1. 求 $\sin z$ 的实虚部和模

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\frac{e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}}{2i}$$

$$=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2i}$$

$$Re(\sin z)=\frac{1}{2}(e^{-y}\sin x+e^{y}\sin x)=\cosh y\sin x$$

$$Im(\sin z)=-\frac{1}{2}(e^{-y}\cos x-e^{y}\cos x)=\sinh y\cos x$$

$$|\sin z|=Re^2+Im^2=\sqrt{\sinh^2 y+\sin^2 x}$$

易错点：z为复数，求实虚部需进一步化简

2. 求积分 $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$，并证 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}(\sin\theta)d\theta=0$

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i f(0)=2\pi i\ .\quad 又\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta$$

$$\rightarrow 2\pi i=i\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta+i\sin\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)]d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\pi.$$

$$\therefore\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)=\pi$$

易错点：$e^{e^{i\theta}}=e^{\cos\theta+i\sin\theta}=e^{\cos\theta}\cdot e^{i\sin\theta}=e^{\cos\theta}(\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta))$

中 $e^{i\sin\theta}$ 化简易与 $e^{i\theta}$ 化简混淆

3. 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}dx\ ,a>0$

$R(x)$ 上半平面有二级极点 ai，实轴有单极点 $z=0$

$$Res[R(z)e^{iz},ai]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{z(z+ai)^2}\right)=\frac{-e^{-a}(a+2)}{4a^4}\ ,Res[R(z)e^{iz},0]=\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^4}$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}Im\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x(x^2+a^2)^2}dx=\frac{\pi}{4a^2}[2-e^{-a}(a+2)]$$

易错点：利用留数，通过 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos mx dx$，$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin mx dx$ 计算 $\int_0^{+\infty}R(x)\cos mx dx$ 时"$\frac{1}{2}$"易丢.

4. 证明. $|z_1+z_2+\cdots z_n| \ge |z_1|-|z_2|\cdots-|z_n|$

2): 设 $0<a_0\le a_1\cdots\le a_n$ 证 $p_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots a_{n-1}z+a_n=0$ 在$|z|<1$无根.

(1): 三角不等式. $|z_1+z_2\cdots+z_n|\ge|z_1|-|(z_2+z_3+\cdots z_n)|$

$|z_2+z_3+\cdots z_n|\le|z_2|+\cdots+|z_n|$

$\to |z_1+z_2+\cdots z_n|\ge|z_1|-|z_2|\cdots-|z_n|$.

(2): 构造 $G(z)=(1-z)p_n(z)$ 要证 $G(z)=0$在$|z|<1$内无根

$|(1-z)p_n(z)|=|-a_0z^{n+1}+a_0z^n-a_1z^n+a_1z^{n-1}+\cdots-a_{n-1}z^2+a_{n-1}z+a_n-a_nz|$

$=|a_n+(a_{n-1}-a_n)z+(a_{n-2}-a_{n-1})z^2+\cdots(a_0-a_1)z^n-a_0z^{n+1}|$

$\ge|a_n|-|(a_{n-1}-a_n)z|-|(a_{n-2}-a_{n-1})z^n|-\cdots|(a_0-a_1)z|-|a_0z^{n+1}|$

$|(a_{i-1}-a_i)z|<(a_i-a_{i-1})$

$\to|(1-z)p_n(z)|>a_n-(a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2})-\cdots(a_1-a_0)-a_0=0$

$\therefore |(1-z)p_n(z)|>0.\ \to p_n(z)\ne0$.

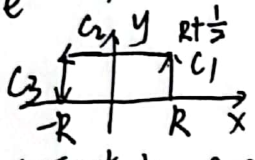
易错点. 1°. 三角不等式运用

2°. 复数域中. $z_1\cdot z_2=0 \Leftrightarrow z_1=0$或$z_2=0$

3°. $0<a_0\le a_1\cdots\le a_n$条件 在乘$(1-z)$后 错位相减.

5. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx$.

闭路:



$\int_C f(z)dz=(\int_{-R}^{R}+\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3})f(z)dz$

仅有 $z=0$ 一个可去奇点 $\int_C f(z)dz=0$.

$\int_{C_1}f(z)dz=\int_0^{\frac12}\frac{R+iy}{e^{\pi(R+iy)}-e^{-\pi(R+iy)}}dy$ $\lim\limits_{R\to+\infty}f(z)=0$. $\therefore\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_1}f(z)dz=0$

同理 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_2}f(z)dz=0$.

C_2上: $z=x+\frac{i}{2}$ $\int_{C_2}f(z)dz=\int_R^{-R}\frac{x+\frac{i}{2}}{e^{\pi(x+\frac{i}{2})}-e^{-\pi(x+\frac{i}{2})}}dx=\int_{-R}^{R}\frac{ix}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx-\int_{-R}^{R}\frac{\frac12}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx$

奇

$\int_{-R}^{R}\frac{ix}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx=0$ 而 $\int_{-R}^{R}\frac{\frac12}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx=\int_{e^{-\pi R}}^{e^{\pi R}}\frac{\frac12}{t+\frac1t}d(\frac1\pi\ln t)=\frac{1}{2\pi}\int_{e^{-\pi R}}^{e^{\pi R}}\frac{dt}{t^2+1}$

$= \frac{1}{2\pi}(\arctan e^{\pi R} - \arctan e^{-\pi R})$

$\therefore \lim_{R\to\infty}\int_{C_2} f(z)dz = -\frac{1}{4}$　故 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = \frac{1}{8}$

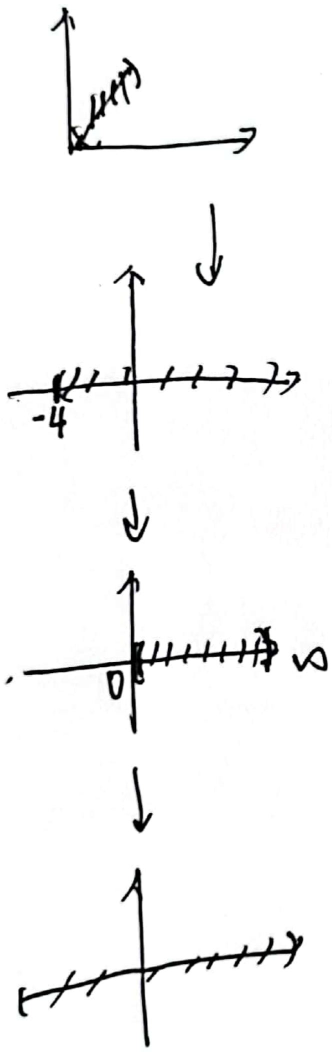
易错点：1° 积分回路选取

2° 分段考虑积分

3° $\int_{-R}^{R}\frac{\frac{1}{2}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx$ 的计算

4° " $\frac{1}{2}$ "

6. 将沿着线段~~有割缝~~ $[0,1+i]$ 有割缝的第一象限变为上半平面：



① $t(z)=z^4$.
将该区域变为去掉 $[-4,+\infty)$ 的 t 平面 D'

② 平移 $u=t+4$ 移去掉 $(0,+\infty)$ 全平面.

③ $w=\sqrt{u}$，取 $\sqrt{1}=1$ 的分支. 变为上半平面

易错点：1°. 象限定义不含坐标

2°. 缝到坐标的转移

7. $f(z)$在C内部除一个一阶极点外解析，且连续到C，在C上$|f(z)|=1$

证 $f(z)=a$ ($|a|>1$) 在C内恰有一根

设$f(z)-a$在C内有N个零点

辐角原理：$N-1=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg[g(z)-a]=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg a+\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg[\frac{g(z)}{a}-1]$

$\Delta_C\arg a=0$. 令$w=\frac{g(z)}{a}-1$

在C上有$|w+1|=\left|\frac{g(z)}{a}\right|<1$，则$C$的像位于$|w+1|<1$内

$\therefore \Delta_C\arg w=0$. $\therefore \Delta_C\arg[f(z)-a]=0 \to N=1$

难点：利用辐角原理，通过$\Delta_C\arg f_1f_2=\Delta_C\arg f_1+\Delta_C\arg f_2$来化简

参考儒歇定理的证明.

8. 若$f(z)$在$|z|<R$解析，$f(0)=0$，$|f(z)|\le M<+\infty$，则

(1)：$|f(z)|\le\frac{M}{R}|z|$，$|z|<R$，且$|f'(0)|\le\frac{M}{R}$.

(2)：若在圆内一点z ($0<|z|<R$) 有$|f(z)|=\frac{M}{R}|z|$，则$f(z)=\frac{M}{R}e^{i\alpha}z$ (α为实数)

(1)：z为圆内任一点，$|z|<r<R$. 最大模原理$\Rightarrow|\varphi(z)|\le|\varphi(\zeta)|$ ($|\zeta|=r$). $|z|<R$)

即 $|\varphi(z)|\le\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\le\frac{M}{r}$. / 构造 $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}$

令$r\to R$，则$|\varphi(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{M}{R}$ 而$|\varphi(0)|=|f'(0)|\le\frac{M}{R}$.

$\therefore f(z)\le\frac{M}{R}|z|$

(2)：若圆内一点z使$|f(z)|=\frac{M}{R}|z|$，则$|\varphi(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|=\frac{M}{R}$ 圆内取等.

由最大模原理$|\varphi(z)|=|c|=\frac{M}{R}$ $\therefore f(z)=\frac{M}{R}e^{i\alpha}z$ (α为实数).

难点：$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}$构造，最大模原理条件“不恒为常数”.