Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Інститут прикладного системного аналізу

Лабораторна робота № 4

з курсу «Чисельні методи»

з теми «Наближення функцій»

Варіант № 9

Виконав студент 2 курсу групи КА-02
Романович Володимир Володимирович
перевірила старший викладач
Хоменко Ольга Володимирівна

Київ – 2022

Задача 1

$$y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}$$

Виберемо відрізок інтерполяції [-6;0], та виберемо 4 вузли, відстань між якими буде однаковою $x_1 = -6, x_2 = -4, x_3 = -2, x_4 = 0$

Значення функції в цих точках:

x	-6	-4	-2	0
y	7.963369	-0.2706706	-2	-6.778112

Побудуємо таблицю скінченних різниць(обчислено в .ipynb файлі):

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-6	7.96	-8.23404	6.50471	-9.55349
-4	-0.27	-1.72933	-3.04878	
-2	-2	-4.77811		
0	-6.78			

Знайдемо поліном Лагранжа:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} +$$
$$y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} +$$
$$y_3 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$L_3(x) \approx 7.9634 \cdot \frac{(x+4)(x+2)x}{-2 \cdot (-4) \cdot (-6)} - 0.2707 \cdot \frac{(x+6)(x+2)x}{2 \cdot (-2) \cdot (-4)} - 2 \cdot \frac{(x+6)(x+4)x}{4 \cdot 2 \cdot (-2)} -$$
$$-6.7781 \cdot \frac{(x+6)(x+4)(x+2)}{6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{-11942x^3 - 94518x^2 - 284611x - 406686}{60000} \approx$$
$$\approx -(0.199x^3 + 1.575x^2 + 4.744x + 6.778)$$

Перший і другий поліноми Ньютона реалізовані програмно на Python.

Знайдемо значення поліномів Лагранжа та Ньютона в деяких невузлових точках $\tilde{x}_1 = -5, \tilde{x}_2 = -3, \tilde{x}_3 = -1, \tilde{x}_4 = -2.1$, та порівняємо із значенням заданої функції в цих точках

$\tilde{x}_i$	$f(x)$	$Lagrange$	$Newton1$	$Newton2$
-5	2.90042586	2.43616706	2.43616706	2.43616706
-3	-1.73575888	-1.35133073	-1.35133073	-1.35133073
-1	-2.43656366	-3.41086496	-3.41086496	-3.41086496
-2.1	-1.99967484	-1.92053835	-1.92053835	-1.92053835

Побудуємо інтерполяційний кубічний сплайн за таблицею:

x	-4	-2	0
y	-0.271	-2	-6.778

:

$$g(x) = \begin{cases} g_1, x \in [-4;-2] \\ g_2, x \in [-2;0] \end{cases} = \begin{cases} a_1 + b_1(x+2) + c_1(x+2)^2 + d_1(x+2)^3, & x \in [-4;-2] \\ a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3, & x \in [-2;0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1(-4+2) + c_1(-4+2)^2 + d_1(-4+2)^3 = -0.271 \\ a_2 - 2b_2 + 4c_2 - 8d_2 = -2 \\ a_2 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot d_2 = -6.778 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 - 2b_1 + 4c_1 - 8d_1 = -0.271 \\ a_2 - 2b_2 + 4c_2 - 8d_2 = -2 \\ a_2 = -6.778 \end{cases}$$

З неперервності сплайну: $g_1(-2) = g_2(-2), g_1'(-2) = g_2'(-2), g_1''(-2) = g_2''(-2)$

$g_1'(x) = b_1 + 2c_1(x+2) + 3d_1(x+2)^2,$

$g_2'(x) = b_2 + 2c_2 x + 3d_2 x^2$

$g_1''(x) = 2c_1 + 6d_1(x+2)$

$g_2''(x) = 2c_2 + 6d_2 x$

Також умовою сплайну є $g_1''(-4) = 0, g_2''(0) = 0$

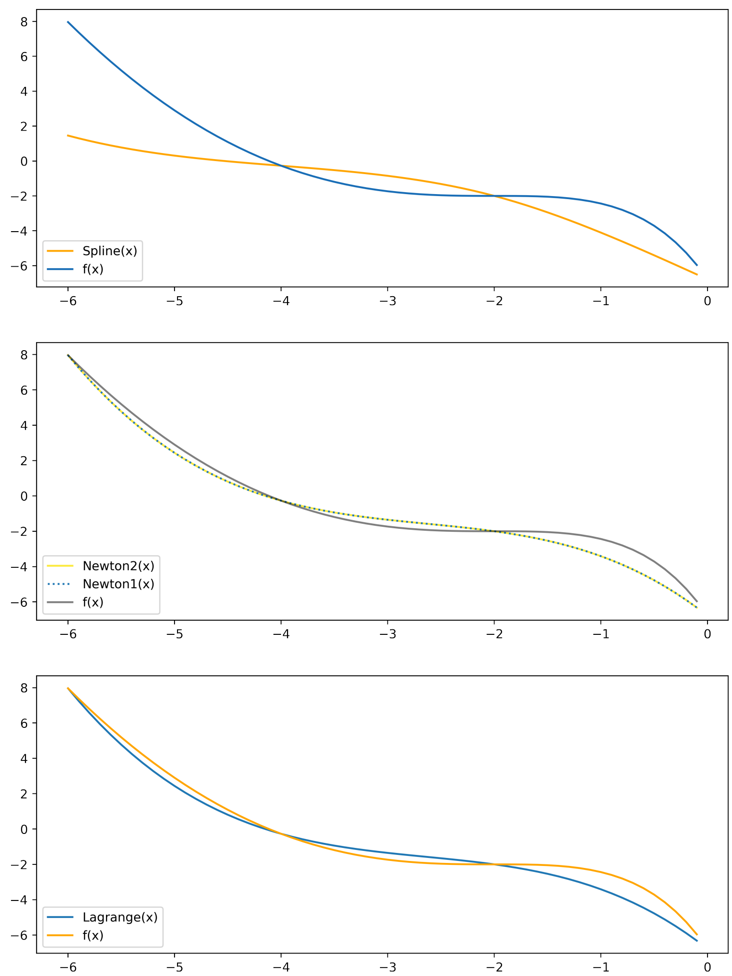
Отже маємо таку систему:

$$\begin{cases} a_1 - 2b_1 + 4c_1 - 8d_1 = -0.271 \\ a_2 - 2b_2 + 4c_2 - 8d_2 = -2 \\ a_2 = -6.778 \\ a_1 = a_2 - 2b_2 + 4c_2 - 8d_2 \\ b_1 = b_2 - 4c_2 + 12d_2 \\ 2c_1 = 2c_2 - 12d_2 \\ 2c_1 - 12d_1 = 0 \\ 2c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 2b_1 - 4c_1 + 8d_1 - 0.71 \\ a_1 = a_2 - 2b_2 + 4c_2 - 8d_2 \\ a_2 - 2b_2 + 4c_2 - 8d_2 = -2 \\ a_2 = -6.778 \\ b_1 = b_2 - 4c_2 + 12d_2 \\ c_1 = c_2 - 6d_2 \\ c_1 = 6d_1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -6.778 \\ -2b_1 + 16d_1 = 1.729 \\ b_2 = -(2.389 + 4d_2) \\ b_1 = -2.389 - 8d_1 \\ d_1 = -d_2 \\ c_1 = 6d_1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -6.778 \\ b_1 = -1.62675 \\ b_2 = -2.770125 \\ c_1 = -0.5716875 \\ c_2 = 0 \\ d_1 = -0.09528125 \\ d_2 = 0.09528125 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$g(x) = \begin{cases} -2 - 1.62675(x+2) - 0.5716875(x+2)^2 - 0.09528125(x+2)^3, & x \in [-4; -2] \\ -6.778 - 2.770125x + 0.09528125x^3, & x \in [-2; 0] \end{cases}$$

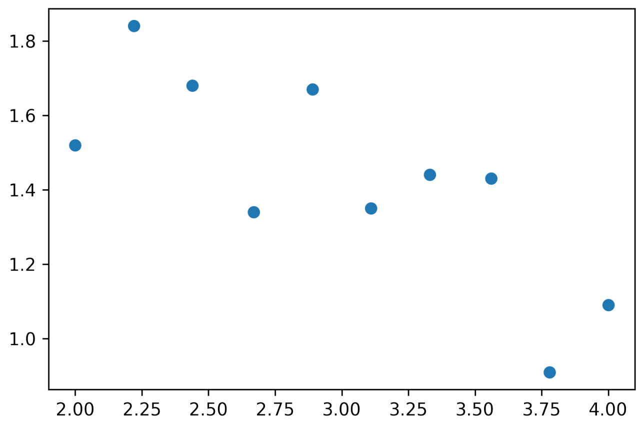
Зобразимо графіки всіх знайдених інтерполяцій



Задача 2

x	2	2.22	2.44	2.67	2.89	3.11	3.33	3.56	3.78	4
y	1.52	1.84	1.68	1.34	1.67	1.35	1.44	1.43	0.91	1.09

Зобразимо точки на графіку:

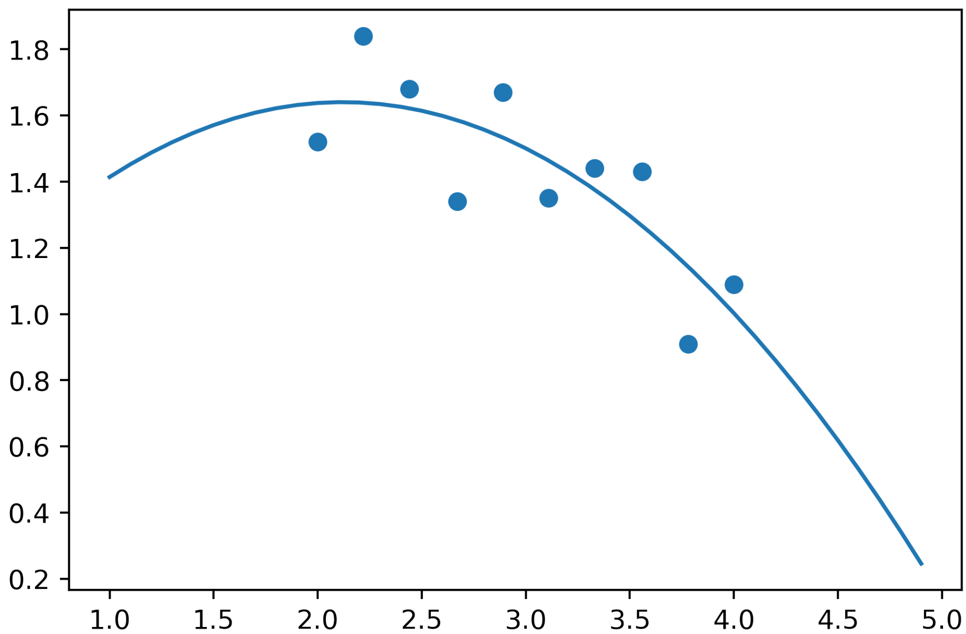


Бачимо що розташування точок нагадує параболу вітками вниз. Тому як апроксимуючу фукнцію виберемо $y = c + bx + ax^2$

Запрограмувавши метод найменших квадратів отримали

$y = 0.8294147 + 0.76511646x - 0.18044811x^2$

Наведемо графік цієї функції разом з заданими точками:



Висновки

В першому завданні вибравши 4 вузла нашої функції ми побудували поліноми Лагранжа та Ньютона на відрізку [-6;0], а також кубічний сплайн дефекту 1. Видно що поліноми Лагранжа та Ньютона краще наблизили функцію. Проте порівнявши деякі невузлові точки поліномів та заданої функції отримали достатьно великі розбіжності. Це зв'язано з тим, що ми будували інтерполяцію а не апроксимацію, тому, як ми можемо побачити в точки x=-2.1, яка близька до вузла, різниця між заданою функцією та значеннями поліномів є невеликою, а із збільшенням відстані від вузлів, наближення стає все менш точним.
В другому завданні ми зобразили задані точки на координатній площині, і з їх розташування вибрали апроксимуючу функцію – параболу. Обчисливши коефіцієнти за методом найменших квадратів отримали таку функцію $y = 0.8294147 + 0.76511646x - 0.18044811x^2$. Побудувавши її графік переконались, що дійсно, крива непогано апроксимує функцію, точки якої нам задані.
Лістинг програми:

lab4notebook

24 травня 2022 р.

Задача 1

$$y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}$$

Виберемо відрізок інтерполяції [-6;0], та виберемо 4 вузли, відстань між якими буде однаковою $x_1 = -6, x_2 = -4, x_3 = -2, x_4 = 0$ Знайдемо значення функції в цих точках:

[189]:
```
import math

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def func1(x):
    """func1(x)=x^2+6x+8-2e^{x+2}"""
    return x**2 + 6*x + 8 - 2 * np.exp(x+2)

data_points = [-6, -4, -2, 0]
func1_values = [func1(x) for x in data_points]
print(func1_values)
```

```
[7.963368722222532, -0.2706705664732254, -2.0, -6.778112197861301]
```

Знайдемо тепер різниці всіх порядків:

[190]:
```
def find_differences(func_values, lst=None):
    """Finds differences of all orders, returns a list with lists of each␣
↪order's differences"""
    if len(func_values) > 1:
        func_values = func_values.copy()
        # Find all deltas(differences) of current order and store them in a list
        deltas = []
        for i in range(len(func_values) - 1):
            deltas.append(func_values[i + 1] - func_values[i])
        if lst:
            lst.append(deltas)
        else:
            lst = [deltas]
        # Recursively find differences of all higher orders
        return find_differences(deltas, lst)
    else:
```

```
        return lst
print(find_differences(func1_values))
```

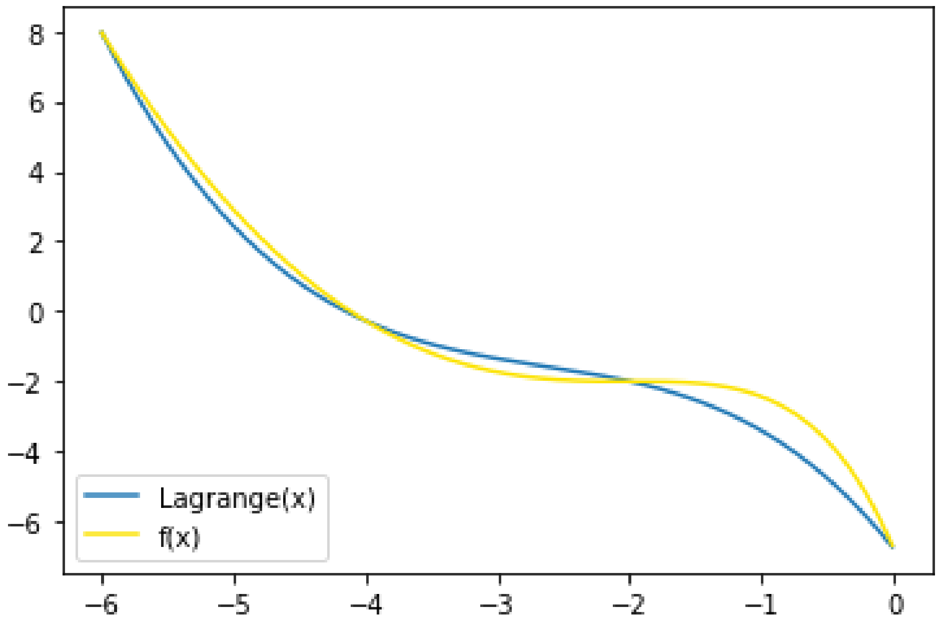
```
[[-8.234039288695756, -1.7293294335267746, -4.778112197861301],
[6.504709855168982, -3.0487827643345264], [-9.553492619503508]]
```

Знайдемо тепер поліном Лагранжа. Як ми знаємо $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

[191]:
```
def lagrange_polynom(x, data_points, func_values):
    """Interpolate function with func_values in data_points as lagrange␣
 ↪polynom"""
    n = len(data_points)
    Lagrange = 0
    for i in range(n):
        prod = 1
        for j in range(n):
            if j != i:
                prod *= (x - data_points[j]) / (data_points[i] - data_points[j])
        Lagrange += func_values[i] * prod
    return Lagrange
```

Побудуємо графіки полінома Лагранжа та заданої функції:

[192]:
```
x = np.arange(-6, 0, 0.01)
plt.plot(x, lagrange_polynom(x, data_points, func1_values), label="Lagrange(x)")
plt.plot(x, func1(x), '#fce300' ,label="f(x)")
plt.legend(loc="lower left")
plt.show()
```



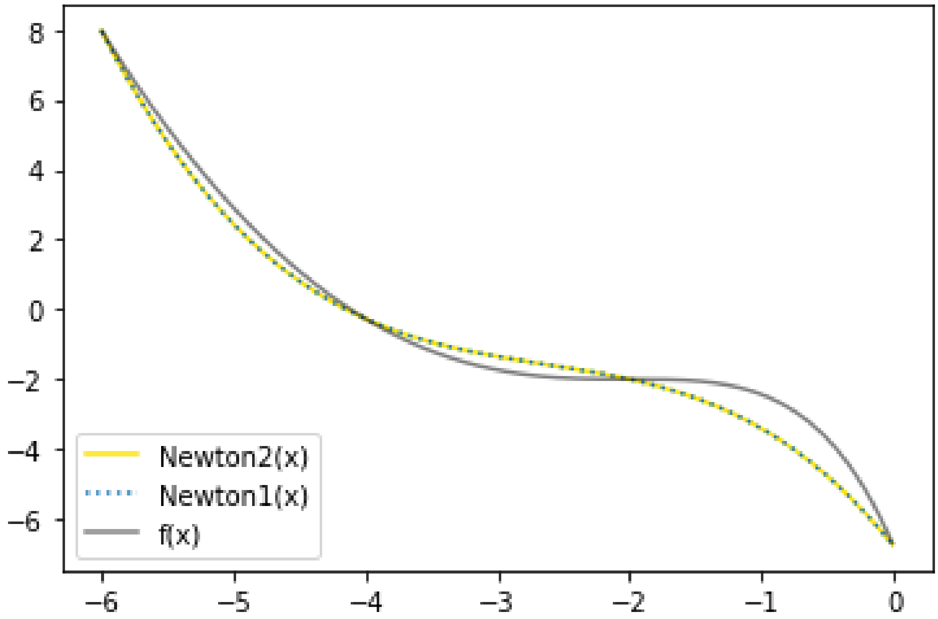
Побудуємо тепер перший і другий інтерполяційні поліноми Ньютона за формулами: Перший інтерполяційний поліном Ньютона: $f(x) \approx P_n(x_0 + qh) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{q \cdot \dots \cdot (q-(i-1))}{i!} \Delta^i y_0$ Другий інтерполяційний поліном Ньютона: $f(x) \approx P_n(x_n + qh) = y_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{q \cdot \dots \cdot (q+(i-1))}{i!} \Delta^i y_{n-i}$

[193]:

```
def newton_polynom(x, data_points, func_values, form=1):
    """Interpolate function with func_values in data_points as 1st(form=1) or␣
↪2nd(form=2) Newton's polynom"""
    differences = find_differences(func_values)
    h = data_points[1] - data_points[0]
    if form == 1:
        Newton = func_values[0]
        q = (x - data_points[0]) / h
    else:
        Newton = func_values[-1]
        q = (x - data_points[-1]) / h
    coef = 1
    for i in range(len(differences)):
        coef *= (q + (-1)**form * i)/(i+1)  # q-i for first form, q+i for second␣
↪form
        Newton += coef * differences[i][0] if form == 1 else coef *␣
↪differences[i][-1]
    return Newton
```

[194]:

```
plt.plot(x, newton_polynom(x, data_points, func1_values,  form=2), '#fce300',␣
↪label="Newton2(x)")
plt.plot(x, newton_polynom(x, data_points, func1_values, form=1), ':' , ␣
↪label="Newton1(x)")
plt.plot(x, func1(x), 'black', alpha=0.5, label="f(x)")
plt.legend(loc="lower left")
plt.show()
```



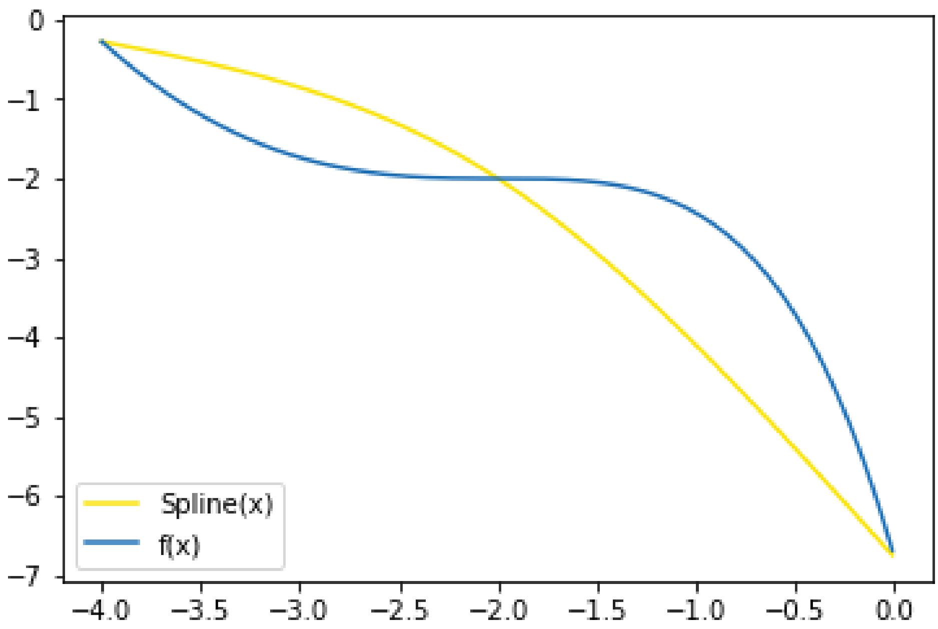
Знайдемо значення поліномів Лагранжа та Ньютона в невузлових точках $\tilde{x}_1 = -5, \tilde{x}_2 = -3, \tilde{x}_3 = -1, \tilde{x}_4 = -2.1$, та порівняємо із значенням заданої функції в цих точках

[235]:
```
print("x=-5:", func1(-5), lagrange_polynom(-5, data_points, func1_values),␣
↪newton_polynom(-5, data_points, func1_values), newton_polynom(-5, data_points,␣
↪func1_values, 2))
print("x=-3:", func1(-3), lagrange_polynom(-3, data_points, func1_values),␣
↪newton_polynom(-3, data_points, func1_values), newton_polynom(-3, data_points,␣
↪func1_values, 2))
print("x=-1:", func1(-1), lagrange_polynom(-1, data_points, func1_values),␣
↪newton_polynom(-1, data_points, func1_values), newton_polynom(-1, data_points,␣
↪func1_values, 2))
print("x=-2.1",func1(-2.1), lagrange_polynom(-2.1, data_points, func1_values),␣
↪newton_polynom(-2.1, data_points, func1_values), newton_polynom(-2.1,␣
↪data_points, func1_values, 2))
```

```
x=-5: 2.9004258632642723 2.436167057259561 2.4361670572595613 2.4361670572595604
x=-3: -1.7357588823428847 -1.3513307264137662 -1.3513307264137664
-1.3513307264137664
x=-1: -2.43656365691809 -3.4108649646698654 -3.4108649646698637
-3.4108649646698654
x=-0.1 -1.9996748360719203 -1.920538345070339 -1.9205383450703393
-1.9205383450703395
```

Зобразимо ще графік побудованого сплайну:

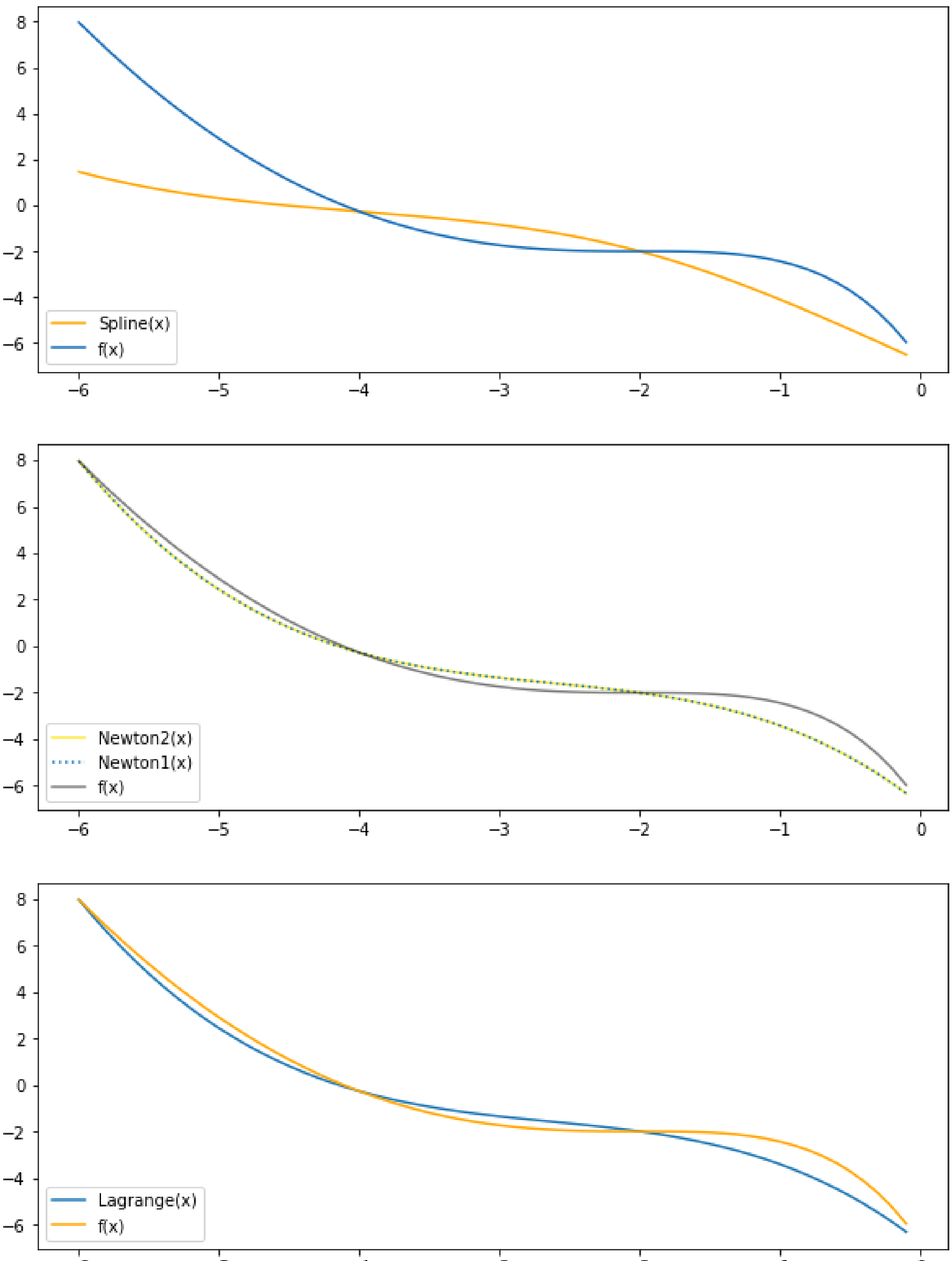
[196]:
```
def spline(x):
    if x <= -2:
        return -2 - 1.62675*(x + 2) - 0.5716875*(x + 2)**2 - 0.09528125*(x +␣
↪2)**3
    else:
        return -6.778 - 2.770125*x + 0.09528125*x**3

x = np.arange(-4, 0, 0.01)
plt.plot(x, [spline(x_i) for x_i in x], '#fce300' ,  label="Spline(x)")
plt.plot(x, func1(x), '#186DB6', label="f(x)")
plt.legend(loc="lower left")
plt.show()
```



Побудуємо тепер всі графіки разом

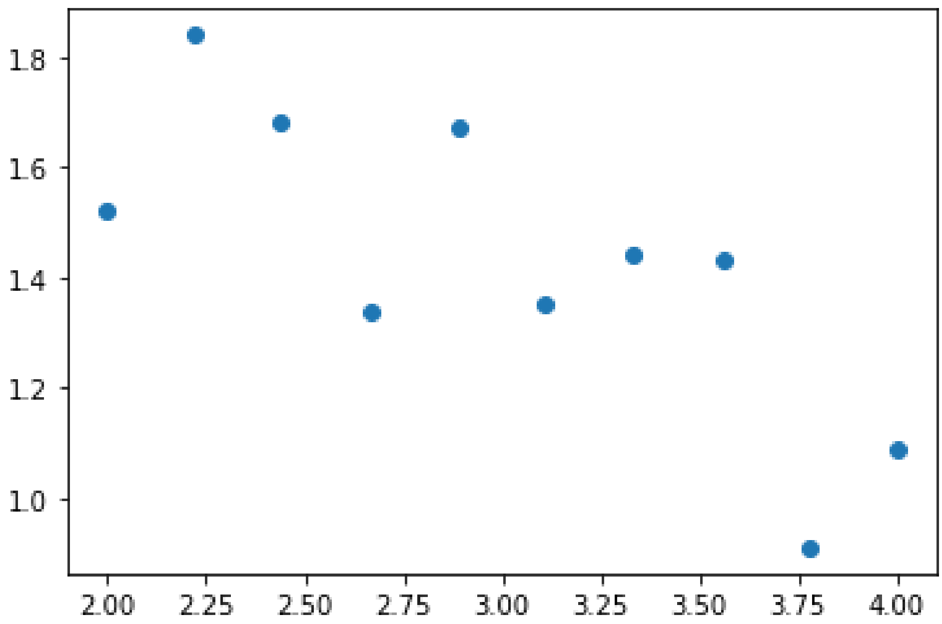
[214]:
```
fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(3)
ax1.plot(x, [spline(x_i) for x_i in x] , 'orange', label="Spline(x)")
ax1.plot(x, func1(x), '#186DB6', label="f(x)")
ax1.legend(loc="lower left")
x = np.arange(-6, 0, 0.1)
ax2.plot(x, newton_polynom(x, data_points, func1_values,  form=2), '#fce300',␣
↪alpha=0.75 , label="Newton2(x)")
ax2.plot(x, newton_polynom(x, data_points, func1_values, form=1), ':' , ␣
↪label="Newton1(x)")
ax2.plot(x, func1(x), 'black', alpha=0.5, label="f(x)")
```

```
ax2.legend(loc="lower left")
ax3.plot(x, lagrange_polynom(x, data_points, func1_values), label="Lagrange(x)")
ax3.plot(x, func1(x), 'orange' ,label="f(x)")
ax3.legend(loc="lower left")
fig.set_size_inches(10, 14)
fig.savefig('test2png.png', dpi=500)
```


Spline(x)
f(x)
Newton2(x)
Newton1(x)
f(x)
Lagrange(x)
f(x)
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0

Задача 2

[232]:
```
x_vec = [2, 2.22, 2.44, 2.67, 2.89, 3.11, 3.33, 3.56, 3.78, 4]
y_vec = [1.52, 1.84, 1.68, 1.34, 1.67, 1.35, 1.44, 1.43, 0.91, 1.09]
plt.scatter(x_vec, y_vec)
plt.savefig('scatter.png', dpi=300)
plt.show()
print(*y_vec,sep='&')
```




```
1.52&1.84&1.68&1.34&1.67&1.35&1.44&1.43&0.91&1.09
```

Бачимо що розташування точок нагадує параболу вітками вниз. Тому як апроксимуючу функцію виберемо $y = c + bx + ax^2$ Позначимо

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

Тоді з курсу математичної статистики відомо, що МНК дасть таке значення вектору а:

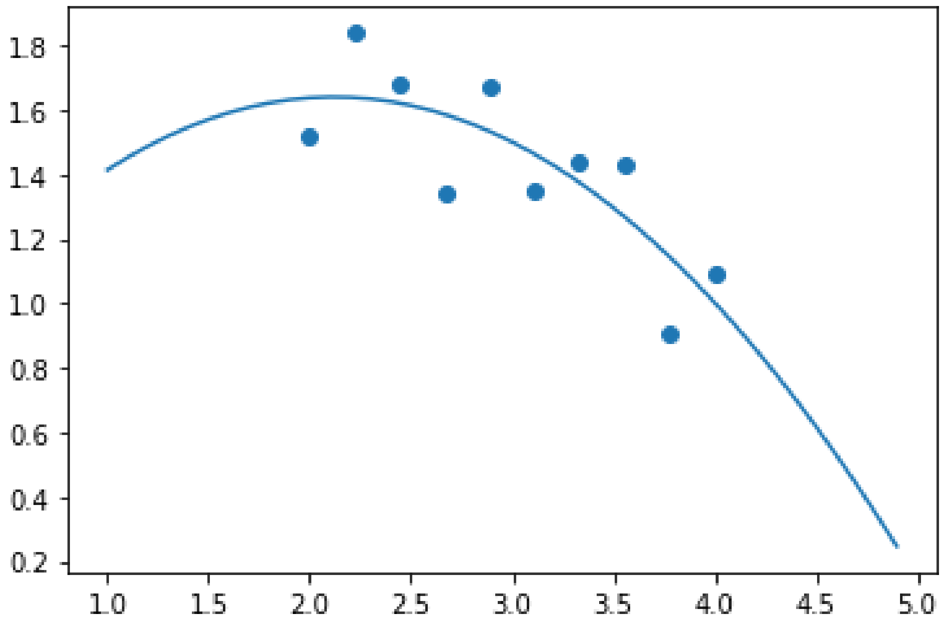
$$\vec{c} = (F^\top F)^{-1} F^\top \vec{y}$$

Знайдемо це значення:

[233]:
```
F_t = np.array([
    [1 for i in range(len(x_vec))],
    x_vec,
    [x**2 for x in x_vec]
])
```

```python
F = np.transpose(F_t)
c_vec = np.linalg.inv(F_t @ F) @ F_t @ y_vec
print(c_vec)

def MNK(x, c_vec):
    """Returns f(x) = c + bx + ax^2"""
    return c_vec[0] + x*c_vec[1] + x**2*c_vec[2]

x = np.arange(1, 5, 0.1)
plt.plot(x, MNK(x, c_vec))
plt.scatter(x_vec, y_vec)
plt.savefig('plot2.png', dpi=400)
```

```
[ 0.8294147   0.76511646 -0.18044811]
```



[ ]: