Applications avec le produit scalaire

TP #1

A)

1. On a :

$$\begin{aligned} AB &= 3 \\ AC &= 5 \\ BC &= 6 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(9 + 25 - 36) \\ &= -1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= -1 \\ \cos \widehat{BAC} &= -\frac{1}{AB \times AC} \\ &= -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

Donc $\widehat{BAC} \approx 94°$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} &= BA \times BC \times \cos \widehat{ABC} \\
&= \frac{1}{2} \times (BA^2 + BC^2 - CA^2) \\
&= \frac{1}{2} \times (9 + 36 - 25) \\
&= 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos \widehat{ABC} &= \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA \times BC} \\
&= \frac{10}{18} = \frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

Donc $\widehat{ABC} \approx 56°$.

$$
\begin{aligned}
180 - (94 + 56) &= \widehat{ACB} \\
\Leftrightarrow \widehat{ACB} &= 30°
\end{aligned}
$$

B)

1.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\
&= 35 \times \cos 65° \\
&\approx 14.8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} \\
&= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2
\end{aligned}
$$

D'où :

$$\begin{aligned} BC^2 &= 25 - 70 \times \cos 65° + 49 \\ &= 74 - 70 \cos 65° \end{aligned}$$

2.

TP #2

1.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2-2)^2 + (1+3)^2} \\ &= \sqrt{16+16} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(3-2)^2 + (4+3)^2} \\ &= \sqrt{1+49} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= -4 \times 1 + 7 \times 4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BAC} &= \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} \\ &= \frac{24}{4\sqrt{2} \times 5 \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{24}{40} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\widehat{BAC} \approx 0.9rad$$

3. Correction dans l'énoncé :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 24$$

On pose $H(x_H; y_H)$.
On sait que :

$$\overrightarrow{AB}(-4;4)\overrightarrow{AC}(1;7)$$

On a :

$$\overrightarrow{AH}(x_H - 2; y_H + 3)$$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -4 \times (x_H - 2) + 4 \times (y_H + 3) = 24\\
&\Leftrightarrow -4x_H + 8 + 4y_H + 12 = 24\\
&\Leftrightarrow -4x_H + 4y_H + 20 - 24 = 0\\
&\Leftrightarrow -4x_H + 4y_H - 4 = 0\\
&\Leftrightarrow 4(-x_H + y_H - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow -x_H + y_H - 1 = 0
\end{aligned}$$

Déterminer une équation de (AB).
$\overrightarrow{AB}(-4;4)$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
Soit $\overrightarrow{u}(-1;1)$. $\overrightarrow{u}$ est donc colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et vecteur directeur de (AB).

$$\begin{aligned}
M(x;y) \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\text{et}\overrightarrow{u}\text{colinéaires}\\
&\Leftrightarrow (x-2) \times (1) - (y+3) \times (-1) = 0\\
&\Leftrightarrow x - 2 + y + 3 = 0\\
&\Leftrightarrow x + y + 1 = 0
\end{aligned}$$

$$H(x_H; y_H) \in (AB)$$

$$\begin{cases} -x_H + y_H - 1 = 0 \\ x_H + y_H + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&2y_H = 0\\
&\Leftrightarrow y_H = 0
\end{aligned}$$

$$-x_H - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_H = -1$$

D'où :

$$H(-1; 0)$$

On peut alors déterminer l'équation de (CH) :

$$y = x + 1$$