Романович Володимир Володимирович КА-02

Самостійна робота №2

Варіант 9

Задача 1

$\mathcal{S} = \{[a;b] : a, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, a < b\}$

Бачимо, що оскільки a < b, то $\varnothing \notin \mathcal{S}$, тому $\mathcal{S}$ – не кільце

Розглянемо тепер $A = \left[\sqrt{2}, \sqrt{5}\right] \in \mathcal{S},\ B = \left[\sqrt{3}, \sqrt{6}\right] \in \mathcal{S}$

Тоді $A\backslash B = \left[\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$.

Очевидно, що неможливо підібрати таке $\bigsqcup_{k=1}^{n}[a_k; b_k], a_k, b_k \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, a_k < b_k$, щоб отримати $[\sqrt{2}; \sqrt{3})$, як мінімум тому, що об'єднання відрізків – замкнута множина на $\mathbb{R}$, а $[\sqrt{2}; \sqrt{3})$ – відкрита.

Отже $\mathcal{S}$ – не півкільце.

Відповідь: $\mathcal{S}$ не є ні кільцем, ні півкільцем.

Задача 2

Побудувати кільце та σ-кільце, породжені сім'єю S підмножин множини Ω

$S = \{(0; \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\},\ \Omega = (0; 1)$

Розглянемо кільце $R_s = \left\{(0; \frac{1}{n}), \bigcup\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right), (0; \frac{1}{n}) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right) : n, p_i, k_i \in \mathbb{N},\ k_i \leqslant p_i\right\}$

$S \subset R_s$. Доведемо, що R_s – найменше кільце, яке містить S:

Нехай R – інше кільце, що містить S. Тоді:

1) $\varnothing \in R$

2) $\left(0; \frac{1}{n_1}\right) \setminus \left(0; \frac{1}{n_1}\right) = \begin{cases} \varnothing, & n_2 \leqslant n_1 \\ [\frac{1}{n_2}; \frac{1}{n_1}), & n_2 > n_1 \end{cases} \in R \implies \left[\frac{1}{n_2}; \frac{1}{n_1}\right) \in R, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1$

3) $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\left(0; \frac{1}{n_i}\right) = \left(0; \frac{1}{n}\right) \in R,\ \bigcup\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right) \in R,\ \left(\bigcup\limits_{j=1}^{v}\left(0; \frac{1}{n_j}\right)\right) \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right)\right) = (0; \frac{1}{n}) \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right)\right) \in R$

Отже, якщо R кільце та воно містить S, то

$R \supset \left\{\varnothing, (0; \frac{1}{n}), \bigcup\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right), (0; \frac{1}{n}) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right) : n, p_i, k_i \in \mathbb{N},\ k_i < p_i\right\}$

Оскільки $\varnothing$ можна записати як $\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right)$, $p_i = k_i$, то $R_s \subset R$, а отже є кільцем, породженим сім'єю S.

Розглянемо σ-кільце $K_s = \left\{(0; \frac{1}{n}), \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right), (0; \frac{1}{n}) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right) : n, p_i, k_i \in \mathbb{N},\ k_i \leqslant p_i\ \right\}$

$S \subset K_s$. Доведемо, що K_s – найменше σ-кільце, яке містить S:

Нехай K – інше σ-кільце, та воно містить S. σ-кільце, що містить S містить всі елементи кільця, породженого сім'єю S та замкнуте відносно зліченного об'єднання, тому

1)$\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}}(0; \frac{1}{n_k}) = (0; \frac{1}{n}) \in K$

2)$\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right) \in K, k_i \leqslant p_i$

3)$(0; \frac{1}{n}) \cup \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}}\left[\frac{1}{p_i}; \frac{1}{k_i}\right) \in K, k_i \leqslant p_i$

Отримуємо, що $K_s \subset K$, тому K_s – σ-кільце, породжене сім'єю S.

Задача 3

$A = (-1;1) \cap \{x \in \mathbb{R} : \ln(1+x) \in \mathbb{Q}\} = \{x \in (-1;1) : \ln(1+x) \in \mathbb{Q}\}$

Розглянемо $A_q = \{x \in (-1;1) : \ln(1+x) = q\}$

$\ln(1+x) = q \implies x = e^q - 1, \ \ -1 < x < 1 \implies -1 < e^q - 1 < 1 \implies q < \ln 2$

Отже $A_q = \{x \in \mathbb{R} : x = e^q - 1, q \in \mathbb{Q} \backslash [\ln 2; +\infty)\}$

Позначимо $\mathbb{Q}_A = \mathbb{Q} \backslash [\ln 2; +\infty)$

Оскільки $\mathbb{Q}$ – злічення множина, то $\mathbb{Q}_A \subset \mathbb{Q}$ – також злічення

A_q – одноточкова множина, тому $A_q \in \mathcal{B}$ і $\lambda(A_q) = 0$

$A = \bigsqcup\limits_{q \in \mathbb{Q}_A} A_q, \ A \in \mathcal{B}$, оскільки $\mathcal{B}$ — σ-кільце.

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}_A} A_q\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}_A} \lambda(A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}_A} 0 = 0$$

Задача 4

Довести, що функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – вимірна.

$f(x,y) = [x^2 - y^2] \cos \pi xy$

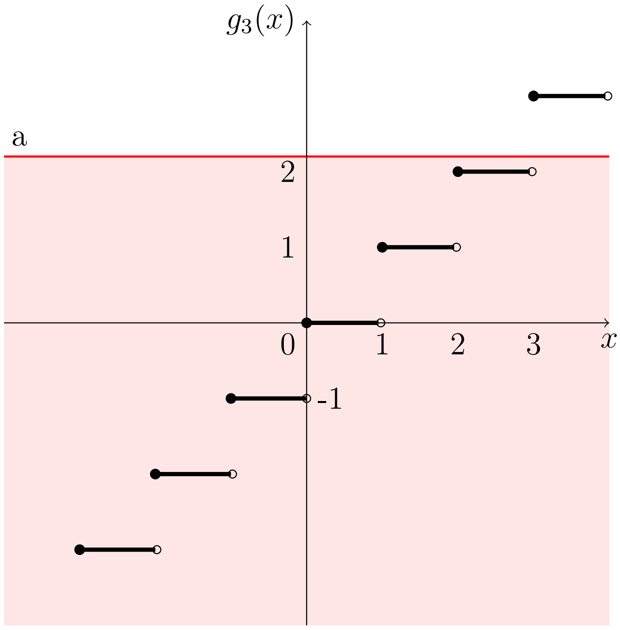
Розглянемо функції $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$g_1(x,y) = x^2 - y^2$ – неперервна на $\mathbb{R}^2$, тому вимірна за теоремою.

$g_2(x,y) = \cos \pi xy$ – неперервна на $\mathbb{R}^2$, тому вимірна за теоремою.

$g_3(x) = [x]$

Розглянему множину $\{f \leqslant a\}$



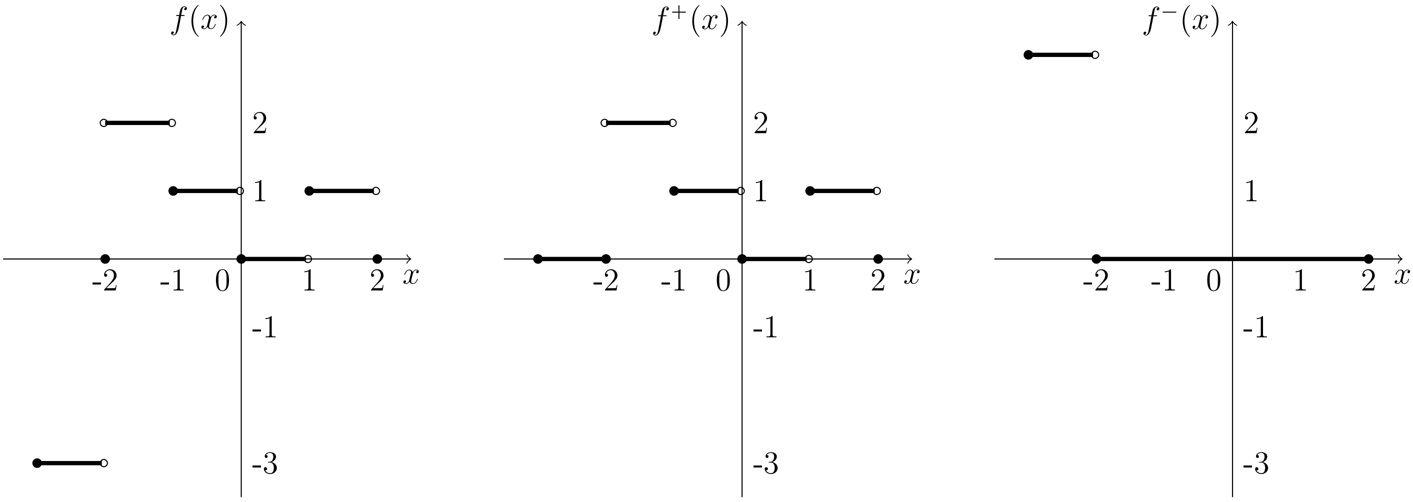
$\forall a \in \mathbb{R} : [x] \leqslant a \implies x \in (-\infty; [a]+1) \in \mathcal{B}$ як відкрита півпряма, отже за означенням $g_3(x)$ – вимірна.

Тоді $[x^2 - y^2] = g_3 \circ g_1$ – вимірна за твердженням, як композиція вимірних функцій.

Отже $f(x,y) = [x^2 - y^2] \cdot \cos \pi xy$ – вимірна за теоремою, як добуток вимірних функцій.

Задача 5

$f(x) = [x]sgn(\sin \frac{\pi}{2}x), A = [-3, 2]$



Позначимо: $A_1 = [-3; -2], A_2 = (-2; -1), A_3 = [-1; 0), A_4 = [0; 1), A_5 = [1; 2), A_6 = \{2\}$
$B_1 = [-3; -2), B_2 = [-2; 2]$
Тоді:

$$f^+(x) = \begin{cases} 0, & x \in A_1 \cup A_4 \cup A_6 \\ 1, & x \in A_3 \cup A_5 \\ 2, & x \in A_2 \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} 0, & x \in B_2 \\ 3, & x \in B_1 \end{cases}$$

За означенням:

$$\int_A f^+ d\lambda = \int_{[-3;2]} f^+(x) d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \lambda(A_k) =$$

$$= 0 \cdot \lambda([-3; -2]) + 2 \cdot \lambda((-2; -1)) + 1 \cdot \lambda([-1; 0)) + 0 \cdot \lambda([0; 1)) + 1 \cdot \lambda([1; 2)) + 0 \cdot \lambda(\{2\}) = 4$$

$$\int_A f^- d\lambda = \int_{[-3;2]} f^-(x) d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \lambda(B_k) = 3 \cdot \lambda([-3; -2)) + 0 \cdot \lambda([-2; 2]) = 3$$

$$\int_A |f| d\lambda = \int_A f^+ d\lambda + \int_A f^- d\lambda = 4 + 3 = 7$$

$$\int_A f d\lambda = \int_A f^+ d\lambda - \int_A f^- d\lambda = 4 - 3 = 1$$

Задача 6

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\lambda(x)$
$f_n(x) = e^{-x}(1 + \cos^n x), A = \mathbb{R}_+$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-x}(1 + \cos^n x) = \begin{cases} e^{-x}(1 + 0), & |\cos x| < 1 \\ e^{-x}(1 + 1), & \cos x = 1 \\ e^{-x}(1 + (-1)^n), & \cos x = -1 \end{cases}$$

$\tilde{A} = \{x \in A : \cos x = \pm 1\}$ – зліченна множина, тому $\lambda(\tilde{A}) = 0$
Отже $f_n(x) \to e^{-x}$ λ-майже всюди, $n \to \infty$

Розглянемо $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\, d\lambda(x)$:

Нехай $g_n(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{[0;n]}(x)$, тоді $g_n(x) \uparrow e^{-x}\ \forall x \in \mathbb{R}$

Тоді за наслідком з теореми Беппо-Леві:

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n(x)\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{[0;n]}(x)\, d\lambda(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[0;n]} e^{-x}\, d\lambda(x) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x}\, dx = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n}) = 1 < \infty$$

Перехід (1) здійснюється за теоремою, завдяки тому, що e^{-x} – інтегровна за Ріманом.

Отримали що $e^{-x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$ та $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\, d\lambda(x) = 1$

Використаємо теорему Лебега про обмежену збіжність:

1) $f_n(x) \to e^{-x}$ λ-майже всюди, $n \to \infty$

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+ : |f_n(x)| = |e^{-x}(1 + \cos^n x)| \leqslant |e^{-x} \cdot 2| = 2e^{-x} = g(x), \quad g(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\, d\lambda(x) = 1$