Вариант №12

№5 (Решение систем линейных уравнений)

а) Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = -2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot 3 + 1 + 2\cdot 2 - 2 - 2\cdot 3 - 4 = 5$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -30$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-30}{5} = -6$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

Ответ: $x = 3$; $y = -6$; $z = 1$.

б) Проверить систему на совместимость. В случае, если система совместна, то построить решение.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^5 (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 2 + 1(-4) \cdot 2 + (-5)(-1) \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) \cdot (-1) - 1 \cdot 2(-5)) + 2(1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \cdot 1 + 5 - 5 \cdot 2 -$$

$$2 \cdot 1(-1) - (-1) \cdot (-4)) + ((1 \cdot (-5) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 \cdot 5) - 1 \cdot 5 \cdot (-5) - 1 \cdot 2(-4) - 3 \cdot 2(-1)) =$$

$$= 7 - 14 + 7 = 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 11 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \\ 11 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta = 0 \\ \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0 \\ \Delta_4 = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow$$ Система линейных уравнений не имеет решений $| \Rightarrow$ система не совместима

Ответ:

№6 (Теория квадратичных форм)

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм. Сделать рисунок.

$$x^2 + 4xy + y^2 + z^2 - 3 = 0$$

$$\Phi(x;y;z) = x^2 + 2xy + 2yx + y^2 + 0xz + 0zx + z^2 + 0zy + 0yz - 3$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad a = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$$

Найдем собственные векторы $(A-\lambda E)\Gamma_0 = 0$

1) $\lambda_1 = 3$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = y = t \\ z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \Gamma_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \overset{t=1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

координируем:

$$\Gamma_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 1$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = y = 0 \\ z = t \end{matrix} \Rightarrow \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \overset{t=1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

координируем:

$$\Gamma_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda_3 = -1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -y = t \\ z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \Gamma_3 = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \overset{t=1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

координируем

$$\Gamma_3^0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Формируем T так, чтобы $\det T = 1$

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}z' \\ z = y' \end{cases}$$

Заметим, что y становится z, осталные поворачиваются на $45°$ относительно исходного.

$$B = T^T \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

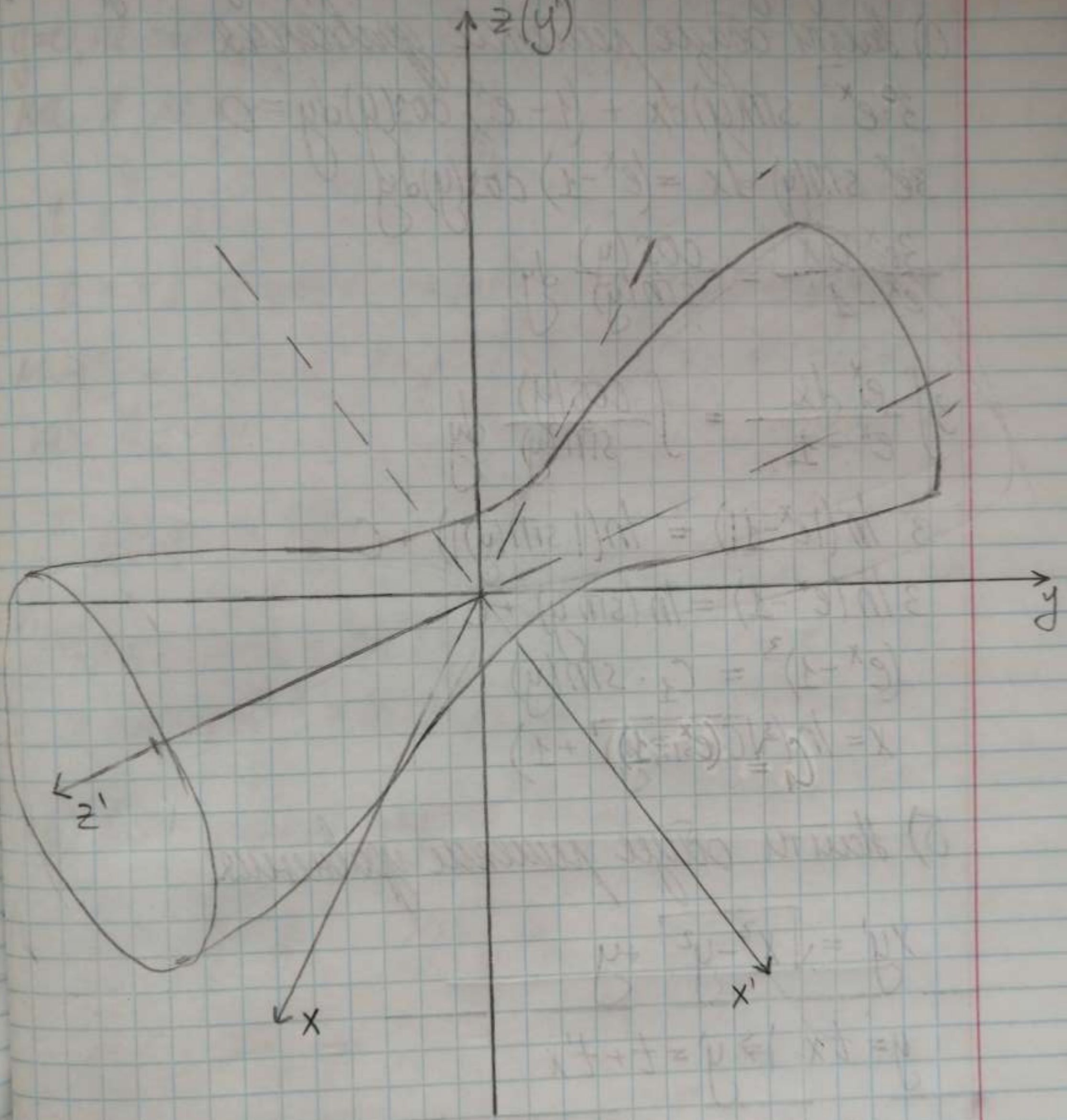
$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi'(x'; y'; z') = (x')^T B \cdot x' =$$

$$= 3x'^2 + y'^2 - z'^2 - 3$$

$$3x'^2 + y'^2 - z'^2 - 3 = 0$$

Это однополостный гиперболоид в $Ox'y'z'$


z(y')
y
z'
x
x'

№3 (Функции многих переменных; Дифференциальные ур-ния)

а) Найти общее решение уравнения

$$3\cdot e^x\cdot \sin(y)\,dx+(1-e^x)\cos(y)\,dy=0$$

$$3e^x\sin(y)\,dx=(e^x-1)\cos(y)\,dy$$

$$\frac{3e^x\,dx}{e^x-1}=\frac{\cos(y)}{\sin(y)}\,dy$$

$$3\cdot\int\frac{e^x\,dx}{e^x-1}=\int\frac{\cos(y)}{\sin(y)}\,dy$$

$$3\cdot\ln(|e^x-1|)=\ln(|\sin(y)|)+C$$

$$3\ln(e^x-1)=\ln(\sin y)+C$$

$$(e^x-1)^3=C_1\cdot\sin(y)$$

$$x=\ln(\sqrt[3]{C_1\cdot\sin(y)}+1)$$

б) Найти общее решение уравнения

$$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$$

$$y=tx\ \Rightarrow y'=t+t'x$$

$$x(t'x+t)=\pm x\sqrt{1-t^2}+tx$$

Отмечу, что $x=0$ не является решением: при подстановке этого решения в исходное уравнение получим равенство $y=0$, не являющееся тождеством. Поделив обе части на x, получим

$$t'x^2 = \pm x\sqrt{1-t^2}$$

$t=\pm 1$ является решением, т.к при подстановке получим верное тождество. Поделим обе части на $\sqrt{1-t^2}$

$$\pm\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\pm\arcsin(t) = \ln(Cx)$$

$$\pm\arcsin\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(Cx)$$

в) Найти решение задачи Коши.

$$dx = \frac{x\,dy}{3y-x^2} \qquad y(1)=0$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{3y-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y-x^2}{x}$$

$$y' - \frac{3y}{x} + x = 0$$

Получаем линейное уравнение отн y и решаем его

$$y' - \frac{3}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x}$$

$$y = Cx^3$$

Находим решение неодн уравн

$$y' = C'x^3 + 3x^2C$$

$$x^3C' + 3x^2C - 3x^2C = -x$$

$$C' = -\frac{1}{x^2}$$

$$C = \frac{1}{x} + C_1$$

$$y = x^2 + x^3C \qquad y(1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$C = -1$$

$$\Downarrow$$

$$y = x^2 - x^3$$

d) Найти общее решение уравнения

$$(x+1)(y' + y^2) = -y$$

Считая, что $x \neq -1$, делим на $x+1$

$$y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$$

Разделим на y^2 и сделаем замену $z(x) = y^{-1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $z'(x) = -y^{-2}y'$

$$z' - \frac{z}{x+1} = 1$$

Решаем методом вариации произвольной постоянной.

$$z = (\ln|x+1| + C_0)(x+1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + C_0)}$$