线性代数习题课 5

陈思维

20220508

一、5.6 节作业选讲

44

假设存在不全为 0 的参数$t_1, \dots, t_n$使得$t_1\cos x + t_2\cos 2x + \dots + t_n\cos nx = 0$

每次求 4 阶导得

$$t_1\cos x + 2^4 t_2\cos 2x + \dots + n^4 t_n\cos nx = 0$$
$$\dots$$
$$t_1\cos x + 2^{4n-4} t_2\cos 2x + \dots + n^{4n-4} t_n\cos nx = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^4 & \cdots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{4n-4} & \cdots & n^{4n-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1\cos x \\ t_2\cos 2x \\ \vdots \\ t_n\cos nx \end{pmatrix} = 0$$

左边方阵为 Vandermonde 方阵，行列式不为 0，因此可以得到$t_1\cos x = 0, \dots, t_n\cos nx = 0$

因此$t_1 = 0, \dots, t_n = 0$，即线性无关。

48

此题只需找到三个变量即可，将其他变量表示为这三个变量的形式。对于一般的情况，需要用到最小多项式以及有理标准型等内容，有一道往年考题会说明对于特征值互不相同 n 阶矩阵，可以与其交换的矩阵组成的子空间的维数为 n。

二、往年期中考题选讲

4. (15 分) 计算 n 阶行列式 $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-a & -1 & & & \\ a & 1-a & -1 & & \\ & a & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1-a & -1 \\ & & & a & 1-a \end{vmatrix}$.

解：

$$\Delta_n = (1-a)\Delta_{n-1} + a\Delta_{n-2}$$
$$\Delta_1 = 1-a, \Delta_2 = 1-a+a^2, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2})$$
$$\Delta_n = 1 - a + \dots + (-1)^n a^n$$

TH1009. 08 2022SP

更一般的，$\begin{vmatrix} a+b & -b & & \\ -a & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -b \\ & & -a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & b & & \\ a & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & a & a+b \end{vmatrix} = a^n + a^{n-1}b + \cdots + b^n$

4. (15 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-n \end{vmatrix}$.

法 1：拆成多个行列式的和

原 式 $= \begin{vmatrix} x_1-1 & x_2+0 & \cdots & x_n+0 \\ x_1+0 & x_2-2 & \cdots & x_n+0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1+0 & x_2+0 & \cdots & x_n-n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & & & \\ x_1 & -2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_1 & & & -n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} -1 & & & x_n \\ & -2 & & x_n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & -n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\left(\frac{n!}{1}x_1 + \cdots + \frac{n!}{n}x_n\right) + (-1)^n n! = (-1)^{n-1}n!\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} - 1\right)$

法 2：初等变换

将第一行的-1 倍加到后面 n-1 行上，原式=

$$\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & -2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & -n \end{vmatrix} = n!\begin{vmatrix} x_1-1 & \frac{x_2}{2} & \cdots & \frac{x_n}{n} \\ 1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$= n!\begin{vmatrix} x_1+\frac{x_2}{2}\ldots+\frac{x_n}{n}-1 & \frac{x_2}{2} & \cdots & \frac{x_n}{n} \\ 0 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}n!\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}-1\right)$$

法 3：加边

MATH1009.08 2022SP

$$\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ & x_1-1 & x_2 & \cdots & x_n \\ & x_1 & x_2-2 & \cdots & x_n \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & x_1 & x_2 & \cdots & x_n-n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x_1-\frac{x_2}{2}-\cdots-\frac{x_n}{n} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n n!\left(1-x_1-\frac{x_2}{2}-\cdots-\frac{x_n}{n}\right) = (-1)^{n-1} n!\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}-1\right)$$

4\. $n(>1)$ 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 2 \end{pmatrix}$，求 $\det A$ 及 A^{-1}.

解：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 2 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{n-1} & \cdots & \frac{3}{n-1} \\ 1 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{n-1} & \cdots & \frac{3}{n-1} \\ & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 2 \end{vmatrix} = -(n-1)2^{n-2}$$

逆矩阵的求解使用求解线性方程组的方法。

$$\begin{cases} x_2+\cdots+x_n = b_1 \\ x_1+2x_2 = b_2 \\ \quad\vdots \\ x_1+2x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{b_2+\cdots+b_n-2b_1}{n-1}, x_2 = \frac{2b_1+(n-2)b_2-b_3-\cdots-b_n}{2(n-1)}, \ldots, x_n$$
$$= \frac{2b_1+(n-2)b_n-b_2-\cdots-b_{n-1}}{2(n-1)}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{n-1} & \dfrac{1}{n-1} & \cdots & \dfrac{1}{n-1} \\ \dfrac{1}{n-1} & \dfrac{n-2}{2(n-1)} & \cdots & -\dfrac{1}{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{n-1} & -\dfrac{1}{2(n-1)} & \cdots & \dfrac{n-2}{2(n-1)} \end{pmatrix}$$

3. (12 分) 设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A, 满足 $\operatorname{rank} A = 3$. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的 3 个解, 其中 $\alpha_1=(1,-2,-3,4)^T$, $5\alpha_2-2\alpha_3=(2,0,2,0)^T$.

(1) 证明: 这个线性方程组是非齐次的. (2) 求出这个线性方程组的通解.

(1)证:

4 元方程组的系数矩阵的秩为 3，则齐次方程组 Ax=0 的解空间的维数为 1，假设原线性方程组是齐次的，则所有解在一个一维空间上，然而$(1,-2,-3,4)$和$(2,0,2,0)$线性无关，因此矛盾，则原方程组是非齐次的。

(2)解:

设通解为$t\alpha+\beta$

则$t_1\alpha+\beta=(1,-2,-3,4)^T,(5t_2-2t_3)\alpha+3\beta=(2,0,2,0)^T$

$$t\alpha=(1,-6,-11,12)^T$$

$$3(1-x_1,-2+6x_1,-3+11x_1,4-12x_1)=(2-x_2,6x_2,2+11x_2,-12x_2)$$

$$x_2=3x_1-1$$

通解为$t(1,-6,-11,12)^T+(1,-2,-3,4)^T$

6. (12 分) $A=P^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)P$, 其中 P,A 都是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵, $\{\lambda_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 两两不等. $V=\{B\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid AB=BA\}$.

(1) 证明: V 构成 $\mathbb{R}$ 上线性空间; (2) 求 V 的基与维数.

证明 V 构成线性空间只需验证满足 8 条规律即可。下面求 V 的基与维数。

$$AB=BA\to P^{-1}diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)PB=BP^{-1}diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P\to diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)PBP^{-1}=PBP^{-1}diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

设$PBP^{-1}=T$，则$diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)T=Tdiag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$，由于$\lambda_1,\dots,\lambda_n$互不相同，则 T 为对角阵，$B=P^{-1}TP$

设$T=diag(x_1,\dots,x_n)$

则 V 的维数为 n，一组基为$P^{-1}diag(1,0,\dots,0)P,\dots,P^{-1}diag(0,\dots,0,1)P$

6. (14 分) 设 F 为数域, $A\in F^{n\times n}$, 且满足 $A^2=I$, 这里 I 是 n 阶单位阵.

(1) 证明: $\operatorname{rank}(A+I)+\operatorname{rank}(A-I)=n$;

(2) 设 $W_1=\{\boldsymbol{x}\in F^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\}$, $W_2=\{\boldsymbol{x}\in F^n \mid A\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}\}$. 证明: W_1 及 W_2 为 F^n 的子空间, 并且 W_1 的一组基和 W_2 的一组基合并起来构 F^n 的一组基.

此处只证明第(2)问。

证：

验证子空间只需验证满足 8 条规律即可。

$$\dim(W_1)=n-rank(A-I),\dim(W_2)=n-rank(A+I),\dim(W_1)+\dim(W_2)=2n-rank(A-I)-rank(A+I)=n$$

取W_1和W_2的一组基$x_{11},\dots,x_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2n_2},n_1+n_2=n$，只需证明$x_{11},\dots,x_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2n_2}$线性无关。

假设$x_{11},\dots,x_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2n_2}$线性相关，则存在非 0 系数$t_{11},\dots,t_{1n_1},t_{21},\dots,t_{2n_2}$有$t_{11}x_{11}+\cdots+t_{1n_1}x_{1n_1}=t_{21}x_{21}+\cdots+t_{2n_2}x_{2n_2}=x$，即 x 同时属于 W1 和 W2，即$(A-I)x=0,(A+I)x=0$，两式相减得$x=0$，由于$x_{11},\dots,x_{1n_1}$和$x_{21},\dots,x_{2n_2}$分别线性无关，则系数均为 0，矛盾。因此结论成立。

5. (14 分) 给定 I: $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-6&4\\1&0\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}4&-2\\0&1\end{pmatrix}$.

(1) 证明向量组 (I) 是线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组基.

(2) 给定 II: $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, 求 (I) 到 (II) 的过渡矩阵.

(3) 求 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 在基 (I) 下的坐标.

(1)

证：

$$\det\begin{pmatrix}1&0&-6&4\\0&1&4&-2\\1&2&1&0\\2&3&0&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&-6&4\\0&1&4&-2\\0&2&7&-4\\0&3&12&-7\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&-6&4\\0&1&4&-2\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=1$$

因此向量组 1 是原线性空间的一组基。

(2)

解：

$$T=\begin{pmatrix}1&0&-6&4\\0&1&4&-2\\1&2&1&0\\2&3&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&-6&4\\0&-1&4&-2\\1&2&-1&0\\2&3&0&-1\end{pmatrix}$$

(3)

解：

$$\begin{pmatrix}-1&0&-6&4\\0&-1&4&-2\\1&2&-1&0\\2&3&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\2\\4\end{pmatrix}$$