Aula 12: Recursão

Professor(a): João Eduardo Montandon (103)
Virgínia Fernandes Mota (106)
jemaf.github.io
http://www.dcc.ufmg.br/∼virginiaferm

INTRODUÇÃO A PROGRAMAÇÃO - SETOR DE INFORMÁTICA

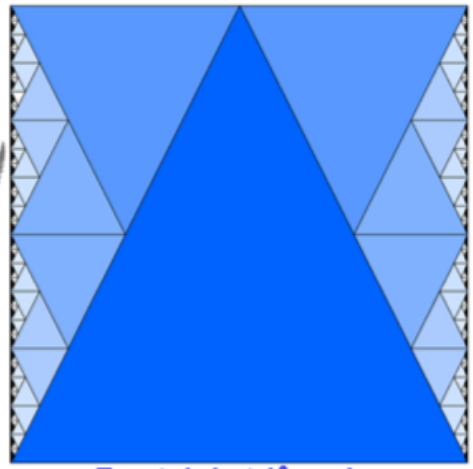
Objetos recursivos

- Um objeto é recursivo quando é definido parcialmente em termos de si mesmo.
- Exemplo 1:
  - (a) 1 é um número natural
  - (b) o sucessor de um número natural é um número natural
- Exemplo:
  - (a) 0! = 1
  - (b) se n > 0 então n! = n(n-1)!

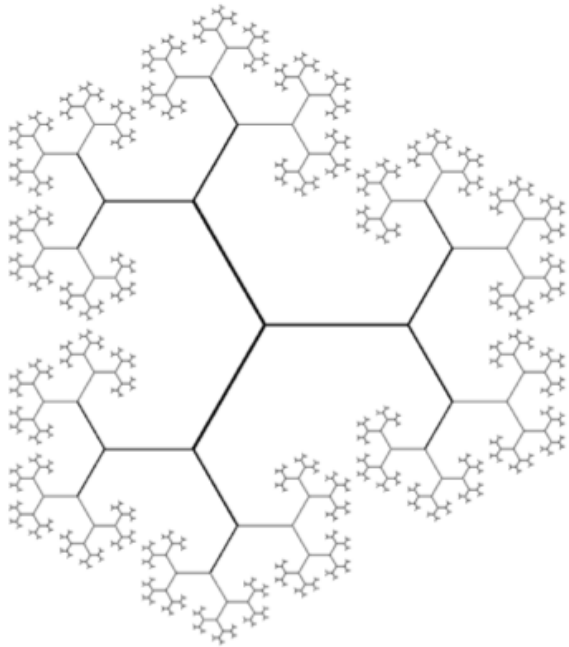
Objetos recursivos

Fractal de Fern

Fractal espiral



Fractal de triângulos



Derivação binária

Objetos recursivos

Foto recursiva

Imagem recursiva

Pensamento recursivo

Definição

- Uma função é dita **recursiva** quando chama a si própria, direta ou indiretamente.
- Propósito: expressar sua funcionalidade ou objetivo de maneira mais clara e concisa.
- Linguagens que permitem uma função chamar a si própria são ditas recursivas.
    - Linguagens que não permitem são ditas iterativas ou não recursivas

Entendendo a recursividade

Suponha que alguém no ICEx lhe pergunte:
"Como chego à Rua Monteiro Lobato?"

Entendendo a recursividade

"Como chego à Rua Monteiro Lobato?"

- Você poderia responder com conjunto completo de direções e referências... mas, se as direções são muito complexas, ou se você não está muito certo de como chegar lá, poderia responder:
- **"Vá até a saída da Catalão e então pergunte lá: "Como chego à Rua Monteiro Lobato?"**
- O clássico: Segue toda a vida e pergunte de novo lá na frente.

Este é um outro exemplo de recursão

Revendo o problema...

- Seu colega queria direções para um destino.
- Para resolver o problema, você deu um conjunto de instruções indicando como seu colega poderia alcançar seu objetivo.
- Após chegar ao destino indicado por você, seu colega se depara com nova versão do problema original.

Novo problema, idêntico em forma ao original, envolve uma nova localização de partida mais próxima ao destino final!

Exemplo de Algoritmo Iterativo

- Cálculo do fatorial de um número **n**.
- Sabemos que n! = n*(n-1)*(n-2)*...*(1).
- Implementação **iterativa**:

```
1 int fatorial(int n){
2     int fat = 1, i;
3     for (i = 2; i <= n; i++)
4         fat = fat*i;
5     return fat;
6 }
```

Exemplo de Algoritmo Recursivo

- Tanto a definição matemática quanto o código anterior são simples, porém mais elegante definir o fatorial como:

$$n! = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ n(n-1)!, & se\ n > 1 \end{cases} \quad (1)$$

- Fatorial de **n** definido a partir dos fatoriais dos naturais menores que ele.
- Significa que para cálculo do fatorial de um determinado número há necessidade de que se recorra aos fatoriais dos números anteriores.

Exemplo de Algoritmo Recursivo

- Condição que define parada da recursão: chamada **base da recursão** ou de **caso base**.
- Todo programa recursivo deve possuir uma **condição de parada**!
- Condição que define recursão chamada **passo recursivo**.

Exemplo de Algoritmo Recursivo

Definição matemática:

$$n! = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ n(n-1)!, & se\ n > 1 \end{cases} \quad (2)$$

Algoritmo Recursivo:

```
1 int fatorial(int n){
2     if(n == 1)
3         return 1; //Base da recursão
4     else
5         return (n*fatorial(n-1)); //Passo recursivo
6 }
```

Exemplo

Escreva um código recursivo para calcular o máximo divisor comum, MDC, de dois números inteiros positivos N e M da seguinte maneira:

$$mdc(n, m) = \begin{cases} m, & se\ n \geq m\ e\ n\ mod\ m = 0 \\ mdc(m, n), & se\ n < m \\ mdc(m, n\ mod\ m), & caso\ contrario \end{cases}$$

Exemplo

```c
#include <stdio.h>
int mdc(int n, int m){
    if ( (n >= m) && ((n % m)==0))
        return(m);
    else {
        if (n < m)
            return (mdc(m,n));
        else
            return (mdc(m,n %m));
    }
}

int main(){
    int m, n, MDC;
    scanf("%d %d", &n, &m);
    MDC = mdc(n, m);
    return 0;
}
```

$$mdc(n,m) = \begin{cases} m, & se\ n \geq m\ e\ n\ mod\ m = 0 \\ mdc(m,n), & se\ n < m \\ mdc(m, n\ mod\ m), & caso\ contrario \end{cases}$$

Exemplo

Escreva um código recursivo diferente para o MDC

Exemplo

```c
#include <stdio.h>
int mdc(int n, int m){
    if (m == 0)
        return n;
    else
        return mdc(m, n % m);
}

int main(){
    int m, n, MDC;
    scanf("%d %d", &n, &m);
    if (n > m)
        MDC = mdc(n,m);
    else
        MDC = mdc(m,n);
    return 0;
}
```

Aplicações de recursão - Ordenação

- Definição do problema: Dada uma coleção de n elementos, representada em um vetor de 0 a n-1, deseja-se obter uma outra coleção, cujos elementos estejam ordenados segundo algum critério de comparação entre os elementos.
- Tipos de algoritmos que serão discutidos: Iterativos e Recursivos
- Alguns exemplos: InsertionSort, **BubbleSort**, RadixSort, HeapSort, **MergeSort**, **QuickSort**.

BubbleSort

- Os elementos do vetor devem ser trocados entre si para que fiquem na ordem desejada.

```
1  void bubbleSort(int *p, int t){
2      int i, j, aux;
3      for ( i=0; i < t; i++ ){
4          for ( j=t-1; j > i; j-- ){
5              if ( p[j] < p[j-1]){
6                  aux = p[j];
7                  p[j] = p[j-1];
8                  p[j-1] = aux;
9              }
10         }
11     }
12 }
```

http://www.youtube.com/watch?v=lyZQPjUT5B4

MergeSort

- A idéia básica do MergeSort é criar uma sequência ordenada a partir de duas outras também ordenadas. Para isso, o algoritmo MergeSort divide a sequência original em pares de dados, agrupa estes pares na ordem desejada; depois as agrupa as sequências de pares já ordenados, formando uma nova sequência ordenada de quatro elementos, e assim por diante, até ter toda a sequência ordenada.

MergeSort

- Os três passos úteis dos algoritmos dividir-para-conquistar, que se aplicam ao MergeSort são:
  - **Dividir**: Dividir os dados em subsequências pequenas; Este passo é realizado recursivamente, iniciando com a divisão do vetor de n elementos em duas metades, cada uma das metades é novamente dividida em duas novas metades e assim por diante, até que não seja mais possível a divisão (ou seja, sobrem n vetores com um elemento cada).
  - **Conquistar**: Classificar as duas metades recursivamente aplicando o mergesort;
  - **Combinar**: Juntar as duas metades em um único conjunto já classificado. Para completar a ordenação do vetor original de n elementos, faz-se o merge ou a fusão dos sub-vetores já ordenados.

http://www.youtube.com/watch?v=XaqR3G_NVoo

MergeSort

```
1  void merge(int a[], int low, int
       high, int mid){
2      int i, j, k, c[50];
3      i=low;
4      j=mid+1;
5      k=low;
6      while((i<=mid)&&(j<=high)){
7          if(a[i]<a[j]){
8              c[k]=a[i];
9              k++;
10             i++;
11         }
12         else{
13             c[k]=a[j];
14             k++;
15             j++;
16         }
17     }
18     while(i<=mid){
19         c[k]=a[i];
20         k++;
21         i++;
22     }
23     while(j<=high){
24         c[k]=a[j];
25         k++;
26         j++;
27     }
28     for(i=low;i<k;i++)
29         a[i]=c[i];
30 }
```

```
1  void mergeSort(int a[], int low, int
       high){
2      int mid;
3      if(low<high){
4          mid=(low+high)/2;
5          mergeSort(a,low,mid);
6          mergeSort(a,mid+1,high);
7          merge(a,low,high,mid);
8      }
9  }
```

QuickSort

- Determina-se um elemento pivô. O pivô é posicionado dentro do vetor de tal forma que, todos à esquerda do pivô são menores que ele e, todos à direita do pivô são maiores. O pivô "divide"o vetor em dois subvetores. Recursivamente o quicksort é realizado na primeira metade do vetor e na segunda metade.

QuickSort

- Algoritmo: Seja x o vetor a ser ordenado e n o número de elementos de x. Seja a um elemento de x escolhido ao acaso (por exemplo, a=x[0]). Suponha que os elementos de x estejam divididos de tal forma que a é colocado na posição j e as seguintes condições são verdadeiras:
  - Todos os elementos nas posições de 0 a j-1 são menores que a.
  - Todos os elementos nas posições de j+1 a n-1 são maiores ou iguais a a.
- Então a está na posição correta no vetor. Se este processo for repetido para os sub-vetores x[0] a x[j-1] e x[j+1] a x[n-1], o resultado é o vetor ordenado.

http://www.youtube.com/watch?v=kDgvnbUIqT4

QuickSort

```
1  int partition( int a[], int l, int r) {
2      int pivot, i, j, aux;
3      pivot = a[l];
4      i = l;
5      j = r+1;
6      while(1){
7          do ++i; while( a[i] <= pivot && i <= r );
8          do --j; while( a[j] > pivot );
9          if( i >= j ) break;
10          aux = a[i];
11         a[i] = a[j];
12         a[j] = aux;
13     }
14      aux = a[l];
15     a[l] = a[j];
16     a[j] = aux;
17     return j;
18 }
19
20 void quickSort( int a[], int l, int r){
21     int j;
22     if( l < r ){
23         //dividir e conquistar
24         j = partition( a, l, r);
25         quickSort( a, l, j-1);
26         quickSort( a, j+1, r);
27     }
28 }
```

No main o QuickSort será chamado como **quickSort(vetor, 0, tam);**

Exercícios

1. Faça um procedimento recursivo que receba dois valores inteiros a e b e imprima o intervalo fechado entre eles. Se a for maior que b mostrar mensagem de erro.
2. Seja S um vetor de inteiros. Descreva funções recursivas para calcular:
a) o elemento máximo de S;
b) a soma dos elementos de S;
c) média aritmética dos elementos de S.
3. Escreva uma função recursiva para calcular o N-ésimo número da sequência de Fibonacci.
4. Escreva uma função recursiva para determinar o número de dígitos de um inteiro N.
5. Implemente os algoritmos de ordenação BubleSort, MergeSort e Quicksort. Teste os algoritmos com vetores de 100000 posições (crie estes vetores aleatoriamente - função rand()).

Na próxima aula...

Prova!