~~$x=x_0$ 处~~ 且存可 d ($h\to 0$, $F(h)\to 0$)

$g(h)=h^2$ 在 定义域内 ~~$x=x_0$ 处~~ c

使用

对应式 L 法则

即 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

再用 L 法则 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}$

$\because$ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有二阶导

$\therefore$ ~~$\lim\limits_{x\to x_0} f''(x)=\lim$~~ $f^{(2)}(x_0+0)=f^{(2)}(x_0-0)$

$\therefore$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$

→ 得出具体函数

3. 令 $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ 因 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 c, 在 (a,b) 内可微 由 Cauchy 中值定理

$\dfrac{f(b)-f(a)}{\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$

即 $2\xi(f(b)-f(a))=(b^2-a^2)f'(\xi)$ → 类中值 → 用中值

4. 令 $p(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $f(x)$ $C[a,b]$ 且在 (a,b) 上可微

$\therefore$ $p(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 c 在 (a,b) 上可微 由 Cauchy Th.

$\dfrac{p(a)-p(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{p'(\xi)}{g'(\xi)}$

$\dfrac{\frac{bf(a)-af(b)}{ab}}{\frac{b-a}{ab}}=\dfrac{\frac{f(\xi)-\xi f'(\xi)}{\xi^2}}{\frac{-1}{\xi^2}}$ 即 ☆ $\dfrac{bf(a)-af(b)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

→ 分式可消掉 ab 分母

☆ $bf(a)-af(b)$, 这种交叉地脑想到 $\dfrac{f(a)}{a}-\dfrac{f(b)}{b}$

的分子 $\left(\dfrac{bf(a)-af(b)}{ab}\right)$

1-1/(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$

$x\in(2,+\infty)$ 时 $f'(2+0)\triangleq\lim\limits_{x\to 2^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}0=0$.

但 $f'_+(2)\triangleq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$ 不存在

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x>0\\ x^3 & x\le 0\end{cases}$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$

$x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$\therefore f'(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ 不存在(振荡发散)

(3) $\because f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{L法则}{=\!=}\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0+0)$

由 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处c

同理 $f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$

(二) (1) 在 $(-1,0)$ 中 $f'(x)=\frac{1}{1+x}$

在 $(0,+\infty)$ 中 $f'(x)=a$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可d. 则 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 处处可d

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可d，必可c ☆ d 条件 拆分为 d+c

$f(0)=b=\ln(1+0)=0$.

$f'(0+0)=a$, $f'(0-0)=1$

$\therefore a=1$ $\therefore \begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$ 时 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 中处处可导.

第四分析

解二：$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 中 d，$f'(x)=\frac{1}{1+x}$

在 $(0,+\infty)$ d　$f'(x)=a$

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{ax}{x}=a$

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln(1+x)-b}{x}$

$\because b=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1=f_+'(0)=a$

$\therefore \begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$，$f$ 在 $(-1,+\infty)$ 中处处 d.

→ 不要两个都去求 a、b 两个未知量.

(三)"⇒"(必要性)：已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$|f(x)-a|<\varepsilon$ 恒成立

由 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$ 且 $x_n\neq x_0$，对上述 $\delta>0$，$\exists N\in N^*$，当 $n>N$ 时，$0<|x_n-x_0|<\delta$

$\Rightarrow|f(x_n)-a|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$.

"⇐"(充分性) 反证法：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq a$，则 $\exists\varepsilon_0>0$，用对 $\forall\delta>0$，$\exists x$：$0<|x-x_0|<\delta$

但 $|f(x)-a|\geq\varepsilon_0$，取 $\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,3\cdots$

则 $\delta_n>0$，$\exists x_n$：$0<|x_n-x_0|<\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,3\cdots$

但 $|f(x_n)-a|\geq\varepsilon_0$，

当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x_0$，且 $x_n\neq x_0$，应有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$，但 $|f(x_n)-a|\geq\varepsilon_0$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq a$，矛盾！

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$

(四) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中 C，$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\in R$，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上，有界且一致 C

证 ① 由 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists x_0>0$，对 $\forall x>x_0$，$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow |f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A| < \frac{\varepsilon}{2}+|A| \triangleq M_1>0$.

$\forall x\in(x_0,+\infty)$ 从 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 上C $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 上有界：$\exists M_2>0$ 使 $|f(x)|\le M_2$

$\forall x\in[a,x_0]$ 取 $M=\max\{M_1,M_2\}$ 则 $|f(x)|\le M$.

$\therefore \forall x\in[a,+\infty)$ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

② $f(x)$ 在 $[a,x_0+1]$ 上C，从而一致C

对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_1(\varepsilon)>0$，对 $\forall x_1,x_2\in[a,x_0+1]$，当 $|x_1-x_2|<\delta_1(\varepsilon)$ 时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

取 $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\delta_1(\varepsilon)\}$ 则 $\delta(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关且 $\delta(\varepsilon)\le1$

对 $\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$ 当 $|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$ 时若 $[a,x_0+1]$ 则必有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

若 $x_1,x_2\in(x_0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-A+A-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|A-f(x_2)|<\varepsilon$

即对 $\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$ 只要 $|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$ 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中一致C

①

(2) $\because$ $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上C 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0=A$，由上题 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有界且一致C

② $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上C 且 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0=A$，由上题 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 有界且一致C

综上 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中有界一致C

(五) ① 原式 $= e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)\right)}$

$= e^{\lim_{t\to0}\frac{\ln f(a+t)-\ln f(a)}{t}}$

$= e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

② 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x \ln x - e^{(\ln x)^2})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^x (\ln x - e^{(\ln x)^2 - x})$ $\quad \ln x - x < 0$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^x (\ln x)$

$= +\infty$

③ $x \to +\infty$ 时 $\frac{f(x)}{x}$ 为 "$\frac{\infty}{\infty}$" 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = A$ 由 L法则

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}} f(x)}{e^{\frac{x}{\alpha}}} \xlongequal{\text{L法则}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha} f(x) + e^{\frac{x}{\alpha}} f'(x)}{e^{\frac{x}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha}} = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + \alpha f'(x)) = A \ (\alpha > 0)$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \frac{1}{\alpha} \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha f'(x) = \frac{1}{\alpha} \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha f'(x) + f(x)) - \frac{f(x)}{\alpha}$

$= \frac{A}{\alpha} - \frac{A}{\alpha} = 0$

10