线性代数（B）历年考题

说明:

1. 这里收录了若干套中国科学技术大学线性代数考试真题.

2. 排序顺序优先考虑知识涵盖范围, 其次为时间先后. 即先 B1 后 B2 再 A, 期中复习请参考标注有期中的试卷, 因为在它们后面的试卷都会涉及到期中考试之后的内容. 在同一场考试同时有 A、B 卷, 这里只收录 A 卷, 因为 B 卷是为补考准备的, 它与 A 卷题目题型雷同.

3. 本考题的主要作用是供同学们考试之前模拟使用, 越靠近现在的考卷可能越能接近现在的出题风格.

4. 没有参考答案, 希望读者自行思考, 同时熟悉题目类型. 建议本门课程的助教在平时习题课先将学过的部分的测验题进行讲解, 在考前习题课讲解对应的考试题.

5. 希望这套历年考题能够像我之前整理的数分的往年真题、复变的上古密卷一样, 便于以后的助教的习题课工作和同学们复习本门课程. 感谢 19 级余启帆、章正骐同学提供题目! 感谢同为此门课助教的宋琛师妹参与录入部分题目! 祝愿科大数学教育越办越好!

2020-2021 春季学期线性代数 (B1) 助教

数学科学学院　吴天

2021 年 6 月　于合肥

中国科学技术大学 2009—2010 学年第一学期
线性代数期中考试

1. (8 选 7, 5 分 $\times 7 = 35$ 分) 填空题.

(1) 空间平面过点 $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$, $C(0,1,0)$, 则平面的一般方程为 ____.

(2) 设 $A(1,3,5)$, $B(1,2,3)$, $C(2,1,4)$, $D(3,2,1)$, 则四面体 $ABCD$ 的体积为 ____.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} =$ ____.

(4) 点 $A(1,-2,3)$ 到平面 $2x-2y+z=3$ 的距离是 ____.

(5) 求过直线 $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 2x-3y+2z=2 \end{cases}$ 且与平面 $x+2y+3z=5$ 垂直的平面方程为 ____.

(6) 设 A 是 3×3 矩阵, $\det A = 2$, 则 $\det(4A^{-1}-(2A)^*) =$ ____.

(7) 设平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影为 ____; $\boldsymbol{a}$ 在平面 π 上的投影为 ____.

(8) 设 $a \neq 0$, 四阶方阵 $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式等于 ____, 它的逆矩阵为 ____.

2. (15 分) 选择、填空混合题.

(1) 设 A, B 是 n 阶矩阵, 则 $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是 ____.

A. $\begin{pmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

(2) 设 A 是 3 阶矩阵, 将 A 的第 1 列和第 2 列交换得到 B, 再将 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C, 则满足 $AQ = C$, 可逆矩阵 Q 为 ____.

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{2009}AQ^{2010} =$ ____.

(4) 设 n 阶实方阵 $A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A_4^{-1} =$ ____.

3. (10 分) 设 $A, B, A+B$ 都是 n 阶可逆矩阵, 证明: $A^{-1}+B^{-1}$ 也是可逆矩阵, 并求其逆.

4. (10 分) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, 证明: $\det(I-BA) = \det(I-AB)$.

5. (10 分) 证明: 线性方程组 $Ax = 0$ 有唯一解的充要条件是 A 是列满秩的.

6. (10 分) 设 A 为 n 阶方阵, b 为 n 阶列向量. 证明: 当 A 的行列式为零时, 关于 n 阶列向量 x 的线性方程组 $Ax = b$ 不可能有唯一解.

7. (10 分) 设 A 是 $n \times n$ 方阵, 求 $\operatorname{rank} A^*$.

中国科学技术大学 2009—2010 学年第二学期
线性代数期中考试

1. (5 分 $\times 8 = 40$ 分) 填空题.

(1) 已知空间直角坐标系中两向量 $\boldsymbol{a} = (4, -3, 0)$ 和 $\boldsymbol{b} = (4, 3, -2)$, 则以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为两边的三角形的面积为 ____.

(2) 以 $A(1,0,2), B(1,-1,0), C(2,2,-1)$ 和 $D(-2,-1,4)$ 为顶点的四面体的体积为 ____.

(3) 两平行平面 $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ 和 $2x + 3y + 4z + 17 = 0$ 之间的距离为 ____.

(4) 直角坐标系中过直线 $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$ 且平行于 z 轴的平面方程为 ____.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, 记 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41} =$ ____.

(6) 对线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 9 \\ -x_1 + x_2 - 8x_3 + 8x_4 = -27 \end{cases}$, 已知系数方阵的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -8 & 8 \end{vmatrix} = 72$, 则解 $x_4 =$ ____.

(7) 设 A 为 4 阶方阵, 且 $|A| = 3$, 则 $|A^{-1}| =$ ____, $|A^2| =$ ____, 伴随矩阵 A^* 的行列式 $|A^*| =$ ____.

(8) 设矩阵 $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $B^* = B^T$, 其中 B^* 为 B 的伴随矩阵, B^T 为 B 的转置矩阵. 若 b_{11}, b_{12}, b_{13} 为 3 个相等的非零正数, 则 $b_{11} =$ ____.

2. (12 分) 若 3 阶方阵 A 和 B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$, 试求 B.

3. (12 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ 的逆.

4. (12 分) 设直线 $l: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x - y + 2z = 0$ 的投影为直线 l_0.

(1) 求直线 l_0 的方程.

(2) 求 l_0 绕坐标 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

5. (12 分) 已知向量组 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^n$ 线性无关, 试证明: 向量组 $b_1 = a_1 + a_2 + a_3, b_2 = a_1 + 3a_2 + 5a_3, b_3 = a_1 + 9a_2 + 25a_3$ 线性无关.

6. (12 分) 设 $\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_m} \in F^n$ 为一组列向量, $A = (\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_m})$ 是以 $\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_m}$ 为列构成的 $n \times m$ 阶矩阵. A 经过一系列的初等行变换后变为矩阵 $B = (\boldsymbol{b_1}, ..., \boldsymbol{b_m})$, 这里 $\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_m} \in F^n$ 为矩阵 B 的列. 试证明: 若 $\{\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_r}\}$ 为 $\{\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_m}\}$ 的极大无关组, 则 $\{\boldsymbol{b_1}, ..., \boldsymbol{b_r}\}$ 为 $\{\boldsymbol{b_1}, ..., \boldsymbol{b_m}\}$ 的极大无关组.

中国科学技术大学 2011—2012 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (30 分) 已知点 $A(1,2,3), B(2,1,4), C(1,3,5), D(3,2,1)$. 求

   (1) B, C 所在直线 L 的方程和 A, B, C 所在平面 Π 的方程;

   (2) $\triangle ABC$ 的面积 S, $\angle ABC$ 和四面体 $ABCD$ 的体积 V;

   (3) A 到 L 的距离, D 到 Π 的距离和直线 AB 与 CD 之间的距离;

   (4) 过 A, B, C, D 的球面的方程和过 A, B, C 的圆的方程;

   (5) 直线 AB 绕 CD 旋转一周所得曲面的方程, 并指出曲面的类型.

2. (20 分) (1) 当 a, b 分别取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ (b-1)x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + (1-b)x_3 = 3 - 2b \end{cases}$ 有解, 并求出其所有解;

   (2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 解矩阵方程 $X(I - B^{-1}A)^T B^T = I$.

3. (30 分) 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$. 若 $D_1 = \det(I_m - AB)$, $D_2 = \det(I_n - BA)$, $r_1 = r(I_m - AB)$, $r_2 = r(I_n - BA)$ 已知.

   (1) 求 D_1 与 D_2 及 $\det \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ 之关系和 r_1 与 r_2 及 $r \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ 之关系; 并求 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 - a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_m \\ -a_2b_1 & 1 - a_2b_2 & \cdots & -a_2b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_mb_1 & -a_mb_2 & \cdots & 1 - a_mb_m \end{pmatrix}$ 的秩和行列式;

   (2) 证明: 当 $m = n$ 时, $\det(AB) = \det A \det(B)$; 并求 $\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$; 当 $m \neq n$ 时, 给出关于 $\det(AB)$ 的结论并证明之.

4. (30 分) (1) 计算 n 阶 Vandermonde 行列式 $V_n(a_1, a_2, ..., a_n)$, 并求 $D = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{pmatrix}$;

(2) 设 $A_n = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$, 求 $\det(A_n)$; 当 $a=2, b=c=1$ 时, 求 A_n^{-1}.

中国科学技术大学 2012—2013 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (30 分) 填空题.

(1) 已知向量 $a=(1,-1,1)$, $b=(0,3,6)$, 则 $a\cdot b=$ ____.

(2) $A(1,2,3)$, $B(2,1,4)$, $C(1,5,9)$, $D(2,2,2)$, 则 $\triangle ACD$ 的面积为 ____, 四面体 $ABCD$ 的体积为 ____.

(3) 两平面 $3x-4y+12z+25=0$ 和 $15x-20y+60z-5=0$ 之间的距离为 ____.

(4) 以 $\begin{cases} x=5z \\ y=0 \end{cases}$ 为母线, 以 Oz 轴为旋转轴的旋转面方程为 ____.

(5) 经过点 $(1,2,3)$ 且垂直于平面 $x+2y+3z+5=0$ 和 $2x+y+2z+6=0$ 的平面方程为 ____.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$ ____.

(7) 已知 3 阶实方阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A=$ ____.

(8) $c=$ ____ 时, 直线 $x-c=\dfrac{y-3}{2}=z-2$ 和 $x=2y=2z$ 相交.

(9) 设 $A=(a_{ij})_{4\times 4}$, 若 $a_{21}=a_{22}=a_{23}=a_{24}>0$, 且 $A^*=A^T$, 则 $a_{21}=$ ____.

2. (10 分) 若对可逆矩阵 A 作下列初等变换后得到 (可逆) 矩阵 B, 那么相应地, B^{-1} 是由 A^{-1} 经怎样的变换得到的? 并说明理由.

(1) 互换 A 的第 i 列与第 j 列. (2) 用非零数 λ 乘 A 的第 i 列. (3) 将 A 的第 i 列 μ 倍加到第 j 列上.

3. (12 分) 已知三张平面 $\Pi_1: \lambda x+y+z+1=0$, $\Pi_2: x+\lambda y+z+2=0$, $\Pi_3: x+y-2z+3=0$. 试就参数 λ 讨论它们的位置关系, 并作示意图.

4. (12 分) 求直线 $\begin{cases} 2x-y+z+2=0 \\ x+2y+4z-4=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$ 之间的距离 d.

5. (14 分) (1) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵. $d_1=\det(I_m-AB)$, $r_1=\operatorname{rank}(I_m-AB)$, $d_2=\det(I_n-BA)$, $r_2=\operatorname{rank}(I_n-BA)$, $d=\begin{vmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix}$ 和 $r=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$. 求 d 与 d_1 和 d_2, 以及 r 与 r_1 和 r_2 的关系.

(2) 求 $m+1$ 阶方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{pmatrix}$ 的行列式 d_0 和秩 r_0.

6. (12 分) 试证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\operatorname{rank}(I_n+A)+\operatorname{rank}(I_n-A)\geqslant n$, 且等号成立当且仅当 $A^2=I_n$.

7. (10 分) 设 A 是行满秩的 $n\times(n+1)$ 矩阵, 若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解为 $x=(x_1,\cdots,x_{n+1})^T$. 试证明: $x_i=(-1)^{n+i}cd_i$, 其中 c 是任意常数, d_i 是矩阵 A 删去第 i 列后得到的 n 阶子矩阵的行列式, $i=1,\cdots,n+1$.

中国科学技术大学 2013—2014 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

(1) 已知 $A(1,2,3), B(2,2,2), C(1,5,9), D(2,1,4)$, 则四面体 $ABCD$ 的体积为 ____.

(2) 经过点 $(1,2,3)$ 且垂直于两平面 $2x+y+2z+6=0$ 和 $x+2y+3z+5=0$ 的平面方程为 ____.

(3) 当 $c=$ ____ 时, 两直线 $x=2y=2z$ 和 $x-c=\dfrac{y-3}{2}=z-2$ 相交.

(4) 设 $n(n \geq 2)$ 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*, 行列式 $\det A = 2$, 则 $\det A^* =$ ____.

(5) 已知 3 阶实方阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A=$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 若空间三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$ 也不共面.

(2) 对空间任意三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, 必有 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}$.

(3) 若齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解, 则非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}(x\neq 0)$ 必有无穷多组解.

(4) 若 A, B 均为 n 阶方阵, 则 $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$.

3. (10 分) 若矩阵 A 经一次初等变换 (1, 2 或 3) 后得到矩阵 B; 那么, 相应地, A^T 能否由 B^T 经初等变换得到? 如果能, A^T 是由 B^T 经怎样的初等变换得到的?

4. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\det A$ 和 $A^k (k=0,\pm1,\pm2,...)$.

5. (15 分) 已知三张平面 $\Pi_1 : \lambda x+y+z+1=0,\ \Pi_2 : x+\lambda y+z+2=0,\ \Pi_3 : x+y-2z+3=0, \lambda$ 为参数; 试就参数 λ 讨论其位置关系, 并作示意图.

6. (15 分) 求直线 $L_1 : x-1=y=z$ 绕 $L_2 : x=y=0$ 旋转一周所得旋转面的参数方程和一般方程, 指出此曲面的类型并作示意图.

7. (15 分) 试证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(2I_n - A) \geq n$, 且等号成立的充分必要条件是 $A^2 = 2A$.

8. (15 分) 试证明:

(1) $\operatorname{rank} A^* = \begin{cases} n, \operatorname{rank} A = n \\ 1, \operatorname{rank} A = n-1 \\ 0, \operatorname{rank} A \leq n-2 \end{cases}$;

(2) $(A^*)^* = (\det A)^{n-2}\cdot A\ (n\geq 2)$.

中国科学技术大学 2013—2014 学年第二学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

(1) 已知四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c}$, 对角线 AC, BD 的中点分别为 E, F. 则 $\overrightarrow{EF}$ 可由 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ 表示为 ____.

(2) 复数 $z = 1 + \sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2})$ 的三角形式是 ____.

(3) 点 $(1,2,3)$ 到直线 $x - 1 = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{1-z}{2}$ 的距离为 ____.

(4) 经过直线 $x = y = z$, 且与平面 $x + 2y + 3z = 5$ 垂直的平面方程是 ____.

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ a & 2a & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $\operatorname{rank} A = 2$. 则 $a =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 三维空间中, 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充要条件 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$ 为共面.

(2) 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 均为三维空间向量. 则 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$.

(3) 设 $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 其中 A, B 均为 n 阶可逆方阵. 则 $C^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}$, 其中 $*$ 表示伴随矩阵.

(4) 设 A 为实对称方阵. 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.

3. (15 分) 求直线 $l_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2t \end{cases}$ 绕直线 $l_2 : 2x = y = z$ 旋转所成的旋转曲面的一般方程.

4. (15 分) 给定线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$.

(1) 问: λ 分别为何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解?

(2) 在方程组有无穷多解时, 给出其通解.

5. (12 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的逆.

6. (10 分) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

7. (8 分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, $n \geq m, \lambda \neq 0$. 证明:

$$\det(\lambda I_n - BA) = \lambda^{n-m} \det(\lambda I_m - AB).$$

中国科学技术大学 2014—2015 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

   (1) 三阶行列式的几何意义是 ____.

   (2) 对正整数 n, 方程 $z^n = 1$ 的根为 ____.

   (3) 点 $(1,1,1)$ 到直线 $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z+3}{6}$ 的距离为 ____.

   (4) 将 Oyz 面上的曲线 $f(y,z) = 0$ 绕 Oz 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 ____.

   (5) 常见的二次曲面有椭球面、二次锥面、二次柱面和 ____ 等.

   (6) 设 A 为 n 阶方阵, 若 $\operatorname{rank} A = r$, 则 $\operatorname{rank} A^* =$ ____.

2. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

   (1) 对空间任意三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 必有 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

   (2) 对空间任意三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 必有 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{b}) - \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})$

   (3) 若 A, B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵, 则 $\det(AB) = \det(BA)$.

   (4) 若 A, B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵, 则 $(AB)^T = A^T B^T$.

   (5) 设 A^* 为 n 阶矩阵 A 的伴随, 则 $\det A^* = (\det A)^{n-1}$

3. (8 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 解方程 $AXB = C$.

4. (8 分) 解线性方程组 $\begin{cases} ax + y + z + 1 = 0 \\ x + ay + z + 2 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$, 指出其几何意义并作示意图.

5. (8 分) 计算 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$ 的行列式和秩.

6. (9 分) 设 A 为 n 阶方阵, 证明 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(I - A) \geq n$, 且等号成立的充分必要条件是 $A^2 = A$.

7. (9 分) 设 A 为 n 阶非零方阵, $n \geq 3$, 且 $A_{ij} = a_{ij},\ i,j = 1,2,...,n$.

   (1) 若 $a_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 1,2,...,n$, 证明 A 可逆并求 $\det(A)$;

   (2) 若 $a_{ij} \in \mathbb{C},\ i,j = 1,2,...,n$, 则结果又如何?

8. (9 分) 设 A, B 分别为 $l \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵, 试证明:

   (1)$ABX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank} B$;

   (2) 若 A 为实矩阵, 则 $\operatorname{rank}(A^T A) = \operatorname{rank} A$.

中国科学技术大学 2014—2015 学年第二学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

(1) a, b 为 $\mathbb{R}^3$ 中向量, $|a| = \sqrt{3}, |b| = 1$, 数量积 $a \cdot b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 则以 $a + 2b$ 和 $a + b$ 为邻边的平行四边形的面积为 ____.

(2) 过点 $(1, -1, 1)$ 和 $(2, 0, -1)$, 且与 x 轴平行的平面方程为 ____.

(3) 令 $A = S_{ij} D_i(\lambda) T_{ij}(\lambda)$, 其中 $S_{ij}, D_i(\lambda), T_{ij}(\lambda)$ 是三种初等方阵. 则 $A^{-1} =$ ____.

(4) 若 A, B 为三阶可逆方阵, $|A| = \lambda, |B| = \mu, M = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ 2B & 0 \end{pmatrix}$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵. 则 $|M| =$ ____.

(5) 设 A 为 n 阶方阵, $|A| = \lambda, A$ 的每行元素之和为 $\mu \neq 0, A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式. 则 $A_{11} + A_{21} + ... + A_{n1} =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题: 对的请简要说明理由, 错的请举出反例.

(1) 三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面, 则 $\boldsymbol{a}$ 能写出 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的线性组合.

(2) 若线性方程组变元的个数多于方程的个数, 则方程组一定有无穷组解.

(3) 两个 n 阶上三角方阵的乘积仍为上三角阵.

(4) 初等变换不会改变矩阵的秩.

3. (8 分) 直线 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使直线在坐标平面 Oxz 内?

4. (8 分) 方阵 A 交换第 k, l 行得到 B, 则伴随矩阵 B^* 可由 A^* 经过怎样的初等变换得到?

5. (12 分) λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解? 有解时, 解出这个方程组.

6. (12 分) 设 A 是元素全为 1 的 n 阶方阵, $B = \operatorname{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$, 其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 求 $A + B$ 的行列式与逆.

7. (10 分) A, B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times p$ 阶矩阵且 $A \cdot B = 0$. 求证: $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$.

8. (10 分) $A \in F^{m \times n}$. 则 $\operatorname{rank} A = r \Leftrightarrow$ 存在列满秩的矩阵 $B \in F^{m \times r}$ 和行满秩的矩阵 $C \in F^{r \times n}$ 使得 $A = B \cdot C$(此事实称为矩阵的满秩分解定理).

中国科学技术大学 2015—2016 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

   (1) 点 $(1,-2,3)$ 到平面 $2x-2y+z-6=0$ 的距离为 ____.

   (2) 方程 $\dfrac{x^2}{4}-y^2+\dfrac{z^2}{4}=-1$ 所表示的曲面为 ____.

   (3) 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2+2A-I=0$, 则 $A^{-1}=$ ____.

   (4) 若 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $A^{2015}=$ ____.

   (5) 若 A 为 3 阶方阵, 且 $|A|=2$, 则 $|8A^{-1}-3A^*|=$ ____.

   (6) $\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}=$ ____.

2. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 判断题.

   (1) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}$.

   (2) 若 A,B 均为 n 阶对称阵, 则 AB 为对称阵的充要条件为 $AB=BA$.

   (3) 线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解的充要条件是 $Ax=0$ 只有零解.

   (4) 若 A 和 B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵, 则有 $\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}BA$.

   (5) 若 A 和 B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵, 则有 $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}BA$.

3. 解答题.

   (1) (6 分) 设平面 π 过点 $(1,2,3)$, 且在三个坐标轴上的截距相等, 求平面 π 的方程.

   (2) (12 分) 已知点 $O(0,0,0)$, $A(1,-1,2)$, $B(3,3,1)$, $C(3,1,3)$. 求:

   (i) $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦; (ii) $\triangle ABC$ 的面积; (iii) 四面体 $OABC$ 的体积.

   (3) (9 分) 问 a 为何值时, $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\2x_1+9x_2-5x_3+15x_4=a\end{cases}$ 有解? 并求其所有解.

   (4) (10 分) 已知 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}-5&2&-1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}$, 求 A.

   (5) (12 分) 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{pmatrix}$, 求: (i)$\det A$; (ii) $\operatorname{rank}A$.

   (6) (12 分) 设 A 为 n 阶方阵, I 为 n 阶单位阵.

   (i) 证明: $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(A+I)\geqslant n$; (2) 试给出等号成立的条件, 并证明之.

(7) (10 分) 计算 Vandermonde 行列式 $V_n(a_1,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$.

中国科学技术大学 2015—2016 学年第二学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

(1) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank} A^T A =$ ____.

(2) 以 $\mathbb{R}^3$ 中三个向量 $e_1 = (2,1,0)$, $e_2 = (6,3,2)$, $e_3 = (1,0,5)$ 为基, 向量 $(2,-1,2)$ 的坐标是 ____.

(3) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的伴随矩阵是 ____.

(4) 设 $\mathbb{R}^4$ 中向量组 $\alpha_1 = (1,2,-1,1)$, $\alpha_2 = (2,0,t,0)$, $\alpha_3 = (0,-4,5,-2)$ 线性相关, 则 $t =$ ____.

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $A^n =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 若非齐次线性方程组 $Ax = b$ 解唯一, 则对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

(2) 若矩阵 A, B 满足 AB, BA 都有定义, 则 $\det AB = \det BA$.

(3) 若向量 β 不能由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表示, 则向量组 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

(4) 设 W 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上所有行列式为 0 的矩阵全体, 则 W 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间.

3. (14 分) 已知线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$.

(1) 讨论 λ 取何值时, 方程组无解、有唯一解和有无穷多组解.

(2) 当方程组有无穷多组解时, 求出通解.

4. (20 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$.

(1) 计算矩阵 A 的行列式; (2) 计算矩阵 A 的逆矩阵.

5. (14 分) 给定 I: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明向量组 (I) 是线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组基.

(2) 给定 II: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 (I) 到 (II) 的过渡矩阵.

(3) 求 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 在基 (I) 下的坐标.

6. (12 分) 设 F 为数域, $A \in F^{n\times n}$, $A^2 = I$, I 是 n 阶单位阵.

(1) 证明: $\operatorname{rank}(A+I) + \operatorname{rank}(A-I) = n$.

(2) 设 $W_1 = \{x \in F^n \mid Ax = x\}$, $W_2 = \{x \in F^n \mid Ax = -x\}$. 证明: W_1 及 W_2 为 F^n 的子空间, 并且 W_1 的一组基与 W_2 的一组基合并起来构成 F^n 的一组基.

中国科学技术大学 2016—2017 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

(1) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$, 其中 α_1, α_2, β_1, β_2 均为 3 维列向量, 并且 $|A| = 1$, $|A - 2B| = -2$, 则 $|B| =$ ____.

(2) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A^T 是 A 的转置矩阵, 则矩阵 A^TA 的秩等于 ____.

(3) 以 $\mathbb{R}^3$ 中三个向量 $e_1 = (1,1,1), e_2 = (2,3,1), e_3 = (0,0,1)$ 为基, 向量 $(2,5,1)$ 的坐标是 ____.

(4) 设 A 为四阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 如果 A 的秩为 2, 则 $A^*X = 0$ 的解空间的维数为 ____.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 & -1 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ x & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$, $f(X) = \det A$, 则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 若非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 对应的齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = 0$ 只有零解, 则 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(2) 若矩阵 A, B 满足 AB, BA 都有定义, 则 $\det(AB) = \det(BA)$

(3) 若向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性表示, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ 线性相关.

(4) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是所有 n 阶实方阵按照矩阵线性运算所构成的实数域上的线性空间, W 是所有迹等于零的 n 阶实方阵构成的集合, 则 W 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间.

3. (12 分) 设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 的逆矩阵.

4. (20 分) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$. 试问 a, b 满足什么条件时,

(1) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示方法唯一;

(2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

(3) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但是表示方法不唯一, 并且求出所有的表示方法.

5. (14 分) 设 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是所有 2 阶实方阵对于矩阵的线性运算构成的线性空间, 给定一组向量

$$I: A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明向量组 (I) 是线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组基;

(2) 给定线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的另一组基

$$II: B_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

求基 I 到基 II 的过渡矩阵.

6. (14 分) 设 F 为数域, $A \in F^{n\times n}$, 且满足 $A^2 = I$, 这里 I 是 n 阶单位阵.

(1) 证明: $\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(A-I)=n$;

(2) 设 $W_1=\{\boldsymbol{x}\in F^n|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\}$, $W_2=\{\boldsymbol{x}\in F^n|A\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}\}$. 证明: W_1 及 W_2 为 F^n 的子空间, 并且 W_1 的一组基和 W_2 的一组基合并起来构 F^n 的一组基.

中国科学技术大学 2016—2017 学年第二学期
线性代数（B1）期中考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) $\alpha_1 = (1,3,2)^T, \alpha_2 = (4,4,0)^T, \alpha_3 = (2,5,3)^T, \alpha_4 = (-1,2,3)^T$, 则 $\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$____.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A^{10} =$ ____.

(3) 设 A 为 n 阶方阵, $\det A = 5$, A^* 为 A 的伴随方阵, 则 $\det A^* =$ ____.

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, A_{ij} 为代数余子式, 则 $A_{14} - 3A_{24} + 2A_{34} - A_{44}$____.

(5) 若向量 $\beta = (3,9,6)$ 不能由向量组 $\alpha_1 = (1,1,2), \alpha_2 = (1,2,-1), \alpha_3 = (1,-\lambda,3)$ 线性表示, 则 $\lambda =$ ____.

(6) 设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$, 其中 B, C 为 n 阶可逆方阵, O 为零方阵, 则 $(A^T)^{-1} =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 5 & 11 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 不相抵.

(2) 设数组空间 F^n 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关, $A \in F^{m\times 1}$, $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)A$, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l$ 也线性相关.

(3) A, B 为 n 阶实方阵, 则 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(BA)$.

(4) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的秩为 r, 且任何向量 $\alpha_i (1 \le i \le s)$ 均可以被 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

3. (12 分) 当 α 取何值时, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = a \end{cases}$ 有解? 求出它的通解.

4. (16 分) 设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\det A$ 及 A^{-1}.

5. (16 分) 设 $\mathbb{P}_3[x]$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上次数不超过 3 的多项式全体, 按多项式的加法数乘构成线性空间.

(1) 证明: $S = \{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\}$ 构成 $\mathbb{P}_3[x]$ 上的一组基;

(2) 求基 S 到自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 的过渡矩阵 T;

(3) 求多项式 $5 + 7x - x^2 + 13^3$ 在基 S 下的坐标.

6. 设方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}, c = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, 已知 $\mathrm{rank}\, A = 1$,

(1) 证明: $A^2 = cA$;

(2) 计算 $\det(I + A)$, 其中 I 为 n 阶单位方阵.

中国科学技术大学 2017—2018 学年第二学期 线性代数（B1）期中考试

1. 填空题.

(1) $\alpha_1=(2,1,3,-1)^T,\alpha_2=(3,-1,2,0)^T,\alpha_3=(4,2,6,-2)^T,\alpha_4=(4,-3,1,1)^T$, 则 $\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$ ____.

(2) $A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\\2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&4&-2\\3&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\det(AB)=$ ____.

(3) $A=\begin{pmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{pmatrix}$, 第四行个元素代数余子式之和为 ____.

(4) 若 A^* 为 A 的伴随方阵, 且 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&-1&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A=$ ____.

(5) $\alpha_1=(a,0,c),\alpha_2=(b,c,0),\alpha_3=(0,a,b)$ 线性无关, 则 a,b,c 满足 ____.

2. 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) $A\in\mathbb{R}^{3\times5},\mathrm{rank}(A)=3$, 则 $\exists\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$, 使得 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 只有唯一解.

(2) 如果 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n},\mathrm{tr}((A-B)(A^T-B^T))=0$, 则 $A=B$.

(3) 设向量组 $\alpha_1,...,\alpha_r$ 线性无关, $\beta=\lambda_1\alpha_1+...+\lambda_r\alpha_r$ 且 $\lambda_i\neq0,i=1,...,r$, 则 $\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},...,\alpha_r$ 线性无关.

(4) $A\in\mathbb{R}^{m\times n},B\in\mathbb{R}^{n\times m},\det(AB)=\det(BA)$.

3. 已知 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6\\4x_1-x_2-x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-x_3=3\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x_1+ax_2-x_3-x_4=-5\\bx_1-x_3-2x_4=-3\\x_3-2x_4=1-c\end{cases}$ 同解, 求 a,b,c 的值.

4. $n(>1)$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&2&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&2\end{pmatrix}$, 求 $\det A$ 及 A^{-1}.

5. $\mathbb{R}^{2\times2}$ 为实数域上所有 2×2 阶矩阵组成的集合, 按矩阵的加法数乘构成线性空间.

(1) 证明: $S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ 构成 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 上的一组基;

(2) 求基 S 到自然基 $(E_{ij})_{1\le i,j\le2}$ 的过渡矩阵 T;

(3) 求 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 在基 S 下的坐标.

6. $A\in F^{m\times n},B\in F^{n\times m}$, 证明: $n+\mathrm{rank}(I_m-AB)=m+\mathrm{rank}(I_n-BA)$.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (5 分 $\times 6 = 30$ 分) 填空题.

(1) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B, 再交换 B 的第二行与第三行得到矩阵 C, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 C 与 A 的关系为 ____ (矩阵等式).

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维列向量, 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$, 如果 $|A| = 1$, 则 $|B| =$ ____.

(3) 设矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆, 则其逆矩阵为 ____.

(4) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, 若 $|A| = 2$, $|B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ____.

(5) 从 $\mathbb{R}^2$ 的基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 ____.

(6) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$, 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 设矩阵 $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 C 的行向量与矩阵 A 的行向量等价.

(2) 若线性方程组有唯一解, 则可用 Cramer 法则求解.

(3) $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间维数比向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 生成的子空间维数小, 则 $s \leqslant t$.

(4) V 是 $\mathbb{R}$ 上所有 n 阶奇异方阵的全体, 则 V 可构成线性空间.

3. (12 分) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的行列式和逆矩阵.

4. (14 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1$, $A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3.

(2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3, 证明: ξ_1, ξ_2, ξ_3 的线性无关.

5. (12 分) 设 $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的三个线性无关的解, 求 $Ax = \beta$ 的通解.

6. (12 分) $A = P^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P$, 其中 P, A 都是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵, $\{\lambda_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 两两不等. $V = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AB = BA\}$.

(1) 证明: V 构成 $\mathbb{R}$ 上线性空间;　(2) 求 V 的基与维数.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第二学期
线性代数（B1）期中考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 方阵的方幂 $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}^{2019} =$ ____.

(2) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i,j) 元的代数余子式, 则 $A_{11} - A_{12} =$ ____.

(3) 若方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ ____.

(4) 设 $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, $\operatorname{rank} A = 3$, 则 $A^*x = 0$ 的解空间维数是 ____.

(5) 若向量组的秩 $\operatorname{rank}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 4$, 则 $\operatorname{rank}(a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_1) =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 设 A, B 均为行满秩的 $m \times n$ 的非零矩阵, $m < n$, 则 $\det(AB^T) \neq 0$.

(2) 设非零矩阵 A, B 满足 $AB = 0$, 则 A 的行向量线性相关.

(3) 设 $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$, 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则对任意非零的列向量 $b \in \mathbb{R}^5$, $Ax = b$ 存在无穷多解.

(4) 对于任意 n 阶实方阵 A, B, 不存在非零的实数 μ, 使得 $AB - BA = \mu I_n$.

3. (15 分) 考虑 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$, 问 λ 为何值时, 该方程组有唯一解? 无解? 有无穷多解? 在有解的情况下, 给出通解.

4. (15 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - 2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - 3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - n \end{vmatrix}$.

5. (15 分) 设 $F_3[x]$ 为数域 F 上次数不超过 3 的多项式的全体, 在多项式加法与数乘下构成了线性空间.

(1) 证明 $S = \{1, 1 + x, (1 + x)^2, (1 + x)^3\}$ 构成了该线性空间的一组基.

(2) 求基 S 到自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 的过渡矩阵 T.

(3) 求多项式 $1 + x + x^2 + x^3$ 在基 S 下的坐标.

6. (10 分) 设 A 是 n 阶方阵, I_n 为 n 阶单位矩阵.

(1) 若 $A^2 = A$, 证明: $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(I_n - A) = n$.

(2) 反之, 若 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(I_n - A) = n$, 证明: $A^2 = A$.

中国科学技术大学 2019—2020 学年第一学期
线性代数（B1）期中考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

   (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank} A^T A =$ ____.

   (2) 设 A 为 5×8 矩阵, $\operatorname{rank} A = 3$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间的维数 $=$ ____.

   (3) 设 $a \neq 0$, $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$ ____.

   (4) 设 3 阶方阵 $A = (a, b, c)$, $B = (2b, c, 2a)$, 其中 a, b, c 为三维列向量, 若 $\det A = 1$, 则 $\det B =$ ____.

   (5) 设 A, B 为三阶可逆方阵, $\det A = \lambda$, $\det B = \mu$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ B & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\det M =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

   (1) 二阶方阵与其伴随方阵的行列式相同.

   (2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A^T B^T)$.

   (3) 已知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 而 β 不是 $Ax = 0$ 的解, 则 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

   (4) 所有行列式为零的 n 阶方阵全体 W 是 $F^{n \times n}$ 的线性子空间.

3. (10 分) 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1,\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_3 - x_4 = -2,\ x_1 - x_4 = 2 \end{cases}$.

4. (15 分) 计算 n 阶行列式 $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-a & -1 & & & \\ a & 1-a & -1 & & \\ & a & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1-a & -1 \\ & & & a & 1-a \end{vmatrix}$.

5. (20 分) 设 V 为实数域上所有 2 阶对称方阵组成的集合: $\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

   (1) 证明: V 为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的线性子空间.

   (2) 证明: $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ 构成 V 的一组基.

   (3) 求基 S 到基 $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ 的过渡矩阵.

   (4) 求 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 在基 S 下的坐标.

6. (10 分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = 0$.

   (1) 证明: $\operatorname{rank} A \leqslant \dfrac{n}{2}$.

   (2) 对每一个 n, 找一个 n 阶方阵 A, 使得 $A^2 = 0$ 且 $\operatorname{rank} A = \lfloor \dfrac{n}{2} \rfloor$.

中国科学技术大学 2020—2021 学年第二学期
线性代数（B1）期中考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 设三维欧式空间中有向量 a, b, c, 它们的模长相同且两两所成夹角相等. 已知在空间直角坐标系下 $a = (1,1,0)$, $b = (0,1,1)$, $c =$ ____.

(2) 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A^* =$ ____.

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, M_{ij} 为余子式, 则 $M_{31} - M_{32} + M_{33} =$ ____.

(4) 已知向量组 $\alpha_1 = (1,2,3,4)$, $\alpha_2 = (2,3,4,5)$, $\alpha_3 = (3,4,5,6)$, $\alpha_4 = (4,5,6,k)$, 且 $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 2$, 则 $k =$ ____.

(5) 设 $\mathbb{P}_3[x]$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上次数不超过 3 的多项式全体, 则基 $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ 到自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 的过渡矩阵 $T =$ ____.

2. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 判断题.

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & -12 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 不相抵.

(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$.

(3) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是向量组中的任意一个向量 α_i 都可以由剩余的 $n-1$ 个向量线性表示.

(4) 设 A, B 为满足 $AB = 0$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 A 的列向量线性相关, B 的行向量线性相关.

(5) 设 A 为 n 阶非零实方阵, 若 $A^T = A^*$, 则 A 可逆.

3. (12 分) 当 λ 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$ 有解, 并求处它的通解.

4. (14 分) 设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$, 其中 $a > 0$, 求 $\det A$ 及 A^{-1}.

5. (14 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 令 V 是所有与 A 可交换的三阶实对称方阵全体.

(1) 证明: V 按矩阵的加法与数乘运算构成的实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

(2) 求 V 的维数与一组基.

6. (10 分) 设 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$. 证明: $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank} B$ 成立的充要条件是方程组 $ABx = 0$ 的解均为方程组 $Bx = 0$ 的解.

中国科学技术大学 2008—2009 学年第一学期
线性代数期末考试

1. (35 分) 填空题.

(1) 设 A,B 均为 n 阶方阵, $|A|=-3$, $|B|=-2$, 则 $A^*=$____, $|B^{-1}|=$____.

(2) $\alpha=(1,2,3)^T$, $\beta=(1,-1,1)$, $\alpha\beta=$____, $(\alpha\beta)^2=$____.

(3) 设 $A=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{7}\right)$, $A^{-1}BA=BA+6AA$, $|B^*|=$____.

(4) 设 $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(a,1,0)^T$, $\alpha_3=(c,b,1)^T$, 则三阶方阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的逆矩阵为 ____.

(5) 设 $n\geqslant 2$, $\beta_1=(1,2,\cdots,n)^T$, $\beta_2=(2,3,\cdots,n+1)^T$, $\beta_n=(n,n+1,\cdots,2n-1)^T$, 则 n 阶方阵 $\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=$____.

(6) 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, 则 $P_1^{99}AP_2^{99}=$____.

(7) 设 A 为三阶矩阵, 特征值分别为 3,2,1, 其对应特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 记 $P=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2)$, 则 $P^{-1}AP=$____.

(8) n 维实向量 X,Y, 满足 $|X+Y|^2=|X|^2+|Y|^2$, 则 X 与 $Y=$____.

(9) 若上三角阵 A 是正交矩阵, 则 A 主对角线上的元素 $a_{ii}=$____.

(10) 设三阶矩阵 A 的特征值为 2,4,5, $B=A^{-1}-2I$, 则 B 的特征值为 ____.

(11) $\lambda=$____ 时, 方程 $x^2+(\lambda+1)y^2+\lambda^2z^2+2x+2z=1$ 表示椭球面.

2. (15 分) 设 $V=M_2(\mathbb{R})=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$. $\forall\alpha=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in V$, 线性变换 $\mathscr{A}\alpha=\begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix}$.

(1) 验证 (E): $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 是 V 的一组基.

(2) 求 $\alpha=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ 在 (E) 下的坐标 X.

(3) 求线性变换 $\mathscr{A}$ 在 (E) 下的表示矩阵.

3. (8 分) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组, β_1,β_2 都与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 正交. 证明: β_1 和 β_2 线性相关.

4. (18 分) 已知 $f(x,y,z)=4x^2-6y^2-6z^2-4yz$.

(1) 写出 $f(x,y,z)$ 的二次型矩阵.

(2) 用正交变换化二次型 $f(x,y,z)$ 为标准型.

(3) 判断曲面 $f(x,y,z)=1$ 的类型.

5. (16 分) 已知非齐次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有 3 个线性无关的解.

(1) 证明: 方程组系数矩阵 A 的秩为 2.

(2) 求 a,b 的值及方程组的通解.

6. (8 分) 设 A 为 n 阶实矩阵, $A^2=kA$. 证明: A 可相似对角化.

中国科学技术大学 2009—2010 学年第一学期
线性代数期末考试

1. (5 分 $\times 8 = 40$ 分) 填空题.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$ ____.

(2) $a_1 = (1, 2, -1, 4), a_2 = (9, 100, 10, 4), a_3 = (-2, -4, 2, -8)$ 生成的 $\mathbb{R}^4$ 的子空间的维数等于 ____.

(3) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = 0$, 其中 I 是单位阵, 则 $A^{-1} =$ ____.

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A^{2010} 的全体特征值为 ____.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 a 的取值范围是 ____.

(6) 每个元素的绝对值都相等的实二阶正交阵一共有 ____ 个.

(7) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a =$ ____, $b =$ ____.

(8) 设 $\mathbb{R}^3$ 是赋予通常内积的三维欧氏空间, (a, b, c) 是长度为 1 的向量, W 是由方程 $ax + by + cz = 0$ 给定的平面. 设线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\mathbb{R}^3$ 中的向量映为它在平面 W 上的投影向量, 那么 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ 之下的矩阵是 ____.

2. (60 分) 解答题.

(1)(10 分) 问 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$ 有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

(2)(10 分) 设 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ 是数域 F 上的 n 阶方阵 A 的不同特征值, $X_1^{(i)}, ..., X_{m_i}^{(i)}$ 是 A 的属于 λ_i 的线性无关的特征向量 $(i = 1, ..., s)$. 证明: 向量组 $X_1^{(1)}, ..., X_{m_1}^{(1)}, X_1^{(2)}, ..., X_{m_2}^{(2)}, ..., X_1^{(s)}, ..., X_{m_s}^{(s)}$ 线性无关.

(3)(10 分) 设 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 为欧氏空间 V 中的向量. 证明: $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 $\begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}$ 为正定阵, 其中 $(\cdot, \cdot)$ 是 V 的内积.

(4)(15 分) 用正交变换化二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为标准形并指出曲面 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的类型.

(5)(15 分) 设 $V = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}$.

(i) 证明 V 是实数域上的线性空间, 并求 V 的维数.

(ii) 设线性变换 $\mathscr{A} : V \to V, \mathscr{A}(X) = 2X + X^T$. 求 V 的一组基使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为对角阵.

中国科学技术大学 2010—2011 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 8 = 40$ 分) 填空题.

(1) 给定空间直角坐标系中点 $A(0,1,1), B(1,2,3), C(1,1,3)$ 及 $D(1,3,5)$, 则 (a) 经过点 A,B,C 的平面的一般方程为 ____; (b) 四面体 $ABCD$ 的体积为 ____.

(2) 设三阶方阵 $A=(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}), B=(2\boldsymbol{a_1},3\boldsymbol{a_2},4\boldsymbol{a_3})$, 其中 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}$ 是三维列向量. 若 $\det A = 2$. 则 $\det B =$ ____.

(3) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ ____.

(4) 设 A 为正交矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 则 $\det A^* =$ ____.

(5) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ -10 & 6 & 7 \\ y & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. 则 $x =$ ____, $y =$ ____.

(6) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ t-1 & 1 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 t 必须满足的条件是 ____.

(7) 已知 $\mathbb{R}$ 上四维列向量 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3},\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},...,\boldsymbol{b_9}$. 若 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}$ 线性无关, $\boldsymbol{b_i}(i=1,2,...,9)$ 非零且与 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}$ 均正交, 则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},...,\boldsymbol{b_9}) =$ ____.

(8) 设 $\mathbb{P}_3[x]$ 为次数小于等于 3 的实系数多项式全体构成的线性空间. 定义 $\mathbb{P}_3[x]$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}(p(x)) = (x+1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵为 ____.

(9) 在线性空间 $M_n(\mathbb{R})$ 中 (运算为矩阵的加法和数乘), 记 V_1 为所有对称矩阵构成的子空间, V_2 为所有反对称矩阵构成的子空间. 则 $\dim V_1 =$ ____, $\dim V_2 =$ ____.

2. (15 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

(1) 当 a, b 为何值时, 方程组有解;

(2) 当方程组有解时, 求出对应的齐次方程组的一组基础解系;

(3) 当方程组有解时, 求出方程组的全部解.

3. (12 分) 在线性空间 $M_2(\mathbb{R})$ 中, 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

和

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

分别为 $M_2(\mathbb{R})$ 的两组基.

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵 T;

(2) 设 $A\in M_2(\mathbb{R})$ 在 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标为 $(1,-2,3,0)^T$, 求 A 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标.

4. (8 分) 考虑分块矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 A 为 n 阶可逆方阵. 证明: $\operatorname{rank}(M)=n+\operatorname{rank}(D-CA^{-1}B)$.

5. (15 分) 已知二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_3$.

(1) 写出二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵 A, 和 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵式;

(2) 求正交变换 P, 使 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 把 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(3) 二次型是正定的、负定的还是不定的, 为什么?

(4) 指出 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 的几何意义.

6. (8 分) 设 V 是欧式空间, $b_1,\cdots,b_n$ 是 V 中一组两两正交的非零向量, $\beta_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}b_k$ $(i=1,\cdots,m)$, $A=(a_{ij})_{n\times m}$. 证明:

(1) $b_1,\cdots,b_n$ 线性无关;　(2) $\dim(\beta_1,\cdots,\beta_m)=\operatorname{rank}A$.

中国科学技术大学 2012—2013 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (30 分) 填空题.

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}$. A 与 B 相抵的充要条件是 ____; A 与 B 相似的充要条件是 ____; A 与 B 相合的充要条件是 ____; 矩阵方程 $AX=B$ 有解但矩阵方程 $BY=A$ 无解的充要条件是 ____.

(2) 设 A 为 3 阶非零方阵. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(\forall i,j)$, 则 $\det A=$ ____, $A^{-1}=$ ____.

(3) 设 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 分别变为 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$; 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 ____, $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵为 ____.

(4) 如果正交矩阵 A 的每个元素都是 $\frac{1}{2n}$ 或 $-\frac{1}{2n}$, 则 A 的阶为 ____.

(5) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2=-A$, 则 A 的规范性为 ____.

2. (20 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 设 $\alpha_1,...,\alpha_m\in F^n$ 为一组列向量, $n\times m$ 矩阵 $A=(\alpha_1,...,\alpha_m)$ 经有限次初等行变换成为 $B=(\beta_1,...,\beta_m)$, 则向量组 $\alpha_1,...,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,...,\beta_m$ 等价.

(2) 设 A 为 3 阶实方阵; 若 A 不实相似于上三角阵, 则 A 不复相似于对角阵.

(3) 秩为 r 的实对称矩阵可分解成 r 个秩为 1 的实对称矩阵之和.

(4) 若 A,B 为同阶正定实对称方阵, 则 AB 也正定.

(5) 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 若 β_i 与线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}$ 中的每个向量都正交 $(i=1,2)$, 则 β_1,β_2 线性相关.

3. (12 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$. 当 a,b 分别取何值时, 存在 C 使得 $AC-CA=B$, 并求所有的 C.

4. (12 分) 已知二次型 $Q(X)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

(1) 给出二次型 $Q(X)$ 的矩阵 A 和矩阵表示;

(2) 使用正交变换 $X=PY$ 将 $Q(X)$ 化为标准形;

(3) 给出 $Q(X)=6$ 的几何意义, 并作示意图.

5. (12 分) 设 $V=M_2(\mathbb{R}), C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \mathscr{A}(\alpha)=C\alpha+\alpha C, \forall\alpha\in V$.

(1) 给出 V 的一组基 (B) 及 $\dim V$;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 (B) 下的矩阵 A, 并求 A 和 $\mathscr{A}$ 的全部特征值与特征向量;

(3) A 可否相似对角化? 若能, 试求 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵 Λ, 并求 V 的一组基 (E) 使 $\mathscr{A}$ 在基 (E) 下的矩阵为对角阵 Λ;

(4) 给出从基 (B) 到基 (E) 的过渡矩阵和 $D=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$ 在基 (E) 下的坐标.

6. (10 分) 已知三阶矩阵 A 和三维列向量 X, 求向量组 X,AX,A^2X 线性无关, 且满足 $A^3X=3AX-2A^2X$, 记 $P=(X\ AX\ A^2X)$. 求:

(1) $B=P^{-1}AP$;

(2) $\det(A-I)$.

中国科学技术大学 2012—2013 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试 1

1. 填空题.

(1) $\mathbb{R}^2$ 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,-1),\alpha_2=(1,1)$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1=(2,0),\beta_2=(-1,1)$ 下矩阵为 ____.

(2) n 阶方阵 A 的行列式为 2, 且有特征值 λ, 则 $A^*+A^{-1}+A^2+2I^n$ 有特征值 ____.

(3) 设三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$(标准内积) 中向量 $(1,\lambda,\mu)$ 与向量 $(1,2,3)$ 和 $(1,-2,3)$ 都正交, 则 $\lambda=$ ____, $\mu=$ ____.

(4) 三元的实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_3^2+2x_1x_2-6x_2x_3$ 的标准型是 ____.

(5) 设 V 为 2 阶复方阵构成的复线性空间, $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}(M)=AM$. 那么 $\mathscr{A}$ 的特征值为 ____.

(6) 三维实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中从基 $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,1,1)$ 到另一组基 $f_1=(1,1,1),f_2=(1,1,0),f_3=(0,1,2)$ 的过渡矩阵是 ____.

2. 判断下列命题是否正确, 并简要地给出理由.

(1) 若 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 则 $\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}O&B\\D&O\end{pmatrix}$ 相似.

(2) 设 A 为 n 阶方阵 A 的不同特征值, X_1,X_2 分别为属于 λ_1,λ_2 的特征向量, 则 X_1+X_2 一定不是 A 的特征向量.

(3) 设 A 为 2 阶实方阵, 若 A 的行列式 $|A|<0$, 则 A 可以相似对角化.

(4) 若 ϕ 是从 n 维实线性空间 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的同构, 则 $(u,v)=(\phi(u))^T\cdot(\phi(v))$ 定义了 V 上的一个内积.

(5) 设 A,B 都是 n 阶正定实方阵, 则 $A+B$ 也是正定的.

(6) 在三维实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中集合 $W=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|x_1+x_2+x_3=0,x_1-x_2+x_3=1\right\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间.

(7) 设 $\mathscr{S}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 并且对于任意 $\alpha\neq\beta\in V$ 都有 $\mathscr{S}(\alpha)\neq\mathscr{S}(\beta)$. 那么, 任给 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n;\mathscr{S}(\alpha_1),\mathscr{S}(\alpha_2),...,\mathscr{S}(\alpha_n)$ 也是 V 的一组基.

3. 如果 $n\times n$ 矩阵 A 是正定的, 那么存在一个正定矩阵 B, 是的 $A=B^TB$.

4. 设 e_1,e_2,e_3 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 且 $\alpha_1=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3),\alpha_2=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3),\alpha_3=\frac{1}{3}(e_1-2e_2-2e_3)$,

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基;

(2) 求 e_1,e_2,e_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的正交变换的矩阵;

(3) 求 e_1,e_2,e_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标变换矩阵.

5. 设 $V=\left\{(a_2x^2+a_1x+a_0e^x:a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R})\right\}, V$ 中元素按函数通常的数乘与加法构成的线性空间. 对任意 $f(x)\in V$, 定义 V 上的变换 : $\mathscr{A}:p(x)\to\frac{d}{dx}p(x)$, 对任意 $p(x)\in V$.

(1) 证明: $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 e^x,xe^x,x^2e^x 下的矩阵;

(3) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.

6. 设 α 是 n 维欧氏空间 V 中的非零向量, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}_\alpha:\mathscr{A}_\alpha(\beta)=\beta-\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\beta)}\alpha$. 证明:

(1) $\mathscr{A}_\alpha$ 是一个正交变换;

(2) 存在标准正交基, 使得 $\mathscr{A}_\alpha$ 在该基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-1, 1, .., 1)$.

7. 设 n 为大于 1 的整数, $\mathscr{S}$ 是数域 F 下 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且存在 $\alpha \in V$ 使得 $\mathscr{S}^{n-1}(\alpha) \neq 0$, $\mathscr{S}^n(\alpha) = 0$. 证明 $\mathscr{S}$ 在 V 的某组基下矩阵的 $(2,1), (3,2), ..., (n, n-1)$ 位置元素全为 1, 其他位置元素全为零.

8. 问复数 λ 取何值时方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解, 有无穷多解或者无解? 并且在有无穷多解时求出通解.

中国科学技术大学 2012—2013 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试 2

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 设向量 $(1,6,\lambda)$ 落在由向量组 $\{(1,2,3),(1,-2,3),(4,4,12)\}$ 生成的线性子空间内, 则 $\lambda =$ ____.

(2) 设 $P_2[x]$ 是次数不超过二次多项式的全体构成的线性空间, 则从基 $\left\{(1-x)^2, 2(1-x)x, x^2\right\}$ 到基 $\left\{1, x, x^2\right\}$ 的过渡矩阵是 ____.

(3) 设 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的全部特征值, 则 $\det(2I+A) =$ ____.

(4) 设 n 阶实对称方阵 A 满足 $A^2 = 2A, \operatorname{rank} A = r$, 则 A 的相合规范形为 ____.

(5) 实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)^2 + (x_2+2x_3)^2 + (x_3+tx_1)^2$ 正定的充要条件是参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 若向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性表示, 则向量组 $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta$ 线性无关.

(2) 设 $F^{n\times n}$ 是所有 n 阶方阵全体按矩阵线性运算所构成的线性空间, W 是所有行列式为零的 n 阶方阵全体, 则 W 是 $F^{n\times n}$ 的子空间.

(3) 若 $\mathbb{R}_n[x]$ 是次数不超过 n 的实系数多项式构成的实线性空间, $\mathscr{D}$ 是 $\mathbb{R}_n[x]$ 上的微分 (求导) 运算, 则 $\mathscr{D}$ 是线性变换.

(4) 有限维欧氏空间的不同标准正交基之间的过渡矩阵是正交阵.

(5) 设 A 为 m 阶实对称方阵, B 为 n 阶实对称方阵, 且分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ 正定, 则方阵 A 与 B 皆正定.

3. (10 分) 给定对角矩阵 $A = \operatorname{diag}(1,1,2)$, 令 V 是所有与 A 都可以变换的三阶实对称方阵全体.

(1) 证明: 在矩阵通常的数乘与加法运算下, V 构成实数域的一个线性变换;

(2) 求 V 的维数与一组基.

4. (16 分) 设 γ 是 n 维欧氏空间 V 中的单位向量, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}(\alpha) = \alpha - 2(\alpha,\gamma)\gamma$.

(1) 证明: $\mathscr{A}$ 是一个正交变换;

(2) 设 β 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单位列向量, 证明: 存在 V 的一组标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $I - 2\beta\beta^T$;

(3) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.

5. (14 分) 给定二次曲面在直角坐标系下的方程 $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-4x+6y-2z+3=0$. 将它通过正交变换化为标准方程, 并指出该二次曲面的类型.

6. (10 分) 设 A, B 均为 n 阶方阵, A 有 n 个互异的特征值, 且 $AB = BA$. 证明:

(1) B 相似于对角阵;

(2) 存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

中国科学技术大学 2013—2014 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

(1) 设三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$(标准内积) 中向量 $(1,\lambda,\mu)$ 与向量 $(1,2,3)$ 和 $(1,-2,3)$ 都正交, 则 $\lambda =$ ____, $\mu =$ ____.

(2) 设 V 为 2 阶复方阵构成的复线性空间, $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为 : $\mathscr{A}(X) = MX, \forall X \in V$, 则 $\mathscr{A}$ 的特征值及其重数为 ____.

(3) 三维实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中从基 $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,1,1)$ 到基 $f_1 = (1,1,1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (0,1,2)$ 的过渡矩阵是 ____.

(4) 若二次型 $x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的正惯性指数是 2, 则 a 的取值范围是 ____.

(5) 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 均为 n 维欧氏空间 V 中的线性变换, 且对 V 中任意两个向量 α, β, 都有 $(\mathscr{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathscr{B}\beta)$; 如果 $\mathscr{A}$ 在 V 的标准正交基 $e_1, e_2, ..., e_n$ 下的矩阵为 A, 则 $\mathscr{B}$ 在此标准正交基 $e_1, e_2, ..., e_n$ 下的矩阵为 ____.

2. (6 分 $\times 4 = 24$ 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) $\left\{(x_1,x_2,x_3) \in F^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 1\right\}$ 为线性空间 F^3 的子空间.

(2) 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶正定的实对称矩阵, 则 $a_{ii} > 0 . i = 1, 2, ..., n$.

(3) 对任意常数 λ, μ, 向量组 $\alpha_1 + \lambda\alpha_3, \alpha_2 + \mu\alpha_3$ 都线性无关的充要条件是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(4) 若 ϕ 是从实线性空间 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的一对一的线性映射 (即映射 $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ 满足: 对 $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 有 $\phi(\alpha+\beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta), \phi(\lambda\alpha) = \lambda\phi(\alpha)$; 且当 $\alpha \neq \beta$ 时, 有 $\phi(\alpha) \neq \phi(\beta)$); 则 $(\alpha, \beta) = (\phi(\alpha))^T \cdot \phi(\beta)$ 是 V 上的内积.

3. (15 分) 设 $V = \left\{(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x | a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\right\}$, 按函数通常的数乘与加法构成的实线性空间. 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为: 对任意 $p(x) \in V, \mathscr{A}(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$.

(1) 求 V 的一组基使 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) 求 $(x^2 - 4x + 2)e^x$ 在此基下的坐标.

4. (15 分) 设 e_1, e_2, e_3 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基, 且 $\alpha_1 = \dfrac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{3}(e_1 - 2e_2 - 2e_3)$, $\mathscr{A}$ 为把 e_1, e_2, e_3 变到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性变换.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵 A;

(2) 证明 $\mathscr{A}$ 是第一类正交变换.

5. (15 分) 用正交变换和平移将下面空间直角坐标系中的二次曲面方程化为标准形, 并指出曲面类型: $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 6x + 6y - 6z - 30 = 0$.

6. (11 分) 已知 A 为元素全是 1 的 n 阶矩阵, B 为最后一行是 $1, 2, ..., n$, 其余元素全是 0 的 n 阶矩阵. 证明 A 与 B 相似, 并求其相似标准形.

中国科学技术大学 2013—2014 学年第二学期 线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

(1) $\mathbb{R}^3$ 中三个向量 $\{(1,2,1),(2,5,3),(1,4,3)\}$ 所生成的线性子空间的维数是 ____.

(2) A 为 2×3 矩阵且 $\det AA^T = 1$, 则 $\det A^TA =$ ____.

(3) 三个平面 $a_ix + b_iy + c_iz = d_i, i = 1,2,3$ 相交于一条直线的充要条件是 ____.

(4) 二次曲面 $xy + yz + zx = 1$ 表示的曲面类型是 ____.

(5) 实二次型 $Q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + xz + 2txy + 2tyz$ 为正定当且仅当参数 t 满足 ____.

2. (20 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性相关.

(2) 令 V 是 n 阶实方阵按矩阵的加法与数乘构成的线性空间, W 是满足行列式为零的所有 n 阶实方阵全体, 则 W 是 V 的子空间.

(3) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$ 不相似于矩阵 $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

(4) 若矩阵 A 的列向量均不为零且互相正交, 则线性方程组 $A\boldsymbol{x} = 0$ 没有非零解.

(5) 若 A 为一个 $m\times n$ 实矩阵且 $\operatorname{rank} A = n$, 那么 A^TA 为正定矩阵.

3. (14 分) 给定矩阵 $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 令 V 是与 A 乘法可交换的所有三阶实方阵全体.

(1) 证明: V 在矩阵的加法与数乘下构成实数域上的线性空间;

(2) 求 V 的维数与一组基.

4. (12 分) 设 V 为 n 维向量空间, T 为 V 上的线性变换且满足 $T^n = 0, T^{n-1} \neq 0$.

(1) 证明: 若存在向量 $\boldsymbol{x} \in V$ 满足 $T^{n-1}\boldsymbol{x} \neq 0$, 则 $\left\{\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}, ..., T^{n-1}\boldsymbol{x}\right\}$ 为 V 的一组基. (2) 求 T 在上述基下的表示矩阵.

5. (12 分) 设 A 为 3 阶实对称方阵, 其特征值分别为 $5,-1,-1$, 且特征值 5 所对应的特征向量为 $(1,1,1)$.

(1) 设 V 为特征值 -1 所对应的特征向量空间, 求 V 的一组标准正交基;

(2) 利用 (1) 确定矩阵 A.

6. (14 分) 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义内积如下:

$$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)^T, \boldsymbol{y} = (y_1,y_2)^T$.

(1) 求度量矩阵 G 使得

$$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{y};$$

(2) 用 Schmidt 正交化方法从基 $\left\{(1,0)^T,(0,1)^T\right\}$ 构造一组标准正交基;

(3) 证明: $\mathbb{R}^2$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 是正交变换, 当且仅当 $\mathscr{A}$ 在基 $\left\{(1,0)^T,(0,1)^T\right\}$ 下的矩阵 A 满足 $A^TGA = G$.

7. (8 分) 设 A 为 n 阶实对称正定方阵, 证明: 存在 n 阶实对称正定矩阵 B 使得 $A = B^2$.

中国科学技术大学 2015—2016 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 把 $\alpha_1 = (1,2,3)^T$, $\alpha_2 = (0,1,1)^T$, $\alpha_3 = (0,0,1)^T$ 分别变换为 $\beta_1 = (-1,1,6)^T$, $\beta_2 = (-1,1,2)^T$, $\beta_3 = (0,-1,2)^T$, 则 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 ____.

(2) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是四维欧式空间 V 的一组标准正交基, 则 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 与 $\beta = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$ 的夹角为 ____.

(3) 设方阵 A 满足 $A^2 = 0$, I 为同阶单位阵, 则 $\det(I+A) =$ ____.

(4) 方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的相似标准型为 ____.

(5) 实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 正定的充要条件是实数 a 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换, λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值, 则对应 λ 的特征向量全体 (加上零向量) 是 V 的子空间.

(2) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 欧式空间 V 的一组非零正交向量组, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

(3) 设 A 是实对称方阵, I 是同阶单位阵, 则当 $t > 0$ 时, $A + tI$ 正定.

(4) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $A^TAx = 0$ 同解.

3. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵;　(2) 求 A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. (17 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 给定向量组 $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (0,1,1)$, $\alpha_3 = (0,0,1)$.

(1) 将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 经过 Schmidt 正交化为一组标准正交基 e_1,e_2,e_3.

(2) 令 A 是以 e_1,e_2,e_3 为行构成的三阶方阵, 定义 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}x := Ax$, $x \in \mathbb{R}^3$. 证明: $\mathcal{A}$ 是绕某一轴线的旋转变换, 并求该旋转轴.

5. (15 分) 给定直角坐标系中二次曲面的方程 $xy + 2xz + 2y + 2z - 1 = 0$. 通过变量的线性变换及坐标系的平移将其化为标准型, 并确定该二次曲面的类型.

6. (8 分) 设 n 阶实对称方阵 A 满足 $A^2 = I$, 证明:

(1) 存在正交方阵 P, 使得 $A = P\,\mathrm{diag}(I_r, -I_{n-r})P^{-1}$, 这里 $0 \leqslant r \leqslant n$.

(2) 存在实对称方阵 B, 使得 $I + A = B^2$.

中国科学技术大学 2016—2017 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5=20$ 分) 填空题.

(1) 若 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ 3x_1-4x_2+3x_3+x_4=t \end{cases}$ 有解, 则参数 $t=$____.

(2) 若向量 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(2,3,t)$ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维子空间, 则参数 $t=$____.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的相合规范型为 ____.

(4) 二次曲面方程 $2x^2-3y^2-3z^2-2yz-5=0$ 表示的曲面类型是 ____.

(5) 实二次型 $Q(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+2txy+2txz+2yz$ 为正定当且仅当参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 5=25$ 分) 判断题.

(1) 设 A 是 n 阶方阵, 则 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} A^2$.

(2) 若 0 是矩阵 A 的特征值, 则 A 一定是奇异矩阵.

(3) 设 A 是 n 阶方阵, 若对任意 n 维列向量 x 都有 $x^TAx=0$, 则 A 为反对称方阵.

(4) 若 A,B 是 n 阶正定矩阵, 则 AB 也是 n 阶正定矩阵.

(5) 设 A 是 n 阶方阵, 则 A 是正交矩阵当且仅当 A 的 n 个行向量组成的 n 维实数组空间的标准正交基.

3. (14 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\mathscr{A}(x,y,z)=(x+2y,x-3z,2y-z)$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(1,1,1)$ 下的表示矩阵.

(2) 是否存在基 β_1,β_2,β_3, 使得 $\mathscr{A}$ 在该基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (14 分) 设 $V=\{f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\}$ 为次数不超过 2 的实系数多项式构成的线性空间.

(1) 证明: $(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$ 定义了 V 上的一个内积.

(2) 应用 Schmidt 正交化方法将向量值 $\{1,x\}$ 改造成相对 (1) 中所定义内积的标准正交向量组.

5. (14 分) 设 M 是 $2n$ 阶方阵 $\begin{pmatrix} I & A \\ A & I \end{pmatrix}$, 其中 A 是满足 $A^2=I$ 的 n 阶对称实方阵.

(1) 求矩阵 M 的所有特征值; (2) 可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}MP$ 为对角矩阵.

6. (8 分) 假设 A 和 B 都是 n 阶正定矩阵. 证明: $\det A\cdot\det B\leqslant\left(\dfrac{1}{n}\operatorname{tr} AB\right)^n$.

中国科学技术大学 2017—2018 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 6 = 30$ 分) 填空题.

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2018} =$ ____.

(2) 若方阵 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 1,2,3. 设 A_{ii} 为 a_{ii} 的代数余子式, $i = 1, 2, 3$, 则 $A_{11} + A_{22} + A_{33} =$ ____.

(3) 设 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性空间 V 的两组基, 且 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$. 如果向量 α 在基 (I) 下的坐标为 $(1, -1, 1)$, 则在基 (II) 下的坐标为 ____.

(4) 设矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\mathrm{diag}(-1, 2, b)$, 则 $b =$ ____.

(5) 方程 $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1$ 所表示的二次曲面类型为 ____.

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (tI_3 + A)^2$, $t \in \mathbb{R}$, 则 B 正定当且仅当 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 不相似于矩阵 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) 若 0 是矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

(3) 设 $\mathbb{R}^n$ 中, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 为正交向量组. 如果 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关, 且 $\gamma, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 也线性无关, 则有 β, γ 线性相关.

(4) 若 A 正定, 则 A 的主对角线上的元素均为正实数.

3. (16 分) 设 f 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的变换: $f(X) = AX - XA$, $\forall X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) 求证: f 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换.

(2) 求出 f 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

(3) 求 $W = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid f(X) = 0\}$.

4. (10 分) 设 $\mathbb{R}^4$ 的内积为 $(X, Y) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$, $\forall X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. 请将下列向量化为 $\mathbb{R}^4$ 在该内积下的一组标准正交基: $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)$, $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$.

5. (16 分) 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 1,2,3, 并且有 $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, -1)^T$ 分别为属于特征值 1 和 2 的特征向量.

(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量的全体.

(2) 求矩阵 A.

6. (8 分) 设 $A = (a_{ij})$ 为正定矩阵, d_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式. 证明: $\det A \leqslant a_{nn} d_{n-1}$.

中国科学技术大学 2017—2018 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6=24$ 分) 填空题.

(1) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2,\end{cases}$ 有无穷多解, 则 $\lambda=$____.

(2) 若 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(2,3,t)$ 生成 $\mathbb{R}^3$ 的二维子空间, 则 $t=$____.

(3) 若方阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 1, -3, -4, 则 $\det(I+A)=$____.

(4) 设 (I) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; (II) β_1,β_2,β_3 是线性空间 V 的两组基, 且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$. 如果向量 α 在基 (I) 下的坐标为 $(1,0,1)$, 则在基 (II) 下的坐标为____.

(5) 设 $\alpha_1=(a,0,-1)^T$, $\alpha_2=(1,b,1)^T$, $\alpha_3=(c,1,2)^T$ 分别是三阶实对称矩阵 A 的三个不同特征值所对应的特征向量, 如果矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$, 则 $\det B=$____.

(6) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2$, 则当 $t\in$____ 时, 该二次型正定.

2. (6 分 $\times 4=24$ 分) 判断题.

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(2) 设 $V=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \,|\, a_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 若定义 $(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2), \forall f(x),g(x)\in V$, 则 $(f(x),g(x))$ 是 V 上的一个内积.

(3) 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 如果非零向量 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 这 $n-1$ 个向量都正交, 则有 β, α_n 线性相关.

(4) 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1 & B\\ C & A_2\end{pmatrix}$, 且 A_1, A_2 均为方阵. 如果 A 正定, 则 A_1, A_2 均正定.

3. (5 分 +5 分 $=10$ 分) 设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$, 非齐次线性方程组 $AX=b$ 的通解为 $(1,1,1,1)^T+k(1,-1,0,2)^T$, 其中 k 为任意实数.

(1) α_1 能否由 α_2, α_3, α_4 线性表示?

(2) α_3 能否由 α_1, α_2, α_4 线性表示? 请分别说明理由.

4. (8 分 +8 分 $=16$ 分) 设 σ 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换, 在基 (I): α_1, α_2, α_3 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\-8&-7&6\end{pmatrix}$.

(1) 求 σ 在基 (II): $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3$, $\beta_2=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$ 下的矩阵;

(2) 设向量 $\xi=\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3$, $\eta=\beta_1-\beta_2+\beta_3$, 求 $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$ 分别在基 (I) 下的坐标.

5. (8 分 +8 分 $=16$ 分) 设实二次型 $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$.

(1) 利用正交变换化该二次型为标准型, 并且给出具体的正交变换;

(2) 判断 $Q(x,y,z)=1$ 所表示的二次曲面类型.

6. (5 分 +5 分 $=10$ 分) 设 A 为 n 阶实对称阵, 且 $A^2+3A+2I=0$.

(1) 请给出 A 的可能的全部互异特征值.

(2) 试证明: 当 n 为奇数时, A 的伴随矩阵 A^* 正定.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = $ ____.

(2) 向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3,4)$, $\alpha_3 = (2,3,4,5)$, $\alpha_4 = (1,-2,2,-1)$ 的秩等于 ____.

(3) 已知非齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{pmatrix}$ 有无穷多解, 则 $\lambda = $ ____.

(4) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且存在可逆矩阵 P, 使得 $B = P^{-1}AP - PAP^{-1} + I$. 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 B 的 n 个特征值, 则 $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i = $ ____.

(5) 实二次型 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的正惯性指数为 ____.

(6) 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 2tx_1x_2 - 2x_1x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围为 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 若 0 为矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

(2) 若 f 为线性空间 V 上的一个线性变换, 且 f 在 V 的某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则在 V 中存在一组基, 使得 f 在这组基下的矩阵为对角阵.

(3) 设 $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 若对任意 $f(x), g(x) \in V$ 定义 $(f(x), g(x)) = f(0)g(0)$, 则此二元运算 (,) 可以成为 V 上的一个内积.

(4) 设 $2n$ 阶实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, A_2 均为 n 阶方阵. 若 A 正定, 则 $A_1 + A_2$ 也正定.

3. (10 分) 设 $\alpha_1 = (1,1,0)^T$, $\alpha_2 = (1,0,1)^T$, $\alpha_3 = (0,1,1)^T$ 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解.

(1) 求 $Ax = 0$ 的通解; (2) 求 $Ax = b$ 的通解; (3) 求满足题设条件的一个非齐次线性方程组.

4. (15 分) 设 (I): $\alpha_1 = (1,0,0)^T$, $\alpha_2 = (0,1,0)^T$, $\alpha_3 = (0,0,1)^T$; (II): $\beta_1 = (-1,0,1)^T$, $\beta_2 = (0,1,1)^T$, $\beta_3 = (2,-1,-2)^T$ 分别为 $\mathbb{R}^3$ 的两组基. 设 σ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换, 并且 $\sigma(\beta_1) = (1,0,-3)^T$, $\sigma(\beta_2) = (0,-1,-1)^T$, $\sigma(\beta_3) = (-5,-1,0)^T$. 请分别求出 σ 在 (I)、(II) 这两组基下的矩阵.

5. (15 分) 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 可以经过正交变换 $(x_1, x_2, x_3)^T = P(y_1, y_2, y_3)$ 化为标准型 $y_2^2 + 2y_3^2$.

(1) 确定 a 和 b 的取值. (2) 求出满足题设条件的一个正交变换.

6. (8 分) 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且 $A^2 = 2A$. 证明: A 相似于对角阵.

7. (8 分) 设 A 为 n 阶正定矩阵, α_1, α_s 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 s 个非零向量, 且满足 $\alpha_i^T A \alpha_j = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant s$. 证明: $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \dfrac{1}{2}\alpha_2, \dfrac{1}{3}a_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为 ____.

(2) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $\operatorname{diag}(1,2,3)$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3$ 下的矩阵为 ____.

(3) 若矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x=$ ____, $y=$ ____.

(4) 若实的正交矩阵 A 的每个元素都是 $\pm\dfrac{1}{2n}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$, 则 A 的阶数为 ____.

(5) 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3) = tx_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 2(t-1)x_1x_3$ 正定, 则参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 若 n 阶方阵 A_1, A_2, B_1, B_2 满足相似等价关系 $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, 则 $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$.

(2) 若两个同阶实对称矩阵具有相同的特征多项式, 则这两个方阵相似.

(3) 在实 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上定义 $(A,B) = \operatorname{tr}(A^TB)$, 则 (,) 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的一个内积.

(4) 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 4 阶单位阵相合.

3. (14 分) 给定 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 α_i 为 4 维列向量, $i = 1,2,3,4$, 且 α_1, α_2 线性无关. 若 $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha_3 + \alpha_4$, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

4. (18 分) 设实二次型 $Q(x,y,z) = -2x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 8xz$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x,y,z) = -1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

5. (13 分) 证明: n 阶全 1 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与同阶方阵 $\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

6. (10 分) 设 V 为 n 维欧式空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in V$, 对于 s 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{s\times s}$, 其中 $a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, 证明: 矩阵 A 的秩等于向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩.

中国科学技术大学 2019—2020 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) 设三维向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$, 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 ____.

(2) 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, I 为单位矩阵. 若 A 的特征值为 1,2,3,4, 则 $|B^{-1} - I| =$ ____.

(3) 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a + b =$ ____.

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ ____.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且 $\operatorname{rank} A = 2$, 则 $a =$ ____.

(6) 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13}$, 则 $a_{11} =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否相似? 是否相合?

(2) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, $AB = I_m$, 则 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ 是否成立?

(3) $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$, $i, j = 1, \cdots, n$, 二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right)^2$ 的符号差是否为 n?

(4) 设方阵 A 的每行元素之和都为 1, 那么 A^5 的每行元素之和是否为 1?

3. (56 分) 计算及证明题.

(1) (8 分) 设 3 阶实对称正交方阵 A 非负定, $|A| = -1$, 且 $(1, 1, 1)^T$ 为 -1 的特征向量. 求 A.

(2) (8 分) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\alpha = (3, -1, 2)^T$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} |A^n\alpha|$.

(3) (8 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, $n > 1$, $\alpha \in V$. 设 $T^n\alpha = 0$, 但是 $T^{n-1}\alpha \neq 0$.

(a) 证明: 向量组 $\alpha, T\alpha, \cdots, T^{n-1}\alpha$ 线性无关. (b) 证明: T 不能对角化.

(4) (6 分) 设 $K = \{c_1 + c_2x + c_3\cos x \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$ 在通常的函数加法和数乘下构成线性空间. 定义内积 $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 从 $1, x, \cos x$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

(5) (8 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{pmatrix}$, 证明: 当 $|x| < 3$ 时, $|A| < 10^5$.

(6) (8 分) 设 t 为参数, 讨论二次曲面的类型: $x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3 - 10 = 0$.

(7) (10 分) 设 K 是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间.

(a) 证明: $1, x+2, x^2+x+3$ 是 K 的一个基.

(b) 求线性变换 $Tf := f'' - f$ 在这个基下的矩阵.

(c) 求 T 的特征向量.

中国科学技术大学 2019—2020 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) 已知实系数线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ 有唯一解, 则 a 满足的条件是 ____.

(2) 已知 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 那么 $A^3 =$ ____.

(3) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^4$ 线性无关, 则线性子空间 $V = \mathrm{span}\{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3\}$ 的维数是 ____.

(4) 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $x =$ ____, $y =$ ____.

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 按原顺序 Schmidt 正交化得到的标准正交基为 ____.

(6) 若实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 已知向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关且可以由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示, 则 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性无关.

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似.

(3) 数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶正交阵的行向量组或列向量组都构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

(4) 记 V 是所有 3 阶实方阵全体构成的集合, 它在记作加法和数乘下构成一个 9 维实线性空间, 那么 V 中对称方阵全体构成它的一个 6 维子空间.

3. (12 分) 设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A, 满足 $\mathrm{rank}\, A = 3$. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的 3 个解, 其中 $\alpha_1 = (1, -2, -3, 4)^T$, $5\alpha_2 - 2\alpha_3 = (2, 0, 2, 0)^T$.

(1) 证明: 这个线性方程组是非齐次的. (2) 求出这个线性方程组的通解.

4. (14 分) 用初等变换法求矩阵 A 的逆与行列式, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{pmatrix}$.

5. (14 分) $\mathbb{R}^3$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\alpha_1 = (2, 3, 5)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)^T$ 分别映为 $\beta_1 = (1, 2, 0)^T$, $\beta_2 = (2, 4, -1)^T$, $\beta_3 = (3, 0, 5)^T$. 求:

(1) $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A.

(2) $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵 B.

6. (16 分) 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

中国科学技术大学 2020—2021 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 方阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值是 ____.

(2) 3 阶实对称矩阵组成的集合恰有 ____ 个相合等价类.

(3) 实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i - x_j)^2$ 的正惯性指数等于 ____.

(4) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中任意的向量, 则 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵是 ____.

(5) 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧式空间 V 上的线性变换: $\mathscr{A}(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \gamma)\gamma$, 其中 γ 是 V 中给定的单位向量, 则 $\mathscr{A}$ 的 n 个特征值为 ____.

2. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 判断题.

(1) n 维线性空间 V 中同一个线性变换在两组不同的基本下的矩阵彼此相合.

(2) 任何一个 n 阶实方阵都实相似于上三角矩阵.

(3) 每一个正交矩阵都正交相似于对角矩阵.

(4) 设 A, B 都是 n 阶实方阵, 若 A 可逆, 则 AB 与 BA 相似.

(5) 设 A 是 n 阶实对称方阵, 若 A 的每一个顺序主子式都是非负的, 则 A 半正定.

3. (12 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 $\alpha_1 = (2, 3, 5)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)^T$ 变换为 $\beta_1 = (1, 2, 0)^T$, $\beta_2 = (2, 4, -1)^T$, $\beta_3 = (3, 0, 5)^T$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵;　(2) 求 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

4. (16 分) 设 V 是 3 维欧式空间, 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 给出的度量矩阵 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 请由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 按现在的顺序进行 Schmidt 正交化给出一组标准正交基.

5. (12 分) 给定二次曲面在直角坐标系下的方程是 $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz = 1$. 将它通过正交变换化为标准方程, 并指出这曲面的类型.

6. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB = BA$. 求证: 存在 n 阶正交方阵 P, 使得 P^TAP 与 P^TBP 都是对角矩阵.

中国科学技术大学 2020—2021 学年第一学期
线性代数（B2）期中考试　教师：陈小伍

1. (4 分 $\times 10$ 空 $= 40$ 分) 填空题.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{2020} =$ ____.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ ____.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$ ____.

(4) 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$ 的代数余子式满足 $A_{11} + A_{12} + A_{13} = 1$, 则 $\det A$.

(5) 假设 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ____.

(6) 设 $P \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $P =$ ____.

(7) 设 $n \geqslant 2$, $\mathcal{A} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 满足 $\mathcal{A}(X) = X^T + X$, 其中 X 为任意方阵, 则 $\mathcal{A}$ 的特征多项式为 ____, $\mathcal{A}^2$ 的最小多项式为 ____.

(8) 设 $\mathbb{C}_3[x]$ 为全体次数不超过 3 (包括 3) 复系数多项式组成的复线性空间, $\mathcal{B} = (x-1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_3[x]$, 则 $\mathcal{B}$ 的所有特征值为 ____, 相应的特征向量为 ____.

2. (10 分) 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, 考虑子空间 $V(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ 以及 $R(A) = \{A^T y \mid y \in \mathbb{R}^m\}$. 证明: $\mathbb{R}^n = V(A) \oplus R(A)$.

3. (10 分) 设 B 为 n 阶可逆实方阵. 试讨论: 是否总存在实方阵 A, 使得 $B = A^*$.

4. (20 分) 对于任意 $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, 定义复线性映射: $\Psi_{A,B} : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, $X \mapsto AXB$.

(1) 试证明: 线性变换 $\Psi_{A,B}$ 是幂零的, 当且仅当 A 或 B 是幂零的.

(2) 取定 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 以及 $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 记 $\Psi_{A,B} = \mathcal{A}$. 试证明: 复线性变换 $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ 可相似对角化.

5. (15 分) 设 V 为有限维复线性空间.

(1) 设 W_1 和 W_2 为 V 的线性子空间, $W_1 \cup W_2$ 也是线性子空间. 证明: $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$.

(2) 设 ϕ_1 和 ϕ_2 为 V 上的非零复线性函数. 证明: 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得 $\phi_1 = \lambda\phi_2$, 当且仅当 $\ker\phi_1 = \ker\phi_2$.

6. (5 分) 论证: 是否存在实矩阵 A 和 B, 使得 $AB = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $BA = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ 同时成立?

中国科学技术大学 2013—2014 学年第二学期
线性代数（A1）期中考试　教师：宋光天

1. (7 分 $\times 5 = 35$ 分) 填空题.

(1) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \_\_\_\_.$

(2) 由向量组 S 生成的子空间 $V(S)$ 维数是 ____.

(3) $\mathbb{R}^3$ 中, $\alpha_1 = (1,1,1)^T$, $\alpha_2 = (1,1,0)^T$, $\alpha_3 = (1,0,-1)^T$, $\beta = (-4,3,4)^T$, 则 β 在 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的坐标为 ____.

(4) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性空间 V 中 3 个线性无关的向量, 求 $\operatorname{rank}\{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1\} = \_\_\_\_$.

(5) $n > 1$, $\det\begin{pmatrix} x & & & & a_0 \\ -1 & x & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & x & a_{n-2} \\ & & & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix} = \_\_\_\_.$

2. (65 分) 必做大题.

(1) (20 分) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5).$

(i) 求 A 的行向量的一个极大线性无关组, 并扩充为 F^5 的一组基.

(ii) 设实向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间 U_1 由 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成, U_2 由 A 的列向量 α_4, α_5 生成, 求 $U_1 \cap U_2$ 的一组基, 和它的一个补空间 U_3.

(2) (15 分) 设 W_1, W_2 是 V 的子空间, 求证: $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

(3) (20 分) 设 $W_1, \cdots, W_t$ 是域 F 的有限维线性空间 V 的子空间, 求证:

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} W_i$ 是直和;　(ii) $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{i-1} W_j\right) \cap W_i = \{0\}, \forall 2 \leqslant i \leqslant t$;

(iii) $\displaystyle\dim \sum_{i=1}^{t} W_i = \sum_{i=1}^{t} \dim W_i$;　(iv) 若 M_i 为 W_i 的基, 则 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{t} M_i$ 为 $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} W_i$ 的基.

(4) (10 分) 设 A 为 F 上秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, 若非齐次方程组 $Ax = b$ 有解, 求解空间的维数.

3. (40 分) 附加题.

(1) 设 $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} W_i$ 为 F 上线性空间 V 的子空间, $t \geqslant 2$. $W = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{t} W_i$. 证明: W 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow \exists l \in \{1, \cdots, t\}$, 使得 $W \subseteq W_l$.

(2) 设 F 是数域, 若集合 V 上有加法与一个 F 上的数乘, 且“F 上的线性空间”8 条定义中除去“加法交换律”都成立. 证明: 加法交换律也成立.

中国科学技术大学 2017—2018 学年第二学期
线性代数（A1）期中考试　教师：王新茂

1. (5 分 ×6 空 = 30 分) 填空题.

   (1) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{tr}(A^TA)=$ ____, $A^{2018}=$ ____.

   (2) 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$, 则 $\det A=$ ____, $A^{-1}=$ ____.

   (3) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank}A=$ ____, $A^*=$ ____.

2. (6 分 ×5 = 30 分) 简答题, 回答问题并简要说明理由.

   (1) 设 $A,B\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $AB=0$, 则 $BA=0$?

   (2) 对于任意 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}, \det(AA^T)=\det(A^TA)$?

   (3) 对于任意 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}, \operatorname{rank}(AA^T)=\operatorname{rank}(A^TA)$?

   (4) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 若 A^* 是对称方阵且 $A^*\neq 0$, 则 A 是对称方阵?

   (5) 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}, \boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^{n\times 1}$, 若线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解, 则 A 可逆?

3. 解答题, 需给出详细解答过程.

   (1) (15 分) 对参数 a 讨论求解实数域上的线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=1\\x_1+x_2+ax_3=1\end{cases}$.

   (2) (15 分) n 阶实数方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\a&&&1\end{pmatrix}$(空白处元素都是 0) 何时可逆? 并求 A^{-1}.

   (3) (10 分) 设 A,B 都是实数方阵. 证明: $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank}(A-B)$.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第二学期
线性代数（A1）期中考试　教师：王新茂

1. (5 分 ×10 空 = 50 分) 填空题.

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $A^TA=$ ____, $A^k=$ ____ $(k\in\mathbb{N})$.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, 则 $\det A=$ ____, $A^{-1}=$ ____.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}I_n&I_n&O\\I_n&O&I_n\\O&I_n&I_n\end{pmatrix}$, 则 $\det A=$ ____, $A^{-1}=$ ____.

(4) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank}A=$ ____, $\operatorname{rank}A^*=$ ____, A 在 $\mathbb{Z}^{3\times3}$ 中的 Smith 标准型为 ____.

(5) 设 $A\in F^{n\times p}$, $B\in F^{m\times p}$, 矩阵方程 $XA=B$ 有唯一解 $X\in F^{m\times n}$ 的充分必要条件是 ____.

2. 解答题.

(1) (12 分) 求解 $\mathbb{C}$ 上的线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=a^2\\x_1+ax_2+x_3=a\\x_1+x_2+a^2x_3=1\end{cases}$, $a\in\mathbb{C}$.

(2) (12 分) 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&&\\-1&0&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&-1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^{n\times n}$. 证明: A 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中可逆当且仅当 n 是偶数, 并求 A^{-1}.

(3) (13 分) 证明: 对任意方阵 A, 存在单位下三角方阵 L 和置换方阵 P, 使得 LPA 是上三角方阵.

(4) (13 分) 证明: 任意对称实方阵 A 有 $\operatorname{rank}A$ 阶可逆主子矩阵.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第二学期
线性代数（A1）期末考试

说明: 从 5、6 两题中选做一题, 从 7、8 两题中选做一题, 多做不得分.

1. (10 分) 求所有实方阵 A, 使得 $A^{2019}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

2. (10 分) 设实方阵 A 的特征多项式 $\varphi_A(x)=x^{2019}+x+1$, 求 A^2 的特征多项式.

3. (15 分) 设 n 阶实方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{pmatrix}$, 求 $\det A$ 和 A^{-1}.

4. (15 分) 设 n 阶实方阵 A 与 A^{2019} 相抵, 证明: 存在可逆实方阵 P,Q, 使得 $A=P\begin{pmatrix}Q & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$.

5. (20 分) 设 n 阶实方阵 A 的特征方阵 $xI-A$ 与 $\operatorname{diag}((x^2+x)^3,(x^2-x)^4,I_{n-2})$ 模相抵.

   (1) 求 A 的 Jordan 标准型. (2) 求 $\operatorname{rank}(I_n\oplus A-A\oplus I_n)$.

6. (20 分) 设 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换 $\mathscr{A}(X)=AX-XA$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

   (1) 求 $\mathscr{A}$ 的所有特征值及其特征向量; (2) 求 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

7. (30 分) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

   (1) 证明: 若 A,B 无公共特征值, 则存在唯一的实方阵 X, 使得 $AX-XB=I$.

   (2) 证明: A 与 B 正交相抵, 当且仅当 A^TA 与 B^TB 正交相抵.

   (3) 设 P 是正交方阵, 求 $\|PA-B\|_F$ 的最小值, 其中 $\|X\|_F=\sqrt{\sum\limits_{i,j}x_{ij}^2}$.

8. (30 分) 设 $\alpha=\sqrt[3]{2}$, $V=\{f(\alpha)\mid f\in\mathbb{Q}[x]\}$.

   (1) 证明: V 在实数运算下构成 $\mathbb{Q}$-线性空间, 并且 $\{1,\alpha,\alpha^2\}$ 是 V 的基.

   (2) 求 $\beta=3\alpha^2+2\alpha+1$ 在 $\{1,\alpha^2+1,\alpha^2+3\alpha+3\}$ 下的坐标.

   (3) 求 V 上的线性变换 $\mathscr{A}(v)=(\alpha+1)v$ 的特征多项式

中国科学技术大学 2014—2015 学年第一学期
线性代数（A2）期中考试

1. (30 分) 填空题.

(1) n 阶复方阵可对角化的充要条件有: ____; ____; ____.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型是 ____.

(3) 已知 $\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2$ 是四阶方阵 A 的初等因子, 则不变因子组为 ____, 行列式因子组为 ____, Smith 标准型为 ____.

(4) $\mathrm{diag}(1,2,-2)$ 与 $\begin{pmatrix} & & a \\ & 0 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a=$ ____.

(5) 默写实方阵的实相似标准型: ____.

2. (70 分) 解答题.

(1) (12 分) 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $A \in F^{n\times n}$ 互不相同的特征值. 证明: $\forall f \in F[\lambda]$, $f(\lambda_i)$ 是 $f(A)$ 全体特征值.

(2) (12 分) 求可逆复方阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是 Jordan 型, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

(3) (14 分) 证明: n 阶复方阵 A 的特征值 λ 的几何重数是所有属于 λ 的 Jordan 块个数.

(4) (15 分) 线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 在 V 的基 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 的方阵为 A, $\lambda I - A$ 的 Smith 标准型是 $S(\lambda) = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, d_s(\lambda), \cdots, d_n(\lambda))$, d_i 是首项系数为 1 的多项式, 次数 $\deg d_i \geqslant 1$. 证明: V 可分解作 $n-s$ 个循环子空间直和, 即 $V = \bigoplus\limits_{i=s+1}^{n} F[\mathscr{A}]\beta_i$, 其中 β_i 的最小多项式为 $d_i(\lambda)$, $\dim F[\mathscr{A}]\beta_i = \deg d_i$.

(5) 设 $\mathscr{A}: V \to V$, 最小多项式 $d_{\mathscr{A}} = \prod\limits_{i=1}^{t} p_i^{m_i}$, p_i 是互不相同的 F 上的不可约多项式. 证明: $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{t} \ker(p_i^{m_i}(\mathscr{A}))$.

3. (30 分) 附加题.

(1) (15 分) $\mathscr{A}: V \to V$ 的极小多项式是 $d(\lambda)$, 证明:

(a)$\exists \alpha \in V$, 使得 $d_\alpha(\lambda) = d(\lambda)$. (b) 存在不变子空间 U, 使得 $V = C(\alpha) \oplus U$.

(2) (15 分) $A = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$.

(a) 若 $AB = BA$, 求 B. (b) 求 $\dim\{X \mid AX = XA\}$.

中国科学技术大学 2017—2018 学年第一学期
线性代数（A2）期中考试　教师：王新茂

1. (5 分 ×7 空 = 35 分) 填空题.

(1) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换 $\mathscr{A}(X)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}X^T$, $\mathscr{A}$ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为 ____, $\mathscr{A}$ 的最小多项式 $d_{\mathscr{A}}(x)=$ ____, E_{11} 生成的 $\mathscr{A}$ 循环子空间维数为 ____.

(2) 在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上定义内积 $(X,Y)=\operatorname{tr}X^T\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}Y$, $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的 Gram 方阵为 ____, V 中与 $E_{11},E_{22},E_{11}+E_{21}$ 都正交的单位向量有 ____. 当且仅当 $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ 满足 ____ 时, $\mathscr{B}(x)=Bx$ 是正交变换.

(3) 设实内积空间 $V=\{a+bx+cx^2 \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ 的内积 $(f,g)=\int_{-1}^{1}fg\mathrm{d}x$, V 上的线性变换 $\mathscr{A}:f(x)\mapsto f(x+1)$ 的伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 在 $1,x,x^2$ 下矩阵表示为 ____.

2. (7 分 ×3 = 21 分) 判断题.

(1) $\mathscr{A}\in L(V)$, U_1,U_2 为 $\mathscr{A}$-循环子空间, 则 $U_1\cap U_2$ 也是 $\mathscr{A}$-循环子空间.

(2) $\mathscr{A}\in L(V)$, 对于任意 $\mathscr{A}$-不变子空间 U_1, 存在 $\mathscr{A}$-不变子空间 U_2, 使 $V=U_1\oplus U_2$.

(3) $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为实内积空间 V 上的规范变换, 则 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 也是 V 上的规范变换.

3. (44 分) 解答题.

(1) (10 分) $\mathscr{A}\in L(V)$, $\mathscr{A}^{2017}=\mathscr{A}$. 证明: $\operatorname{Im}\mathscr{A}\oplus\ker\mathscr{A}$.

(2) (10 分) 证明: 在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上, $f(X,Y)=\operatorname{tr}(X^T\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}Y)$ 是内积.

(3) (10 分) 证明: 对实内积空间 V 的任意有限维子空间 U, $(U^{\perp})^{\perp}=U$.

(4) (14 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 上, $\mathscr{A}(x)=Ax$, $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$.

(a) 证明: $\mathscr{A}$ 正交, 且为旋转.

(b) 求 $\mathscr{A}$ 转轴方向和旋转角度.

中国科学技术大学 2020—2021 学年第一学期
线性代数（A2）期中考试　教师：王新茂

1. (10 分) 求 $\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \\ x^3 & x^6 & x^9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x]^{3\times 3}$ 的模相抵标准型.

2. (15 分) 设复方阵 A 满足 $d_A(x) = \varphi_A(x) = (x - x^3)^6$, 求 $B = A^4$ 的特征多项式、最小多项式和初等因子组.

3. (15 分) 设 $P = J_n(1)$ 是 n 阶 Jordan 块, 求 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}(X) = P^{-1}XP$ 的所有特征值及其对应的特征子空间.

4. (15 分) 设 n 阶复方阵 A 每行、每列都恰有一个非零元素. 证明: 存在可逆复方阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

5. (15 分) 证明或否定: 对于任意可逆实方阵 A, 存在实方阵 B, 使得 $A = B^3$.

6. (15 分) 设 $\mathcal{D} : f(x) \mapsto f'(x)$ 是实线性空间 $V = \mathbb{R}[x]$ 上的微分变换, U 是 $\mathcal{D}$-不变子空间. 证明: 若 $U \neq V$, 则存在 $\alpha \in V$, 使得 $U = \{f(\mathcal{D})\alpha \mid f \in V\}$.

7. (15 分) 设 V 是 F 上的线性空间, $\mathcal{A} \in L(V)$, $f, g \in F[x]$ 互素. 证明: $\ker f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) = \ker f(\mathcal{A}) \oplus \ker g(\mathcal{A})$.