10.31

3.6 1(2) 已做

3.6 2. 解: 待求Maclaurin展开式为: $f(x)=e^{\sin x}=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$.

而: $f'(x)=\cos x\, e^{\sin x}$, $f''(x)=-\sin x\, e^{\sin x}+\cos x\cdot\cos x\, e^{\sin x}=(\cos^2 x-\sin x)e^{\sin x}$.

$f'''(x)=(\cos x)''e^{\sin x}+2(\cos x)'(e^{\sin x})'+\cos x(e^{\sin x})''$

$=(-\cos x-2\sin x\cos x+\cos x(\cos^2 x-\sin x))e^{\sin x}$

$=(\cos^3 x-3\sin x\cos x-\cos x)e^{\sin x}$.

故: $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=0$. 由此, $e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.

3.6 4. 解: 我们可根据已给信息还原出四次多项式之值 → 唯一性也是存在的

$f(x)$ 四次, 则应有: $f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=\cdots=0$.

写出 $x=2$ 处Taylor展开式的Lagrange余项形式:

$f(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4+\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-2)^5$.

由于 $f^{(5)}(\xi)\equiv 0$, 故: $f(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4$

$=-1+(x-2)^2-2(x-2)^3+(x-2)^4=\cdots=x^4-10x^3+37x^2-60x+35$.

$\therefore f(-1)=143$, $f'(0)=-60$, $f''(1)=26$.

3.6 6. 解, (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x}$. 将分子分母同时展开到Maclaurin多项式中的 x^4 项:

$\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^2}=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$.

$\sin^4 x=\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^4=x^4+o(x^4)$.

故: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^4/12}{x^4}=-\frac{1}{12}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}}{x^2}$. 将分子展开至Maclaurin多项式中的 x^2 项:

$\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}=\left(1+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

故: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}=\frac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. 令 $t=\frac{1}{x}$, 则: 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

将分子展开至Maclaurin多项式的x^2项.

即: $x-\ln(1+x)=x-\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\sin x+x}{2}\sin\frac{x-\sin x}{2}}{\sin^4 x}$

将分子分母同时展开到Maclaurin多项式的x^4项:

$\sin\dfrac{x+\sin x}{2}=\sin\left(x-\dfrac{x^3}{12}+o(x^4)\right)=\left(x-\dfrac{x^3}{12}\right)-\dfrac{1}{6}\left(x-\dfrac{x^3}{12}\right)^3+o(x^4)=x-\dfrac{1}{4}x^3+o(x^4)$.

$\sin\dfrac{x-\sin x}{2}=\sin\left(\dfrac{x^3}{12}+o(x^4)\right)=\dfrac{x^3}{12}+o(x^4)$.

则: 分母 $=\left(x-\frac{1}{4}x^3+o(x^4)\right)\left(\frac{x^3}{12}+o(x^4)\right)=\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)$.

$\sin^4 x=\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^4=x^4$.

$\therefore$ 原式 $=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4/12}{x^4}=\dfrac{1}{6}$.

3.6 11. 证: (1) $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

$=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\boxed{\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}\ o\left((x-x_0)^n\right)$

n为奇数时, 则考虑 $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$.

取 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$, 则: $x<x_0$时总有$f(x)<f(x_0)$, $x>x_0$时 $f(x)>f(x_0)$.

即在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内, 既有 $f(x_0)\ge f(x)$, 又有 $f(x_0)\le f(x)$. 故此处不是极值.

(2) n为偶数时, 若 $f^{(n)}(x_0)>0$. 则由于 $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$,

当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时, 恒有 $f(x)-f(x_0)\ge 0$; 即 $f(x_0)\le f(x)$. x_0为极小值点.

同理, $f^{(n)}(x_0)>0$时, x_0为极大值点. □

3.4 5 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$. 则将分子展开至Maclaurin多项式的$x$的项.

$\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}=\left(1+\dfrac{\alpha}{m}x+o(x)\right)-\left(1+\dfrac{\beta}{n}x+o(x)\right)=\left(\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}\right)x+o(x)$.

则原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\right)x}{x}=\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$. 则将分子展开至Maclaurin多项式的$x^2$的项.

$(1+mx)^n-(1+nx)^m=\left(1+n\cdot mx+\dfrac{n(n-1)}{2}m^2x^2+o(x^2)\right)-\left(1+m\cdot nx+\dfrac{m(m-1)}{2}n^2x^2+o(x^2)\right)$

$$=\frac{mn(n-m)}{2}x^2+o(x^2).$$

故原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{mn(n-m)}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{mn(n-m)}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$. 则将分子展开至Maclaurin多项式的 x 的项.

$(1+x)^{\alpha}-1=(1+\alpha x+o(x))-1=\alpha x+o(x)$.

则: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x}{x}=\alpha$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}}$. 对 $e^{\frac{1}{x^2}}$ 做以 $\frac{1}{x^2}$ 的Maclaurin展开, 则:

$e^{\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})$. 而事实上, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}=0$. 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$.

$\sim x+1$

11.4

2½8. (1) 证: 首先证明其是连续的.

若是, 则: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

则我们只须取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2k}$, 则: $|f(x)-f(y)|<k\delta=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 即 $f\in C_{[a,b]}$.

其后, 再证 x_0 的存在性. 令 $g(x)=f(x)-x$.

则: $g(a)=f(a)-a\geq 0$, $g(b)=f(b)-b\leq 0$.

1° $g(a)=0$ 或 $g(b)=0$, 则 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 即得.

2° $g(a)\neq 0$, $g(b)\neq 0$, 故只有 $g(a)>0$, $g(b)<0$. 则: $\exists x_0\in(a,b)$, $g(x_0)=0=f(x_0)-x_0$, 即: $f(x_0)=x_0$.

下面由此基础上再证其唯一性.

若 $\exists x_1\neq x_0$ s.t. $f(x_1)=x_1$. 则: $|f(x_1)-f(x_0)|=|x_1-x_0|>k|x_1-x_0|$, 矛盾!

则: $\exists!\, x_0\in[a,b]$, $f(x_0)=x_0$. □

(2) 证: 欲证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$ s.t. $\forall n>N$, $|x_n-x_0|<\varepsilon$.

而 $|f(x)-f(y)|<k|x-y|$: $|f(x_n)-f(x_0)|<k|x_n-x_0|$, 即: $|x_{n+1}-x_0|<k|x_n-x_0|$.

$\frac{0}{0}$ / $\frac{*}{\infty}$ ∞ 1° f, g 在 (a,b) 上可导 $g'(x)\neq 0$ ② $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

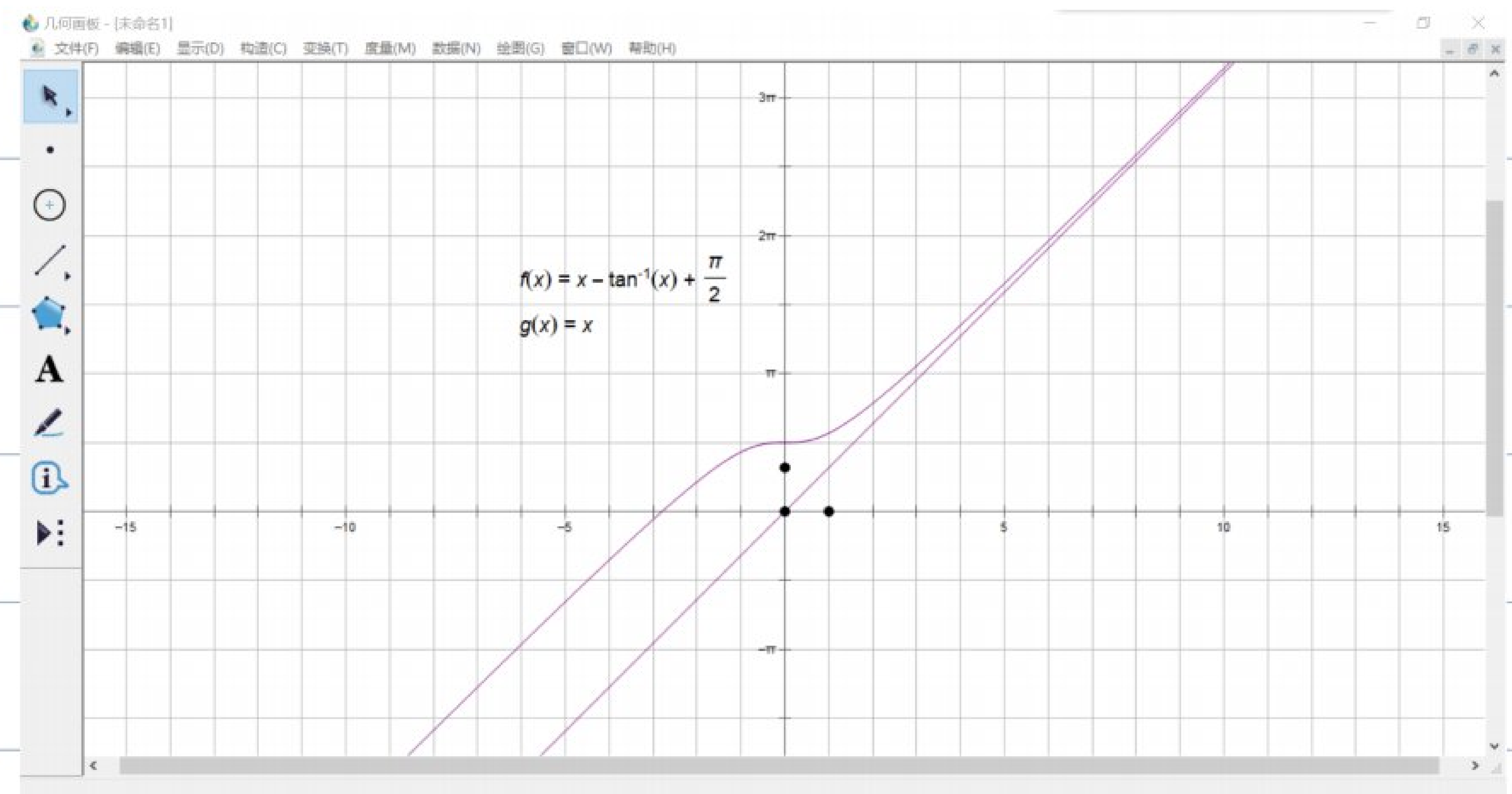
故有: $|x_n-x_0|<k|x_{n-1}-x_0|<\cdots<k^{n-1}|x_1-x_0|$.

只须取 $k^{N-1}|x_1-x_0|<\varepsilon$, 即: $N=1+\left\lceil\dfrac{\ln\varepsilon-\ln|x_1-x_0|}{\ln k}\right\rceil$ 即可!

故: $n>N$, $|x_n-x_0|<k^{n-1}|x_1-x_0|<k^{N-1}|x_1-x_0|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. □

(3) 解: 构造函数 $f(x)=x-\arctan x+\frac{\pi}{2}$. 合理的!

感谢好室友…



3.5 7. 已做. [第20讲]

3.5 11. (1) 解: $xy=1$ 即: $y=\frac{1}{x}$.

$\therefore \rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|$. 由于 $y'=-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$, 代回则: $\rho=\sqrt{2}$. 相应地, 曲率 $K=\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

另, 考虑到该曲线的法线斜率 $k=-\frac{1}{y'}\Big|_{x=1}=1$. 则有: $\begin{cases}\frac{y_0-1}{x_0-1}=1\\(x_0-1)^2+(y_0-1)^2=2.\end{cases}$

另一方面, 由于 $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}>0$, 故其在 $y=\frac{1}{x}$ 上的凹侧? 反映于图中, 则: 曲率圆心位于 $x-1>0$ 一侧.

综上, $\begin{cases}x_0=2\\y_0=2\end{cases}$. 即: 曲率圆心 $(2,2)$.

(2) $y=e^{-x^2}$

$\therefore \rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|$. 考虑到 $y'=0$, $y''=-2$. 代回则: $\rho=\frac{1}{2}$. 相应地, 曲率 $K=\frac{1}{\rho}=2$.

另, 由于 $y'=0$, 故曲率圆心在 y 轴上: $x=0$.

由于 $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}<0$, 故其在 $y=e^{-x^2}$ 外侧? 反映于图中则, 曲率圆心位于 $y-1<0$ 一侧.

综上, $\begin{cases}x_0=0\\y_0=\frac{1}{2}\end{cases}$. 即: 曲率圆心 $(0,\frac{1}{2})$.

3.5 12. (1) $\begin{cases}x=3t^2\\y=3t-t^3.\end{cases}$ 则: $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=1}=\frac{3-3t^2}{6t}\Big|_{t=1}=0$.

$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=\frac{d(dy/dx)/dt}{dx/dt}\Big|_{t=1}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)}{6t}\Big|_{t=1}=\frac{1}{12t}\cdot-\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\Big|_{t=1}=-\frac{1}{6}$.

则: $K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\frac{1}{6}$.

(2) 渐开线… 前排竟人狂喜!

当然根据几何特性直接给出: $\rho=\frac{\pi}{2}$, $K=\frac{2}{\pi}$.

下面验证之，希望证明 $\rho=t$.

此外，$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\cos t-(\cos t-t\sin t)}{-\sin t+(\sin t+t\cos t)}=\tan t$.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(dy/dx)/dt}{dx/dt}=\frac{\cos^{-2}t}{t\cos t}=\frac{\cos^{-3}t}{t}$.

$\therefore \rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\frac{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\cos^{-3}t}t=t$, wow! 则: $\rho\big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{2}{\pi}$.

(说起来，古人之前搞机械时对摆线与渐开线搞过一个专题，此题算是唤起了泥潭般久远的DNA…)

3.5 13. 由公式 $\rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|$，其中，$y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$，代回则：

$\rho=\frac{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}{-1/x^2}=\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{x}$.

则，$\frac{d\rho}{dx}=\frac{\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot x-(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\cdot\left[3x^2-(x^2+1)\right]=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\cdot(2x^2-1)$.

令 $\frac{d\rho}{dx}=0$，则，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.（并可验证：$\frac{d^2\rho}{dx^2}\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}>0$，故此处为极小）

代入得：$\rho=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3.6 14.(3) 证：已知 $f(x)=\sin x$ 展开至 x^n 的 Maclaurin 多项式.

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$.

为证左式，将其改写为，$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x^4$.（Lagrange余项形式，$\xi\in(0,x)$）

而 $f^{(4)}(\xi)=\sin\xi$，$\xi\in(0,x)\subset(0,\frac{\pi}{2})$，故 $f^{(4)}(\xi)>0$.

则：$\sin x-(x-\frac{x^3}{6})=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x^4>0$. $x-\frac{x^3}{6}<\sin x$.

为证右式，将其改写为：$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{f^{(6)}(\xi)}{720}x^6$.（Lagrange余项形式，$\xi\in(0,x)$）.

而 $f^{(6)}(\xi)=-\sin\xi<0$，故：$\sin x-(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120})=\frac{f^{(6)}(\xi)}{720}x^6<0$. $\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$. □.

(4) 证：要证结论，$2e^{\frac{x+y}{2}}=2\sqrt{e^x\cdot e^y}$. 由均值不等式，$\frac{e^x+e^y}{2}\ge\sqrt{e^x\cdot e^y}$，即 $2e^{\frac{x+y}{2}}<e^x+e^y$. □.

（利用 e^x 的凹凸性也可证…）

3.6 16. 仍要先从函数 $f(x)=\sqrt[x]{x}$ 下手.

即：$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$. 下求 $f'(x)$. 考虑到 $\ln f=\frac{1}{x}\ln x$. 两边对 x 求导，即：

$\frac{f'}{f}=(\frac{1}{x}\ln x)'=(-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2})=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 则：$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)=0 \Longrightarrow x=e$. 易得知，$x<e$ 时 $f'(x)>0$，$x>e$ 时 $f(x)<0$，故此处为极大值点，且 $f(x)$ 在 $(0,e)\uparrow$，$(e,+\infty)\downarrow$.

然而 n 并不可取到 e. 由 $f(x)$ 各区间的单调性，应有：$f(1)<f(2)$；$f(3)>f(4)>\cdots$.

故只需比较 $f(2)$ 与 $f(3)$，即 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$ 大小即可！

事实上，由于 $(\sqrt{2})^2=2$，$(\sqrt[3]{3})^2=\sqrt[3]{9}>\sqrt[3]{8}=2$，则：$\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

故：$\sqrt[n]{n}$ 最大值为 $\sqrt[3]{3}$.

(2) 原式 $= \lim_{x\to 0} \dfrac{1+\frac{1}{4}x^2-(1-\frac{1}{4}x^2)+o(x^2)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

(3) 原式 $= \lim_{t\to 0} \dfrac{1-\frac{1}{t}\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{1-\frac{1}{t}(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t} = \dfrac{1}{2}$.

(4) 原式 $= \lim_{x\to 0} \dfrac{-2\sin\frac{\sin x+x}{2}\cdot\sin\frac{\sin x-x}{2}}{x^4} = \dfrac{1}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4} =$

$\dfrac{1}{2}\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-(\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+o(x^4))}{x^4} = \dfrac{1}{6}$.

11. (P.28 讲义 Eg.2).

Ex 3.4 5.(1) 类似 Ex 3.6 6(2), 结果为 $\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}$.

(2) $m=n$ 则原式 $=0$; $m\neq n$ 时, 若 $m=1$ 或 $n=1$, 则结果为 ∞,

若 $m>1, n>1$, 则原式 $= \dfrac{mn(n-m)}{2}$ ⇒ 原式 $= \dfrac{mn(n-m)}{2}$.

(6) 原式 $=\alpha$.

(17) 原式 $= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{[\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}}{x^{\frac{1}{x}}} \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \lim_{t\to 0^+} \dfrac{[\ln(1+\frac{1}{t})]^t}{(\frac{1}{t})^t} = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{[\ln(1+t)-\ln t]^t}{1+t\ln t+o(t\ln t)}$

$= \lim_{t\to 0^+} \dfrac{(-\ln t)^t}{1-t\ln t+o(t\ln t)} = \lim_{t\to 0^+} (-\ln t)^t[1+t\ln t+o(t\ln t)] =$

$\lim_{t\to 0^+} e^{t\ln(-\ln t)}[1+t\ln t+o(t\ln t)] = \cancel{\lim_{t\to 0^+}} e^{t\ln t}(1+t\ln t) = 1$.

Nov. 4th

Ex 2 8 (1)(2) 不动点定理 (3) $y=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

Note: 先说明连续，再证存在性，最后说明唯一性(标准顺序)

e.g 1: $y=\sqrt{x^2+4}$

e.g 2: $y=\ln(e^x+1)$

e.g 3: $y=x-\arctan x+\frac{\pi}{2}$

均需说明其满足 $\forall x,y$, $|f(x)-f(y)|<|x-y|$!

Ex 3.5 7 (10.28 讲义 E.g 2 特例).

11. (1) 法线 $L: y=x$. 曲率 $K=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 曲率半径 $\rho=\sqrt{2}$, 曲率中心 $D(2,2)$.

(2) 法线 $L: x=0$. 曲率 $K=2$, —— $\rho=\frac{1}{2}$, 曲率中心 $D(0,\frac{1}{2})$.

12. Sol. (1) $K\Big|_{t=1}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}\Bigg|_{t=1}$, $\varphi'(t)=6t$, $\varphi''(t)=6$.

$\psi'(t)=3-3t^2$, $\psi''(t)=-6t$. 故 $\varphi'(t)\Big|_{t=1}=6$, $\varphi''(1)=6$, $\psi'(1)=0$,

$\psi''(t)=-6$, $K\Big|_{t=1}=\frac{|6\times(-6)-0|}{(6^2)^{3/2}}=\frac{1}{6}$.

(2) $\varphi(t)=\cos t+t\sin t$, $\psi(t)=\sin t-t\cos t$. $\varphi'(t)=-\sin t+\sin t+t\cos t$

$=t\cos t$, $\varphi''(t)=\cos t-t\sin t$; $\psi'(t)=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t$,

$\psi''(t)=\sin t+t\cos t$. 因此 $\varphi'(\frac{\pi}{2})=0$, $\varphi''(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}$, $\psi'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$.

$\psi''(\frac{\pi}{2})=1$. 因此 $K\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\left|1-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right|}{\left[(\frac{\pi}{2})^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\pi}$.