第六周作业

15

(1)解：

$$X\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -3 & 2 & 5\\ -1 & 5 & 4\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -3 & 2 & 5\\ -1 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

由初等变换

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 5 & 4 & 7\\ 0 & 5 & 0 & -20 & -15 & -25\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & -6\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & -6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -4 & -3 & -5\\ -5 & -4 & -6\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -3 & 2 & 5\\ -1 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -4 & -3 & -5\\ -5 & -4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -7 & -9\\ -36 & -29 & -46\\ -41 & -32 & -51\end{pmatrix}$$

(2)解：

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}X-X\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\\ x_{11} & x_{12} & x_{13}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & x_{11} & x_{12}\\ 0 & x_{21} & x_{22}\\ 0 & x_{31} & x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

解得$X=\begin{pmatrix}3 & 8 & 14\\ 1 & 5 & 11\\ 2 & 5 & 11\end{pmatrix}$

19

证：

假设存在满足条件的矩阵 A, B，由于$tr(AB)=tr(BA)$，则$tr(AB-BA)=0$，$AB-BA=I_n$两边取迹得$0=n$，矛盾，因此不存在满足条件的复方阵 A, B.

20
证：
上三角：
设 n 阶矩阵 A 是可逆的上三角阵

n=1 时，$A=a$，$A^{-1}=\frac{1}{a}$，可视为上三角阵，结论成立

假设 n-1 时结论成立，n 时，令$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \boldsymbol{b} \\ O & a_{nn} \end{pmatrix}$，则$a_{nn}\neq 0, |A_{11}|\neq 0$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{11}^{-1}\boldsymbol{b} \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & \\ & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}\frac{1}{a_{nn}} \\ & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

则A^{-1}为上三角阵。
对于下三角阵的情况证明类似。

准对角：
设$A_1, A_2, \dots, A_k$可逆，对每个分块进行初等变换可得

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^{-1} \end{pmatrix}$$

即准对角矩阵的逆也是准对角阵。

对称：
设 n 阶矩阵 A 是可逆的对称阵

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$$

即A^{-1}也是对称阵。

反对称：
设 n 阶矩阵 A 是可逆的反对称阵

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=-A^{-1}$$

即A^{-1}也是反对称阵。

30
证：
必要性：

假设$\det(A) \neq 0$，则由 Cramer 法则，对方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，$\Delta_i = 0, x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0$，即方程组的解全部为 0，与方程组有非 0 解矛盾。

充分性：

$$\det(A) = 0 \to rank(A) = r < n$$

由齐次线性方程组的解的性质，$r < n$时，方程组有非 0 解，结论成立。

31

(1)

解：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 12$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 36$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 4$$

解得$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{3}$

36

(2)解：

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & -40 & -80 & 50 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & -28 & -56 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

该矩阵的秩为 2.

37

解：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & a\\ 3 & b & 9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & a-6\\ 0 & b-6 & 0\end{pmatrix}$$

$a\neq 6$且$b\neq 6$时，矩阵的秩为 3

$a=6$和$b=6$有且仅有一个成立时，矩阵的秩为 2

$a=6$且$b=6$时，矩阵的秩为 1

43

解：

对$diag(I+A,I-A)$做初等变换得

$$\begin{pmatrix}I+A & O\\ O & I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I+A & I+A\\ O & I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I+A & I+A\\ I+A & 2I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(I-A^2) & I+A\\ O & 2I\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(I-A^2) & O\\ O & 2I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}O & O\\ O & 2I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

由上面的初等变换可得

$$rank(I+A)+rank(I-A)=rank\begin{pmatrix}I+A & O\\ O & I-A\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}I & O\\ O & O\end{pmatrix}=n$$

结论成立。

39

证：

设$A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q, r=rank(A), P, Q$为可逆矩阵，因此$P^*, Q^*$也为可逆矩阵。

$r=n$时，$A=PQ$，$A^*=Q^*P^*$也为可逆矩阵，因此$rank(A^*)=n$

$r=n-1$时，$\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & 0\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}O & O\\ O & 1\end{pmatrix}$，$A^*=Q^*\begin{pmatrix}O & O\\ O & 1\end{pmatrix}P^*$，$rank(A^*)=1$

$r\leq n-2$时，$\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & 0\end{pmatrix}^*=O$，$A^*=Q^*\begin{pmatrix}O & O\\ O & O\end{pmatrix}P^*=O$，$rank(A^*)=0$

42

证：

分别对第一行和第二行做初等变换得

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n - BA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n - BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m - AB & O \\ B & I_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_m - AB & O \\ O & I_n \end{pmatrix}$$

因此$rank\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n - BA \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} I_m - AB & O \\ O & I_n \end{pmatrix}$，即$m + rank(I_n - BA) = n + rank(I_m - AB)$