Homework 11

2022 年 12 月 11 日

一定要说明独立性!!!

14. 设随机变量X_1, X_2相互独立同分布于标准正态分布，求$Y = (X_1 - X_2)^2/(X_1 + X_2)^2$的分布.

Sol.

令$U = X_1 - X_2$, $V = X_1 + X_2$, 则U, V的联合密度函数为

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{(u+v)^2+(v-u)^2}{8}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{4}\right) \\ &= f_U(u)f_V(v). \end{aligned}$$

因此U和V独立同分布于$N(0,2)$. $Y = U^2/V^2 = (U/\sqrt{2})^2/(V/\sqrt{2})^2$, 因此$Y$服从自由度为(1,1)的F分布.

15. 设X_1, X_2, X_3, X_4是来自正态总体$N(0, 2^2)$的简单随机样本, 令$T = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$. 试求$a, b$使统计量$T$服从$\chi^2$分布.

Sol.由于$X_1 - 2X_2 \sim N(0, 20)$, $3X_3 - 4X_4 \sim N(0, 100)$, 两者又相互独立, 因此当$a = 1/20, b = 1/100$时$T$服从$\chi^2_2$分布.

16. 设$X_1, \cdots, X_9$为独立同分布的正态随机变量, 记

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + \cdots + X_6),\ Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9),\ S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2.$$

试求$Z = \sqrt{2}(Y_1 - Y_2)/S$的分布.

Sol.设分布为$N(\mu, \sigma^2)$, 则$Y_1 \sim N(\mu, \sigma^2/6)$, $Y_2 \sim N(\mu, \sigma^2/3)$, $2S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_2$且三者相互独立. 进一步, $Y_1 - Y_2 \sim N(0, \sigma^2/2)$, 从而$Z$服从自由度为2的t分布.

易错点: 分母的自由度算成3.

18. 设$X_1,\cdots,X_n$为从下列总体中抽取的简单样本:

(1) 正态总体$N(\mu,\sigma^2)$;

(2) 参数为λ的泊松总体;

(3) 参数为λ的指数分布,

试求样本均值$\bar{X}$的分布.

Sol.

(1) $\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$;

(2) 两个参数为λ_1和λ_2的独立泊松分布随机变量和服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布, 因此$n\bar{X}\sim Poisson(n\lambda)$;

(3) 注意到$2\lambda X_1\sim\chi_2^2$, 因此$2n\lambda\bar{X}\sim\chi_{2n}^2$, 观察其密度函数, $\bar{X}$也可以用$\Gamma(n,n\lambda)$来描述.

易错点: (2)(3)计算极限分布而非精确分布.

20. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个简单随机样本, $\bar{X}$和S_n^2分别表示样本均值和样本方差, 又设$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$且与$X_1,\cdots,X_n$独立, 试求统计量

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S_n}$$

的分布.

Sol.已知$(n-1)S_n^2/\sigma^2\sim\chi_{n-1}^2$且与$\bar{X}$和$X_{n+1}$独立, $\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$, $X_{n+1}-\bar{X}\sim N(0,(n+1)\sigma^2/n)$. 因此上述统计量服从$t_{n-1}$分布.

21. 设$(X_1,\cdots,X_m)$为来自正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的一个简单随机样本, $(Y_1,\cdots,Y_n)$为来自正态总体$N(\mu_2,\sigma^2)$的一个简单随机样本, 且$(X_1,\cdots,X_m)$和$(Y_1,\cdots,Y_n)$相互独立, $\bar{X}$和$\bar{Y}$分别表示它们的样本均值, S_{1m}^2和S_{2n}^2分别表示它们的样本方差, α和β是两个给定的实数, 试求

$$T=\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_{1m}^2+(n-1)S_{2n}^2}{n+m-2}\left(\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}\right)}}$$

的分布.

Sol.

统计量

$$\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)\sim N\left(0,\left(\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}\right)\sigma^2\right),$$

统计量

$$\frac{(m-1)S_{1m}^2+(n-1)S_{2n}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{m+n-2},$$

两者相互独立, 因此$T\sim t_{m+n-2}$.