ex2.2.1 (1)、(2)、(3)、(5)、(6)、(7)：零(介)值定理即可.

e.g. (7) 不妨设 $f(x_1) \le \cdots \le f(x_n)$.

则 $f(x_1) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ ， $f(x_n) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. 不妨 $x_1 < x_n$.

故由介值定理，$\exists \xi \in [x_1, x_n]$ s.t. $f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

$\subseteq [a,b]$ ☆注意区间

(8) 设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. 则对 $\varepsilon_0 = 1$，$\exists x_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x > x_0$,

$|f(x) - A| \le 1$. 由于 f 连续 故在 $[a, x_0]$ 上，$\exists M > 0$ s.t.

$|f(x)| < M$. 令 $M' = \max\{|A|+1, M\}$. 则有 $|f(x)| \le M'$.

取定界 ☆

(9) Note: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. 再利用 ex8.

函数中一致连续 $\Longleftrightarrow$ Cauchy 收敛.

区域 C 则有 Cauchy.

(13) 利用一致连续性，考虑端点处的Cauchy收敛准则.

$f(x)$ u.c. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ &

$|x_1 - x_2| < \delta$, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 由此 ⇒ 只有相关，不需要极限

故 $\forall x_1, x_2 \in (a, a+\delta)$, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. ☆ $\square$

ch2 综 / (1) 考虑 $f(x) = (1 - D(x))x$. 其中，$D(x)$ 为 Dirichlet 函数.

但收敛的要引入极限 $\longrightarrow$ 用到 函数有界

(2)、(3)、(5)、(6) 介值定理即可.

e.g. (5) 令 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$.

则 $0=f(0)-f(1)=g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})$.

Case 1: $g(\frac{i}{n})\equiv 0$, ok.

Case 2: 不全为 0. 则必有一正一负. 介值定理 ok.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 C.

$\frac{a^x-1}{\cdots} \to \frac{e^x-1}{x}$

$\frac{\sqrt{1+x\cdots}-1}{\cdots} \to \frac{(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x}{x}$

(一) (1). 设 $\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}=h>0$

则 $(h^k)^{\frac{1}{k}}\le(|a_1|^k+|a_2|^k+\cdots+|a_n|^k)^{\frac{1}{k}}\le(nh^k)^{\frac{1}{k}}$

即 $h\le(|a_1|^k+|a_2|^k+\cdots+|a_n|^k)^{\frac{1}{k}}\le n^{\frac{1}{k}}\cdot h$.

而 $\lim\limits_{k\to\infty}h=\lim\limits_{k\to\infty}n^{\frac{1}{k}}\cdot h=h$. 夹逼准则 $\lim\limits_{k\to\infty}(|a_1|^k+\cdots+|a_n|^k)^{\frac{1}{k}}=h$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\frac{a_1^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x-1+\cdots+a_n^x-1}}\right]^{\frac{a_1^x-1+\cdots+a_n^x-1}{nx}}$

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a$.

故原式 $=e^{\frac{1}{n}\ln a_1a_2\cdots a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$

(3) $2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin2x+\cdots+\sin nx)=\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x$.

$\therefore \sin x+\sin2x+\cdots+\sin nx=[\cos x/2-\cos(n+\frac{1}{2})x]/2\sin\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin x/2}$

将 $x=\frac{\alpha}{n^2}$ 代入得 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{\alpha}{2n}}{\sin\frac{1}{2}\frac{\alpha}{n^2}}\sim\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\cdot\frac{\alpha}{2n}\Big/\frac{1}{2}\frac{\alpha}{n^2}=\frac{(n+1)\alpha\alpha}{2n}\underset{(n\to\infty)}{\to}\frac{\alpha^2}{2}$

(4) 令 $1-\cos x=u$. 则 $x\to0\Leftrightarrow u\to0$

原式 $=\lim\limits_{u\to0}\frac{1-\cos u}{x^4}\overset{1-\cos u\sim\frac{1}{2}u^2}{=}\lim\limits_{u\to0}\frac{u^2}{2x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{2x^4}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{2}x^2/x^2\right)^2=\frac{1}{8}$.

满内部弱

相探析

ex3.1 / 1.(1) ~~$f'_-(0)=-1$,~~ $f'_+(0)=1$. 故不可导.

2.(2) 由连续性知 $b=0$. 由 $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=a$ 知. $a=1$.

4. $$\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=\alpha\cdot\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}+(-\beta)\frac{f(x_0-\beta h)-f(x_0)}{(-\beta)h}$$

取极限得证.

~~拆分为基本形式~~

7. 复合函数求导法则. (不推荐化简)

(6) $$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

先在求导中作为整体, 别急!

(8) $$y'=\cos(\cos^5(\arctan x^3))\cdot 5\cos^4(\arctan x^3)\cdot$$
$$(-\sin(\arctan x^3))\cdot\frac{1}{1+x^6}\cdot 3x^2$$

(13) $$y'=(e^{x^x\ln x}+e^{x\ln x}+e^{2^x\ln x})'$$
$$=(e^{e^{x\ln x}\ln x}+e^{x\ln x}+e^{e^{x\ln 2}\ln x})'$$

$$=(\ln x+1)x^x+x^{2^x}\cdot 2^x(\ln 2\cdot\ln x+\frac{1}{x})+x^{x^x+x}(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x})$$

11.(1) $x\neq 0$ 时, $$y'=\frac{e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})(1+e^{\frac{1}{x}})+\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{2}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2},$$

☆ $x=0$ 时, 由于 $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=0$. 故不可导!

一定要用定义!

14. 直接用反函数求导法则即可. 不推荐求反函数.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot -\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = -(1+x^2) \left(= -(1+\cot^2 y) = -\dfrac{1}{\sin^2 y}\right)$

计算类的，会试试能否化简.

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}{e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}$,

15. $f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$ → 直接方程

$f(x) = -f(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$

(都用了前述方法做相同的操作)

16. $f(x) = f(x+T) \Rightarrow f'(x) = f'(x+T)$