TEMA 9: INTEGRALES DOBLES

Hechos a tener en cuenta:

- Si f es continua sobre un rectángulo cerrado R, entonces f es integrable sobre R.
- Si f es acotada en un rectángulo R y es continua sobre R, excepto en un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable sobre R.

Considerando la definición anterior y la discusión precedente, el **volumen** de S puede expresarse como una integral doble:

Si $f(x, y) \geq 0$ es integrable sobre el rectángulo R, el volumen V del sólido que está encima de R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

DOBLE SUMA DE RIEMANN

La suma

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta A$$

se llama **doble suma de Riemann**.

- Se puede emplear como una aproximación de la integral doble correspondiente.
- Cuando f es una función *positiva*, representa la suma de los volúmenes de las columnas que se utilizan para aproximar el volumen bajo la gráfica de f.

Regla del punto medio para integrales dobles

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\, \Delta A$$

donde $\overline{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\overline{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

Nota: Se debe tener presente que la interpretación de una integral doble como un volumen es válida sólo cuando el integrando es una función no negativa sobre toda la región de integración.

Definición (integral doble sobre rectángulos)

Si f es una función de dos variables, la integral doble de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right) \Delta A$$

si el límite existe, en cuyo caso, se dice que f es integrable sobre R.

Definición (valor promedio)

Si f es una función de dos variables definida sobre un rectángulo R, el **valor promedio** *de f en R es*

$$f_{prom} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

donde $A(R)$ denota el área de R.

PROPIEDADES

Supongamos que f y g son funciones de dos variables integrables sobre un rectángulo R. Entonces:

- $\iint\limits_R [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint\limits_R f(x,y)\, dA + \iint\limits_R g(x,y)\, dA$
- $\iint\limits_R cf(x,y)\, dA = c \iint\limits_R f(x,y)\, dA$ para cualquier constante c
- Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo (x,y) en R,

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA \geq \iint\limits_R f(x,y)\, dA$$

DEMOSTRACIÓN EN EL CUADERNO DE LAS PROPIEDADES

Sea f una función de dos variables que es integrable sobre el rectángulo

$$R = [a,b] \times [c,d]$$

Se usan las las notaciones:

- $\int_a^b f(x,y)\, dx$ para indicar que y se mantiene fija y $f(x,y)$ se integra con respecto a la variable x desde $x = a$ hasta $x = b$.
- $\int_c^d f(x,y)\, dy$ para indicar que x se mantiene fija y $f(x,y)$ se integra con respecto a la variable y desde $y = c$ hasta $y = d$.

A estos procedimientos se los llama **integración parcial** con respecto a x y con respecto a y, respectivamente.

Observación: $\int_c^d f(x,y)\, dy$ es un número que depende del valor de x.

Teorema (de Fubini)

Si f es una función de dos variables continua sobre el rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

o bien, es acotada sobre R y discontinua sólo en una cantidad finita de curvas suaves, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

siempre que las integrales iteradas existan.

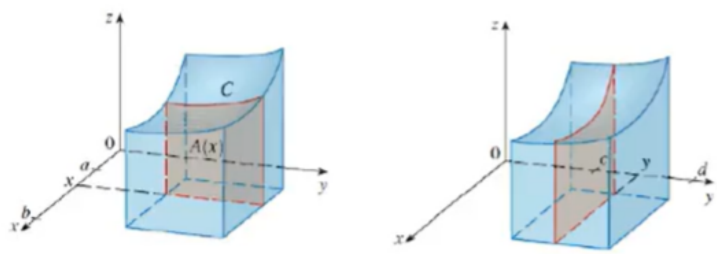
¿Por qué se cumple al menos para el caso en que f es no negativa sobre R?

TEMA 10: INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES

Integrales iteradas

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx.$$

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$



Definición (integrales dobles sobre regiones generales)

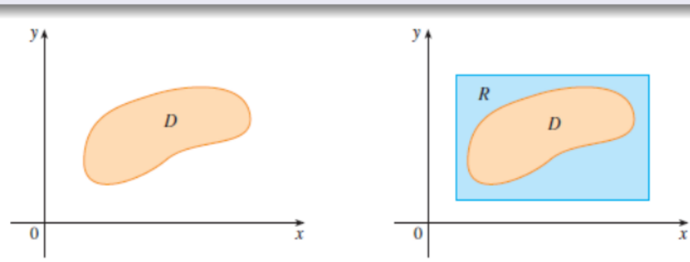
Si f es una función de dos variables y D es una región acotada contenida en $dom(f)^*$, la integral doble de f sobre D es

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA,$$

donde R es cualquier rectángulo que contiene a D y

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si \ (x,y) \in D \\ 0 & si \ (x,y) \in R \backslash D \end{cases}$$

siempre que F sea integrable sobre R.



*O "casi" completamente contenida en $dom(f)$... (podría no estarlo, p.ej., en una cantidad finita de puntos o de curvas suaves).

EVALUACIÓN DE INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES DE TIPO I

Si f es continua sobre una región de tipo I

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dydx$$

Por un procedimiento análogo al realizado para regiones de tipo I, se obtiene el siguiente resultado para calcular integrales dobles sobre regiones de tipo II:

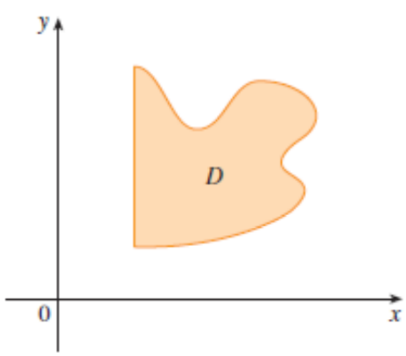
Si f es continua sobre una región de tipo II

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

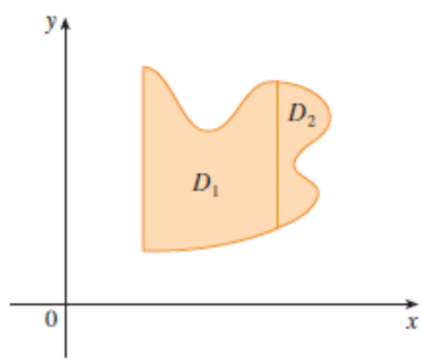
entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dxdy$$

La **propiedad 4** anterior es particularmente útil para evaluar integrales dobles sobre regiones planas acotadas que no son de tipo I ni de tipo II pero, sin embargo, pueden expresarse como una unión de dos regiones de alguna de estas clases (que no se traslapan, excepto quizás en sus bordes).



D **no es de tipo** I **ni de tipo** II



$D = D_1 \cup D_2$ **donde** D_1 **es de tipo** I **y** D_2 **es de tipo** II

TEMA 11: INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

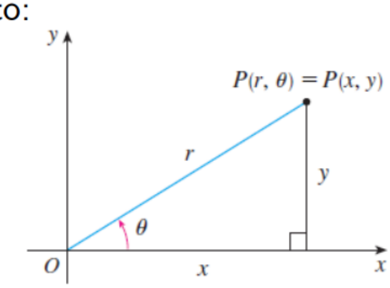
Una alternativa para hacer frente a esta dificultad sería representar estas regiones utilizando coordenadas polares...

Recordatorio: Las coordenadas polares (r, θ) de un punto P en el plano se relacionan con sus coordenadas rectangulares (x, y) mediante las ecuaciones

$$x = r \cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

donde r indica la distancia de P al origen y θ es la medida, tomada en sentido antihorario (positivo), del ángulo comprendido entre el *eje polar* (semieje x positivo) y la semirrecta que nace en el origen y pasa por P.

En efecto:



$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

Teorema (evaluación de integrales dobles sobre rectángulos polares)

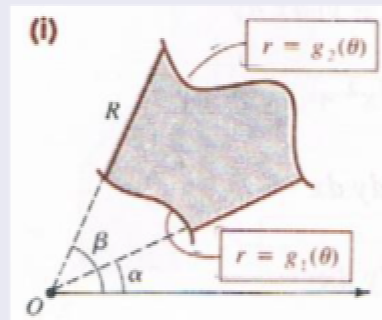
Si f es una función real de dos variables que es continua sobre un rectángulo polar $R = \{(r, \theta) \mid a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\ \cos\theta, r\ \operatorname{sen}\theta)\, r dr d\theta$$

Teorema (evaluación de integrales dobles en coordenadas polares I)

Sea D una región acotada por dos rayos que forman ángulos positivos, α y β, con el eje polar, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$, donde g_1 y g_2 son funciones continuas tales que $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ para todo θ en el intervalo $[\alpha, \beta]$. De este modo:

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$$



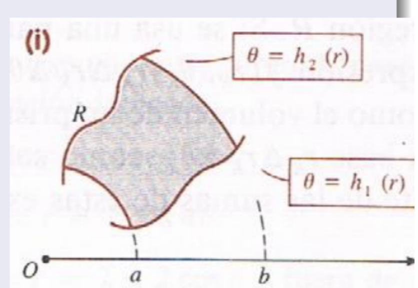
Si f es una función de dos variables continua en D, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr d\theta$$

Teorema (evaluación de integrales dobles en coordenadas polares II)

Sea D una región acotada por los arcos de dos circunferencias centradas en el origen, de radios a y b respectivamente, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $\theta = h_1(r)$ y $\theta = h_2(r)$, donde h_1 y h_2 son funciones continuas tales que $h_1(r) \leq h_2(r)$ para todo r en el intervalo $[\alpha, \beta]$. De este modo:

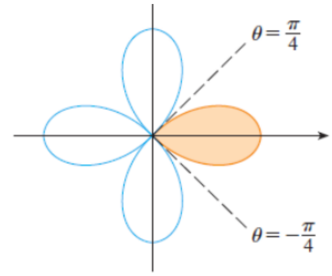
$$D = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b,\ h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\ \}$$



Si f es una función de dos variables continua en D, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_{a}^{b} \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r\, d\theta dr$$

EJEMPLO 3 (p.1000): Utilizar una integral doble para hallar el área encerrada por un pétalo de la rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$



Solución: En este caso, $f(x, y) = 1$ y puede expresarse

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

Luego, aplicando la fórmula del teorema de evaluación I, se obtiene

$$A(D) = \iint_D 1 dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\ dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} \left(\cos^2 2\theta - 0^2\right) d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\ d\theta = \ldots = \tfrac{1}{8}\pi \quad \blacksquare$$

Observación: La región de este ejemplo también podría expresarse como

$$D = \left\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ -\tfrac{1}{2} \arccos r \leq \theta \leq \tfrac{1}{2} \arccos r\right\}$$

y, por lo tanto, $A(D)$ puede también calcularse aplicando el teorema de evaluación II. **Ejercicio!**

TEMA 12: INTEGRALES TRIPLES

La integral iterada del lado derecho del Teorema de Fubini anterior significa que se integra

- primero respecto a "x" (manteniendo a "y" y a "z" constantes);
- luego, respecto a "y" (manteniendo a "z" constante)
- y, por último, respecto a "z".

Así como se definen

- **integrales simples** para funciones de *una* variable
- **integrales dobles** para funciones de *dos* variables

se definen

- **integrales triples** para funciones de *tres* variables.

Tener en cuenta: Si f es continua sobre una caja rectangular cerrada B, entonces f es integrable sobre B (es decir, el límite anterior existe).

Teorema (de Fubini para integrales triples)

Si f es una función de tres variables continua sobre la caja rectangular

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$$

entonces

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dxdydz$$

Definición (integral triple sobre una región acotada general)

Si f es una función de tres variables y E es una región acotada contenida en $dom\,(f)^*$, la integral triple de f sobre E es

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iiint_B F(x,y,z)\,dV,$$

donde B es cualquier sólido rectangular que contiene a E y

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & si\ (x,y,z) \in E \\ 0 & si\ (x,y,z) \in B\backslash E \end{cases}$$

siempre que F sea integrable sobre B.

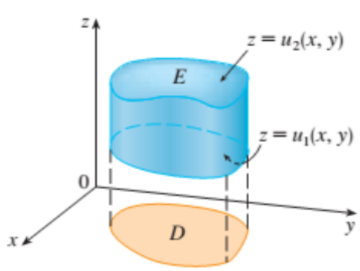
SOBRE REGIONES ACOTADAS GENERALES (Tipo 1)

A continuación, estudiaremos integrales triples (de funciones continuas) sobre ciertos tipos de regiones acotadas particularmente simples cuyas fronteras son "razonablemente suaves".

Se dice que una región sólida E es de **tipo 1** si está comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas de las variables x e y, es decir,

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano xy y u_1 y u_2 son continuas sobre D.



Observaciones:

La frontera inferior de E es la superficie con ecuación $z = u_1(x,y)$.

La frontera superior de E es la superficie con ecuación $z = u_2(x,y)$.

A fin de evaluar $\iiint_E f(x,y,z)\,dV$ cuando E es una región de **tipo 1**, procediendo en forma análoga al caso correspondiente para integrales dobles, se puede demostrar que

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA}$$

En la integral interior de la derecha de esta ecuación debe entenderse que

- x e y se mantienen fijas,
- $u_1(x,y)$ y $u_2(x,y)$ son tratadas como constantes,
- $f(x,y,z)$ se integra con respecto a z.

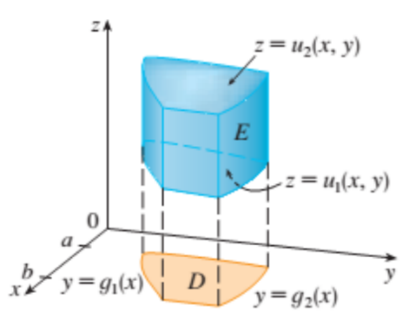
Luego, se consideran los dos casos siguientes:

1°caso: La *proyección* D de E sobre el plano xy es una región plana de *tipo I*. Entonces

$$E = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x),\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

y la ecuación anterior se convierte en

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx$$

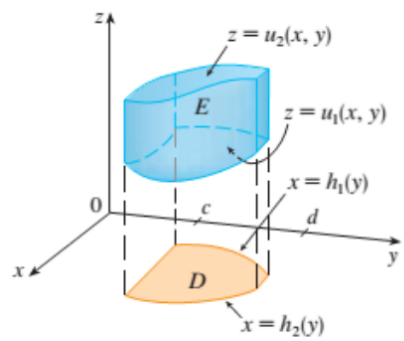


2°caso: La *proyección* D de E sobre el plano xy es una región plana de *tipo II*. Entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

y la ecuación anterior se convierte en

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdxdy$$

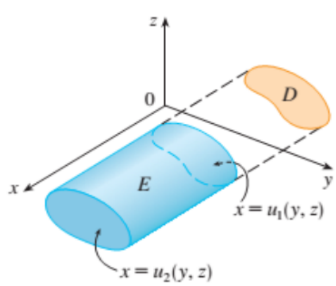


SOBRE REGIONES ACOTADAS GENERALES (Tipo 2)

Se dice que una región sólida E es de **tipo 2** si está comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas de las variables y y z, es decir,

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano yz y u_1 y u_2 son continuas sobre D.



Observaciones:

La frontera "detrás" de E es la superficie con ecuación $x = u_1(y, z)$.

La frontera "delante" de E es la superficie con ecuación $x = u_2(y, z)$.

Cuando E es una región de **tipo 2**, se puede demostrar que

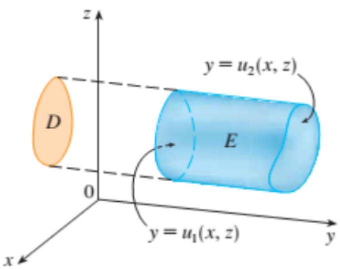
$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\right] dA}$$

SOBRE REGIONES ACOTADAS GENERALES (Tipo 3)

Se dice que una región sólida E es de **tipo 3** si está comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas de las variables x y z, es decir,

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano xz y u_1 y u_2 son continuas sobre D.



Observaciones:

La frontera izquierda de E es la superficie con ecuación $y = u_1(x, z)$.

La frontera derecha de E es la superficie con ecuación $y = u_2(x, z)$.

Cuando E es una región de **tipo 3**, se puede demostrar que

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\right] dA}$$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES TRIPLES

Suponiendo que todas las integrales siguientes existen:

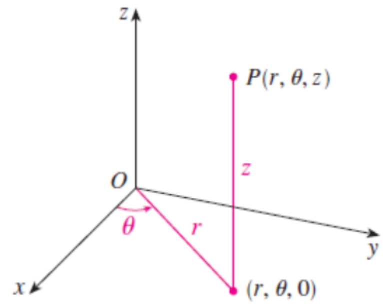
- $\iiint_E (f + g)(x, y, z)\, dV = \iiint_E f(x, y, z)\, dV + \iiint_E g(x, y, z)\, dV$
- $\iiint_E kf(x, y, z)\, dV = k\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ para toda constante k.
- Si $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in E$, entonces
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV \geq \iiint_E g(x, y, z)\, dV$$
- Si $E = E_1 \cup E_2$ donde E_1 y E_2 no se traslapan, excepto quizás en sus fronteras, entonces
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_{E_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{E_2} f(x, y, z)\, dV$$
- $\iiint_E 1 dV = V(E)$
- Si $m \leq f(x, y, z) \leq M$ para todo $(x, y, z) \in E$, entonces
$$mV(E) \leq \iiint_E f(x, y, z)\, dV \leq MV(E)$$

TEMA 13: INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (jacobiano?)

Coordenadas cilíndricas

En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P del espacio tridimensional es representado por la terna (r, θ, z) donde:

- r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P sobre el plano xy,
- z es la distancia dirigida de P al plano xy (e.d., la tercer coordenada rectangular de P).

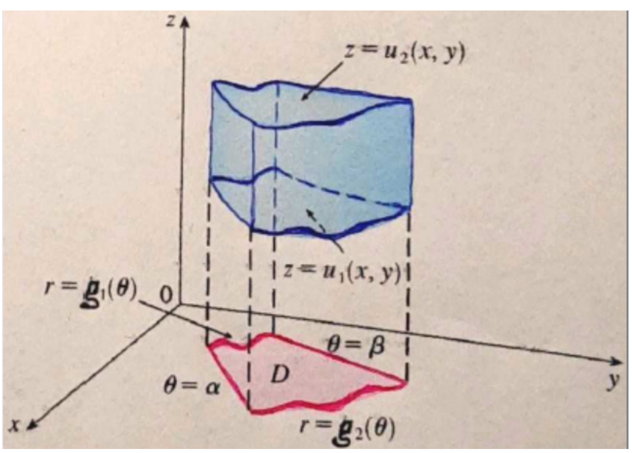


Se sigue que las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un mismo punto P satisfacen las relaciones:

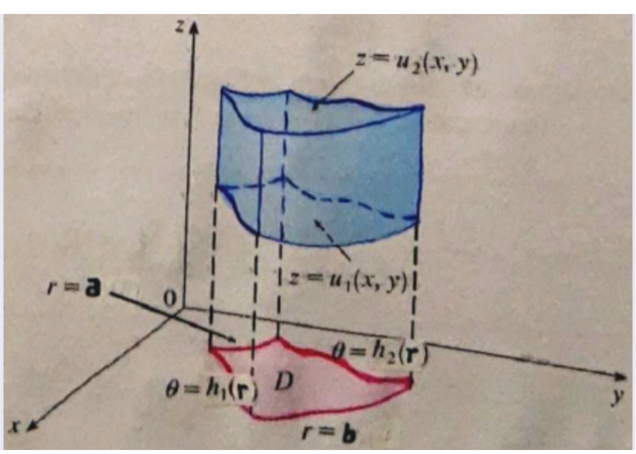
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

TIPO I

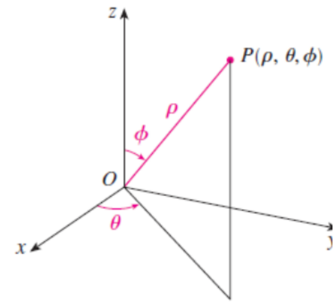


TIPO II



Coordenadas esféricas

En un sistema de coordenadas esféricas, un punto P del espacio tridimensional es representado por la terna (ρ, θ, ϕ) donde:



- $\rho = \left\| \overrightarrow{OP} \right\|$ es la distancia de P al origen ($\rho \geq 0$),
- θ es la segunda coordenada cilíndrica de P (ángulo polar de la proyección de P en el plano xy),
- ϕ es el ángulo entre el semieje z positivo y $\overrightarrow{OP}$.

Se sigue que las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de un mismo punto P satisfacen las relaciones:

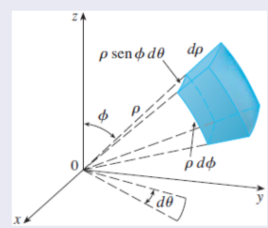
$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Teorema (evaluación de integrales triples sobre cuñas esféricas)

Sea f una función continua sobre una región de la forma:

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$



Entonces:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\theta d\phi$$

TEMA 14:FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE

FUNCIONES VECTORIALES: Definiciones básicas

Definición (función vectorial)

Una **función vectorial r** *es una regla que asigna a cada número* t *en cierto subconjunto* D *de* $\mathbb{R}$ *un único vector que se denota por* $\mathbf{r}(t)$.

Tal como en el caso de las *funciones reales* (o *escalares*):

- El conjunto D se llama **dominio** de $\mathbf{r}$.
- El vector $\mathbf{r}(t)$ se llama **valor** de $\mathbf{r}$ en t o **imagen** de t bajo $\mathbf{r}$.

  Es usual la letra t para denotar la variable independiente porque esta representa el *tiempo* en la mayoría de las aplicaciones de las funciones vectoriales.

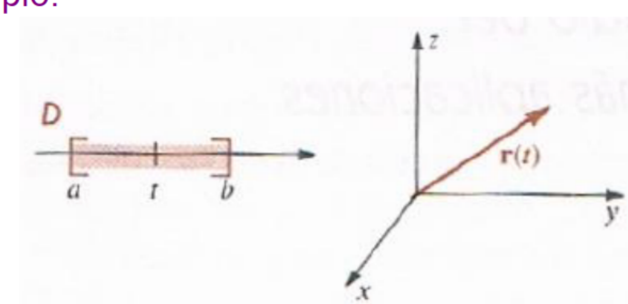
- El conjunto de todos los vectores que son imágenes bajo $\mathbf{r}$ de algún número en su dominio, esto es,

$$\{\mathbf{r}(t) \mid t \in D\}$$

  se llama **rango** o **contradominio** de $\mathbf{r}$.

Entre las funciones de esta clase, las que resultan de interés con mayor frecuencia en las aplicaciones son aquellas cuyas *imágenes* (o *valores*) son vectores *tridimensionales*. Por lo tanto, a continuación, centramos nuestra atención en ellas.

El dominio D se puede representar geométricamente por puntos en una recta real. Por ejemplo:



- En la figura anterior, D es un intervalo cerrado, pero en general, D podría ser cualquier otro tipo de conjunto de números reales.
- En la misma figura se representa también el vector de posición de $\mathbf{r}(t)$ en un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

Teorema

Si D es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, entoces $\mathbf{r}$ es una función vectorial con dominio D si y sólo si existen funciones escalares f, g y h, con dominios D_f, D_g y D_h respectivamente, tales que $D_f \cap D_g \cap D_h = D$ y

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

para todo t en D.

Las funciones f, g y h del teorema anterior son llamadas funciones componentes de $\mathbf{r}$.

Definición (límite de una función vectorial)

Sea $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ una función vectorial cuyo dominio D contiene puntos arbitrariamente cercanos al número real a. Entonces

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

siempre que exista el límite cuando $t \to a$ de cada función componente.

Definición (continuidad de funciones vectoriales)

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es continua en un punto a de su dominio si

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Observación: La función vectorial del ejemplo anterior $\boxed{\text{no}}$ es continua en 0. En efecto, aunque existe $lím_{t \to 0}\mathbf{r}(t) = \langle 1, 0, 1 \rangle$, no podemos comparar dicho vector con la imagen bajo $\mathbf{r}$ de 0, puesto que 0 no es un punto en el dominio de $\mathbf{r}$ (la última componente de $\mathbf{r}$ no está definida en 0).

Otro ejemplo: La función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$ $\boxed{\text{sí}}$ es continua en 0. En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to 0} (1 + t), \lim_{t \to 0} (2 + 5t), \lim_{t \to 0} (-1 + 6t) \right\rangle &= \langle 1, 2, -1 \rangle \\ &= \mathbf{r}(0)\end{aligned}$$

EJERCICIO (todas las carreras)**:** Probar que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ es continua en a si y sólo si sus componentes lo son.

TEMA 15: CAMPOS VECTORIALES

- Se trata de funciones que asignan vectores bidimensionales a puntos en el plano, o bien, vectores tridimensionales a puntos en el espacio.
- Podríamos pensar en estos campos vectoriales como una clase especial de funciones vectoriales de dos o de tres variables.

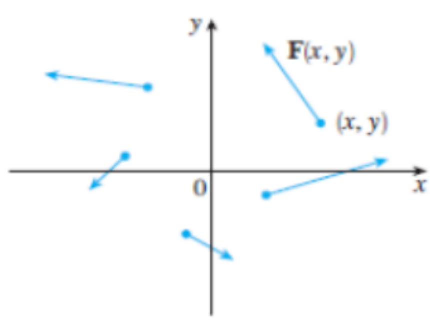
Definición (campos vectoriales)

▶ *Un* **campo vectorial en dos dimensiones** *(o* **sobre** $\mathbb{R}^2$*) es una función* **F** *que asigna a cada punto* (x, y) *en cierto subconjunto* D *de* $\mathbb{R}^2$ *un único vector bidimensional* $\mathbf{F}(x, y)$.

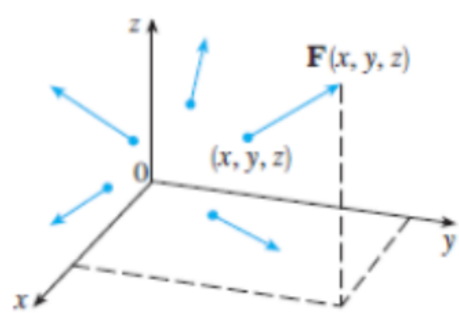
▶ *Un* **campo vectorial en tres dimensiones** *(o* **sobre** $\mathbb{R}^3$*) es una función* **F** *que asigna a cada punto* (x, y, z) *en cierto subconjunto* D *de* $\mathbb{R}^3$ *un único vector tridimensional* $\mathbf{F}(x, y, z)$.

¿Qué se puede decir, en estos casos, de *dom* $(\mathbf{F})$? ¿y de *rg* $(\mathbf{F})$?

La mejor manera de obtener una imagen visual de un campo vectorial es elegir un subconjunto representativo de puntos en su dominio y dibujar el vector imagen de cada uno de ellos iniciando en el punto correspondiente.



campo vectorial bidimensional



campo vectorial tridimensional

RESPUESTA:

Por un razonamiento análogo al realizado para funciones vectoriales de una variable, también los campos vectoriales pueden expresarse en términos de sus **funciones componentes:**

- Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial bidimensional, se puede escribir

$$\boxed{\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j} \quad \text{ó} \quad \mathbf{F}(x,y) = \langle P(x,y), Q(x,y)\rangle}$$

e incluso, cuando es conveniente simplificar la notación,

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \quad \text{ó} \quad \mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$$

donde P y Q son funciones escalares (reales) de dos variables.

- Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial tridimensional, se puede escribir

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k} \\ \text{ó} \quad \mathbf{F}(x,y,z) = \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\rangle\end{array}}$$

o bien, simplificando la notación,

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \quad \text{ó} \quad \mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$$

donde P, Q y R son funciones escalares (reales) de tres variables.

Algunas veces se les llama **campos escalares** a las componentes de $\mathbf{F}$ para distinguirlas de los campos vectoriales.

Definición (continuidad de campos vectoriales)

Un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}$ *es continuo en un punto* (a, b) *de su dominio si*

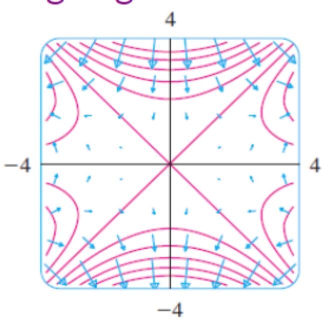
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathbf{F}(x,y) = \mathbf{F}(a,b)$$

EJERCICIO (todas las carreras)**:** Mostrar que el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$ es continuo en (a, b, c) si y sólo si sus funciones componentes lo son.

Solución: El campo vectorial gradiente de f está dado por

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\mathbf{i} + f_y(x,y)\,\mathbf{j} = 2xy\mathbf{i} + \left(x^2 - 3y^2\right)\mathbf{j}$$

La fig. siguiente muestra un mapa de contorno de f y su campo gradiente:



Observaciones:

- Los vectores gradientes son "perpendiculares" a las curvas de nivel (*recordar la sección* 14.6).
- Los vectores gradientes son más largos donde más cercanas entre sí son las curvas de nivel.

La razón de esto último es que la longitud del vector gradiente es el valor de una derivada direccional de f y curvas de nivel cercanas indican una gráfica (de la función f) con fuerte pendiente.

Definición (campo vectorial conservativo)

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ *se denomina* **conservativo** *si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función* f *tal que* $\mathbf{F} = \nabla f$.

En esta situación, f *recibe el nombre de* **función de potencial** *para* $\mathbf{F}$.

No todos los campos vectoriales son conservativos, pero tales campos surgen con frecuencia en Física...

EJEMPLO [p.1061]**:** El campo de fuerza gravitacional

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{mMG}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\right)$$

del EJEMPLO 4 (p. 1059) es conservativo y su función de potencial es

$$f(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

EJERCICIO: Verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$ (en este ejemplo) ■

TEMA 16: Integrales de línea

Comencemos considerando una **curva plana** C descripta por medio de las **ecuaciones paramétricas**

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leq t \leq b$$

o, equivalentemente, por la **ecuación vectorial**

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Supongamos, además, que C es una **curva "suave"** (o "**regular**").

Recordemos...

Esto significa que:

Las derivadas ordinarias $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas y no se anulan simultáneamente en $[a, b]$.

En notación vectorial:

La función vectorial $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ es continua y satisface que $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t en $[a, b]$.

Evaluación de la integral de línea de una función de dos variables:

Se puede demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) que, si f es continua sobre una región (abierta) D que contiene a C, entonces el límite de la definición anterior existe y su valor no depende de la parametrización elegida para representar la curva C. Además, se puede calcular como una integral simple mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y)\,ds &= \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \\ &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt\end{aligned}$$

Observación: En el caso especial en que el valor de f es constantemente igual a 1 sobre la curva C, tenemos que

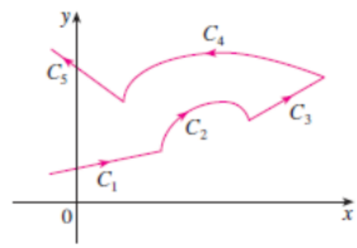
$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

da, precisamente, la $\boxed{\text{longitud de } C}$.

Otras propiedades:

- Al ser similares a las integrales simples sobre intervalos y poder, generalmente, evaluarse a través de estas, las integrales de línea satisfacen propiedades algebraicas semejantes a las de aquellas. Por ejemplo: la integral de una suma de dos (o más) funciones es igual a la suma de las integrales de cada función (siempre que existan), la integral del producto de una función por una constante es igual al producto de dicha constante por la integral de la función, etc.
- Si $-C$ denota la curva que consiste de los mismos puntos que C, pero con la orientación opuesta, entonces: $\boxed{\int_{-C} f(x,y)ds = \int_C f(x,y)ds}$

Se dice que una curva C es **suave por tramos** si es la unión de una cantidad finita de curvas suaves, digamos $C_1, C_2, ..., C_n$, tales que el punto inicial de C_{i+1} es el punto final de C_i, para $i = 1, 2, ..., n-1$.



En este caso, la **integral de línea de** $f(x,y)$ **a lo largo de** C se define como la suma de las integrales de f a lo largo de cada una de las "partes suaves" de C. Esto es:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds + ... + \int_{C_n} f(x,y)ds$$

siempre que todas las integrales existan.

Evaluación de la integral de línea con respecto a x y a y

También en estos casos se puede demostrar que, si f es continua sobre una región (abierta) D que contiene a C, entonces los límites de la definición anterior existen y sus valores son los mismos para todas las parametrizaciones de la curva C (siempre y cuando tengan la misma orientación). Dichos valores se pueden calcular expresando todo en términos de la variable paramétrica t mediante las fórmulas siguientes:

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)dt$$

Ejercicio: Analizar (geométricamente) qué se obtiene de las fórmulas anteriores en el caso especial en que el valor de f es constantemente igual a 1 sobre la curva C.

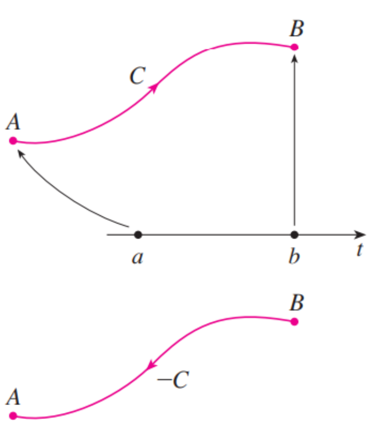


FIGURA 8

En general, una parametrización dada $x = x(t)$, $y = y(t)$, a $\leqslant t \leqslant$ b, determina una **orientación** de una curva C, cuya dirección positiva corresponde a los valores crecientes del parámetro t. (Véase la figura 8, en donde el punto inicial A corresponde al valor del parámetro a y el punto terminal B corresponde a $t = b$.)

Si $-C$ denota la curva que consiste de los mismos puntos que C, pero con la orientación opuesta es decir, del punto inicial B al punto terminal A de la figura 8, entonces tenemos

$$\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_C f(x, y)\, dx \qquad \int_{-C} f(x, y)\, dy = -\int_C f(x, y)\, dy$$

Pero si integramos respecto a la longitud de arco, el valor de la integral de línea *no* cambia cuando se invierte la orientación de la curva:

$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$$

Definición (integral de línea de un campo vectorial)

Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial continuo cuyo dominio contiene una curva suave* C *con ecuación vectorial* $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. *La* **integral de línea de F a lo largo de** C *es*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Notación (importante)**:** Dado que podemos escribir formalmente $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$, es usual denotar la integral de la definición anterior como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

De este modo, la integral de línea del campo vectorial (continuo) $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C es

$$\underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\blacktriangle\text{notación}\blacktriangle} \;=\; \underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds}_{\blacktriangle\text{definición}\blacktriangle} \;=\; \underbrace{\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt}_{\blacktriangle\text{cálculo}\blacktriangle}$$

Propiedad: A pesar de que (como hemos visto) el valor de las integrales con respecto a la longitud de arco no cambia cuando se invierte la dirección en que "se recorre" la curva C, para la integral anterior se cumple lo siguiente: $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
Esto se debe a que el vector tangente unitario $\mathbf{T}$ (en el integrando) es reemplazado por su negativo cuando C es reemplazada por $-C$.

Supongamos que el campo vectorial continuo $\mathbf{F}$ sobre $\mathbb{R}^3$ es dado, a través de sus funciones componentes, por la ecuación:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

Entonces, su integral de línea a lo largo de una curva C (incluida en su dominio) verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\, dt + \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\, dt \\
&\qquad + \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\, dt \\
&= \int_C P(x,y,z)\, dx + \int_C Q(x,y,z)\, dy + \int_C R(x,y,z)\, dz \\
&= \boxed{\int_C P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz}
\end{aligned}$$

TEMA 17: INDEPENDENCIA DE INTEGRALES DE LÍNEA

A modo también de recordatorio...

Supongamos que dos variables, x e y, dependen de una tercer variable t (llamada **parámetro**) por medio de las ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Entonces:

- Cada valor de t determina un punto (x, y) que se puede representar en un plano coordenado.
- Cuando t varía de forma continua, el punto $(x, y) = (x(t), y(t))$ también varía y traza una curva C en dicho plano.

La curva C se llama **curva paramétrica** y las dos ecuaciones que describen las coordenadas de sus puntos, **ecuaciones paramétricas** o **parametrización** de C.

- El **sentido** (u **orientación**) **positivo** sobre C es la dirección en que se mueve un punto al aumentar t.
- Cuando la variación de t se restringe a un intervalo $[a, b]$, podemos decir que $(x(a), y(a))$ es el **punto inicial** de C, y $(x(b), y(b))$ es su **punto final**.

De manera análoga, se pueden definir curvas paramétricas en el espacio, considerando una tercer ecuación $z = z(t)$.

Definición (trayectoria entre dos puntos)

A una curva suave por tramos (en el plano o en el espacio) con punto inicial A y punto final B se le llama **trayectoria** *de A a B.*

Definición (independencia de la trayectoria)

Se dice que una integral de línea es **independiente de la trayectoria** *en cierta región (del plano o del espacio) cuando su valor es el mismo para todas las trayectorias contenidas en dicha región que coinciden en sus puntos extremos (inicial y final).*

Observaciones:

Si $f(x,y)$ es una función escalar (real):

- $\int_C f(x,y)\,ds$ no puede ser independiente de la trayectoria en ninguna región abierta (*pensar en la interpretación geómetrica de esta integral*).
- $\int_C f(x,y)\,dx = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\,\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$, mientras que $\int_C f(x,y)\,dy = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x,y) = 0\mathbf{i} + f(x,y)\,\mathbf{j}$.

Por lo tanto:

> La teoría sobre independencia de la trayectoria, aunque involucra campos escalares, se refiere fundamentalmente a integrales de línea de campos vectoriales.

El siguiente teorema establece que, en condiciones adecuadas, la **integral de línea** del campo vectorial gradiente es precisamente el **cambio neto** en su campo escalar correspondiente, y es, por lo tanto, **independiente de la trayectoria**.

Teorema (T. fundamental de las integrales de línea)

Sea C una curva suave en el plano (o en el espacio) representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$. Sea f una función real (diferenciable) de dos (o de tres) variables tal que el campo vectorial ∇f es continuo sobre C. Entonces:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Nota: Si bien el teorema anterior se enuncia sólo para el caso de curvas suaves, también es válido para curvas suaves por tramos. **¿Por qué?** Utilizar la formulación dada para justificar dicha versión más general.

DEMOSTRACIÓN DEL TF de las IL

Para entender mejor los próximos resultados conviene recordar lo siguiente:

- Una curva C en el plano (o en el espacio) es
  - **cerrada**, si su punto inicial coincide con su punto final;
  - **simple**, si no se corta a sí misma en ninguna parte de su "recorrido".

simple, no cerrada — simple, cerrada — no simple, no cerrada — no simple, cerrada

- Una región D en el plano (o en el espacio) es
  - **abierta**, si para todo punto A de D existe un disco (de radio mayor que 0) con centro A completamente contenido en D;
  - **conexa**, si todo par de puntos A y B de D se pueden unir por una trayectoria (curva suave por tramos) completamente contenida en D;
  - **simplemente conexa**, si el interior de toda curva cerrada simple C contenida en D tiene sólo puntos de D (no hay "hoyos" en la región).

simplemente conexa (y conexa) — conexa (no simplemente conexa) — no conexa (ni simplemente conexa)

Ahora, con estas definiciones en mente...

Ejercicio: Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre cierta región D (en el plano o en el espacio). Demostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D si y sólo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en D. (Ver Teorema 3 de la pág.1077 y la discusión que le precede.)

El Teorema Fundamental de las IL permite establecer inmediatamente la independencia de la trayectoria, en cualquier región abierta y conexa D, de la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ cuando $\mathbf{F} = \nabla f$ ($\mathbf{F}$ es conservativo) y es continuo sobre D. *El siguiente teorema puede considerarse recíproco (o inverso) de este resultado...*

Teorema

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre cierta región abierta y conexa D (en el plano o en el espacio). Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo sobre D, es decir, existe una función escalar f (de dos o de tres variables) tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Teorema

Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ un campo vectorial conservativo tal que P y Q tienen primeras derivadas parciales continuas sobre cierta región (abierta) D. Entonces, (necesariamente) para todo punto en D:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Teorema

Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ un campo vectorial tal que P y Q tienen primeras derivadas parciales continuas sobre cierta región (abierta) simplemente conexa D, las cuales satisfacen que

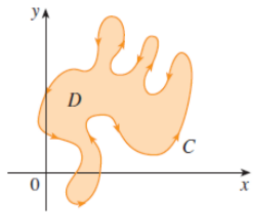
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Entonces, (necesariamente) $\mathbf{F}$ es conservativo.

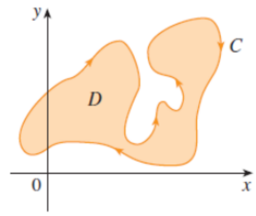
TEMA 18: TEOREMA DE GREEN

A grandes rasgos, el Teorema de Green establece una relación entre una integral de línea a lo largo de una curva plana, simple y cerrada, y una integral doble sobre la región acotada por esta.

En el planteamiento del Teorema de Green se estila la convención de que la **orientación positiva** de una curva cerrada C es la que corresponde a un recorrido de esta en **sentido antihorario**.



orientación positiva



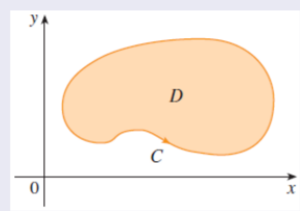
orientación negativa

Por lo tanto: si C está defida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con $a \leq t \leq b$, la región D encerrada por C queda siempre a la izquierda del punto $\mathbf{r}(t)$ mientras este recorre C variando desde $t = a$ hasta $t = b$.

Teorema (de Green)

Sea C una curva en el plano, simple, cerrada, suave por tramos y con orientación positiva.

Sea D la región (plana) delimitada por C.



Si P y Q son funciones escalares (reales) de las variables x e y, con primeras derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a D, entonces:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Notación: Con frecuencia, suele expresarse a la curva C referida en el Teorema de Green de tal manera que no se pierda de vista su relación con la región D... En estos casos, se escribe ∂D (*frontera de* D) y esta notación lleva implícita también la orientación positiva de dicha curva. Con esto en mente, la ecuación anterior se puede plantear como

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

Observación: Con la notación anterior resulta más natural considerar al Teorema de Green como una versión del Teorema Fundamental del Cálculo para integrales dobles... En efecto, recordemos la fórmula establecida en el TFC (2da parte):

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Luego, comparemos:

- En ambos casos, en el miembro izquierdo aparece una integral que involucra derivadas.
- En ambos casos, el miembro derecho comprende los valores de las funciones originales sólo en la frontera del dominio de interés.

Por ejemplo: Supongamos que tenemos la información de que $P(x,y) = Q(x,y) = 0$ sobre C (es decir, P y Q restringidas a la curva C son la función constantemente igual a 0). Entonces, aplicando el T. de Green, podemos resolver casi inmediatamente la integral doble

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \overset{\text{T.Green}}{=} \int_C P\, dx + Q\, dy = \int_C 0\, dx + \int_C 0\, dy = 0$$

sin importar qué valores tomen P y Q (ni sus derivadas parciales) en los puntos de la región D.

Ejercicio: Aplicar el T. de Green para mostrar que el área A de la región D referida en dicho teorema se puede expresar mediante cualquiera de las fórmulas siguientes:

$$\boxed{A(D) = \int_{\partial D} x\, dy} \quad \boxed{A(D) = -\int_{\partial D} y\, dx} \quad \boxed{A(D) = \tfrac{1}{2}\int_{\partial D} x\, dy - y\, dx}$$

Sugerencia: Leer el EJEMPLO 3 (pág.1087) y la discusión previa.

EJEMPLO 3 Determine el área delimitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas de la elipse son $x = a \cos t$ y $y = b \operatorname{sen} t$, donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Al aplicar la tercera fórmula de la ecuación 5, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2} \int_C x\,dy - y\,dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t)\,dt - (b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t)\,dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi a b \end{aligned}$$

Observación:

Podría darse o no el caso en que

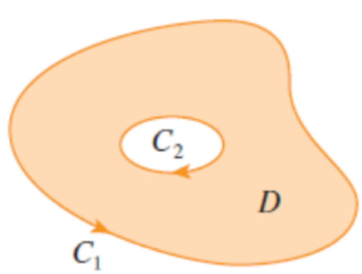
$C = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \ldots \cup \partial Dn.$

Leer el EJEMPLO 4 de la pág.1088.

Sean D_1 y D_2 regiones en el plano tales que $D_2 \subseteq D_1$. Entonces, si sus respectivas curvas fronteras, C_1 y C_2, son curvas suaves, simples y cerradas, orientadas C_1 en dirección positiva (*antihoraria*) y C_2 en la dirección opuesta, se cumple que

$$\iint_{D_1 - D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

donde $C = \partial\,(D_1 - D_2)$.



Leer el EJEMPLO 5 de la pág.1088-89.

TEMA 19: INTEGRALES DE SUPERFICIE

- Las **integrales de superficie**, como su nombre lo indica, se evalúan sobre superficies (es decir, sobre "cáscaras" de sólidos, o parte de ellas).

La relación que existe entre las integrales de superficie y área de una superficie es la misma que hay entre integrales de línea y longitud de arco de una curva.

Luego, si en el interior de D:
- las funciones componentes de $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son continuas
- $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ no se anulan
- $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ no son vectores paralelos

se puede demostrar (aunque no lo haremos en este curso), utilizando la definición anterior, la siguiente fórmula, válida aún cuando D no es un rectángulo:

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA}$$

Notación: Se debe tener presente que $f(\mathbf{r}(u, v))$ representa el valor de f en el punto final del vector posición de $\mathbf{r}(u, v)$, es decir,

$$f(\mathbf{r}(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Como vemos, esta fórmula permite evaluar una **integral de superficie** convirtiéndola en una **integral doble** sobre el dominio D del parámetro.

Definición (integral de superficie de un campo vectorial)

Sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo vectorial tridimensional continuo sobre una superficie S orientada según el vector normal dado por $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada punto (x, y, z). La integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre S es

$$\iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, dS$$

En notación abreviada:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

INTEGRALES DE SUPERFICIE

	Superficie dada como gráfica $z = g(x,y)$	Superficie parametrizada $\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$
Campos escalares (notación: $f(x,y,z)$)	$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA$	$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\,\lvert\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\rvert\,dA$
Campos Vectoriales (notación: $\boldsymbol{F}(x,y,z)$)	$\mathbf{n} = \dfrac{-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$ $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right)dA$	$\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\lvert\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\rvert}$ $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,dA$
Área de superficie	$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$	$A(S) = \iint_D \lvert\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\rvert\,dA$

Esta integral de superficie se suele llamar también integral de Flujo por sus principales aplicaciones.

Las **integrales de superficie de campos vectoriales** también aparecen con frecuencia en esta disciplina y su principal interpretación es una medida del **flujo** a través de la superficie cuando el campo vectorial en el integrando es un campo de fuerza...

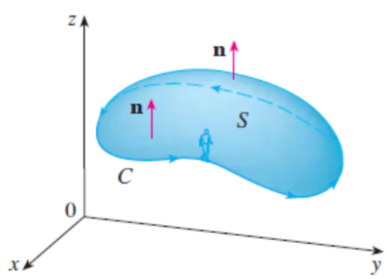
En efecto: Supongamos que S es una superficie orientada con vector normal unitario dado por $\mathbf{n}(x,y,z)$ en cada uno de sus puntos.

- ▶ Imaginemos que un fluído circula a través de S con de *densidad* dada por la función escalar $\rho(x,y,z)$ y *velocidad* dada por el campo vectorial $\mathbf{v}(x,y,z)$.
- ▶ Entonces, el *caudal* (masa por unidad de tiempo) que atraviesa a S *por unidad de área* es $\rho\mathbf{v}$ en cada punto (x,y,z) de S.
- ▶ En este caso, $\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$ da el *caudal total* que atraviesa a S.

Otros ejemplos aplicados incluyen *flujo eléctrico* (cuando $\mathbf{F}$ es un campo eléctrico), *flujo de calor*, etc... **Recomendación:** Leer el EJEMPLO 6 (p.1120) y los comentarios previos (p.1119).

TEMA 20:TEOREMA DE STOKES y GAUSS

- El **Teorema de Green** relaciona una integral (doble) **sobre una región plana** con una intregral de línea alrededor de su curva frontera (también plana).
- El **Teorema de Stokes** relaciona una integral **sobre una superficie** (orientada) con una intregral de línea alrededor de su curva frontera (que es una curva en el espacio).



En el Teorema de Stokes, dada la superficie orientada S, se considera **orientación positiva de la curva frontera** C a la inducida por S...

Esto es: *si se camina recorriendo C con la cabeza señalando hacia donde indica* **n**, *la dirección positiva será aquella tal que S quede siempre a mano izquierda.*

Definición (rotacional de un campo vectorial)

Si $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$ *es un campo vectorial sobre* $\mathbb{R}^3$ *tal que las derivadas parciales de P, Q y R existen sobre una región abierta D, el* **rotacional** *de* **F** *es el campo vectorial tridimensional definido sobre D como*

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Por lo tanto, la forma más sencilla de recordar la definición de rotacional es mediante la expresión simbólica

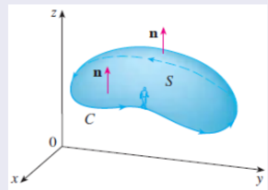
$$\boxed{\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}}$$

Ejercicio: Mostrar que si f es una función escalar (real) de tres variables con derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $\mathrm{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$

Teorema (de Stokes)

Sea S una superficie suave por tramos, orientada y acotada por una curva C suave por tramos, simple y cerrada, con orientación positiva. Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial tridimensional cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces,*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



Propiedad: En general, si S_1 y S_2 son superficies orientadas con la misma curva frontera C, y ambas satisfacen las hiótesis del Teorema de Stokes,

$$\boxed{\iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}$$

Definición (divergencia de un campo vectorial)

Si $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$ *es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ y $\partial R/\partial z$ existen sobre una región abierta D, la* **divergencia** *de* $\mathbf{F}$ *es la función escalar (real) de tres variables definida sobre D como*

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

La razón del nombre "divergencia" radica en su aplicación al flujo de fluídos. En efecto, si $\mathbf{F}(x,y,z)$ describe la velocidad de un fluído (o gas), entonces $\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z)$ representa la **razón de cambio neta** (con respecto al tiempo) de la masa del fluído que fluye desde el punto $(x,y.z)$ (por unidad de volumen).

Para memorizar esta fórmula también es útil pensar al operador diferencial vectorial "nabla" (operador gradiente) como un vector, lo que permite expresar $\operatorname{div} \mathbf{F}$ como un producto escalar formal entre ∇ y $\mathbf{F}$. En efecto:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= \operatorname{div} \mathbf{F}$$

Por lo tanto, resulta válida la expresión simbólica

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}}$$

Ejercicio: Mostrar que si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $\operatorname{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$. **Ayuda:** Teorema 11, p.1095.

Un nuevo operador diferencial surge de la **divergencia de un campo gradiente**. En efecto: Si f es una función escalar de tres variables,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

y, dado que esta última expresión se presenta con mucha frecuencia, se estila representarla mediante la notación abreviada $\nabla^2 f$. A $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ se le llama **operador de Laplace** debido a su relación con la conocida **ecuación de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

También se puede aplicar el operador de Laplace a un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ en términos de sus funciones componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P\mathbf{i} + \nabla^2 Q\mathbf{j} + \nabla^2 R\mathbf{k} =$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)$$

Otra posibilidad que surge de aplicar la divergencia, ahora a un campo vectorial bidimensional, es la de expresar la fórmula establecida en el **teorema de Green** en una **"versión vectorial"**:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\ dA$$

donde D es una región en el plano xy y C es su curva frontera. **Ejercicio:** Demostrarlo! **Ayuda:** Ver p.1096.

Luego, se podría conjeturar una versión tridimensional de dicha expresión:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\ dV$$

donde E es una región sólida en el espacio y S es su superficie frontera.

El **teorema de Gauss** (o **teorema de la divergencia**) establece que, bajo hipótesis adecuadas, la conjetura anterior es válida. Entonces...

Teorema (**de Gauss**)

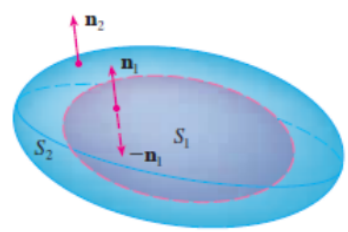
Sean E una región sólida simple y S la superficie frontera de E considerada con orientación positiva (hacia afuera). Sea **F** *un campo vectorial tridimensional cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a E. Entonces:*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \; dV$$

Nota: Se dice que una **región sólida** es **simple** cuando es simultáneamente de los tipos 1, 2 y 3 (*por ejemplo, regiones acotadas por elipsoides o por cajas rectangulares*).

Hasta aquí, se ha enunciado y ejemplificado el teorema de la divergencia sólo para regiones sólidas simples, pero se puede demostrar también para regiones que son uniones finitas de esta clase de regiones. A modo ilustrativo, consideramos la siguiente versión...

Propiedad: Si E es una región sólida que se ubica entre dos superficies "cerradas", S_1 y S_2, tales que S_1 queda completamente contenida en el interior de S_2 (*ver figura*), con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ (hacia afuera) respectivamente,



entonces (bajo las hipótesis supuestas en el teorema de Gauss),

$$\boxed{\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \; dV = -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}$$