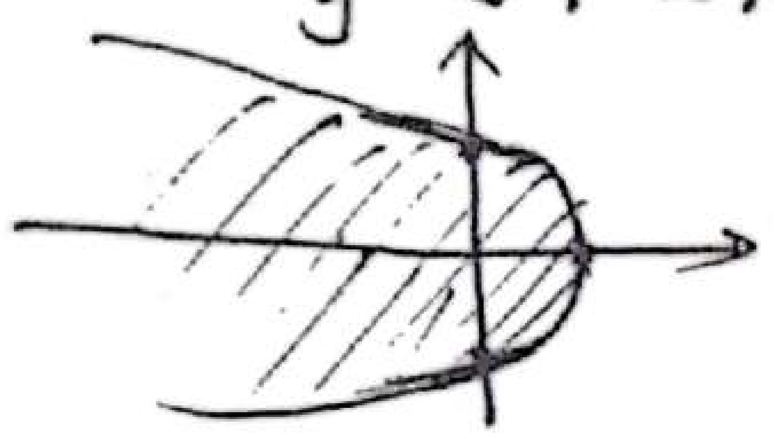
2007-2008

1. (1) $y^2 < 1-2x$



(2). $x=y=0$.

(3). $\operatorname{Ln} i = (2k+\frac{1}{2})\pi i \ (k\in Z)$

$i^i = e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi} \ (k\in Z)$

(4) (a) $z=\pi$. 可去奇点

(b). $z=0$ 为 6阶极点

$z=\sqrt[3]{2\pi k}\ \exp(\frac{\pi}{6}i+\frac{2}{3}k'\pi i)$

$k\in N^*$ 且 $k'=0,1,2$ 时

为 3阶极点

(5). 存在:

D、G 均为边界多于两个点的单连通区域，故根据黎曼定理，∃ $w_1=f_1(z)$ 和 $w_2=f_2(z)$ 为单叶函数并分别为 D、G 变为单位圆内部 则 $w=(f_2^{-1}\cdot f_1)(z)$ 满足要求

2. $f(z)=z^3 i+i$

3. 解 $\frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^{-n-1}z^n+\sum_{n=-1}^{-\infty} a^{-n-1}z^n\right)$

4. (1) 0 由解析性直接得

(2) $-\pi\cos 1+i\pi\sin 1$

(3) $2008\pi i$

(4) $2\pi i$

(5) $\frac{m\pi}{4a}e^{-am}$

5. $L[y''_{(t)}+2y'_{(t)}-3y_{(t)}]=L[e^{-t}]$

$p^2F(p)-1+2pF(p)-3F(p)=\frac{1}{p+1}$

$F(p)=\frac{1}{(p+3)(p-1)}\cdot\left(\frac{1}{p+1}+1\right)$

$=\frac{3}{8}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{8}\frac{1}{p+3}-\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}$

$y_{(t)}=L^{-1}[F(p)]=\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}-\frac{1}{4}e^{-t}$

6. $\varphi_1=e^{(z+\frac{\pi}{2})i}$

D ⇒ 上半单位圆

$\varphi_1=-1 \Rightarrow \varphi_2=0$

$\varphi_1=1 \Rightarrow \varphi_2=\infty$

取 $\varphi_2=\frac{\varphi_1+1}{\varphi_1-1}$

上半单位圆 ⇒ 第三象限

再取 $w=\varphi_2^2$

$w=\left(\frac{e^{(z+\frac{\pi}{2})i}+1}{e^{(z+\frac{\pi}{2})i}-1}\right)^2$

满足要求

7. $|z|=1$ 时:

$|kz^4|=k>2$

$|\sin z|=\frac{1}{2}|e^{iz}-e^{-iz}|$

$\leq\frac{1}{2}e^{\operatorname{Im}z}+\frac{1}{2}e^{-\operatorname{Im}z}$

$\leq\frac{1}{2}(e^1+e^{-1})\approx 1.543$

$\Rightarrow |\sin z| < |kz^4|$.

故有4个根；

8. 反证：若 $\forall z\in D$, $f(z_0)\neq 0$.

则 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 也在 D 上解析，

在 $D+C$ 上连续

$\forall z\in D$. $|g(z)| < |g(z)|_{z\in C} = \dfrac{1}{a}$

$\forall \Rightarrow |f(z)| > a$

$\forall z\in D \quad |f(z)| < |f(z)|_{z\in C} = a$.

矛盾，故得证；