Aula 3: Aritmética Computacional - Parte II

Professor(a): Virgínia Fernandes Mota
http://www.dcc.ufmg.br/∼virginiaferm

OCS (TEORIA) - SETOR DE INFORMÁTICA

Aritmética Computacional

- Ponto Flutuante
- Falácias e Armadilhas

Ponto Flutuante

- Precisamos de representação para números reais!
- Utilizaremos na representação números normalizados em **notação científica**.
- Notação científica normalizada: possui único dígito à esquerda do ponto decimal (ou ponto binário, caso a base seja 2)

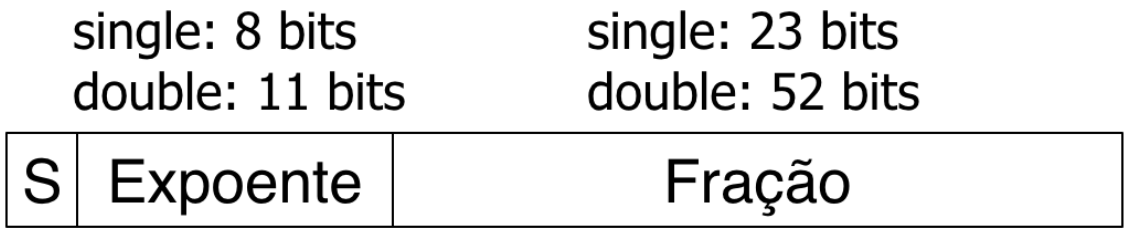
$$\text{Ex.: } 1,0 \text{ x } 10^{-9}$$

Ponto Flutuante

- Ponto flutuante: aritmética computacional que representa os números em que o ponto binário não é fixo.
- Representados na forma $1,aaaaaa \times 2^{bbbb}$
- Precisamos de compromisso entre tamanho da fração e do expoente.
- Aumento da precisão x aumento do intervalo dos números que podem ser representados.

Ponto Flutuante

- Números em ponto flutuante múltiplos do tamanho de uma palavra.
  - Precisão simples (floats em C): uma palavra usada na representação
  - Precisão dupla (doubles em C): duas palavras usadas na representação



$$x = (-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$$

Ponto Flutuante

- Representações anteriores chamada de **sinal e magnitude**
  - Sinal possui um bit separado do restante do número
- Representação em **precisão simples**
  - Números tão pequenos quanto 2×10^{-38} e tão grandes quanto 2×10^{38}
  - Overflow ainda pode ocorrer
  - Expoente positivo torna-se muito grande para caber no campo de expoente
  - Também podemos ter underflow
  - Expoente negativo torna-se muito grande para caber no campo de expoente

Ponto Flutuante

- Representação em **precisão dupla**
  - Números tão pequenos quanto 2×10^{-308} e tão grandes quanto 2×10^{308}
- Formato de ponto flutuante do IEEE: **IEEE 754**
- Mais bits podem ser colocados na fração
  - Números sempre na forma 1,xxx
  - Um implícito
  - Bits da fração numerados da esquerda para direita
  - Termo significando utilizado

Precisão Simples		Precisão Dupla		Objeto Representado
Expoente	Fração	Expoente	Fração	
0	0	0	0	0
0	não zero	0	não zero	± número desnormalizado
1-254	qualquer coisa	1-2046	qualquer coisa	± númeroponto flutuante
255	0	2047		± infinito
255	não zero	2047	não zero	NaN (Not a Number)

Codificação de Ponto Flutuante (Números, NaN, Inf)

- Comparação de números seria simplificada se representação do expoente mais negativo fosse próxima a 0000....000 e expoente mais positivo como 1111...111
- 1,0 x 2^{-1}: 0 11111111 00000000000000000000000
- 1,0 x 2^{+1}: 0 00000001 00000000000000000000000

- Solução: uso de notação deslocada
- Bias adicionado ao expoente
- No padrão IEEE valor 127 utilizado como bias para precisão simples e 1023 para precisão dupla
  $(-1)^s$ x (1 + fração) x $2^{(expoente-bias)}$
- No exemplo anterior:
  -1 + 127 = 126 $\rightarrow$ 0111 1110
  +1 + 127 = 128 $\rightarrow$ 1000 0000

Ponto Flutuante

- Exemplo: Representar -0,75 em precisão simples e dupla
- $-0,75_{10} = 0,11_2$
  0,75 x 2 = (1),50
  0,50 x 2 = (1),00
- Na notação científica normalizada: (-1) x 1,1 x 2^{-1}

- Representando -0,75:
  - S = 1
  - Fração = $1000...00_2$
  - Expoente = -1 + Bias
  - Simples: -1 + 127 = 126 = 01111110_2
  - Dupla: -1 + 1023 = 1022 = 01111111110_2
- Logo:
  Simples: 1 01111110 1000...00
  Dupla: 1 01111111110 1000...00

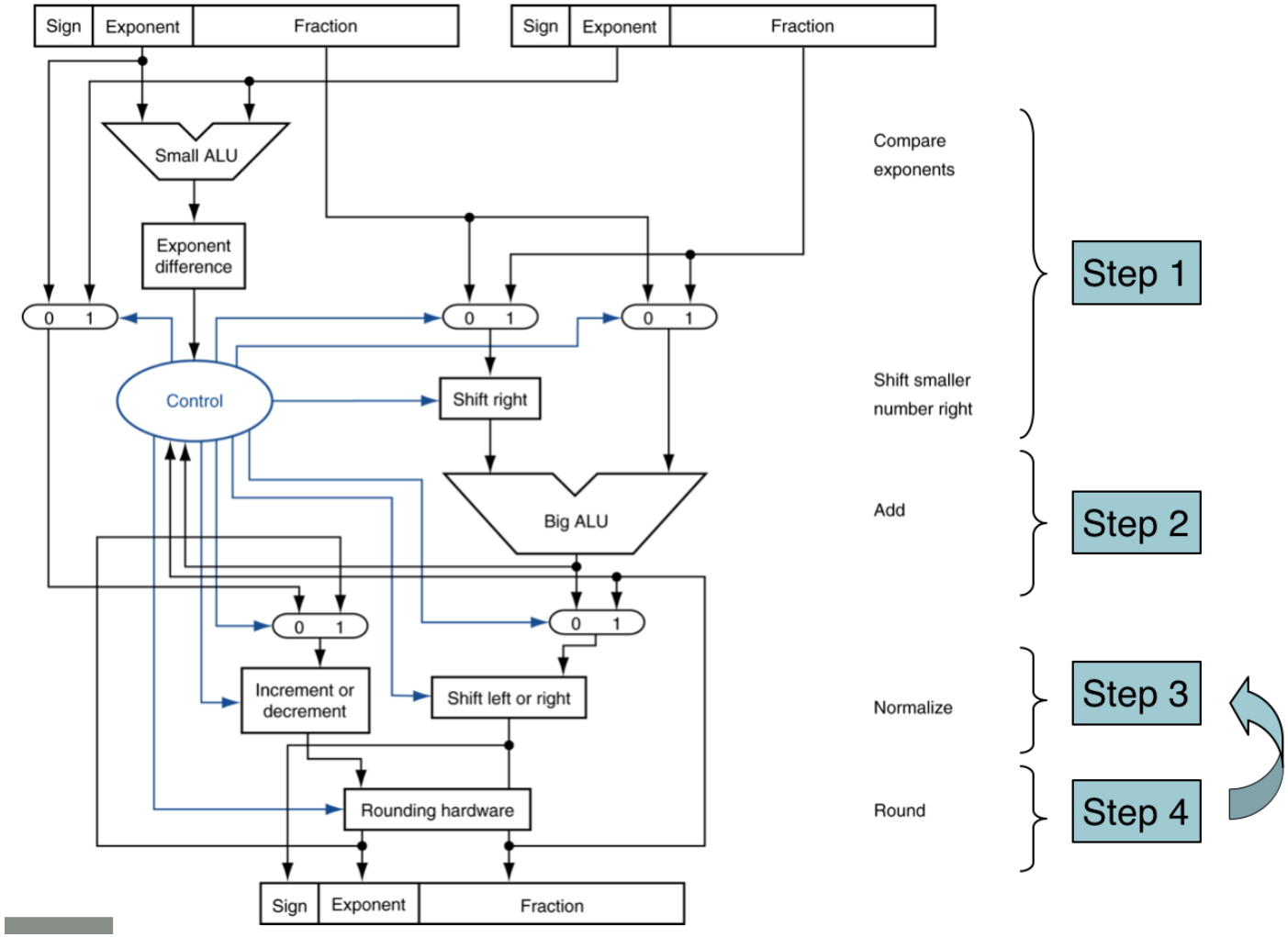
- Que número decimal é representado por este float de precisão simples?

  01000000101000...00

- S = 0
- Fração = $01000...00_2 = 0 \text{ x } 2^{-1} + 1 \text{ x } 2^{-2} + ...$
- Expoente = $10000001_2 = 129$
  $x = (-1)^0 \text{ x } (1 + 0,01_2) \text{ x } 2^{(129-127)}$
  $= (-1) \text{ x } 1,25 \text{ x } 2^2$
  $= 5.0$

Ponto Flutuante - Adição

- A adição de ponto flutuante é bem mais complexa que a adição de inteiros.



Ponto Flutuante - Adição

- Considere a seguinte soma:
  $9,999 \times 10^{1} + 1,610 \times 10^{-1}$
- 1. Alinhar as casas decimais: Shift no número de menor expoente
  $9,999 \times 10^{1} + 0,016 \times 10^{1}$
- 2. Somar
  $9,999 \times 10^{1} + 0,016 \times 10^{1} = 10,015 \times 10^{1}$
- 3. Normalizar resultado e checar over/underflow
  $1,0015 \times 10^{2}$
- 4. Arredondar e (re)normalizar se necessário
  $1,002 \times 10^{2}$

Ponto Flutuante

- Instruções de ponto flutuante no MIPS
  - Adição simples e dupla: add.s e add.d
  - Subtração simples e dupla: sub.s e sub.d
  - Multiplicação simples e dupla: mul.s e mul.d
  - Divisão simples e dupla: div.s e div.d
  - Comparação simples e dupla: c.x.s e c.x.d
    - Onde x pode ser igual (eq), diferente (neq), menor que (lt), menor ou igual (le), maior que (gt) ou maior ou igual (ge)
  - Desvio verdadeiro em ponto flutuante (be1t) e falso (bc1f)

Ponto Flutuante

- Comparação em ponto flutuante define um bit como verdadeiro ou falso, dependendo da condição de comparação
- Desvio de ponto flutuante decide então se desviará ou não, dependendo da condição
- Projetistas MIPS acrescentaram registradores de ponto flutuante separados: $f0, $f1, ..., $f31
- Usados para precisão simples ou dupla

Ponto Flutuante

- Loads e stores separados para ponto flutuante: lwc1 e swc1
- Exemplo: converter código abaixo para assembly

```
1 float f2c (float fahr) {
2     return ((5.0/9.0) * (fahr - 32.0));
3 }
```

- Supor que fahr seja passado em $f12

- Supor que constantes 5.0, 9.0 e 32.0 alcançadas por meio do ponteiro global $gp e retorno em $f0
  f2c:
  lwc1 $f16, const5($gp) # $f16 = 5.0
  lwc1 $f18, const9($gp) # $f18 = 9.0
  div.s $f16, $f16, $f18 # $f16 = 5.0/9.0
  lwc1 $f18, const32($gp) # $f18 = 32.0
  sub.s $f18, $f12, $f18 # fahr - 32.0
  mul.s $f0, $f16, $f18 # mult. result. intermediarios
  jr $ra # retorna

Ponto Flutuante

- Números em PF normalmente são aproximações para um número
- Arrendondamento pode ser crítico
- IEEE 754 define dois bits extras para arredondamento durante operações: Guarda e arredondamento

- Exemplo: Somar 2,56 x 10^0 a 2,34 x 10^2, supondo 3 dígitos significativos
- Guarda e arredondamento garantem 5 bits durante operação
  2,3400 + 0,0256 = 2,3656 = 2,37
- Sem guarda e arredondamento teríamos:
  2,34 + 0,02 = 2,36

- Falácia: Adição de ponto flutuante é associativa
  x = -1,5 x 10^{38}, y = 1,5 x 10^{38} e z = 1,0
  x + (y + z) = -1,5 x 10^{38} + (1,5 x 10^{38} + 1,0) = -1,5 x 10^{38} + 1,5 x 10^{38} = 0,0
  (x + y) + z = (-1,5 x 10^{38} + 1,5 x 10^{38}) + 1,0 = 0,0 + 1,0 = 1,0

Falácias e Armadilhas

- Falácia: Deslocamento à direita é o mesmo que uma divisão de inteiros por uma potência de dois
  - Verdade APENAS para inteiros sem signal
    -5: 1111 1111 1111 1111 1111 111 1111 1011
    Dois deslocamentos à direita não é o mesmo que dividir por 4
    0011 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1110
    1.073.741.822 e não -1

Falácias e Armadilhas

- Falácia: Somente matemáticos teóricos se importam com precisão do ponto flutuante
  Intel Pentium FDIV bug
  Erros no excel
  Outros??
  Pesquisar!!!!!

Exercícios

- Converta os números decimais em sua forma binária (em complemento a 2):
  a) -2
  b)10
  c) 7550
  d)13,25
  e) -0,4217
- Converta os números binários em sua forma decimal:
  a) $(10100)_2$
  b) $(1101)_2$
  c)$(0,1101)_2$
  d) $(11101,01)_2$
- Coloque os números no padrão IEEE 754

Próxima aula

Exercícios e Prova