Tarea 6 de investigación

Tama

investigar teoremas de Muestreo, Nyquist y Fourier

Estudiante

Delinson Vicente

Asignatura

Microcontroladores

Carrera

Telecomunicaciones

Profesor

Carlos Pichardo

Investigación sobre teorema de muestreo

El **teorema de muestreo**, también conocido como **teorema de muestreo de Nyquist-Shannon**, es un principio fundamental de la teoría de señales y procesamiento digital que permite convertir una señal analógica en una señal digital sin perder información **(bajo ciertas condiciones)**.

¿Qué es el Teorema de Muestreo?

El **teorema de muestreo** establece que:

Una señal analógica de banda limitada puede ser representada completamente por sus muestras discretas si es muestreada a una tasa mayor o igual al doble de su máxima frecuencia.

Este doble de la máxima frecuencia se conoce como la **frecuencia de Nyquist**.

¿Cómo funciona?

Supón que tienes una señal analógica continua con una **frecuencia máxima fmaxf_{max}fmax** (es decir, no contiene componentes de frecuencia mayores).

El teorema dice que para reconstruir perfectamente esa señal después de muestrearla, debes tomar muestras a una **frecuencia de muestreo fsf_sfs** tal que:

$$f_s \geq 2 \times f_{max}$$

Donde:

- f_s: Frecuencia de muestreo (en Hz)
- f_{max}: Frecuencia máxima presente en la señal original

Si no se cumple esta condición, ocurre un **fenómeno llamado aliasing**, donde frecuencias altas se distorsionan y aparecen como frecuencias más bajas en la señal muestreada, haciendo imposible reconstruir la señal original.

Ejemplo simple

- Una señal de audio con frecuencias de hasta **20 kHz** (como el oído humano).
- Según el teorema, se necesita una **frecuencia de muestreo mínima de 40 kHz**.
- Por eso, los CD de música usan una frecuencia estándar de **44.1 kHz**.

¿Quién lo formuló y cuándo?

- El teorema fue desarrollado de forma independiente por **Harry Nyquist** (1928) y **Claude Shannon** (1949).

- También fue anticipado por **E.T. Whittaker** (1915), **Vladimir Kotelnikov** (1933) y otros, pero se popularizó en el contexto digital gracias a Shannon.
- Por eso, a veces se le llama **Teorema de Nyquist-Shannon** o **Teorema de Whittaker-Shannon-Kotelnikov**.

Aplicaciones del Teorema de Muestreo

- **Procesamiento de audio** (CDs, MP3, streaming).
- **Video digital** (cámaras, compresión de video).
- **Comunicaciones digitales** (radio, TV, Wi-Fi).
- **Instrumentación** (osciloscopios digitales, sensores).
- **Procesamiento de señales biomédicas** (ECG, EEG).
- **Sistemas de radar y sonar**.
- **Sistemas embebidos y microcontroladores**, al usar conversores **ADC (analógico a digital)**.

Investigación sobre el teorema de Nyquist

¿Qué es el Teorema de Nyquist?

El **teorema de Nyquist** establece una condición fundamental para el **muestreo de señales analógicas** con el fin de digitalizarlas correctamente. Este teorema dice que:

Para evitar la distorsión (aliasing) al muestrear una señal analógica, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima presente en la señal.

Esta frecuencia mínima de muestreo se conoce como la **frecuencia de Nyquist**.

¿Cómo funciona?

Imagina una señal analógica con componentes de frecuencia hasta un máximo de fmaxf_{max}fmax. Para digitalizarla correctamente:

$$f_s \geq 2 \times f_{max}$$

Donde:

- f_s : Frecuencia de muestreo.
- f_{max}: Frecuencia máxima de la señal original.

Si se cumple esta condición, es posible **reconstruir exactamente** la señal original a partir de las muestras.

Si **no se cumple**, ocurre **aliasing**: las frecuencias altas se "confunden" con frecuencias más bajas en el dominio digital, distorsionando la señal.

¿Quién lo formuló y cuándo?

- El teorema se basa en el trabajo de **Harry Nyquist**, un ingeniero de los Laboratorios Bell, quien en **1928** formuló principios relacionados con la **transmisión de señales** por canales de ancho de banda limitado.
- Más tarde, **Claude Shannon** en 1949 formalizó el teorema completo en el contexto de la teoría de la información.
- Por ello, el teorema también se conoce como el **Teorema de Nyquist-Shannon**.

Representación gráfica (descripción)

Un gráfico típico muestra:

- En el eje x: la frecuencia.
- La señal original contenida hasta f_{max}
- A partir del muestreo, aparecen réplicas espectrales.
- Si $f_s < 2 \times f_{max}$, estas réplicas se superponen (aliasing).
- Si $f_s \geq 2 \times f_{max}$, no hay superposición y se puede reconstruir la señal original con un filtro paso bajo.

Ejemplo práctico

- Una señal de voz humana (hasta 4 kHz).
- La frecuencia mínima para muestrearla es de 8 kHz.
- Por eso, las llamadas telefónicas tradicionales usan 8 kHz como frecuencia de muestreo.

Aplicaciones del Teorema de Nyquist

- **Audio digital** (CDs, streaming, MP3).
- **Video digital** (muestreo de imagen, cámaras).
- **Comunicaciones** (Wi-Fi, radio, 5G).
- **Instrumentación digital** (osciloscopios, sensores).
- **Medicina** (ECG, EEG, IRM).
- **Robótica y sistemas embebidos** (ADC en microcontroladores).
- **Sistemas de radar y navegación**.

Diferencia con el Teorema de Muestreo

- El **teorema de Nyquist** establece la **frecuencia mínima de muestreo**.
- El **teorema de muestreo** (formulado por Shannon) formaliza el proceso completo de **muestreo y reconstrucción**.

- Ambos están íntimamente ligados, y muchas veces se usan de forma intercambiable como "teorema de Nyquist-Shannon".

Investigación Transformada de Fourier

¿Qué es la Transformada de Fourier?

La **Transformada de Fourier (TF)** es una herramienta matemática que permite **convertir una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia**. Esencialmente, descompone una señal compleja en una suma de **ondas senoidales** (frecuencias puras), permitiendo analizar su **contenido espectral**.

Definición formal (para señales continuas):

$X(f)= \int_{\infty}^{-\infty} x(t)\, e^{-2j\pi ft} dt$

Donde:

- x(t): señal en el tiempo
- X(f): transformada de Fourier (espectro de frecuencias)
- f: frecuencia
- j: unidad imaginaria

¿Cómo funciona?

- Una señal, por ejemplo de audio, puede parecer complicada en el tiempo.
- La Transformada de Fourier **identifica qué frecuencias** (y con qué amplitudes y fases) están presentes en esa señal.
- Esto se hace **integrando** la señal multiplicada por funciones senoidales complejas.

¿Por qué funciona?

- Toda señal periódica (y muchas no periódicas) puede representarse como suma infinita de senoidales (series de Fourier).
- La TF extiende esta idea al análisis de señales no necesariamente periódicas.

¿Quién la formuló y cuándo?

- Fue desarrollada por el **matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier**, quien presentó sus ideas en **1807** y las publicó formalmente en **1822** en su obra *"La Théorie analytique de la chaleur"* (*La teoría analítica del calor*).
- Aunque su trabajo se centraba en la conducción de calor, sus métodos se extendieron rápidamente al análisis de señales, vibraciones, electromagnetismo, entre otros.

Aplicaciones de la Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es una de las herramientas más utilizadas en ciencia e ingeniería. Algunas aplicaciones:

1. Procesamiento de señales:

- Espectros de audio (identificar frecuencias musicales o ruido).
- Filtrado digital (paso bajo, paso alto).
- Codificación de voz y compresión.

2. Telecomunicaciones:

- Análisis de espectros de radiofrecuencia.
- Modulación/demodulación de señales (AM, FM, PSK...).
- OFDM en 4G/5G (usa FFTs).

3. Procesamiento de imágenes:

- Compresión (JPEG usa transformadas tipo Fourier).
- Detección de bordes y patrones.
- Filtros en el dominio de la frecuencia.

4. Medicina:

- Análisis de EEG, ECG (actividad cerebral y cardíaca).
- Resonancia magnética (MRI) usa Fourier para reconstruir imágenes.

5. Ingeniería:

- Análisis estructural por frecuencias naturales.
- Diagnóstico de maquinaria (vibraciones, espectros).

6. Física:

- Estudio de ondas y sistemas dinámicos.
- Óptica (difracción y propagación de ondas de luz).

Tipo	Descripción
Transformada continua	Señales analógicas infinitas en tiempo y frecuencia.
Transformada discreta (DFT)	Para señales digitales con duración finita.
Transformada rápida (FFT)	Algoritmo eficiente para calcular la DFT (muy usado).
Transformada inversa	Permite reconstruir la señal original desde la frecuencia.

Ejemplo simple:

Si tienes esta señal:

$x(t)= \sin(2\pi 10t) + \sin(2\pi 30t)$

Su transformada de Fourier mostrará **dos picos de frecuencia** en 10 Hz y 30 Hz, lo que indica que esas dos senoidales componen la señal.