VARIABEL RANDOM DISKRIT

Probabilitas dan Statistika

Teknik Informatika, FTEIC
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Variabel Random

- Representasi angka hasil dari eksperimen
  - Diskrit →angka tersebut bulat
  - Kontinyu → angka tersebut berupa interval

Lemparan 3 koin	
3 muka	1
2 muka	3
1 muka	3
0 muka	1

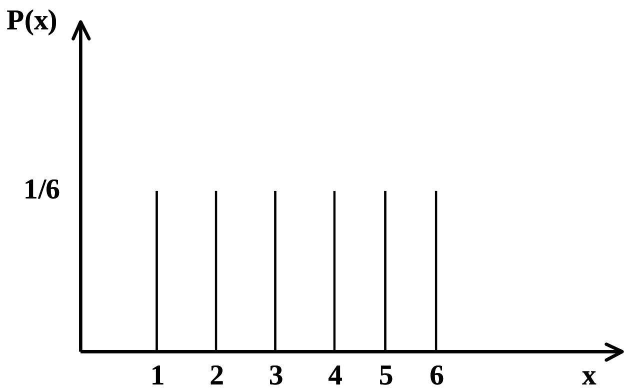
Diskrit, X = {0, 1, 2, 3}

Tinggi badan mahasiswa C0C	
$155 \leq x < 160$	25
$160 \leq x < 165$	52
$165 \leq x < 170$	16
$170 \leq x < 175$	41

Kontinyu, X={[155,160), [160, 165), [165, 170), [170, 175)}

Distribusi Peluang Diskrit

- Jika $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ adalah variabel random diskrit
  - $P(x_i) = P(X=x_i)$ adalah peluang munculnya $X = x_i$ dari seluruh hasil ruang sampel
  - Distribusi peluang X adalah peluang untuk semua nilai $X=\{x_1\ldots x_i\}$
- Eksperimen pelemparan dadu
  - Variabel random X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - Distribusi peluang X:



x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	P(X=1) =1/6	P(X=2) =1/6	P(X=3) =1/6	P(X=4) =1/6	P(X=5) =1/6	P(X=6) =1/6

Sifat Distribusi Peluang Diskrit

- Jika:
  - $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ adalah variabel random diskrit
  - $P(x_i) = P(X=x_i)$ adalah peluang munculnya $X = x_i$ dari seluruh hasil ruang sampel
  - Distribusi peluang X adalah peluang untuk semua nilai $X=\{x_1\ldots x_i\}$
- Maka:
  - $P(x_i) \geq 0$
  - $\sum P(x_i) = 1$ dengan $i=\{1,\ldots,n\}$

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(X=x_i)$	P(X=1) =1/6	P(X=2) =1/6	P(X=3) =1/6	P(X=4) =1/6	P(X=5) =1/6	P(X=6) =1/6	1

Distribusi Peluang Kumulatif Diskrit

- Jika $f(x)$ menyatakan peluang sebuah nilai pada variabel random diskrit, maka fungsi peluang kumulatif $F(x)$ adalah:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t) \text{ dengan } -\infty < x < \infty$$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/6 & 1 \le x < 2 \\ 1/3 & 2 \le x < 3 \\ 1/2 & 3 \le x < 4 \\ 2/3 & 4 \le x < 5 \\ 5/6 & 5 \le x < 6 \\ 1 & x \ge 6 \end{cases}$$

Variabel Random Diskrit dgn Distribusi Peluang Kumulatif

- Jika $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ adalah variabel random diskrit, maka peluang kumulatif $F(x_i)$ akan …
  - $0 \leq F(x_i) \leq 1$ untuk setiap x_i
- Jika terdapat nilai variabel random $x_0 < x_1$ maka $F(x_0) \leq F(x_1)$
  - Untuk $x_0 = 3$ dan $x_1 = 4$, $x_0 < x_1$
  - $F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1/2$
  - $F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2/3$
  - $F(3) \leq F(4)$ karena $1/2 \leq 2/3$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ 1/3 & 2 \leq x < 3 \\ 1/2 & 3 \leq x < 4 \\ 2/3 & 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

Walpole, hal 72 no 3

- Eksperimen = pelemparan koin sebanyak 3 kali
- Koin memiliki bagian muka, m, dan belakang, b
- Variabel random W = jumlah m – jumlah b

S	m	b	w
mmm	3	0	3
mmb	2	1	1
mbm	2	1	1
bmm	2	1	1
mbb	1	2	-1
bmb	1	2	-1
bbm	1	2	-1
bbb	0	3	-3

w_i	-3	-1	1	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ \tfrac{1}{8} & -3 \le x < -1 \\ \tfrac{4}{8} & -1 \le x < 1 \\ \tfrac{7}{8} & 1 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

a. $P(W > 0) = 1 - P(W \le 0) = 1 - F(0)$
$= 1 - \{f(-3) + f(-1)\} = ½$

b. $P(-1 \le W < 3) = F(2) - F(-2) = 7/8 - 1/8 = 6/8$

Walpole, hal 72 no 8

- Cari distribusi peluang variabel random diskrit W (W = jumlah m – jumlah b) (Walpole, hal 72 no 3)
- Asumsi peluang muncul bagian muka = 2 x peluang muncul bagian belakang koin
- Peluang lemparan koin1 tidak mempengaruhi lemparan koin2 dan koin3
- Eksperimen pelemparan koin = kejadian saling bebas

S	m	b	w
mmm	3	0	3
mmb	2	1	1
mbm	2	1	1
bmm	2	1	1
mbb	1	2	-1
bmb	1	2	-1
bbm	1	2	-1
bbb	0	3	-3

Koin1	Koin2	Koin3	P(x1, x2, x3)
2/3	2/3	2/3	8/27
2/3	2/3	1/3	4/27
2/3	1/3	2/3	4/27
1/3	2/3	2/3	4/27
2/3	1/3	1/3	2/27
1/3	2/3	1/3	2/27
1/3	1/3	2/3	2/27
1/3	1/3	1/3	1/27

w_i	-3	-1	1	3
$P(X=x_i)$	1/27	6/27	12/27	8/27

Distribusi Peluang Gabungan untuk Variabel Random Diskrit

- X dan Y adalah sepasang variabel random diskrit
- Fungsi peluang gabungan $P(x, y)$=P($X = x \cap Y = y$)

- Sifat – sifat peluang gabungan

a. P(x, y) = $P(X = x \cap Y = y) = f(x, y) \geq 0$

b. $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$

f(m, b)		b			
		0	1	2	3
m	0	-	-	-	1/8
	1	-	-	3/8	-
	2	-	3/8	-	-
	3	1/8	-	-	-

$$\sum_{m=0}^{3} \sum_{b=0}^{3} f(m, b) = 1$$

Walpole, hal 85 no 16

- Eksperimen = pelemparan satu koin sebanyak 3 kali atau pelemparan tiga koin sekaligus
- Variabel random diskrit X menyatakan jumlah munculnya bagian muka koin
- Variabel random diskrit Y menyatakan selisih munculnya muka dengan agian belakang koin

S	m	b	m-b
mmm	3	0	3
mmb	2	1	1
mbm	2	1	1
bmm	2	1	1
mbb	1	2	-1
bmb	1	2	-1
bbm	1	2	-1
bbb	0	3	-3

$f(x, y)$		x			
		0	1	2	3
y	3	-	-	-	1/8
	1	-	-	3/8	-
	-1	-	3/8	-	-
	-3	1/8	-	-	-

Distribusi Marginal Variabel Random Diskrit X, $g(x)$

- Jumlah peluang gabungan untuk semua nilai random variabel X
- $\sum g(x_i)$ = 1 dengan i={1,…,n}

f(m, b)		b				g(m)
		0	1	2	3	
m	0	-	-	-	1/8	1/8
	1	-	-	3/8	-	3/8
	2	-	3/8	-	-	3/8
	3	1/8	-	-	-	1/8

$$g(0) = \sum_{m=0}^{}\sum_{b=0}^{3} f(m,b) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) + f(0,3)$$

$$\vdots$$

$$g(3) = \sum_{m=3}^{}\sum_{b=0}^{3} f(m,b) = f(3,0) + f(3,1) + f(3,2) + f(3,3)$$

$$\sum_{m=0}^{3} g(m) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 1$$

Distribusi Marginal Variabel Random Diskrit Y, $h(y)$

- Jumlah peluang gabungan untuk semua nilai random variabel Y
- $\sum h(y_i) = 1$ dengan i={1,…,n}

f(m, b)		b			
		0	1	2	3
m	0	-	-	-	1/8
	1	-	-	3/8	-
	2	-	3/8	-	-
	3	1/8	-	-	-
h(b)		1/8	3/8	3/8	1/8

$$h(0) = \sum_{b=0}\sum_{m=0}^{3} f(m,b) = f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) + f(3,0)$$

⋮

$$h(3) = \sum_{b=3}\sum_{m=0}^{3} f(m,b) = f(0,3) + f(1,3) + f(2,3) + f(3,3)$$

$$\sum_{b=0}^{3} h(b) = h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = 1$$

Peluang Bersyarat

- Terdapat pasangan variabel random diskrit X dan Y
- Fungsi peluang bersyarat untuk (X, Y) adalah peluang terjadinya Y = y jika nilai X = x

Atau sebaliknya …

- peluang terjadinya X = x jika nilai Y = y

$$P(y \mid x) = \frac{P(x, y)}{P(x)} \qquad P(x \mid y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$

- Peluang gabungan variabel random X dan Y adalah kejadian saling bebas jika dan hanya jika …

$$P(x, y) = P(x)P(y) \quad \text{untuk semua kemungkinan x dan y}$$

Walpole, hal 85 no 13, 20 edisi 9: hal 106, soal 3.49)

- Let X denote the number of times a certain numerical control machine will malfunction 1, 2 or 3 times on any given day. Let Y denote the number of times a technician is called in on an emergency call. The joint probability distribution is given by:

f(x, y)		x			Marginal y
		1	2	3	
y	1	0.05	0.05	0.1	0.2
	2	0.05	0.1	0.35	0.5
	3	0	0.2	0.1	0.3
Marginal x		0.1	0.35	0.55	1

Suppose a technician is not always called in because the operator is able to deal with the malfunction.

Walpole, hal 85 no 13, 20. Edisi 9: hal 106, soal 3.49)

- Variabel random diskrit X menyatakan jumlah kerusakan mesin yang mungkin terjadi dalam satu hari
- Variabel random diskrit Y menyatakan jumlah panggilan untuk teknisi dalam satu hari tersebut guna memperbaiki kerusakan mesin
- Apakah X dan Y saling bebas?
- Hitung peluang gabungan $P(Y=3|X=2)$

f(x, y)		x			Marginal y
		1	2	3	
y	1	0.05	0.05	0.1	0.2
	2	0.05	0.1	0.35	0.5
	3	0	0.2	0.1	0.3
Marginal x		0.1	0.35	0.55	1

X dan Y adalah kejadian saling bebas jika dan hanya

$$P(x,y) = P(x)P(y) \quad untuk\ semua\ kemungkinan.$$

$$Untuk\ x = 2, y = 1:$$

$$P(x=2, y=1) = g(x=2)h(y=1)?$$

$$0.05 \neq 0.35x0.2$$

Jadi variabel X dan Y tidak saling bebas

$$P(Y=3|X=2) = \frac{P(x,y)}{P(x)} = \frac{0.2}{0.35}$$

Tugas

- NRP no ganjil → Kerjakan lima soal no ganjil dari Exercises Walpole bab 3 (pilih lima soal dari Exercises no 3.1 sd 3.81).
- NRP no genap → Kerjakan lima soal no genap dari Exercises Walpole bab 3 (pilih lima soal dari Exercises no 3.1 sd 3.81).
- Silakan memilih buku Walpole Edisi berapapun. Tuliskan soal yang Anda kerjakan (bukan hanya nomor soal).
- Scan / foto hasil kerja Anda dan upload ke MyITSClassroom (maks 28 Feb 2022, pk 10:00)..