# 数学分析 (B1) 第 4 次习题课讲义 — 期中复习

余启帆[1]

2021 年 11 月 12 日

## 在前

分析是极限的艺术.

— 任广斌

要做艺术的数学, 不要做工匠的数学.

— 程 艺

数无形时少直觉, 形少数时难入微. 数与形, 本是相倚依, 焉能分作两边飞.

— 华罗庚

## 1 知识梳理

**说明** 下面的知识梳理仅基于助教的理解, 简单罗列较为重要的知识点, 未罗列的部分不代表考试不涉及, 更多内容请同学们阅读课本. 希望同学们在复习时可以对照此提纲自行梳理知识点, 对于提纲中列出的内容, 应当做到自己能够用严格的数学语言将其表述, 并对照课本完善自己的表述.

### 1.1 极限

#### 1.1.1 定义

**1 数列极限** $\varepsilon - N$ 语言

**2 函数极限 (24 种形式)** $\varepsilon - \delta$, $\varepsilon - A$, $M - \delta$, ...

† $\forall, \exists$ 量词的运用

† 原命题、逆否命题、逆命题、否命题之间的逻辑

#### 1.1.2 性质

**1 唯一性** 存在必唯一.

**2 局部性**

(1) 数列极限: 收敛性只与充分大以后的项有关, 改变数列的有限项不影响收敛性;

† "充分大" 指: $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 对 $\forall n > N$, ...

(2) 函数极限 (以 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 为例): 收敛性只与 $x_0$ 附近 (去心邻域内) 的函数值有关;

† "附近" 指: $\exists \delta > 0$, 对 $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$.

**3 有界性** 收敛必有界.

[1]闻道有先后, 解答有疏漏. 发现错误欢迎联系我: qifan@mail.ustc.edu.cn

**4　相容性**　四则运算和函数复合的相容性.

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to y_0} f(y) = a \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0 \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = a \tag{1.1}$$

**5　保序性**　保序性与保号性等价.

### 1.1.3　收敛的证明 & 极限的计算

注意　应当注意到, 下列所有方法对数列极限和函数极限均有对应的形式.

**1　定义**

† “四步走” 书写格式

**2　极限的四则运算法则**

**3　两边夹法则**

† 规范书写格式

- ▷ 具体参考第 1 次习题课讲义.

† 放缩够用即可

**4　一些重要的极限**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \tag{1.2}$$

及其相应的函数极限形式.

尤其是, 与自然常数 e 有关的极限:

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \tag{1.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e} \tag{1.4}$$

**5　单调有界判别法**　证明数列单调性的 3 种方法:

(1) 将 $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n$ 转换为 $a_n$ 的函数, 根据函数的性质证明其 $> 0$ 或 $< 0$;

(2) 运用数学归纳法, 根据 $a_{n+1} > a_n$ 证明 $a_{n+2} > a_{n+1}$;

(3) 将 $a_{n+2} - a_{n+1}$ 化为 $a_{n+1} - a_n$ 的因式, 直接根据递推证明其正负性.

† 详见第 1 次习题课讲义.

**6　Cauchy 收敛准则**

**7　Stolz 定理和 L'Höspital 法则**

注意适用条件: 要说明是 “ $\dfrac{0}{0}$ 型” 或 “ $\dfrac{*}{\infty}$ 型”, 不能啥都不说就直接用.

**说明**　Stolz 定理可以看作离散情形的 L'Höspital 法则.

**8　无穷小替换**

**说明**　本质是四则运算法则.

注意　必须是因式替换!

**9　Taylor 展开**　对于较为复杂的函数极限, 使用 Taylor 展开相比 L'Höspital 法则往往更方便.

#### 1.1.4　发散的证明

**1　定义法**　考虑收敛的否命题.

**2　反证法**　假设极限存在且有限, 推导矛盾.

**3　证明无界**

**4　Cauchy 收敛准则**

**5　子列极限 & 单边极限**

(1) 数列: 考虑两个收敛于不同极限的子列

(2) 函数: 考虑左右极限不相等

#### 1.1.5　定理

**说明**　以下定理都应该能够清晰地叙述出其含义, 包括定理的 (1) 条件, (2) 结论, (3) 适用范围.

**1　单调有界必有极限**

**2　Bolzano-Weierstrass 定理 (列紧性定理)**

**3　Cauchy 收敛准则**

**4　确界原理**

**5　闭区间套定理**

**6　有限覆盖定理**[2]

**说明**　以上 6 条定理构成实数连续性的 6 种等价表述形式.

**7　Heine 归结原理**　函数极限和数列极限的桥梁.

### 1.2　单变量函数的连续性

#### 1.2.1　定义

**1　连续**

**2　一致连续**　强调一致性!!!

**思考**　到底指的是哪个量与哪个量的一致性? 或者说, "一致连续性" 相比 "连续性" 的优越性到底体现在何处?

回答清楚了这个问题, 基本就可以算是学懂了 "一致连续".

**3　Lipschitz 连续**　下面列出一些命题帮助理解.

**例题 1.1**　证明下列关于连续和一致连续的命题:

(1) 若 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上一致连续;

(2) 若 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ 为有限的数, 则 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续;

(3) 若将极限的条件替换成有界: 证明存在这样的函数: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界, 但不一致连续;

(4) 若 $f$ 在 $[a,b)$ 上连续, 但 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$, 则 $f$ 在 $[a,b)$ 上不一致连续;

(5) 若 $f$ 在 $(a,b)$ 上连续, 则 $f$ 在 $(a,b)$ 上一致连续的充分必要条件是: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在且有限;

[2] 数学分析 (B1) 不要求掌握.

(6) 若 $f$ 在 $(a,b]$, $[b,c)$ 上均一致连续, 则 $f$ 在 $(a,c)$ 上一致连续;

(7) 若 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 $f$ 是周期函数, 则 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续;

(8) 若 $f$ 在区间 $I$ 上可导且 $f'$ 有界, 则 $f$ 在 $I$ 上一致连续; (这里的区间 $I$ 既可以是有限区间, 也可以是无限区间)

(9) 若 $f$ 是区间 $(a,b)$ 上的有界凸函数, 则 $f$ 在 $(a,b)$ 上一致连续.

提示　(1) 此即 Cantor 定理;

(2) 选取合适的 $X$, 在 $[a,X+1]$, $[X,+\infty)$ 两个区间上分别考虑;

(3) 注意到函数有界, 因此应当考虑振荡导致不一致连续的函数;

(4) 见下一问;

(5) 充分性: 补充定义 $f(a)=f(a+)$, $f(b)=f(b-)$; 必要性: Cauchy 收敛准则;

(6) 对 $x_1,x_2$ 均落在左半区间、右半区间、落在两边的情况分别讨论, 然后选取共同的 $\delta$; 对于落在两边的情形, 可以利用区间 $\left[\dfrac{a+b}{2},\dfrac{b+c}{2}\right]$ 上的一致连续性;

(7) 在一个周期上考虑, 然后用上一结论即可;

(8) 运用 Lagrange 中值定理. 对于此结论, 补充说明一点:

对于可导的函数, 区间 $I$ 上导函数有界是 $f$ 在 $I$ 上 Lipschitz 连续的充分必要条件;

(9) 考虑证明函数在区间端点的邻域内单调, 从而因为有界存在单边极限, 可以补充定义后使之成为闭区间.

**证明**　(9) 先证 $f$ 在端点 $x=a$ 的右邻域 $(a,a+\delta)$ $(\delta>0)$ 内单调.

(a) 若能直接找到这样的 $\delta>0$ 满足条件, 则证毕.

(b) 若未能找到这样的 $\delta$ 满足条件, 不妨设 $f$ 在区间 $(a,a+\delta')$ $(\delta'>0)$ 上不单调, 从而 $\exists\xi_1,\xi_2\in(a,a+\delta')$, $\xi_1<\xi_2$, 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)$, 则对 $\forall x_1,x_2: a<x_1<x_2<\xi_1<\xi_2$, 由凸函数的性质知

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leqslant\frac{f(\xi_1)-f(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=0,$$

这说明 $f$ 在 $(a,\xi_1)$ 上单调递减, 取 $\delta=\xi_1$.

至此, 我们证明了 $\exists\delta>0$, 使得 $f$ 在点 $a$ 的邻域 $(a,a+\delta)$ 上单调, 又 $f$ 有界, 因此存在有限极限 $f(a+)$, 补充定义 $f(a):=f(a+)$.

同理可定义 $f(b)=f(b-)$, 得到定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f$.

由**习题 3.5.4** 的结论知, $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 因此必一致连续. □

### 1.2.2　间断点

**1　第一类间断点**

(1) 可去间断点

(2) 跳跃间断点

**2　第二类间断点**

### 1.2.3　闭区间上连续函数的性质

**1　★ 一致连续性**

**定理 (Cantor)**　有限闭区间上的连续函数一定一致连续.

对于连续性和一致连续性的区别和理解, 详见群文件《关于连续与一致连续的讨论》.

**2 零值性**

**3 介值性**

**4 有界性**

**5 最值性**

## 1.3 单变量函数的微分学

**1.3.1 定义** 区分 $f'_{\pm}(x_0)$, $f'(x_0\pm)$, 并理解二者的关系 (**定理 3.19**).

**1.3.2 计算法则**

**1 四则运算**

**2 复合函数求导**

**3 ★ 反函数求导**

**4 ★ Leibniz 公式 — 高阶导数**

**5 隐函数求导**

**6 参数方程表示的函数求导**

**1.3.3 导函数的性质**

**1 介值性** Darboux 定理

**2 无第一类间断点**

**1.3.4 利用导数研究函数**

**1 单调性 & 极值点**

**2 凹凸性 & 拐点** 以凸函数为例: 设 $f$ 是区间 $I$ 上的凸函数,

(1) 斜率递增性: $\forall x_0, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_0 < x_2$, 则

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \tag{1.5}$$

(2) 战神 (Jensen) 不等式: $\forall [x_1, x_2] \subset I$, $\forall x \in [x_1, x_2]$, $\alpha \in [0,1]$ 有

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \tag{1.6}$$

**说明 (1)** Jensen 不等式有很自然的 $n$ 元情形的推广, 请自行补充. (**习题 3.5.1**)

**说明 (2)** 上述两条既可以看作凸函数的性质, 也可以看作凸函数的定义. 此外, 上述性质都有很直观的几何含义, 对于一些凸函数的命题, 可以先从几何图像上寻找直观理解, 再根据其性质从代数角度予以证明.

**3 曲率 & 曲率半径**

**1.3.5 定理**

**1 Fermat 定理**

**2 Rolle 定理**

**3 Lagrange 中值定理 (微分中值定理)**

**4 Cauchy 中值定理**

**说明** 应当掌握构造辅助函数, 并利用 Rolle 定理证明 Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理的证明方法. 在后面的例题部分, 列出了一些常用的辅助函数的构造方法. (见第 19 页)

### 1.3.6 一元微分学的顶峰 — Taylor 定理

**1 带 Peano 余项的 Taylor 公式**

**2 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式**

**3 带 Cauchy 余项的 Taylor 公式**[3]

**4 Taylor 展开的方法**

(1) 直接计算 $n$ 阶导数. 如: $(1+x)^\alpha$ 及各基本初等函数的展开;

(2) 利用熟知函数的展开. 如: $\ln(\cos x)$, $\cos(\sin x)$;

(3) 利用 $f'$ 的 Taylor 展开. 此方法的思想是: $f$ 的 $n$ 阶导数等于 $f'$ 的 $n-1$ 阶导数, 因此若通过适当方法求得了 $f'$ 的 Taylor 展开, 则可以根据系数的关系得知 $f'^{(n-1)}$, 从而得到 $f^{(n)}$ 如:

(a) $\arcsin x$

(b) $\arccos x$

(c) $\arctan x$

(d) $\ln(1+x)$

(4) 利用待定系数法. 如: (此方法通常只适用于求前几项系数)

(a) $\arcsin x$

(b) $\sqrt[3]{2-\cos x}$ (也可以利用熟知函数的展开直接计算)

(c) $\sqrt[3]{\sin x^3}$

此外, 若在 Taylor 展开时注意到函数的奇偶性, 将有效减少计算量. 例如, 对于奇函数的展开, 应当只包含奇数项.

对于 Taylor 展开, 还有几点需要说明:

(1) 对于 Peano 余项, 由于包含 $o(\cdots)$, 这包含一个极限过程, 因此应当将相应的极限过程在展开式的最后写出来, 例如 $x \to x_0$;

(2) 对于 Lagrange 余项, 应当指出 $\xi$ 或 $\theta$ 的范围, $\xi \in (x_0, x)$ 或 $(x, x_0)$, $\theta \in (0,1)$;

(3) 所谓 Taylor 展开, 其实就是用关于 $x$ 的多项式去逼近原来的函数 $f(x)$, 因此最后展开的结果应该为 $x^k$, 例如, $\ln(\cos x)$ 的展开并不是展开为关于 $\cos x$ 的函数;

(4) 所有系数都应当求出来, 尽可能化简, 不能将系数写为 $\cos^{(n)}\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ 之类的形式.

下面对于后 3 种方法, 分别通过例题进行阐述.

**例题 1.2 (利用熟知函数的展开)** 求函数 $f(x)=\ln(\cos x)$ 带 Peano 余项的六阶 Maclaurin 展开.

[3] 讲到积分相关的内容之后才涉及, 暂时不要求掌握.

**解** 利用函数 $\ln(1+x)$, $\cos x$ 的 Maclaurin 展开:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+\cos x-1) \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6}x^6+o(x^6)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)^2 \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^3+o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6), \quad x\to 0
\end{aligned}$$

□

**说明** 此题体现了利用已知函数的展开求 Taylor 展开的方法:

(1) 确定共同的极限过程, 如本题中希望利用 $\ln(1+x), \cos x$ 的展开, 因此先检验 $\cos x-1\to 0$ $(x\to 0)$, 从而可以将 $\cos x-1$ 的展开代入 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的展开;

(2) 对于所需的展开阶数, 确定各代入项需要保留的阶数, 如

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3), \quad x\to 0,$$

中,

(a) $x$ 为一次项, 因此需要代入 $\cos x-1$ 的六阶展开;

(b) $-\frac{1}{2}x^2$ 为二次项, 因此需要代入 $\cos x-1$ 的四阶展开. 应当注意到,

注意 若只代入二阶展开, 将丢失 $x^2, x^4$ 在平方过程中产生的 6 次项, 不少同学犯了这个错误;

(c) $\frac{1}{3}x^3$ 为三次项, 因此需要代入 $\cos x-1$ 的二阶展开, 因此有 $x^4$ 参与的项在立方的过程中得到的结果至少为 $x^2\cdot x^2\cdot x^4=x^8$ 八次方项, 无需考虑.

(3) 在代入过程中, 保留初始结果, 写出各项的 $o(\cdots)$, 最后再合并同类项化简, 合并为一个 $o(\cdots)$.

希望通过这个例子的叙述, 同学们能理解这一过程和相应的书写格式规范, 最主要的是, 如何根据所需的项确定代入项需要保留的阶数, 既不遗漏, 也不累赘.

**例题 1.3 (利用 $f'$ 的 Taylor 展开)** 求函数 $f(x)=\arcsin x$ 带 Peano 余项的五阶 Maclaurin 展开.

**解** 注意到,

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^5), \quad x\to 0,$$

对比 $f'(x)$ 的 Taylor 展开式

$$f'(x)=f'(0)+f''(0)x+\frac{f'''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(4)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(5)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(6)}(0)}{5!}x^5+o(x^5), \quad x\to 0$$

可得:

$$f'(0)=1, \quad f'''(0)=1, \quad f^{(5)}(0)=9, \quad f''(0)=f^{(4)}(0)=f^{(6)}(0)=0,$$

因此 $f(x)$ 的展开

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(0)x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(5)}}{5!}x^5 + o(x^6) \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

□

**例题 1.4 (待定系数法)**　求函数 $f(x) = \arcsin x$ 带 Peano 余项的三阶 Maclaurin 展开.

**解**　注意到 $f(x)$ 为奇函数, 因此设其 Maclaurin 展开式为

$$f(x) = \arcsin x = a_1 x + a_3 x^3 + o(x^3), \quad x \to 0,$$

将上式代入 $x = \sin(\arcsin x)$, 可得:

$$\begin{aligned} x &= \sin(\arcsin x) \\ &= \arcsin x - \frac{1}{3!}(\arcsin x)^3 + o(x^3) \\ &= (a_1 x + a_3 x^3 + o(x^3)) - \frac{1}{6}(a_1 x + o(x))^3 + o(x^6) \\ &= a_1 x + \left(a_3 - \frac{1}{6}a_1\right) x^3 + o(x^3), \quad x \to 0, \end{aligned}$$

比较等式两边的系数可得:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 - \dfrac{1}{6}a_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

因此 $\arcsin x$ 的展开式

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

这与上一种方法求出的结果是一致的. □

**说明**　此方法应当灵活应用, 除了反函数, 还可以利用待定系数法计算以下函数的展开: $2 - \cos x = (\sqrt[3]{2 - \cos x})^3$, 请同学们不妨一试.

# 2　例题

## 2.1　极限与导数的计算

**2.1.1**　　设数列 $\{a_n\}$ 为正的有界数列, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$.

提示　按照 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 是否有界分类讨论.

**解**　记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则 $\{S_n\}$ 单调递增.

(1) 若 $\{S_n\}$ 无界, 则 $S_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$, 又 $\exists M > 0$, $|a_n| < M$, 故

$$0 < \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} < \frac{M}{S_n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{S_n}=0$ 及两边夹法则知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0.$$

(2) 若 $\{S_n\}$ 有界, 则 $\{S_n\}$ 收敛, 记为 $S_n\to S$ $(n\to\infty)$. 则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

综上,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0.$$

□

**2.1.2** 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-\dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]$.

**解 (1)** 由带 Peano 余项的 Taylor 定理,

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\quad(x\to x_0)$$

$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}=\frac{-\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)}{(f'(x_0))^2(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)}=\frac{-\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)}{(f'(x_0))^2+o(1)}\quad(x\to x_0)$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]=-\frac{f''(x_0)}{2(f'(x_0))^2}.$$

□

**解 (2)** 由 L'Höspital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]&=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f'(x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(f(x)-f(x_0))(x-x_0)f'(x_0)}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)-f'(x)}{f'(x_0)(f(x)-f(x_0))+(x-x_0)f'(x_0))}\cdots(1)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{-\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}}{f'(x_0)\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f'(x_0)\right)}\\&=-\frac{f''(x_0)}{2(f'(x_0))^2}\cdots(2)\end{aligned}$$

□

**说明** 上式第 2 步用到 L'Höspital 法则, 最后一步运用的是导数的定义.

**错解** (1) 运用带 Lagrange 余项的 Taylor 定理;

(2) 直接运用两次 L'Höspital 法则.

出现上述错误的原因是, $f(x)$ 在 $x_0$ 处二阶可导只能说明 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近存在一阶导数, 但在 $x_0$ 附近不一定存在二阶导数, 因此上述带 Lagrange 余项的 Taylor 定理和两次 L'Höspital 法则均不可用.

**注意** 请留意各定理适用的条件!

**2.1.3** 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 满足 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 并且 $f(x)$ 有反函数 $g(x)$, 求 $f(x^2)$ 和 $g(x^2)$ 在 $x=0$ 处的关于 $x$ 的二阶导数的值.

**提示 (1)** 在计算 $g(x^2)$ 的反函数时, 先计算 $g(0)$, $g'(0)$, 然后即可完全仿照求 $f(x^2)$ 的过程计算 $g(x^2)$ 的二阶导数.

**解 (1)** 由题意得,

$$\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=2xf'(x^2),\quad \frac{\mathrm{d}^2f(x^2)}{\mathrm{d}x^2}=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)\implies \left.\frac{\mathrm{d}^2f(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2f'(0)=2,$$

由于 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, $g(0)=0$, $g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}=1$, 故

$$\frac{\mathrm{d}^2g(x^2)}{\mathrm{d}x^2}=2g'(x^2)+4x^2g''(x^2)\implies \left.\frac{\mathrm{d}^2g(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2g'(0)=2.$$

□

**提示 (2)** 按照反函数求导法则直接求 $g(x^2)$ 的二阶导数.

**解 (2)** 下面按照反函数求导法则直接计算 $g(x^2)$ 的二阶导数. 为了使得表述更加清晰, 将 $g(x^2)$ 写回 $f^{-1}(x^2)$ 的形式, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g(x^2)}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x^2)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}\cdot 2x\\&=\frac{1}{f'(f^{-1}(x^2))}\cdot 2x\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2g(x^2)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}g(x^2)}{\mathrm{d}x}\right)=2\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(x^2))}+2x\cdot\left(-\frac{f''(f^{-1}(x^2))\cdot\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x^2)}{\mathrm{d}x}}{(f'(f^{-1}(x^2)))^2}\right)$$

$$\implies \left.\frac{\mathrm{d}^2g(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\frac{2}{f'(g(0))}=\frac{2}{f'(0)}=2.$$

□

**注意** 反函数的求导法则: $\dfrac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ 而不是 $\dfrac{1}{f'(x)}$. 这是不少同学在理解"反函数的导数等于原函数导数的倒数"这一结论时会犯下的错误, 这时源于前者在描述反函数时写为 $y=f^{-1}(x)$ (自变量仍为 $x$), 而后者直接将 $y=f(x)$ 的反函数写为 $x=f^{-1}(y)$ (自变量变成了 $y$). 事实上,

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}f(f^{-1}(x))}=\frac{\mathrm{d}f(f^{-1}(x))}{\mathrm{d}(f^{-1}(x))}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{f^{-1}(x)}}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

可见, 在推导函数求导 (尤其是反函数求导) 的相关法则的时候, 采用 Leibniz 记号通常比 Newton 记号更加直观清晰.

在讲授习题课后, 有同学提出了两种十分不错的想法, 在此一并罗列, 并表示感谢.

**提示 (3)** 在求反函数的二阶导时, 使用导数的定义.

**解 (3)**

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2g(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}&=\left.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}g(x^2)}{\mathrm{d}x}\right)\right)\right|_{x=0}=\lim_{x\to0}\frac{\left.\frac{\mathrm{d}g(x^2)}{\mathrm{d}x}\right|_{x}-\left.\frac{\mathrm{d}g(x^2)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}}{x-0}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{d}g(x^2)}{x\,\mathrm{d}x}=2\cdot\left.\frac{\mathrm{d}g(x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}\right|_{x=0}=2\cdot\left.\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{2}{f'(g(0))}=2\end{aligned}$$

其中已用到 $\left.\dfrac{\mathrm{d}g(x^2)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$ 是一阶导时给出的结论. □

**提示 (4)** 利用反函数和原函数曲率为相反数的性质. 但应当留意, $f(x^2), g(x^2)$ 并不是互为反函数, 因为 $y=f(x^2)$ 的反函数是 $x^2=f^{-1}(y) \implies x=\sqrt{f^{-1}(y)}$ (这里暂且不考虑正负号的问题), 若写为 $x$ 为自变量的形式, 应为 $y=\sqrt{g(x)}$, 显然这与 $y=g(x^2)$ 是不一样的. 因此本题用此方法求解并没有带来方便, 在此省略.

## 2.2 单变量函数的微分学

**2.2.1 (习题 3.3.7)** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $|f'(x)|<1$, 又 $f(0)=f(1)$. 证明: 对于 $[0,1]$ 上任意的两点 $x_1,x_2$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$.

**提示** 按照 $x_2-x_1 \geqslant \dfrac{1}{2}, < \dfrac{1}{2}$ 分类讨论.

**证明 (1)** 不妨设 $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$.

(1) 若 $x_2-x_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$, 由 Lagrange 中值定理知, $\exists \xi \in (x_1,x_2)$, 使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2|<x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}.$$

(2) 若 $x_2-x_1>\dfrac{1}{2}$, 由 Lagrange 中值定理知, $\exists \xi_1 \in (0,x_1),\ \xi_2\in(x_2,1)$, 使得

$$\begin{aligned}
|f(x_1)-f(x_2)| &= |f(x_1)-f(0)+f(1)-f(x_2)| \\
&\leqslant |f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)| \\
&= |f'(\xi_1)|\cdot|x_1-0|+|f'(\xi_2)|\cdot|1-x_2| \\
&< x_1+1-x_2 \\
&= 1-(x_2-x_1) \\
&< \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

综上,

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}.$$

□

**推广** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可微, 且 $|f'(x)|<M$, 又 $f(a)=f(b)$. 证明: 对于 $[a,b]$ 上的任意两点 $x_1,x_2$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{M}{2}(b-a)$.

对于推广的证明当然可以仿照上述证明来完成, 此处再给出一种不用分类讨论的证明方法.

**证明 (2)** 由 Lagrange 中值定理知,

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\,|x-y|<M\,|x-y|$$

又 $f(a)=f(b)$, 不妨设 $x_1<x_2$, 则有

$$\begin{aligned}2\left|f(x_1)-f(x_2)\right| &= \left|f(x_1)-f(a)+f(b)-f(x_2)+f(x_1)-f(x_2)\right| \\ &\leqslant \left|f(x_1)-f(a)\right|+\left|f(b)-f(x_2)\right|+\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \\ &< M(x_1-a+b-x_2+x_2-x_1) \\ &= M(b-a)\end{aligned}$$

故

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{M}{2}(b-a).$$

□

**说明** 此证明的思想在于通过绝对值不等式正负的自由选取, 将变量 $x_1, x_2$ 在不等式中消去, 值得细细品味.

**2.2.2 (第 3 章综合习题 9)** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 且满足 $f(a)>0$, $f'(a)<0$, 以及当 $x>a$ 时, $f''(x)\leqslant 0$. 试证: 在区间 $(a,+\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

**提示** 先证明存在性, 再证明唯一性.

**证明** 先证存在性.

由 $f''(x)\leqslant 0$ 知 $f$ 是 $[a,+\infty]$ 上的凹函数, 从而对 $\forall x>a$, 有

$$\begin{gathered}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'(a), \\ \Longrightarrow\ f(x)<f'(a)(x-a)+f(a)\to-\infty,\quad x\to+\infty\end{gathered}$$

在 $[a,+\infty)$ 区间上运用零点定理知, $\exists x_0\in(a,+\infty)$, 使得 $f(x_0)=0$. 存在性得证.

下证唯一性.

由 $f''(x)\leqslant 0$ 知 $f'$ 单调递减, 从而 $f'(x)<0$, $x\in[a,+\infty)$, 从而 $f$ 单调递减, 因此零点是唯一的. 唯一性得证. □

**2.2.3** 设 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 中每点的右导数存在, 且 $f(a)<f(b)$. 求证: 存在 $c\in(a,b)$, 使 $f'_+(c)\geqslant 0$.

**证明** 由 $f\in C[a,b]$ 知, $\exists a'\in(a,b)$, 使得 $f(a')<f(b)$, 且 $f'_+(a')$ 存在. 在 $[a',b]$ 上考虑 $f(x)$. 由 $f(a')<f(b)$ 知, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a',b]$ 上的最小值在 $[a',b)$ 上取得, 不妨记为 $\xi$, $f(\xi)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 从而由极限的保序性知: $\cdots\Longrightarrow f'_+(\xi)\geqslant 0$. □

**加强** 事实上, 可以考虑证明更强的结论: 存在 $c\in(a,b)$, 使 $f'_+(c)>0$.

**提示** 构造辅助函数.

**证明** 由 $f\in C[a,b]$ 知, $\exists a'\in(a,b)$, 使得 $f(a')<f(b)$, 且 $f'_+(a')$ 存在. 在 $[a',b]$ 上考虑 $f(x)$.

记

$$g(x)=f(x)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)-f(a')}{b-a'}(x-a')+f(a')\right)$$

则

$$g(a')=0,\quad g(b)=\frac{1}{2}(f(b)-f(a'))>0=g(a'),$$

且 $\forall c\in[a',b)$, $g'_+(c)$ 存在. $g(x)$ 在区间 $[a',b]$ 上的最小值在 $[a',b)$ 上取得, 记为 $\xi$, 则

$$\begin{aligned} & g'_+(\xi)\geqslant 0\\ \Longrightarrow\ & f'_+(\xi)-\frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)-f(a')}{b-a'}\geqslant 0\\ \Longrightarrow\ & f'_+(\xi)\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{f(b)-f(a')}{b-a'}>0. \end{aligned}$$

□

**2.2.4 (习题 3.5.4)** 设 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸函数, 证明: $f(x)$ 在 $I$ 的内点是连续的.

**提示 (1)** 往证各内点的左右导数均存在.

**证明 (1)** 对 $\forall x_0\in I$, 往证 $f'_\pm(x_0)$ 均存在. 由于 $x_0$ 是区间 $I$ 的内点, 取定 $x_1<x_0$, $x_1\in I$, 对 $\forall x>x_0$, $x\in I$, 由 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸函数知,

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leqslant\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

又 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $x\to x_0^+$ 时, 随 $x$ 的递减而递减, 且有下界 $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, 则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 同理可证 $f'_-(x_0)$ 存在, 故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续且右连续, 从而连续, 由 $x_0$ 的任意性知, $f(x)$ 在 $I$ 的内点是连续的. □

**注意** 左右导数均存在并不能推得该点处导数存在, 但可以推得左右连续, 而左右分别连续可以推得该点处连续.

**提示 (2)** 在各点邻域内考虑 Lipschitz 连续性.

**证明 (2)** 对 $\forall x_0\in I$ 为内点, $\exists\delta>0$, 使得 $U(x_0,\delta)\subset I$, 对 $\forall x\in U(x_0,\delta)$, 由 $f(x)$ 是凸函数知

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta}\leqslant\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta},$$

取 $M=\max\left\{\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta},\dfrac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}\right\}$, 从而

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant M\left|x-x_0\right|,$$

因此 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续. 由 $x_0$ 的任意性知, $f(x)$ 在 $I$ 的内点是连续的. □

**说明** 上述证明利用了 Lipschitz 连续性的思想, 导出了类似的式子, 从而证明 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续; 应当注意到, 若在整个区间 $I$ 上考虑, 将无法得到一个统一的 $M$, 亦即, $f$ 不一定在整个区间 $I$ 上满足 Lipschitz 连续性.

**2.2.5 (习题 3.5.14)** 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数且有上界, 求证: $f(x)$ 是常数.

**提示** 用反证法, 利用凸函数割线斜率递增的性质.

**证明** 用反证法. 假设 $\exists a,b$, 使得 $f(a)\neq f(b)$, 不妨设 $f(b)>f(a)$, $b>a$, 则对 $\forall x>b>a$, 有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Longrightarrow f(x)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)\to+\infty,\quad x\to+\infty,$$

这与 $f(x)$ 有界矛盾, 因此 $\forall a,b$, $f(a)=f(b)$, 即 $f(x)=\text{Const.}$ 为常数. □

**2.2.6　(习题 3.4.6)**　设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(1) 求证: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限;

(2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

**证明**　(1) 由 $0<f(x)<x$ 及 $f(x)$ 的连续性知, $f(0)=0$. 由 $x_1\in(0,a)\Rightarrow 0<f(x_1)<x_1<a$ 及数学归纳法知,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0<x_{n+1}=f(x_n)<x_n<a$$

即, 数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\{x_n\}$ 收敛. 记 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$. 由 $0<\cdots<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<a$ 知, $x_0\in[0,a)$. 等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边取极限得: $x_0=f(x_0)$. 若 $x_0\in(0,a)$, 则 $f(x_0)<x_0$, 矛盾; 故 $x_0=0$. 即,

$$x_n\to 0\quad(n\to\infty)$$

(2) 答案是肯定的.

由 $x_n\to 0^+$ 知, $\dfrac{1}{x_n}\to+\infty$ $(n\to\infty)$ 且 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 单调递增. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$ 存在, 则由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}\cdots(*)$$

又 $n\to+\infty$ 时, 有

$$\begin{cases} x_nf(x_n)<x_n^2\to 0\\ x_n\to 0,\quad f(x_n)\to 0\\ x_n-f(x_n)\to 0\end{cases}$$

由 “$\dfrac{0}{0}$ 型” L'Höspital 法则知,

$$\begin{aligned}(*)&=\lim_{x\to0^+}\frac{xf(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)+xf'(x)}{1-f'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{2f'(x)+xf''(x)}{-f''(x)}\\&=-2\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{f''(x)}-\lim_{x\to0^+}x=-\frac{2}{f''(0)}.\end{aligned}$$

其中已多次用到 $f',f''$ 均连续. 故

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=-\frac{2}{f''(0)}.$$

□

**说明**　将 $nx_n$ 写作

$$nx_n=\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\frac{x_n}{\frac{1}{n}}$$

是研究 $\{nx_n\}$ 型数列的常用手段, 通常结合 Stolz 定理、函数极限、L'Höspital 法则 (Heine 归结原理) 等方法求解, 这种技巧值得留意.

**2.2.7 (习题 3.6.8)** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且对任意 $x \in [0,2]$, 有 $|f(x)| \leqslant 1$ 及 $|f''(x)| \leqslant 1$. 证明: $|f'(x)| \leqslant 2$, $x \in [0,2]$.

提示 对 $f(0), f(2)$ 在任意 $x$ 处进行 Taylor 展开.

**证明** 由 Taylor 定理,

$$\begin{cases} f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(-x)^2 & \cdots(1) \\ f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(2-x)^2 & \cdots(2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$ 得:

$$f(2) - f(0) = 2f'(x) + \frac{1}{2}(f''(\xi_2)(x^2 - 4x + 4) - f''(\xi_1)x^2)$$

因此

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \frac{1}{2}\left|f(2) - f(0) - \frac{1}{2}(f''(\xi_2)(x^2 - 4x + 4) - f''(\xi_1)x^2)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(|f(2)| + |f(0)| + \frac{1}{2}(|f''(\xi_2)|(x^2 - 4x + 4) + |f''(\xi_1)|x^2\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(1 + 1 + x^2 - 2x + 2) \\ &\leqslant 2. \end{aligned}$$

□

注意 两个 Lagrange 余项的中值 $\xi_1, \xi_2$ 并不一定相等, 不能笼统地记成 $\xi$, 然后相减时仅留下关于 $x$ 的一次函数.

**推广** 设 $f$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, 且已知

$$M_0 = \sup\{|f(x)||x \in (0,+\infty)\}, \quad M_2 = \sup\{|f''(x)||x \in (0,+\infty)\}$$

为有限数. 证明: $M_1 = \{|f'(x)||x \in (0,+\infty)\}$ 也是有限数, 并满足不等式 $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.

**下面几道题都需要通过构造合适的辅助函数来证明.**

**2.2.8 (习题 3.3.17)** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导函数, 且 $f(0) = f'(0)$, $f(1) = f'(1)$. 求证: 存在 $\xi \in (0,1)$, 满足 $f(\xi) = f''(\xi)$.

**证明** 记

$$g(x) = \mathrm{e}^x(f'(x) - f(x)),$$

从而

$$g(0) = g(1) = 0, \quad g'(x) = \mathrm{e}^x(f''(x) - f(x)),$$

由 Rolle 中值定理知, $\exists \xi \in (0,1)$, 使得

$$g'(\xi) = 0 \implies f(\xi) = f''(\xi).$$

□

**2.2.9** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微且满足 $f(0)=0$ 及 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$, $x\in[0,1]$. 求证: 在 $[0,1]$ 上, $f(x)\equiv 0$.

**证明 (1)** 记

$$g(x)=(\mathrm{e}^{-x}f(x))^2,$$

则

$$\begin{aligned}g'(x)&=2\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))\\&=2\mathrm{e}^{-2x}(f(x)f'(x)-|f(x)|^2)\\&\leqslant 0,\end{aligned}$$

因此 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减. 因为 $f(a)=0 \implies g(x)\leqslant 0$, 但从 $g(x)$ 的定义可知 $g(x)\geqslant 0$, 从而 $g(x)=0 \implies f(x)=0$. □

**证明 (2)** 设 $|f(x)|$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上有最大值 $|f(x^*)|$, 由 Lagrange 中值定理, $\exists\xi(0,x^*)$, 使得

$$2\,|f(x^*)|\leqslant\left|\frac{f(x^*)}{x^*}\right|=\left|\frac{f(x^*)-f(0)}{x^*-0}\right|=|f'(\xi)|\leqslant|f(\xi)|\leqslant|f(x^*)|$$
$$\implies 2\,|f(x^*)|\leqslant|f(x^*)| \implies f(x^*)=0,$$

因此 $f(x)\equiv 0$, $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 同理可证得 $f(x)\equiv 0$, $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, 因此 $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$. □

**2.2.10 (第 3 章综合习题 8)** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0. \tag{2.1}$$

**证明** 设 $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x$. 则 $F'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}-1$, 往证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 由 $F(0)=F(1)=1$ 及 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$F'(\xi)=0 \implies -\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}=1.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一个零点 $\xi\in(0,1)$, 当 $x\in[0,\xi)\cup(\xi,1]$, $f(x)>0$, 即 $\xi$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 从而

$$f'(\xi)=0\Rightarrow f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

(3) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在两个及以上的零点.

(a) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在有限个零点. 取相邻的两个零点 $a,b$, 不妨设 $a<b$, $f(x)>0$, $\forall x\in(a,b)$. 则 $F(a+)=F(b-)=+\infty$, 从而 $F(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上存在最小值, 设在 $x=\xi$ 处取得, 则 $F'(\xi)=0$.

(b) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在无穷个零点. 记

$$E=\{x|x\in[0,1],\ f(x)=0\}.$$

因为 $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$, 所以 $E\subset(0,1)$. 分别记 $a=\inf E$, $b=\sup E$. 下面分三步完成证明.

(I) 先证 $a, b \in E$, 即 $a, b$ 也是零点. 用反证法. 假设 $f(a) \neq 0$, 由 $a = \inf E$ 知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a + \dfrac{1}{n}$ 不是下确界, 因此 $\exists x_n \in E$, 使得

$$a < x_n < a + \frac{1}{n}, \quad f(x_n) = 0,$$

令 $n \to \infty$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad f(x_n) = 0$$

由函数 $f(x)$ 的连续性可知

$$f(a) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

同理可证 $b$ 也是 $f(x)$ 的零点.

(II) 再证 $f'(a) \leqslant 0$, $f'(b) \geqslant 0$. 这是因为在 $[0, a)$ 上 $f(x) > 0$, 在 $(b, 1]$ 上 $f(x) > 0$, 所以

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{x - a} \leqslant 0.$$

同理可证 $f'(b) \geqslant 0$. 如果 $f'(a) \leqslant 0$, $f'(b) \geqslant 0$ 中有一个等号成立, 那么 $f^2(a) + f'(a) = 0$ 或 $f^2(b) + f'(b) = 0$, 结论自然成立. 下设 $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$.

(III) 由 $f(a) = 0$, $f'(a) < 0$, 得

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) < 0$$

因此 $\exists \delta > 0$, 使得 $a < x < a + \delta$ 时, 有 $f(x) < 0$. 记

$$a' = \inf\{x | f(x) = 0,\ a + \delta < x < b\}.$$

那么在 $a < x < a'$ 中,

$$f(x) < 0 \implies \lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a'^-} F(x) = -\infty$$

所以 $F(x)$ 在 $(a, a')$ 中有最大值点 $\xi \in (a, a')$, 满足

$$F'(\xi) = 0 \Rightarrow f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

□

**另证** (III') 设 $g(x) = f^2(x) + f'(x)$, 则 $g(a) < 0$, $g(b) > 0$.

因为 $f^2(x)$ 连续, 所以是某个函数的导函数, 不妨设 $F'(x) = f^2(x)$, 从而

$$g(x) = F'(x) + f'(x) = (F(x) + f(x))'$$

是 $F(x) + f(x)$ 的导函数, 利用导函数的介值性可得: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$g(\xi) = f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

□

**另证** (b') 仅对 $f$ 在 $[0,1]$ 上存在无穷个零点的情况讨论.

不妨将所有零点记为数列 $\{x_n\}$. 由 $\{x_n\}$ 有界及 Bolzano-Weierstrass 定理知, 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 记 $x_{n_k} \to \xi \in [0,1]$. 则由 $f(x) \in C[0,1]$ 知,

$$f(\xi) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = 0.$$

又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处可导, 因此

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k})-f(\xi)}{x_{n_k}-\xi} = 0$$
$$\Longrightarrow f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

$\square$

**说明** 之所以要对于有限个零点和无限个零点的情形分别讨论, 是因为无限个零点时, 不一定能够找到 $a, b$, 使得 $f(a) = f(b) = 0$ 且 $f(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$, 甚至可能存在零点是稠密的情况, 一个典型的例子是 Dirichlet 函数.

**2.2.11** 设 $f(x)$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x) + f''(x) = -xf'(x).$$

求证: $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都在 $\mathbb{R}$ 上有界.

提示 考虑证明 $f^2(x) + {f'}^2(x)$ 有界, 从而 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 均有界.

**证明** 记

$$g(x) = f^2(x) + \frac{1}{2}{f'}^2(x),$$

则

$$g'(x) = (2f(x) + f''(x))f'(x) = -x{f'}^2(x),$$

因此

$$g'(x) \begin{cases} \geqslant 0, & x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ \leqslant 0, & x > 0, \end{cases}$$

由此可知, $g(x)$ 在 $x = 0$ 处取到最大值, 即

$$f^2(x) + \frac{1}{2}{f'}^2(x) \leqslant f^2(0) + \frac{1}{2}{f'}^2(0),$$

注意到上式右端是一个常数, 因此 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 均有界. $\square$

至此, 我们可以对于一些常用的辅助函数的构造进行总结:

**一些常用的辅助函数构造**

(1) $f'(x) + \lambda f(x) = 0$, 构造 $g(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} f(x)$

† 特别地, 对于 $\lambda = \pm 1$, $f'(x) \pm f(x) = 0$, 构造 $g(x) = \mathrm{e}^{\pm x} f(x)$

(2) $f''(x) - f(x) = 0$, 构造

(a) $g(x)=\mathrm{e}^{x}(f'(x)-f(x))$

(b) $g(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)+f(x))$

(3) $f''(x)+f(x)=0$, 构造

(a) $g(x)=f^2(x)+f'^2(x)$

(b) $g(x)=f(x)\sin x+f'(x)\cos x$

(4) $xf'(x)+\alpha f(x)=0$, 构造 $g(x)=x^{\alpha}f(x)$

(5) $xf(x)+f'(x)=0$, 构造 $g(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}f(x)$

(6) $f'(x)-\lambda(f(x)-x)=1$, 构造 $g(x)=(f(x)-x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$

**2.2.12 (第 3 章综合习题 19)** 设 $a>1$, 函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证: 存在趋于正无穷的正数列 $\{x_n\}$, 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\quad n=1,2,\cdots. \tag{2.2}$$

提示 用反证法. 注意到该式有关 $f,f'$, 因此可以考虑 Lagrange 中值定理.

**证明** 用反证法.

假设结论不成立, 则 $\exists X>0$, 使得 $\forall x>X$, 有 $f'(x)\geqslant f(ax)>0$. 即 $f(x)$ 在 $x>X$ 时单调递增. 取 $X=\dfrac{1}{a-1}>0$, $\forall x>X$, 有 $ax>x+1$. 由 Lagrange 中值定理知, $\exists\xi\in(x,x+1)$, 使得

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)\geqslant f(a\xi)\geqslant f(ax)\geqslant f(x+1)\implies f(x)\leqslant 0,$$

这与函数 $f$ 的值域矛盾. 故假设不成立, 即, 对 $\forall X>0$, $\exists x>X$, 使得 $f'(x)<f(ax)$. 依次取 $X=1,2,\cdots$, 即, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists x_n>n$, 则数列 $\{x_n\}$ 趋于无穷且使得 $f'(x_n)<f(ax_n)$. □

**2.2.13 (习题 3.3.22)** 设 $a\in(0,1)$, $b_1=1-a$,

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-\mathrm{e}^{-b_n}}-a,\quad n=1,2,\cdots. \tag{2.3}$$

问 $\{b_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 请给予证明; 若收敛, 则求其极限.

**证明** 往证: 数列 $\{b_n\}$ 单调递增有上界.

考虑函数

$$f(x)=\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-a,\quad g(x)=f(x)-x,\quad x>0,$$

从而

$$b_{n+1}=f(b_n),\quad b_{n+1}-b_n=f(b_n)-b_n=g(b_n).$$

求导得:

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x}-(1+x))}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}\geqslant 0,\quad g'(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}(1-x-\mathrm{e}^{-x})}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}\leqslant 0,$$

其中已用到 $\mathrm{e}^{x}\geqslant 1+x$, $\mathrm{e}^{-x}\geqslant 1-x$.

因此, $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减.

又

$$g(b_1)=g(1-a)=\frac{-a+\mathrm{e}^{-(1-a)}}{1-\mathrm{e}^{-(1-a)}}>0,\quad g(+\infty)=-a<0,$$

故存在唯一的 $x_0 \in (1-a, +\infty)$, 使得 $g(x_0) = 0$.

下面对 $n$ 用数学归纳法证明 $b_n < b_{n+1} < x_0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) $b_1 = (1-a) < x_0$;

(2) 假设 $b_n < x_0$, 往证: $b_n < b_{n+1} < x_0$ $(n \geqslant 1)$.

$$b_n < b_{n+1} \iff g(b_n) > 0 = g(x_0),$$

因为 $g(x)$ 单调递减, 由归纳假设知上式 $\iff b_n < x_0$, 成立.

$$b_{n+1} < x_0 \iff f(b_n) - x_0 < 0,$$

由 $f(x)$ 单调递增及归纳假设知, 上式左端

$$LHS < f(x_0) - x_0 = g(x_0) = 0,$$

因此 $b_n < b_{n+1} < x_0$.

(3) 由 (1)(2) 及数学归纳法知, $b_n < b_{n+1} < x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

至此, 我们证明了数列 $\{b_n\}$ 单调递增有上界, 因此收敛, 记为 $b_n \to b$ $(n \to \infty)$, 在式 (2.3) 两端取极限得: $g(b) = 0 \implies b = x_0$ 是方程 $\dfrac{b}{1-\mathrm{e}^{-b}} - b - a = 0$ 的根. □

**2.2.14** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ $(a > 0)$ 上有有界的导函数, 证明:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

(2) 函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

**证明** (1) 由 $f'(x)$ 有界知, $\exists M_1 > 0$, 使得 $|f'(x)| \leqslant M_1$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M_1}$, 对 $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta$, 不妨 $0 \leqslant x_2 - x_1 < \delta$. 由 Lagrange 中值定理知, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| < M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{M_1} = \varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

**提示 (1)** 运用一致连续的定义.

(2) 分两步证明.

(I) 先证 $\dfrac{f(x)}{x}$ $(x \geqslant a)$ 有界.

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \frac{x-a}{x} + \frac{f(a)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| + \left|\frac{f(a)}{x}\right| = |f'(\xi)| + \left|\frac{f(a)}{x}\right|$$

其中由 Lagrange 中值定理, $\xi \in (a, x)$ 使得 $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$. 由于 $\left|\dfrac{f(a)}{x}\right|$ 随 $x$ 单调递减, 故有界, 从而 $\exists M_2 > 0$, 使得 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant M_2$, $\forall x \in [a, +\infty)$.

(II) 再证 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot a$, 由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续知, $\exists\delta_1>0$, 使得 $\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$, $|x_1-x_2|<\delta_1$, 均有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_1$. 再取 $\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{a}{M_2}$, $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则 $\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$, $|x_1-x_2|<\delta$,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right|=\left|\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}\right|=\left|\frac{(x_1+x_2-x_1)f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}\right|\\=&\left|\frac{x_1(f(x_1)-f(x_2))}{x_1x_2}+\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{x_1x_2}\right|\leqslant\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2}\right|+\left|\frac{f(x_1)}{x_1}\cdot\frac{x_2-x_1}{x_2}\right|\\<&\frac{\varepsilon_1}{a}+M_2\cdot\frac{\delta_2}{a}=\frac{\frac{\varepsilon}{2}\cdot a}{a}+M_2\cdot\frac{\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{a}{M_2}}{a}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

□

**提示 (2)**　运用 (1) 中导函数有界与一致连续的关系.

**另证**　(2) 分三步证明.

(I) 先证 $\dfrac{f(x)}{x}$ $(x\geqslant a)$ 有界. (同上)

(II) 再证 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$ $(x\geqslant a)$ 有界.

$$\left|\left(\frac{f(x)}{x}\right)'\right|=\left|\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}\right|=\frac{1}{x}\cdot\left|f'(x)-\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{1}{a}\left(|f'(x)|+\left|\frac{f(x)}{x}\right|\right)$$

由 $|f'(x)|\leqslant M_1$, $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant M_2$ 知, $\exists M_3>0$, 使得 $\left|\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'\right|\leqslant M_3$.

(III) 最后证 $\dfrac{f(x)}{x}$ 一致连续.

由 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$ 有界及 (1) 的结论 (将 (1) 的结论作用于 $\dfrac{f(x)}{x}$) 知, $\dfrac{f(x)}{x}$ $(x\geqslant a)$ 一致连续.

□

**说明**　(II) 中 “$\left|\dfrac{f(x)}{x^2}\right|$ 有界” 可通过 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}=0$ 来证明.

**伪证**　(1)

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|f'(x_0)|\leqslant M$$
$$\Longrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\quad \delta=\frac{\varepsilon}{M+1},\quad \forall\,|x-x_0|<\delta,\quad |f(x)-f(x_0)|<(M+1)\delta=\varepsilon,$$

故 $f(x)$ 一致连续.

**分析**　此处固定了 $x_0$, 忽略了一致连续中 $x_1,x_2$ 两者均具有任意性. (实际上这里证明的是连续性. )

## 2.3 一些靠谱或不靠谱的提示

**提示 (1)** 不要看下面的提示.

**提示 (2)** 如果你真的要看提示, 请理性使用, 切勿沉迷其中. [4]

**2.1.1**

**提示** 按照 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ 是否有界分类讨论.

**2.1.3**

**提示** 在计算 $g(x^2)$ 的反函数时, 先计算 $g(0)$, $g'(0)$, 然后即可完全仿照求 $f(x^2)$ 的过程计算 $g(x^2)$ 的二阶导数.

**2.2.1**

**提示** 按照 $x_2 - x_1 \geqslant \frac{1}{2}, < \frac{1}{2}$ 分类讨论.

**2.2.2**

**提示** 先证明存在性, 再证明唯一性.

**2.2.4**

**提示 (1)** 往证各内点的左右导数均存在.

**注意** 左右导数均存在并不能推得该点处导数存在, 但可以推得左右连续, 而左右分别连续可以推得该点处连续.

**提示 (2)** 在各点邻域内考虑 Lipschitz 连续性.

**2.2.6**

**提示**

(1) 利用单调有界判别法;

(2) 考虑 Stolz 定理.

**2.2.7**

**提示** 对 $f(0), f(2)$ 在任意 $x$ 处进行 Taylor 展开.

**2.2.8~2.2.11**

**提示** 构造辅助函数.

**2.2.10**

**提示** 构造辅助函数后, 应当对 $f(x)$ 有无零点的情况分类讨论.

**2.2.12**

**提示** 用反证法. 想办法利用 $f$ 的值域为 $(0, +\infty)$ 的条件.

**2.2.13**

**提示** 这是一道很好的把函数极限和数列极限相结合的题目, 需要通过考虑函数

$$f(x) = \frac{x}{1 - \mathrm{e}^{-x}} - a, \quad g(x) = f(x) - x \tag{2.4}$$

的性质来讨论数列的极限 (从而 $b_{n+1} = f(b_n)$).

可以考虑单调有界判别法和数学归纳法.

[4] 鉴于上次有同学质疑助教给出的提示的正确性, 在此做免责声明/狗头

# 3 综合练习

**说明** 下面是一些有意思的习题供同学们在习题课后练习.

## 3.1 计算题

**3.1.1** 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)=0$, 求 $a,b$ 的值.

**3.1.2** 设函数 $f(x)=x^2\ln(1-x^2)$, 求当 $n>2$ 时, $f^{(n)}(0)$ 的值.

**3.1.3** 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

**3.1.4** 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

## 3.2 证明题

**3.2.1** 设 $E$ 是非空有上界的数集, 且它的上确界 $a$ 不在 $E$ 中. 求证: $E$ 中存在数列 $\{x_n\}$ 严格递增趋于 $E$ 的上确界.

**3.2.2** 函数 $f$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 在 $x=0$ 邻域内有界, 且对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $f(ax)=bf(x)$, 其中 $a>1$, $b>1$. 证明: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

**3.2.3 (第 3 章综合习题 12)** 设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时二阶可微, 且 $f''(x)<0$, $f(0)=0$. 证明: 对任意正数 $x_1,x_2$, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

**3.2.4** 设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$, 证明: $\ln^3 b-\ln^3 a>\dfrac{3}{\mathrm{e}}(b-a)$.

**3.2.5** 设 $f(x)$ 是定义在实轴 $\mathbb{R}$ 上的函数且对任意 $x,y$ 有

$$|xf(y)-yf(x)|\leqslant M|x|+M|y|,$$

其中 $M>0$. 求证:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 收敛;

(2) 存在常数 $a$ 使得对任意 $x$, 有 $|f(x)-ax|\leqslant M$.

**3.2.6** 设函数 $f(x)$ 把有界闭区间 $[a,b]$ 映射到 $[a,b]$, 并且满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$. 任取 $x_1\in[a,b]$, 并归纳地定义 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+f(x_n))$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 内一点 $c$, 且 $f(c)=c$.

**3.2.7 (第 3 章综合习题 6)** 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的二阶可微函数, $f(0)=f(1)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

**3.2.8**

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一阶可导, $f(0)=1, f'(x)<f(x)$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<\mathrm{e}^x$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $f(0)=1, f'(0)\leqslant 1, f''(x)<f(x)$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<\mathrm{e}^x$.

**3.2.9** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导, 在 $(a,b)$ 内二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$, $f(\xi)=0$;

(2) 存在 $a<\xi_1<\xi_2<b$, $f'(\xi_1)=f(\xi_1)$, $f'(\xi_2)=f(\xi_2)$;

(3) 存在 $\eta\in(a,b)$, $f''(\eta)=f(\eta)$.

**3.2.10** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=1$. 又当 $x\geqslant 0$ 时, $|f(x)|\leqslant \mathrm{e}^{-x}$. 求证: 存在 $x_0>0$, 使得 $f'(x_0)=-\mathrm{e}^{-x_0}$.

**3.2.11** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $|f(x)|\leqslant 1$, $f'(0)>1$. 证明: 存在 $\xi$ 使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

**3.2.12** 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 假设存在 $x_0\in(a,b]$ 使得 $f'(x_0)=0$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

**3.2.13** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|. \tag{3.1}$$

## 3.3 简答与提示

### 靠 (pian) 谱 (ren) 的提示

**3.1.3~3.1.4**

提示 运用 Taylor 展开或 L'Höspital 法则.

**3.2.1**

提示 直接利用上确界的定义来构造 $\{x_n\}$.

**3.2.2**

提示 利用定义刻画有界和极限, 并利用 $f(ax) = bf(x)$ 的条件将两者联系.

**3.2.3**

提示 考虑 Lagrange 中值定理.

**3.2.4**

提示 考虑 Cauchy 中值定理.

**3.2.5**

提示 (1) 考虑 Cauchy 收敛准则;
(2) 先猜测 $a$ 的值, 再用反证法.

**3.2.6~3.2.12**

提示 构造辅助函数.

**3.2.10**

提示 运用无穷区间上的 Rolle 定理.

**3.2.12**

提示 构造辅助函数后, 对于能否直接用 Rolle 定理分类讨论.

**3.2.13**

提示 考虑带 Lagrange 余项的 Taylor 定理.

### 应 (bu) 该 (bao) 没 (zheng) 错 (dui) 的答案

**3.1.1**

答案 $a = -1, b = -\dfrac{3}{2}$.

注意 求得 $a, b$ 的值后需要验证充分性.

**3.1.2**

答案 $$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \dfrac{2n!}{2-n}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$$

注意 使用 Leibniz 公式时, 不要遗漏二项式系数.

**3.1.3**

答案 $\dfrac{1}{6}$

**3.1.4**

答案 14

# 4 作业简答与提示

**说明** 本次作业同学们总体情况较好, 因此部分题目仅给出答案和相应的提示, 有错的同学可以参照提示重新计算.

## 4.1 习题 1.3

**1.3.14**

**答案** 各有两条渐近线:

(1) $x=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$;

(2) $x=1$, $y=3x+1$.

**分析** 本题求解思路:

(1) 确定定义域, 考虑端点 (间断点) 处函数的形态, 确定是否有垂直渐近线;

(2) 考虑函数 $\to\infty$ 时的形态, 确定是否有水平渐近线;

(3) 按照斜渐近线的定义, 通过求两个极限依次求出斜率和截距.

**说明** 不少同学在求解时会遗漏两条中的一条, 应当考虑充分.

求斜渐近线时, 在算出斜率后, 还应该根据 $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$ 计算相应的截距.

最后对于证明斜渐近线的充要条件给出一些提示. (虽然不少同学都没证明...)

**提示** 以 $x\to+\infty$ 为例, 设曲线 $C$ 及直线 $L$ 上的横坐标为 $x$ 的点分别为 $M$, $N$, 则 $M$ 至 $L$ 的距离是 $|MN|$ 的一个常数倍. 确切地说, 我们有 $|ML|=|MN|\cos\alpha$, 其中 $\alpha$ 为直线 $L$ 的倾斜角. 因此, 直线 $L$ 为曲线 $C$ 的渐近线, 等价于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$, 由此易得所说的结果.

## 4.2 习题 3.3

**3.3.10** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

**证明** (1) 由 Lagrange 中值定理知, 对 $\forall x\in[a,+\infty)$, $\exists\xi\in(x,x+1)$, 使得

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)\cdot(x+1-x)=f'(\xi),$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

(2) 由 “$\dfrac{*}{\infty}$ 型” 的 L'Höspital 法则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=0.$$

□

**另证**　(2) 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 知, $\exists X_1\geqslant a$, 使得 $x>X_1$ 时, 有 $|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$; 又 $\exists X_2\geqslant a$, 使得 $x>X_2$ 时, 有 $\left|\frac{f(X_1)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ (因为 $f(X_1)$ 现在是一个取定的, 有限的数), 从而 $x>X_2$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &\overset{\ddagger}{=} \left|\frac{f(x)-f(X_1)}{x-X_1}\cdot\frac{x-X_1}{x}+\frac{f(X_1)}{x}\right|\\ &\leqslant \left|\frac{f(x)-f(X_1)}{x-X_1}\right|+\left|\frac{f(X_1)}{x}\right|\\ &\overset{\dagger}{=} |f'(\xi)|+\left|\frac{f(X_1)}{x}\right|\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

此即,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

其中, † 处已用到 Lagrange 中值定理, $\xi\in(X_1,x)$. □

**说明**　‡ 处是将形如 $\frac{f(x)}{x}$ 与 $f'(x)$ 相联系的常用手法, 值得留意.

**3.3.12**

提示　利用两边夹法则或 $\varepsilon-\delta$ 语言证明.

**证明**

$$0\leqslant\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant M\,|x-y|\,,$$

由 $\lim\limits_{y\to x} M\,|x-y|=0$ 及两边夹法则知,

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=0, \tag{4.1}$$

因此 $f(x)\equiv\mathrm{Const.}$ 为常数. □

**3.3.20**

提示　取对数后求导即可. 求导这件事情, 大家最擅长的啦 ~

## 4.3　习题 3.4

**3.4.5**

**答案**　(1) $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$; (2) $\frac{mn(n-m)}{2}$; (6) $\alpha$; (17) 1.

注意　(17) 是 $x\to+\infty$ 的极限过程, 因此不能用 $x\to0$ 的展开, 至于怎么用展开来做, 助教也不会...

## 4.4　习题 3.5

**3.5.1**

提示　利用数学归纳法.

**3.5.2**

**提示** 考虑区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $f(x)=-\ln x$ 的凹凸性, 并利用战神不等式.

**3.5.5**

**分析** 对于有限个点, $f''$ 可能不存在, 因此不能假设 $f''(x_0)\leqslant 0$, 然后进行推导.

注意到, 若没有处处可导的条件, 例如, 考虑

$$f(x)=\begin{cases}\tan x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\ f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right), & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right),\\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

这是一个在除了 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 外, 均有 $f''(x)>0$ 的函数, 但由于其在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处有第二类间断点 (从而不可导), 因此 $f$ 在 $[0,\pi]$ 上并不是凸的.

可见, 处处可导的条件是十分必要的!

**证明** 设有限个点为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$, 则由 $f''(x)>0$ 知, 导函数在区间 $(x_i,x_{i+1})$ $(i=0,2,\cdots,k)$ 上均单调递增, 往证: $f'$ 在 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 处均连续.

考虑 $x_i$ 处. 由于 $f'$ 在 $(x_{i-1},x_i)$ 和 $(x_i,x_{i+1})$ 上均单调递增, 因此 $f'(x_i\pm)$ 均存在 (可能为有限的数或 $\pm\infty$), 由 $f'$ 在 $x_i$ 处可导知,

$$f'(x_i)=f'_{\pm}(x_i)=f'(x_i\pm),$$

为有限的数, 因此 $f'$ 在 $x_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 处连续.

从而 $f'$ 在整个区间 $I$ 上单调递增, 因此 $f(x)$ 在 $I$ 上是凸的. □

**3.5.6**

**提示** 由于 $f\in C^2(I)$, 不妨 $f''(x)<0$, $x<x_0$; $f''(x)>0$, $x>x_0$, 由极限的保号性,

$$\begin{aligned}&f''(x_0+)\geqslant 0, f''(x_0-)\leqslant 0,\\ \Longrightarrow\ & f''(x_0)=f''(x_0+)=f''(x_0-)=0.\end{aligned}$$

**3.5.7**

**提示** 利用极限的保号性 $f'''(x_0)>0 \implies \dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}>0,\ x\in U(x_0,\delta) \implies \cdots$, 从而推出 $x_0$ 是拐点.

**3.5.8**

**答案**

| | 凹区间 | 凸区间 | 拐点 |
|---|---|---|---|
| (1) | $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ | $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ | $x=\dfrac{1}{2}$ |
| (4) | $(-3,-1)$ | $(-\infty,-3)$, $(-1,+\infty)$ | $x=-3, x=-1$ |
| (6) | $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$ | $((2k-1)\pi,2k\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$ | $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ |

**说明** 凹凸区间要写成区间的形式 (开闭均可, 但可能涉及间断点的问题, 写成开区间最省事), 拐点建议只写横坐标, 毕竟...写多错多

**3.5.9**

**答案** $a=-\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{9}{2}$.

**说明** 在求得 $a, b$ 的值后, 还应当验证 $x=1$ 两端 $y''$ 异号, 证明拐点的充分性.

**3.5.11**

**答案** (2) 曲率: $-2$; 曲率中心: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$; 曲率半径: $\dfrac{1}{2}$.

**说明** 部分同学只求了其中的 1 个或两个值, 应当看清题目要求.

**3.5.12**

**答案** (2) $\dfrac{2}{\pi}$.

**注意** 部分同学求成了曲率半径, 应当留意两者的区别和联系.

**3.5.13**

**答案** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$ 处, 曲率半径为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

## 4.5 习题 3.6

**3.6.1**

**解** (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+x+3-\frac{4}{1-x} \\ &= -(1+3x+3x^2+4x^3+\cdots+4x^n)+o(x^n), \quad x\to 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right]+o(x^{2n}), \quad x\to 0 \end{aligned}$$

□

**3.6.2**

**解** 注意到, $x\to 0$ 时, $\sin x\to 0$, 将 $\sin x$ 的 Maclaurin 展开代入得:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)+\frac{1}{2!}(x+o(x))^2+\frac{1}{3!}(x+o(x))^3+o(x^3) \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3), \quad x\to 0 \end{aligned}$$

□

**3.6.3**

**提示** 利用 $\ln(1+x)$ 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开. 具体过程见前述 Taylor 展开部分.

**3.6.4**

**提示** 利用 $x=2$ 处的 Taylor 展开确定 $f(x)$ 的解析式, 然后求相应的值.

**答案** $f(-1)=143$, $f'(0)=-60$, $f''(1)=26$.

**3.6.5**

提示 对于带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 只能求 $n$ 阶导数的形式才能得到余项的形式.

答案 (1)

$$f(x)=x(+0\cdot x^2)+\frac{1+2\sin^2(\theta x)}{3\cos^4(\theta x)}x^3,\quad x\to 0,\quad \theta\in(0,1)$$

(2)

$$f(x)=-(1+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n)+\frac{(-1)^{n+1}}{(-1+\theta(x+1))^{n+2}}(x+1)^{n+1},\ x\to -1,\ \theta\in(0,1)$$

**3.6.6**

答案 (1) $-\dfrac{1}{12}$; (2) $\dfrac{1}{2}$; (3) $\dfrac{1}{2}$; (4) $\dfrac{1}{6}$.

**3.6.7**

提示 必要性: 直接求导即可;

充分性: 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开.

**3.6.11**

提示 利用带 Peano 余项的 Taylor 展开, 以及极限的保序性.

注意 不能用 $n-1$ 阶带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 因为条件只给出 $x_0$ 处 $n$ 阶导存在, 而邻域内 $n$ 阶导不一定存在.

## 4.6 第 3 章综合习题

**3.7.10**

提示 (1) 利用严格凸函数的性质.

提示 (2) 考虑 Rolle 定理.

提示 (3) 用反证法.

**3.7.15**

提示 取对数, 利用 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展开.

答案 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

**3.7.16**

提示 求导后可得: $f(1)<f(2)<f(\mathrm{e})>f(3)>f(4)>\cdots$, 比较 $f(2),f(3)$ 即可.

答案 $\max\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\sqrt[n]{n}=\sqrt[3]{3}$.

**3.7.17**

提示 ~~使用 WolframAlpha.~~

答案 0.561 096 338 where $x=0.860\,333\,581$.

**3.7.18**

提示 利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的带 Lagrange 余项的二阶 Taylor 展开, 以及导函数的介值性.