对切透镜的干涉问题讨论

刘　军
(湖北省沙市中学,湖北 沙市　434000)

如果把薄凸透镜对切拉开,或者截去中央部分后再粘合起来,或者对切后将其中的一部分沿主光轴平移,讨论点光源通过这些对切透镜的成像规律或干涉问题,其涉及几何光学和物理光学知识,此类问题综合性较强,弄清它们对理解透镜成像规律和相干条件的应用是很有帮助的,下面就讨论几种对切透镜的成像和干涉问题.

1　比累对切透镜

例 1. 如图 1(a)所示,把焦距为 5 cm 的薄凸透镜 L 沿直径方向剖开,分成上下两部分 L_A 和 L_B,并将其沿垂直于对称轴各平移 0.01 cm,其间空隙用厚度为 0.02 cm 的黑纸片镶嵌,这一装置称为比累对切透镜. 若将波长为 632.8 nm 的点光源置于透镜左方对称轴上 10 cm 处.

(1)试分析 P 点发出的光经透镜后的成像情况;如果成像不止一个,计算像点的距离.

(2)若在透镜右方 $a=110$ cm 处置一光屏 D,试分析光屏 D 上能否观察到干涉图样. 如能观察到,试问相邻两条明纹的间距是多少?

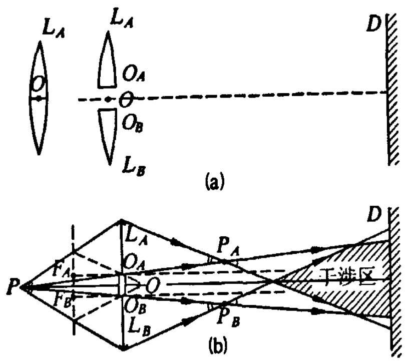

图 1

解析:(1)如图 1(b)所示,该情况可以看作两个挡掉一半的透镜 L_A 和 L_B 构成,其对称轴为 PO,但是主光轴和光心却发生了平移. 对于透镜 L_A,其光心移到 O_A 处,而主光轴上移 0.01 cm 到 O_AF_A;对于透镜 L_B,其光心移到 O_B 处,而主光轴下移 0.01 cm 到 O_BF_B. 点光源 P 恰在透镜的对称轴上 2 倍焦距处. 由于物距和透镜 L_A、L_B 的焦距都不变,故通过 L_A、L_B 成像的像距也不变. 根据题意和物像公式可知,像距 $p'=10$ cm. 由于 P 点位于透镜 L_A 的主光轴下方 0.01 cm,按凸透镜的成像规律可得,实像 P_A 应在透镜 L_A 主光轴上方 0.01 cm 处;同理,P 点又位于透镜 L_B 主光轴上方 0.01 cm 处,实像 P_B 位于 L_B 主光轴下方 0.01 cm 处. 两像点的距离为

$$P_AP_B=d=(0.01+0.01+0.02)\text{cm}=0.04\text{ cm}.$$

(2)由于实像 P_A 和 P_B 构成了一对相干光源,而且相干光束在观察屏的区域上是相互交叠的,故两束光叠加后将发生光的干涉现象,屏上可观察到干涉图样. 按杨氏干涉的规律,两相邻明条纹的间距公式为

$$\Delta x=\frac{l}{d}\lambda.$$

而 $l=a-p'=(110-10)\text{cm}=100$ cm,

$d=0.04$ cm, $\lambda=6\,328\times10^{-8}$ cm.

进而求得

$$\Delta x=\frac{100}{0.04}\times632.8\times10^{-9}\text{ m}=1.582\text{ mm}.$$

在靠近光屏的中央附近的条纹近似是等距的直条纹.

评注:求此题有以下两个关键问题:(1)半块透镜的成像规律与完整透镜成像规律相同;(2)类比杨氏双缝干涉求条纹间距.

2　胶合对切透镜

例 2. 将焦距 $f=20$ cm 的薄凸透镜从正中切去宽度为 a 的小部分,如图 2(a)所示. 再将剩下两半粘接在一起,构成一个"粘合透镜",见图 2(b),图中 $D=2$ cm. 在粘合透镜一侧的中心轴线上距镜 20 cm 处,置一波长 $\lambda=500$ nm 的单色点光源 S,另一侧,垂直于中心轴线放置屏幕,见图 2(c). 屏幕上出现干涉条纹,条纹间距 $\Delta x=0.2$ mm. 试问:

(1)切去部分的宽度 a 是多少?

(2)为获得最多的干涉条纹,屏幕应离透镜多远?

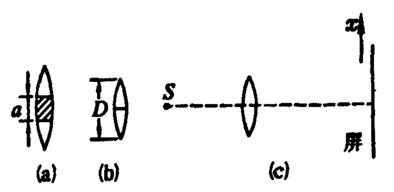

图 2

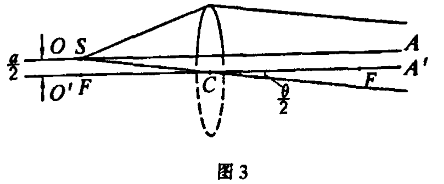

图 3

解析:(1)首先讨论粘合透镜的上半个透镜的成像. 在图 3 中 OA 是粘合透镜的中心轴线,在 OA 上方用实线画出了上半个透镜,在 OA 下方未画下半个透镜,而是补足了未切割前整个透镜的其余部分,用虚线表示. 整个透镜的主光轴为 $O'A'$,C 为整个透镜的光心.

半个透镜的成像规律应与完整的透镜相同.现在,物点(即光源)S 在粘合透镜的中心轴线上,即在图中透镜的主光轴上方$\frac{a}{2}$处,离透镜光心的水平距离正好是透镜的焦距.根据几何光学,光源 S 发出的光线,经透镜折射后成为一束平行光束,其传播方向与 SC 平行.设此方向与主光轴 $O'A'$(对 OA 也是一样)夹角为$\frac{\theta}{2}$,由几何关系可知,$\frac{\theta}{2}=\frac{a}{2f}$.根据题意,$a\ll f,\theta\ll 1$,此光束的宽度为$\frac{1}{2}D\cos(\frac{1}{2}\theta)\approx\frac{1}{2}D$.

同理,S 所发的光,经下半个透镜折射后,形成与 $O'A'$ 轴夹角为$\frac{\theta}{2}$、宽度也是$\frac{D}{2}$,由左下方射向右上方的平行光束.

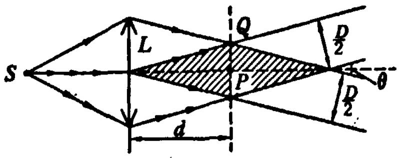

图4

于是,在透镜右侧,来自同一光源的两束夹角为 θ 的相干的平行光束在右侧发生干涉(如图4),图中两平行光束的重叠区(用阴影表示)即为干涉区.为作图清楚起见,图3,特别是图4中的 θ 角,均画得远较实际角度大.

图5表示的是两束平行光的干涉情况,其中 θ 是和图4中的 θ 相对应的.图5中实线和虚线分别表示某一时刻的波峰平面和波谷平面,在垂直于中心轴线的屏幕上,A、B、C 表示相长干涉的亮纹位置,D、E 表示相消干涉的暗纹位置,相邻波峰平面之间的垂直距离是波长 λ,故干涉条纹间距 Δx 满足

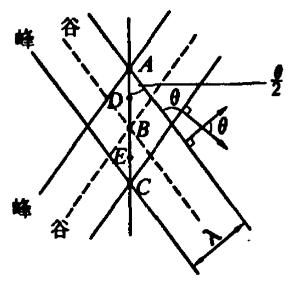

图5

$$2\Delta x\sin\frac{\theta}{2}=\lambda.$$

在 θ 很小的情况下,上式成为 $\Delta x\theta=\lambda$.所以透镜切去的宽度为

$$a=f\theta=\frac{f\lambda}{\Delta x}=\frac{0.2\times0.5\times10^{-6}}{0.2\times10^{-3}}\text{m}=0.5\text{ mm},$$

$$\theta=\frac{a}{f}=\frac{0.5}{200}\text{ rad}.$$

(2)由以上的求解过程可知,干涉条纹间距 Δx 与屏幕离透镜 L 的距离无关,这正是两束平行光干涉的特点,屏幕必须位于两束光的相干叠加区才行,图4中以阴影菱形部分表示这一相干叠加区,因为上述已知条纹是等距的,显然当屏幕位于 PQ 处可获得最多的干涉条纹,而 PQ 平面到透镜 L 的距离为

$$d=\frac{\frac{D}{2}}{\theta}=\frac{10^{-2}}{\frac{0.5}{200}}\text{m}=4\text{ m}.$$

评注:此题涉及平面波(平行光)的干涉条纹间距计算问题,无法套用杨氏双缝干涉条纹间距公式,需要利用振动叠加这一根本原理进行分析.

3 梅斯林对切透镜

例3.将焦距为 f' 的透镜对半剖开,分成两片半透镜 L_A 和 L_B,如图6(a)所示安置,这种装置称为梅斯林对切透镜装置.P 点为波长 λ 的单色点光源.由 P 发出的光波经 L_A 和 L_B 后分别得平行光束和会聚光束.在两束光的交叠区域放置一观察屏 DD',其上呈现一族同心半圆环干涉条纹.试求:

(1)j 级亮环半径的解析式;

(2)两相邻亮环间距的解析式;

(3)试讨论当屏 DD' 向右侧移动时干涉条纹有无变化?

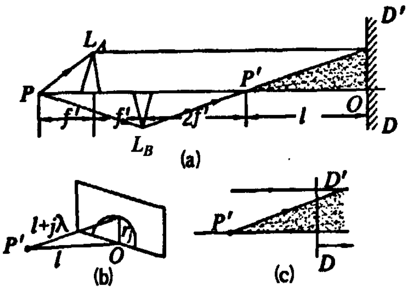

图6

解析:(1)在屏 DD' 上呈现以光轴与屏的交点 O 为圆心的一族明暗相间的半圆形干涉条纹,其中心 O 为亮点.参考图6(b),得

$$r_j=\sqrt{(l+j\lambda)^2-l^2}=\sqrt{l^2+2jl\lambda+j^2\lambda^2-l^2}\approx\sqrt{j}\sqrt{2l\lambda}.\tag{1}$$

对给定的光学系统和单色光源,这里$\sqrt{2l\lambda}$为常量.故第 j 级亮环的半径与$\sqrt{j}$成正比.

(2)由式(1),得相邻亮环的半径平方分别为

$$r_j^2=2l\lambda j.\tag{2}$$

$$r_{j+1}^2=2l\lambda(j+l).\tag{3}$$

由(2)、(3)式得

$$r_{j+1}^2-r_j^2=2l\lambda.$$

$$\Delta r_j=r_{j+1}-r_j=\frac{2l\lambda}{r_{j+1}+r_j}\approx\frac{l\lambda}{r_j}.\tag{4}$$

将式(1)式代入(4)式,得

$$\Delta r_j=\sqrt{\frac{l\lambda}{2}}\frac{1}{\sqrt{j}}.$$

该式表示相邻两亮环的间距随$\sqrt{j}$的增加而减小.换言之,级次愈高,条纹间距愈密.

(3)如图6(c)所示的干涉场中,当屏 DD' 向右侧方向

错 在 哪 里?

许 文
(华中科技大学附属中学,湖北 武汉 430074)

《中学物理》2010年第6期载有一文《莫要轻视守恒问题中的物理图像》,文中作者从正确建立物理情景(图像)的角度对两道关于守恒问题的习题进行了深入的分析,笔者读后受益匪浅. 但文中作者对例1的分析与解,笔者认为是值得商榷的. 为便于商讨,这里将原文中例1及部分分析与解答抄录如下:

例1. 有一劲度系数为 k、原长为 l_0 的轻弹簧,一端固定于点 O,另一端系一质量为 m 的物体. 现将弹簧置于水平位置,并保持原长,然后无初速度释放. 若物体在竖直平面内摆至最低位置时,弹簧的伸长量为原长的 $\frac{1}{n}$,则此时物体的动能(速度大小)为多少?

一般的解法:如图1所示,由于小球在运动过程中,仅受保守力的作用,因此小球从(弹簧在)水平到竖直位置时(过程中),机械能守恒. 设末状态(小球的)速度为 v,以 O 点为零势点(以 O 点所在的水平面为重力势能的零势面),依据能量守恒:

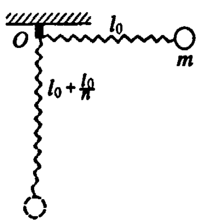

图1

$$0=\frac{1}{2}mv^2-mg(l_0+\frac{1}{n}l_0). \quad (1)$$

解得

$$v=[2g(l_0+\frac{1}{n}l_0)]^{1/2}. \quad (2)$$

以上解题方法和最后结果是正确的,但是呈现的物理图像却是错误的. 因为小球(弹簧)运动到竖直时,(小球)速度的方向并不是沿水平方向. 如果(此时小球速度)是水平方向,那么可以认为小球该时刻在做以 O 点为圆心、半径为 $l_0+\frac{l_0}{n}$ 的圆周运动,于是有

$$k\frac{l_0}{n}-mg=m\frac{v^2}{l_0+\frac{l_0}{n}}. \quad (3)$$

解得

$$v=[(\frac{kl_0}{nm}-g)(l_0+\frac{l_0}{n})]^{1/2}. \quad (4)$$

显然(2)、(4)式不相等. (3)式错误的原因是小球(弹簧)在竖直位置时,速度的方向并不沿水平方向. …… (3)式正确的列法是将 v 换成 $v_{/\!/}$,即速度沿水平方向的分量. [注:括号内文字为本人添加,为使问题表述更清楚]

笔者认为以上的分析中,"以上解题方法和最后结果是正确的,但是呈现的物理图像却是错误的. 因为小球(弹簧)运动到竖直时,(小球)速度的方向并不是沿水平方向"与"那么可以认为小球该时刻在以 O 点为圆心,半径为 $l_0+\frac{l_0}{n}$ 的圆周运动"是值得商讨的. 以上的分析中有3点错误:

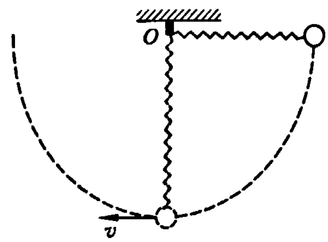

图2

(1) 弹簧从水平到竖直位置的过程中,弹簧由于伸长,其弹性势能应增加,小球与弹簧(包括地球在内)组成的系统机械能守恒,小球的机械能不守恒. 上述(1)式错误. 正确的应为

$$0=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(\frac{l_0}{n})^2-mg(l_0+\frac{1}{n}l_0). \quad (1')$$

(2) 弹簧从水平位置运动到竖直位置时,小球的运动轨迹如图2所示. 此时小球应处在轨迹的最低点,其速度 v 应是沿水平方向的. 假如此时小球的速度不是水平方向,则小球此时的速度应有竖直方向的分速度,那么小球此时的位置就不是轨迹的最低点,这是显然易见的.

(3) 从图2可以看出,小球绕 O 点作曲线运动,在最低点并不是"以 O 点为圆心,半径为 $l_0+\frac{l_0}{n}$ 的圆周运动". 因此上述(3)式是错误的. 正确的应为

$$k\frac{l_0}{n}-mg=m\frac{v^2}{\rho}. \quad (3')$$

式中的 ρ 为轨迹在最低点的曲率半径,这里 $\rho\neq l_0+\frac{l_0}{n}$. 至于这里的 ρ 值是多少,需先建立小球运动的微分方程,再由高等数学知识求出(因较复杂,我们在这里不讨论).

最后指出一点,本题中弹簧的原长、劲度系数、小球的质量、运动的初始状态是已知的,那么在末状态即弹簧处于竖直位置时它的伸长量 Δx 应该是一定的,但不一定是原长的 $\frac{1}{n}$,本题条件可能存在不自洽.

(收稿日期:2010-08-15)

移动时,由(1)式知,第 j 级亮条纹的半径 r_j 将随着级次 j 的增大逐渐增大,由(4)式知相应的间距却愈来愈小.

评注:此题涉及平面波(P 通过 L_A 的平行光)和球面波(P 通过 L_B 成像于 P' 的点光源发出的光)的叠加干涉问题. 观察屏 DD' 平面(即平面波波面)与以 P' 为球心的球面相截,其相交部分(叠加干涉区)为圆形,此题中干涉条纹正因为此而呈圆形条纹.

(收稿日期:2010-07-08)