Homework 3

2022 年 9 月 24 日

1.

Sol.

(1) 设X为中奖等级并令$\{X=0\}$表示未中奖, 则

X	1	2	3	4	5	6	0
Prob	$\frac{1}{C_{33}^6 C_{16}^1}$	$\frac{C_{15}^1}{C_{33}^6 C_{16}^1}$	$\frac{C_{27}^1 C_6^5}{C_{33}^6 C_{16}^1}$	$\frac{C_{27}^1 C_6^5 C_{15}^1 + C_{27}^2 C_6^4}{C_{33}^6 C_{16}^1}$	$\frac{C_{27}^2 C_6^4 C_{15}^1 + C_{27}^3 C_6^3}{C_{33}^6 C_{16}^1}$	$\frac{C_{27}^4 C_6^2 + C_{27}^5 C_6^1 + C_{27}^6}{C_{33}^6 C_{16}^1}$	1-else

表 1: 第1题X的分布律

(2) $A=\{X=1,2,3,4,5,6\}$ 且 $B=\{X=1,2\}$, B的概率为上表中前两个概率相加, 此处仅计算A的概率为

$$\Pr(A)=1-\frac{C_{27}^3 C_6^3 C_{15}^1 + C_{27}^4 C_6^2 C_{15}^1 + C_{27}^5 C_6^1 C_{15}^1 + C_{27}^6 C_{15}^1}{C_{33}^6 C_{16}^1}.$$

7. 几何分布

Sol.

注意到

$$\Pr(X=k)=0.6^{k-1}0.4,$$

因此

$$\begin{aligned}\Pr(X\text{为偶数}) &= \sum_{i=1}^{\infty}\Pr(X=2i)\\ &= 3/8,\\ \Pr(X>2) &= 1-\Pr(X\leq 2)\\ &= 0.36.\end{aligned}$$

8. 二项分布

Sol.

命中k次的概率为

$$\Pr(X=k)=C_{20}^{k}0.2^{k}0.8^{20-k}.$$

则

$$\Pr(X\geq 1)=1-\Pr(X=0)=1-0.8^{20},$$

$$\Pr(X=k)-\Pr(X=k-1)=\frac{20!}{(k!(21-k)!}0.2^{k-1}0.8^{20-k}\left(4.2-k\right),$$

因此X最可能的取值为4.

9. 二项分布+全概率公式

Sol.

(1) 令X表示A出现的次数, 则

$$\begin{aligned}\Pr(B)&=\Pr(B|X=1)\Pr(X=1)+\sum_{i=2}^{4}\Pr(X=i)\\&=0.59526.\end{aligned}$$

(2) 由条件概率的定义,

$$\Pr(X=1|B)=\frac{\Pr(B|X=1)\Pr(X=1)}{\Pr(B)}\approx 0.4149.$$

12. 泊松分布

令X表示产卵的数量, 则

$$\Pr(X=k)=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda},$$

因此

$$\begin{aligned}\Pr(Y=n)&=\sum_{k=n}^{\infty}\Pr(Y=n|X=k)\Pr(X=k)\\&=\frac{(\lambda p)^{n}}{n!}e^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

类似地,

$$\Pr(Z=n)=\frac{(\lambda(1-p))^{n}}{n!}e^{-\lambda(1-p)}.$$

注意到

$$\begin{aligned}
\Pr(Y=y,Z=z) &= \Pr(Y=y|X=y+z)\Pr(X=y+z)\\
&= \frac{(y+z)!}{y!z!}p^y(1-p)^z\frac{\lambda^{y+z}}{(y+z)!}e^{-\lambda}\\
&= \Pr(Y=y)\Pr(Z=z),
\end{aligned}$$

因此Y,Z是独立的.

15. 泊松逼近定理

Sol.

已知10s内传送字符数为$n=5.12\times10^6$, $p=10^{-7}$, 则由泊松逼近定理, $\lambda=np=0.512$.

$$\Pr(\text{至少出现1个误码})=1-e^{-\lambda}\approx0.401,$$

100s内, $n=5.12\times10^7$, $\lambda=np=5.12$,

$$\Pr(\text{至少出现1个误码})=1-e^{-\lambda}\approx0.994.$$

16. 泊松逼近定理

Sol.

令$n=52$, $p=0.05$, 则$\lambda=2.6$, 由泊松逼近定理,

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{最终无法满足所有乘客乘坐要求}) &= \Pr(\text{只有0个或1个乘客不回来})\\
&= e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}\approx 0.27.
\end{aligned}$$