Chapitre 5
La Valeur à Risque (VaR)
(2020-2021)

Économétrie Financière Avancée

Olivier DARNÉ

Pourquoi des notions de risques et des mesures de risque ?

Le management des risques contient trois grands processus :

- l'évaluation des risques
- la formalisation des risques
- l'exploitation des risques

L'évaluation des risques a comme fonction "*d'examiner et de déterminer la probabilité d'occurrence ou de survenance d'un événement*".

C'est un processus primordial lors de la prise de décision dans une entreprise.

Les risques peuvent être dus à des facteurs externes ou internes :

- Les facteurs externes :
  - facteurs d'ordre économique : changement du niveau de compétition, des forces du marché, de l'économie
  - facteurs d'ordre naturel et environnemental : catastrophes naturelles
  - facteurs d'ordre politique : changement de gouvernement, de législation
  - facteurs d'ordre social : changements démographiques, de priorités sociales
  - facteurs d'ordre technologique : virage technologique
- Les facteurs internes :
  - l'infrastructure : réparations inattendues, problémes, informatique
  - le personnel : accidents de travail, grèves, erreur humaine
  - les processus : problémes de qualité, technologie

La formalisation des risques permet d'utiliser les méthodes scientifiques.

Ce processus contient quatre étapes :

- modéliser les différentes sources de risques
- lier les sources à des mesures financières
- développer des stratégies pour remédier à ces risques
- optimiser les investissements avec ces stratégies

On rencontre deux types de risques :

- Risques non quantifiables
  - Risque opérationnel
  - Risque de non conformitÃ© ou rÃ©glementaire
  - Risque juridique
  - Risque cyber (*information technology*, IT)
- Risques quantifiables
  - Risque de crédit ou risque de défaut (de contrepartie)
  - Risque souverain
  - Risque politique
  - Risque pays
  - Risque naturel
  - Risque de liquidité (marchés des actifs financiers et marché interbancaire ou de financement)
  - Risque de marché

Risque de marché des actifs financiers

Nous pouvons distinguer différents types de risque du marché des actifs financiers ou boursier (*asset market risk*) :

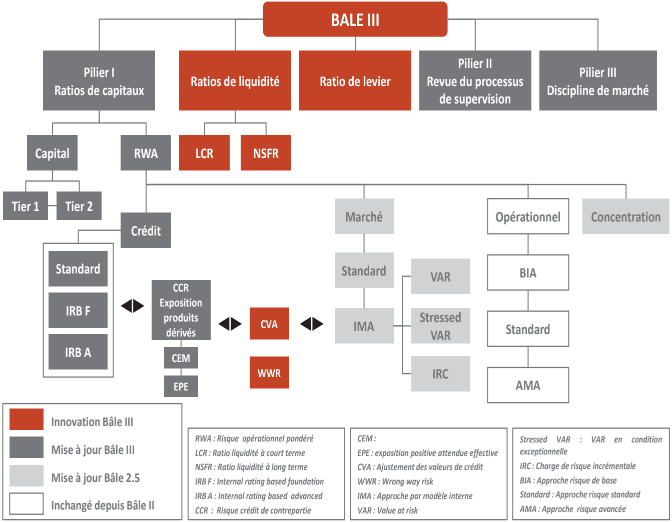
- Risque total : volatilité : écart-type (σ_T)
- Risque de pertes extrêmes : semi-variance, Value at Risk (VaR) ou Valeur à Risque, Expected Shortfall (ES) ...
- Risque systématique ou de marché (non diversifiable) : β du MEDAF
- Risque idiosynchratique ou spécifique (diversifiable)
- Risque systémique : Marginal ES (MES), Conditional VaR (CoVaR), ...

Il est donc très important pour un *risk manager* de surveiller ces différentes notions de risque de marché afin d'évaluer au mieux les pertes auxquelles il est potentiellement exposé.

1. La Value at Risk (VaR)

▶ La Valeur à Risque (VaR, *Value at Risk*) est une tentative de synthétiser en un seul nombre le risque total de pertes extrémes d'un portefeuille d'actifs financiers (actions, taux de change, dérivés, matiéres premiéres ...)
$\Rightarrow$ mesure de référence du risque

▶ La mesure de la VaR est également utilisée sur le plan de la régulation par les accords de Bâle III pour le calcul du capital requis (fonds propres réglementaires) par les banques.



RWA : Risque opérationnel pondéré
LCR : Ratio liquidité à court terme
NSFR : Ratio liquidité à long terme
IRB F : Internal rating based foundation
IRB A : Internal rating based advanced
CCR : Risque crédit de contrepartie

CEM :
EPE : exposition positive attendue effective
CVA : Ajustement des valeurs de crédit
WWR : Wrong way risk
IMA : Approche par modèle interne
VAR : Value at risk

Stressed VAR : VAR en condition exceptionnelle
IRC : Charge de risque incrémentale
BIA : Approche risque de base
Standard : Approche risque standard
AMA : Approche risque avancée

- Méthode d'estimation statistique du risque d'un portefeuille (Jorion, 2007, *Value-at-Risk*, 3rd edition, McGraw-Hill).

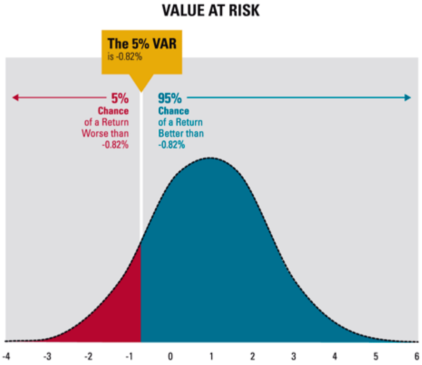
  La VaR mesure la perte maximale en capital (la pire perte) pouvant étre réalisée sur un intervalle de temps donné, dans des conditions Normales de marché, pour un niveau de confiance donné.

- La VaR va permettre au risk manager ou à l'investisseur de répondre aux interrogations suivantes :

  Combien pouvons-nous perdre avec notre portefeuille dans des conditions de marché Normales pour un horizon de temps donné, pour un niveau de confiance donné ?
  Quel capital devons-nous provisionner pour se couvrir contre ce risque de perte maximale ?

Si la VaR quotidienne (horizon 1 jour) d'un portefeuille de 10 millions € pour un niveau de confiance de 95% est de -8.2%, alors

- il y a 95% de chances que la perte associée à la détention du portefeuille n'excéde pas 820 000 € sur une journée
- il y a 5% de chances que la perte associée à la détention du portefeuille excéde 820 000 € à 1 jour



La simplicité de cette définition constitue l'un des principaux attraits de la Value-at-Risk.

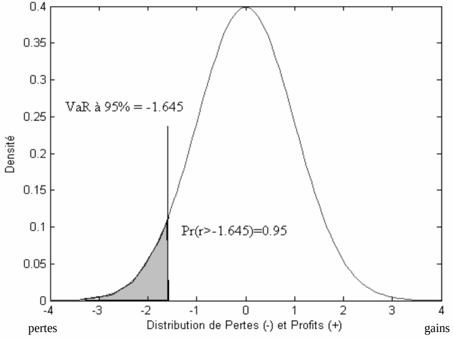
Il est en effet trés facile de communiquer sur la VaR et de ainsi proposer une mesure homogéne et générale (quelle que soit la nature de l'actif, la composition du portefeuille etc.) de l'exposition au risque.

La VaR peut être utilisée de trois façons principales (Jorion, 2007) :

- de façon passive : reporting d'information (risque global, exprimé en unité monétaire, non technique)
- de façon défensive : contrôle des risques (positions des traders, comparaison des risques)
- de façon active : management des risques (allocation de capital, mesures de performance ajustée du risque, optimisation de portefeuille)

La VaR définie pour un taux de couverture de α% correspond au quantile d'ordre α de la distribution de profits et pertes (P&L, profits and losses) associée à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs sur une période donnée.

Figure 1. Exemple de Value-at-Risk sous Distribution Normale



La définition de la VaR est fondée sur trois éléments :

- La distribution des profits et pertes (P&L) du portefeuille ou de l'actif (R_t)
- Le niveau de confiance α (ou de maniére équivalente le taux de couverture égal à un moins le niveau de confiance, $1-\alpha$) ; appelé aussi taux de couverture
- La période de détention de l'actif (ou horizon du risque) N

- La distribution de P&L correspond à la fonction de densité des P&L, supposées aléatoires, associées à la détention de l'actif ou du portefeuille sur un horizon donné

Comme toute variable aléatoire, la rentabilité à la date t R_t est caractérisé par une fonction de densité

$$f_{R_t}(r) \qquad \forall r \in \mathbb{R}$$

- Pour un taux de couverture (*coverage rate*) de α%, la VaR, notée $VaR_t(\alpha)$, correspond à l'opposé du fractile d'ordre α de la distribution

$$VaR_t(\alpha) = -F_{R_t}^{-1}(\alpha)$$

où $F_{R_t}(.)$ désigne la fonction de répartition (CDF, *cumulative distribution function*) associée à la fonction de densité $f_{R_t}(r)$

Remarque : la VaR est généralement négative (perte) dans une représentation P&L $\Rightarrow$ par soucis de simplification, dans la plupart des ouvrages on définit la VaR en valeur positive en considérant l'opposé du fractile

$$VaR_t(\alpha) = -F_{R_t}^{-1}(\alpha)$$

Par définition on a

$$\int_{-\infty}^{-VaR_t(\alpha)} f_{R_t}(r)dr = \alpha$$

La probabilité d'observer une perte supérieure à la VaR sur l'horizon de détention fixé est égale par définition au taux de couverture (*coverage rate*) :

$$Pr\left[R_t < -VaR_t(\alpha)\right] = \alpha \quad \text{si } VaR_t(\alpha) = -F_{R_t}^{-1}(\alpha)$$

$$Pr\left[R_t < VaR_t(\alpha)\right] = \alpha \quad \text{si } VaR_t(\alpha) = F_{R_t}^{-1}(\alpha)$$

Dans certains ouvrages ou certains articles, on exprime la VaR en fonction du niveau de confiance

$$VaR_t(1-\alpha) = -F_{R_t}^{-1}(\alpha)$$

On aura donc une VaR à 95% de niveau de confiance ou pour un taux de couverture de 5%

Définition

Dans le cadre de ce cours, on adoptera pour convention de définir la VaR de façon positive et en fonction du taux de couverture et non du niveau de confiance

$$VaR_t(\alpha) = -F_{R_t}^{-1}(\alpha)$$

$$Pr\left[R_t < -VaR_t(\alpha)\right] = \alpha$$

Les méthodes paramétriques de la VaR

Le principe des méthodes paramétriques de calcul de la VaR est de postuler une distribution paramétrique pour les P&L (R_t)

Dans des conditions Normales de marché, on suppose que la distribution des P&L à la date t est une distribution Normale d'espérance μ et de variance σ^2

$$R_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Par définition de la VaR on a

$$
\begin{aligned}
Pr\left[R_t < -VaR_t(\alpha)\right] &= \alpha \\
Pr\left[\frac{R_t - \mu}{\sigma} < \frac{-VaR_t(\alpha) - \mu}{\sigma}\right] &= \alpha \\
Pr\left[z_t < \frac{-VaR_t(\alpha) - \mu}{\sigma}\right] &= \alpha
\end{aligned}
$$

où z_t suit une loi Normale centrée réduite : $z_t \sim \mathcal{N}(0;1)$

Si l'on note $\Phi(.)$ la fonction de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$ alors on a

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{-VaR_t(\alpha)-\mu}{\sigma}\right) &= \alpha \\ \frac{-VaR_t(\alpha)-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(\alpha) \\ VaR_t(\alpha) &= -\mu-\sigma\Phi^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

$\Phi^{-1}(\alpha)$ représente la fonction quantile, définie comme la fonction inverse de la fonction de répartition, et définit les quantiles en fonction de α, avec $\alpha \in [0;1]$

Sous l'hypothése de Normalité de la distribution de P&L, $R_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la VaR associée à un taux de couverture de $\alpha\%$ est égale à :

$$VaR_t(\alpha) = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

La table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ donne directement la valeur des fractiles (quantiles) en fonction de la probabilité $(1-\alpha)$.

Figure: Quantiles ($\Phi^{-1}(\alpha)$) de la loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$: $P(X < a) = (1 - \alpha)$.

	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	$-\infty$	-3.090	-2.878	-2.748	-2.652	-2.576	-2.512	-2.457	-2.409	-2.366
0.01	-2.326	-2.290	-2.257	-2.226	-2.197	-2.170	-2.144	-2.120	-2.097	-2.075
0.02	-2.054	-2.034	-2.014	-1.995	-1.977	-1.960	-1.943	-1.927	-1.911	-1.896
0.03	-1.881	-1.866	-1.852	-1.838	-1.825	-1.812	-1.799	-1.787	-1.774	-1.762
0.04	-1.751	-1.739	-1.728	-1.717	-1.706	-1.695	-1.685	-1.675	-1.665	-1.655
0.05	-1.645	-1.635	-1.626	-1.616	-1.607	-1.598	-1.589	-1.581	-1.572	-1.563
0.06	-1.555	-1.546	-1.538	-1.530	-1.522	-1.514	-1.506	-1.498	-1.491	-1.483
0.07	-1.476	-1.468	-1.461	-1.454	-1.447	-1.440	-1.433	-1.425	-1.419	-1.412
0.08	-1.405	-1.398	-1.392	-1.385	-1.379	-1.372	-1.366	-1.359	-1.353	-1.347
0.09	-1.341	-1.335	-1.329	-1.323	-1.316	-1.311	-1.305	-1.299	-1.293	-1.287
0.9	1.282	1.287	1.293	1.299	1.305	1.311	1.316	1.323	1.329	1.335
0.91	1.341	1.347	1.353	1.359	1.366	1.372	1.379	1.385	1.392	1.398
0.92	1.405	1.412	1.419	1.425	1.433	1.440	1.447	1.454	1.461	1.468
0.93	1.476	1.483	1.491	1.498	1.506	1.514	1.522	1.530	1.538	1.546
0.94	1.555	1.563	1.572	1.581	1.589	1.598	1.607	1.616	1.626	1.635
0.95	1.645	1.655	1.665	1.675	1.685	1.695	1.706	1.717	1.728	1.739
0.96	1.751	1.762	1.774	1.787	1.799	1.812	1.825	1.838	1.852	1.866
0.97	1.881	1.896	1.911	1.927	1.943	1.960	1.977	1.995	2.014	2.034
0.98	2.054	2.075	2.097	2.120	2.144	2.170	2.197	2.226	2.257	2.290
0.99	2.326	2.366	2.409	2.457	2.512	2.576	2.652	2.748	2.878	3.090

Soit un portefeuille de 10 millions €, avec une rentabilité, suivant une loi Normale de moyenne 0.01% et d'écart-type 1.5%,

$$\Rightarrow R_t \sim \mathcal{N}(0.01; 2.25)$$

On peut en déduire la VaR à 1% et 5%

$$\begin{aligned} VaR_t(1\%) &= -0.01 - 1.5\Phi^{-1}(1\%) = -0.01 - 1.5 \times 2.326 = 3.499\% \\ VaR_t(5\%) &= -0.01 - 1.5\Phi^{-1}(5\%) = -0.01 - 1.5 \times 1.645 = 2.478\% \end{aligned}$$

Si l'on détient cet actif sur une journée, il y a 1% (5%) de chance de réaliser une perte au moins égale à 3.499% (2.478%) du capital investit

$$VaR_t(1\%) = 349\ 900€ \qquad VaR_t(5\%) = 247\ 800€$$

Taux de couverture α : On remarque que plus le taux de couverture exigé sera faible, plus la VaR sera élevée

$$VaR_t(1\%) > VaR_t(5\%)$$

Pour le calcul de la VaR sur une journée, on peut faire l'approximation suivante

$$VaR_t(1\%) = \frac{\Phi^{-1}(1\%)}{\Phi^{-1}(5\%)} VaR_t(5\%) = \frac{2,326}{1,645} VaR_{5\%} = 1.41 VaR_{5\%} \simeq 3.494\%$$

Horizon temporel N : Le choix de l'horizon temporel dépend de l'utilisation de la VaR. Les analystes calculent en premier lieu la VaR sur un horizon d'un jour.

$$VaR_t(1\%) \text{ à } N \text{ jours} \simeq \sqrt{N} \times VaR_t(1\%) \text{ à 1 jour}$$

Cette formule est valable uniquement si les rentabilités sont indépendantes et ont une distribution Normale (moyenne nulle) sur N jours successifs. Sinon, la formule est approximative

Lorsque l'horizon est court, cela signifie que la durée de prise en compte du risque est faible.

La rentabilité espérée sur un intervalle de temps court est donc négligeable face aux variations liées à la volatilité.

Il est donc courant de supposer que, sur un horizon court (une journée), l'espérance des variations du titre est nulle : $\Rightarrow \mu = 0$

$$\Rightarrow \qquad VaR_{t,1\ \text{jour}}(\alpha) = -\sigma \Phi^{-1}(\alpha)$$

Les méthodes d'estimation

On dénombre trois grandes classes de méthodes d'estimation de la VaR :

1. Méthodes non paramétriques (Historical Simulation, Weighted Historical Simulation, Filtered Historical Simulation ...)
2. Méthodes semi-paramétriques (CAViaR, théorie des extrêmes)
3. Méthodes paramétriques (GARCH univarié, GARCH multivarié)

Les méthodes non paramétriques

Le principe général des méthodes non paramétriques d'estimation de la VaR est que l'on impose a priori aucune distribution paramétrique de P&L

La simulation historique (*Historical Simulation*, HS) est une méthode trés simple qui est sans doute la plus utilisée actuellement

- Formellement, la VaR est estimée simplement par le fractile empirique des rentabilités passées
- Si l'on considére par exemple un taux de couverture de 5% et que l'on dispose d'un échantillon de 1000 observations historiques de rentabilités, la VaR est donnée par la valeur de la rentabilité qui correspond à la 51ème plus forte perte (R_t ordonnées dans un ordre croissant)

Dans l'approche HS, on fait deux hypothèses très fortes

- La distribution non conditionnelle des rentabilités est identique quelle que soit la date t

$$f_{R_t}(r) = f_R(r) \qquad \forall t$$

par conséquent le fractile de cette distribution non conditionnelle (la VaR) est aussi identique

$$VaR_t(\alpha) = VaR(\alpha) \qquad \forall t$$

- Les rentabilités $R_1, R_2 \ldots, R_T$ sont identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d.)

Sous l'hypothèse de rentabilités i.i.d., un estimateur convergent de la VaR pour un taux de couverture de α% est défini par le fractile empirique d'ordre α associés aux T réalisations historiques des rentabilités, notées $\{r_1, r_2, \ldots, r_T\}$

$$\widehat{VaR}(\alpha) = \text{percentile}\left(\{r_j\}_{j=1}^{T}, 100\alpha\right)$$

$$\widehat{VaR}(\alpha) \underset{T \to \infty}{\to} VaR(\alpha)$$

Exemple : On considère les rentabilités quotidiennes du CAC40, avec un total de 5550 observations.
On classe par ordre croissant les observations : $\{r_1, r_2, \ldots, r_{5550}\}$
La VaR HS avec un taux de couverture de 1% est alors égale à la 56ème valeur

$$\widehat{VaR}(1\%) = r_{56} = -0.01507\%$$

NB: percentile = centile

Limites et améliorations de l'approche HS

- La VaR HS est l'estimateur d'une VaR non conditionnelle (ou associée à une distribution de P&L non conditionnelle)
  - Par conséquent la prévision de VaR selon la méthode HS sera relativement "invariante" aux modifications de l'environnement économique
  - Les prévisions de VaR selon la méthode HS sont "plates" ou "pratiquement plates"
- Une solution consiste tout simplement à utiliser le fractile empirique associé aux observations passées $R_1, \ldots, R_T$

$$\widehat{VaR}_{T+1|T}(\alpha) = \text{percentile}\left(\{r_j\}_{j=1}^{T}, 100\alpha\right)$$

- Dans la littérature, on utilise généralement des séquences de prévisions construites à partir d'une estimation glissante (*rolling estimate*) afin d'introduire un "minimum de conditionnement" dans la VaR HS et de ne pas accorder trop de poids aux réalisations des rentabilités les plus anciennes, sur une fenêtre de taille Te (250 obs.)

$$\widehat{VaR}_{T+1|T}(\alpha) = \text{percentile}\left(\{r_j\}_{j=1-Te}^{T-1}, 100\alpha\right)$$

Une amélioration simple de la méthode HS consiste à estimer la VaR à partir de données simulées par Bootstrap (BHS, *Bootstrapped Historic Simulation*).

Le Bootstrap consiste à ré-échantillonner les données historiques de rentabilités avec remise :

- la procédure consiste à créer un grand nombre d'échantillons de rentabilités simulées, ou chaque observation est obtenue par tirage au hasard à partir de l'échantillon original

- chaque nouvel échantillon constitué de la sorte permet d'obtenir une estimation de la VaR par la méthode HS standard, et l'on définit au final une estimation en faisant la moyenne de ces estimations basées sur les ré-échantillonnages

$$\widetilde{VaR}^s(\alpha) = \text{percentile}\left(\{\tilde{r}_j^s\}_{j=1}^T, 100\alpha\right) \qquad s = 1, \ldots, S$$

$$\widetilde{VaR}(\alpha) = (1/S)\sum_{s=1}^{S} \widetilde{VaR}^s(\alpha)$$

avec $\{\tilde{r}_j^s\}_{j=1}^T$ une séquence de rentabilités tirées au hasard avec remise dans l'échantillon historique, et S le nombre de bootstrap ou de ré-échantillonnage

Les méthodes paramétriques

Une des approches des méthodes paramétriques est celle basée sur les modèles de type GARCH (cf. chapitre 2).

Les modèles GARCH permettent de modéliser et de prévoir la variance conditionnelle de la distribution de P&L, ce qui permet dans un second temps de déduire une modélisation ou une prévision de la VaR sous un certain nombre d'hypothèses concernant la distribution conditionnelle des rentabilités

Sous l'hypothèse de Normalité de la distribution conditionnelle des P&L, la prévision de VaR associée à un taux de couverture de $\alpha\%$ est définie par

$$\widehat{VaR}_{T+1|T}(\alpha) = -\mu - \widehat{\sigma}_{T+1}\Phi^{-1}(\alpha)$$

où $\widehat{\sigma}_{T+1}$ représente la prévision de la variance conditionnelle des rentabilités

Les avantages de la VaR

La VaR présente de nombreux avantages :

- sa simplicité d'interprétation
- son caractère généraliste et général
- dimension probabiliste de cette mesure de risque

Les limites de la VaR

Mais la VaR présente certains inconvénients :

- la VaR est sujette au risque de modèle : une erreur de spécification de la distribution de P&L par exemple
- la VaR est sujette au risque d'implémentation liée à la structure des données requises pour estimer la distribution de P&L ou la vaR directement
- Mais tous ces risques ne sont pas propres à la VaR

La VaR modifiée

La VaR modifiée (*Modified VaR*, MVaR) a été proposée par Huisman (1999) et Favre and Galeano (2002) afin de calculer une VaR pour des distributions asymétriques et leptokurtiques puisque la VaR présuppose la Normalité des rentabilités.

En utilisant une approximation de Cornish-Fisher ils modifient le quantile de la distribution Normale $\Phi^{-1}(\alpha)$ en prenant en compte les moments d'ordre élevé, à savoir Skewness (*Skew*) et la Kurtosis (*Kur*) de la distribution des P&L :

$$\begin{aligned}\Phi_{CF}^{-1}(\alpha) &= \Phi^{-1}(\alpha) - \frac{1}{6}\left[(\Phi^{-1}(\alpha))^2 - 1\right] Skew \\ &+ \frac{1}{24}\left[(\Phi^{-1}(\alpha))^3 - 3\Phi^{-1}(\alpha)\right] Kur - \frac{1}{36}\left[2(\Phi^{-1}(\alpha))^3 - 5q_\alpha\right] Skew^2\end{aligned}$$

On obtient donc l'expression de la VaR modifiée

$$MVaR_t(\alpha) = -\mu - \sigma\Phi_{CF}^{-1}(\alpha)$$

L'approximation de Cornish-Fisher permet de transformer le quantile, ou une réalisation, d'une loi Normale en une réalisation d'une loi dont la Skewness et la Kurtosis en excès ne sont pas nuls (Cornish et Fisher, 1938)

On approche la réalisation Z de la loi voulue telle que

$$F(Z) = N(q_N)$$

avec

- $F(Z)$: fonction de répartition de la loi Z
- N : fonction de répartition de la loi Normale
- q_N : un quantile ou une réalisation de la loi Normale

On a alors la relation suivante :

$$Z = q_N - \frac{1}{6}\left[q_N^2 - 1\right] Skew + \frac{1}{24}\left[q_N^3 - 3q_N\right] Kur - \frac{1}{36}\left[2q_N^3 - 5q_\alpha\right] Skew^2$$

Cette relation existe ssi elle est bijective. Une condition nécessaire et suffisante est que la dérivée $\frac{\partial Z}{\partial q_N} \neq 0$:

$$\frac{\partial Z}{\partial q_N} = \frac{Skew^2}{9} - 4\left(\frac{Kur}{8} - \frac{Skew^2}{6}\right)\left(1 - \frac{Kur}{8} + \frac{5Skew^2}{36}\right) < 0$$

En finance, *Kur* et *Skew* sont petits et $Kur > 0$ (variables leptokurtiques) ; la condition est donc respectée

En revanche la VaR présente aussi certaines limites qui lui sont propres :

- cette mesure de risque ne donne aucune information sur les pertes au delà de la VaR
  $\Rightarrow$ deux positions peuvent avoir la même VaR avec des risques extrêmes totalement différents
- la VaR peut conduire des agents à prendre de "mauvaises décisions" d'investissement
- la VaR peut conduire certains agents à prendre volontairement plus de risque dans un système de management des risques décentralisé

Plus généralement, on peut se poser la question de savoir si la VaR est une bonne mesure de risque ?

Mais qu'est ce qu'une "bonne" mesure de risque ?

$\Rightarrow$ Notion de mesures cohérentes du risque

La théorie des mesures cohérentes de risque a été développée par Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1997, 1999)

Artzner et alii (1997, 1999) postulent donc un ensemble d'axiomes (axiomes de cohérence) sur ce que doit vérifier une mesure de risque

Soient X et Y deux distributions de P&L associées à deux portefeuilles, et soit $\rho(.)$ une mesure de risque sur un horizon donné.

La mesure de risque $\rho(.)$ est dite cohérente ssi elle satisfait les axiomes suivants

- Monotonicité : $Y \succ X \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$
- Invariance par translation : $\rho(X+n) = \rho(X) + n$
- Homogénéité positive : $\rho(hX) = h\rho(X)$ pour $h > 0$
- Sous-additivité : $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Monotonicité : si un portefeuille a une valeur plus grande dans tous les états de marché, sa mesure de risque ne doit pas être plus grande

$$Y \succ X \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$$

Invariance par translation : si on ajoute un montant de capital sans risque k (ou risqué n) au portefeuille, sa mesure de risque diminue de k (augmente n)

$$\begin{aligned} \rho(X+k) &= \rho(X) - k \qquad && k \in \mathbb{R} \\ \rho(X+n) &= \rho(X) + n \qquad && n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Homogénéité positive : si on multiplie par h la valeur du portefeuille, sa mesure de risque est multipliée par h

$$\rho(hX) = h\rho(X) \qquad h \in \mathbb{R}_+$$

L'axiome le plus important est celui de sous-additivité :

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

- Il signifie qu'un portefeuille constitué de sous portefeuilles ne doit pas être plus risqué (au regard d'une mesure cohérente) que la somme des risques associés aux sous portefeuilles
- Cet axiome se fonde sur l'idée que l'agrégation des risques individuels, doit conduire à une diversification des risques et donc à une diminution du risque global, ou dans le pire des cas à un maintien de celui-ci.
- C'est cet axiome qui fonde la diversification des risques.

Mesure du risque monétaire et cohérente :

- Une mesure du risque est dite monétaire si elle est monotone et invariante par translation
- Une mesure de risque est dite cohérente si elle est monétaire, homogéne et sous-additive

La VaR est elle une mesure cohérente du risque ?

La VaR n'est pas une mesure cohérente du risque car elle ne vérifie pas l'axiome de sous-additivité

Existe-il des mesures de risque respectant ces propriétés ?

- cohérentes,
- généralistes,
- simple d'interprétation, et
- aggrégative

Une mesure candidate est l'Expected Shortfall (ES)

L'Expected Shortfall

L'Expected Shortfall (ES) associée à un taux de couverture de α% correspond à la moyenne des α% pires pertes attendues telle que

$$ES_t(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F_{R_t}^{-1}(r)dr$$

avec F_{R_t} : fonction de répartition associée à la fonction de densité $f_{R_t}(r)$

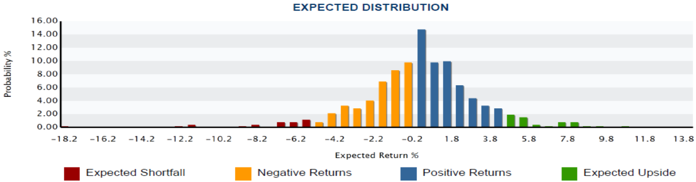
Par convention, on exprime l'ES sous forme positive comme la VaR, alors qu'il s'agit d'une perte moyenne

Expected Shortfall

L'Expected Shortfall (ES) (ou *Conditional VaR*, CVaR, ou *Conditionnal Loss* ou *Expected Tail Loss*, ETL) est une mesure du risque cohérente définie comme la moyenne des pertes dans les pires états de la nature, cad dans les α% situations ou les pertes excédent la VaR(α)

- L'ES correspond a un montant de pertes moyennes ; elle permet de capter l'épaisseur de l'extrémités de pertes de la distribution (*fat tail*).

- Tout comme la VaR, l'ES est fonction de la distribution de P&L du portefeuille, du taux de couverture (α) et de l'horizon temporel (N).

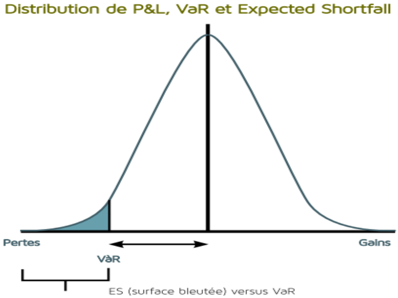


L'ES est définie comme la valeur espérée de pertes conditionnelles à la perte étant supérieure à la VaR à α%.

L'ES correspond à la perte moyenne inférieure à la VaR(5%)

$$ES_t(\alpha) = E\left(L_t | L_t > VaR_t(\alpha)\right) = \sigma_t \left(\frac{\Phi(q_\alpha)}{1-\alpha}\right)$$

avec L_t la valeur espérée de pertes si une violation de la $VaR_t(\alpha)$ se produit, et $\Phi(.)$ la fonction de densité de probabilité d'une loi Normale



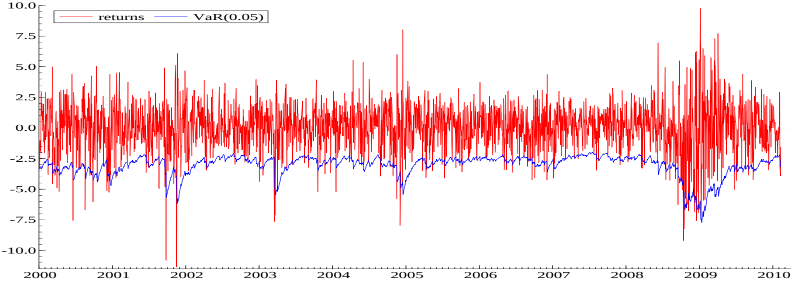
Le Backtesting

Le backtesting est un ensemble de procédures statistiques dont le but est de vérifier que les pertes réelles observées ex-post sont en adéquation avec les pertes prévues.

Cela implique de comparer systématiquement l'historique des prévisions de la VaR aux rentabilités observées du portefeuille (Jorion, 2007).

Le **backtesting** (test *ex post*) permet de tester les performances des estimations de la VaR sur des données passées $\Rightarrow$ degré de pertinence du modéle pour calculer la VaR.

- Un effet direct de surestimation de la VaR (risque) est d'augmenter le niveau de fonds de couverture
- Ce test consiste à calculer le nombre de fois où la perte réelle observée est supérieure au montant calculé et prévu par la VaR
- Les jours ou ce dépassement a lieu sont appelés des *exceptions* (violations)



Violation de la VaR

On appelle violation (ou *hit*, ou *exception*) une situation dans laquelle à la date t la perte observée excéde la VaR anticipée

On appelle la variable indicatrice (dichotomique) $I_t(\alpha)$ associée à l'observation ex-post d'une violation de la VaR à α% à la date t

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_t < VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comment tester la validité de la prévision d'une VaR à partir d'une séquence de violations $\{I_t(\alpha)\}_{t=1}^{T}$?

Christoffersen (1998) postule qu'une prévision de VaR est valide ssi la séquence des violations $\{I_t(\alpha)\}_{t=1}^{T}$ satisfait les deux hypothèses suivantes :

- l'hypothèse de couverture non conditionnelle (*unconditional coverage*, UC)
- l'hypothèse d'indépendance (*independence*, IND)

L'hypothèse de couverture non conditionnelle (UC) est satisfaite lorsque la probabilité que se réalise ex-post une perte en excés par rapport à la VaR anticipée ex-ante est précisément égale au taux de couverture α :

$$Pr[I_t(\alpha) = 1] = E[I_t(\alpha)] = \alpha$$

Exemple : Pour une $VaR_t(5\%)$, avec un taux de couverture $\alpha = 5\%$, il faut que l'espérance du nombre de violations soit autour de 5% des cas (jours)

- si $E[I_t(5\%)] = 5\% \Rightarrow E[I_t(\alpha)] = \alpha$: la mesure de la VaR est validée
- si $E[I_t(5\%)] = 7\% \Rightarrow E[I_t(\alpha)] > \alpha$: la mesure de la VaR n'est pas validée et sous-estime la VaR et donc le risque (risque de 1er ordre)
- si $E[I_t(5\%)] = 3\% \Rightarrow E[I_t(\alpha)] < \alpha$: la mesure de la VaR n'est pas validée et sur-estime la VaR. La VaR est dite conservative (risque de 2nd ordre).

Sous l'hypothèse de couverture non conditionnelle, la variable binaire $I_t(\alpha)$ est définie par

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_t < VaR_{t|t-1}(\alpha) \qquad Pr[I_t(\alpha) = 1] = \alpha \\ 0 & \text{sinon} \qquad\qquad\qquad\qquad Pr[I_t(\alpha) = 0] = 1 - \alpha \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de couverture non conditionnelle, la variable binaire $I_t(\alpha)$ suit une distribution de Bernoulli de probabilité égale à α

$$I_t(\alpha) \sim B(\alpha)$$

L'hypothèse d'indépendance (IND) des violations est satisfaite lorsque les violations de la VaR observées à deux dates différentes pour un même taux de couverture doivent être indépendamment distribuées.

Formellement, la variable $I_t(\alpha)$ associée à la violation à la date t de la VaR pour un taux de couverture à $\alpha\%$, est indépendante de la variable $I_{t-k}(\alpha)$, $\forall k \neq 0$.

Corollaire : sous l'hypothèse d'indépendance, il n'existe pas de cluster de violations

La propriété d'indépendance des violations est une propriété essentielle car toute mesure de risque doit s'ajuster automatiquement et sans retard à toute nouvelle information

L'hypothèse de couverture conditionnelle est satisfaite lorsque la probabilité conditionnelle à l'information disponible en $t-1$ que se réalise ex-post une perte en excès par rapport à la VaR est précisément égale au taux de couverture α

$$Pr[I_t(\alpha) = 1|\Omega_{t-1}] = E[I_t(\alpha)|\Omega_{t-1}] = \alpha$$

ou Ω_{t-1} désigne l'ensemble d'information utilisé pour prévoir la VaR

Corollaire : sous l'hypothèse de couverture conditionnelle, le processus centré associé aux violations de la VaR vérifie les propriétés d'une différence de martingale

$$E[I_t(\alpha) - \alpha|\Omega_{t-1}] = 0$$

L'hypothése de couverture conditionnelle implique l'hypothèse de couverture non conditionnelle et l'hypothèse d'indépendance

Les tests de backtesting

Tests de couverture non conditionnelle : le test de Kupiec (1995) : On considére une séquence de T prévisions successives de la VaR, soit N le nombre de violations associées

$$N = \sum_{t=1}^{T} I_t(\alpha)$$

Le rapport N/T définit la fréquence empirique des violations ou taux d'échec (*failure rate*)

Sous l'hypothèse de couverture non conditionnelle (UC), on sait que le taux d'échec constitue un estimateur convergent du taux de couverture

$$(N/T) \xrightarrow[T \to \infty]{p} \alpha$$

Si l'on suppose que les variables $I_t(\alpha)$ sont *i.i.d.*, alors sous l'hypothése UC le nombre total de violations N suit une loi Binomiale

$$N \equiv B(T;\alpha)$$

avec $E(N) = \alpha T$ et $V(N) = \alpha T(1-\alpha)$

La loi Binomiale converge vers la loi Normale si $T \geq 30$, $\alpha T \geq 5$ et $T(1-\alpha) \geq 5$:

$$N \equiv B(T;\alpha) \underset{L}{\rightarrow} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$$

On transforme la variable en une variable centrée réduite :

$$Z_{UC} = \frac{N - \alpha T}{\sqrt{\alpha T(1-\alpha)}} \equiv \mathcal{N}(0;1)$$

On peut alors réaliser le test d'hypothèse suivant

- H_0 : $E(I_t) = \alpha$ (la mesure de la VaR est validée)
- H_1 : $E(I_t) \neq \alpha$ (la mesure de la VaR n'est pas validée)

RDD

- si $|Z_{UC}| < 1,96$ alors H_0 est acceptée au seuil de 5%
  $\Rightarrow$ la mesure de la VaR est validée
- si $|Z_{UC}| > 1,96$ alors H_0 est rejetée au seuil de 5%
  $\Rightarrow$ la mesure de la VaR n'est pas validée
  - si $Z_{UC} > 1,96$ alors la mesure de la VaR est sous-estimée
  - si $Z_{UC} < -1,96$ alors la mesure de la VaR est sur-estimée

Kupiec (1995) ne travaille pas directement à partir de la statistique Z_{UC}, mais propose un test de ratio de vraisemblance (*Likelihood Ratio*, LR test)

Le test de couverture non conditionnelle de Kupiec (1995) repose sur le test d'hypothése suivant

- $\mathrm{H}_0 \ : \ E(I_t) = \alpha$
- $\mathrm{H}_1 \ : \ E(I_t) \neq \alpha$

Kupiec propose un test bilatéral LR relativement performant

$$LR_{UC} = -2 \ln \left[\frac{\alpha^N (1-\alpha)^{T-N}}{F^N (1-F)^{T-N}} \right] \sim \chi^2_{1-\alpha}(1)$$

RDD : on rejette la mesure de la $\mathrm{VaR}_{\alpha\%}$ au seuil de 5% si $LR_{UC} > \chi^2_{5\%}(1) = 3.84$

Tests de couverture conditionnelle (CC) : ces tests sont nombreux et variés

- Les tests LR : Christoffersen (1998)
- Les tests de durée : Christoffersen et Pelletier (2004), Haas (2007) et Candelon, Colletaz, Hurlin et Tokpavi (2008)
- Les tests de l'hypothèse de différence de martingale : Berkowitz et al. (2005) et Hurlin et Tokpavi (2007)
- Les tests fondés sur un modèle de régression des hits : Engle et Manganelli (2004), Patton (2002)
- Les tests de type Density Forecast : Crnkovic et Drachman (1997), Diebold et alii (1998), Berkowitz (2001)

Les tests fondés sur un modèle de régression des hits : considérent un modèle paramétrique sur le processus de hit I_t de sorte à ramener les tests de backtesting à de simples tests paramétriques

Engle et Manganelli (2004) proposent d'utiliser un modèle de régression linéaire liant les violations courantes aux violations passées afin de tester l'hypothèse d'efficience conditionnelle

Soit $Hit(\alpha) = I_t(\alpha) - \alpha$ le processus de violations centré sur α associé à $I_t(\alpha)$:

$$Hit_t(\alpha) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } R_t < VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ -\alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

Engle et Manganelli (2004) considèrent le modèle de régression linéaire suivant

$$Hit_t(\alpha) \quad = \quad \delta + \sum_{k=1}^{K} \beta_k Hit_{t-k}(\alpha) + \sum_{k=1}^{K} \gamma_k g\left[Hit_{t-k}(\alpha), z_{t-k}\right] + \varepsilon_t$$

ou les innovations ε_t satisfont :

$$\varepsilon_t(\alpha) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{avec une probabilité } \alpha \\ -\alpha & \text{avec une probabilité } (1-\alpha) \end{cases}$$

et $g(.)$ désigne une fonction des violations passées et de variables $z_{t-k} \in \Omega_{t-1}$

Le test de l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle (CC) revient à tester dans le modèle de régression linéaire précédent l'hypothèse jointe :

$$H_0 : \delta = \beta_k = \gamma_k = 0, \qquad \forall k = 1, \ldots, K$$

- les violations courantes de la VaR sont non corrélées aux violations passées dés lors que $\beta_k = \gamma_k = 0$ (implication de l'hypothèse d'indépendance)
- l'hypothèse de couverture non conditionnelle est satisfaite dès lors que la constante $\delta = 0$

Sous l'hypothèse nulle de CC :

$$\begin{aligned} E[Hit_t(\alpha)] &= E[\varepsilon_t] = 0 \\ &= E[I_t(\alpha) - \alpha] = 0 \\ \Leftrightarrow E[I_t(\alpha)] &= Pr[I_t(\alpha) = 1] = \alpha \end{aligned}$$

Soit

- $\Upsilon = (\delta\beta_1 \ldots \beta_K \gamma_1 \ldots \gamma_K)'$: le vecteur des $2k+1$ paramétres du modéle de régression
- Z : la matrice de variables explicatives

La statistique de Wald, notée DQ_{CC}, associée au test de l'hypothèse d'efficience conditionnelle vérifie

$$DQ_{CC} = \frac{\widehat{\Upsilon}' Z' Z \widehat{\Upsilon}}{\alpha(1-\alpha)} \underset{T \to \infty}{\xrightarrow{L}} \chi^2(2K+1)$$

R packages

- La fonction `VaR` du package R PerformanceAnalytics implémente la VaR à partir de différentes approches
- Les fonctions `VaR` et `ES` du package R cvar permettent de calculer la VaR et l'Expected Shortfall
- La fonction `quantile` du package R stats permet de calculer les quantiles de la VaR
- La fonction `BacktestVaR` du package R GAS implémente les tests de backtesting de Kupiec (1995), Christoffesen (1998) et Engle et Manganelli (2004)

Un exemple pour (1) prévoir la volatilité, (2) calculer la VaR, et (3) calculer l'ES

```
base <- read_excel("c:\\R\\data\\airfrance.xlsx", sheet = "Feuil2")
y = ts(base)
estim <- 500
h <- 100
foremat <- matrix(nrow=h, ncol=1)
varmat <- matrix(nrow=h, ncol=1)
esmat <- matrix(nrow=h, ncol=1)

# Estimating GARCH(1,1) with only an intercept in the mean
spec = ugarchspec(variance.model=list(model = "sGARCH"),mean.model=list(armaOrder=c(0,0), include.mean=TRUE))
for(i in 1:h)
{
yy <- y[1:(estim-1+i),1]
fit = ugarchfit(data = yy, spec = spec)
forc =  ugarchforecast(fit, n.ahead=1)
foremat[i,1] <- sigma(forc)^2
varmat[i,1] <- qnorm(0.05)*sigma(forc)
esmat[i,1] <- -dnorm(qnorm(0.05))/0.05*sigma(forc)
}
foremat
varmat
mean(varmat)
esmat
mean(esmat)
```

Un exemple pour calculer les tests de backtesting avec le package GAS

```
library(GAS)

alpha = 0.05
basetest = base[c(501:600-1),]
test = ts(basetest)
var = ts(varmat)
backtest <- BacktestVaR(data = test, VaR = var, alpha = alpha)
kupiec <- backtest$LRuc          # Kupiec test
show(kupiec)
```