作业：

24. 记 $A_i=\{$挑出第i箱$\}$ $i=1,2.$

$B_j=\{$第j次取到一等品$\}$ $j=1,2.$

箱一：$\begin{cases}\text{一等品} & 10\\ \text{二}\ \cdot\cdot & 40\end{cases}$　　箱二：$\begin{cases}\text{一等品} & 18\\ \text{二等品} & 12.\end{cases}$

(1) $P(B_1)=P(B_1|A_1)P(A_1)+P(B_1|A_2)P(A_2)$

$=\frac{10}{50}\cdot\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$

(2) $P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{P(B_1B_2|A_1)P(A_1)+P(B_1B_2|A_2)P(A_2)}{P(B_1)}$

Bayes

$=\frac{\frac{10}{50}\cdot\frac{9}{49}\cdot\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\cdot\frac{17}{29}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{276}{1421}}{\frac{2}{5}}=\frac{690}{1421}$

1° 注意是不放回抽样

2° 条件概率不要写成 $P(\frac{B}{A})$.

3° 求条件概率一定写成 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

是除式！不要自创公式.

4° 不能将取两次条件.

$P((A|B)|C)$ 是错误写法.

28. 记 $A_i=\{$抽到第i个地区$\}$ $i=1,2,3.$

$B_j=\{$抽到的第j份为女生$\}$ $j=1,2.$

地区一 (10) $\begin{cases}♀:3\\ ♂:7\end{cases}$　　二 (15) $\begin{cases}♀:7\\ ♂:8.\end{cases}$　　三 (25) $\begin{cases}♀:5\\ ♂:20\end{cases}$

全概率公式.

(1) $P(B_1)=P(B_1|A_1)P(A_1)+P(B_1|A_2)P(A_2)+P(B_1|A_3)P(A_3).$

$=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{25}\times\frac{1}{3}=\frac{29}{90}$

1° 注意审题：随机选一个地区.

2° 全概率公式其实就是一种分类讨论.

3°. $A_i\to B_1\to B_2$, 事情发生的先后

(2) $P(B_1|B_2^c)=\frac{P(B_1B_2^c)}{P(B_2^c)}$

法1. $P(B_2^c)=P(B_2^c)\cdot P(B_1\cup B_1^c)$

$=\boxed{P(B_2^cB_1)}+P(B_2^cB_1^c)$

$=P(B_2^cB_1)P(\bigcup_{i=1}^{3}A_i)+P(B_2^cB_1^c)P(\bigcup_{i=1}^{3}A_i)$

$=\sum_{i=1}^{3}P(B_2^cB_1A_i)+\sum_{i=1}^{3}P(B_2^cB_1^cA_i)$

$=P(B_2^cB_1A_1)+P(B_2^cB_1A_2)+P(B_2^cB_1A_3)+P(B_2^cB_1^cA_1)+P(B_2^cB_1^cA_2)+P(B_2^cB_1^cA_3)$

$=P(B_2^c|B_1A_1)P(B_1|A_1)P(A_1)+P(B_2^c|B_1A_2)P(B_1|A_2)P(A_2)+\cdots$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{8}{15}\times\frac{7}{14}+\frac{20}{25}\times\frac{19}{24}\right]$

$=\frac{61}{90}$

法2. $P(B_2^c)=P(B_1^c)=1-P(B_1).=\frac{61}{90}$　　先后抽出两份表的结果与顺序无关？

30. 记 A：{该人带菌}　　　　$P(A)=10\%=0.1$

　　B_i：{第 i 次检测为阳性} $i=1,2$.　　　　$P(B_i|A)=0.95$　$P(B_i|A^c)=0.01$

(1) $$P(A|B_1)=\frac{P(AB_1)}{P(B_1)}=\frac{P(B_1|A)P(A)}{P(B_1|A)P(A)+P(B_1|A^c)P(A^c)}$$

$$=\frac{0.95\cdot 0.1}{0.95\cdot 0.1+0.01\times 0.9}=\frac{95}{104}\approx 0.913$$

1°对贝叶斯公式的理解：是什么原因造成了这样的结果？

(2) $$P(A|B_1B_2)=\frac{P(AB_1B_2)}{P(B_1B_2)}=\frac{P(B_1B_2|A)P(A)}{P(B_1B_2|A)P(A)+P(B_1B_2|A^c)P(A^c)}$$

$$=\frac{P(B_1|A)P(B_2|A)P(A)}{+}$$

$$=\frac{(0.95)^2\,0.1}{(0.95)^2\cdot 0.1+(0.01)^2\cdot 0.9}=\frac{9025}{9034}\approx 0.999$$

2° 将已知背景信息转化为具体概率

3°.(2)的典型错误
$=1-(1-P(A|B_1))^2$

34. 证明：$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})$

$$\overset{\star}{=}P(B|A)(P(A)+P(\bar{A}))=P(B|A).$$

证明独立性：
1° $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$
2° $P(A|B)=P(A)$.

法2. $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

$\therefore P(AB)=P(B|A)P(A)$

$$=P(B|\bar{A})P(A)=\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}P(A)=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}P(A)$$

$\therefore P(AB)(1-P(A))=P(A)P(B)-P(A)P(AB)$

$\therefore P(AB)=P(A)P(B)$

$\therefore$ A.B独立. → 不要忘记.

37. $P(A)=P(A|\bar{C})P(\bar{C})+P(A|C)P(C)=0.2\cdot 0.5+0.9\cdot 0.5=0.55$

$P(B)=P(B|\bar{C})P(\bar{C})+P(B|C)P(C)=0.1\cdot 0.5+0.9\cdot 0.5=0.5$

$P(AB)=P(AB|\bar{C})P(\bar{C})+P(AB|C)P(C)$

$=P(A|\bar{C})P(B|\bar{C})P(\bar{C})+P(A|C)P(B|C)P(C)$

$=0.2\cdot 0.1\cdot 0.5+0.9\cdot 0.9\cdot 0.5$

$=0.415.$

$P(A)\cdot P(B)=0.275\neq P(AB)$

$\therefore$ A.B不相互独立.

1°有同学写成 $P(AB)=P(A|C)P(B|C)P(C)$
落下了 $\bar{C}$

2°.最后不要忘记写结论

38. (1) 设题设事件为A.

$P(A)=0.5(1-0.6)(1-0.8)+(1-0.5)0.6(1-0.8)+(1-0.5)(1-0.6)0.8$

$=0.26$

(2) 设题设事件为B.

容易写成 0.5·0.6·0.8

$P(B)=1-P(\text{三次均未射中})=1-(1-0.5)(1-0.6)(1-0.8)$

$=0.96.$

39. (1) $P=P_A\cdot P_B\cdot P_C$. 必须同时工作

(2) 只需任一条路通 ⇒ 不全坏.

$P=1-(1-P_A)(1-P_B)(1-P_C)$

(3) (1)(2)问结合

$P=1-(1-P_A^2)(1-P_B^2)(1-P_C^2)$

(4) (1)(2)问结合.

$P=P_D[1-(1-P_A)(1-P_B)(1-P_C)]P_D$

(5) 记该路能工作为事件A.

记C正常工作为C.

$P(A)=P(A|C)P(C)+P(A|\bar{C})P(\bar{C})$.

$P(A|\bar{C})=1-(1-P_AP_B)^2$ (同(3))

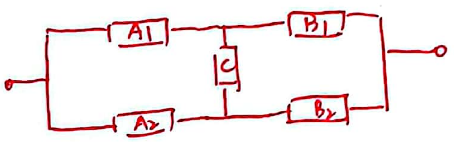
$P(A|C)=(1-(1-P_A)^2)(1-(1-P_B)^2)$

$A_1.A_2$至少有一个能工作 ⇔ A_1A_2不全坏

B_1B_2 ⋯⋯ ⇔ B_1B_2不全坏.

$\therefore P(A)=P_C(2P_A-P_A^2)(2P_B-P_B^2)+(1-P_C)(2P_AP_B-P_A^2P_B^2)$

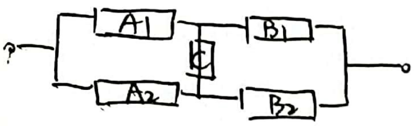
$=2P_A^2P_B^2P_C-2P_A^2P_BP_C-2P_AP_B^2P_C-P_A^2P_B^2+2P_AP_BP_C+2P_AP_B$.



根据图可知A.B是对称的.

∴ 结果中$P_A\cdot P_B$至少也是对称的 → 可以据此检查结果

法2.



设 A_1、A_2 都好为事件 A

A_1、A_2 之一好为事件 B

A_1、A_2 都坏为事件 C.

系统正常工作为 X.

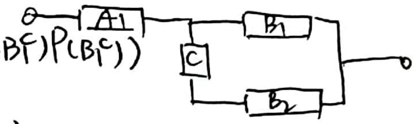
记 B_1 好为事件 B_1

$$P(X)=P(X|A)P(A)+P(X|B)P(B)+\underbrace{P(X|C)}_{=0}P(C)$$

$P(X|A)=1-(1-P_B)^2$. C怎样无所谓. B_1, B_2 不全坏就好.

A1、A2对称只看A1好A2坏

$$P(X|B)=2(P(X|BB_1)P(B_1)+P(X|B\bar{B_1})P(\bar{B_1}))$$



$$=2(1\cdot P_B+P_C\cdot P_B\cdot(1-P_B)).$$

$$\therefore P(X)=(2P_B-P_B^2)P_A^2+2(P_B+P_BP_C(1-P_B))(1-(1-P_A)^2).$$

注. A,C独立时. (由书P29. 定理1.1.4. A,C独立 $\Leftrightarrow$ A,$\bar{C}$ 独立)

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B|A)=P(B|AC)P(C)+P(B|A\bar{C})P(\bar{C})$$

$$RHS=\frac{P(ABC)}{P(AC)}P(C)+\frac{P(AB\bar{C})}{P(A\bar{C})}P(\bar{C})$$

$$\overset{\text{独立性}}{=}\frac{P(ABC)}{P(A)P(C)}P(C)+\frac{P(AB\bar{C})}{P(A)P(\bar{C})}P(\bar{C})$$

$$=\frac{P(ABC)+P(AB\bar{C})}{P(A)}$$

$$=\frac{P(AB)}{P(A)}.=LHS.\quad \#$$