

PROJET 2015-2016

MPRO-ECMA

Auteurs :

Paulin JACQUOT

Roxane DELPEYRAT

January 18, 2016

Exercice 1

1.1 On utilise des variables x_{ij} pour $(i, j) \in M$, valant 1 SSI la maille (i, j) est sélectionnée. Le programme s'écrit alors :

$$\max \sum_{(ij) \in M} x_{ij} \quad (1)$$

$$s.c. \frac{\sum H_{ij}^p C_{ij}^p x_{ij}}{\sum C_{ij}^p x_{ij}} + \frac{\sum H_{ij}^a C_{ij}^a x_{ij}}{\sum C_{ij}^a x_{ij}} \geq 2 \quad (2)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (3)$$

1.2 Pour linéariser la contrainte fractionnaire, on utilise les variables :

$$y = \frac{1}{\sum C_{ij}^p x_{ij}} \quad z = \frac{1}{\sum C_{ij}^a x_{ij}}$$

ce qui donne les contraintes quadratiques :

$$\sum C_{ij}^p y \cdot x_{ij} = 1 \quad \sum C_{ij}^a z \cdot x_{ij} = 1 \quad (4)$$

On linéarise ensuite ces contraintes. Pour cela, introduisons les quantités :

$$M^p = \frac{1}{\min_{(i,j) \in M} C_{ij}^p} \quad M^a = \frac{1}{\min_{(i,j) \in M} C_{ij}^a}$$

bien définies car les coefficients C^p et C^a sont strictement positifs pour tout $(ij) \in M$.

En posant $u_{ij} = x_{ij} \cdot y$ et $v_{ij} = x_{ij} \cdot z$, les contraintes (4) sont alors équivalentes à :

$$\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^p \cdot u_{ij} = 1 \qquad \sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a \cdot v_{ij} = 1 \qquad (5)$$

$$u_{ij} \leq x_{ij} \cdot M^p \qquad v_{ij} \leq x_{ij} \cdot M^a, \qquad \forall (i,j) \in M \qquad (6)$$

$$u_{ij} \leq y \qquad v_{ij} \leq z, \qquad \forall (i,j) \in M \qquad (7)$$

$$u_{ij} \geq (x_{ij} - 1) \cdot M^p + y \qquad v_{ij} \geq (x_{ij} - 1) \cdot M^a + z, \qquad \forall (i,j) \in M \qquad (8)$$

$$u_{ij} \geq 0 \qquad v_{ij} \geq 0, \qquad \forall (i,j) \in M \qquad (9)$$

Exercice 2

Définissons, pour chaque $h \in [0, n^2]$, les variables binaires $l_{ijh} \forall (i,j) \in M$. On modélise alors la connexité comme le suggère l'énoncé : il existe une et une seule maille "racine" de hauteur $h = 0$. Ensuite, chaque maille (ij) sélectionnée se voit attribuer une hauteur h (et alors $l_{ijh} = 1$) et une maille est sélectionnée avec hauteur $h > 0$ si une de ses voisines est sélectionnée avec hauteur $h - 1$.

Pour toute maille sélectionnée (i,j) , il existe donc un chemin empruntant des mailles sélectionnées jusqu'à la maille racine de hauteur 0. La solution est donc étoilée par rapport à cette maille racine, donc connexe.

Les contraintes s'écrivent donc de la manière suivante :

$$\sum_{(ij) \in M} l_{ij0} = 1 \text{ (une et une seule racine)} \qquad (10)$$

$$\sum_{h=0}^{n^2} l_{ijh} = x_{ij}, \quad \forall (i,j) \in M \qquad (11)$$

$$l_{ijh+1} \leq l_{i-1jh} + l_{i+1jh} + l_{ij-1h} + l_{ij+1h}, \quad \forall (i,j) \in M, \quad h \in [0, n^2 - 1] \qquad (12)$$

$$l_{ijh} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in M, \quad \forall h \in [0, n^2] \qquad (13)$$

Cela représentant un très grand nombre de variables et de contraintes (en $\mathcal{O}(n^4)$), on pourra ajouter les contraintes au fur et à mesure, seulement si elles sont violées.