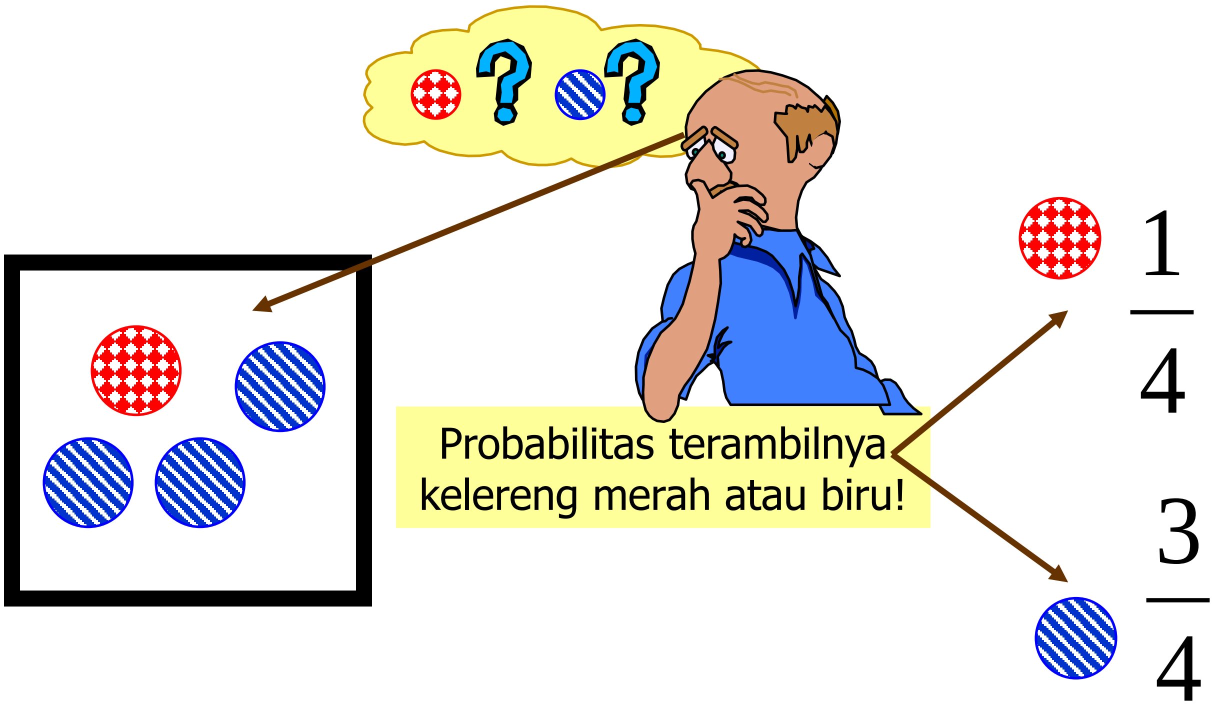
Percobaan Random, Ruang Sampel dan Kejadian

Probabilitas dan Statistika

Departemen Teknik Informatika, FTEIC
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Teori Probabilitas

- Probabilitas : “*Peluang suatu kejadian terjadi dalam percobaan random*”
  - dari penalaran ke penghitungan
    - Kejadian munculnya kelereng … adalah x dari seluruh y kemungkinan pada percobaan pengambilan kelereng dari kotak

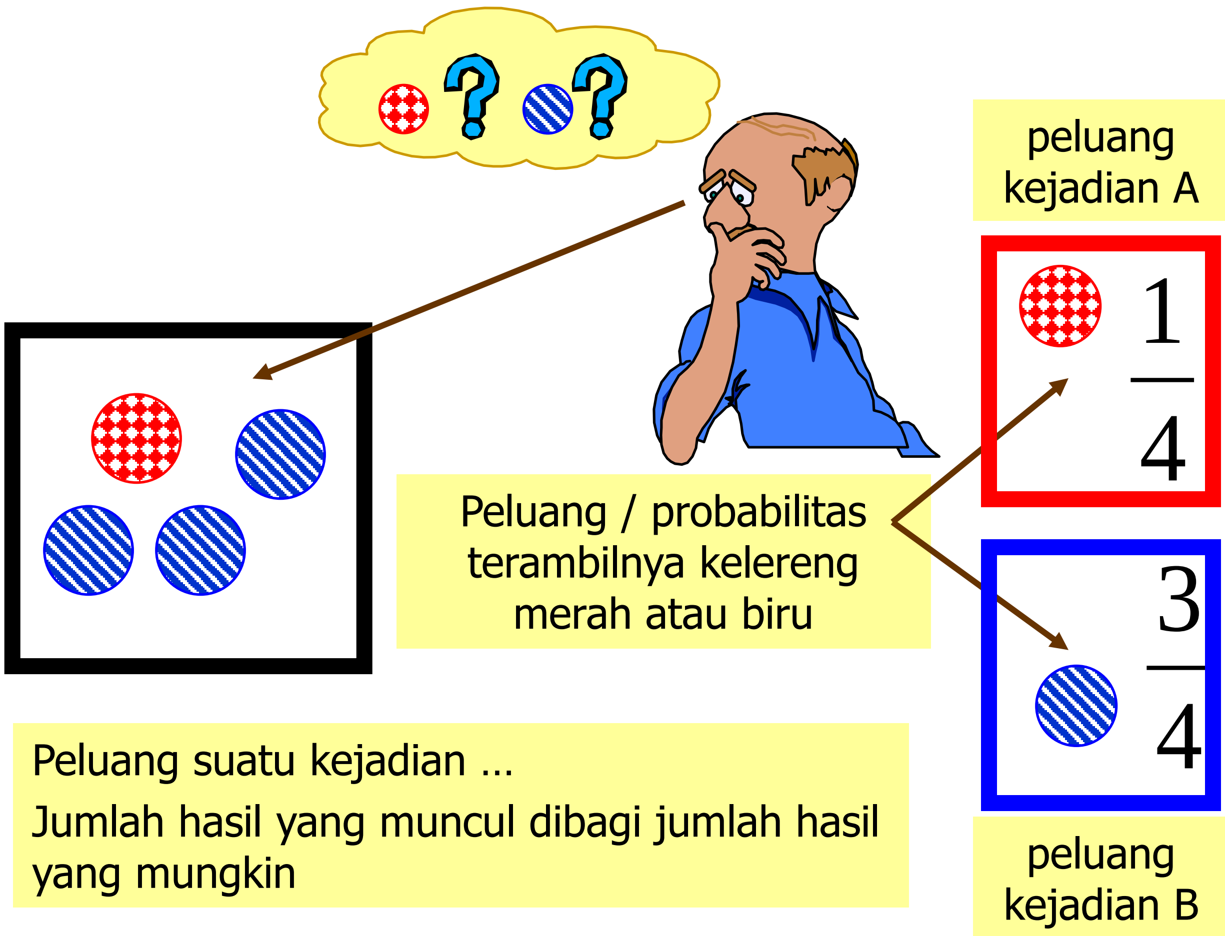


- Definisi…
  - Percobaan (*experiment*)
  - Ruang sampel (*sample space*)
  - Anggota ruang sampel (*sample points*)
  - Kejadian (*event*)
  - Peluang kejadian (*probability of event*)

Kosa kata Teori Probabilitas

- Percobaan random
  - Suatu kegiatan yang belum diketahui hasilnya dengan pasti untuk pengamatan statistika
- Ruang sampel
  - himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan random
  - setiap kemungkinan yang dapat terjadi disebut anggota ruang sampel (sample points)
- Kejadian
  - munculnya / terjadinya himpunan bagian dari ruang sampel pada suatu percobaan
- Peluang suatu kejadian A
  - Jumlah hasil A yang muncul dibagi jumlah hasil yang mungkin

Kosa kata Teori Probabilitas



Peluang suatu kejadian …

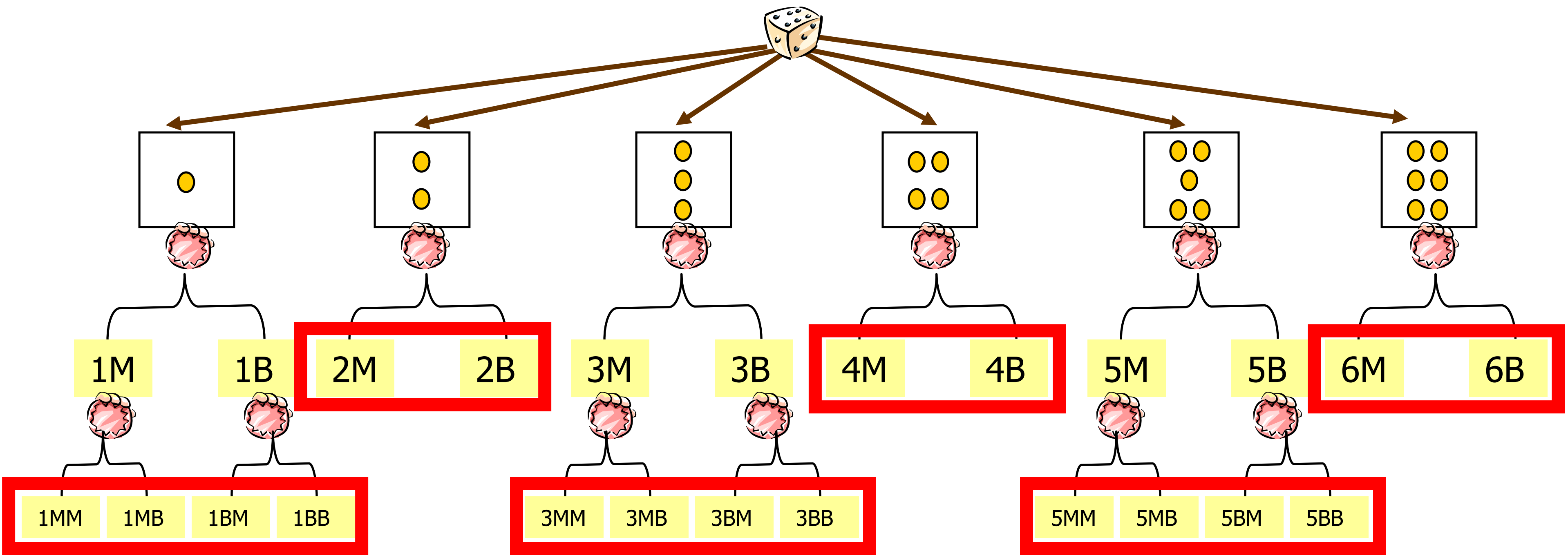
Jumlah hasil yang muncul dibagi jumlah hasil yang mungkin

- Percobaan random
  - Pengambilan sebuah kelereng dari kotak
- Ruang sampel
  - {Kelereng merah, Kelereng bru}
- Kejadian
  - A: terambilnya kelereng merah
  - B: terambilnya kelereng biru
- Peluang / probabilitas kejadian
  - Peluang / probabilitas kejadian A
  - Peluang / probabilitas kejadian B

Contoh 2

- Percobaan pelemparan dadu diikuti dengan pelemparan koin. Ketentuan:
  - Jika hasil pelemparan dadu adalah angka ganjil, maka koin dilempar dua kali.
  - Jika hasil pelemparan dadu adalah angka genap, maka koin dilempar satu kali.
- Apa saja isi ruang sampelnya?

Gunakan Diagram Pohon



- Ruang sampel
  - S = {1MM, 1MB, 1BM, 1BB, 2M, 2B, 3MM, 3MB, 3BM, 3BB, 4M, 4B, 5MM, 5MB, 5BM, 5BB, 6M, 6B}, |S|=18
- Contoh Kejadian
  - A: terambilnya bagian muka koin setidaknya satu kali
  - A = {1MM, 1MB, 1BM, 2M, 3MM, 3MB, 3BM, 4M, 5MM, 5MB, 5BM, 6M}, |A| = 12
- Peluang kejadian tsb
  - p(A) = 12/18 = 2/3

Cara Menghitung (*counting*)

- Cara mengatur obyek-obyek dalam himpunan dengan atau tanpa menggunakan suatu aturan tertentu
  - Permutasi
  - Kombinasi
- Cara menghitung adalah dasar dari komputasi peluang suatu kejadian
  - Berapa peluang munculnya angka genap pada lemparan dadu?
- Dua macam cara menghitung
  - Aturan Perkalian (The Product Rule)
  - Aturan Penambahan (The Sum Rule)

Aturan Perkalian

- Sebuah proses dibagi dalam beberapa subproses yang berlanjut (subproses-1, subproses-2, …, dan seterusnya)
  - Jika subproses-1 diselesaikan dalam n_1 cara
  - Jika subproses-2 diselesaikan dalam n_2 cara,
  - …
  - Dan jika subproses-p diselesaikan dalam n_p cara
  - Maka Σ cara = (n_1) (n_2) …(n_p)
- Penomoran kursi – kursi di auditorium dengan A1…Z100
  - Subproses-1 : pelabelan satu huruf → $n_1 = 26$
  - Subproses-2 : pelabelan angka ≤ 100 → $n_2 = 100$
  - Σ cara = (n_1) (n_2) = 26.100 = 2600

Contoh Aturan Perkalian

- Rencana pembuatan nomer telepon rumah di Jawa Timur
  - Setiap nomer telepon terdiri dari 10 karakter sebagai berikut:
    - 3 karakter menunjukkan kode kotamadya/kabupaten
    - 3 karakter menunjukkan kode kecamatan
    - 4 karakter menunjukkan kode rumah
  - Asumsi karakter X = {0…9}
  - Asumsi karakter N = {2…9}
  - Asumsi karakter Y = {0, 1}
  - Format untuk kode kotamadya/kabupaten, kecamatan dan rumah sbb:
    - Rencana lama → NYX, NNX, XXXX
    - Rencana baru → NXX, NXX, XXXX
  - Hitung selisih jumlah nomer telepon yang berbeda antara rencana lama dan rencana baru

Aturan Penjumlahan

- Sebuah proses dapat dilakukan dalam beberapa cara, tetapi tidak dapat dilaksanakan pada waktu yang sama
  - Jika ada n_1 cara-1,
  - Jika ada n_2 cara-2,
  - …
  - Dan jika ada n_p cara-p,
  - Maka Σ cara = $n_1 + n_2 + \ldots + n_p$
- Dalam sebuah kepanitiaan ditentukan ada 1 wakil dari 1 Departemen. Wakil dari Departemen bisa dipilih dari dosen ataupun mahasiswa. Departemen Informatika memiliki 37 dosen dan 83 mahasiswa.
  - Cara-1 : perwakilan dari dosen → $n_1 = 37$
  - Cara-2 : perwakilan dari mahasiswa → $n_2 = 83$
  - Σ cara = $n_1 + n_2 = 37 + 83 = 120$

Contoh Aturan Perkalian dan Aturan Penjumlahan (1)

- Problem deklarasi nama variabel suatu bahasa pemrograman, dengan persyaratan sebagai berikut:
  - Terdiri dari 1 atau 2 karakter alfanumerik
  - Tidak membedakan huruf kapital
  - Diawali karakter huruf
  - Tidak menggunakan kata yang menjadi kata kunci
    - Terdapat 5 kata kunci
- Hitung jumlah variasi nama variabel yang bisa terbentuk

Contoh Aturan Perkalian dan Aturan Penjumlahan (2)

- Sejumlah bahasa pemrograman di masa lalu membatasi banyaknya karakter pada untuk penamaan variabelnya sampai 8 karakter (maksimal). Persyaratan lain yang harus dipenuhi:
  - Karakter:
    - Huruf: a sd z
    - angka: 0 sd 9
  - Tidak membedakan huruf kapital dan kecil
  - Harus diawali karakter huruf
- Berapa banyaknya variabel yang mungkin dibuat dengan menggunakan bahasa pemrograman tsb?

Kasus Khusus: *Inclusion-Exclusion*

- Teori Set → jika terdapat set A_1 beririsan dengan A_2 maka
  - $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A1 \cap A_2|$

- Berapa banyak *bit string* 8 karakter yang diawali dengan karakter 1 atau diakhiri dengan karakter 00?
  - A_1 : Buat model untuk *bit string* 8 karakter yang diawali dengan karakter 1
    - Berdasarkan aturan perkalian didapatkan $1 \cdot 2^7 = 128$ cara
  - A_2 : Buat model untuk *bit string* 8 karakter yang diakhiri dengan karakter 00
    - Berdasarkan aturan perkalian didapatkan $1 \cdot 2^6 = 64$ cara
  - Apakah terdapat 192 cara untuk membentuk *bit string*?
    - Jika dilakukan maka cara 1 dan cara 2 akan membentuk irisan menunjukkan banyaknya cara yang sama

Permutasi

- Permutasi dari suatu set obyek berbeda …
  - Pengaturan obyek-obyek dengan urutan tertentu
- Permutasi sejumlah *r* dari *n* obyek berbeda dinotasikan P(n, r)
- Dapat diselesaikan dengan aturan perkalian
  - $P(n, r) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) = n!/(n-r)!$

- Hitung banyak cara untuk membentuk pasangan juara satu dan dua dari 25 orang yang mengikuti lomba lari 100m

Kombinasi

- Kombinasi suatu set obyek berbeda …
  - Pembentukan sekelompok obyek-obyek tanpa memperhatikan urutan
  - Kombinasi *r* obyek = subset dengan anggota *r* obyek

- Kombinasi sejumlah *r* dari *n* obyek berbeda dinotasikan C(n, r)
  - $P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r)$

    $C(n, r) = P(n, r)/P(r, r)$

    $= n!/(n - r)!/(r!/(r - r)!)$

    $= n!/(r!(n - r)!)$

Soal Kombinasi

- Klub sepakbola memiliki anggota 7 laki-laki dan 8 perempuan.
- Pelatih hendak memilih 1 tim campuran (laki-laki dan perempuan) untuk pertandingan.
- Tim terdiri dari 6 perempuan dan 5 laki-laki.
- Hitung banyak kemungkinan variasi tim yang terjadi

- $C(8, 6) \cdot C(7, 5) = 8!/(6! \cdot 2!) \cdot 7!/(5! \cdot 2!)$

  $= 28 \cdot 21 = 588$

Soal

- 9 orang akan pergi. Tersedia 3 mobil: masing-masing dapat membawa 2, 4 dan 5 penumpang (maksimal).
- Berapa carakah dapat dibuat untuk membawa kesembilan orang tersebut ?
  - Mobil berpenumpang 2 orang diisi 2 penumpang.

2	2	5

2	3	4

2	4	3

  - Mobil berpenumpang 2 orang diisi 1 penumpang.

1	3	5

1	4	4

  - Mobil berpenumpang 2 orang diisi 0 penumpang.

Peluang Suatu Kejadian

- Peluang suatu kejadian A
  - Jumlah anggota subset A dibagi anggota semesta S

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad P(0) = \phi \qquad P(S) = 1$$

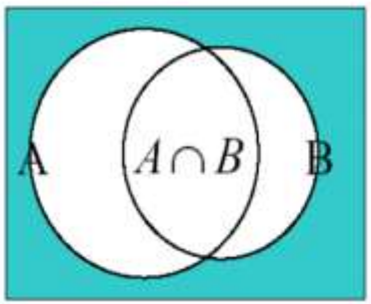
$$P(A)+P(A') = 1$$

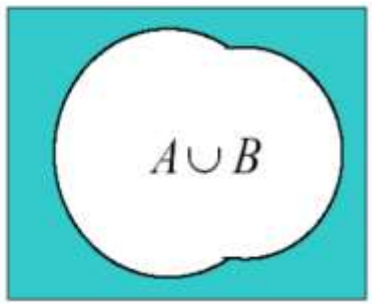
- Beberapa kejadian yang berbeda bisa membentuk kondisi beririsan atau tidak
  - *Mutually Exclusive*

Mutually Exclusive

- Jika kejadian A dan B beririsan

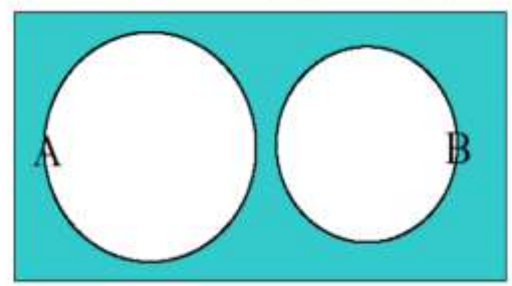
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$





$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\cancelto{\phi}{A \cap B})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



- Jika tidak beririsan …
  - *Mutually Exclusive*

Soal *Mutually Exclusive*

- Sebuah toko memiliki koleksi tas terbaru dengan 4 warna, hijau, putih, merah dan biru. Probabilitas terpilihnya masing-masing warna oleh pembeli adalah:
  - P(hijau) = 0.09
  - P(putih) = 0.15
  - P(merah) = 0.21
  - P(biru) = 0.55

$$\boxed{\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \\ &= P(S) = 1 \end{aligned}}$$

- Hitung peluang pembeli mengambil tas koleksi terbaru dalam salah satu warna hijau, putih, merah, atau biru.
  - Peluang membeli tas hijau, putih, merah atau biru…
  - P(hijau)+P(putih)+P(merah)+P(biru) = 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.55

Contoh Peluang Suatu Kejadian

- Ada setumpuk kartu remi umum (yg lengkap):
  - Simbol: **Diamond♦, Heart ♥**, **Club ♣, Spade ♠**
  - Kartu: 2 sd 10, Jack, Queen, King, As dari masing-2 simbol.
- Ada berapa cara agar diperoleh 5 kartu remi yang terdiri dari 2 kartu As dan 3 kartu Jack?

- JAWAB:
- Banyaknya cara agar diperoleh 5 kartu remi terdiri dari 2 kartu As dan 3 kartu Jack:
  - 2 kartu As → kombinasi untuk mendapat 2 dari 4 As
  - 3 kartu Jack → kombinasi untuk mendapat 3 dari Jack?
- → gunakan aturan perkalian
- Banyaknya cara membentuk 2 As dan 3 Jack adalah 6 x 4 = 24.

Contoh Peluang Suatu Kejadian

- Berapa banyaknya kemungkinan hasil jika diambil 5 kartu remi dari tumpukan kartu remi yang lengkap?

- JAWAB:
- banyaknya kemungkinan hasil jika diambil 5 kartu remi dari tumpukan kartu remi yang lengkap = C(52, 5) =

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2598960$$

Contoh Peluang Suatu Kejadian

- Berapa peluang kejadian mendapatkan 2 As dan 3 Jack jika mengambil 5 kartu remi dari tumpukan kartu remi yang lengkap?

- JAWAB:
- Peluang kejadian mendapatkan 2 As dan 3 Jack jika mengambil 5 kartu remi dari tumpukan kartu remi yang lengkap adalah

$$P(A) = \frac{24}{2598960} = 0.9x10^{-5}$$

Contoh Peluang Suatu Kejadian

- Pengkodean jenis barang diatur sbb: diawali dgn 3 huruf yang berlainan, dan disusul dgn 4 angka (1 sd 9) yang berlainan.
- Berapa jenis barang dapat dikodekan dengan cara ini?
- Berapa banyaknya kode yang berawalan huruf hidup dan angka terakhir genap?
- Carilah peluang mendapatkan kode barang yang berawalan huruf hidup dan angka terakhir genap!

Contoh Peluang Suatu Kejadian

- Jenis barang dapat dikodekan dgn cara ini = 26 x 25 x 24 x 9 x 8 x 7 x 6
- Banyaknya kode yg berawalan huruf hidup dan angka terakhir genap = 5 x 25 x 24 x 8 x 7 x 6 x 4. (Ada 5 macam huruf hidup dan 4 macam angka genap antara 1 sampai 9)
- Peluang kejadian E (mendapatkan kode barang yang berawalan huruf hidup dan angka terakhir genap):

$$P(E) = \frac{5 \text{ x } 25 \text{ x } 24 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 4}{26 \text{ x } 25 \text{ x } 24 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6} = \frac{5 \text{ x } 4}{26 \text{ x } 9} = {}^{10}\!/_{117}$$