2008-2009

1.

(1) -2.

(2) $2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3}\pi i}$; $\frac{5}{6}\times 2^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}$

(3) $-4\pi+10\pi i$ ☆注意 $2\pi i$

(4) $\frac{24}{49}\pi i$

2. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x} = x+3y = \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} = -y+3x = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x+y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x-2y$

$u = x^2-y^2+xy+C$

由 $f(0)=0 \Rightarrow u = x^2-y^2+xy$

$v = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2xy$

$f(z) = x^2-y^2+xy+i(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2xy)$

$= (1-\frac{1}{2}i)z^2$

3. (1) $f(z) = \frac{1}{a-b}\cdot(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b})$

$= \frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}}+\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{b}}$

$= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=-1}^{-\infty} a^{-n-1}z^n+\sum_{n=0}^{+\infty} z^n b^{-n-1}\right)$

(2) $f(z) = \frac{1}{a-b}\sum_{n=-1}^{-\infty}(a^{-n-1}-b^{-n-1})z^n$

4. $z=3$ 2级极点

$z=-1$ 3级极点

$z=0$ 1级极点

5. $z^3 = \frac{3\pm i\sqrt{7}}{4}$

记 $z^3 = |A|e^{i\theta}$

$\tan\theta_1 = \frac{\sqrt{7}}{3}$ $\tan\theta_2 = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

由 $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{7}}{3} < \sqrt{3}$

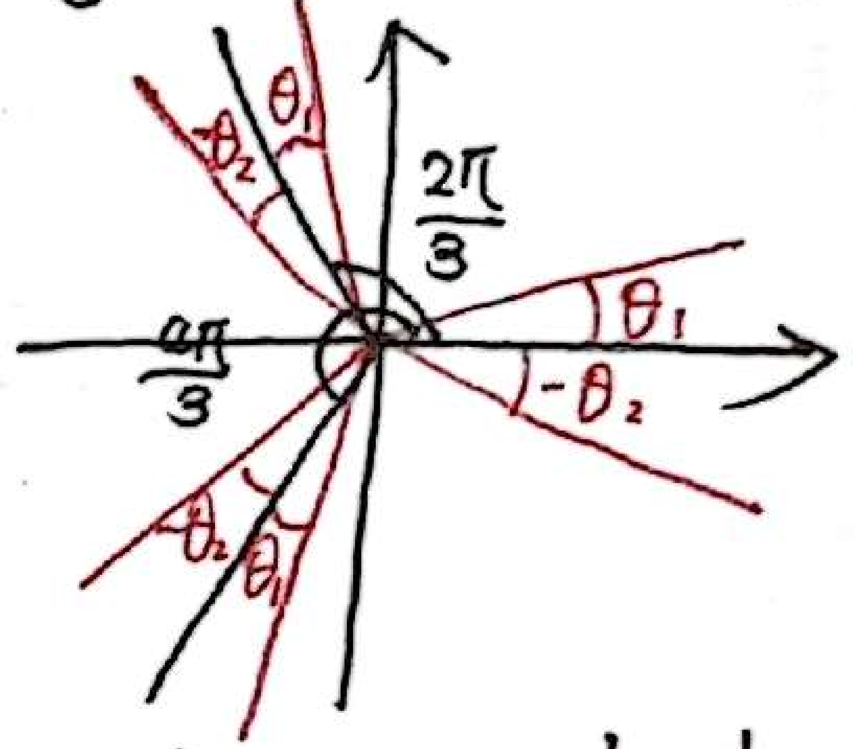
$\Rightarrow \theta_1 \in (30°, 60°)$

$\theta_2 \in (-60°, -30°)$

记 $z = |A|^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{3}}$

$\frac{\theta_1}{3} \in (10°, 20°)$

$\frac{\theta_2}{3} \in (-20°, -10°)$



可见在一、四象各一个、

二、三象限各两个.

6. (1) $z = re^{i\theta}$

$\Rightarrow \oint_{0<|z|=r\neq 1}\frac{|dz|}{z-1} = \int_0^{2\pi}\frac{r\,d\theta}{r\cos\theta-1+i\sin\theta\cdot r}$

令 $\xi = e^{i\theta}$

$= r\oint_{|\xi|=1}\frac{1}{r\xi-1}\cdot\frac{d\xi}{i\xi}$

$= -i\oint_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi(\xi-\frac{1}{r})}d\xi$

当 $r<1$ 时,

$= -i\,2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\xi(\xi-\frac{1}{r})}, 0\right)$

$= -2\pi r$

当 $r<1$ 时

$$= -i\cdot 2\pi i\ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(z-\frac{1}{r})}, 0\right)$$

$$- i\cdot 2\pi i\ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(z-\frac{1}{r})}, \frac{1}{r}\right)$$

$$= 0.$$

(2). $= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2azi}-e^{2bzi}}{z^2}dz$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}.\ \pi i\ \mathrm{Res}\left[\frac{e^{2azi}-e^{2bzi}}{z^2}, 0\right]$$

$$= -\pi(a-b)$$

7. 记 $L[y(t)] = F(p)$.

$$L[y'(t)] - L[e^t] = L[y(t) * e^t]$$

$$pF(p) - \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p-1}\cdot F(p)$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2-p-1} = \frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}$$

$$L^{-1}[F(p)] = e^{\frac{1}{2}t}\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+(\frac{\sqrt5}{2}i)^2}\right]$$

$$= \frac{2\sqrt5}{5}e^{\frac{1}{2}t}\cdot \sinh\frac{\sqrt5}{2}t$$

8. i 关于 $|z-2i|=2$ 的对称点为 $-2i$

2 关于 $|w-2|=1$ 的对称点为 ∞

故 $f(-2i)=\infty$

$$\Rightarrow\ w-2 = k\cdot\frac{z-i}{z+2i}$$

取 $z=0$ 并两边同时取模

$$1 = |k|\cdot\frac{1}{2}\quad |k|=2$$

$$w = 2+2\cdot e^{i\theta}\frac{z-i}{z+2i}$$

$$f'(z) = \frac{6i}{(z+2i)^2}e^{i\theta} + \frac{2i(z-i)}{z+2i}e^{i\theta}$$

$$f'(i) = \frac{2}{3}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$$

由 $\arg f'(i)=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$:

$$\Rightarrow w = 2+2i\frac{z-i}{z+2i}$$

9. 先证明 $g(z)=\frac{1}{Q(z)}$ 可以化为 $g(z)=\sum \sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}$ 形式:

记 $Q(z) = \ldots (z-a_k)^{n_k}$

$= Q_k(z)\cdot(z-\ldots)^{n_k}$

且 $Q_k \ldots = \sum_{t=0}^{n-n_k} B_{kt}\ldots a_k)^t$

(其中 $\ldots = \sum_{k=1}^{m} n_k$)

由于 $\ldots(z)$ 中已无因 $\ldots -a_k$,

故 $\ldots \neq 0$

取 $\ldots_k = \frac{1}{B_{k0}}$

则有 $\frac{P_2(z)}{\ldots(z)(z-a_k)^{n_k}} \ldots + \frac{A}{(z-\ldots}$

$= \ldots$ 其中:

$\ldots = \frac{-1}{B_{k0}}\sum_{t=0}^{n-n_k-1}\ldots -a_k$

$\ldots$

9. 假设 ∀小于 n 次多项式 $Q_w(z)$,

$P(z)/Q_w(z)$ 为不可约有理真分式,

$$f_w(z)=\frac{P(z)}{Q_w(z)}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}$$

$(w<n)$ 均存在，现证明 $f_{(n)}(z)$ 也可以分解:

记 $f_n(z)=\frac{P(z)}{Q_n(z)}$, $P(z)$ 小于 n 次,

$$Q_n(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)^{n_k},\ (\sum n_k=n).$$

对 $P(z)$ 展开, $P(z)=\sum_{t=0}^{n-1}C_t(z-a_k)^t$

记 $Q_n(z)=(z-a_k)^{n_k}\cdot Q_{nk}(z)$

那么
$$f_n(z)=\frac{\sum_{t=n_k}^{n-1}C_t\cdot(z-a_k)^{t-n_k}}{Q_{nk}(z)}+\sum_{t=1}^{n_k-1}\frac{C_t}{Q_{nk}(z)(z-a_k)^{n_k-t}}+\frac{C_0}{Q_{nk}(z)(z-a_k)^{n}}$$
，除最后一项外，分母次数均小于 n 故可分解.

下面证 $\frac{1}{Q_{nk}(z)(z-a_k)^n}$ 可分解:

记 $Q_{nk}=\sum_{t=0}^{n-n_k}B_{kt}(z-a_k)^t$, 由 Q_{nk} 无因子 $(z-a_k)$, 故 $B_{k0}\neq 0$:

如取 $P_k(z)=\frac{-1}{B_{k0}}\sum_{t=0}^{n-n_k-1}B_{k(t+1)}(z-a_k)^t$

$A_{kn_k}=\frac{1}{B_{k0}}$，就有:

$$\frac{P_k(z)}{Q_{nk}(z)(z-a_k)^{n_k-1}}+\frac{A_{kn_k}}{(z-a_k)^{n_k}}=\frac{1}{Q_{nk}(z)(z-a_k)^{n_k}}$$

等式左边分母均小于 n 次，可分解:

再易见 $n=1$ 时可分解，由递推，得证.

9. 证明：不妨考虑 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 中 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 最高次项系数为1的情况

∵ $f(z)$ 为不可约有理真分式　∴ $Q(z)$ 次数比 $P(z)$ 至少大1.

考虑 $Q(z)$ 某一零点 a_k，其阶数为 $n_k \geq 1$.

∴ $Q(z)=(z-a_k)^{n_k}\varphi(z)$　$\varphi(z)$ 应为一多项式，且 $\varphi(a_k)\neq 0$.

令 $A_{kn_k}=(z-a_k)^{n_k}f(z)\Big|_{z=a_k}=\frac{P(a_k)}{\varphi(a_k)}$.

$\Rightarrow P(a_k)-A_{kn_k}\varphi(a_k)=0$.

∴ a_k 为多项式 $P(z)-A_{kn_k}\varphi(z)$ 的零点.

∴ $P(z)-A_{kn_k}\varphi(z)=(z-a_k)\psi(z)$，$\psi(z)$ 也为一多项式.

$$∴ f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)}{(z-a_k)^{n_k}\varphi(z)}-\frac{A_{kn_k}}{(z-a_k)^{n_k}}+\frac{A_{kn_k}}{(z-a_k)^{n_k}}.$$

$$=\frac{P(z)-A_{kn_k}\varphi(z)}{(z-a_k)^{n_k}\varphi(z)}+\frac{A_{kn_k}}{(z-a_k)^{n_k}}.$$

$$=\frac{\psi(z)}{(z-a_k)^{n_k-1}\varphi(z)}+\frac{A_{kn_k}}{(z-a_k)^{n_k}}.$$

由于 $\psi(z)(z-a_k)=P(z)-A_{kn_k}\varphi(z)$ $\Rightarrow$ $\psi(z)$ 次数比 $P(z)$ 小1

$Q(z)=(z-a_k)^{n_k-1}\varphi(z)$ $\Rightarrow$ $(z-a_k)^{n_k}\varphi(z)$ 次数比 $Q(z)$ 小1.

∴ $\psi(z)$ 次数应小于 $(z-a_k)^{n_k}\varphi(z)$ 次数.

∴ 对 $\tilde{f}(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a_k)^{n_k-1}\varphi(z)}$ 继续如上操作.

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}$$