Projet 2015-2016

MPRO-ECMA

Auteurs :
Paulin Jacquot
Roxane Delpeyrat

January 18, 2016

Exercice 1

1.1 On utilise des variables x_{ij} pour $(i,j) \in M$, valant 1 SSI la maille (i,j) est selectionnée. Le programme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & max \sum_{(ij)\in M} x_{ij} && (1) \\ & s.c. \ \frac{\sum H^p_{ij} C^p_{ij} x_{ij}}{\sum C^p_{ij} x_{ij}} + \frac{\sum H^a_{ij} C^a_{ij} x_{ij}}{\sum C^a_{ij} x_{ij}} \geq 2 && (2) \\ & x_{ij} \in \{0,1\} && (3) \end{aligned}$$

1.2 Pour linéariser la contrainte fractionnaire (2), on utilise les variables :

$$y_{ij} = \frac{1}{\sum C^p_{ij} x_{ij}} \qquad z_{ij} = \frac{1}{\sum C^a_{ij} x_{ij}}$$

ce qui donne les contraintes quadratiques :

$$\sum C^p_{ij} y \cdot x_{ij} = 1 \qquad \sum C^a_{ij} z \cdot x_{ij} = 1 \tag{4}$$

On linéarise ensuite ces contraintes. Pour cela, introduisons les quantités :

$$M^p = \frac{1}{\underset{(i,j)\in M}{min} C^p_{ij}} \qquad M^a = \frac{1}{\underset{(i,j)\in M}{min} C^a_{ij}}$$

bien définies car les coefficients C^p et C^a sont strictement positifs pour tout $(ij) \in M$.

En posant $u_{ij} = x_{ij} \cdot y$ et $v_{ij} = x_{ij} \cdot z$, les contraintes (4) sont alors équivalentes à :

$$\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} \cdot u_{ij} = 1 \qquad \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} \cdot v_{ij} = 1 \tag{5}$$

$$u_{ij} \leq x_{ij} \cdot M^p \qquad v_{ij} \leq x_{ij} \cdot M^a, \qquad \forall (i,j) \in M \tag{6}$$

$$u_{ij} \leq y \qquad v_{ij} \leq z, \qquad \forall (i,j) \in M \tag{7}$$

$$u_{ij} \geq (x_{ij} - 1) \cdot M^p + y \qquad v_{ij} \geq (x_{ij} - 1) \cdot M^a + z, \qquad \forall (i,j) \in M \tag{8}$$

$$u_{ij} \geq 0 \qquad v_{ij} \geq 0, \qquad \forall (i,j) \in M \tag{9}$$

La contrainte (2) se réécrit également de façon linéaire :

$$\sum H^p_{ij} C^p_{ij} u_{ij} + \sum H^a_{ij} C^a_{ij} v_{ij} \geq 2 \tag{10}$$

Le programme linéaire s'obtient avec les contraintes (10) et 5, 6,7,8,9 et la même fonction objectif :

$$max \sum_{(ij)\in M} x_{ij}$$

Exercice 2

Définissons, pour chaque $h \in [|0, n^2|]$, les variables binaires $l_{ijh} \forall (i,j) \in M$. On modélise alors la connexité comme le suggère l'énoncé : il existe une et une seule maille "racine" de hauteur $h = 0$. Ensuite, chaque maille (ij) sélectionnée se voit attribuer une hauteur h (et alors $l_{ijh} = 1$) et une maille est selectionnée avec hauteur $h > 0$ si une de ses voisines est selectionnée avec hauteur $h - 1$.

Pour toute maille selectionnée (i,j), il existe donc un chemin empruntant des mailles selectionnées jusqu'à la maille racine de hauteur 0. La solution est donc étoilée par rapport à cette maille racine, donc connexe.

Les contraintes s'écrivent donc de la manière suivante :

$$\sum_{(ij)\in M} l_{ij0} = 1 \text{ (une et une seule racine)} \tag{11}$$

$$\sum_{h=0}^{n^2} l_{ijh} = x_{ij},\ \forall (i,j) \in M \tag{12}$$

$$l_{ijh+1} \leq l_{i-1jh} + l_{i+1jh} + l_{ij-1h} + l_{ij+1h}, \forall (i,j) \in M,\ h \in [|0, n^2-1|] \tag{13}$$

$$ł_{ijh} \in \{0,1\},\ \forall (i,j) \in M, \forall h \in [|0, n^2|] \tag{14}$$

Cela représentant un très grand nombre de variables et de contraintes (en $\mathcal{O}(n^4)$), on pourra ajouter les contraintes au fur et à mesure, seulement si elles sont violées.