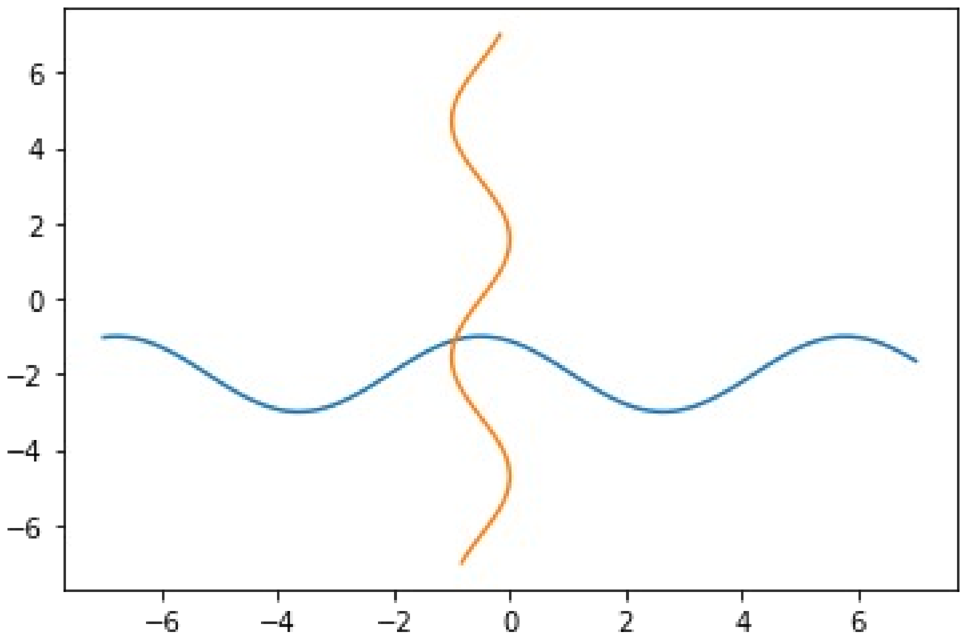
Побудуємо графіки цих функцій

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-7, 7, 100)
y1 = np.cos(x + 0.5) - 2
y= np.linspace(-7,7,100)
x2 = 0.5 * (np.sin(y) - 1)

plt.plot(x,y1)
plt.plot(x2, y)
plt.savefig('plot.png', dpi=500)
plt.show()
```



Бачимо, що перетин кривих є близьким до точки (-1,-1), отже її і візьмемо як початкове наближення

Запишемо систему у вигляді $ \begin{cases} x = \frac12 (\sin{y}-1)\ y=\ cos{(x+0.5)} - 2 \end{cases} ,*отже* \vec{x} = \begin{pmatrix} x \ y \end{pmatrix} = \ begin{pmatrix} \frac12 (\sin{y}-1) \ \cos{(x+0.5)} - 2 \end{pmatrix} = \Phi(\vec{x}) $

```
from scipy.optimize import fsolve
import pandas as pd

def phi_1(x_vec):
    """Takes (x,y) vector and returns 0.5(sin(y)-1)"""
    (x,y) = x_vec
    return 0.5 * (np.sin(y) - 1)
```

```
def phi_2(x_vec):
    """Takes (x,y) vector and returns cos(x + 0.5) - 2"""
    (x,y) = x_vec
    return np.cos(x+0.5) - 2

def iterative_solve(Phi_vec, starting_value_vec, epsilon=0.00001,
print_table = False):
    """Takes vector-function Φ and starting value, solves x=Φ(x)
equation, returns x vector and print latex code table if chosen to"""
    df = pd.DataFrame({"x": [starting_value_vec[0]], "y":
[starting_value_vec[1]], "delta": [" "]})
    prev_x_vec = starting_value_vec.copy()
    current_x_vec = [None,None]
    iteration = 0
    while True:
        iteration += 1
        for i in range(len(prev_x_vec)):
            current_x_vec[i] = Phi_vec[i](prev_x_vec)
        delta = max([abs(x) for x in np.subtract(prev_x_vec,
current_x_vec)])

        df.loc[iteration] = [current_x_vec[0], current_x_vec[1],
delta]
        if delta < epsilon:
            if print_table:
                print(df.style.to_latex())
            return current_x_vec
        else:
            prev_x_vec = current_x_vec.copy()


Phi_vector = [phi_1, phi_2]
# x = iterative_solve(Phi_vector, [-1,-1], print_table=True)
# print(iterative_solve(Phi_vector, [5, 100]))
# print(iterative_solve(Phi_vector, [0, 0]))
# print(iterative_solve(Phi_vector, [500, -500], print_table=True))
```

\begin{tabular}{lrrl} Iter & x & y & \Delta \ 0 & -1.000000 & -1.000000 & \ 1 & -0.920735 & -1.122417 & 0.122417 \ 2 & -0.950576 & -1.087211 & 0.035206 \ 3 & -0.942667 & -1.099803 & 0.012592 \ 4 & -0.945559 & -1.096387 & 0.003416 \ 5 & -0.944781 & -1.097630 & 0.001243 \ 6 & -0.945065 & -1.097295 & 0.000335 \ 7 & -0.944989 & -1.097417 & 0.000122 \ 8 & -0.945016 & -1.097384 & 0.000033 \ 9 & -0.945009 & -1.097396 & 0.000012 \ 10 & -0.945012 & -1.097393 & 0.000003 \ \end{tabular}

Напишемо функцію, щоб записувати нецілі числа з 5 знаками після коми (більше нам не потрібно, оскільки точність 0.00001)

```
def format_float(flt):
    """Function to format floats so only 5 digits after decimal is
```

```
shown"""
    if flt is int:
        return flt
    else:
        return float("{:.5f}".format(flt))
```

Перевіримо наш розв'язок використовуючи fsolve() з scipy.optimize, та порахувавши $\vec{x} - \Phi(\vec{x})$

```
def F1(x_vec):
    (x, y) = x_vec
    f1 = 0.5 * (np.sin(y) - 1) - x
    f2 = np.cos(x+0.5) - 2 - y
    return [f1, f2]


result = fsolve(F1, (-1, -1))
print("SciPy result:", [format_float(num) for num in result])

x = iterative_solve(Phi_vector, [-1,-1])
print("Our result:", [format_float(num) for num in x])
x_minus_Phi = np.subtract(x, [Phi_vector[0](x), Phi_vector[1](x)])
print("x-Φ(x):", [format_float(num) for num in x_minus_Phi])
```

```
SciPy result: [-0.94501, -1.09739]
Our result: [-0.94501, -1.09739]
x-Φ(x): [-0.0, 0.0]
```

Бачимо, що з точністю до ε наш розв'язок рівний розв'язку fsolve(), та $\vec{x} - \Phi(\vec{x}) = \vec{0}$

\begin{center} \Large Задача 2 \end{center}

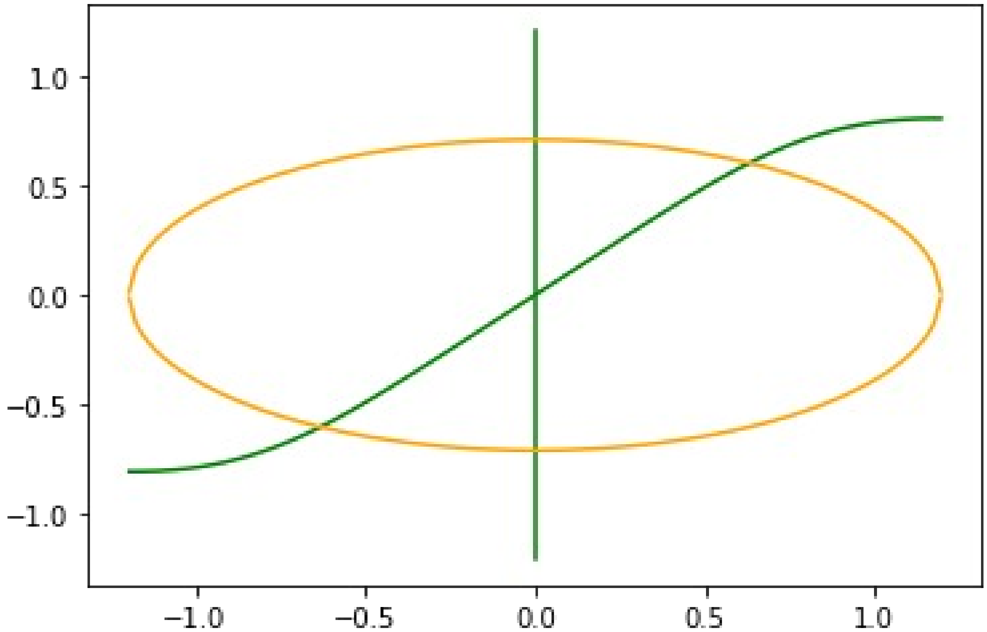
$$\begin{cases} tg(xy) = x^2 \\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Для початку побудуємо графік

```
x = np.linspace(-1.195, 1.195, 120)
y1 = np.arctan(x**2)/x
y= np.linspace(-1.2,1.2,120)
x2 = 0*x
y3 = np.sqrt(1-0.7*x**2) / np.sqrt(2)
y4 = -y3

plt.plot(x,y1, color="green")
plt.plot(x2, y, color="green")
plt.plot(x,y3, color="orange")
plt.plot(x,y4, color="orange")
```

```
plt.savefig("plot2.png", dpi=500)
plt.show()
```



Бачимо що система має 4 розв'язки, в точках, близьких до (0.6,0.6), (0,0.7), (-0.6,-0.6), (0,-0.7).Саме такі точки будемо брати як початкове наближення. Знайдемо тепер матрицю Якобі та матрицю F

$$W=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{y}{\cos^2(x\,y)}-2x & \frac{x}{\cos^2(x\,y)}\\ 1.4x & 4y\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}tg(x\,y)-x^2\\ 0.7x^2+2y^2-1\end{pmatrix}$$

Далі шукаємо розв'язок використовуючи ітераційну формулу $x^{(k+1)}=x^{(k)}-W^{-1}\left(x^{(0)}\right)\cdot F\left(x^{(k)}\right)$

```
def W(x_vec):
    """Takes vector and returns Jacobi matrix of specific shown above
function"""
    (x,y) = x_vec
    df1dx = y/(np.cos(x * y))**2 - 2*x
    df1dy = x/(np.cos(x * y))**2
    df2dx = 1.4 * x
    df2dy = 4 * y
    return np.array([
            [df1dx, df1dy],
            [df2dx, df2dy]
```

```python
        ])

def F(x_vec):
    """Takes vector x_vec and returns F(x_vec), where F is a vector-
function shown above"""
    (x,y) = x_vec
    f1 = np.tan(x * y) - x ** 2
    f2 = 0.7 * x**2 + 2 * y**2 - 1
    return [f1, f2]

def newton_method(W, F, starting_value_vec, epsilon=0.00001,
print_table=False):
    """Takes [x0,y0] starting value and returns [x,y] solution of
system found by newton method"""
    df = pd.DataFrame({"x": [starting_value_vec[0]], "y":
[starting_value_vec[1]], "delta": [" "]})
    prev_x_vec = list(starting_value_vec)
    W_inv_0 = np.linalg.inv(W(prev_x_vec))
    iteration = 0
    while True:
        if iteration > 999:
            raise RuntimeError
        iteration += 1
        # x^k+1 = x^k - W^-1 * F(x^k)
        current_x_vec = np.subtract(np.array([prev_x_vec]), W_inv_0 @
F(prev_x_vec))
        delta_vec = np.subtract(prev_x_vec, current_x_vec)[0]  #
Result of np.subtract is [[delta1...deltan]] so delta_vec is
[delta1...deltan]
        delta = max([abs(d) for d in delta_vec])
        df.loc[iteration] = [current_x_vec[0][0], current_x_vec[0][1],
delta]
        if delta < epsilon:
            if print_table:
                print(df.style.to_latex())
            return current_x_vec[0]
        else:
            prev_x_vec = current_x_vec[0]

print(newton_method(W, F, [0.6,0.6], print_table=True))
print(newton_method(W, F, [0, 0.7]))
print(newton_method(W, F, [-0.6,-0.6]))
print(newton_method(W, F, [0, -0.7]))
```

```
\begin{tabular}{lrrl}
 & x & y & delta \\
0 & 0.600000 & 0.600000 &   \\
1 & 0.632322 & 0.600354 & 0.032322 \\
2 & 0.630903 & 0.600546 & 0.001419 \\
3 & 0.631037 & 0.600525 & 0.000134 \\
```

```
4 & 0.631024 & 0.600527 & 0.000013 \\
5 & 0.631025 & 0.600527 & 0.000001 \\
\end{tabular}
```

```
[0.63102545 0.6005268 ]
[0.         0.70710678]
[-0.63102545 -0.6005268 ]
[ 0.         -0.70710678]
```

Отримали розв'язки (0.63102545, 0.6005268), (0, 0.70710678), (-0.63102545, -0.6005268), (0, -0.70710678). Для розв'язку з початковим наближенням (0.6,0.6) наведемо таблицю:

\begin{tabular}{cccc} Iter & x & y & Δ \ 0 & 0.600000 & 0.600000 & \ 1 & 0.632322 & 0.600354 & 0.032322 \ 2 & 0.630903 & 0.600546 & 0.001419 \ 3 & 0.631037 & 0.600525 & 0.000134 \ 4 & 0.631024 & 0.600527 & 0.000013 \ 5 & 0.631025 & 0.600527 & 0.000001 \ \end{tabular}

Перевіримо ці розв'зки за допомогою функції fsolve із scipy.optimize та підрахувавши F($\vec{x}_{¿}$)

```python
scipy_results = [fsolve(F, (0.6, 0.6)), fsolve(F, (0,0.7)), fsolve(F,
(-0.6,-0.6)), fsolve(F, (0, -0.7))]
scipy_results = [[format_float(num) for num in lst] for lst in
scipy_results]   # Formatting results
print("SciPy results:", *scipy_results)

our_results = [newton_method(W,F, (0.6,0.6)), newton_method(W,F,
(0,0.7)), newton_method(W, F, (-0.6,-0.6)), newton_method(W, F, (0,-
0.7))]
F_x = [F(x_vec) for x_vec in our_results]
our_results = [[format_float(num) for num in lst] for lst in
our_results]   # Formatting results
print("Our results:", *our_results)
F_x = [[format_float(num) for num in lst] for lst in F_x]   #
Formatting results
print(*F_x)
```

```
SciPy results: [0.63103, 0.60053] [-0.0, 0.70711] [-0.63103, -0.60053]
[0.0, -0.70711]
Our results: [0.63103, 0.60053] [0.0, 0.70711] [-0.63103, -0.60053]
[0.0, -0.70711]
[-0.0, 0.0] [0.0, 0.0] [-0.0, 0.0] [-0.0, 0.0]
```

Бачимо що із заданою точністю наші розв'язки дорівнюють розв'язкам функції fsolve, та $F(\vec{x}_{¿}) = \vec{0}$ Спробуємо взяти інші початкові наближення, наприклад (100,200)

```python
try:
    print(newton_method(W, F, [5, 5]))
```

```python
except RuntimeError:
    print("Can't find a solution in 999 iterations")
```

```
/tmp/ipykernel_103363/2585968209.py:16: RuntimeWarning: overflow
encountered in double_scalars
  f1 = np.tan(x * y) - x ** 2
/tmp/ipykernel_103363/2585968209.py:16: RuntimeWarning: invalid value
encountered in tan
  f1 = np.tan(x * y) - x ** 2
/tmp/ipykernel_103363/2585968209.py:17: RuntimeWarning: overflow
encountered in double_scalars
  f2 = 0.7 * x**2 + 2 * y**2 - 1
```

```
Can't find a solution in 999 iterations
```

Бачимо що при такому початковому наближенні спрощений метод Ньютона не є збіжним