复变函数 A 知识点

姚鑫

2021/9/6

前言

0.1 关于课程

复变函数作为一门开设多年的课程，已有很多优秀的参考资料，老师自己编写的讲义和课本都值得一读。对自己有更高要求的同学，也可以参考群里吴天学长编写的习题课讲义或者数院教材。对于刷题，仍建议针对性的练习，因为很快同学们就会发现，这学期某些课程需要你们投入大量时间去理解、完成作业，而在一门偏应用的课程上花大量时间是不值得的. 需要强调的是，不要仅仅满足于老师布置的作业，最终考试无论是计算量，还是方法技巧上都会会比作业难一点。

就课程本身而言，复变函数是一门分析学科，与数学分析具有类似的结构体系，极限、积分、级数、方程等均能找到对应的概念。课程重心在于级数，奇点，留数定理，保形变换和 Laplace 展开上，分别对应于积分（级数，奇点，留数定理）、方程（Laplace 展开）。保形变换是复变较为特殊的一个课题，在力学和物理学中有所应用。

提前祝同学们学有所获，取得理想的成绩。

0.2 关于本文

本文将罗列课程相关的知识点，因为助教也师从波波，所以大体上会与课本或老师课上的思路差不多。值得注意的是，本文并非划考点，更不代表本门课程的所有重点都会包含于此 。考虑到知识点罗列宜精不宜多，有的地方仅给出大纲。后期也将适当补充习题，以供同学们练习。

第一章　复数和平面点集

1.1　复数

1.1.1　共轭

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z,\ z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}z$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,\ \overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- $z\bar{z} = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2 = |z|^2$

1.1.2　辐角

$$-\pi < \mathrm{arg}z \leqslant \pi$$
$$\mathrm{Arg}z = \mathrm{arg}z + 2n\pi\ ,\ n \in \mathbb{Z}$$

一般考虑 $z = x + iy$，则

$$\mathrm{arg}z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & z \in (+,+) + (+,-) \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & z \in (-,+) \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x}, & z \in (-,-) \end{cases}$$

1.1.3　欧拉 (Euler) 公式

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$$

1.1.4　不等关系

- $|x| = |\mathrm{Re}z| \leqslant |z|$
  $|y| = |\mathrm{Im}z| \leqslant |z|$
- $|z| \leqslant |\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|$
- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
  $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$

1.1.5　运算

- 加减（实虚分部）、乘除（欧拉表示）
- 开方
  一般考虑 $z = re^{i\varphi}$

$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{r})(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) \qquad k = 0, 1, 2 \cdots, n-1$$

1.2　复数列极限

- **定理 1**
  设 $z_0 = x_0 + iy_0, z_n = x_n + iy_n (n \in \mathbb{N}_+)$ 则

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = z_0$$

的充分必要条件为

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \text{ 及 } \lim_{n \to +\infty} y_n = y_0$$

- **定理 2**
  如果 $z_0 \neq 0$ 则

$$\lim_{x \to +\infty} z_n = z_0$$

的充分必要条件为

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n| = |z_0| \text{ 及 } \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Arg}z_n = \mathrm{Arg}z_0$$

1.3　平面点集

1.3.1　点集

- 内点、外点、边界点
- 开集、闭集；有界集、无界集

1.3.2　区域

- **定义**　称非空点集 D 为区域，D 满足
  1. D 为开集；
  2. 连通性：D 中任意两点可以用一条全在 D 中的折线连接起来.

  习惯记 $\bar{D} = \partial D + D$
- 单连通区域
  若区域 D 中任何简单闭曲线的内区域中的每一点都属于 D，则称之为单连通区域；否则称为多连通区域。

第二章　复变数函数

2.1　复变函数[1]

2.1.1　表示

- 实虚部分离:$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
- 以 z 为形式参数，包括 $\bar{z}$ 和 $|z|$

2.1.2　初等函数

- 幂函数

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln} z}$$

- 指数函数

$$f(z) = e^{z}$$

$$(e^{z})' = e^{z}$$

- 对数函数

$$w = \mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(2k\pi + \arg z) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$w = \ln z = \ln|z| + i\arg z$$

- 三角函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

  1. 周期性

[1] 本课程我们更多讨论单值函数

2. 零点（复域解与实域解同）
3. 导数
4. 三角公式：形式与实域三角公式同，特别的

$$\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

5. $\cos z$ 和 $\sin z$ 无界

- 双曲函数

$$\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\qquad \sinh z=\frac{e^z-e^{-}z}{2}$$

- 反三角函数

$$w=\mathrm{Arcsin}z,w=\mathrm{Arccos}z,\cdots$$

对于 $w=\mathrm{Arcsin}z$ 有 $z=\dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$, 则

$$w=\mathrm{Arcsin}z=-i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$$

2.2 函数极限和连续性

- **定义 1**（极限）

设 $w=f(z)$ 在区域 $0<|z-z_0|<\rho$ 有定义，如果存在复常数 w_0, 使得

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)-w_0|=0$$

则称 $z\to z_0$ 时，$f(z)$ 的极限为 w_0.

- **定义 2**（连续性）

若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$, 称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

$$\Leftrightarrow\qquad \lim_{x\to x_0,y\to y_o}u(x,y)=u(x_0.y_0),\lim_{x\to x_0,y\to y_o}v(x,y)=v(x_0,y_0)$$

2.3 解析

2.3.1 可微 ~ 解析

- **定义 3**（可微）

若 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 存在，称 $f(z)$ 在 z 处可微。

$$\Leftrightarrow \qquad f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\circ(|\Delta z|)$$

注：与数学分析一样，可微必连续，但连续不一定可微，只是在复变中这样的例子更为平凡。比如：$f(z)=\bar{z}$ 处处连续却处处不可微。

- **定义 4**(解析)
  如果 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内可微，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析。
  如果 $f(z)$ 在 D 内处处可微，则在 D 解析。
  从定义可知，一个函数的解析域必须是一个区域，即不包括边界点。而且解析是一个比可微要强得多的条件，在以后的学习中，我们更多会用解析而非可微来刻画一个复变函数。

2.3.2 C-R（柯西-黎曼）方程

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+iy$ 可微的充分必要条件为

1. 二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $z=x+iy$ 可微；
2. u,v 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

   这时有 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

特别注意，第一个条件是 u 和 v 实域可微，而多元函数可微不仅仅要求 u_x,u_y,v_x,v_y 在点 (x,y) 处存在。只有 u_x,u_y,v_x,v_y 在点 (x,y) 处连续才是此点可微的充分条件。

练习题

1 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$ $\qquad$ (**hint**: 考虑 $w=\dfrac{1+z}{1-z}$)

2 求 z 所构成的点集，z 满足

$$0<\arg(z+1+i)<\frac{\pi}{3}, 3\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant 5$$

3 尝试推导函数

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

将 z 平面上与坐标轴平行的直线映射成 w 平面上的什么曲线。
(**hint**: 注意 $x=0$ 和 $y=-1$ 处的特例。事实上，这正是我们以后会学到的保形变换中的一个基本变换。)

4 阅读课本第 45 页例 10

第三章　解析函数的积分表示

3.1　积分

因为复函数定义于复平面，所以解析函数积分其实是平面路径积分。一般而言，沿着不同的路径积分，$f(z)$ 的积分 $\int_c f(z)dz$ 不同。

3.1.1　基本性质

- $\int_c \lambda f(z)dz = \lambda \int_c f(z)dz$
- $\int_c [f(z) \pm g(z)]dz = \int_c f(z) \pm \int_c f(z)dz$
- $\int_c f(z) = -\int_{c^-} f(z)dz$　　这里 c^- 表示逆路径
- C 由 C_1 和 C_2 组成，则
$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$
- 长大不等式
$$|\int_C f(z)dz| \leqslant \int_C |f(z)|ds \leqslant Ml$$
其中 M 和 l 分别具有意义：曲线 C 上有 $|f(z)| \leqslant M$, 曲线 C 的长为 l。

3.1.2　计算

1. 化为第二型曲线积分
$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + \int_C (vdx + udy)$$

2. 换元

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

很多时候我们会考虑圆环路（弧）积分，所以常见的换元便是极坐标表示，即 $z = Re^{i\theta}, dz = iRe^{i\theta}d\theta$.

3.1.3　一个“重要”积分

设 a 是 C 内任意一点，则

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

事实上，这个公式在我们学习了柯西积分公式或留数定理后是显然的。

3.2　柯西积分定理

- **定理 1**

  设 D 是 C 所围成的的单连通区域，$f(z)$ 在 $C + D$ 上解析，则

  $$\int_C f(z) = 0$$

  $\Rightarrow f(z)$ 在 D 内解析，C 是 D 内任意闭曲线，则 $\int_C f(z) = 0$.

  $\Rightarrow \int_C f(z)$ 不依赖于具体路径 C, 只与起始点有关。

- **定理 2**

  设 $f(z)$ 在复闭路 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^- +$ 及其所围成的区域内解析，则

  $$\int_C f(z) = 0$$

3.3　原函数

- **定义**

  如果区域 D 内有 $F'(z) = f(z)$，则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。

- **定理**

  对于 $F'(z) = f(z)$，若 $f(z)$ 解析，则 $F(z)$ 也解析。

- 牛顿莱布尼茨定理

$$\int_{z_0}^{z} f(z) = F(z) - F(z_0)$$

3.4　柯西积分公式

- 设函数 $f(z)$ 在（复）闭路 C 及其所围的区域 D 内解析，a 为 D 内的任意一点，则

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$$

换言之，对 D 内任意一点 z，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

- 进一步的推广：设函数 $f(z)$ 在（复）闭路 C 及其所围的区域 D 内解析，则对 D 内任意一点 z，有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

柯西积分公式的应用非常灵活，可以结合裂项、变项等方式使用，往往也会结合柯西积分定理。

3.5　解析函数的性质

1 平均值公式 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a| \leqslant R$ 解析,C 为圆周，则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi R}\int_C f(\xi)ds$$

2 最大模原理 设 $f(z)$ 在有界域 D 内解析，在 C+D 上连续（$C = \partial D$）且 $f(z)$ 不恒为常数，则 $|f(z)|$ 只能在边界 C 上取到最大值。

特别的，如果 $f(z)$ 在 D 内没有零点，则最小值也只能在边界取到。

注: 命题的证明用到滚圆法，这是一个较为基本的思路，希望同学们能掌握。

3 整函数的定义 在整个复平面上解析的复变函数称为整函数。书上使用有限复平面是为了强调舍去无穷远点，注意不要混淆。

刘维尔 (Liouville) 定理 若整函数 $f(z)$ 在全平面有界，则 $f(z) = const$

$\Rightarrow$ 代数学基本定理

4 莫雷拉 (Morera) 定理 如果 $f(z)$ 在区域 D 中连续，且对 D 中任意闭曲线 C 均满足

$$\int_C f(z)dz = 0$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析。

$\Rightarrow$　$f(z)$ 在单连通区域 D 内解析的充分必要条件是 $f(z)$ 在 D 内连续且对 D 内任意闭路 C，有

$$\int_C f(z)dz = 0$$

第四章　调和函数

在上一章的最后，我们由函数解析的性质，引入了一些概念与定理，其中最有意思的莫过于最大模原理，细心的同学或许会记得数分 B2 里已经介绍过类似的定理，不过那是我们更习惯与另一个概念，那就是调和函数。

如我们所看到的那样，解析函数具有一系列优良的性质，某种意义上，这正是因为解析函数本身提供了两个区域内调和函数，分别为 $f(z)$ 的实部和虚部，称它们为共轭调和函数。

定理 设 $u(x,y)$ 是单连通区域 D 内的调和函数，则 u 的共轭调和函数为

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{x,y}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C_2$$

这里使用 C_2 而不是 C 是为了区别于区域边界符号。u,v 构成的函数 $f(z)=u+iv$ 在 D 内解析。

注：任意给定 $u(v)$ 并不一定能通过解 C-R 方程得到另一个，因为存在 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\neq\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ 的可能。

狄利克雷 (Dirichlet) 问题 在物理学中，尤其是热力学分析中，我们所讨论的函数往往具有相当好的性质，调和便是其中之一。狄氏问题的核心在于，当物理学家确定了系统的边界条件，便可以算得整个体系的状态。并且这个状态是唯一稳定的。

练习题与思考

1 尝试用两种思路计算积分

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{(2z+1)(z-2)}dz$$

(**hint**:1 裂项；2 调整分子分母)

2 计算积分

(1)

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2}$$

(2)

$$\int_{C} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$$

其中 C 为圆周 $|z|=r, r\neq 1,2.$

(**hint**: 柯西积分定理。学完留数后会有一个更为清晰的图像)

3 证明：设 $f(z_1)$ 与 $f(z_2)$ 分别是 $|z|\leqslant 1$ 与 $|z|\geqslant 1$ 上的解析函数，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}[\frac{f_1(\xi)}{\xi-z}-\frac{zf_2(\xi)}{\xi(\xi-z)}]d\xi=\begin{cases} f_1(z), & |z|<1 \\ f_2(z), & |z|>1 \end{cases}$$

(**hint**: 令 $\xi=\frac{1}{w}$)

4 思考 在调和函数一章中，有时需要将实虚部表示的复函数，表示为 z 为参数的形式。一个思路是令 $x=z, y=0$, 便可快速化得。思考原因，并尝试给出另一思路。

5 思考 解析函数的原函数解析，各阶导函数也解析。

第五章　解析函数的级数展开

5.1　复级数

- 柯西收敛准则

  级数收敛 $\iff \forall\varepsilon, \exists N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, 有 $|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}| < \varepsilon$

  特别的，级数收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \qquad (\not\Leftarrow)$

- 绝对收敛

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{和} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{绝对收敛.}$$

- 复变数函数项级数可能一致收敛，一致收敛的判别法：

  1. $\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$, 当$n > N$时, $\forall z \in E$ 有

  $$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

  2. **Weierstrass 判别法**: 如果对集合 E 上所有点都有

  $$|f_k(z)| \leqslant M_k$$

  而正数项级数 M_k 收敛，则 $\sum f_k(z)$ 在 E 上绝对一致收敛。

- 逐项积分/求导

  1. 如果 $f_k(z), k = 1, 2\cdots$ 都在域 D 内连续，且级数 $\sum f_k(z)$ 在 D 内一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 D 内连续。
  2. 如果 $f_k(z), k = 1, 2\cdots$ 都在曲线段 C 上连续，且级数 $\sum f_k(z)$ 在 C 上一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 可沿 C 逐项积分，即

  $$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_C f_k(z)dz$$

$$\Rightarrow \qquad 记 g_k(z)=\int_C f_k(z)dz, 则 \sum g_k(z) 一致收敛于 \int_C f_k(z)dz$$

3. Weiertstrass 定理：
   如果 $f_k(z), k=1,2\cdots$ 都在域 D 内解析，且级数 $\sum f_k(z)$ 在 D 内一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 D 内解析，且可以逐项求导致任意阶，即
   $$f^{(n)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$$

5.2　幂级数

- 收敛半径：R
  1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=r$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$，则 $R=1/r$.
  2. 对于 $f(z)=\sum a_n(z-a)^n$,R 是 a 点于与 $f(z)$ 奇点距离的下确界（可以为 ∞）

5.3　罗朗（Laurent）级数

- 罗朗级数

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

- 收敛区域：$r<|z-a|<R$
  - R：
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n 的收敛圆 |z-a|<R$$
  - r：
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}=\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}\xi^n 的收敛圆 |\xi|<\frac{1}{r}$$

- 罗朗展开：
  设 $f(z)$ 在圆环域 D:$r < |z-a| < R$ 中解析，则 $f(z)$ 一定能在这个圆环中展开成罗朗级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

  其中 (C是包含$|z| = r$且包含于环域的闭围道)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

  特别地，称

$$a_{-1} = \int_C f(\xi)d\xi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

  为留数。

5.4　孤立奇点的分类

- 若 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则在 a 附近，$f(z)$ 可以表示为:

$$f(Z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

  加号两边分别为主要部分和解析部分。

- **可去奇点** 不含主要部分；判别方法：
  1. $f(z)$ 在 a 附近有界，即 $0 < |z-a| < \rho$ 时 $f(z)$ 有界
  2. $\lim\limits_{z\to a} f(z) = a_0$ 有限

  极点 含有限项主要部分；判别方法：
  1. $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$
  2. $f(z)$ 在某环域内可以表示为 $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, 其中 $\varphi(a)$ 在 a 点解析且 $\varphi(a) \neq 0$. 更进一步地，a 为 $f(z)$ 的 m 级极点。
  3. 考虑 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 的零点，a 为 $g(z)$ 的几级零点，则为 $f(z)$ 的几级极点。

本性奇点 含无限项主要部分；判断方法：

$$\lim_{z\to a} f(z)\text{不存在有限或无限的极限}$$

- 无穷远奇点
  如果 $f(z)$ 在 ∞ 点的某邻域，即 $R<|z|<+\infty$ 内解析，称 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。无穷远奇点同样分为可去奇点、极点和本性奇点。判别方法与前面类似。

第六章　留数

留数（Residu），又译作残数，是复变函数中的一个重要概念。本章也可视为对前半学期的统一及综合应用。

6.1　留数定理

- **定义** (留数)
  设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，C 是 a 的充分小的邻域内一条包含 a 于内部的闭路，称
  $$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$
  为 $f(z)$ 在 a 点的留数，记作 $\text{Res}[f(z), a]$.
  $$\Rightarrow \qquad \int_C f(z)dz = 2\pi i\text{Res}[f(z), a]$$

- 留数定理　设 $f(z)$ 在围道 C 上解析，在 C 内除了有限个奇点都解析，则
  $$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[f(z), a_k]$$
  注: a_k 均是围道 C 内的奇点。

- 计算方法

  – 1. 可去奇点：$a_{-1} = 0$

    2. 本性奇点：罗朗展开

    3. 极点：罗朗展开；对于 m 级极点
    $$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$$

- 设 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 a 点解析，且 $P(a)\neq 0, Q(a)=0, Q'(a)\neq 0$. 则

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{P(a)}{Q'(a)}$$

6.2 积分计算

6.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 型

令 $z=e^{i\theta}$, 则有代换关系：

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}\qquad \cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\qquad \sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

例：泊松积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}$$

6.2.2 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 型

积分形式中，$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x)$ 在实轴上无零点,$Q(x)$ 比 $P(x)$ 至少高两次。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),a_k]$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $R(z)$ 在上半平面的所有奇点。

附:

$$\text{称}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx\text{为}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\text{的柯西积分主值，记作}$$

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$$

在这个积分类型中，我们往往会考虑主值积分。

6.2.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos mx\mathrm{d}x$ 及 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin mx\mathrm{d}x$ $\quad m>0$

积分形式中，$R(z)$ 为有理式，分母比分子至少高一次[1]，$R(x)$ 在实轴上至多有一级极点。

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{imz}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{imz},a_k]+\pi i\sum_{k=1}^{l}\mathrm{Res}[R(z)e^{imz},x_k]$$

其中 a_k 为上半平面奇点，x_k 为实轴上的一级极点。

6.2.4 其它

- 弗雷涅（Fresnel）积分

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

- 高斯积分：

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\frac{b^2}{4a})$$

- 狄利克雷积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi$$

6.3 辐角原理

- 辐角原理：设 $f(z)$ 在围道 C 上解析，且没有零点，在 C 内除了有限个极点外都解析，则

$$\Delta_C\arg f(z) = 2\pi(N-P)$$

  其中 N 及 P 分别表示 $f(z)$ 在 C 内部的零点（null point）和极点（polar point）的个数。
  注：k 级算 k 个。

- 儒歇（Rouché）定理
  设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在闭路 C 及其内部解析，且在 C 上，$|f(z)|>|g(z)|$，则 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)$ 在 C 内部有相同的零点个数。
  $\Longrightarrow$ 代数学基本定理

[1]这点很重要，考虑到这一点，并不能把三角函数放在分子上。

- 设 $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 在虚轴上无零点。如果当点 z 自下而上沿虚轴从 $-\infty$ 点走向 $+\infty$ 点的过程中 $P(z)$ 绕原点转了 k 圈，即

  $$\underset{y(-\infty\to+\infty)}{\Delta arg} P(iy)=2k\pi$$

  则 $P(z)$ 在左半平面共有 $\frac{n}{2}+k$ 个零点。

第七章　解析开拓

- 定义（解析开拓）
  设 $f(z)$ 在集合 E 上有定义，若区域 $D \supset E$, 并在 D 上有解析函数 $F(z)$ 使得在 E 上 $F(z) = f(z)$, 则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的解析开拓。

  例：e^z 是 e^x 的解析开拓。

- 解析开拓的方法
  1. 幂级数开拓法
  2. 含参变量积分

7.1　唯一性定理

- 如果区域 D 内的两个解析函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在一串互不相等的点列：

  $$a_1, \cdots, a_k, \cdots$$

  上值相等，且此点列以 D 内某一点 a 为极限，则两个函数在 D 内相等，即 $f(z) \equiv g(z)$ 于 D。

  $\Longrightarrow$　　$f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内解析，且在 D 内的某一段曲线上它们值相等，则 $f(z) \equiv g(z)$ 于 D。

  $\Longrightarrow$　　设在实轴上 $f(z) \equiv g(z)$，$f(z)$ 和 $g(z)$ 全平面解析，且在实轴上与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 一致，则对一切 z，有 $f(z) \equiv g(z)$。

由唯一性定理，解析开拓唯一。

7.2　Γ 函数

- $$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

  对其进行定义开拓：

  $$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1} \mathrm{d}t = \infty$$

  $$F(x+1) = xF(x) \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})$$

  $$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

  且 $\Gamma(z)$ 在除了 $z = 0, -1, \cdots$（极点）外正常。

第八章　保形变换及应用

8.1　导数的几何意义

- 设 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，而 $z_0 \in D$，且 $f'(z_0) \neq 0$. 在 D 内任做一条过 z_0 的有向简单光滑曲线：

  $$z(t)=x(t)+iy(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b, z(t_0)=z_0$$

  曲线 C 在 z_0 处的切向量是

  $$z'(t_0)=x'(t_0)+iy'(t_0)$$

  相应切向为 $\arg z'(t_0)$. 经过 $f(z)$ 的映射后，C 变为过 $w_0=f(z_0)$ 的 $C': w(t)=f(z(t))$,w 处 C' 的切线与 u 轴夹角

  $$\arg w'(t)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$$

  其中 $\arg f'(z_0)$ 称为变换在 z_0 的转动角。

- **保角性**：在变换 $w=f(z)$ 下，通过 z_0 的任意两条曲线的夹角保持不变;

  – 不改变角的大小

  – 不改变角的方向

- **伸张系数**:$|\Delta z|$ 和 $|\Delta w|$ 分别是向量 Δz 和 Δw 的长度，则称

  $$|f'(z_0)|=\lim_{z \to z_0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

  为变换的伸张系数（线伸张系数）。

8.2 保形变换

- 如果 $f(z)$ 是区域 D 内一一的解析函数（单叶），则在 D 内 $f'(z) \neq 0$。区域 D 的单叶函数所确定的变换，称为 D 内的保形变换。
- 基本问题：一个区域 D 和单位圆内 $D_1 : |w| < 1$ 能否建立保形变换；
  1. 多联通区域不能
  2. 开复平面或闭复平面不能
  3. 边界至少包含两个点的单连通区域可以实现
- **黎曼定理**：一个边界上至少含有两个点的单连通区域 D 可以和单位圆内 D_1 建立保形变换，且不唯一。
  如使 D 内 z_0 变为 w_0，且指定此点的转动角，即

$$f(z_0) = w_0 \qquad \arg f'(z_0) = \alpha_0$$

  式中 α_0 是已知实常数，则这个变换是唯一的。

8.3 分式线性变换

- **分式线性变换**

$$M: \qquad w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc) \neq 0$$

$$M^{-1}: \qquad z = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

  当 $c = 0$ 时，称为整线性变换。

  规定：$w(\infty) = a/c \qquad w(-d/c) = \infty$

  特别的：
  1. 平移变换 T :　　$w = z + b$
  2. 旋转变换 R :　　$w = e^{i\theta}z, \theta \in \mathbb{R}$
  3. 相似变换 S :　　$w = rz, r > 0$
  4. 倒数变换 I :　　$w = \frac{1}{z}$
     可以把单位圆内部变为外部。

- 性质：
  1. 分式线性变换把圆或直线变为圆或直线。
  2. 保持对称性（$|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2$）
  3. – 如指定 $w(z_1)=w_1,w(z_2)=w_2,w(z_3)=w_3$ 则唯一确定
     $$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$
     – 如果 $w_2=\infty,z_1=\infty$，上式变为
     $$\frac{w-w_1}{w_3-w_1}=\frac{z_3-z_2}{z-z_2}\Rightarrow w=w_1+(w_3-w_1)\frac{z_3-z_2}{z-z_2}$$
     – 如果 $w(z_1)=w_1,w(z_2)=w_2$, 则
     $$\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$$
     特别：若 $w(z_1)=0,w(z_2)=\infty$, 则有 $w=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$

- 典型例子
  – 上半平面 $\mathrm{Im}z>0\to$ 单位圆 $|w|<1$, 并有 $w(z_0)=0$，则
  $$w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$$
  – 单位圆 $|w|<1\to$ 单位圆 $|w|<1$, 并有 $w(z_0)=0$，则
  $$w=e^{i\theta}\frac{R(z-z_0)}{R^2-z\bar{z}_0}$$

8.4　初等函数变换

- $w=z^n$　　$w=\sqrt[n]{z}$
  $w=z^n$ 把 $\alpha<\arg z<\beta$ 变为 $n\alpha<\arg w<n\beta$
  $w=\sqrt[n]{z}$ 把 $\alpha<\arg z<\beta$ 变为 $\frac{1}{n}\alpha<\arg w<\frac{1}{n}\beta$

- $w=e^z$

$$a<\mathrm{Im}z<b,b-a\leqslant 2\pi\longrightarrow a<\arg w<b$$

特别的：

$$0 < \mathrm{Im}z < \pi \longrightarrow \text{上半平面}$$

$w = \mathrm{Ln}z = \mathrm{ln}z + 2\pi ni + i\theta$

$$a < \mathrm{arg}z < b \longrightarrow a + 2n\pi < \mathrm{Im}w < b + 2n\pi$$

一般取 $n = 0$。