

中国科学技术大学

2015—2016学年第二学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计 得分 _____

所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2016年6月24日上午8:30-10:30; 使用简单计算器

一. (10分) 判断题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 若事件 A 和 B 满足 $P(A|\bar{B}) = P(A)$, 则 A 和 B 相互独立. ()
2. 一维连续型随机变量的分布函数是 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数. ()
3. 若一个参数 θ 的某个估计量 $\hat{\theta}$ 的值刚好等于 θ , 则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一个无偏估计. ()
4. 在假设检验中所遵循的原则是哪个假设成立的概率大就接受哪个假设. ()
5. 在假设检验中接受原假设则一定不会犯第一类错误. ()

二. (20分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

1. (4分) 主人要外出, 委托邻居给花园的花浇水. 若不浇水, 则花死去的概率为0.8; 若浇水, 则花死去的概率为0.2. 假设有0.9的把握确定邻居会记得浇水. 那么, 主人回来时花还活着的概率为_____; 若主人回来花已死, 则邻居忘记浇水的概率为_____.
2. (3分) 设 X 服从参数为 λ 的Poisson分布. 若已知 $E[(X-1)(X-2)] = 1$, 则 $\lambda =$ _____.
3. (3分) 设随机向量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}}, & x, y > 0; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

那么 X 与 Y 是否相互独立? _____(填“是”或“否”).

4. (3分) 设随机变量 X 和 Y 的方差分别是4和9, 且它们的相关系数为-0.5, 则 $X - Y$ 的方差为_____.
5. (3分) 设随机变量 X 和 Y 均服从标准正态分布, 则().
(A) $X + Y$ 服从正态分布 (B) $X^2 + Y^2$ 服从 χ^2 分布
(C) X^2/Y^2 服从 F 分布 (D) X^2 和 Y^2 服从 χ^2 分布
6. (4分) 设总体 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\beta}, & x > 1; \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中 $\beta > 1$ 为未知参数, 且 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一组简单随机样本, 样本均值为 \bar{X} . 那么, 参数 β 的矩估计量和极大似然估计量分别是_____和_____.

三. (18分) 设 X 和 Y 分别表示两只不同型号的灯泡的寿命, X 服从参数为 λ 的指数分布, Y 服从参数为 μ 的指数分布, 且它们相互独立.

1. 求先失效的那只灯泡的寿命(即 $Z = \min\{X, Y\}$)的分布.
2. 求 $U = X/Y$ 的概率密度函数.

四. (16分) 某人寿保险公司推出一项团购活动, 每个参保人在年初付150元保险费, 而在该年死亡时家属可从公司获得5万元赔偿金. 假设有1万名几乎同龄和同阶层的人参加该保险, 且已知该类人群在一年内死亡的概率是0.002. 利用中心极限定理求在此项业务中,

1. 保险公司亏本的概率是多少?
2. 保险公司获得的毛利润不少于50万的概率是多少?

五. (16分) 设总体 X 的期望为 μ , 方差为 σ^2 . 分别抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个独立样本, 样本均值依次为 \bar{X}_1 和 \bar{X}_2 .

1. 证明: 对满足 $a + b = 1$ 的任意常数 a 和 b , 统计量 $Y = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2$ 均为 μ 的无偏估计.
2. 试确定 a 和 b 的值使得上述估计量 Y 最有效.

六. (20分) 热处理车间工人为了提高振动板的硬度, 对淬火温度进行试验, 在两种淬火温度A与B中分别测得硬度如下:

温度A	85.6	85.9	85.9	85.7	85.8	85.7	86.0	85.5	85.4	85.5
温度B	86.2	85.7	86.5	86.0	85.7	85.8	86.3	86.0	86.0	85.8

设振动板的硬度服从正态分布, 利用假设检验的知识判断淬火温度的改变是否对振动板的硬度具有显著性影响(显著性水平取 $\alpha = 0.05$).

附录

$$u_{0.025} = 1.960, u_{0.05} = 1.645, \Phi(2.24) = 0.9874$$

$$F_{10,10}(0.025) = 3.72, F_{9,9}(0.025) = 4.03, F_{10,10}(0.05) = 2.98, F_{9,9}(0.05) = 3.18,$$

$$t_{20}(0.025) = 2.086, t_{19}(0.025) = 2.093, t_{18}(0.025) = 2.101,$$