2019 年复变函数 A、B 考卷及参考解答

刘炜昊

2020 年 10 月 5 日

目录

1 提要

以下是本人收集得到的 2019 年复变函数 A、B 的期末考题，参考答案由本人完成，仅供参考，若有错误之处，欢迎指正. 仅以此献给我所爱的老师、同学、班上的学生以及伟大的数学.

2 2019 年复变函数 A 考题

一. 填空题（39 分，本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

1. 设 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$，那么 $z^{2019}+z^{2020}=$ __________________.

2. $1^{\sqrt{3}}=$ __________________.

3. 若函数 $f(z)=x^2+2xy-y^2+i(y^2+axy-x^2)$ 是复平面上的解析函数，那么实常数 $a=$ __________________.

4. 设 $f(z)=\dfrac{\sin(z-5)}{z^3(z-5)^2}+e^{\frac{1}{z-i}}$，给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 ∞），并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）：____.

5. $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1-\cos z}{z^5},0\right)=$ __________________；$Res\left(z^2e^{\frac{1}{z-i}},i\right)=$ __________________.

6. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，并且 $f(0)=1,f'(0)=2$，那么 $\int_{|z|=1}(z+1)^2\dfrac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z=$ ___.

7. 设函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z}$ 在 0 处的泰勒（Taylor）展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径 $R=$ __________________.

8. 设函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{1-z}$，那么 $f(z)$ 在区域 $0<|z-1|<+\infty$ 内的罗朗（Laurent）展开式为 __________________.

9. 设 $z_0\in\mathbb{C}$，函数 $|e^z|$ 在闭圆盘 $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le 1\}$ 上的最大值为__________________.

10. 设 $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，那么在右半平面 $\{z\in\mathbb{C}:Re(z)>0\}$ 解析并以 $u(x,y)$ 为它的实部的函数为 $f(z)=$ __________________.

11. 对函数 $f(t)$，记 $F(p)=L[f(t)]$ 为它的 Laplace 变换，并且记 $f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

(1)设$f(t)$满足$\begin{cases}f''(t)-2f'(t)+f(t)=t-\sin t\\ f(0)=f'(0)=0\end{cases}$，那么$F(p)=$ __________________ .

(2)$L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2-p)(p-2)}\right]=$ ______________ .

二. 计算题（30 分，本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$的和函数，并且计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.

2. 计算积分 $\int_{|z|=3} \dfrac{z+\bar{z}}{|z|} \mathrm{d}z$.

3. 计算积分 $\int_C \dfrac{z\cos^2 \frac{1}{z}}{1-z} \mathrm{d}z$, 其中$C: |z-\frac{1}{2}| + |z+\frac{1}{2}| = 3$.

4. 计算积分 $\int_0^{2\pi} \left| \dfrac{1}{(2-e^{i\theta})^4} \right| \mathrm{d}\theta$.

5. 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin(x-1)}{(x^2+4)(x-1)} \mathrm{d}x$.

三. 综合题（共 31 分）

1.（5 分）设 $f(z)$ 为定义在上半平面内的解析函数，则 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 为定义在下半平面上的复变函数，请问: $g(z)$ 在下半平面上是否为解析函数? 给出你的答案，如果“是”，给出证明;“否”，举个反例.

2.（5 分）设 $f(z)$ 为在区域 D 内解析的非常数值复变函数，C 为 D 内的一条简单闭曲线，它的内部包含在 D 内. 证明：对于任何复数 A，$f(z) = A$ 在 C 的内部只有有限个解.

3.（6 分）设 $f(z) = \dfrac{z(\sin z - z)}{(z^3+1)(z+1)^3}$，设 $C: |z| = R > 0$ 为圆周，方向取正向，其中 $R \neq 1$，试计算 $\Delta_C arg f(z)$.

4.（8 分）求保形变换 $\omega = f(z)$，将区域 $D = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, |z - \sqrt{3}i| < 2\right\}$ 映为区域 $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < 1\}$，并且满足条件 $f(\sqrt{3}i) = 0, f'(\sqrt{3}i) > 0$.（请画出必要的示意图）

5.（7 分）设 $P_n(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!}$，$A_n$ 表示 $P_n(z)$ 的 n 个零点模的最小值，证明:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty.$$

3 2019 年复变函数 B 考题

一.（共 10 分）求解以下复方程：

$$(1) z^3 = -3\bar{z} (z \neq 0); \qquad (2) \sin z = 3$$

二.（7 分）已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y) = e^{\alpha y}\cos 3x + 3x$，其中 $\alpha > 0$ 且 $f(0) = 1$，求常数 α，并求出解析函数 $f(z)$.（请用 z 表示函数 $f(z)$）

三.（10 分）
(1) 把 $f(z) = z^5 e^z$ 在 $z = 0$ 展开成幂级数，并指出收敛区域.
(2) 把 $g(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2}$ 在区域 $0 < |z-2| < 2$ 展开成洛朗级数.

四. 计算复积分（36 分）

$$(1) \int_0^{\pi i} \left(2019z^2 - \cos z\right) \mathrm{d}z; \qquad (2) \int_{|z|=6} \left(2019z^2 - \cos z\right) \mathrm{d}z;$$

$$(3) \int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{z^2 - 8z + 5}{z^3(z+2)(z-3)^2} \mathrm{d}z; \quad (4) \int_{|z|=3} \frac{\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}{4-z} \mathrm{d}z;$$

$$(5) \int_{|z|=3} \frac{z+5}{1-\cos(z-2)} \mathrm{d}z; \qquad (6) \int_{|z|=2} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-i|^4}.$$

五. 求以下定积分（共 14 分）

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{3 - 2\cos\theta} \mathrm{d}\theta; \qquad (2) \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 4x}{(x^2+4)^2} \mathrm{d}x.$$

六.（5 分）判断方程 $z^9 = 8z^3 + 2z^2 + z + 2$ 在 $1 < |z| < 5$ 的根的个数，并说明理由.

七.（10 分）利用拉普拉斯变换解微分方程：

$$\begin{cases} y'' + y = e^t \cos 2t \\ y(0) = 4, y'(0) = 0 \end{cases}.$$

八.（8 分）已知函数 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 内解析，函数 $g(z)$ 在 $|z| \geq 1$ 解析，且存在常数 M，使得在 $|z| > 1$ 时，$|g(z)| < M$. 证明以下算式成立：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - a} - \frac{a g(\xi)}{\xi(\xi - a)} \right) = \begin{cases} f(a)\text{ , 当}|a| < 1 \\ g(a)\text{ , 当}|a| > 1 \end{cases}$$

4 2019 年复变函数 A 参考解答

一. 填空题

1. $\underline{\ 1-i\ }$ **2**. $\underline{\ e^{2\sqrt{3}k\pi i}, k\in\mathbb{Z}\ }$ **3**. $\underline{\ 2\ }$ **4**. $\underline{\ z=0(\text{三阶极点}); z=5(\text{一阶极点}); z=i(\text{本性奇点})\ }$

5. $\underline{\ -\dfrac{1}{24}\ ,\ -\dfrac{5}{6}+i\ }$ **6**. $\underline{\ 8\pi i\ }$ **7**. $\underline{\ \dfrac{\pi}{2}\ }$ **8**. $\underline{\ -e\sum\limits_{n=-1}^{+\infty}\dfrac{(z-1)^n}{(n+1)!}, 0<|z-1|<+\infty\ }$

9. $\underline{\ e^{Re(z_0)+1}\ }$ **10**. $\underline{\ \ln z (Rez>0)\ }$ **11**. $\underline{\ \dfrac{1}{p^2(p^2+1)(p-1)^2}\ ,\ \dfrac{1}{2}\left(e^t-1\right)^2\ }$

二. 计算题

1. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=1$ 可知该幂级数收敛半径为 $R=1$，收敛域为 $|z|<1$.

当 $|z|<1$ 时，其和函数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2z^n = z\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2z^{n-1} = z\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(z^n\right)' = z\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n\right)' = z\left[z\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n\right)'\right]' = z\left[z\left(\dfrac{z}{1-z}\right)'\right]' = \dfrac{z(1+z)}{(1-z)^3}, |z|<1.$

令 $z=\dfrac{1}{2}$，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=6.$ □

2. 令 $z=3e^{i\theta}(0\le\theta\le 2\pi)$，则 $\mathrm{d}\theta = iz\mathrm{d}\theta, \bar{z}=3e^{-i\theta}=3\left(\dfrac{3}{z}\right)^{-1}=\dfrac{9}{z}$，因此

$$\int_{|z|=3}\frac{z+\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\int_{|z|=3}\left(\frac{9}{z}+z\right)\mathrm{d}z = 3\int_{|z|=3}\frac{\mathrm{d}z}{z} = 6\pi i. \quad \square$$

3. 由题意，C 是以 $(\pm\dfrac{1}{2},0)$ 为焦点，长半轴为 $\dfrac{3}{2}$ 的椭圆，记 $f(z)=\dfrac{z\cos^2\frac{1}{z}}{1-z}=\dfrac{z+z\cos\frac{2}{z}}{2(1-z)}$.
可知 $z=1$ 是 $f(z)$ 的一级极点，$z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，均被 C 包含.
考虑到在 $|z|<1$ 内，$\dfrac{z\cos\frac{2}{z}}{2(1-z)}=\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^{n+1}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}\right)$. 记 z^{-1} 的系数为 a_{-1}，则

$$a_{-1}=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots=-1+\cos 1.$$

因此

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[f(z),1\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]\right) = \left(\cos 2+2\cos 1-1\right)\pi i. \quad \square$$

4. 令 $z=e^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}z=iz\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$，因此

$$\int_{|z|=3}\frac{z+\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z = \int_{|z|=1}\frac{1}{|(2-z)^4|}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = -i\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z(z-2)^2(\bar{z}-2)^2} = -i\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z(z-2)^2(\frac{1}{z}-2)^2}$$

$$=-\frac{i}{4}\int_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{(z-2)^2(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{\pi}{2}\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z-2)^2(z-\frac{1}{2})^2},\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{z}{(z-2)^2}\right]'\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{10\pi}{27}. \quad \square$$

5. 取辅助函数 $f(z)=\dfrac{e^{i(z-1)}}{(z^2+4)(z-1)}$ 及辅助积分路径 $C=[-R,-r]\cup C_r^-\cup[r,R]\cup C_R^+$，其中 C_r^- 以 $z=1$ 为圆心、r 为半径（r 充分小）的顺时针方向半圆弧，C_R^+ 以原点为圆心、R 为半径（R 充分小）的逆时针方向半圆弧.，则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z&=\int_{-R}^{1-r}f(z)\mathrm{d}z+\int_{1+r}^{R}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_r^-}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_R^+}f(z)\mathrm{d}z\\&=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),2i]=2\pi i\frac{e^{-i-2}}{4i(2i-1)}=-\frac{\pi e^{-2-i}}{10}(1+2i).\end{aligned}\tag{*}$$

而 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{(z^2+4)(z-1)}=0$，由 *Jordan* 引理可知 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}f(z)\mathrm{d}z=0$.

又 $\lim\limits_{z\to1}\dfrac{(z-1)e^{i(z-1)}}{(z^2+4)(z-1)}=\dfrac{1}{5}$，由小圆弧引理可知 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_r^-}f(z)\mathrm{d}z=i\cdot(-\pi)\cdot\dfrac{1}{5}=-\dfrac{\pi}{5}i$.

故令 (*) 式 中 $r\to0,R\to+\infty$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi i}{5}-\dfrac{\pi e^{-2-i}}{10}(1+2i)$，取其虚部可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x-1)}{(x^2+4)(x-1)}\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{10e^2}(2\cos1-\sin1).\quad\Box$$

三. 综合题

1. 是，证明如下：

设上半平面的解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),(u,v,x,y\in\mathbb{R},v>0)$，则其在上半平面处处可微且满足 Cauchy-Riemann 方程：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

而 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)+i[-v(x,-y)]$，则

$$\frac{\partial(-v)}{\partial(-y)}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\,,\ \frac{\partial(-v)}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial(-y)}$$

故 $g(z)$ 满足其对应的 Cauchy-Riemann 方程，在下半平面也处处可微，故 $g(z)$ 在下半平面内是解析函数. $\Box$

2. 证明（反证法）：

假设 $f(z)=A$ 在 C 的内部有无限个解，记 $g(z)=f(z)-A$，则 $g(z)$ 解析且在 C 的内部有无限个零点，易知在 C 内 $G(z)\equiv0$ 满足该函数要求.

又由唯一性定理可知 $g(z)=G(z)\equiv0$，即 $f(z)\equiv A$，与"非常数值函数"矛盾！

因此，$f(z)=A$ 在 C 的内部只有有限个解. $\Box$

3. 由 $f(z)=\dfrac{z(\sin z-z)}{(z^3+1)(z+1)^3}$ 可知 $z=-1$ 为四级极点，$z=e^{\frac{\pi}{3}i}$ 和 $z=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ 为一级极点.

对 $z(\sin z-z)=z\left(-\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{5!}z^5+\cdots\right)$，可知 $z=0$ 为四级零点，记零点数 $N=4$.

当 $0<R<1$ 时，极点数为 $P=2$，由辅角原理：$\Delta_C argf(z)=2\pi(N-P)=8\pi$.

当 $R>1$ 时，极点数为 $P=6$，由辅角原理：$\Delta_C argf(z)=2\pi(N-P)=-4\pi$. $\Box$

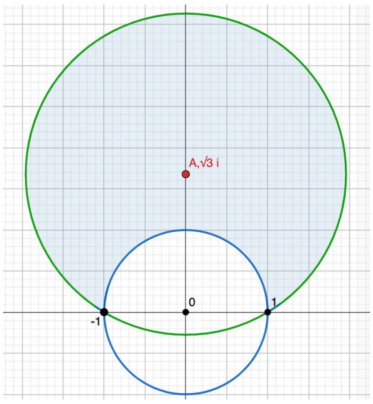

图 1: 题 4 的原始区域

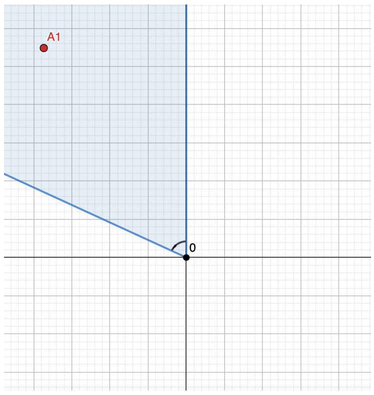

图 2: 题 4 的 ω_1 对应的区域

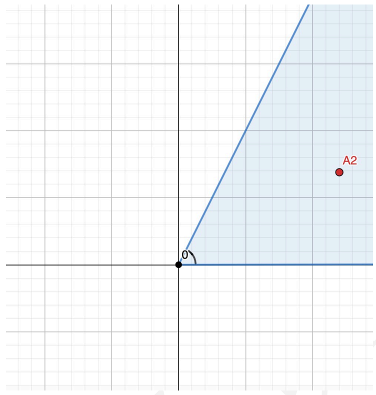

图 3: 题 4 的 ω_2 对应的区域

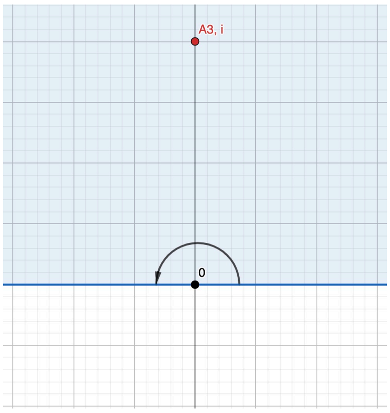

图 4: 题 4 的 ω_2 对应的区域

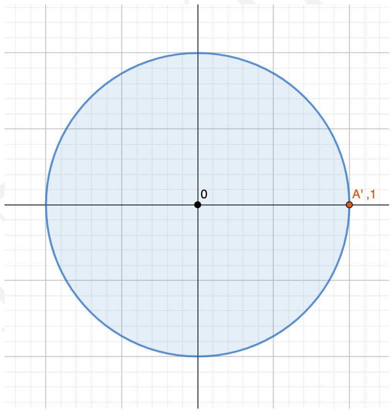

图 5: 题 4 的 ω_3 对应的区域

4. 图 1 为原始区域，以下步骤分别对应图 2～5.

1) 令 $z \mapsto \omega_1(-1 \mapsto 0, 1 \mapsto \infty) : \omega_1 = -\dfrac{z+1}{z-1}$，故 $\omega_1(i) = i, \omega_1(\sqrt{3}i) = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

2) 令 $\omega_1 \mapsto \omega_2$(顺时针旋转90°) $: \omega_2 = -i\omega_1$，故 $\omega_2(\sqrt{3}i) = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

3) 令 $\omega_2 \mapsto \omega_3$(映为上半平面) $: \omega_3 = \omega_2^3$，故 $\omega_3(\sqrt{3}i) = i$.

4) 令 $\omega_3 \mapsto \omega$(映为单位圆) $: \omega = e^{i\theta}\dfrac{\omega_3 - i}{\omega_3 + i}$，故 $\omega = e^{i\theta}\dfrac{(i\frac{z+1}{z-1})^3 - i}{(i\frac{z+1}{z-1})^3 + i} = e^{i\theta}\dfrac{z^3+3z}{3z^2+1}$.

故 $\omega'(z) = e^{i\theta}\dfrac{(3z^2+3)(3z^2+1) - 6z(z^3+3z)}{(3z^2+1)^2}$，而 $\omega'(\sqrt{3}i) = \dfrac{3}{4}e^{i\theta} > 0$

故令 $e^{i\theta} = 1$ 即可，则所求的变换为 $\omega = f(z) = \dfrac{z^3+3z}{3z^2+1}$. □

5. 对 $\forall M > 0$，可知 $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!} + \cdots$ 在 $|z| \le M$ 上一致收敛，且 $|e^z| \ge 1$.

故由 Cauchy 一致收敛准则，对 $\forall \varepsilon > 0$(不妨设 $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$)$, \exists N \in \mathbb{N}_+, s.t.$ 当 $n > N$ 时，满足

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right| = |e^z - P_n(z)| < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

因此 $|P_n(z)| \ge |e^z| - \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}\right| > 1 - \dfrac{1}{2} > 0$, 即 $P_n(z)$ 在 $|z| \le M$ 内无零点, 此时 $|A_n| > M$.

综上，对 $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, s.t.$ 当 $n > N$ 时，$|A_n| > M$，这表明 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$. □

5 2019 年复变函数 B 参考解答

一.

(1) 设 $z = re^{i\theta}(r > 0, 0 \le \theta < 2\pi)$，则 $r^3 e^{i3\theta} = 3re^{i(\pi-\theta)}$.

故 $r^3 = 3r, 3\theta = \pi - \theta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$，得 $r = \sqrt{3}, \theta = \dfrac{2k+1}{4}\pi (k = 0,1,2,3)$.

故 $z = \sqrt{3}e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}$ $(k = 0,1,2,3)$. □

(2) 由 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3$ 得 $e^{i2z} - 6ie^{iz} - 1 = 0$，解得 $e^{iz} = (3 \pm 2\sqrt{2})i$.

因此 $z = -i\mathrm{Ln}[(3 \pm 2\sqrt{2})i] = 2k\pi - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

二.

由题意,解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 满足 Laplace 方程: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\alpha^2 - 9)e^{\alpha y}\cos 3x = 0$，故 $\alpha = 3(\alpha > 0)$，则 $u(x,y) = 3x + e^{3y}\cos 3x$.

选取起点 $(x_0, y_0) = (0,0)$，则 $v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + C = 3y - \sin 3x e^{3y} + C$.

由 $v(0,0) = 0$ 得 $C = 0$，因此 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = 3(x+iy) + e^{3(y-ix)} = 3z + e^{-3iz}$. □

三.

(1) 当 $|z| < +\infty$ 时，$f(z) = z^5 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{n+5}}{n!}$，收敛区域为 $|z| < +\infty$. □

(2) 当 $0 < |z-2| < 2$ 时，$g(z) = \dfrac{1}{4(z-2)} \cdot \dfrac{1}{(1 - \frac{z-2}{2})^2} = \dfrac{1}{4(z-2)} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(\dfrac{z-2}{2}\right)^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dfrac{(z-2)^{n-1}}{2^{n+2}}$. □

四.

(1) $\int_0^{\pi i} (2019z^2 - \cos z)\,\mathrm{d}z = \left(\dfrac{2019}{3}z^3 - \sin z\right)\Big|_{z=0}^{z=\pi i} = \dfrac{3e^{\pi} - 3e^{-\pi} - 4038\pi^3}{6}i$. □

(2) 由于被积函数 $2019z^2 - \cos z$ 在积分路径围成的内解析，由 Cauchy 积分定理可得: $\int_{|z|=6} (2019z^2 - \cos z)\,\mathrm{d}z = 0$. □

(3) 记 $f(z) = \dfrac{z^2 - 8z + 5}{z^3(z+2)(z-3)^2}$，其中 $z = 0$ 为三级极点，$z = -2$ 为一级极点，$z = 3$ 为二级极点，则 $\int_{|z|=\frac{5}{2}} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \left\{\mathrm{Res}\left[f(z), 0\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), -2\right]\right\} = 2\pi i\left(-\dfrac{1}{8} + \dfrac{11}{216}\right) = -\dfrac{4\pi}{27}i$. □

(4) $\int_{|z|=3} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}{4-z}\mathrm{d}z = \int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}{4-z}\mathrm{d}z$，而在区域 $0 < |z-2| \le \dfrac{1}{2}$ 内，有

$$\cos\left(\frac{1}{z-2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^n}, \frac{1}{4-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-2}{2}\right)^n.$$

记被积函数在 $z=2$ 邻域展开的负一次幂系数为 a_{-1}，则 $a_{-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!2^n}=-1+\cos\dfrac{1}{2}$.

因此 $\int_{|z|=3}\dfrac{\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}{4-z}\mathrm{d}z=\int_{|z-2|=\frac{1}{2}}\dfrac{\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}{4-z}\mathrm{d}z=2\pi a_{-1}=2\pi\left(-1+\cos\dfrac{1}{2}\right)i$. □

(5) 由 $1-\cos(z-2)=1-\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=0$ 可得 $z=2+2k\pi(k\in\mathbb{R})$，故在 $|z|=3$ 的内部仅有奇点 $z=2$. 又 $[1-\cos(z-2)]'|_{z=2}=0,[1-\cos(z-2)]''|_{z=2}\neq 1$，故 $z=2$ 为二级极点.

故 $\int_{|z|=3}\dfrac{(z+5)\mathrm{d}z}{1-\cos(z-2)}=2\pi i\mathrm{Res}\left[\dfrac{z+5}{1-\cos(z-2)},2\right]=\dfrac{2\pi i}{1!}\lim\limits_{z\to 2}\left[\dfrac{(z-2)^2(z+5)}{1-\cos(z-2)}\right]'=28\pi i$. □

(6) 令 $z=2e^{i\theta}(0\le\theta<2\pi)$，则 $\mathrm{d}z=2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta=iz\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz},|\mathrm{d}z|=2\mathrm{d}\theta=2\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$，因此

$$\int_{|z|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-i|^4}=-2i\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z(z-i)^2(\bar{z}+i)^2}=-2i\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z(z-i)^2(\frac{4}{z}+i)^2}$$

$$=-2i\int_{|z|=2}\frac{z\mathrm{d}z}{(z-i)^2(z-4i)^2}=4\pi\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z-i)^2(z-4i)^2},i\right]=4\pi\left[\frac{z}{(z-4i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}=-\frac{20\pi}{27}.\quad\square$$

五.

(1) 设 $z=e^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz},\cos\theta=\dfrac{z+z^{-1}}{2},\cos 2\theta=\dfrac{z^2+z^{-2}}{2}$，故

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{3-2\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2(3-z-z^{-1})iz}\mathrm{d}z=\frac{i}{2}\int_{|z|=1}\frac{z^4+1}{z^2(z^2-3z+1)}\mathrm{d}z$$

$$=\pi\mathrm{Res}\left[\frac{z^4+1}{z^2(z^2-3z+1)},0\right]+\pi\mathrm{Res}\left[\frac{z^4+1}{z^2(z^2-3z+1)},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]=\left(\frac{7}{5}\sqrt{5}-3\right)i.\quad\square$$

(2) 取辅助函数 $f(z)=\dfrac{z^3e^{4zi}}{(z^2+4)^2}$ 及辅助积分路径 $C=[-R,-r]\cup[r,R]\cup C_R^+$，其中 C_R^+ 以原点为圆心、R 为半径（R 充分小）的逆时针方向半圆弧.，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_R^+}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),2i]=-3\pi e^{-8}i.\qquad(**)$$

而 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^3}{(z^2+4)^2}=0$，由 *Jordan* 引理可知 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R^+}f(z)\mathrm{d}z=0$.

故令 (**) 式 中 $R\to+\infty$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=-3\pi e^{-8}i$，取其虚部并结合 $f(x)$ 的奇函数性质，可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin 4x}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right]=-\frac{3\pi}{2e^8}.\quad\square$$

六. 6 个，理由如下：

设 $f(z)=8z^3-z^9,g(z)=2z^2+z+2$.

在 $|z|=1$ 上 $|f(z)|\geq 8|z^3|-|z^9|=7, |g(z)|\leq 2|z^2|+|z|+2=5$, 故此时 $|f(z)|>|g(z)|$.

在 $|z|=5$ 上 $|f(z)|\geq |z^9|-8|z^3|\geq 5^5>625, |g(z)|\leq 2|z^2|+|z|+2=57$, 故此时 $|f(z)|>|g(z)|$.

而 $f(z)=z^3(8-z^6)$ 在区域 $1<|z|<5$ 内有模为 $\sqrt{2}$ 的六个一级零点，由 Rouché 定理，$f(z)+g(z)$ 在域 $1<|z|<5$ 内共有 6 个零点，即原方程在域 $1<|z|<5$ 内共有 6 个根. □

七.

设 $Y(p)=L[y(t)]$，则原微分方程化为

$$p^2Y(p)-4p+Y(p)=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}.$$

故

$$Y(p)=\frac{p-1}{(p^2-2p+5)(p^2+1)}+\frac{4p}{p^2+1}.$$

可知 $Y(p)$ 有奇点 $p_1=i, p_2=-i, p_3=1-2i, p_4=1+2i$，则

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[Y(p)e^{pt},p_k]=\frac{41}{10}\cos t-\frac{3}{10}\sin t+\left(\frac{1}{5}\sin 2t-\frac{1}{10}\cos 2t\right)e^t. \quad \square$$

八.

由于 $f(z)$ 在 $|z|\leq 1$ 内解析，故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\mathrm{d}\xi=\begin{cases} f(a)\ , \text{当}|a|<1 \\ \ \ 0 \quad\ , \text{当}|a|>1 \end{cases}$$

设 $\xi=\dfrac{1}{\omega}, |\omega|<1$，则 $|z|\geq 1$，对 $g(z)$ 有

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{ag(\xi)}{\xi-a}\mathrm{d}\xi=-\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=1}\frac{ag(\frac{1}{\omega})}{\frac{1}{\omega}-a}\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)\mathrm{d}\omega\right]=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=1}\frac{ag(\frac{1}{\omega})}{1-a\omega}\mathrm{d}\omega$$

当 $|a|<1$ 时，$\left|\dfrac{1}{a}\right|>1$，则上式 $=0$;

当 $|a|>1$ 时，上式 $=-\dfrac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\dfrac{z}{1-z\omega}\left(\omega-\dfrac{1}{z}\right)g(z)=g(z)$.

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-a}-\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi-a)}\mathrm{d}\xi=\begin{cases} f(a)\ , \text{当}|a|<1 \\ g(a)\ , \text{当}|a|>1 \end{cases} \quad \square$$