Activités

Activité 2

Démontrer que $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
Cf. fig. 2.
On pose :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}\overrightarrow{AC} = \vec{v}(\vec{u}; \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$

Soit $\vec{i}$ tel que $\overrightarrow{AB} = AB \times \vec{i}$ et $\vec{j}$ tel que $(A; \vec{i}; \vec{j})$soit orthonormé. Le cercle orienté de centre A et de rayon 1 est donc le cercle trigonométrique.

$$AK = 1 = \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|\overrightarrow{AC} = AC \times \overrightarrow{AK}$$

On a donc :

$$K(\cos\theta; \sin\theta)\overrightarrow{AC}(AC\cos\theta; AC\sin\theta)\overrightarrow{AB}(AB; 0)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Or $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos(\vec{v}; \vec{u})$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \cos\widehat{BAC}$$

Conséquence : exprimer $\vec{u}.\vec{v}$ dans le cas $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $(u; v) = 0[2\pi]$ [1] ou $(u; v) = \pi[2\pi]$ [2].
On en déduit :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 0 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

ou

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\pi = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

1. Même sens
2. Sens contraire

Activité 3

Soient A, B, C non alignés, H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.
Fin du cours.
`exit`

Application du produit scalaire dans un repère orthonormé

Rappel Soient $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$.
On a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y'$.

- $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$
- Soient un point A et un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$. Soient $M(x;y)$ et $A(x_A;y_A)$. L'ensemble des points du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est une droite (d) passant par A. $\overrightarrow{n}$ est appelé vecteur normal de (d).

Preuve

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0} \text{ou} \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow M = A$$

On pose $\overrightarrow{n}(a;b)$ et on a $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\
&\Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{ax + by + c = 0}_{\text{équation cartésienne de la droite de vecteur directeur} \overrightarrow{u}(-b;a)} \qquad \text{en posant } c = -ax_A - by_A
\end{aligned}$$

Remarque $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = a \times (-b) + b \times a = 0$

Application numérique

On pose $A(1;2)$ et $\overrightarrow{n}(-2;3)$. Déterminer une équation de (Δ) qui passe par A et qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

On a donc $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2)$.

$$\begin{aligned} M(y;y) \in (\Delta) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(x-1)+3(y-2)=0 \\ &\Leftrightarrow -2x+3y-4=0 \end{aligned}$$

Donc :
(BC) vecteur directeur de $\overrightarrow{BC}$.
(AH) vecteur normal de $\overrightarrow{BC}$