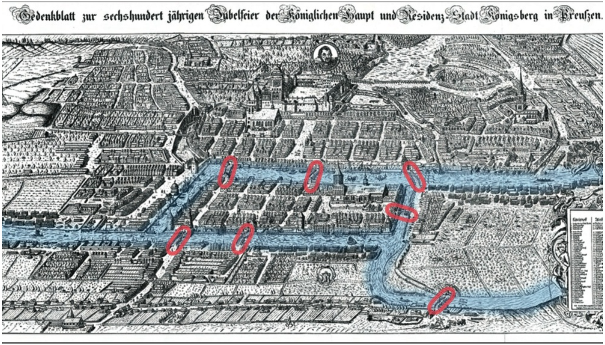
Aula 6: Grafos

Professor(a): Virgínia Fernandes Mota
http://www.dcc.ufmg.br/∼virginiaferm

ALGORITMOS E ESTRUTURAS DE DADOS - SETOR DE INFORMÁTICA

Grafos

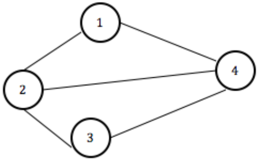
- As pontes de Konigsberg: Enigma do século XVIII (Leonard Euler (1707-1783)



Será que existe um passeio, com partida e chegada a um mesmo local, que atravesse todas as pontes, passando apenas uma vez por cada uma delas?

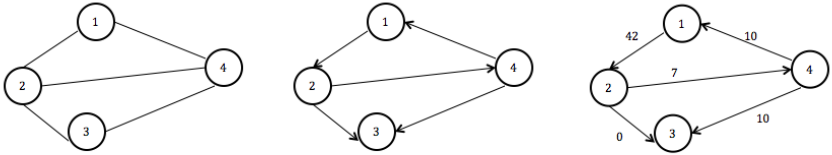
Grafos

- Chama-se grafo ao par $G = (V, A)$ em que V (conjunto de vértices ou nós) é um conjunto finito e A (conjunto de arestas) é um subconjunto de VxV.
- Exemplo: $V = \{1, 2, 3, 4\}$
  $A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

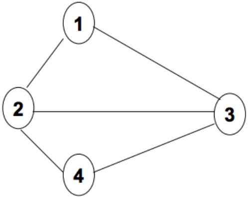


Grafos

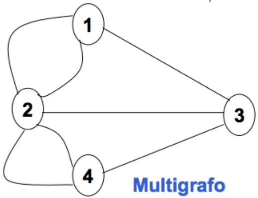
- Um grafo pode ser **orientado** ou **não-orientado**.
- Um grafo pode ter pesos associados às suas arestas.



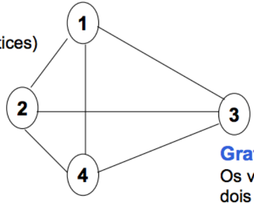
- Uma **aresta** diz-se **incidente** no vértice v se v é um dos seus extremos.
- Os **vértices** v e w dizem-se **adjacentes** se existe uma aresta incidente em ambos.
- O número de arestas incidentes em v diz-se o **grau** de v.



Grafo (simples)
não existem arestas paralelas (mais do que 1 aresta entre um par de vértices) nem lacetes (arestas com ambos os extremos no mesmo vértice)



Multigrafo
Com lacetes e/ou arestas paralelas

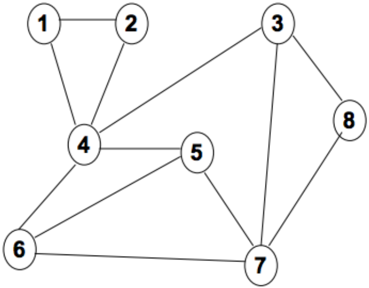


Grafo completo
Os vértices são adjacentes dois a dois

- **Caminho** entre os vértices v_1 e v_n é uma sequência de vértices $(v_1, v_2, , v_3, ..., v_{n-1}, v_n)$ tal que (v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n) são arestas do grafo.
- Um **caminho** é **simples** se não tem arestas repetidas.
- Um **caminho** é **elementar** se não tem vértices repetidos.
- **Circuito** é um caminho simples com uma aresta incidente nos vértices extremos do caminho $\{v_1 \bar{} v_2, ..., v_{n-1} \bar{} v1\}$.
- **Ciclo** é um caminho elementar com uma aresta incidente nos vértices extremos do caminho $\{v_1 \bar{} v_2, ..., v_{n-1} \bar{} v1\}$.
- Comprimento de um caminho (ciclo) é o número de arestas que o constitui.

Exemplo:

Considere o grafo.



Caminho simples de 1 para 8

1 — 2 — 4 — 6 — 5 — 4 — 3 — 8

Caminho elementar de 1 para 8

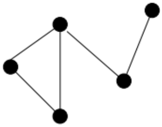
1 — 2 — 4 —5 — 7— 3 — 8

Ciclo que cubra vértices 3, 4, 5, 7, 8

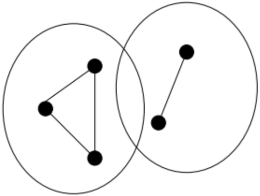
4 — 3 — 8 — 7 — 6 — 4

Grafos

- Um grafo $G = (V, A)$ é **conexo** se e só se existe um caminho entre quaisquer dois dos seus vértices.



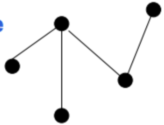
conexo



não conexo

2 componentes conexas

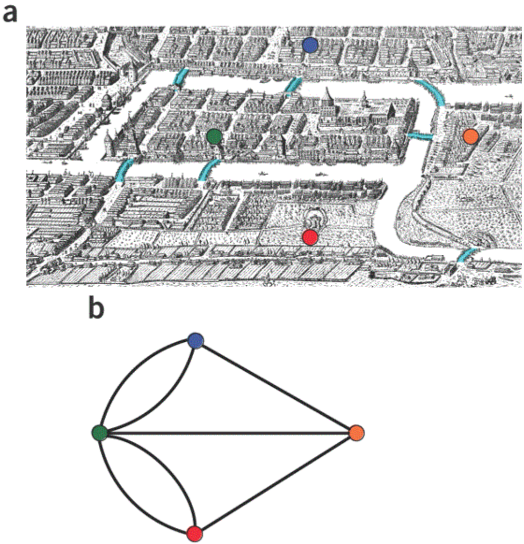
Um grafo conexo sem ciclos diz-se uma árvore

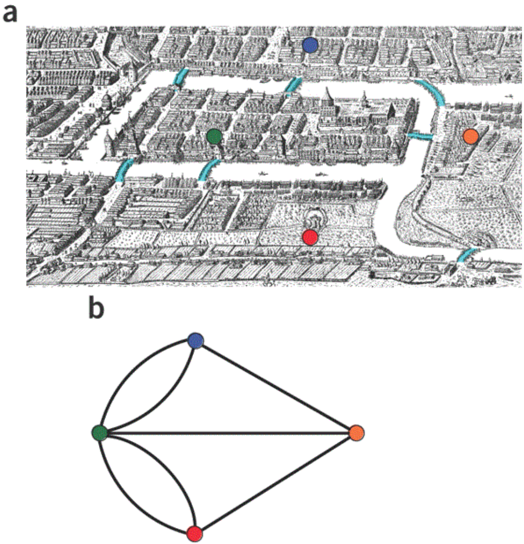


- **Caminho de Euler**: caminho simples que contém todas as arestas do grafo (logo também contém todos os vértices)
- **Circuito de Euler**: circuito que contém todas as arestas do grafo.
- **Grafo Euleriano** se contém um **circuito Euleriano**.
- Um grafo conexo admite um circuito de Euler se e somente se todos os seus vértices têm grau par.
- Um grafo conexo admite um caminho de Euler se e somente se tem exatamente dois vértices de grau impar.

Voltando lá em Konigsberg, o problema tem solução?

Grafos - Caminhos e Circuitos Eulerianos





Não tem solução :(

- 1859 Sir William Hamilton - Problema proposto: Volta ao mundo. Dodecaedro regular com 20 vértices. Cada vértice tem o nome de uma cidade. Determinar um ciclo que passe em cada cidade uma única vez.

- **Caminho Hamiltoniano**: caminho elementar que contém todas os vértices do grafo.
- **Ciclo Hamiltoniano**: ciclo que contém todos os vértices do grafo.
- **Grafo Hamiltoniano** se contiver um **ciclo Hamiltoniano**.
- Existem algoritmos polinomiais para a determinação de circuitos Eulerianos.
- Não são conhecidos algoritmos polinomiais para a determinação de ciclos Hamiltonianos.

Problema do Caixeiro Viajante?

Grafos - Representação em C

- Existem três estruturas de dados para representar grafos:
  - Matriz de adjacências
  - Lista de adjacências
  - Matriz de Incidência

- Uma matriz de adjacências para um grafo **não-orientado** é uma matriz tal que:
  $M(i,j) = 1$ se a aresta (i,j) existe
  $M(i,j) = 0$ caso contrário
  Onde i e j são vértices do grafo.

- Uma matriz de adjacências para um grafo **orientado** é uma matriz tal que:
  Se NÃO existe a aresta (i, j) entre dois vértices i e j então $M(i, j) = 0$.
  Se existe a aresta orientada (i, j) entre dois vértices i e j então $M(i, j) = 1$.
  Se existe a aresta orientada (j, i) entre dois vértices j e i então $M(j, i) = -1$.

- Em caso de **grafos valorados** tem-se:
  Se NÃO existe a aresta (i, j) entre dois vértices i e j então $M(i, j) = 0$.
  Se existe a aresta valorada (i, j) entre dois vértices i e j então $M(i, j) =$ valor de i a j.

Grafos - Lista de adjacências

- Nesta representação emprega-se a estrutura de lista de modo que as n linhas da matriz de adjacência são representadas como n listas encadeadas.
- Existe uma lista para cada vértice em G. Os nós na lista i representam os vértices que são adjacentes ao vértice i.
- Cada nó na lista possui pelo menos dois campos: VÉRTICE: armazena o indice do vértice que é adjacente i. NEXT: um ponteiro para o próximo nó adjacente.
- As cabeças das listas podem ser armazenas em um array de ponteiros para facilitar o acesso aos vértices.

Grafos - Matriz de Incidência

- Sendo $G(V, A)$ um grafo de n vértices $v_1, v_2...v_n$, e m arestas $a_1, a_2...a_m$, e nenhum laço.
- Uma matriz de incidência é uma matriz n x m, onde o valor de cada elemento e_{jk} da matriz é determinado da seguinte maneira:
  $M(i, j) = 1$ se a aresta a_k é incidente ao vértice a_j.
  $M(i, j) = 0$ caso contrário

Exercícios

1. Usando uma matriz de adjacências, crie um grafo orientado e calcule os graus de seus vértices.
2. Usando uma lista de adjacências, crie um grafo não-orientado e calcule os graus de seus vértices.
3. Você foi contratado(a) para montar a nova rede do Coltec (O Fabrício cansou e fugiu). Você sabe que existem 10 servidores nessa rede e cada servidor está conectado a 8 máquinas. Os 10 servidores se comunicam entre si, mas cada um é responsável único por suas 8 máquinas. Usando um grafo, faça um programa para detectar quando há falha de comunicação entre algum dos servidores.

Na próxima aula...

Busca em Grafos