Chapitre 2
Les Modèles de type GARCH
(2020-2021)

Econométrie Financière Avancée

Olivier DARNÉ

Les modèles ARCH

Il existe deux grandes classes de modèles ARCH-GARCH :

- Les modèles ARCH-GARCH linéaires ou symétriques : spécification quadratique de la variance conditionnelle des perturbations (ARCH, GARCH, IGARCH) (*attention, les modèles ARCH-GARCH sont par nature des modèles non linéaires, mais c'est l'équation de variance conditionnelle qui est linéaire*)

- Les modèles ARCH-GARCH asymétriques postulant une relation asymétrique entre la variance conditionnelle et les chocs passés (GJR-GARCH, EGARCH, TGARCH, . . .)

- Soit r_t les rentabilités d'un actif financier définies comme la différence logarithmique des prix (p_t)

$$r_t(\%) = 100 \times (\ln(p_t) - \ln(p_{t-1}))$$

(*les rentabilités sont multiplées par 100 car de trop petites valeurs peuvent perturber l'estimation des modèles*).

- Les rentabilités r_t sont modélisables par une constante (c ou *constant in mean*) et un terme d'erreur (ε_t) de la manière suivante :

$$r_t = c + \varepsilon_t \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_t \sim ARCH(1)$$

ε_t : le "choc de marché" ou la "rentabilité non espérée" (*unexpected return*), généralement défini comme l'écart à la moyenne $\varepsilon_t = r_t - \bar{r}$, avec $\bar{r}$ représentant la moyenne des rentabilités

Définition ARCH(1) : Un processus ε_t satisfait une représentation ARCH(1) si

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

avec

- $\omega > 0$ et $0 \leq \alpha < 1$
- z_t : bruit blanc faible tel que $E(z_t) = 0$ et $E(z_t^2) = \sigma_z^2$ (et non corrélés) (*weak ARCH model*)
- z_t : souvent bruit blanc fort tel que $z_t \sim i.i.d.(0, \sigma_z^2)$, voir bruit blanc Gaussien $z_t \sim N(0,1)$ (*strong ARCH model*)
- $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ représente les résidus standardisés

La composante σ_t^2 désigne une variable qui, conditionnellement à l'ensemble d'information des valeurs passées de ε_t, cad à $\varepsilon_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-j}, \ldots\}$, est déterministe et positive

$$
\begin{aligned}
V(\varepsilon_t|\Omega_t) &= V(z_t\sigma_t|\Omega_t) \\
&= \sigma_t^2 V(z_t|\Omega_t) \\
&= \sigma_t^2\sigma_z^2 \\
&= \sigma_t^2 \qquad\qquad \text{si } z_t \sim N(0,1)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \sigma_t^2$ est la variance conditionnelle de ε_t

Propriétés des modèles ARCH : on peut établir des résultats intéressants en considérant le processus autorégressif sur ε_t^2.

Prenons l'exemple d'un ARCH(1)

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 \\
\sigma_t^2 + \varepsilon_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 \\
\varepsilon_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) \\
\varepsilon_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t
\end{aligned}$$

où $\nu_t = (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2)$ vérifiant $E(\nu_t|\varepsilon_{t-1}) = 0$ est un processus d'innovation pour ε_t^2

$\Rightarrow$ ε_t^2 satisfait une représentation AR(1)

On peut déduire de ces différentes écritures, un certain nombre de propriétés :

- Le processus ε_t vérifie la définition d'une différence de martingale homoscédastique et d'un bruit blanc faible (propriétés 1 et 2)
- Le processus ε_t est conditionnellement hétéroscédastique (propriété 4), mais non conditionnellement homoscédastique (propriété 1)
- Le processus ε_t admet une distribution leptokurtique (propriété 3)

Rappels

▶ Bruit blanc faible : Un processus ε_t est un bruit blanc faible si il s'agit d'une suite de variables de moyenne nulle, homoscédastiques et non corrélés. Si on note *EL* l'espérance linéaire :

$$E(\varepsilon_t) = 0 \qquad V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad EL(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) = 0 \qquad \forall t$$

▶ Différence de martingale : Un processus ε_t est une différence de martingale homoscédastique si et seulement si

$$V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad E(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) = 0 \qquad \forall t$$

Dans le cas Gaussien, espérance conditionnelle (*E*) et espérance (conditionnelle linéaire) (*EL*) sont confondues

Propriété 1 : Un processus ε_t satisfaisant une représentation ARCH(1) est une différence de martingale homoscédastique

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0 \\ E(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) &= 0 \end{aligned}$$

- Cette propriété signifie que le processus ARCH ε_t peut s'apparenter à un processus de bruit blanc (faible), ce qui explique notamment que l'on spécifiera des erreurs de modèles sous la forme ARCH

- Cette propriété signifie que le processus ARCH ε_t est non conditionnellement homoscédastique

NB: La démonstration de la propriété se trouve en Annexe

Propriété 2 : La variance conditionnelle du processus ε_t satisfaisant une représentation ARCH(1) est non constante dans le temps

$$\begin{aligned} V(\varepsilon_t) &= \frac{\omega}{(1-\alpha)} \\ V(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-h}) &= \omega\left(\frac{1-\alpha^h}{1-\alpha}\right)+\alpha^h\varepsilon_{t-h}^2 \qquad \forall t \\ V(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) &= \omega+\alpha\varepsilon_{t-1}^2=\sigma_t^2 \end{aligned}$$

- Le résultat sur la variance $V(\varepsilon_t)$ explique les contraintes sur les paramètres de la représentation ARCH

$$\omega > 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \le \alpha < 1$$

NB: La démonstration de la propriété se trouve en Annexe

Propriété 3 : Les auto-covariances conditionnelles du processus ε_t suivant un ARCH(1) sont nulles :

$$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k} | \varepsilon_{t-h}) = 0 \qquad \forall h \geq 1, \forall k \geq 1$$

Un processus ARCH est donc un processus qui conditionnellement à ε_{t-h} est un processus sans mémoire

Propriété 4 : Le moment conditionnel centré d'ordre 4 du processus ε_t vérifie

$$E(\varepsilon_t^4|\varepsilon_{t-h}) = 3(\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2)^2$$

Sous l'hypothèse que $3\alpha^2 < 1$, le moment non conditionnel centré d'ordre 4 du processus ε_t est égal à :

$$E(\varepsilon_t^4) = \frac{3\omega^2(1+\alpha)}{(1-3\alpha^2)(1-\alpha)}$$

La kurtosis non conditionnelle associée au processus ARCH(1) est égale à

$$Kur = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = 3\frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2} > 3$$

Proof : voir Berra et Higgins (1993) et Annexe

- Sous l'hypothèse de positivité du paramètre α, la kurtosis non conditionnelle est toujours supérieure à celle de la loi Normale : elle traduit l'aspect leptokurtique de la distribution du processus ε_t

- C'est la deuxième raison, avec la variance conditionnelle dépendante du temps, pour laquelle les processus ARCH sont très utilisés pour représenter les séries financières ou les résidus de modèles linéaires définis sur séries financières

Interprétation du modèle ARCH(1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$$

- L'estimation de la volatilité au temps t (variance, σ_t^2) dépend de la rentabilité résiduelle à la date $t-1$ (ε_{t-1})
- Le paramètre d'erreur α (ou effet ARCH) mesure la réaction de la volatilité conditionnelle au choc de marché.

  Il représente également la persistance de court terme des chocs
- Lorsque α est relativement important ($\alpha > 0.1$), la volatilité est alors très sensible aux événements du marché
- Un choc sur la rentabilité résiduelle ε_{t-1} aura tendance à engendrer une variation de la variance σ_t^2

Généralisation ARCH(q) : Toutes ces propriétés peuvent être généralisées au cas d'un modèle ARCH(q), donné par :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, \varepsilon_{t-i}^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2$$

avec $\omega > 0$, $0 \leq \alpha_i < 1$, $\forall i$.

Ce modèle respecte les propriétés de différence de martingale et variance conditionnelle variable dans le temps

$$E(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-q}) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-q}) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Critiques du modèle ARCH

- Un des problèmes qui se pose avec les modèles ARCH(q) réside dans le fait qu'il est souvent nécessaire de considérer un nombre de retards q important pour purger les corrélations dans le carré de ε_t (et donc les clusters de volatilité)

- L'estimation d'un trop grand nombre de paramètres ARCH(q) peut conduire à un non respect des conditions de non-négativité et de stationnarité sur les paramètres.

- On retrouve le problème qui se posait dans le cas de la modélisation de l'espérance conditionnelle avec des représentations de type MA(q)

  $\Rightarrow$ une solution consiste à introduire une composante autorégressive (représentation de type ARMA)

- Une solution, proposée par Bollerslev (1986), consiste alors à intégrer un terme autorégressif dans l'équation de la variance, de manière à introduire implicitement des retards géométriques de durée infinie : *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* ou modèle GARCH.

Les modèles GARCH

Le premier article à proposer une modélisation GARCH est celui de Tim Bollerslev (1986) :

Bollerslev, T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, 31, 307-327. [**pdf**]

Le modèle GARCH(1,1) est aussi appelé modèle à volatilité conditionnelle, développé indépendemment par Bollerslev (1986) et Taylor (1986).

Un processus ε_t satisfait une représentation GARCH(1,1) si

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

où

- z_t : bruit blanc faible tel que $E(z_t) = 0$ et $V(z_t) = \sigma_z^2$
- $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$

et est asymptotiquement stationnaire au second ordre si et seulement si

$$\alpha + \beta < 1$$

Interprétation du modèle GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

- L'estimation de la volatilité au temsp t (σ_t^2) est obtenue à partir de la volatilité en temps $t-1$ (σ_{t-1}^2) et de la rentabilité résiduelle au temps $t-1$ (ε_{t-1}).
- Le paramètre d'erreur ARCH α (ou effet ARCH) représente la persistance de court terme des chocs. Généralement $\alpha \in [0.02; 0.25]$
- Le paramètre de retard GARCH β (ou effet GARCH) mesure la persistance de la volatilité conditionnelle, indépendamment de tout ce qui se passe sur le marché
- Le paramètre β indique également la contribution des chocs à la persistance de long terme
- Lorsque β est grand ($\beta > 0.90$), la volatilité prend beaucoup de temps à disparaître suite à une crise sur le marché. Généralement $\beta \in [0.75; 0.98]$

Moments conditionnels

$$
\begin{aligned}
E(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) &= 0 \\
V(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) &= \sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

Variance non conditionnelle

$$
V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1-(\alpha+\beta)}
$$

NB: La démonstration de la propriété se trouve en Annexe

▶ On peut montrer que pour un processus GARCH la Kurtosis est directement liée à l'hétéroscédasticité conditionnelle.

On considère un processus GARCH(1,1) tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t\sigma_t^2 \qquad z_t \sim N(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Bollerslev (1986) montre que le moment centré d'ordre 4 de ε_t existe, cad $E(\varepsilon_t^4) < \infty$, ssi

$$(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha^2 < 1$$

Sachant que $\alpha+\beta < 1$ il montre également que la Kurtosis

$$Kur = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{3\left[1-(\alpha+\beta)^2\right]}{1-(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2} > 3$$

La persistance

- La somme $(\alpha+\beta)$ quantifie le degré de persistance des chocs (court et long termes) à la variance conditionnelle, ce qui signifie que l'effet d'un choc de volatilité disparaît au fil du temps à un taux exponentiel.

- Il est possible de montrer la "lenteur" du processus de retour à la moyenne des paramètres GARCH à partir de la mesure de la demi-vie (*half-life*)

- *Half-life* : estime la durée (en nombre de jours j) du retour à la moyenne après un choc

$$(\alpha+\beta)^j = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad j = \ln(0.5)/\ln(\alpha+\beta)$$

- En l'absence de chocs de marché, la variance du modèle GARCH finira par se ramener à une valeur d'équilibre, appelée variance non conditionnelle (ou marginale)

$$\overline{\sigma}^2 = V(\varepsilon_t) = E[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1-(\alpha+\beta)}$$

L'estimation des modèles de type GARCH se fait avec le package R rugarch (Galanos, 2018).

Galanos A. (2018). Introduction to the rugarch package.

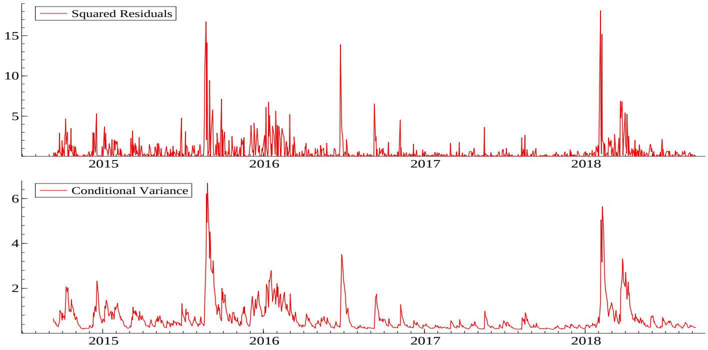
URL https://cran.r-project.org/package=rugarch.

```
# Using R code RUGARCH for estimating GARCH models
# June 2017

# installer le package rugarch

# charger le package rugarch

# les données sont dans
y <- read.table("c:\\R\\data\\ftse.txt")

spec = ugarchspec()
fit = ugarchfit(data = y, spec = spec)
fit
```

Figure: Estimation d'un modèle GARCH(1,1) sur les rentabilités du S&P500

```
> spec = ugarchspec(variance.model=list(model = "sGARCH"),mean.model=list(armaOrder=c(0,0), include.mean=TRUE))
> fit = ugarchfit(data = y, spec = spec)
> fit

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : sGARCH(1,1)
Mean Model      : ARFIMA(0,0,0)
Distribution    : norm

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.007336    0.014818 -0.49508 0.620540
omega   0.004718    0.002410  1.95772 0.050263
alpha1  0.071182    0.016626  4.28151 0.000019
beta1   0.917334    0.020197 45.41907 0.000000

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.007336    0.012599 -0.58231 0.560359
omega   0.004718    0.003055  1.54407 0.122571
alpha1  0.071182    0.024419  2.91507 0.003556
beta1   0.917334    0.028885 31.75816 0.000000

LogLikelihood : -1045.001

Information Criteria
------------------------------------

Akaike       1.7556
Bayes        1.7727
Shibata      1.7556
Hannan-Quinn 1.7621
```

Figure: Rentabilités au carré r_t^2 et estimation de la variance conditionnelle σ_t^2 par un modèle GARCH(1,1)



Généralisation GARCH(p, q) : Toutes ces propriétés peuvent être généralisées au cas d'un modèle GARCH(p, q), donné par :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, \sigma_{t-i}^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2$$

avec $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, q$, et $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, p$.

Un processus ε_t satisfaisant une représentation GARCH(p, q) est asymptotiquement stationnaire au second ordre ssi

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$$

Extension : modèles IGARCH

Les modèles IGARCH (*Integrated GARCH*) développé par Engle et Bollerslev (1986) sont caractérisés par un effet de persistance infinie dans la variance.
cad qu'un choc sur la variance conditionnelle actuelle se répercute sur toutes les valeurs futures prévues.

▶ Un processus ε_t satisfait une représentation IGARCH(1,1) ssi :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

avec $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ (condition de non négativité), et $\alpha + \beta = 1$

On peut réécrire le modèle IGARCH(1,1) de la manière suivante :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + (1-\alpha)\sigma_{t-1}^2$$

avec $\omega > 0$ et $\alpha \geq 0$

▶ Le modèle IGARCH impose une persistance infinie des effets d'un choc sur la variance conditionnelle, tandis que le modèle GARCH implique une décroissance exponentielle de tels chocs, cad une persistance « faible » (finie) des chocs de volatilité.

Les prévisions de la variance conditionnelles à différents horizons h sont de la forme :

$$E(\sigma^2_{t+h}|\varepsilon_t) = (\alpha+\beta)^h \sigma^2_t + \omega \sum_{i=0}^{h-1} (\alpha+\beta)^i$$

- Si $(\alpha+\beta) < 1$ (modèle GARCH), alors le processus ε_t est stationnaire et un choc sur la variance conditionnelle σ^2_t a une influence décroissante et asymptotiquement négligeable sur σ^2_{t+h} quand $h \to \infty$

- Si $(\alpha+\beta) = 1$ (modèle IGARCH), alors un choc sur la variance conditionnelle σ^2_t a une influence infinie. En effet, on a

$$E(\sigma^2_{t+h}|\varepsilon_t) = \sigma^2_t + \omega h$$

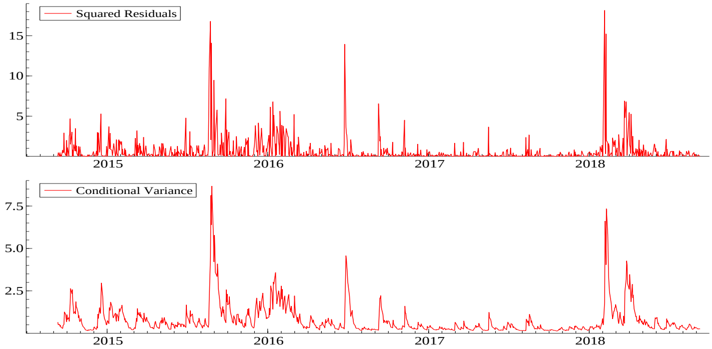
avec $E(\sigma^2_{t+h}|\varepsilon_t)$ diverge avec h, en présence d'un terme constant

On retrouve exactement les propriétés de prévision sur une marche aléatoire

Figure: Estimation d'un modèle IGARCH(1,1) sur les rentabilités du S&P500

```
> spec = ugarchspec(variance.model=list(model = "iGARCH"),mean.model=list(armaOrder=c(0,0), include.mean=TRUE))
> fit = ugarchfit(data = y, spec = spec)
> fit

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : iGARCH(1,1)
Mean Model      : ARFIMA(0,0,0)
Distribution    : norm

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.008243    0.014769 -0.55811 0.576770
omega   0.002191    0.001122  1.95316 0.050801
alpha1  0.073354    0.016588  4.42220 0.000010
beta1   0.926646          NA       NA       NA

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.008243    0.014713 -0.56022 0.575326
omega   0.002191    0.001574  1.39195 0.163939
alpha1  0.073354    0.024071  3.04739 0.002308
beta1   0.926646          NA       NA       NA

LogLikelihood : -1046.405

Information Criteria
------------------------------------

Akaike       1.7563
Bayes        1.7691
Shibata      1.7563
Hannan-Quinn 1.7611
```

Figure: Rentabilités au carré r_t^2 et estimation de la variance conditionnelle σ_t^2 par un modèle IGARCH(1,1)



Le modèle EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) permet également de modéliser la volatilité et est définit par

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2$$

- Le modèle EWMA est un cas particulier du modèle IGARCH(1,1) avec $\omega = 0$.
- Lorsque $\omega < 0 \Longrightarrow$ modèle GARCH(1,1) instable $\Longrightarrow$ modèle EWMA plus adapté

▶ La base de données RiskMetrics, créée par JP Morgan, utilise le modèle EWMA en imposant $\lambda = 0.94$ pour ses estimations de la volatilité quotidienne avec le modèle Riskmetrics

$$\sigma_t^2 = 0.06\varepsilon_{t-1}^2 + 0.94\sigma_{t-1}^2$$

▶ Pas de conditions d'existence car le modèle est toujours défini

Figure: Estimation d'un modèle EWMA(1,1) sur les rentabilités du S&P500

```
> spec = ugarchspec(variance.model=list(model="iGARCH", garchOrder=c(1,1)),mean.model=list(armaOrder=c(0,0), include.mean=TRUE),
distribution.model="norm", fixed.pars=list(omega=0))
> fit = ugarchfit(data = y, spec = spec)
> fit

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : iGARCH(1,1)
Mean Model      : ARFIMA(0,0,0)
Distribution    : norm

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.010091    0.014875 -0.67837  0.49754
omega   0.000000          NA       NA       NA
alpha1  0.053924    0.009769  5.51987  0.00000
beta1   0.946076          NA       NA       NA

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.010091    0.017093 -0.59033 0.554970
omega   0.000000          NA       NA       NA
alpha1  0.053924    0.013586  3.96922 0.000072
beta1   0.946076          NA       NA       NA

LogLikelihood : -1050.932

Information Criteria
------------------------------------

Akaike       1.7622
Bayes        1.7707
Shibata      1.7622
Hannan-Quinn 1.7654
```

Figure: Rentabilités au carré r_t^2 et estimation de la variance conditionnelle σ_t^2 par un modèle EWMA(1,1)

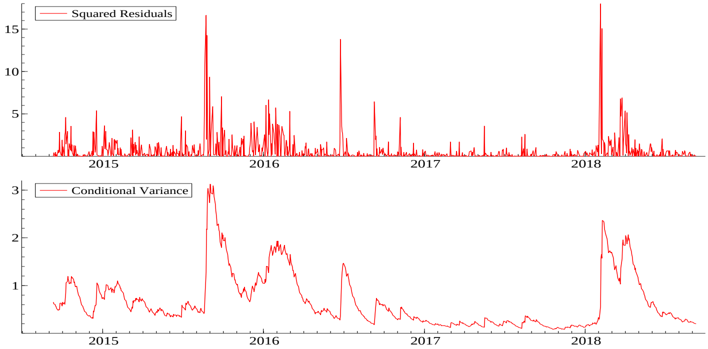
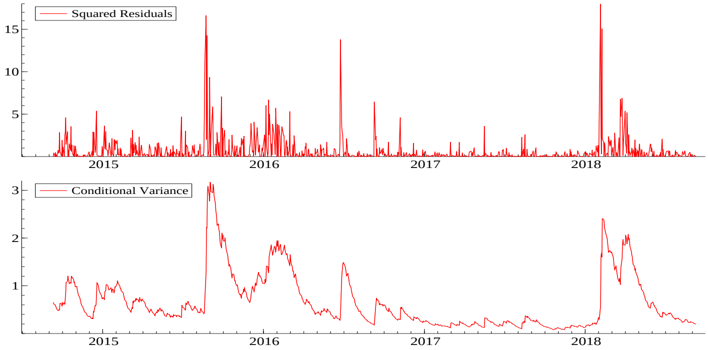


Figure: Estimation d'un modèle RiskMetrics sur les rentabilités du S&P500

```
> spec = ugarchspec(variance.model=list(model="iGARCH", garchOrder=c(1,1)),mean.model=list(armaOrder=c(0,0), include.mean=TRUE),
distribution.model="norm", fixed.pars=list(omega=0,alpha1=0.06,beta1=0.94))
> fit = ugarchfit(data = y, spec = spec)
> fit

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : iGARCH(1,1)
Mean Model      : ARFIMA(0,0,0)
Distribution    : norm

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.010353    0.014814 -0.69888  0.48463
omega   0.000000          NA       NA       NA
alpha1  0.060000          NA       NA       NA
beta1   0.940000          NA       NA       NA

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.010353    0.017364 -0.59625  0.55101
omega   0.000000          NA       NA       NA
alpha1  0.060000          NA       NA       NA
beta1   0.940000          NA       NA       NA

LogLikelihood : -1051.109

Information Criteria
------------------------------------

Akaike       1.7609
Bayes        1.7651
Shibata      1.7609
Hannan-Quinn 1.7625
```

Figure: Rentabilités au carré r_t^2 et estimation de la variance conditionnelle σ_t^2 par un modèle RiskMetrics



Les limites du modèle GARCH(1,1)

- La non prise en compte du phénomène d'*asymétrie* : la variance conditionnelle peut être affectée différemment par des chocs positifs et négatifs passés de même magnitude.

  L'asymétrie est par conséquent caractérisée par une réaction plus forte des investisseurs aux mauvaises nouvelles qu'aux bonnes nouvelles $\Rightarrow$ la volatilité tend à être plus importante après une baisse qu'après une hausse

- Les contraintes de non négativité des paramètres impliquent une variance conditionnelle non négative.

  Donc un choc, quel que soit son signe, a toujours un effet positif sur la volatilité.

$\Rightarrow$ ces critiques ont donné naissance aux modèles GARCH non linéaires (asymétriques)

Fait stylisé : l'asymétrie : les rentabilités passées négatives sur le marché des actions augmentent plus fortement la volatilité que les rentabilités passées positives $\Rightarrow$ les rentabilités sont négativement corrélées avec les variations de leur volatilité.

Plusieurs explications de ce phénomène sont avancées :

- Effet de levier (*leverage effect*) : la baisse du prix de l'action (mauvaise nouvelle) d'une entreprise endettée aggrave son ratio de solvabilité (ratio dette / capitaux propres) $\Rightarrow$ incertitude sur l'avenir de l'entreprise lié à ses revenus futurs $\Rightarrow$ augmente le risque spécifique (idiosynchratique) $\Rightarrow$ augmente la volatilité de l'action (Black, 1976 ; Christie, 1982)

- Effet rétroactif (*feedback effect*) : une volatilité en hausse incite les investisseurs à exiger une prime de risque excédentaire pour rémunérer davantage les actifs qui deviennent plus risqués $\Rightarrow$ une hausse du taux de rendement exigé $\Rightarrow$ un repli immédiat des cours (Campbell et Hentschel, 1992 ; Bekaert et Wu, 2000)

Les modèles GJR-GARCH, développés par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993) prennent en compte l'effet asymétrique d'un choc positif ou négatif d'ampleur égale sur la volatilité conditionnelle

Afin de prendre en compte la modification d'un coefficient selon la survenue d'un évènement, il est courant dans les travaux économétriques d'introduire une nouvelle explicative construite comme produit d'une indicatrice de l'évènement en question et de la variable initiale.

► Le modèle GJR-GARCH(1,1) est dérivé du modèle GARCH(1,1) classique, en supposant que le paramètre ε_{t-1}^2 est fonction du signe de l'erreur :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\, I(\varepsilon_{t-1} < 0)\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2 \\ &= \omega + [\alpha + \gamma\, I(\varepsilon_{t-1} < 0)]\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2\end{aligned}$$

où I_{t-1} est une variable dichotomique définie par $I(\varepsilon_{t-1} < 0) = 1$ si $\varepsilon_{t-1} < 0$, et 0 sinon, avec $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha + \gamma \geq 0$ et $\beta \geq 0$.

On peut réécrire le modèle GJR-GARCH(1,1) de la manière suivante :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha^+ I(\varepsilon_{t-1} \geq 0)\, \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha^- \; I(\varepsilon_{t-1} < 0)\, \varepsilon_{t-1}^2 + \beta\, \sigma_{t-1}^2$$

On voit ainsi directement les coefficients spécifiques associés aux résidus positifs, $\alpha^+ = \alpha$, ou négatifs, $\alpha^- = \alpha + \gamma$

- Le modèle postule que les mauvaises nouvelles ($\varepsilon_t < 0$) et les bonnes nouvelles ($\varepsilon_t > 0$) peuvent avoir des effets différents sur la variance conditionnelle.
- L'asymétrie existe si le paramètre d'asymétrie est positif, $\gamma > 0$, dans ce cas un choc positif ou négatif passé d'amplitude égale aura des effets différents sur la volatiltité conditionnelle.
- L'asymétrie est observée car l'impulsion $(\alpha + \gamma)$ de chocs négatifs est plus importante que l'impulsion α de chocs positifs.

  Autrement dit, les bonnes nouvelles ont un impact de α tandis que les mauvaises nouvelles ont un impact de $(\alpha + \gamma)$

▶ Un processus ε_t satisfaisant une représentation GJR-GARCH(1,1) est asymptotiquement stationnaire au second ordre ssi (Hentschel, 1995)

$$\alpha + \beta + (\gamma/2) < 1$$

▶ Ling et McAleer (2002) ont dérivé la condition d'existence du moment d'ordre 4 de ε_t, cad $E(\varepsilon_t^4) < \infty$ pour un modèle GJR-GARCH(1,1) :

$$k\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta\gamma + k\alpha\gamma < 1$$

Sous l'hypothèse d'une distribution Normale $k = \frac{1}{2}$.

- La persistance du modèle GJR-GARCH(1,1) est mesurée par $\left(\alpha+\beta+\frac{\gamma}{2}\right)$, et donc sa demi-vie est obtenue par

$$j = \ln(0.5)/\ln(\alpha+\beta+(\frac{\gamma}{2}))$$

- La variance de long terme est donnée par l'expression suivante

$$\overline{\sigma}^2 = V(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\gamma)}$$

- Si $\gamma = 0 \Rightarrow$ GARCH(1,1)

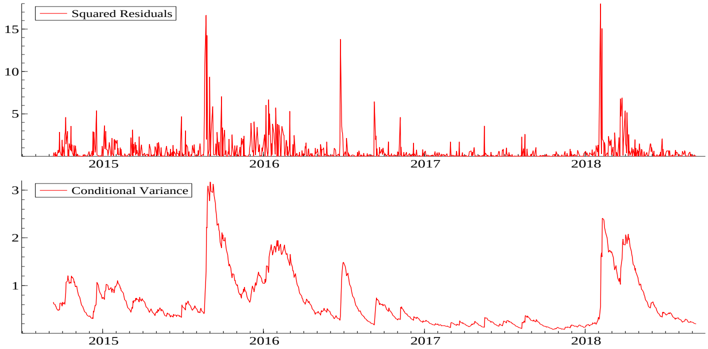
- Comparison du degré d'asymétrie relative entre différents actifs :

$$\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}$$

Figure: Estimation d'un modèle GJR-GARCH(1,1) sur les rentabilités du S&P500

```
> y <- read.table("c:\\R\\data\\ftse.txt")
> spec = ugarchspec(variance.model=list(model = "gjrGARCH"),mean.model=list(armaOrder=c(0,0), include.mean=TRUE))
> fit = ugarchfit(data = y, spec = spec)
> fit

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : gjrGARCH(1,1)
Mean Model      : ARFIMA(0,0,0)
Distribution    : norm

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.014872    0.015205 -0.97811 0.328021
omega   0.004515    0.002371  1.90407 0.056901
alpha1  0.045652    0.016462  2.77313 0.005552
beta1   0.921155    0.020388 45.18027 0.000000
gamma1  0.042732    0.020270  2.10812 0.035020

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.014872    0.013839  -1.0746 0.282541
omega   0.004515    0.003185   1.4175 0.156337
alpha1  0.045652    0.024647   1.8522 0.063992
beta1   0.921155    0.030754  29.9527 0.000000
gamma1  0.042732    0.029607   1.4433 0.148943

LogLikelihood : -1042.649

Information Criteria
------------------------------------

Akaike       1.7534
Bayes        1.7747
Shibata      1.7534
Hannan-Quinn 1.7614
```

Figure: Rentabilités au carré r_t^2 et estimation de la variance conditionnelle σ_t^2 par un modèle GJR-GARCH(1,1)



Les modèles TGARCH : une approche similaire pour modéliser les effets asymétriques a été introduite par Zakoian (1990), en définissant le modèle ARCH à seuil (TARCH, *Threshold ARCH*), et généralisée plus tard par Rabemananjara et Zakoian (1993) avec le modèle TGARCH (*Threshold GARCH*)

Un processus ε_t satisfait une représentation TGARCH(1,1) ssi

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ + \gamma^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1} \\ &= \omega + \alpha I(\varepsilon_{t-1} \geq 0)\varepsilon_{t-1} + \gamma I(\varepsilon_{t-1} < 0)\varepsilon_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}\end{aligned}$$

$$\text{où} \begin{cases} \varepsilon_t^+ = \varepsilon_t & \text{si } \varepsilon_t > 0, \\ \varepsilon_t^+ \equiv 0 & \text{sinon} \\ \varepsilon_t^- \equiv \varepsilon_t - \varepsilon_t^+ & \\ I(\varepsilon_{t-1} < 0) = 1 & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0, \\ I(\varepsilon_{t-1} < 0) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

▶ Le processus TGARCH(1,1) sera stationnaire si la contrainte suivante est vérifiée (El Babsiri et Thomas, 1991) :

$$\beta^2 + \frac{\alpha^2 + (\alpha+\gamma)^2}{2} + 2\beta\frac{2\alpha+\gamma}{\sqrt{2\pi}} < 1$$

Le modèle TGARCH est identique au modèle GJR-GARCH mais la volatilité est spécifiée en fonction de l'écart-type conditionel σ_t au lieu de la variance conditionnelle σ_t^2

$\Rightarrow$ pas nécessaire d'imposer des conditions de positivité sur les coefficients

Figure: Estimation d'un modèle TGARCH(1,1) sur les rentabilités du S&P500

```
> spec = ugarchspec(variance.model=list(model = "fGARCH", submodel="TGARCH"),mean.model=list(armaOrder=c(0,0), include.mean=TRUE))
> fit = ugarchfit(data = y, spec = spec)
> fit

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model      : fGARCH(1,1)
fGARCH Sub-Model        : TGARCH
Mean Model       : ARFIMA(0,0,0)
Distribution     : norm

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.012364    0.015182 -0.81437 0.415435
omega   0.010452    0.004846  2.15659 0.031038
alpha1  0.098993    0.016977  5.83103 0.000000
beta1   0.905962    0.018539 48.86711 0.000000
eta11   0.196391    0.092714  2.11823 0.034155

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.012364    0.015120 -0.81772 0.413518
omega   0.010452    0.006095  1.71485 0.086373
alpha1  0.098993    0.028471  3.47698 0.000507
beta1   0.905962    0.029693 30.51107 0.000000
eta11   0.196391    0.166895  1.17673 0.239302

LogLikelihood : -1051.297

Information Criteria
------------------------------------

Akaike       1.7679
Bayes        1.7891
Shibata      1.7678
Hannan-Quinn 1.7759
```

Les modèles EGARCH : le modèle GARCH exponentiel (EGARCH, *Exponential GARCH*), développé par Nelson (1991), est une approche alternative pour tenir compte des effets asymétriques en estimant le modèle non plus sur la variance conditionnelle (σ_t^2) mais sur le logarithme de la variance conditionnelle ($\ln \sigma_t^2$).

Un processus ε_t satisfait une représentation EGARCH(1,1) ssi

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \omega + \alpha g(z_{t-1}) + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) \\ g(z_{t-1}) &= \theta\left(|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)\right) + \gamma z_{t-1} \end{aligned}$$

Si on pose $\theta_1 = \alpha\theta$ et $\theta_2 = \alpha\gamma$ on peut réécrire l'équation

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \theta_1\left(|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)\right) + \theta_2 z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

- $\theta_1 \left(|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)\right)$ représente l'effet d'amplitude, et $\theta_2 z_{t-1}$ l'effet signe.

- $E(|z_t|)$ dépend de l'hypothèse faite sur la densité non conditionnelle de z_t.
Pour une distribution Normale : $E(|z_t|) = \sqrt{2/\pi}$.

- On peut mettre en évidence l'effet asymétrique :

$$\begin{cases} (\theta_1 + \theta_2) z_{t-1} - \theta_1 E(|z_t|) & \text{si } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ (-\theta_1 + \theta_2) z_{t-1} - \theta_1 E(|z_t|) & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $\theta_2 < 0$ alors les innovations négatives, mesurée par $(-\theta_1 + \theta_2)$, induisent une plus grande volatilité que les innovations positives, mesurée par $(\theta_1 + \theta_2)$, de même magnitude $\Rightarrow$ effet asymétrique des chocs

Dans la notation du package rugarch la correspondance est la suivante :

$$\alpha_{rugarch} = \theta_2 \qquad \gamma_{rugarch} = \theta_1$$

- Comme le modèle EGARCH n'impose aucune restriction de positivité sur les coefficients de la volatilité, une condition suffisante pour la stationnarité du modèle EGARCH(1,1) est $|\beta| < 1$.

- La persistance est mesurée par β, et donc la demi-vie par $j = \ln(0.5)/\ln(\beta)$.

- La variance à long terme est donnée par

$$\ln(\bar{\sigma}^2) = \frac{\omega}{1-\beta}$$

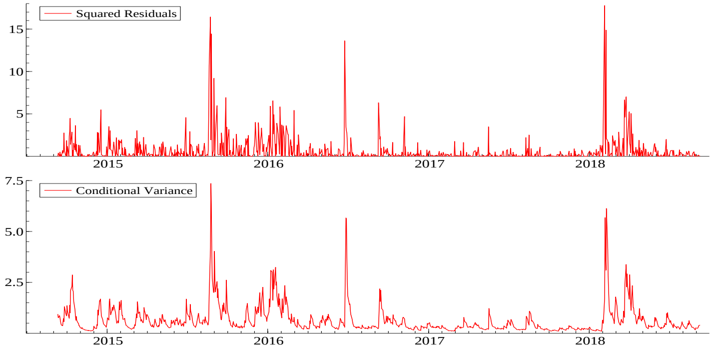
- Il est possible de calculer un indicateur du degré d'asymétrie relative pour comparer les modèles EGARCH estimés sur différentes rentabilités

$$\frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\theta_1 + \theta_2}$$

Figure: Estimation d'un modèle EGARCH(1,1) sur les rentabilités du S&P500

```
> spec = ugarchspec(variance.model=list(model = "eGARCH"),mean.model=list(armaOrder=c(0,0), include.mean=TRUE))
> fit = ugarchfit(data = y, spec = spec)
> fit

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : eGARCH(1,1)
Mean Model      : ARFIMA(0,0,0)
Distribution    : norm

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.016713    0.014945  -1.1183 0.263442
omega  -0.012595    0.007743  -1.6268 0.103784
alpha1 -0.041666    0.015674  -2.6583 0.007853
beta1   0.986376    0.006515 151.4018 0.000000
gamma1  0.153950    0.029060   5.2977 0.000000

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     -0.016713    0.014119  -1.1837 0.236531
omega  -0.012595    0.008585  -1.4672 0.142316
alpha1 -0.041666    0.023470  -1.7753 0.075846
beta1   0.986376    0.007587 130.0054 0.000000
gamma1  0.153950    0.040359   3.8145 0.000136

LogLikelihood : -1043.052

Information Criteria
------------------------------------

Akaike       1.7541
Bayes        1.7753
Shibata      1.7540
Hannan-Quinn 1.7621
```

Figure: Rentabilités au carré r_t^2 et estimation de la variance conditionnelle σ_t^2 par un modèle EGARCH(1,1)



Choix du modèle optimal

► Pour les modèles de volatilité conditionnelle, le choix du modèle optimal peut se faire par maximisation de la log-vraisemblance (LL, *Log Likelihood*), définie pour une distribution Normale par :

$$LL = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\log(2\pi) + \log(\sigma_t^2) + z_t^2\right]$$

ou bien en minimisant des critères d'information :

$$\begin{aligned}
\text{Akaike: AIC} &= -2\frac{LL}{T} + 2\frac{k}{T} \\
\text{Bayes: BIC} &= -2\frac{LL}{T} + 2\frac{\log(k)}{T} \\
\text{Hannan-Quinn: HQ} &= -2\frac{LL}{T} + 2\frac{k\log[\log(T)]}{T} \\
\text{Shibata: ShIC} &= -2\frac{LL}{T} + \log\left(\frac{T+2k}{T}\right)
\end{aligned}$$

	Coefficient		|t-value| > 1.64	persistance	half-life	log-likehood	Akaike	HQ
GARCH	omega > 0	0.0047	1.96	0.9885	59.93	-1045.00	1.756	1.762
	alpha ≥ 0	0.0712	4.28					
	beta ≥ 0	0.9173	45.40					
	alpha + beta < 1	0.9885						
EGARCH	omega	-0.0126	-1.63	0.9864	50.62	-1043.1	1.754	1.762
	beta < 1	0.9864	151.4					
	theta1 (gamma)	-0.0417	-2.66					
	theta2 (alpha)	0.154	5.3					
GJR-GARCH	omega > 0	0.0045	1.90	0.9882	58.15	-1042.7	1.753	1.761
	alpha	0.0457	2.77					
	beta ≥ 0	0.9211	45.2					
	gamma	0.0427	2.11					
	alpha + gamma ≥ 0	0.0884						
	(gamma/2) < 1	0.9882						
TGARCH	omega	0.0104	2.16	1.1545	4.82	-1051.3	1.768	1.776
	alpha	0.0990	5.83					
	beta ≥ 0	0.9060	48.9					
	gamma	0.1964	2.12					
	constraint	1.1545						
IGARCH	omega > 0	0.0022	1.95			-1046.4	1.756	1.761
	alpha ≥ 0	0.0734	4.42					
	beta	0.9267						
Riskmetrics	alpha	0.06				-1051.1	1.761	1.763
	beta	0.94						

Les autres modèles de type GARCH

Il existe un grand nombre de modèles de type GARCH. Bollerslev (2010) propose un glossaire (non exhaustif) sur les modèles de type GARCH (*Glossary to ARCH (GARCH)* dans l'ouvrage *Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honor of Robert Engle*).

Introduit par Ding, Granger et Engle (1993) le modèle GARCH en puissance asymétrique ou APARCH (*Asymmetric Power GARCH*) est l'un des plus intéressant car il admet comme cas particuliers plusieurs autres processus GARCH existants.

Un processus ε_t satisfait une représentation APARCH(1,1) ssi

$$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha\left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma\varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\sigma_{t-1}^\delta$$

où $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $|\gamma| \geq 1$.

- Le paramètre δ, avec $\delta > 0$, joue le rôle d'un transformation Box-Cox de l'écart-type conditionnel σ_t.

- La paramètre γ, avec $-1 < \gamma < 1$, représente l'effet asymétrique.

- Les propriétés du modèle APARCH ont été étudiées par He et Teräsvirta (1999) et He et alii (2008).

- L'équation précédente est la paramétrisation utilisée dans les logiciels Eviews, Gretl et R-rugarch.
Pour les logiciels MFE-Matlab et Stata la paramétrisation est légèrement différente avec un signe positif pour le paramètre γ

$$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha\left(|\varepsilon_{t-1}| + \gamma\varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\sigma_{t-1}^\delta$$

- Si $\delta = 2$ et $\gamma = 0 \Rightarrow$ modèle GARCH
- Si $\delta = 1$ et $\gamma = 0 \Rightarrow$ modèle AVGARCH (*Absolute Value GARCH*) de Taylor (1986) et Schwert (1990)
- Si $\delta = 2 \Rightarrow$ modèle GJR-GARCH
- Si $\delta = 1 \Rightarrow$ modèle TGARCH
- Si $\delta \to \infty \Rightarrow$ modèle Log GARCH de Geweke (1986) et Pantula (1986). Les variables sont définies en logarithme.
- Si $\beta = 0$ et $\gamma = 0 \Rightarrow$ modèle ARCH non linéaire ou NARCH (*Nonlinear ARCH*)

La persistance

- Le modèle GARCH implique une décroissance exponentielle des effets d'un choc sur la variance conditionnelle, cad une persistance « faible » (finie) des chocs de volatilité
- Le modèle IGARCH impose une persistance infinie des effets d'un choc sur la variance conditionnelle, cad un choc sur la variance conditionnelle actuelle se répercute sur toutes les valeurs futures prévues : *effet permanent*.
- Un choc sur la volatilité peut avoir une longue mémoire (*long memory*) et un effet sur un long horizon des valeurs futures de la volatilité : *effet fortement persistant mais pas permanent* : modèles à mémoire longue.

Le modèle FIGARCH (*Fractionally Integrated GARCH*) proposé par Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996).

Le modèle FIGARCH(1,d,1) est défini par

$$\sigma_t^2 = \omega + \left[1 - (1 - \beta L)^{-1} (1 - \phi L)(1 - L)^d\right] \varepsilon_t^2$$

- d est le paramètre de mémoire longue, avec $0 \leq d \leq 1$.

  Il mesure directement la persistance de long terme d'un choc sur la variance conditionnelle.

- L est un opérateur de retard, tel que $L\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$
- $\omega > 0$, $0 \leq \phi < 1$, $0 \leq \beta < 1$

Le modèle FIAPARCH (*Fractionally Integrated APARCH*) proposé par Tse (1998) combine à la fois la mémoire longue et l'asymétrie.

Le modèle FIAPARCH(1,d,1) est défini par

$$\sigma_t^\delta = \omega + \left[1 - (1-\beta L)^{-1}(1-\phi L)(1-L)^d\right](|\varepsilon_t| - \gamma\varepsilon_t)^\delta$$

- $0 \leq d \leq 1$, $\delta > 0$, $\omega > 0$, $0 \leq \phi < 1$, $0 \leq \beta < 1$ et $-1 < \gamma < 1$
- Si $\gamma = 0$ et $\delta = 2$ on retrouve le modèle FIGARCH(1,d,1)

Table: GARCH-type models and the econometric softwares.

Softwares	Ox 8.1	Eviews 9	Matlab 13a	Matlab 13a	Gauss 17	R 3.4	Stata 14	Gretl 2018a
Packages	G@RCH 8		MFE	Ek	Fanpac 3.0	rugarch 1.4-0		GIG 2.21
Models								
GARCH	√	√	√	√	√	√	√	√
IGARCH	√		√		√	√		
GJR-GARCH	√	√	√	√	√	√	√	√
TGARCH			√			√	√	√
EGARCH	√	√	√	√	√	√	√	√
APARCH	√	√	√			√	√	√
NGARCH			√			√	√	√
AGARCH			√					
AVGARCH			√			√		√
CGARCH		√	√			√		
ACGARCH		√						
fGARCH						√		
FIGARCH	√		√		√	√		
HYGARCH	√							
FIEGARCH	√							
FIAPARCH	√							
Spline-GARCH	√							
Distrib.								
Normal	√	√	√	√	√	√	√	√
Student	√	√	√	√	√	√	√	√
Skew-Student	√		√		√	√		√
GED	√	√	√			√	√	√
Skew-GED						√		√
Others*						√		

Notes: IGARCH: Integrated GARCH (Engle and Bollerslev, 1986); NGARCH: Nonlinear GARCH (Higgins et Bera, 1992); AVGARCH: Absolute Value GARCH (Taylor, 1986b); CGARCH: Component GARCH (Engle and Lee, 1993); ACGARCH: Asymmetric Component GARCH (Engle and Lee, 1993); fGARCH: family GARCH (Hentchel, 1995); HYGARCH: HYperbolic GARCH (Davidson, 2004); FIEGARCH: Fractionally Integrated EGARCH (Bollerslev and Mikkelsen, 1996); FIAPARCH: Fractionally Integrated APARCH (Tse, 1998); Spline-GARCH (Engle and Rangel, 2008). *: the rugarch package propose four other conditional distributions (Generalized Hyperbolic, GH; Normal Inverse Gaussian; GH Skew-Student; Johnson's reparametrized SU).

Attention : tous les logiciels n'estiment pas exactement les mêmes modèles de type GARCH car ils utilisent des paramétrisations différentes qui rendent alors leur comparaison inapproriée : cf. annexe Chapitre 2.

Lois de distribution

Différentes lois peuvent être utilisées dans le cadre des procédures de maximum de vraisemblance pour l'estimation des paramètres du modèle GARCH.

Nous proposons ici une présentation des propriétés des lois les plus généralement utilisées à savoir :

- la distribution Normale
- la distribution de Student
- la distribution Skewed Student

Loi Normale, $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: longtemps utilisée dans la littérature du fait de sa simplicité.

La log-vraisemblance (LL, *Log Likelihood*) est définie par :

$$LL = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left[\log(2\pi) + \log(\sigma_t^2) + z_t^2 \right]$$

Néanmoins, les propriétés de la loi Normale (symétrique et mésokurtique) ne sont pas compatibles avec les faits stylisés (distribution conditionnelle leptokurtique et asymétrique) observés généralement sur les séries de rentabilités des actifs financiers.

Loi de Student, St(ν) : permet de modéliser des queues de distribution plus épaisses que celles de la loi Normale (distribution leptokurtique).

Dans le cadre des modèles GARCH, ce paramètre estimé permet de capturer l'excès de Kurtosis qui ne peut pas être expliqué par le modèle GARCH lui même.

- Si $\nu < 3$ alors la distribution de Student standardisée est symétrique et la Skewness est nulle
- Si $\nu > 4$ alors la distribution est leptokurtique.

La log-vraisemblance est définie par :

$$\begin{aligned} LL &= T\left\{\log\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \log\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2}\log[\pi(\nu-2)]\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\log(\sigma_t^2) + (1+\nu)\log\left(1+\frac{z_t^2}{\nu-2}\right)\right] \end{aligned}$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma

Loi Skewed Student, Skew-St(ν, ξ) : permet modéliser la Skewness observée dans un grand nombre de séries financières.

- Si $\xi = 0$ alors la distribution est symétrique
- Si $\xi < 0$ alors le skewness de la loi est négatif
- Si $\xi > 0$ alors le skewness de la loi est positif

Négliger la Skewness peut conduire à une inférence biaisée du risque.

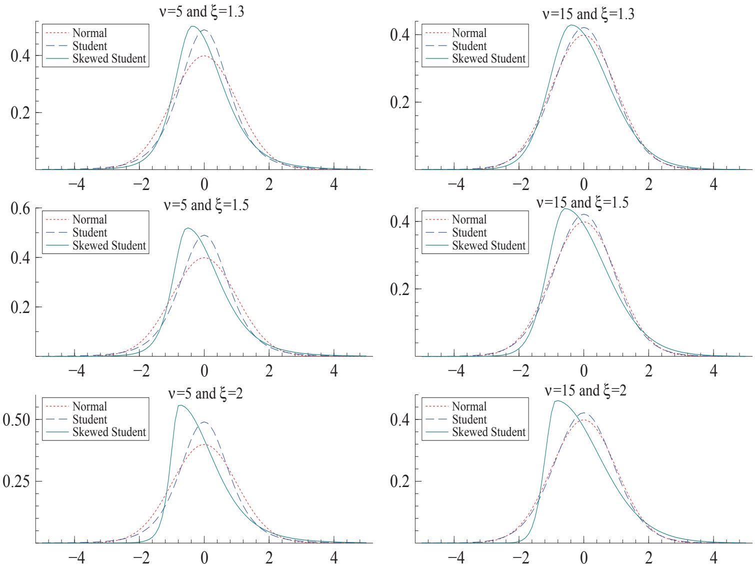
Lambert et Laurent (2000, 2001) ont étendu la densité de la distribution Skewed-Student proposée par Fernández et Steel (1998) aux modèles GARCH

La log-vraisemblance d'une distribution standardisée Skewed-Student (moyenne nulle et variance unité) est définie par :

$$\begin{aligned} LL &= T\left\{\log\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)-\log\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)-\frac{1}{2}\log[\pi(\nu-2)]+\log\left(\frac{2}{\xi+(1/\xi)}\right)+\log(s)\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left\{\log(\sigma_t^2)+(1+\nu)\log\left[1+\frac{(sz_t+m)^2}{\nu-2}\xi^{-2I_t}\right]\right\} \end{aligned}$$

$$I_t=\begin{cases} 1 & \text{si } z_t \geq -(m/s) \\ -1 & \text{si } z_t < -(m/s) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Gamma((\nu+1)/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right) \\ s &= \sqrt{\left(\xi^2+\frac{1}{\xi^2}-1\right)-m^2} \end{aligned}$$



ν=5 and ξ=1.3
ν=15 and ξ=1.3
ν=5 and ξ=1.5
ν=15 and ξ=1.5
ν=5 and ξ=2
ν=15 and ξ=2
Normal
Student
Skewed Student

Pour le modèle EGARCH(1,1) nous avons spécifié que lorsque les innovations standardisées suivent une loi Normale alors

$$E(|z_t|) = \sqrt{2/\pi}$$

Lorsque les innovations standardisées suivent une autre distribution que la distribution Gaussienne on a

- Loi de Student St(ν)

$$E(|z_t|) = 2\frac{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}(\nu-1)\Gamma(\nu/2)}$$

- Loi Skewed Student Skew-St(ν,ξ)

$$E(|z_t|) = \frac{4\xi^2\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\sqrt{\pi}(\nu-1)\Gamma(\nu/2)}$$

	Coefficient		|t-value| > 1.64	persistance	half-life	log-likehood	Akaike	HQ
GARCH	Cst(V) > 0							
	alpha ≥ 0							
	beta ≥ 0							
	alpha + beta < 1							
	Student							
EGARCH	Cst(V)							
	alpha							
	beta < 1							
	theta1 (gamma)							
	theta2 (alpha)							
	Student							
GJR-GARCH	Cst(V) > 0							
	alpha							
	beta ≥ 0							
	gamma							
	alpha + gamma ≥ 0							
	alpha + beta + (gamma/2) < 1							
	Student							
TGARCH	omega							
	alpha							
	beta ≥ 0							
	gamma							
	stationnarity constraint							
	Student							
IGARCH	Cst(V) > 0							
	alpha ≥ 0							
	beta							
	Student							
Riskmetrics	alpha							
	beta							
	Student							

	Coefficient		$\lvert t\text{-value}\rvert$ > 1.64	persistance	half-life	log-likehood	Akaike	HQ
GARCH	Cst(V) > 0							
	alpha ≥ 0							
	beta ≥ 0							
	alpha + beta < 1							
	Asym							
	Tail							
EGARCH	Cst(V)							
	beta < 1							
	theta1 (gamma)							
	theta2 (alpha)							
	Asym							
	Tail							
GJR-GARCH	Cst(V) > 0							
	alpha							
	beta ≥ 0							
	gamma							
	alpha + gamma ≥ 0							
	alpha + beta + (gamma/2) < 1							
	Asym							
	Tail							
TGARCH	omega							
	alpha							
	beta ≥ 0							
	gamma							
	stationnarity constraint							
	Asym							
	Tail							
IGARCH	Cst(V) > 0							
	alpha ≥ 0							
	beta							
	Asym							
	Tail							
Riskmetrics	alpha							
	beta							
	Asym							
	Tail							

Diagnostiques des résidus

Une fois les modèles estimés et validés, il est important par la suite de tester la validité de ces modèles en appliquant des tests sur les innovations z_t (ou résidus standardisés), notamment

- la Normalité (skewness et kurtosis). **Chapitre 1**
- l'autocorrélation (tests de Box-Pierce et de Ljung-Box). **Chapitre 1**
- l'homoscédasticité conditionnelle (test de Ljung-Box sur résidus au carré et test LM-ARCH d'Engle). **Chapitre 1**
- la mauvaise spécification de la variance conditionnelle

Le test de mauvaise spécification de la variance conditionnelle

▶ Engle et Ng (1993) proposent un test sur la possible mauvaise spécification de la variance conditionnelle. Plus précisément, ils testent la présence de l'effet asymétrique dans les résidus standardisés z_t.

Le test repose sur les régressions suivantes :

$$\begin{aligned} z_t^2 &= a_0 + a_1 S_{t-1}^- + u_t && \text{SBT test} \\ z_t^2 &= b_0 + b_1 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1} + u_t && \text{NSBT test} \\ z_t^2 &= c_0 + c_1 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} + u_t && \text{PSBT test} \end{aligned}$$

avec $S_t^- = 1$ si $\varepsilon_t < 0$ et 0 sinon, et $S_t^+ = 1 - S_t^-$.

Les test SBT, NSBT et PSBT représentent les tests respectivement du bias de signe, du biais du signe négatif et du biais du signe positif.

Plutôt que d'utiliser trois régressions séparées Engle et Ng (1993) proposent également un test joint sur les trois effets :

$$z_t^2 = d_0 + d_1 S_{t-1}^- + d_2 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1} + d_3 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} + u_t$$

Les statistiques de test portent

- soit sur les effets de manière individuelle

$$\mathrm{H}_0 : d_i = 0 \qquad \mathrm{H}_1 : d_i \neq 0 \qquad \forall i = 1, 2, 3$$

- soit sur les effets de manière jointe

$$\mathrm{H}_0 : d_1 = d_2 = d_3 = 0 \qquad \mathrm{H}_1 : d_i \neq 0 \qquad \forall i = 1, 2, 3$$

```
Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
------------------------------------
                        statistic  p-value
Lag[1]                      9.925 0.001631
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]     9.926 0.002000
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]    10.238 0.007996
d.o.f=0
H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
------------------------------------
                         statistic p-value
Lag[1]                      2.014   0.1558
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]     3.446   0.3316
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]     5.303   0.3862
d.o.f=2

Weighted ARCH LM Tests
------------------------------------
            Statistic Shape Scale P-Value
ARCH Lag[3]    0.6581 0.500 2.000  0.4172
ARCH Lag[5]    2.7210 1.440 1.667  0.3329
ARCH Lag[7]    4.1411 2.315 1.543  0.3267


Nyblom stability test
------------------------------------
Joint Statistic:  0.6902
Individual Statistics:
mu     0.05769
omega  0.15616
alpha1 0.18814
beta1  0.11957

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
Joint Statistic:         1.07 1.24 1.6
Individual Statistic:    0.35 0.47 0.75

Sign Bias Test
------------------------------------
                   t-value   prob sig
Sign Bias          0.05536 0.9559
Negative Sign Bias 0.80648 0.4201
Positive Sign Bias 0.90314 0.3666
Joint Effect       1.48845 0.6849


Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
------------------------------------
  group statistic p-value(g-1)
1    20     15.59       0.6842
2    30     28.17       0.5088
3    40     35.56       0.6275
4    50     61.53       0.1080


Elapsed time : 0.7916062
```

Table: Diagnostiques sur les résidus des modèles de type GARCH.

Modèle	Q(5)	*p*-value	$Q^2(5)$	*p*-value	LM-ARCH(5)	*p*-value	Engle-Ng sign test	*p*-value
GARCH	10.24	0.008	3.45	0.33	2.72	0.33	1.49	0.68
EGARCH	10.37	0.007	3.03	0.37	3.14	0.27	1.50	0.68
GJR-GARCH	10.23	0.008	3.28	0.36	2.50	0.37	1.35	0.72
TGARCH	9.03	0.016	4.20	0.23	7.52	0.03^*	2.08	0.56
IGARCH	9.30	0.014	3.28	0.36	2.96	0.30	2.34	0.51
Riskmetrics	8.51	0.022	3.17	0.38	3.84	0.19	3.01	0.39

Effets des outliers sur les modèles GARCH

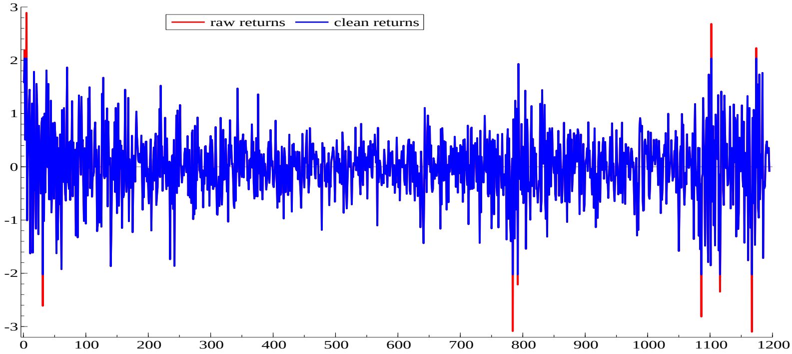


Figure: Estimation des modèles GARCH sur la série ajustée des outliers

	Coefficient		|t-value| > 1.64	persistance	half-life	log-likehood	Akaike	HQ
GARCH	omega > 0	0.0039	1.83	0.9894	65.04	-1024.50	1.721	1.728
	alpha ≥ 0	0.0615	4.13					
	beta ≥ 0	0.9279	50.0					
	alpha + beta < 1	0.9894						
EGARCH	omega	-0.0127	-1.64	0.9878	56.47	-1023.1	1.721	1.729
	beta < 1	0.9878	154.7					
	theta1 (gamma)	-0.0354	-2.31					
	theta2 (alpha)	0.1337	4.79					
GJR-GARCH	omega > 0	0.0035	1.72	0.9901	69.67	-1022.6	1.720	1.728
	alpha	0.039	2.54					
	beta ≥ 0	0.9329	51.2					
	gamma	0.0364	1.94					
	alpha + gamma ≥ 0	0.0754						
	(gamma/2) < 1	0.9901						
TGARCH	omega	0.0092	2.03	1.1469	5.06	-1030.3	1.733	1.741
	alpha	0.0838	5.22					
	beta ≥ 0	0.9188	51.0					
	gamma (eta)	0.1895	1.82					
	constraint	1.1469						
IGARCH	omega > 0	0.0016	1.77			-1026.00	1.722	1.727
	alpha ≥ 0	0.0625	4.34					
	beta	0.9375						
Riskmetrics	alpha	0.06				-1029.9	1.725	1.727
	beta	0.94						

Table: Diagnostiques sur les résidus des modèles de type GARCH estimés sur la série originale et ajustée des outliers.

Modèle	Q(5)	*p*-value	$Q^2(5)$	*p*-value	LM-ARCH(5)	*p*-value	Engle-Ng sign test	*p*-value
Raw								
GARCH	10.24	0.008	3.45	0.33	2.72	0.33	1.49	0.68
EGARCH	10.37	0.007	3.03	0.37	3.14	0.27	1.50	0.68
GJR-GARCH	10.23	0.008	3.28	0.36	2.50	0.37	1.35	0.72
TGARCH	9.03	0.016	4.20	0.23	7.52	0.03^{*}	2.08	0.56
IGARCH	9.30	0.014	3.28	0.36	2.96	0.30	2.34	0.51
Riskmetrics	8.51	0.022	3.17	0.38	3.84	0.19	3.01	0.39
Clean								
GARCH	11.19	0.005	2.20	0.57	2.22	0.43	0.79	0.85
EGARCH	11.09	0.005	1.82	0.66	2.20	0.43	0.96	0.81
GJR-GARCH	11.21	0.005	1.91	0.64	1.87	0.50	0.63	0.89
TGARCH	9.34	0.003	2.13	0.59	4.01	0.17	1.40	0.71
IGARCH	10.10	0.009	2.04	0.61	2.64	0.35	1.46	0.69
Riskmetrics	9.51	0.012	2.08	0.60	2.64	0.35	2.91	0.41