微分学的巅峰是Taylor公式；本学期的巅峰是Newton-Leibniz公式

附录 I 微积分学简史

微积分学是微分学(Differential Calculus)和积分学(Integral Calculus)的统称,英文简称 Calculs,意为计算.这是因为早期微积分主要用于天文、力学、几何中的计算问题.后来人们也将微积分学称为分析学(Analysis),或称无穷小分析,专指运用无穷小或无穷大等极限过程分析处理计算问题的学问.

微积分的萌芽、发生与发展,经历了一个漫长的时期.

(1) 早在古希腊时期,欧多克索斯(Eudoxus,约公元前 408—355)就提出了穷竭法.这是极限理论的先驱.它指出:"一个量如减去大于其一半的量,再从余下的量中减去大于该余量一半的量,这样一直下去,总可使某一余下的量小于已知的任何量."(见《几何原本》卷 X,1).这个定义使得古希腊数学家在所有论证中都不用"无穷小量"这个词,仅仅使用只需有限步可做到的穷竭法就够了.我国庄子(公元前 355—275)《天下篇》中说:"一尺之棰,日取其半,万世不竭",也具有极限的思想.

真正成为积分学萌芽的当推阿基米德(公元前 287—212)的工作.他在《抛物线求积法》中用穷竭法求出抛物线弓形的面积.其方法是:逐次作出与该弓形同底等高的三角形(如图 I -1),然后将这些三角形面积加起来.阿基米德给出,第 n 步时,这些三角形面积之和为

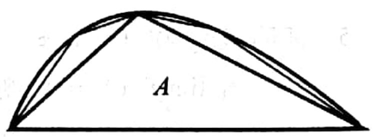

图 I -1

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

(A 为第一个三角形之面积).

然后他又指出

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\frac{4}{3}A.$$

阿基米德对$\frac{1}{3}\,\frac{1}{4^{n-1}}$用穷竭法和反证法证明,抛物线弓形面积不能大于、也不能小于$\frac{4}{3}A$.证明是严格的,但未用极限和无穷小量,而是用"有限"形式的穷竭法.

应该指出,尽管古希腊数学家未使用无穷小与无穷大,但古希腊哲学家却对

"无限"作过许多研究. 例如亚里士多德(Aristotle 公元前 384—332)就严格区分实无限和潜无限,且只承认潜无限.

公元前 146 年,罗马帝国灭亡古希腊,西方数学的发展渐渐停止. 在以后漫长的中世纪里,微积分思想更完全束之高阁. 这时阿拉伯、印度和中国的数学有长足进展. 公元 263 年,刘徽为《九章算术》作注时提出"割圆术":用正多边形逼近圆周. 他说"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣". 这是极限论思想的成功运用.

欧洲的数学从 12 世纪到 13 世纪开始出现转机. 希腊的数学著作此时陆续出现拉丁文本. 当时的经院哲学又开始讨论无限,诸如实无限、潜无限、自成无限、合成无限、完全无限等. 1328 年英国大主教布兰德瓦丁(Bradwardine,1290—1349)在牛津发表的著作中曾有类似于均匀变化率和非均匀变化率的概念.

(2) 从 16 世纪中叶开始,微积分正式进入了酝酿阶段. 这时陆续出版了阿基米德的一些著作. 研究行星运动的开普勒(Kepler,1571—1630)发展了阿基米德求面积和体积的方法. 他在 1615 年出版《新空间几何》,给出了 92 个阿基米德未讨论过的体积问题,并研究了酒桶的最佳比例. 开普勒在天文学研究中已得到公式:$\int_0^\theta \sin\theta d\theta = 1 - \cos\theta$. 1635 年卡瓦列里(Cavalieri,1598—1647)出版了《不可分量几何学》,影响巨大. 他将面积的不可分量比作织成一块布的线,体积的不可分量比作一册书的各页,当然不可分量的个数为无穷多,且没有厚薄和宽窄. 这已到达积分学的边缘,且卡瓦列里已发现公式 $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$,$n$ 为正整数.

17 世纪上半叶,微积分的奠基工作在紧锣密鼓地进行着. 最重要的先驱有法国的帕斯卡(Pascal,1623—1662)和费马(1601—1665),英国的沃利斯(Wallis,1616—1703)和巴罗(Barrow,1630—1677).

帕斯卡在证明体积公式时,主要借助于略去高次项(即略去高阶无穷小). 他也注意到很小的弧和切线是可以相互代替的. 费马是 17 世纪的大数学家,成就广泛,数论中费马定理尤著称于世. 他在求极大极小值上的成功,为微积分开辟了道路. 他注意到:在长为 a 的线段上取一段 x,由 x 和 $a-x$ 所成矩形面积为 $A=x(a-x)$. 对一般的 A,x 可以有两个值,当 A 为极大值时,x 只有一个值是 $\frac{a}{2}$. 费马于是论证如下:

设 $A=x(a-x)$. 今取 $x+E$,则 $A'=(x+E)(x-a-E)$. 作

$$A' - A = E(a-2x) + E^2. \quad (1)$$

因极大值面积只有一个,故可认为 $A'-A=0$,在(1)中约去 E,即得 $0=(a-2x)+$

E. 然后令 E 为 0，得 $2x=a$，即 $x=\frac{a}{2}$.

这套做法好像变魔术一样，但其中蕴涵着导数为 0 的意思，E 相当于今天的 Δx，费马正是从 $\frac{A'-A}{E}=0$ 解出了 $x=\frac{a}{2}$.

沃利斯从 1649 年起任英国牛津大学教授，他实际上已完成了相当于 $\int_0^x(1-t^2)^n\mathrm{d}x$ 的积分（n 是正整数），并给出 π 的无穷乘积的表示. 沃利斯的业绩是大胆地将有限推向无限，例如，他从

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2},\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2},\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2},\cdots$$

断言，这个比对无限项也成立，这将导致积分.

巴罗是英国剑桥大学三一学院的教授和副校长，是牛顿的老师. 他的主要贡献是给出求切线的方法，即相当于现代以 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s$ 为边的直角三角形. 在他的几何学讲义中有微分三角形 MNR（如图 I-2）. 他在求 PT 之长时舍去了 MR 和 NR 的高次项.

现代数学史家波耶（Boyer）认为，在所有微积分的先导工作中，费马和巴罗最接近于分析学.

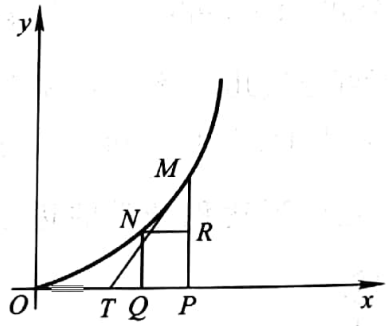

图 I-2

（3）牛顿（1642—1727）和莱布尼茨（1646—1716）在 17 世纪下半叶终于创立了微积分学.

牛顿是那个时代的科学巨人. 在他之前，已有了许多科学积累：哥伦布发现新大陆（1492），哥白尼创立日心说（1543），伽利略出版《力学对话》（1638），开普勒发现行星运动定律（1619），笛卡儿创设解析几何（1637）. 航海的需要，矿山的开发，火药枪炮的制作提出了一系列的力学和数学问题，微积分在这样的条件下诞生，乃是必然的事.

牛顿家境贫困，1661 年以减费生进入剑桥大学三一学院读书，1664 年取得学士学位. 1665 年伦敦流行鼠疫，牛顿回到乡下. 他平生三大发明：流数术（微积分）、万有引力和光的分析，都发端于 1665—1666 年间，时年 23 岁.

有两个重要问题引起了人们的注意：如何求已知曲线的切线？如何确定已知曲线下方图形的面积？牛顿将这两个问题合起来考虑，主要的工具是二项式展开. 他观察一族相关的曲线：$y=(1-x^2)^n$. 对固定的整数 $n(n\geqslant 0)$，将它作二项式展开就得到有 $-x^2,x^4,-x^6,x^8,\cdots$ 各项的多项式. 然后用那时的知识已经知道

x^2的下方图形面积是$\frac{x^3}{3}$,x^4 的下方图形面积是$\frac{x^5}{5}$,等等. 牛顿构造了一个系数表,横向按幂次排列,纵向按 $n=1,2,\cdots$ 排列,表内的值是$(1-x^2)^n$ 下方图形面积展开式中各个幂次的系数. 此表是一个巴斯卡方阵,他再插入对应于 $n=\frac{1}{2}$的各幂项的系数,现今称之为牛顿二项式定理. 这样牛顿就能用这张表求出当时所知的代数曲线下的面积. 这张表把微分和积分概念联结起来了.

牛顿仔细运用他的运算所遵循的模式,把曲线看作运动着的点的轨迹,想象用一条运动的直线扫过一个区域,来计算此曲线下的面积,这就是牛顿用运动的概念来叙述他的发现.

1665 年 5 月 20 日,在牛顿手写的一页文件中开始有“流数术”的记载. 微积分的诞生,不妨以这一天为标志. 他称连续变量为“流动量”,流动量的导数为“流动率”. $\dot{x}$ 表示流动量 x 的流动率. 我们举下面的例说明牛顿的流动率的求法.

设给定函数 $y-x^2=0$,时间的刹那用 0 表示(即 $\mathrm{d}t$),x,y 的刹那用 $\dot{x}0$ 和 $\dot{y}0$ 表示$\left(即\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}t\right)$. 以 $x+\dot{x}0$ 及 $y+\dot{y}0$ 替代 x,y,代入方程得

$$y+\dot{y}0-(x^2+2x\dot{x}0+\dot{x}^20^2)=0.$$

因 $y-x^2=0$,故有

$$\dot{y}0-2x\dot{x}0+\dot{x}^20^2=0.$$

全式除以 0,得

$$\dot{y}-2x\dot{x}+\dot{x}^20=0.$$

略去 $\dot{x}^20$,即得 $\dot{y}=2x\cdot\dot{x}$. 用现在的记号就是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$.

牛顿在《流数术》一书中陈述了所研究的基本问题是“已知量的关系,要算出它们的流数;以及反过来.”正是这一点,使牛顿超过所有的微积分先驱者. 牛顿完整地提出微分和积分是一对逆运算,并且指出了换算的公式,这公式现在称为牛顿—莱布尼茨公式,或微积分学基本定理.

牛顿关于微积分的著作大多写于 1665—1676 年间,但这些著作发表很迟,流数术到 1687 年才在《自然哲学之数学原理》中以几何形式发表出来.《流数术》本身直到他去世后 9 年(1736)才公开发表.

莱布尼茨年轻时在莱比锡大学学习法律,后来投身外交界,在巴黎、伦敦结识了法国和英国的数学家. 他的数学研究完全是在公余进行的. 他和牛顿曾就微积分进行多次通信,但莱布尼茨完全是独立创立微积分理论的. 牛顿从力学导致流数术,而莱布尼茨则从几何学上考察切线问题而得出微分法. 他的第一篇论文

刊登于 1684 年的《教师期刊》上,这比牛顿公开发表早三年. 这篇文章给一阶微分以明确的定义. 他说[redacted]坐标 x 的微分 dx 是个任意量,而纵坐标 y 的微分 dy 则定义为它与 dx 之比等于纵坐标与次切距之比的那个量(在前述巴罗的微分三角形的图中,次切距是 TP,纵坐标是 MP,它们之比正是切线的斜率).

莱布尼茨和牛顿一样,掌握了微分法和积分法,并洞悉二者之间的联系. 因而将他们两人并列为微积分的创始人是完全正确的. 尽管牛顿的研究比莱布尼茨早 10 年,但论文的发表要晚 3 年. 由于彼此都是独立发现的,曾经长期争论谁是最早的发明者并无意义. 由于莱布尼茨的记号 dx 和 $\int$ 较为便利,所以现今的微积分似乎更接近莱布尼茨当年的形式.

(4) 微积分诞生以后,曾就它的基础是否稳固爆发过一场大的争论.

1734 年,贝克莱(Berkeley,1685—1753,爱尔兰的主教)出版了一本书:《分析学家:或一篇致不信神数学家的论文,其中审查一下近代分析学的对象、原则及论断是否比宗教的神秘、教旨有更清晰的陈述,或更明显的推理》. 书中他嘲笑无穷小量是"已死量的幽灵".

书名太长就不写了

确实,不管是费马的"E",牛顿的"0",还是莱布尼茨的 dx,都又是 0,又不是 0,呼之即来,挥之即去,说它是"鬼使神差",似乎不算过分. 因此贝克莱主教以此攻击牛顿,荷兰哲学家尼文太(Nieuwentijt,1654—1718)也反对过莱布尼茨的高阶微分和略去无穷小量.

当然,也有很多人企图弥补这一缺陷. 麦克劳林(1698—1746)试图从瞬时速度的理解上加以解释,但成效不大. 泰勒(1685—1731)曾用差分去解释流数,却被说成"把车子放到了马的前面". 路子比较对的是达朗贝尔(d'Alembert,1717—1783),他将微积分的基础归结为极限,并认为极限是"一个变量趋近于一个固定量,趋近的程度小于任何给定的量",不过他并未沿这条路走到底.

与此同时,许多数学家在不严密的基础上对微积分创立了许多辉煌的成就. 欧拉(Euler,1707—1783)以微积分为工具解决了大量的天文、物理、力学等问题,开创了微分方程、无穷级数、变分学等诸多新学科. 1748 年的《无穷小分析引论》是世界上第一本完整的有系统的分析学. 拉格朗日(1736—1833)、拉普拉斯(Laplace,1749—1827)、勒让德(Legendre,1752—1813)、傅里叶(Fourier,1768—1830)等许多大家在分析学方面都有重大贡献,但在微积分学基础上却没有找到合适的解决办法. 以致法国启蒙哲学大师伏尔泰(Voltaire,1694—1776)把微积分称为"精确计算和度量一个其存在性是无从想象的东西的艺术".

(5) 进入 19 世纪以后,分析学的不严密性到了非解决不可的地步. 那时还没有变量、极限的严格定义. 不知道什么是连续,因为有解析式的函数天然地被认为是连续的. 级数的收敛性,定积分的存在性都是含糊不清的. 阿贝尔

'第二次数学危机'

数学是最严谨的。

(1802—1829)在 1826 年说:"在高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的形式证明的. 人们到处发现从特殊跳到一般的不可靠的推理方法."

严密的分析是从波尔查诺(Bolzano,1781—1848),阿贝尔和柯西(1789—1857)等人开始的. 这和非欧几何的创立、群论的发现差不多处于同一时期. 1821 年,法国理工科大学教授柯西写了《分析教程》一书,其中将极限定义为"若代表某变量的一串数值无限地趋向于某一数值,其差可任意小,则该固定值称为这一串数值的极限."并由此出发建立起一个微积分体系. 柯西的功绩是将分析学奠定在极限概念之上,把纷乱的概念理出了一个头绪. 但是他的叙述仍然使用"无限趋向"、"要多小有多小"之类的语言,仍然是不严格的. 他的一些重要思想,例如,导数是$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限,定积分是和式极限,连续的$f(x)$的活动上限积分的导数是$f(x)$自身等,尽管十分深刻,但离真正的严密化还有一段距离.

德国数学家魏尔斯特拉斯(1815—1897)在当中学数学教师时,将分析做到"算术化". 他反对"变量无限趋向于"之类的说法,认为变量无非是一个字母,用来表示某区间内的数. 这一想法导致了变量 x 在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$取值时,$f(x)$在$(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$取值这样的表示方法. 这样,在他手里,终于得到了现今广泛采用的 $\varepsilon-\delta$ 定义,完全摆脱了几何直观所带来的含糊观念.

最后一块难啃的骨头是实数理论. 柯西认识到"无理数是有理数迫近的极限",但极限又要用到实数,这是一个循环论证. 1872 年梅莱(Meray,1835—1911)、海涅(1821—1881)、康托尔(Cantor,1845—1918)用现在称为柯西收敛准则的想法将无理数看成柯西列,戴德金(Dedekind 1831—1916)则不依赖极限,而用有理数的分划定义所有实数. 这两条路线殊途同归,都为建立实数理论打下了基础. 戴德金的想法更为深刻,被人誉为"不依赖于空间与时间直观的人类智慧的创造物",它最终使无理数摆脱了"不可公度线段"之类的几何直观.

分析学在 19 世纪的最后几十年中有许多理论上的进展. 海涅在 1870 年提出一致连续性. 1895 年博雷尔(1871—1956)运用海涅的一个性质,将它上升为有限覆盖定理. 1872 年魏尔斯特拉斯给出了处处连续而不可微的函数例子. 黎曼(1826—1866)和达布(1842—1917)给出了有界函数可积性的定义和充要条件(1854 和 1885 年). 这些,构成了现今数学分析教科书的主要内容,微积分严密化的任务终于在他们手中完成了.

马克思曾经写过一些阅读微积分著作的笔记,没有正式发表,他从哲学的高度分析了微积分学中的矛盾,对无穷小量既是 0,又不是 0,微分学中$\frac{0}{0}$的意义等作了解剖. 后人以《马克思数学手稿》将这些笔记公开发表. 据研究,马克思并没有看到柯西等人的著作,对微积分基础严密化的数学进程并不了解.

(6) 牛顿和莱布尼茨大约与清朝的康熙皇帝处于同一时期. 康熙虽喜欢西方数学,向传教士学过欧氏几何,三角测量等,但从未接触过微积分,那些传教士恐怕也不懂. 第一部微积分著作的中译本迟至 1859 年,这就是李善兰(1811—1882)和伟烈亚力(Alexande Wylie,1815—1887)合译的《代数积拾级》,原书为美国罗密士(Eliao Loomis)所写的《Analytical Geometry and Calculus》,译名中的"代"指代数几何,即今之解析几何. 序中说"康熙时,西国来本之(即莱布尼茨)、奈端(即牛顿)二家又创微分、积分二术. ……其理大要:凡线面体皆设由小到大,一刹那中所增之积即微分也,其全积即积分也."此书于 1859 年 5 月 10 日由上海墨海书馆印行. 那时上海还没有发电厂,是用牛带动印刷机印成的.

微分、积分等名词由李善兰首译,十分恰当,这些译法传至东邻日本,以至中日的微积分名词多所相同. 李善兰是京师同文馆的首任算学总教习,是晚清我国最杰出的数学家.

我国普及西算,约在辛亥革命前后. 五四运动之后,全国各地纷纷创办数学系,微积分才作为大学课程普遍开设. 中国现代数学的研究起步很晚,落后于西方两百余年,但是从 20 世纪 20 年代起,研究水平提高很快. 我国第一个数学博士胡明复(1891—1927),以《线性微积分方程》的论文,1917 年在哈佛大学通过博士论文答辩. 又如陈建功(1893—1970)在《东京帝国学士院进展》(Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1928)上发表论文《关于具有绝对收敛傅里叶级数的函数类》,其结果与英国大数学家哈代(Hardy)、李德伍德(Littlewood)的结果相同,是为国际水平的分析学研究之始. 熊庆来(1893—1969)在亚纯函数论的研究上有杰出成就,被欧洲数学家誉为熊氏无穷级理论. 新中国成立以后,微积分更加普及,研究水平也不断提高. 在若干项目上,已居领先地位. 当然,在整体上,我们与国际先进水平还有很大差距,有待进一步努力.

(7) 20 世纪的分析学仍在大步前进. 20 世纪初勒贝格(Lebesgue,1875—1941)开创了可列可加测度的积分论,即实变函数论,也称实分析. 在此基础上的概率论和随机过程论被称为现代分析. 复变函数论继续向纵深发展,形成复分析. 以函数空间为背景的泛函和算子理论,开始了泛函分析的历程. 三角级数论发展成羽毛丰盛的各种各样的傅里叶分析. 20 世纪分析学的另一特征是处理高维空间中曲线曲面,多变量函数的整体性质. 这需用拓扑学知识及代数工具,形成流形上的分析. 它使微分几何学、偏微分方程、多复变函数论等学科相结合,形成当代数学中的主流方向. 与此同时,研究多元函数的反函数,多元积分的外微分形式,逐渐成为分析学的基础知识.

20 世纪的分析学基本上解决了线性空间上的线性算子(线性微分方程)的课题,目前非线性分析已成为最活跃的数学分支之一. 微积分的基础虽已严密化,但无穷小量却不再是一个量,而是一种变化过程. 为了使无穷小和无穷大作

为一个量重返数坛，罗宾逊(Robinson 1918—1974)在 1960 年将实数系 $\mathbf{R}$ 扩充为超实数系 $\mathbf{R}^*$，无穷小量作为 $\mathbf{R}^*$ 中的数，使极限过程的表示显得更为简单，这称为非标准分析.

泛函分析的产生使分析学跃上新的高度. 希尔伯特空间，巴拿赫空间，广义函数论已成为数学家和物理学家的常识. 无限维空间上的微积分学尚未诞生，这也许是 21 世纪的任务. 此外，积分论仍在发展，黎曼积分的推广仍不能说已经完成了.

微积分从 20 世纪初开始进入中学. 它作为人类文化的宝贵财富，正在武装一代又一代的新人，终将成为世人皆知的常识. 它那闪耀着智慧光芒的深刻思想，一定会哺育人类走向更高的历史阶段.