EKSPEKTASI

Probabilitas dan Statistika

Teknik Informatika, FTEIC
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Model Matematis untuk Variabel Random

- Mean = nilai rata-rata

$$\mu_x = E(x)$$

Fungsi E(….) adalah fungsi ekspektasi

- Variance = simpangan sebaran

$$\sigma^2{}_x = E[(x-\mu)^2]$$

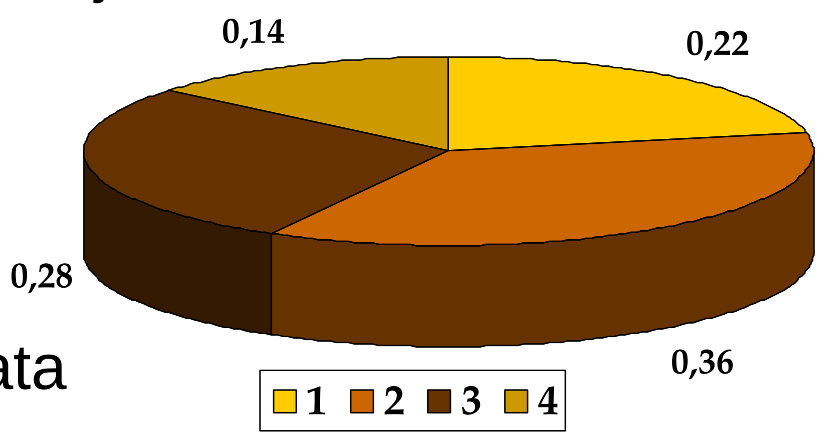
Mean dari Variabel Random Diskrit

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x \in X} xP(x)$$

- Mean atau nilai rata-rata/tengah variabel random X dinyatakan sebagai penjumlahan untuk semua nilai x yang mungkin

Walpole, hal 94 no 8

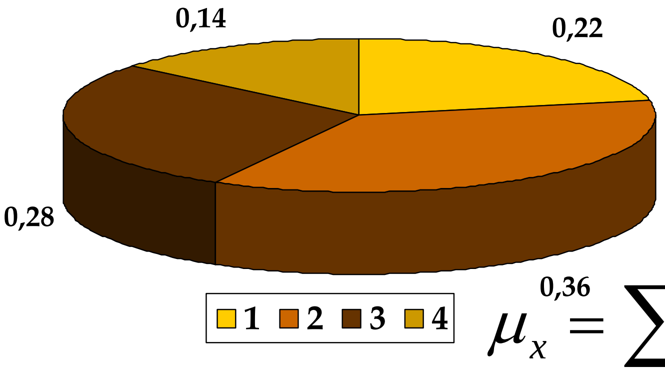
- Toko perhiasan mengkhususkan diri pada transaksi penjualan kalung emas
- Pada penjualan kalung, peluang kejadian untuk mendapatkan keuntungan sejumlah
  1. $250 : 0.22
  2. $150 : 0.36
  3. $0 : 0.28
  4. $(-150) : 0.14
- Hitung keuntungan rata-rata yang bisa diharapkan dari penjualan kalung



Walpole, hal 94 no 8

- X adalah variabel random diskrit yang menyatakan nilai keuntungan hasil penjualan kalung
- $p(x)$ adalah peluang mendapatkan keuntungan tertentu
- Hitung μ_x?

	Dalam dollar			
x	**250**	**150**	**0**	**-150**
f(x)	**0.22**	**0.36**	**0.28**	**0.14**



$$\mu_x = \sum_{x \in X} xp(x), x = \{250,150,0,-150\}$$

$$\mu_x = 250(0.22) + 150(0.36) + 0(0.28) + (-150)(0.14)$$

$$\mu_x = \$88$$

Mean dari Variabel Random Kontinyu

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx$$

- Mean atau nilai rata-rata/tengah variabel random X dinyatakan sebagai penjumlahan hasil integral untuk semua nilai x yang memenuhi area ruang sampel

Walpole, hal 94 no 15

- Berikut adalah fungsi peluang yang menyatakan waktu pemakaian penyedot debu oleh suatu rumah di Surabaya pada tahun 2012
  - 1 unit berarti 100 jam

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$\mu_x = \int_0^1 x(x) dx + \int_1^2 x(2-x) dx = 1$$

- Berapa peluang penyedot debu dipakai 60 jam atau kurang di rumah tsb pada tahun 2012?

E[g(x)] untuk Variabel Random Diskrit

- X adalah variabel random diskrit
- X memiliki distribusi peluang dengan fungsi P(x)
- Terdapat g(X) yang merupakan fungsi dari X
- Mean dari variabel random g(X) adalah:

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_{x} g(x)P(x)$$

Walpole, hal 94 no 10

- Dua orang pakar ban memeriksa kualitas sejumlah ban. Kualitas ban dinyatakan dalam 1, 2, dan 3.
- Variabel random X menyatakan hasil pemeriksaan ban oleh pakar A. Variabel random Y menyatakan hasil pemeriksaan ban oleh pakar B
- Distribusi peluang gabungan untuk variabel random X dan Y ditunjukkan pada tabel.
- Carilah rata-rata nilai kualitas yang diberikan oleh pakar A dan pakar B (μ_x dan μ_y)

	y	**1**	**2**	**3**
x	**1**	**0.10**	**0.05**	**0.02**
	2	**0.10**	**0.35**	**0.05**
	3	**0.03**	**0.10**	**0.20**

Walpole, hal 94 no 10

- Untuk menghitung μ_x diperlukan fungsi marginal terhadap X → g(x)
- Untuk menghitung μ_y diperlukan fungsi marginal terhadap Y → h(y)

	y	1	2	3	g(x)
x	1	0.10	0.05	0.02	0.17
	2	0.10	0.35	0.05	0.50
	3	0.03	0.10	0.20	0.33
	h(y)	0.23	0.50	0.27	1.00

x	1	2	3
g(x)	0.17	0.50	0.33

y	1	2	3
h(y)	0.23	0.50	0.27

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x)P(x)$$

$$\mu_{g(X)} = 1(0.17) + 2(0.50) + 3(0.33) = 2.16$$

$$\mu_{h(Y)} = E[h(Y)] = \sum_y h(y)P(y)$$

$$\mu_{h(Y)} = 1(0.23) + 2(0.50) + 3(0.27) = 2.04$$

Walpole, hal 95 no 18

- Terdapat variabel random X dengan distribusi peluang sbb

$$f(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}, x = 0,1,2,3$$

x	0	1	2	3
f(x)	27/64	27/64	9/64	1/64
g(x)	0	1	4	9

- Terdapat fungsi g(X) = X^2
- Hitung $\mu_{g(X)}$

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x)P(x)$$

$$\mu_{x^2} = E(X^2) = \sum_x X^2 P(x)$$

$$\mu_{g(X)} = 0(27/64) + 1(27/64) + 4(9/64) + 9(1/64) = 2.16$$

E[g(x)] untuk Variabel Random Kontinyu

- X adalah variabel random kontinyu
- X memiliki distribusi peluang dengan fungsi P(x)
- Terdapat g(X) yang merupakan fungsi dari X
- Mean dari variabel random g(X) adalah:

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)P(x)dx$$

Walpole, hal 95 no 20

- Terdapat variabel random kontinyu X dengan fungsi peluang sbb

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

- Terdapat fungsi g(x) = $e^{2x/3}$, hitung μ_X dan $\mu_{g(X)}$

$$\mu_{g(x)} = E[g(x)] = E(e^{2x/3}) = \int_0^{+\infty} e^{2x/3} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x/3} dx = 3$$

E[g(x, y)] untuk distribusi peluang gabungan diskrit

- X dan Y adalah variabel random diskrit
- X dan Y memiliki distribusi peluang gabungan dengan fungsi P(x, y)
- Terdapat g(X, Y) yang merupakan fungsi dari X dan Y
- Mean dari variabel random g(X, Y) adalah:

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)P(x,y)$$

E[g(x, y)] untuk distribusi peluang gabungan kontinyu

- X dan Y adalah variabel random kontinyu
- X dan Y memiliki distribusi peluang gabungan dengan fungsi P(x, y)
- Terdapat g(X, Y) yang merupakan fungsi dari X dan Y
- Mean dari variabel random g(X, Y) adalah:

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)P(x,y)\,dx\,dy$$

Variance dan Standar Deviasi

- X adalah variabel random diskrit
- Nilai variance untuk variabel random diskrit X dinotasikan dengan $E(X-\mu_x)^2$

$$\sigma_x^2 = E(X-\mu_x)^2 = \sum_x (x-\mu_x)^2 P(x)$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^{\ 2}$$

$$= \sum_x x^2 P(x) - \mu_x^{\ 2}$$

- Standar deviasi $\boldsymbol{\sigma_x}$ adalah akar positif dari variance

Mean dan Variance untuk Variabel Random Diskrit dengan Microsoft Excel

Sales	P(x)	Mean	Variance
0	0,15	0	0,570375
1	0,3	0,3	0,27075
2	0,2	0,4	0,0005
3	0,2	0,6	0,2205
4	0,1	0,4	0,42025
5	0,05	0,25	0,465125
		1,95	**1,9475**

$$Mean = \sum_{x \in Sales} xP(x)$$

$$Variance = \sum_{x \in Sales} (x - Mean)^2 P(x)$$

Mean = 1.95

Variance = 1.9475

Variance dan Standar Deviasi

- Misalkan variabel random X menunjukkan banyaknya truk yang digunakan perusahaan A pada suatu hari dan variabel random Y menunjukkan banyaknya truk yang digunakan perusahaan B pada hari yang sama.
- Distribusi probabilitas untuk X dan Y adalah sbb

x	1	2	3
f(x)	0.3	0.4	0.3

y	0	1	2	3	4
f(y)	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

- Apakah variance distribusi probabilitas untuk X lebih besar dari variance distribusi probabilitas untuk Y?

Contoh Soal 1

- The weekly demand for a drinking-water product, in thousands of liters, from a local store is a continuous random variable X having the density:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

- Find the mean and variance of X.

Contoh Soal 2

- Let X the following pdf

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.4	0.3

- Find variance of $2X + 3$

Covariance, σ_{xy}

- Terdapat variabel random X dan Y
- Terdapat fungsi peluang gabungan f(x, y) untuk variabel random X dan Y
- Covariance untuk variabel random X dan Y, σ_{xy}

$$\sigma_{xy} = E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y)P(x,y)$$

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x\mu_y = \sum_x \sum_y xyP(x,y) - \mu_x\mu_y$$

Jika variabel random X dan Y dikatakan **saling bebas**, maka $\sigma_{xy} = 0$. Namun jika $\sigma_{xy} = 0$, tidak bisa langsung dinyatakan bahwa variabel random X dan Y **saling bebas**.

Correlation

- X dan Y adalah variabel random
- Terdapat fungsi peluang gabungan untuk X dan Y
- Correlation antara X dan Y adalah …

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Sifat-Sifat Fungsi Linear Variabel Random

- X adalah variabel random dengan mean μ_x dan variance σ^2_x
- Terdapat konstanta a dan b
- Terdapat variabel random lain Y yang dibentuk dari fungsi linear kombinasi Y = a + *b*X
- Jadi mean dan variance untuk Y adalah…

$$\mu_Y = E(a + bX) = a + b\mu_X$$

$$\sigma^2{}_Y = Var(a + bX) = b^2\sigma^2{}_X$$

- Nilai standard deviasi σ_y dari Y adalah $\sigma_Y = |b|\sigma_X$

Sifat-Sifat Fungsi Linear Variabel Random

- X adalah variabel random dengan mean μ_X dan variance σ^2_X
- Terdapat konstanta a dan b dengan b = 0
- Terdapat variabel random lain Y yang dibentuk dari fungsi linear kombinasi Y = a + *b*X
- Jadi mean dan variance untuk Y adalah…

$$\mu_Y = E(a+bX) = a + b\mu_X = a$$

$$\sigma^2{}_Y = Var(a+bX) = b^2\sigma^2{}_X = 0$$

Sifat-Sifat Fungsi Linear Variabel Random

- X adalah variabel random dengan mean μ_x dan variance σ^2_x
- Terdapat konstanta a dan b dengan a = 0
- Terdapat variabel random lain Y yang dibentuk dari fungsi linear kombinasi Y = a + *b*X
- Jadi mean dan variance untuk Y adalah…

$$\mu_Y = E(a + bX) = a + b\mu_X = b\mu_X$$

$$\sigma^2{}_Y = Var(a + bX) = b^2\sigma^2{}_X$$

Teorema Chebyshev

- Peluang untuk semua variabel random X dapat diperkirakan bernilai setidaknya sbb

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Teorema Chebyshev

- Sebuah variabel random X memiliki rata-rata = 10 dan standar deviasi = 2, carilah peluang $P(|x-10|<3)$

$$
\begin{aligned}
P(|x-10|<3) &= P(-3<x-10<3) \\
&= P(7<x<13) \\
&= P\left[10-(2)(\tfrac{3}{2})<x<10+(2)(\tfrac{3}{2})\right] \\
&\geq 1-\left(\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right) \\
&\geq 0.555556
\end{aligned}
$$

Walpole, hal 113 no 10

- Perusahaan mobil membuka lowongan pekerjaan
- Disediakan 70 posisi untuk pegawai baru
- Terdapat 1000 orang pelamar yang datang
- Dilakukan tes untuk proses seleksi
- Rata-rata nilai tes μ=60 dan σ=6
- Apakah pelamar dengan nilai tes > 84 akan diterima? Asumsikan distribusi probabilitas berbentuk simetris.

$$\mu + k\sigma = 84 \Rightarrow 60 + k(6) = 84 \Rightarrow k = 4$$

$$P\left[60 - 4(6) \le x \le 60 + 4(6)\right] \ge 1 - \tfrac{1}{4^2}$$

$$P(36 \le x \le 84) \ge 0.9375 \Rightarrow P(x > 84) = ?$$

$$P(x > 84) = 1 - P(36 \le x \le 84) = 1 - 0.9375 = 0.03125$$

$$\Sigma org_{Nilai > 84} = 0.03125 \times 1000 = 31.875 \approx 32$$

Diterima