№1

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}\sqrt{\ln^3(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\ln^3(n)}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln^3(n)} \qquad a_n=\frac{\sqrt{\ln^3(n)}}{n}$$

Исследуем сходимость при помощи интеграл призн Коши

$$\int_2^\infty \frac{\sqrt{\ln^3(x)}}{x}\,dx = \left(2\frac{\sqrt{\ln^5(x)}}{5}\right)\Bigg|_2^\infty = \lim_{n\to\infty} \underbrace{2\frac{\sqrt{\ln^5\infty}}{5}}_{\infty} - 2\frac{\sqrt{\ln^5 2}}{5} = \infty$$

Несобственный интеграл расходится

Ответ: расходится

№2

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

① Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = e^{-2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Ответ: ряд сходится

№3

$$\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^{K-1} \frac{(X+6)^K}{3^K(K+1)}$$

① $|u_K(x)| = \frac{(X+6)^K}{3^K(K+1)}$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{|u_{K+1}(x)|}{|u_K(x)|} = \lim_{K\to\infty} \frac{(X+6)^{K+1} \cdot 3^K(K+1)}{3^{K+1}\cdot(K+2)\cdot(X+6)^K} =$$

$$= \lim_{K\to\infty} \frac{(X+6)\cancel{(X+6)^K} \cdot \cancel{3^K}(K+1)}{3\cdot \cancel{3^K}\cdot(K+2)\cancel{(X+6)^K}} = \frac{|X+6|}{3} \lim_{K\to\infty} \frac{K+1}{K+2} = \frac{|X+6|}{3}$$

② Согласно признаку Даламбера ряд сходится при

$\frac{|X+6|}{3} < 1$, т.е $-9 < X < -3$

③ Подставим $x=-9$

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^{K-1}\cdot(-3)^K}{3^K(K+1)}$$

1) каждый последующий член ряда по абсолютной величине меньше предыдущего $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \dots)$

2) Предел стремится к 0

$$\lim_{K\to\infty} \frac{(-3)^K}{3^K\cdot K + 3^K} = 0$$

$\Rightarrow$ ряд сходится условно (Лейбниц)

④ Подставим $x=-3$

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^{K-1}\cdot 3^K}{3^K(K+1)}$$

1) каждый последующий член ряда по абсолютной величине меньше предыдущего $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots)$

2) предел стремиться к 0

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-3^k}{3^k\cdot k+3^k}=0$$

⇒ ряд сходится условно (Лейбниц)

Ответ: -3

№4

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$$

① Разложение в ряд Тейлора

$$\frac{1}{6}+\frac{5(x+4)}{36}+\frac{19(x+4)^2}{216}+\frac{65(x+4)^3}{1296}+\frac{211(x+4)^4}{7776}+\frac{665(x+4)^5}{46656}+\dots$$

② По признаку Лейбница для

1) каждый последующий член ряда по абсолютной величине меньше предыдущего $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{18}, \frac{19}{54} \dots\right)$

2) Предел стремиться к 0

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{2n}}{2}-\frac{6^n}{2}}{6^n}=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{3^n-2^n}{6^n}\cdot(x+4)^{n-1} \quad \text{при}: x=-6}$$

Следовательно ряд расходится при $x=-6$ ⇒ -6 - точка расход

③ По признаку Лейбница при $x=-2$:

Аналогично ② пункту -2 точка расход

Ответ: $(-6; -2)$

№5

Разложение e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$x = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{(0,5)}{1!} = 0,5$$

$$\frac{(0,5)^2}{2!} = 0,125$$

$$\frac{(0,5)^3}{3!} = 0,0208$$

$$\frac{(0,5)^4}{4!} = 0,0026$$

$$\frac{(0,5)^5}{5!} = 0,00026 = 0,0003$$

Соотв:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \approx 1,6487$$

$$\sqrt{e} = 1,6487 \pm 0,0001$$