Distribusi Peluang Diskrit Khusus (2)

Probabilitas dan Statistika

Teknik Informatika, FTEIC
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Distribusi Binomial, Binomial Negatif , dan Geometrik

- Distribusi Binomial → k kejadian berhasil dari keseluruhan percobaan
- Distribusi Binomial Negatif → jumlah percobaan yang dibutuhkan untuk mencapai kejadian berhasil *sejumlah k*
  - Distribusi Geometrik → jumlah percobaan yang dibutuhkan untuk mencapai kejadian berhasil *pertama*

Distribusi Binomial Negatif

- Percobaan memiliki hanya dua kemungkinan hasil, dilabeli dengan “*success*” atau “*failure*”
- Percobaan yang dilakukan bersifat saling bebas
- Nilai p menunjukkan peluang terjadinya kejadian sukses
  - Nilai q menunjukkan peluang terjadinya kejadian gagal
- Terdapat x yang menunjukkan jumlah kejadian sukses yang harus dicapai untuk diamati
- Ditanyakan jumlah percobaan yang harus dilakukan untuk mendapatkan k kali kejadian sukses

$$b^*(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, x = k, k+1, k+2, \ldots$$

Kompetisi NBA

Distribusi Binomial Negatif

- Pada final kompetisi NBA musim ini, tim finalis adalah tim A dan tim B.
- Dilaksanakan maksimal 7 pertandingan kedua tim finalis tsb.
- Tim finalis yang memenangkan 4 dari 7 pertandingan tsb dinyatakan sebagai juara.
- Misalkan tim A dan B telah bertanding di masa lalu dan tim A memiliki peluang menang 0.55 atas tim B.
  - Berapa peluang tim A akan memenangkan final musim ini dalam 6 pertandingan final?
  - Berapa peluang tim A akan memenangkan final musim ini?
  - Berapa peluang hanya terjadi 4 pertandingan final musim ini?

Distribusi Geometrik

- Percobaan memiliki hanya dua kemungkinan hasil, dilabeli dengan "*success*" atau "*failure*"
- Percobaan yang dilakukan bersifat saling bebas
- Nilai p menunjukkan peluang terjadinya kejadian sukses
  - Nilai q menunjukkan peluang terjadinya kejadian gagal
- Ditanyakan jumlah percobaan yang harus dilakukan untuk mendapatkan pertama kali kejadian sukses

$$g(x;p) = pq^{x-1}, x = 1,2,...$$

Mean dan Variance dari Distribusi Peluang Geometrik

- **Nilai peluang sukses untuk setiap percobaan, p**
  - **Nilai peluang gagal untuk setiap percobaan, q**
- **Nilai x adalah jumlah percobaan yang harus dilakukan untuk mendapat pertama kali kejadian sukses**
- **Nilai x mengikuti bentuk distribusi Binomial Negatif dengan** mean**,**

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{p}$$

- **Dan** variance**,** $$\sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = \frac{1-p}{p^2}$$

Walpole, hal 139 no 6

- Dicatat bahwa 2/3 dari 20 milyar penduduk yang mengunakan obat penenang adalah wanita
- Pada hari tertentu dokter memberikan 5 resep pemakaian obat penenang
- Hitung peluang bahwa resep kelima adalah resep pertama yang diberikan pada wanita
  - Distribusi Binomial Negatif atau lebih khusus ke Geometrik

$$g(5; \tfrac{2}{3}) = (\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})^{(5-1)} = \frac{2}{243}$$

- Hitung peluang tiga buah resep diberikan pada wanita
  - Distribusi Binomial Negatif:

$$b^{*}(5;3,\tfrac{2}{3}) = \binom{4}{2}(\tfrac{2}{3})^{3}(\tfrac{1}{3})^{2} = \frac{16}{81}$$

Distribusi Peluang Poisson

- Diasumsikan terdapat suatu interval terbagi menjadi banyak subinterval
  - Peluang munculnya suatu kejadian pada subinterval sangat kecil

- Asumsi pada distribusi peluang Poisson:
  - Peluang munculnya suatu kejadian pada subinterval bernilai konstan untuk semua subinterval
  - Tidak mungkin >1 kejadian pada setiap subinterval
  - Setiap kejadian saling bebas

Distribusi Peluang Poisson

- **Variabel random X mengikuti distribusi peluang Poisson apabila fungsi peluangnya sbb:**

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad utk\ \mathrm{x} = 0, 1, 2, \ldots$$

  - **P(x) = peluang dari sejumlah x kejadian sukses pada periode tertentu dinotasikan sebagai t waktu**
  - **λ = jumlah rata-rata kejadian sukses per unit waktu; λ > 0**
  - **e = 2.71828 (basis dari logaritma natural)**
- Mean dan Variance dari distribusi peluang Poisson adalah:

$$\mu_x = E(X) = \lambda \quad dan \quad \sigma_x^2 = E[(X-\mu)^2] = \lambda$$

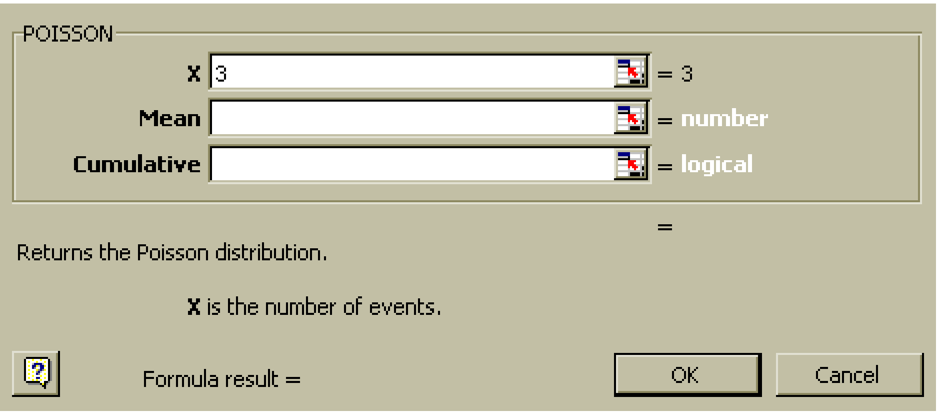
Peluang Partial Poisson untuk $\lambda = 0.03$ Menggunakan Microsoft Excel PHStat

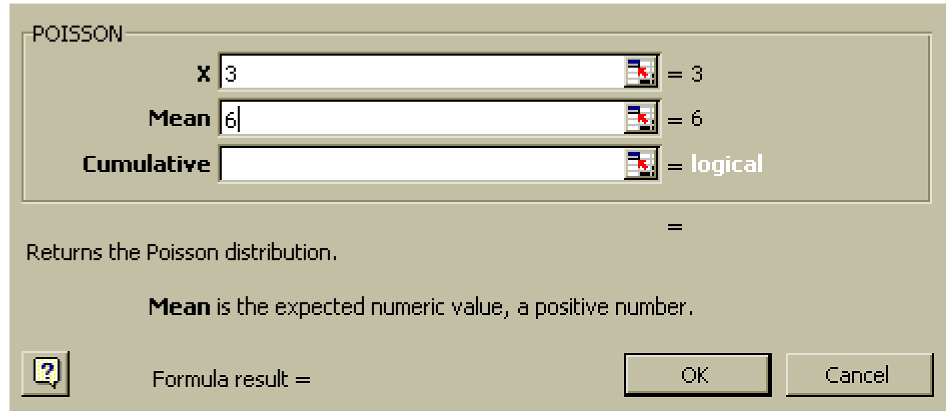
Poisson Probabilities Table						
	X	P(X)	P(<=X)	P(<X)	P(>X)	P(>=X)
	0	0,970446	0,970446	0,000000	0,029554	1,000000
	1	0,029113	0,999559	0,970446	0,000441	0,029554
	2	0,000437	0,999996	0,999559	0,000004	0,000441
	3	0,000004	1,000000	0,999996	0,000000	0,000004
	4	0,000000	1,000000	1,000000	0,000000	0,000000

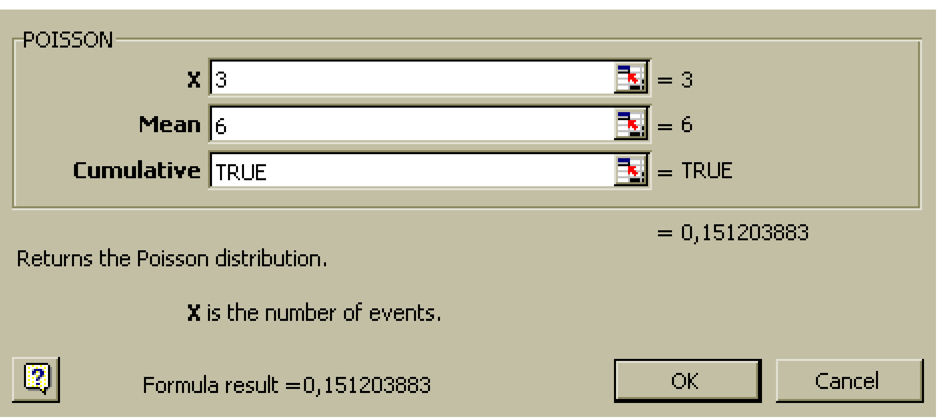
Walpole, hal 139 no 10

- Pada daerah tertentu tercatat rata-rata mengalami musibah banjir 6 kali dalam waktu satu tahun
  - $\lambda = 6$
- Hitung peluang pada tahun depan akan mengalami banjir < 4
  - $p(x<4)$
- Hitung peluang pada tahun depan akan mengalami banjir antara 6 sampai 8 kali
  - $p(6 \leq x \leq 8)$

Walpole, hal 139 no 10 dengan Microsoft Excel







$$P(x<4)=\sum_{x=0}^{3} p(x;6)=0.1512$$

Walpole, hal 139 no 10 dengan Tabel

$$P(6 \le x \le 8) = \sum_{x=0}^{8} p(x;6) - \sum_{x=0}^{5} p(x;6) = 0.4015$$

- Lihat buku Walpole Tabel A2, daftar nilai pada tabel berbentuk kumulatif $\sum_{x=0}^{r} p(x;\mu)$
- Dicari nilai $\mu = \lambda t = 6$
- Dicari r = 8 ditemukan nilai 0.8472
- Dicari r = 5 ditemukan nilai 0.4457
- Untuk interval $6 \le x \le 8 \rightarrow$ 0.8472-0.4457

Aproksimasi Poisson untuk Distribusi Binomial

- **X adalah jumlah kejadian sukses dari n kali percobaan saling bebas**
- **Setiap kejadian sukses berpeluang π**
- **Distribusi jumlah kejadian sukses, X adalah binomial**
  - **Nilai mean adalah $n\pi$**
- **Jika jumlah percobaan n besar**
  - **Terpenuhi kondisi $n\pi \leq 7$**
- **Peluang distribusi Binomial diaproksimasi dengan distribusi Poisson, $\lambda = n\pi$**
- **Fungsi peluang untuk aproksimasi adalah :**

$$P(x) = \frac{e^{-n\pi}(n\pi)^x}{x!}, \quad untuk\ \mathrm{x} = 0, 1, 2, \ldots$$

Walpole, hal 139 no 14

- Eksperimen seseorang akan meninggal terinfeksi virus pernapasan
  - Kejadian sukses = orang meninggal, Distribusi Binomial
  - p = 0.002
- Eksperimen dilakukan pada 2000 orang, n = 2000
- Hitung peluang bahwa kurang dari 5 orang yang akan meninggal, p(x<5)
- Kondisi np = (2000)(0.002) = 4 ≤ **7 terpenuhi**
  - Peluang distribusi Binomial diaproksimasi dengan distribusi Poisson, μ = np = 4 → λt = 4

$$p(x<5)=\sum_{x=0}^{4} b(x;2000,0.002) \cong \sum_{x=0}^{4} p(x;4) = 0.6288$$

Walpole, hal 139 no 17

- Eksperimen seseorang akan meninggal terinfeksi virus pernapasan
  - Kejadian sukses = orang meninggal, Distribusi Binomial
  - p = 0.002
- Eksperimen dilakukan pada 2000 orang, n = 2000
- Kondisi np = (2000)(0.002) = 4 $\leq$ **7 terpenuhi**
  - Peluang distribusi Binomial diaproksimasi dengan distribusi Poisson, $\mu = np = 4 \rightarrow \lambda t = 4$
- Hitung mean, $\mu = \lambda t = np = 4$
- Hitung variance, $\sigma^2 = \mu = 4 \rightarrow \sigma = 2$

Walpole, hal 139 no 17 Teorema Chebyshev

- Dari 2000 orang pada eksperimen terdapat peluang setidaknya ¾ orang akan meninggal pada interval ?
  - Untuk $p \geq$ ¾ maka $k = 2$
  - Intervalnya $\mu \pm 2\sigma = 4 \pm (2)(2) = 0 \leq x \leq 8$

- Eksperimen pada 2000 orang setidaknya akan ditemukan $0 \leq x \leq 8$ orang yang berpeluang ¾ meninggal terinfeksi virus pernapasan

Walpole, hal 139 no 14

- Perusahaan pengeboran minyak mengadakan eksplorasi ke beberapa lokasi yang diduga terdapat sumber minyak
- Keberhasilan ditemukan sumber minyak pada satu lokasi tidak mempengaruhi keberhasilan lokasi yang lain
  - Kejadian saling bebas
- Peluang ditemukan kesuksesan di satu lokasi 0.25
  - $p = 0.25$

Walpole, hal 139 no 14

- Peluang dilakukan pengeboran di 10 lokasi dan ditemukan satu keberhasilan → Distr. Binomial

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0,1,\ldots,n$$

$$p(x=1) = b(1;10,0.25) = \binom{10}{1}(0.25)^1(0.75)^{10-1} = 0.1877$$

- Perusahaan dianggap merugi apabila keberhasilan pertama ditemukan setelah 10 kali mengebor.
- Hitung kemungkinan perusahaan mengalami kerugian

Walpole, hal 139 no 14

- Keberhasilan pertama setelah 10 kali percobaan → Distribusi Geometrik

$$g(x;p) = pq^{x-1}, x = 1,2,...$$

$$g(10;0.25) = (0.25)(0.75)^{10-1}$$

$$g(10;0.25) = 0.0188$$

- Peluang untuk menemukan keberhasilan pertama setelah 10 kali percobaan sebesar 0.0188
- Nilainya yang terlalu kecil, sehingga kecil kemungkinan perusahaan tersebut akan merugi

Walpole, hal 139 no 15

- Perusahaan akan merasa mendapat keberuntungan apabila lokasi yang kedua berhasil ditemukan pada pengeboran yang keenam atau sebelumnya
  - k keberhasilan dari n kali percobaan → Distr. Binomial Negatif
- Peluang perusahaan mendapat keberuntungan adalah …

$$b^*(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} \qquad ; \; x = k,\; k+1,\; k+2,\; \ldots$$

$$b^*(6;2,0.25) = \binom{6-1}{2-1} (0.25)^2 (0.75)^{6-2} = 0.0989$$