第一周作业答案

P29-3

证：

只需证明存在不全为 0 的实数λ,μ,ν，使得

$$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\mu(-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})+\nu(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})=\mathbf{0}$$

此式可化为

$$(\lambda-2\mu+2\nu)\boldsymbol{a}+(-\lambda+3\mu-\nu)\boldsymbol{b}+(\lambda-2\mu+2\nu)\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$$

只需证明方程组

$$\begin{cases}\lambda-2\mu+2\nu=0\\-\lambda+3\mu-\nu=0\end{cases}$$

有不全为 0 解。可得$\lambda=4,\mu=1,\nu=-1$为该方程一组非 0 解，因此三个向量线性相关。

P29-4

证：

只需证明三维空间中四个向量一定线性相关即可，四个以上的情况只需将第五个开始的向量的系数设为 0 即可。

设四个向量为$\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3},\boldsymbol{a_4}$.

若有两向量共线，不妨设为$\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}$，则存在两个不全为 0 实数$\lambda,\mu$，使得$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}=\mathbf{0}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}+0\boldsymbol{a_3}+0\boldsymbol{a_4}=\mathbf{0}$，则这四个向量线性相关。

若有三向量共面，不妨设为$\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}$，则存在三个不全为 0 实数$\lambda,\mu,\nu$，使得$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}+\nu\boldsymbol{a_3}=\mathbf{0}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}+\nu\boldsymbol{a_3}+0\boldsymbol{a_4}=\mathbf{0}$，则这四个向量线性相关。

若$\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}$不共面，由书上定理 1.2.1 得，存在三个不全为 0 实数λ,μ,ν，使得$\boldsymbol{a_4}$可以被表示为$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}+\nu\boldsymbol{a_3}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}+\nu\boldsymbol{a_3}-\boldsymbol{a_4}=\mathbf{0}$，则这四个向量线性相关。

综上，三维空间中任意四个向量一定线性相关。

对于四个以上的向量，设它们为$\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\ldots,\boldsymbol{a_n}(n\geq 5)$，由前面结论可得存在四个不全为 0 实数$\lambda,\mu,\nu,\rho$，使得$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}+\nu\boldsymbol{a_3}+\rho\boldsymbol{a_4}=\mathbf{0}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}+\nu\boldsymbol{a_3}+\rho\boldsymbol{a_4}+0\boldsymbol{a_5}+\cdots+0\boldsymbol{a_n}=\mathbf{0}$，则这 n 个向量线性相关。

另证：（反证法）

假设$n(\geq 4)$个向量线性无关，则任意三个向量均线性无关，任取三个设为$\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}$，此时再取一个向量$\boldsymbol{a_4}$，由书上定理 1.2.1 得，存在三个不全为 0 实数λ,μ,ν，使得$\boldsymbol{a_4}$可以被表示为$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}+\nu\boldsymbol{a_3}$，即$\lambda\boldsymbol{a_1}+\mu\boldsymbol{a_2}+\nu\boldsymbol{a_3}-\boldsymbol{a_4}=\mathbf{0}$，则这四个向量线性相关，与所有向量线性无关矛盾，因此结论成立。

P29-6

解：

由题中三个点的坐标可求得：

$$\overrightarrow{AB}=(1,4,2),\overrightarrow{AC}=(-1,-4,-2),\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}$$

因此向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$在同一条直线上，即A,B,C三点共线。

P29-8

解：

设$\boldsymbol{a}=(x,y,z),\boldsymbol{e_1}=(1,0,0),\boldsymbol{e_2}=(0,1,0)$

$$|\boldsymbol{a}|=2\rightarrow x^2+y^2+z^2=4$$

由$\boldsymbol{a}$与Ox轴夹角为$60°$得

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e_1}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e_1}|}=\cos 60°=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow x=1$$

由$\boldsymbol{a}$与Oy轴夹角为$120°$得

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e_2}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e_2}|}=\cos 120°=-\frac{1}{2}\rightarrow\frac{y}{2}=-\frac{1}{2}\rightarrow y=-1$$

$$z=\pm\sqrt{4-1-1}=\pm\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{a}=\left(1,-1,\pm\sqrt{2}\right)$$

P29-9

解：

$$\boldsymbol{a}=(1,-2,4),\boldsymbol{b}=(2,2,1),\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,0,5),\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,-4,3)$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1*2-2*2+4*1=2$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3*(-1)+0*(-4)+5*3=12$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=1*1+4*4+3*3=26$$