Романович Володимир КА-02

Самостійна робота №1

Варіант 9

Завдання 1 (Чудесенко 21.9)

Функцію f(t) можемо записати як

$$f(t) = -\eta(t) + \frac{t}{a}\eta(t) + \eta(t-a) - 2\frac{t-a}{a}\eta(t-a) + \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a)$$

де $\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$, використовуючи властивості лінійності та запізнення отримуємо:

$$f(t) \risingdotseq -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 a} + e^{-a}\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2 a}\right) + e^{-2a}\frac{1}{p^2 a} = \frac{(e^{-a}-1)(pa + e^{-a} - 1)}{p^2 a}$$

Відповідь: $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(e^{-a}-1)(pa+e^{-a}-1)}{p^2 a}$

Завдання 2 (Чудесенко 22.9)

$F(p) = \frac{1}{p^5+p^3} = \frac{1}{p^3(p^2+1)}$, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів розкладемо цей вираз:

$$\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p^3}+\frac{Ep+D}{p^2+1} = \frac{1}{p^3(p^2+1)} \implies \frac{A(p^2+1)p^2 + B(p^2+1)p + C(p^2+1) + Ep^4 + Dp^3}{p^3(p^2+1)} = \frac{1}{p^3(p^2+1)}$$

$$\implies p^4(A+E) + p^3(B+D) + p^2(A+C) + p \cdot B + C = 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} A+E=0 \\ B+D=0 \\ A+C=0 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-1 \\ B=0 \\ C=1 \\ D=0 \\ E=1 \end{cases}$$

Отже $F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} + \frac{p}{p^2+1}$. Ми знаємо, що $-\frac{1}{p} \fallingdotseq -\eta(t)$, $\frac{1}{p^3} \fallingdotseq \frac{1}{2}t^2\eta(t)$, $\frac{p}{p^2+1} \fallingdotseq \cos(t)\eta(t)$, з лінійності:

$$F(p) \fallingdotseq -\eta(t) + \frac{1}{2}t^2\eta(t) + \cos(t)\eta(t) = \eta(t)\cdot(-1 + 0.5t^2 + \cos t)$$

Відповідь: Оригінал f(t) даного зображення має вигляд: $f(t) = \eta(t)\cdot(-1+0.5t^2+\cos t)$

Завдання 3 (Чудесенко 24.9)

$$\begin{cases} 2y'' - y' = \sin 3t \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Нехай $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тоді з властивості диференціювання оригіналу:

$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2$, $y''(t) = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p - 1$, $\sin 3t \risingdotseq \frac{3}{p^2+9}$, отримуємо рівняння:

$$2(p^2Y(p) - 2p - 1) - (pY(p) - 2) = \frac{3}{p^2+9} \implies 2p^2Y(p) - pY(p) - 4p = \frac{3}{p^2+9} \implies$$

$$Y(p) = \frac{3}{p(p^2+9)(2p-1)} + \frac{4\cancel{p}}{\cancel{p}(2p-1)}$$

Розкладемо перший дріб методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+9} + \frac{D}{2p-1} = \frac{3}{p(p^2+9)(2p-1)} \implies$$

$$\implies A(2p-1)(p^2+9) + (Bp+C)(2p-1)p + D(p^2+9)p = 3 \implies$$

$$\implies A(2p^3 - p^2 + 18p - 9) + B(2p^3 - p^2) + C(2p^2 - p) + D(p^3 + 9p) = 3 \implies$$

$$\implies p^3(2A + 2B + D) + p^2(-A - B + 2C) + p(18A - C + 9D) - 9A = 3 \implies$$

$$\implies \begin{cases} 2A + 2B + D = 0 \\ -A - B + 2C = 0 \\ 18A - C + 9D = 0 \\ -9A = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 2B + D = \frac{2}{3} \\ -B + 2C = -\frac{1}{3} \\ -C + 9D = 6 \\ A = -\frac{1}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{111} \\ C = -\frac{6}{37} \\ D = \frac{24}{37} \end{cases}$$

Отже,

$$Y(p) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{111} \cdot \frac{p}{p^2+9} - \frac{6}{37} \cdot \frac{1}{p^2+9} + \frac{86}{37} \cdot \frac{1}{p - \frac{1}{2}}$$

З таблиці зрозуміло, що:

$$-\frac{1}{3}p \fallingdotseq -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{111} \cdot \frac{p}{p^2+9} \fallingdotseq \frac{1}{111}\cos 3t, \quad -\frac{2}{37} \cdot \frac{3}{p^2+9} \fallingdotseq -\frac{2}{37}\sin 3t, \quad \frac{86}{37} \cdot \frac{1}{p - \frac{1}{2}} \fallingdotseq \frac{86}{37}e^{\frac{1}{2}t}$$

Тож отримуємо розв'язок:

$$Y(p) \fallingdotseq y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{111}\cos 3t - \frac{2}{37}\sin 3t + \frac{86}{37}e^{\frac{1}{2}t}$$

Відповідь: $y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{111}\cos 3t - \frac{2}{37}\sin 3t + \frac{86}{37}e^{0.5t}$

Завдання 4 (Чудесенко 26.9)

$$\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1 \\ y' = 2x + 2 \\ x(0) = 0, \ y(0) = 1 \end{cases}$$

Нехай $x(t) \risingdotseq X(p)$, $\quad y(t) \risingdotseq Y(p)$, тоді $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$, $\quad y'(t) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$
Маємо

$$\begin{cases} pX(p) + 2X(p) - 6Y(p) = \frac{1}{p} \\ pY(p) - 1 - 2X(p) = \frac{2}{p} \end{cases} \implies \begin{cases} (p+2)X(p) - 6Y(p) = \frac{1}{p} \\ -2X(p) + pY(p) = \frac{p+2}{p} \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Крамера:

$\Delta = \det\begin{vmatrix} p+2 & -6 \\ -2 & p \end{vmatrix} = p^2 + 2p - 12$

$\Delta_X = \det\begin{vmatrix} \frac{1}{p} & -6 \\ \frac{p+2}{p} & p \end{vmatrix} = 1 + \frac{6(p+2)}{p} = \frac{7p+12}{p}$

$\Delta_Y = \det\begin{vmatrix} p+2 & \frac{1}{p} \\ -2 & \frac{p+2}{p} \end{vmatrix} = \frac{2}{p} + \frac{(p+2)^2}{p} = \frac{p^2+4p+6}{p}$

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{7p+12}{p(p^2+2p-12)}. \quad Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{(p^2+4p+6)}{p(p^2+2p-12)}.$$

Розкладемо на елементарні дроби:

$$\begin{cases} X(p): \ \frac{A_1}{p} + \frac{B_1p+C_1}{p^2+2p-12} = \frac{7p+12}{p(p^2+2p-12)} \\ Y(p): \ \frac{A_2}{p} + \frac{B_2p+C_2}{p^2+2p-12} = \frac{p^2+4p+6}{p(p^2+2p-12)} \end{cases} \implies \begin{cases} X(p): \ A_1(p^2+2p-12) + B_1p^2 + C_1p = 7p+12 \\ Y(p): \ A_2(p^2+2p-12) + B_2p^2 + C_2p = p^2+4p+6 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} p^2(A_1+B_1) + p(2A_1+C_1) - 12A_1 = 7p+12 \\ p^2(A_2+B_2) + p(2A_2+C_2) - 12A_2 = p^2+4p+6 \end{cases} \implies \begin{cases} \begin{cases} A_1+B_1 = 0 \\ 2A_1+C_1 = 7 \\ -12A_1 = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} A_2+B_2 = 1 \\ 2A_2+C_2 = 4 \\ -12A_2 = 6 \end{cases} \end{cases} \implies \begin{cases} \begin{cases} A_1 = -1 \\ B_1 = 1 \\ C_1 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} A_2 = -\frac{1}{2} \\ B_2 = \frac{3}{2} \\ C_2 = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Отримали що

$$\begin{cases} X(p) = -\frac{1}{p} + \frac{p+9}{(p+1)^2-13} \\ Y(p) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p} + \frac{3p+10}{(p+1)^2-13}\right) \end{cases} \implies \begin{cases} X(p) = -\frac{1}{p} + \frac{p+1}{(p+1)^2-13} + \frac{8}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{(p+1)^2-13} \\ Y(p) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p} + 3\frac{p+1}{(p+1)^2-13} + \frac{7}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{(p+1)^2-13}\right) \end{cases}$$

З таблиці відомо, що $\frac{1}{p} \risingdotseq 1, \quad \frac{p+1}{(p+1)^2-13} \risingdotseq e^{-t} \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{13}t\right), \quad \frac{\sqrt{13}}{(p+1)^2-13} \risingdotseq e^{-t} \cdot \operatorname{sh}\left(\sqrt{13}t\right)$.

Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} X(p) \risingdotseq x(t) = -1 + e^{-t} \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{13}t\right) + \frac{8}{\sqrt{13}} e^{-t} \cdot \operatorname{sh}\left(\sqrt{13}t\right) \\ Y(p) \risingdotseq y(t) = \frac{1}{2}\left(-1 + 3e^{-t} \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{13}t\right) + \frac{7}{\sqrt{13}} e^{-t} \cdot \operatorname{sh}\left(\sqrt{13}t\right)\right) \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = -1 + e^{-t}\left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{13}t\right) + \frac{8}{\sqrt{13}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{13}t\right)\right) \\ y(t) = \frac{1}{2}\left(-1 + e^{-t}\left(3\operatorname{ch}\left(\sqrt{13}t\right) + \frac{7}{\sqrt{13}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{13}t\right)\right)\right) \end{cases}$