复变函数A习题课讲义

本科15级　理科试验1班　吴天

2018年12月8日

前 言

复变函数是一门以研究单变量全纯函数的分析性质为主的一门数学分支，其理论主要包括Cauchy的积分理论、Weierstrass的级数理论、Riemann的几何理论. 同学们在此课程之前已经学习过了微积分的课程，其中有一些定积分是比较难以计算出解析结果的，而复变函数这门课程中的留数定理可以有效地解决很多这种问题. 对于一些微分方程，有的阶数较高，难以求解析解，如果通过此门课程的拉普拉斯变换，可以将微积分运算转化为代数运算，因此可以大大简化微分方程的求解过程. 由此可见，复变函数的理论对于同学们将来从事物理方面的研究起着至关重要的作用.

本讲义为本门课程习题课的讲稿，主要以补充书本上没有的内容，以及强调重要内容为主，适当补充一些数学系的专业内容供感兴趣的同学参考. 每一讲的习题建议学习不太吃力的同学做一做，问题难度较大，也仅供感兴趣的同学参考. 由于水平所限，谬误在所难免，还望广大同学批评指正.

2018秋-复变函数A助教 吴天

2018年9月5日 于中国科学技术大学

目 录

常用记号

$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{C}_\infty$	复数域的完备化$\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$
$\mathbb{D}$	单位开圆盘$\{z : \|z\| < 1\}$
D°	D的内部
$\overline{D}$	D的闭包
∂D	D的边界
$B_r(z_0)$	z_0的r邻域
$B_R(\infty)$	无穷远点的R邻域
$H(D)$	D上的解析函数族

第1讲　复数的性质

正式发车之前，我们需要先来一点开胃小菜.

——某位车技高超的助教

事实上，同学们接触复数能够最早追溯到高中. 但是，仅仅是复数本身的性质就值得好好研究一番. 本章先抛开复变函数——这门注重研究复变量函数的分析性质的学问，论述复数本身的性质以及一些有趣的应用. 首先，我们陈述下列几条常用而又漂亮的性质.

定理1.1 取模运算是保乘法和取逆的，即$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$，$|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

定理1.2 (分部的Cauchy不等式) $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \leqslant |z_1||z_2|$. (事实上，它关于$z_1, z_2$是对称的)

由定理1.2容易推得三角不等式，留作练习. 由以上和教材出现过的性质，以及算子代数理论可知：$(\mathbb{C}, |\cdot|, \times, \bar{\cdot})$ 是一个C^*代数，且$(\mathbb{C}, +, \times)$是域，因此我们经常称之为**复数域**.

上述说法听起来很是专业，但这说明了$\mathbb{C}$具有极其优良的结构，以至于我们经常能够随心所欲地把研究实数的方法推广到复数域中. 从代数的角度来看，复数域相对于实数域是2维的，因此，每一个复数都可以等价于某个平面直角坐标系中的点，即存在双射：

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2，\varphi(z) = (x, y)，其中z = x + \mathrm{i}y.$$

而事实上，这个双射还是$\mathbb{C}$到$\mathbb{R}^2$作为线性空间的线性同构，而复数的辐角表示也的确对应于二维欧式空间的极坐标表示. 既然如此，我们可以用复数的方程表示平面图形.

例1.1 试探究直线与圆用复数表示的方程.

解 设$B \in \mathbb{C}$代表一条直线的某个法向量，由于垂直向量的点乘为0，有：$\mathrm{Re}B\overline{z} = \widetilde{C} \in \mathbb{R}$.

整理，得：$\overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$，其中$B \in \mathbb{C}$，$C = -2\widetilde{C} \in \mathbb{R}$. 反之证明其为直线是容易的.

设圆心为z_0，半径为R，则$|z - z_0| = R$，即$z\overline{z} - \overline{z}_0 z - z_0\overline{z} + |z_0|^2 - R^2 = 0$.

取$A = 1, B = -z_0, C = |z_0|^2 - R^2$，圆周方程为：$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$.

想要证明其逆命题，还需要$A, C \in \mathbb{R}$，$B \in \mathbb{C}$，$|B|^2 > AC$的条件，证明留作练习.

注 由于形式的一致性，我们通常把直线视作圆周.

例1.2 试证明：复平面和去掉北极点的球面之间存在一个双射.

证明 考察球极投射$\varphi(z)=\left(\frac{4\mathrm{Re}z}{|z|^2+4},\frac{4\mathrm{Im}z}{|z|^2+4},\frac{2|z|^2}{|z|^2+4}\right)$. □

注 上述映射实际为$\mathbb{C}$到$S^2\setminus\{N\}$的拓扑同胚. 然而本例中为何将北极点抠掉？通过几何解释容易看出，北极点对应于无穷远点. 若令上式右侧为北极点$(0,0,2)$，亦可发现$z\to\infty$.

有时，我们将添加无穷远点的复平面$\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$记作$\mathbb{C}_\infty$，也称作**复平面的完备化**.

例1.3 在复数域内求解代数方程$\sum\limits_{k=0}^{4}z^k=0$.

解 $1-z^5=(1-z)\sum\limits_{k=0}^{4}z^k=0$，且注意到1不是原方程的根，因此原方程的根是除1以外其余4个五次单位根，即$z=\exp\left\{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{5}\right\}$, $k=1,2,3,4$. 更具体地：

$$z_{1,2}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\mathrm{i},\ z_{3,4}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}\mathrm{i}.$$

有了复数这个工具，我们可以研究三次、四次代数方程根的结构.

考察三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$. 作变量代换$y=x+\frac{b}{3a}$，可得Cardano型三次方程：$y^3+py+q=0$. 设解具有$y=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$的形式. 经过代入计算可以得到：

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

如果置判别式$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$，则分情况有：

(1)$\Delta>0$，原方程具有两个复根，一个实根.

(2)$\Delta=0$，原方程具有重根，但全部为实根.

(3)$\Delta<0$，原方程具有三个实根，可直接利用此求根公式结合de Moivre公式求得.

如果一个高次代数方程能够观察出有理根，固然没必要如此操作，这是因为即便具有一个很简单的根的三次方程，如果强行使用求根公式，结果会很繁杂.

考察$x^3-6x+5=0$，它具有显然的根1，如果强行使用求根公式，$\Delta=-\frac{7}{4}$，这时

$$x=\sqrt[3]{\frac{-5+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-5-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}}.$$

上述形式是难以观察出包含1这个根的，除非再反过来解三次方程，而这个过程多见于初中数学竞赛. 例如：

例1.4 化简：$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

解 注意到$x^3=4-3x$，即$x^3+3x-4=0$. 观察到1为它的一个根，并且$\Delta=3>0$，故1是它的唯一实根，所以$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=1$.

例1.5 求解方程的所有复根：$8x^3-6x+1=0$.

解 首一化，得$x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$. 考察$\Delta=-\frac{3}{256}$，此时

$$x=\frac{1}{2}\Big(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}\Big).$$

化简，得：$x_1=\cos 40°$，$x_2=-\cos 20°$，$x_3=\sin 10°$.

考察四次方程$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, $a\neq 0$，置$y=x+\frac{b}{4a}$，可化为Cardano标准形式：$y^4+py^2+qy+r=0$. 考察配方：$y^4+2my^2+m^2=(2m-p)y^2-qy+m^2-r$.

由于参数m是待定的，令右侧为一个完全平方式，即$4(2m-p)(m^2-r)=q^2$. 这是一个关于m的三次方程，可用前面的办法任意确定m的一个解即可.

如果注意观察三次方程的求根公式，不难将其推广到五次甚至任意奇数次的特殊型代数方程中，例如：$x^5+px^3+\frac{p^2}{5}x+q=0$，它的求根公式为

$$x=\sqrt[5]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^5}{3125}}}+\sqrt[5]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^5}{3125}}}$$

某一年北京大学自主招生的一道试题：$x^5+10x^3+20x-4=0$正是满足这种形式的五次方程，可惜当年无人做出此题. 标准答案给出的做法是变量代换$x=t-\frac{2}{t}$，但是这种做法除了出题人以外很难想到. 使用上述公式可以轻松得到结果，留作练习.

我们试着把实数中的Cauchy不等式推广到复数中，结论依旧成立：

定理1.3 (Cauchy)设$z_1,\cdots,z_n$和$w_1,\cdots,w_n$是$2n$个复数，则

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}z_kw_k\Big|^2\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\Big).$$

它是可以由下述更强的结论直接推得的，下面结论的证明留作练习.

定理1.4 (Lagrange)条件同定理1.3，则

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}z_kw_k\Big|^2=\Big(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\Big)-\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|z_j\overline{w}_k-z_k\overline{w}_j|^2.$$

下面，我们考察关于圆周的对称性问题.

定理1.5 z_1,z_2关于直线$\ell:\overline{B}z+B\overline{z}+C=0$对称当且仅当$\overline{B}z_1+B\overline{z}_2+C=0$.

证明 由题意，z_2-z_1与$\mathrm{i}B$正交，且$\dfrac{z_1+z_2}{2}\in\ell$. 列成式子，有：

$$\operatorname{Re}\mathrm{i}B(\overline{z_2-z_1})=0\text{，且}\overline{B}\frac{z_1+z_2}{2}+B\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{2}+C=0.$$

第一个式子可以推得$B\overline{z}_2+\overline{B}z_1=B\overline{z}_1+\overline{B}z_2$，代入第二个式子即得必要性.

在$\overline{B}z_1+B\overline{z}_2+C=0$两侧取共轭：$\overline{B}z_2+B\overline{z}_1+C=0$.

上述两个等式分布相加、相减即可得到充分性一侧的两个条件. □

定义1.6 称z_1,z_2关于以z_0为圆心、以R为半径的圆周K对称，如果$(z_1-z_0)(\overline{z_2-z_0})=R^2$.

类似地，也可以得到下述关于圆周对称的充要条件，证明留作练习.

定理1.7 设$A,C\in\mathbb{R}$，$B\in\mathbb{C}$，$|B|^2>AC$，圆周$K:Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0$，则$z_1,z_2$关于$K$对称当且仅当$Az_2\overline{z}_1+\overline{B}z_2+B\overline{z}_1+C=0$.

下面给出一个四点共圆的条件，而这个条件也是将来要学习的分式线性变换的不变量.

定义1.8 $z_1,z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}_\infty$至少有三点不同，称$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\dfrac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$为$z_1,z_2,z_3,z_4$的**交比**，记作$(z_1,z_2,z_3,z_4)$.

定理1.9 如果四个不同的点满足交比为实数，则四点共圆(包括共线的情况). 证明留作练习.

练习

1. 试使用定理1.2推出复数的三角不等式.
2. 证明：$A,C\in\mathbb{R}$，$B\in\mathbb{C}$，$|B|^2>AC$时，$Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0$为圆周方程.
3. 求解方程的所有实根：$x^5+10x^3+20x-4=0$.
4. 试证明定理1.4(Lagrange恒等式)，并讨论定理1.3(Cauchy不等式)的取等条件.
5. 试证明定理1.7.
6. 试证明定理1.9.
7. $z_1,z_2\in\mathbb{C}$，$z_1+z_2\in\mathbb{R}$，$z_1z_2\in\mathbb{R}$，求证：$z_1,z_2\in\mathbb{R}$或$\overline{z}_1=z_2$.
8. 若$|z_1|=\lambda|z_2|$，$\lambda>0$，证明：$|z_1-\lambda^2z_2|=\lambda|z_1-z_2|$.
9. 证明：$|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2=(1-|a|^2)(1-|z|^2)$.
10. 求出关于虚轴和圆周$|z-2|=1$的公共对称点.
11. 求出关于圆周$|z|=1$和$|z-1|=\dfrac{5}{2}$的公共对称点.
12. 求复数$z_0\neq0$关于直线$\ell:x+y=0$的对称点.
13. 设z,w是正方形的两个顶点，试求出所有可能情况的另外两个顶点.

问题

1. 设$0<a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_0$，求证：方程$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kz^k=0$在$\mathbb{D}$内无根.

2. 证明：z_1, z_2, z_3三点共线，当且仅当$\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \overline{z}_3 z_1 \in \mathbb{R}$.

3. 设$|a| < 1$，$|z| < 1$. 证明：$\dfrac{\big||z| - |a|\big|}{1 - |a||z|} \leqslant \left|\dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right| \leqslant \dfrac{|z| + |a|}{1 + |a||z|}$.

4. 设$z_1, \cdots, z_n$是任意n个复数，证明：必有$E \subset \{1, 2, \cdots, n\}$，使得

$$\Big|\sum_{j \in E} z_j\Big| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

5. 设$z_1 \neq z_2$，$0 < \lambda \neq 1$，证明：$\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda$为一个圆周(通常称为Apollonius 圆)，且圆心$z_0 = \dfrac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}$，半径$R = \dfrac{\lambda|z_1 - z_2|}{|1 - \lambda^2|}$. 如果$\lambda = 1$，它又是什么轨迹？

6. 证明：$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$，其中$n \in \mathbb{N}^*$且$n \geqslant 2$.

第2讲　复平面的拓扑与初等函数

复平面的拓扑，是以复数的模作为范数诱导的拓扑，即以模长为度量，定义出极限、开集等概念. 类似于数学分析，我们同样可以得到各种极限定理. 这些理论我们只作叙述.

定义2.1 记$B_r(z_0)=\{z:|z-z_0|<r\}$，称为z_0**点的**r**邻域**. 记$B_R(\infty)=\{z:|z|>R\}$，称为**无穷远点的**R**邻域**.

定理2.2 若$z_0\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=|z_0|$且$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Arg}z_n=\mathrm{Arg}z_0$.

注 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Arg}z_n=\mathrm{Arg}z_0$理解为任取$\theta_0\in\mathrm{Arg}z_0$，存在$\theta_n\in\mathrm{Arg}z_n$，使得$\lim\limits_{n\to 0}\theta_n=\theta_0$.

定义2.3 复平面中非空的连通开集称为**区域**. 定义在$[a,b]$上的一个复值连续函数$\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$，记作$z=\gamma(t)$，把它称为$[a,b]$上的**连续曲线**. 如果$\gamma(a)=\gamma(b)$，称$\gamma$为**闭曲线**. 如果$\gamma$是单射，称$\gamma$为**Jordan曲线**. 一般，我们将Jordan闭曲线称作**围道**.

定义2.4 称域D是**单连通**的，若任意D内的围道的内部仍在D内. 非单连通域称为**多连通**的.

定理2.5 (闭集套定理)若非空闭集列$\{F_n\}$单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{diam}F_n=0$，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$是独点集.

定义2.6 称E是**紧**的，如果对任意开覆盖$E\subset\bigcup\limits_{G\in\Lambda}G$，存在$G_1,\cdots,G_n\in\Lambda$，使得$E\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n}G_j$.

定理2.7 在$\mathbb{C}$中，紧集等价于有界闭集.

同样的，紧集上的连续函数具有很好的性质.

定理2.8 紧集上的连续函数是一致连续且有界，并且能取到最值.

定理2.9 (Bolzano-Weierstrass)任意无穷集合都存在聚点，这个聚点允许是∞.

例2.1 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}z_k=z_0$.

证明 不妨$z_0=0$. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^*$，当$n>N$时，$|z_n|<\varepsilon$. 此时有：

$$\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}z_k\Big|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|z_k|+\frac{n-N}{n}\varepsilon.\ 令n\to\infty：\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}z_k\Big|\leqslant\varepsilon.$$ □

例2.2 研究$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$在$\mathbb{D}$上的连续性与一致连续性.

解 连续性显然成立. 考察点列$z_n=1-\dfrac{1}{n}$即知$f(z)$在$\mathbb{D}$上不一致连续. □

下面研究如何将数学分析中的初等函数推广至复变函数中.

定义2.10 设$z=x+\mathrm{i}y$，则$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$，$\sin z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$，$\cos z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$.

注 事实上，数学中经常使用如下定义：

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

但是考虑到函数项级数的收敛域的概念还没有学，因此给了定义2.10.

有了上述定义，自然地得到Euler公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$. 置$z=\pi$，有：$\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}+1=0$.

定义2.11 定义指数函数的反函数——对数函数：$\mathrm{Log}z=\log|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z$. 这是一个集合，$\log z$表示它的主值，即$\log z=\log|z|+\mathrm{i}\arg z$.

例2.3 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$，其中$x,y\in\mathbb{R}$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{n\log\left(1+\dfrac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{n\ln\left|1+\dfrac{x+\mathrm{i}y}{n}\right|+n\theta_n\mathrm{i}\right\}$，其中$\theta_n$表示$1+\dfrac{x+\mathrm{i}y}{n}$的辐角，显然$\tan\theta_n=\dfrac{y}{n+x}$且$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}n\theta_n=y$.

同时$\left|1+\dfrac{x+\mathrm{i}y}{n}\right|=\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^2+\dfrac{y^2}{n^2}}$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left|1+\dfrac{x+\mathrm{i}y}{n}\right|=x$. □

性质2.12 $\sin\mathrm{i}z=\mathrm{i}\sinh z$，$\cos\mathrm{i}z=\cosh z$.

定义2.13 如果当z沿着z_0的充分小邻域中的任意围道绕一圈时，多值函数f的值从一支变为另一支，则z_0称为f的一个**支点**. 如果f在域D内无论经过怎样绕转，在同一点出的取值是不变的，称D是f的一个**单值分支**.

例2.4 考察多值函数$f(z)=\mathrm{Log}z$. 0和∞显然是它的支点，如果我们把x轴的正半轴给挖掉，即通过这条线将两个支点连接并挖去，我们得到了$f(z)$的一个单值解析分支. 事实上，挖掉任意一条连接0与∞的曲线，都可以得到$f(z)$的单值解析分支.

例2.5 考察多值函数$f(z)=\sqrt{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$，$1,2,3,4$为其全部支点. 我们可以将1、2与3、4分别相连，进而得到$f(z)$的一个单值解析分支.

通过上述两个例子，我们不难发现，确定单值解析分支的一个办法，即为将分支点两两相连. 当然，得到单值解析分支的方法通常不唯一，不过这是最简单的一种办法.

最常见的多值函数都与对数函数和非整数次的幂函数有关，下面给出关于这两种函数∞是否为支点的一般理论.

定理2.12 ∞是$f(z)=\mathrm{Log}\prod\limits_{s=1}^{t}(x-x_s)^{\alpha_s}$的支点，当且仅当$\sum\limits_{s=1}^{t}\alpha_s=0$.

定理2.13 ∞是$f(z)=\prod\limits_{s=1}^{t}(x-x_s)^{\alpha_s}$的支点，当且仅当$\sum\limits_{s=1}^{t}\alpha_s\in\mathbb{Z}$. 两个定理的证明留作练习.

例2.6 在怎样的域中，$w=\sqrt{z^2-1}$能分出单值解析分支？

解 显然，±1是$f(z)$的全部支点，因此，挖掉$[-1,1]$之后就得到了一个单值解析分支.

注 单值解析分支并不唯一，甚至可以挖掉非支点，当然，上述取法是最简单的情况，实际问题当中，取哪种解析分支需要具体根据情况判定.

例2.7 试确定$f(z)=\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}(z+1)^{-1}$在$[0,1]$的上岸取正值的单值解析分支$f_0$，并计算$f_0(-\mathrm{i})$.

解 本题适合挖掉$[0,1]$，置$z=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$1-z=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$. 则$f(z)=\dfrac{r_1^{-\frac{1}{2}}r_2^{\frac{3}{2}}}{z+1}\exp\{\mathrm{i}\dfrac{-\theta_1+3\theta_2+2k\pi}{2}\}$.

当$0<z<1$时，$\theta_1=\theta_2=0$，代入$f(z)$知：可取$k=0$.

当$z=-\mathrm{i}$时，通过z从$[0,1]$上岸绕转至$-\mathrm{i}$的过程得知：$r_1=1,\theta_1=\dfrac{3\pi}{2},r_2=\sqrt{2},\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$.

直接代入到$f_0(z)=\dfrac{r_1^{-\frac{1}{2}}r_2^{\frac{3}{2}}}{z+1}\exp\left\{\mathrm{i}\dfrac{-\theta_1+3\theta_2}{2}\right\}$，即得$f_0(-\mathrm{i})=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$.

练习

1. 若$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}w_n=w_0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}z_kw_{n-k}=z_0w_0$.
2. 研究$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在$\mathbb{D}$上的连续性与一致连续性.
3. 设$z\neq0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{z}-1)=\log|z|+\mathrm{i}\arg z+2\pi k\mathrm{i}$，$k=0,1,2,\cdots$.
4. 证明定理2.12和定理2.13.
5. 证明：$f(z)=\mathrm{Log}\Big(\dfrac{z^2-1}{z}\Big)$能在域$D=\mathbb{C}\backslash\big((-\infty,-1]\bigcup[0,1]\big)$上能取出单值解析分支.
6. 设D是z平面上去掉线段$[-1,\mathrm{i}],[1,\mathrm{i}]$和射线$z=\mathrm{i}t$ $(1\leqslant t<\infty)$后所得到的域. 证明：函数$\mathrm{Log}(1-z^2)$能在D上分出单值解析分支. 设f是满足$f(0)=0$的那个分支，试计算$f(2)$的值.
7. 证明：函数$\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$能在$\mathbb{C}\backslash[-1,1]$上选出一个单值解析分支$f$，满足$f(\mathrm{i})=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$. 试计算$f(-\mathrm{i})$的值.

问题

1. 设E是紧集，F是闭集，且$E\bigcap F=\varnothing$，求证：$d(E,F):=\inf\limits_{\substack{x\in E\\y\in F}}|x-y|>0$.
2. 设$z_{kl}\in\mathbb{C}$，$k\geqslant l$，满足对任意l，$\lim\limits_{k\to\infty}z_{kl}=a_l$存在；$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{l=1}^{k}z_{kl}$存在；对任意$k\in\mathbb{N}$，$\sum\limits_{l=1}^{k}|z_{kl}|\leqslant M<\infty$. 求证：若复数列$\{w_n\}$收敛，则$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{l=1}^{k}z_{kl}w_l$存在.

第3讲　调和函数的性质

本章探讨一般的调和函数理论，它们自然适用于二维的情况. 这一段中，我们假设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$开区域，$\omega_n$为$n$维单位球的表面积，即

$$\omega_n = \mathcal{H}^{n-1}\big(\partial B_1(0)\big) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)}，其中\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t为\text{Euler}第二积分.$$

定义多重指标：$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$，$|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i$，$\alpha! = \displaystyle\prod_{i=1}^n \alpha_i!$.

设$x = (x_1, \cdots, x_n)$，定义$x^\alpha = \displaystyle\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$，$\mathrm{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1 \cdots \partial^{\alpha_n}x_n}$.

定义3.1 称$u \in C(\Omega)$满足**平均值性质**(mean value property，记作$u \in$M.V.P.(Ω))，如果满足：

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\mathrm{d}S_y \ (\forall B_r(x) \subset \Omega) \text{ 或 } u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int\limits_{B_r(x)} u(y)\mathrm{d}y \ (\forall B_r(x) \subset \Omega).$$

性质3.2 (最大模原理)设$u \in C(\overline{\Omega}) \bigcap$M.V.P.$(\Omega)$，且$u$不是常数，则$u$的最大值和最小值均只能在$\partial\Omega$上取得. 进而有$\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| = \max\limits_{\partial\Omega} |u|$.

注 定义3.1的两个条件的等价性与性质3.2的证明均是平凡的，证明留作练习.

引理3.3 设$f \in C(\Omega)$, $g \in C_0^\infty(\Omega)$，则$f * g \in C^\infty(\Omega)$，且$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g)$.

注 直接使用定义证明一阶导数的情况，然后归纳法即可. 证明过程中g的紧支性保证了在g做Taylor展开以后所有余项的系数能够被控制. 证明留作练习.

定理3.4 $u \in C(\Omega) \bigcap$M.V.P.(Ω)当且仅当$\Delta u(x) = 0 \ (\forall x \in \Omega)$.

证明 (充分性) 取$B_r(x) \subset \Omega$，$\rho \in (0, r)$. 记$B_\rho = B_\rho(x)$. 由Gauss散度定理：

$$0 = \int_{B_\rho} \Delta u(y)\mathrm{d}y = \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_{|w|=1} u(x + \rho w)\mathrm{d}S_w.$$

约掉ρ^{n-1}，并对ρ从0到r积分，有：$\displaystyle\int_{|w|=1} u(x + rw)\mathrm{d}S_w = u(x)\omega_n$.

(必要性) 已知Ω上的连续函数u满足平均值性质. 取$\varphi \in C_0^\infty\big(B_1(0)\big)$满足$\int_{B_1(0)} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$，且$\varphi(x)$为径向函数，设为$\varphi(x) = \psi(|x|)$，则$\omega_n \int_0^1 r^{n-1}\psi(r)\mathrm{d}r = 1$. 置$\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\varphi\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$.

对$\forall x \in \Omega$，$\varepsilon <\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$，有：$(\varphi_\varepsilon * u)(x) = \int_\Omega u(x+y)\varphi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y = \int_{|y|<1} u(x+\varepsilon y)\varphi(y)\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r \int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon rw)\varphi(rw)\mathrm{d}S_w = \int_0^1 \psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r \int_{|w|=1} u(x+\varepsilon rw)\mathrm{d}S_w \xlongequal{\text{M.V.P}} u(x)$.

因此对$\forall \varepsilon > 0$，$\forall x \in \Omega_\varepsilon := \{y \in \Omega : \mathrm{dist}(y, \partial\Omega) > \varepsilon\}$，$u(x) = (\varphi_\varepsilon * u)(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

$\therefore u \in C^\infty(\Omega)$. 由充分性的证明知：对$\forall B_r(x) \subset \Omega$有

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{|w|=1} u(x+rw)\mathrm{d}S_w = r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\big(\omega_n u(x)\big) = 0.$$

由$B_r(x)$的任意性即得：$\Delta u(x) = 0$ $(\forall x \in \Omega)$. □

注 证明当中的φ总是可以取出的，例如：$\varphi(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\Big\{\dfrac{1}{4|x|^2 - 1}\Big\}, & |x| < \dfrac{1}{2} \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

引理3.5 (梯度估计)设$u \in C^1\big(\overline{B}_R(0)\big)$是调和函数，则$|\nabla u(x_0)| \leqslant \dfrac{n}{R}\max\limits_{\overline{B}_R(0)} |u|$.

注 使用平均值性质、Gauss散度定理，然后利用长大不等式放缩即可. 证明留作练习.

推论3.6 设$u \in C^1\big(\overline{B}_R(0)\big)$为非负调和函数，则$|\nabla u(x_0)| \leqslant \dfrac{n}{R}u(x_0)$.

推论3.7 $\mathbb{R}^n$上的有上界或下界的调和函数必为常数.

定理3.8 设$u \in C^1\big(\overline{B}_R(0)\big)$是调和函数，则$|\mathrm{D}^\alpha u(x_0)| \leqslant \dfrac{n^m \mathrm{e}^{m-1} m!}{R^m}\max\limits_{\overline{B}_R(x_0)} |u|$.

回忆多变量解析函数的概念：

定义3.9 称f在Ω上解析，如果$f \in C^\infty(\Omega)$，且对$\forall x_0 \in \Omega$，$\exists r > 0$，使得$|x - x_0| < r$时，$f(x)$具有的Taylor展开$\sum\limits_{k=0}^{m-1}\sum\limits_{|\alpha|=k}\dfrac{\mathrm{D}^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + R_m(x, x_0)$满足$\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x, x_0) = 0$.

定理3.10 开区域上的调和函数一定在这个开区域上解析.

证明 取$B_{2r}(x) \subset \Omega$，$h \in \mathbb{R}^n$满足$|h| < \dfrac{r}{2n^2\mathrm{e}} < r$. 取含Lagrange余项的Taylor展式：

$$u(x+h) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{\mathrm{D}^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + \frac{1}{m!}\Big[\Big(\sum_{k=1}^n h_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)^m u\Big](x_1 + \theta h_1, \cdots, x_n + \theta h_n)$$

其中$\theta \in (0, 1)$. 由定理3.7，余项$|R_m(h)| \leqslant \Big(\dfrac{|h|n^2\mathrm{e}}{r}\Big)^m \max\limits_{\overline{B}_{2r}} |u| < \dfrac{1}{2^m}\max\limits_{\overline{B}_{2r}} |u|$. □

下面给出调和函数非常重要的一个不等式.

定理3.11 (Harnack不等式)设u是Ω上的非负调和函数，则对Ω上的任意一个紧集K，存在一个正的常数$C = C(\Omega, K)$，使得$\forall x, y \in K$，$\dfrac{1}{C}u(y) \leqslant u(x) \leqslant Cu(y)$.

证明 证明过程较长，且专业性比较强，此处只说明主要思路：

(1)利用平均值性质证明：若$B_{4r}(x_0)\subset\Omega$，则存在$c=c(n)$，使得

$$\frac{1}{c}u(y)\leqslant u(x)\leqslant cu(y),\ \forall x,y\in B_r(x_0).$$

(2)给定紧集K，能取$x_1,\cdots,x_N\in K$，使得$\{B_r(x_i)\}$组成K的有限开覆盖，且$4r<\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)$.

(3)取$C=c^N$，则C与Ω和K有关. □

本讲的证明内容对于非数学系同学而言无需掌握，但是这些定理以及习题、问题中的结论是调和函数最基本的性质，可能对物理系同学以后的数学物理方程等课程有所帮助.

练习

1. 验证定义3.1中两个条件的等价性，并藉此证明性质3.2.
2. 依照注记中的提示，证明引理3.3、引理3.5，并利用引理3.5证明推论3.6，并由此证明推论3.7.

问题

1. 试使用归纳法证明定理3.8.
2. 设$u\in C(\Omega)$满足$\displaystyle\int_\Omega u\Delta\varphi=0\ (\forall\varphi\in C_0^2(\Omega))$，证明：$u$是$\Omega$上的调和函数.
3. 请感兴趣的同学查阅有关资料或独立完成定理3.11的证明.

第4讲　留数定理与积分计算

先通过教材上的几道作业题，我们慢慢谈起留数定理在计算积分中如何应用的问题.

例4.1 设$\dfrac{1}{1-z-z^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_nz^n$，证明：$C_{n+2}=C_{n+1}+C_n$，$n\geqslant 0$，写出此展开式的前五项，并指出收敛半径.

证明 $\dfrac{1}{1-u}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u^n\Longrightarrow\dfrac{1}{1-z-z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+z^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n(1+z)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}z^{2n-k}$.

当$m=2n$时，$C_{2n}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n+k}{2k}$；$m=2n+1$时，$C_{2n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n+1+k}{2k+1}$.

由于$\dbinom{n+1}{m}=\dbinom{n}{m}+\dbinom{n}{m-1}$，且$\dbinom{n+1}{0}=\dbinom{n}{0}=\dbinom{2n+2}{2n+2}=\dbinom{2n+1}{2n+1}=1$：

$$C_{2n+2}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1+k}{2k}=2+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+k}{2k}+\binom{n+k}{2k-1}\right)$$

$$=1+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k+1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k+1}{2k+1}=C_{2n+1}+C_{2n}.$$

$C_{2n+1}=C_{2n}+C_{2n-1}$的证明类似，留作练习. □

例4.2 设z_0为解析函数$f(z)$的至少n级零点，又为$\varphi(z)$的n级零点，证明：

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{\varphi^{(n)}(z_0)}$$

证明 $f(z)=(z-z_0)^mg(z)\ (m\geqslant n)$，$\varphi(z)=(z-z_0)^nh(z)$. 由于$f(z),\varphi(z)$在点$z_0$处的泰勒展开：

$$f(z)=(z-z_0)^m\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+o((z-z_0)^m)，\varphi(z)=(z-z_0)^n\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}+o((z-z_0)^n).$$

若$m=n$，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}=\dfrac{(z-z_0)^n\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+o((z-z_0)^n)}{(z-z_0)^n\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}+o((z-z_0)^n)}=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{\varphi^{(n)}(z_0)}$.

若$m>n$，$f(z)=o((z-z_0)^n)$，所以$f^{(n)}(z_0)=0$，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}=0$. □

例4.3 求实积分$\displaystyle\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)\mathrm{d}\theta$，$a$为实数，且$a\neq 0$

解 $\because \tan(\theta+\mathrm{i}a)=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}-1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}+1}$. 置$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}=z$，原积分$I=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{|z|=\mathrm{e}^{-2a}}\dfrac{z-1}{z(z+1)}\mathrm{d}z$.

置$f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)}$，则0和-1是f的一级极点. 此时，按照$a>0$和$a<0$两种情况分类讨论：

(1)$a>0$时，$I=-\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\big(f(z),0\big)=\pi\mathrm{i}$.

(2)$a<0$时，$I=-\pi\mathrm{i}\Big(\operatorname{Res}\big(f(z),0\big)+\operatorname{Res}\big(f(z),-1\big)\Big)=-\pi\mathrm{i}$.

一、Laurant展开式.

1. Laurant展开只能在孤立奇点的去心邻域内进行，不能在非孤立奇点进行.

2. Laurant展开时，一般不通过$c_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\Gamma}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=0,\pm1,\cdots)$，而是通过间接法，即根据Laurant展式的唯一性，通过利用已知的一些初等函数的Taylor展式来展开，注意Taylor展式的定义域.

3. 一些函数的Taylor展式：

(1)$(1+z)^\alpha=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\binom{\alpha}{n}z^n\ (|z|<1)$；

(2)$e^z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\ (|z|<+\infty)$；

(3)$\cos z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\ (|z|<+\infty)$；

(4)$\sin z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (|z|<+\infty)$；

(5)$\ln_k(1+z)=2k\pi\mathrm{i}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}\ (|z|<1,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.k=0$对应主值分支).

4. Laurant级数的乘法：设$F(z)=f_1(z)f_2(z)$于$r<|z-a|<R$内解析，且$f_1(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ $f_2(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n(z-a)^n$，则$F(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$，其中$c_n=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kb_{n-k}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

二、解析函数的孤立奇点种类判定方法.

1. 可去奇点的判断方法：

(1)$f(z)$在点a的主要部分(负幂)为零；

(2)$\displaystyle\lim_{z\to a}f(z)=b(\neq\infty)$；

(3)$f(z)$在点a的某去心邻域内有界.

2. m级极点的判断方法：

(1)$f(z)$在点a的主要部分为$\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{c_{-j}}{(z-a)^j}$，其中$c_{-m}\neq0$；

(2)$f(z)$在点a的去心邻域能表示成$f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{(z-a)^m}$，其中$\lambda(z)$在$a$的邻域解析，且$\lambda(a)\neq0$；

(3)$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$以a为m级零点；

(4)若$f^{(m-1)}(z)\Big|_{z=z_k}=0$且$f^{(m)}(z)\Big|_{z=z_k}\neq 0$，则$z_k$为$f(z)$的$m$级零点；

(5)$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$(但这种方法不能判断极点的级数).

3. 本性奇点的判断方法及性质：

(1)$\lim\limits_{z\to a}f(z)$不存在(有限或无限)；

(2)$f(z)$在点a的主要部分有无穷多项不为0；

(3)(Weierstrass定理)对任意指定的数$A\in\mathbb{C}_\infty$，存在点列$z_n\to a$，使得像点列$f(z_n)\to A$；

(4)(Picard大定理)对任意的$A\neq\infty$，除可能有一个例外的有限值A_0，必有点列$\{z_n\}\to a$，使得$f(z_n)=A$，$n=1,2,\cdots$；

(5)设a分别为$f(z)$的极点和$g(z)$的本性奇点，则a是$f(z)g(z)$及$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的本性奇点.

4. 无穷远点的性质：

(1)我们往往利用倒数变换$z'=\dfrac{1}{z}$把讨论函数$f(z)$在点∞的去心邻域$(|z|>r)$内的性质转变成对应函数$\varphi(z')$在对应去心邻域$(0<|z'|<r)$内的性质.

(2)称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_nz^n$(正幂)为$f(z)$在$z=\infty$的主要部分.

至于无穷远点为奇点的性质与前面的类似，不做讨论.

三、留数与留数定理.

1. 留数的求解方法：

(1)$\mathrm{Res}(f(z),a)=c_{-1}$(若$a$为$f(z)$的本性奇点，只能用这种方法)；

(2)若a为$f(z)$的n级极点，则$\mathrm{Res}(f(z),a)=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-a)^nf(z)]$；特别地，当$a$为$f(z)$的1级极点，则$\mathrm{Res}(f(z),a)=\lim\limits_{z\to a}[(z-a)f(z)]$；

(3)若a为$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的一级极点，则$\mathrm{Res}(f(z),a)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

2. 无穷远点的留数：设∞为$f(z)$的一个孤立奇点，则称$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\Gamma^-}f(z)\mathrm{d}z$ $(\Gamma:|z|=\rho>r,\ 0\leqslant r<\rho<+\infty)$为$f(z)$在$\infty$的留数，记为$\mathrm{Res}(f(z),\infty)$.

3. 无穷远点留数计算方法：

(1)$\mathrm{Res}(f(z),\infty)=-c_{-1}$；

(2)$\mathrm{Res}(f(z),\infty)=-\mathrm{Res}\Big(f\Big(\dfrac{1}{t}\Big)\dfrac{1}{t^2},0\Big)$.

4. 留数定理：如果函数$f(z)$在闭路C上解析，在C的内部除去n个孤立奇点$a_1,a_2,\cdots,a_n$外解析，则$\displaystyle\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]$.

5. 若$f(z)$在$\mathbb{C}_\infty$上只有有限个奇点$a_1,a_2,\cdots,a_n,\infty$，则$\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),a_k)+\mathrm{Res}(f(z),\infty)=0$.

四、用留数定理计算实积分.

1. 计算$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$型积分，这里$R(\cos\theta,\sin\theta)$表示$\cos\theta,\sin\theta$有理函数，在$[0,2\pi]$上连续.

方法：$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\cos\theta=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z}),\sin\theta=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\dfrac{1}{z}),\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，变为复积分后用留数定理.

2. 设$f(z)$沿圆弧$S_R: z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$，$R$充分大$)$上连续，且$\lim\limits_{R\to\infty} zf(z)=\lambda$于$S_R$上一致成立(与$\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$中的$\theta$无关)，则$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$.

3. 设$g(z)$沿上半圆周$\Gamma_R: z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$R$充分大$)$上连续，且$\lim\limits_{R\to\infty} g(z)=0$于$\Gamma_R$上一致成立，则$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z=0(m>0)$.

练习

1. 证明例4.1中$C_{2n+1}=C_{2n}+C_{2n-1}$的情况，并继续写出此展开式的前五项，并指出收敛半径.

第5讲　解析函数性质的综合应用

定理4.1 (辐角原理)设$f \in H(D)$，$\gamma \in D$为可求长简单闭曲线．如果f在γ上没有零点，在γ内部有α_k阶零点a_k，$k=1,2,\cdots,n$，则$\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$.

辐角原理具有明显的几何意义：上述公式左侧的积分表示当z沿着γ的正方向走一圈时，$f(z)$在$f(\gamma)$上的辐角变化除以2π．它可以直接推导出用于判断零点个数的重要定理：

定理4.2 (Rouché)设$f,g \in H(D)$，γ是D中可求长的简单闭曲线，γ的内部位于D中．如果当$z \in \gamma$时，$|f(z)-g(z)|<|f(z)|$，则f和g在γ内部的零点个数相同.

证明 易知，f和g在γ上都没有零点，故$\left|1-\dfrac{g(z)}{f(z)}\right|<1$．记$w=\dfrac{g}{f}$，则$|w-1|<1$.

$\therefore \Delta_{w(\gamma)}\mathrm{Arg}w=0$，从而$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}f=\Delta_\gamma\mathrm{Arg}g$．由辐角原理，$f$与$g$零点个数相同. □

由于证明过程过于专业，我们不加证明地给出开映射定理：

定理4.3 解析函数是开映射，i.e. 它把开集映为开集．因此，它也将开区域映为开区域.

例2.4 试求方程$z^4-6z+3=0$在圆环$\{z:1<|z|<2\}$中根的个数.

解 当$|z|=2$时，$|z^4|=16>9\geqslant|6z-3|$，故方程在$|z|<2$内有4个根；

当$|z|=1$时，$|6z|=6>4\geqslant|z^4-3|$，故方程在$|z|<1$内有1个根，并且显然$|z|=1$上没有根.

$\therefore$方程在圆环$\{z:1<|z|<2\}$中有3个根.

例2.5 试求方程$4z^4+2^z+9=0$在圆环$\{z:1<|z|<\dfrac{3}{2}\}$中根的个数.

解 当$|z|=\dfrac{3}{2}$时，$|z^4|=20.25>12>|2^z+9|$，故方程在$|z|<\dfrac{3}{2}$内有4个根；

当$|z|=1$时，$9>|4z^4+2^z|$，故方程在$|z|<1$内无根，并且显然$|z|=1$上也没有根.

$\therefore$方程在圆环$\{z:1<|z|<\dfrac{3}{2}\}$中有4个根.

除了直接使用Rouch*é*定理，有时还需要灵活运用一些特殊函数的性质，以及辐角原理解决问题.

例2.6 证明：方程$P(z)=z^4+2z^3-2z+10=0$在每个象限中各有一个根.

证明 记$\gamma_1=[0,R]$，$\gamma_2=\{z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\theta:0\to\pi\}$，$\gamma_3=[R\mathrm{i},0]$.

注意到$P(z)=(z^2-1)(z+1)^2+11\geqslant 9\ (z\in\mathbb{R})$，则$P$在$\gamma_1$上恒正，$\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}P(z)=0$.

R充分大，由$\dfrac{2z^3-2z+1}{z^4}$模长充分小，知：$\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}P(z)=\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}z^4\Big(1+\dfrac{2z^3-2z+1}{z^4}\Big)=2\pi.$

$\Delta_{\gamma_3}\mathrm{Arg}P(z)=\mathrm{Arg}P(0)-\mathrm{Arg}P(\mathrm{i}R)=-\mathrm{Arg}(R^4+10)\Big(1-\dfrac{2\mathrm{i}R(R^2+1)}{R^4+10}\Big)=0\ (R$充分大).

$\therefore$由辐角原理，P在第一象限内有一个零点．由于实系数多项式的复根成对地共轭出现，故第四象

限也仅有一个零点. 由于$P(z) \geqslant 9$ ($z \in \mathbb{R}$). 类似前面的方法证明P在虚轴上无零点，由代数学基本定理，剩余的两个零点必定共轭地出现在第二、三象限. $\square$

下面，我们给出解析函数的最大模原理的重要应用.

定理4.4 (Schwarz引理)设$f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$为解析函数，且$f(0) = 0$，则

(1)对于任意$z \in \mathbb{D}$，$|f(z)| \leqslant |z|$；(2)$|f'(0)| \leqslant 1$；

(3)如果存在$z_0 \in \mathbb{D}$，使得上述两条件有一个取等，则存在$\theta \in \mathbb{R}$，使得$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ ($\forall z \in \mathbb{R}$).

证明 置$g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ ($z \neq 0$)，$g(0) = f'(0)$，则$g \in H(\mathbb{D})$. 对$\forall 0 < r < 1$，当$|z| = r$时，$|g(z)| \leqslant \dfrac{1}{r}$.

由最大模原理：$|g(z)| \leqslant \dfrac{1}{r}$ ($|z| < r$). 令$r \to 1^-$：$|g(z)| \leqslant 1$ ($z \in \mathbb{D}$)，即$|f(z)| \leqslant |z|$且$|f'(0)| \leqslant 1$.

上述不等式若有一个在$z_0 \in \mathbb{D}$处取等，由最大模原理，g为常数.

$\because |g(z_0)| = 1$，故存在$\theta \in \mathbb{R}$，使得$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$. $\square$

定义4.5 设D是$\mathbb{C}$中的域，f是D上的单叶解析函数，且$f(D) = D$，称f为D上的一个**全纯自同构**. D上的全纯自同构全体组成的群记作$\mathrm{Aut}(D)$，称为D的**全纯自同构群**.

下面我们尝试着确定$\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$：对于$|a| < 1$，记$w = \varphi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$，则$z = \varphi_a(w)$.

如果$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，且$f^{-1}(0) = a$，置$g(w) = f \circ \varphi_a(w)$，则$g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$且$g(0) = 0$.

由Schwarz引理：$|g'(0)| \leqslant 1$. 同理，$g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$且$g^{-1}(0) = 0$，则$|g'(0)| \geqslant 1$，所以$|g'(0)| = 1$.

再由Schwarz引理：存在$\theta \in \mathbb{R}$，使得$g(w) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} w$，即$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$. 于是我们有：

定理4.6 设$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，且$f^{-1}(0) = a$，则必存在$\theta \in \mathbb{R}$，使得$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$.

注 上述定理表明：$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z} : a \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

利用定理4.6，我们可以将具有特殊条件的Schwarz引理加以推广. 证明留作练习.

定理4.7 (Schwarz-Pick)设$f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$为解析函数，且$f(a) = b$ ($a, b \in \mathbb{D}$)，则

(1)对于任意$z \in \mathbb{D}$，$|\varphi_b(f(z))| \leqslant |\varphi_a(z)|$；(2)$|f'(a)| \leqslant \dfrac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$；

(3)如果存在$z_0 \in \mathbb{D}$，使得上述两条件有一个取等，则$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

最后，作为科普介绍，我们不加证明的给出若干条与解析函数有关的著名结论：

定理4.8 (解析函数的Hadamard三圆定理)设$0 < r_1 < r_2 < \infty$，$D := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$，$f \in H(D) \bigcap C(\overline{D})$，$M(r) := \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ ($r_1 \leqslant r \leqslant r_2$). 则$\log M(r)$在$[r_1, r_2]$上是$\log r$的凸函数，

$$\text{i.e.}\ \ \log M(r) \leqslant \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2).$$

注 它是由最大模原理，经过一系列复杂的构造证明的.

定理4.9 (Carathéodory不等式) 设$f \in H(B_R(0)) \bigcap C(\overline{B_R(0)})$，$M(r) := \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$，$A(r) := \max\limits_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)$

$(0 \leqslant r \leqslant R)$，则$M(r) \leqslant \dfrac{2r}{R-r}A(R) + \dfrac{R+r}{R-r}|f(0)|,\ \forall r \in [0, R)$.

<u>注</u> 它的证明需要下列引理，这个引理的证明需要共形等价的构造以及Schwarz引理.

<u>引理4.10</u> 设$f \in H(\mathbb{D})$，$f(0)=0$，且$\exists A>0$，使得$\mathrm{Re} f(z) \leqslant A,\ z \in \mathbb{D}$，则

$$|f(z) \leqslant \frac{2A|z|}{1-|z|},\ \forall z \in \mathbb{D}.$$

练习

1. $\mathrm{e}^z - 4z^n + 1 = 0\ (n \in \mathbb{N}^*)$在$\mathbb{D}$内有多少个根？
2. $4z^4 + 2z + 9 = 0$在圆环$1 < |z| < \dfrac{3}{2}$内有多少个根？
3. 证明定理4.7：Schwarz-Pick定理.

问题

1. 设$0 < r < 1$，证明：当n充分大时，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k$在$B_r(0)$中没有根.
2. 设$r > 0$. 证明：当n充分大时，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}z^k$在$B_r(0)$中没有根.
3. 设$f \in H(\mathbb{D})$，$f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. 证明：$|f(z) - f(0)| \leqslant |z|\dfrac{1-|f(0)|^2}{1-|f(0)||z|}$.

参考文献

[1] 严镇军. 复变函数. 合肥：中国科学技术大学出版社，1995.1

[2] 钟玉泉. 复变函数学习指导书. 北京：高等教育出版社，1996.4

[3] 方企勤. 复变函数教程. 北京：北京大学出版社，1996.12

[4] 史济怀，刘太顺. 复变函数. 合肥：中国科学技术大学出版社，1998.12

[5] 严镇军. 数学物理方法. 合肥：中国科学技术大学出版社，1999.1

[6] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. Complex Analysis(影印本). 世界图书出版公司，2013.1

[7] Han Qing, Lin Fanghua. Elliptic Equation. (未出版)