Домашнее задание
1. Линейная алгебра

1.1.

Вычисляем транспонированную матрицу A^T и B^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перемножаем транспонированную матрицу A^T на матрицу C:

$$A^T \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+12+(-8) & -6+(-15)+(-1) & 18+6+(-5) \\ -24+20+0 & 12+(-25)+0 & -36+10+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & -22 & 19 \\ -4 & -13 & -26 \end{pmatrix}$$

Умножим транспонированную матрицу A^T на матрицу B^T:

$$2\,A^T \cdot B^T = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2+6+(-7) & -6+(-12)+0 & 10+6+(-1) \\ -4+10+0 & 12+(-20)+0 & -20+10+0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ +6 & -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -36 & 30 \\ 12 & -16 & -20 \end{pmatrix}$$

Матрица D:

$$D = \begin{pmatrix} 16 & -22 & 19 \\ -4 & -13 & -26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -36 & 30 \\ 12 & -16 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 14 & -11 \\ -16 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

1.2.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -6 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x & 6 & 9 \\ -3 & 3y & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 4 & -12 & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2 & 10 & -1 \\ 1 & 3y-12 & 12+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$3x+2=8$ | $3y-12=6$ | $12+2z=4$ | $v=10$
$3x=6$ | $3y=18$ | $2z=-8$
$x=2$ | $y=6$ | $z=-4$

Итого: $v=10$, $x=2$, $y=6$, $z=-4$.

1.3.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & g \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Для 2й строки:}\\ -3\cdot(1\text{стр.})+(2\text{стр.})}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -9+p=0 \\ 5 & 10 & g \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Для 3й строки:}\\ -5\cdot(1\text{стр.})+(3\text{стр.})}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -9+p=0 \\ 0 & 0 & -15+g=0 \end{pmatrix}$$

Итого: $p=9,\ g=15$

1.4.

Проверяем, что $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно-независимые.

$$\begin{array}{cc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{для 1й строки}\\ 3\cdot(1\text{стр})+(2\text{стр})}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{для 2й строки}\\ 5\cdot(1\text{стр.})+(2\text{стр})}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix},$$

таким образом $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно - независимы.

Примем $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ за новый базис:

$$B = \left\{ \underset{}{\overset{\vec{a}_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}}} ; \overset{\vec{a}_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\}$$

(a) $[X]_B = B^{-1}[X]$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot \tilde{B}^T \qquad |B| = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 3-(-1)\cdot(-5)=6-5=1$$

$\tilde{B}_T$ $\quad \tilde{b}_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 3=3;\ \tilde{b}_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-1)=1$

$\quad \tilde{b}_{13}=(-1)^{2+1}\cdot(-5)=5;\ \tilde{b}_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2$ $\quad \Big|\ \tilde{B}_T=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$[X]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1+1\cdot(-4) \\ 5\cdot 1+2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b) $[X]=B\cdot[X]_B\ ;\ [y]=B\cdot[y]_B$

$$[y]=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ -5\cdot 1+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.5. —

2. Начала мат. анализа и оптимизации

2.1. Найдём частные производные первого порядка функции $f(x)$: $f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2$, $x \in \mathbb{R}^2$

$\frac{df}{dx_1} = 3x_1^2 - 2x_2 - 3$; $\frac{df}{dx_2} = -2x_1 + 2x_2 - 2$.

Найдём частные производные второго порядка:

$\frac{d^2f}{dx_1^2} = 6x_1$; $\frac{d^2f}{dx_1 dx_2} = -2$; $\frac{d^2f}{dx_2^2} = 2$; $\frac{d^2f}{dx_2 dx_1} = -2$

Матрица Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} \\ \frac{d^2f}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2f}{dx_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решим систему уравнений $\nabla f(x_c) = 0$ для поиска критических точек.

$$\frac{df}{dx_1} = 3x_1^2 - 2x_2 - 3 = 0$$

$$\frac{df}{dx_2} = -2x_1 + 2x_2 - 2 = 0$$

Методом исключения. Из уравнения $\frac{df}{dx^2} = -2x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ можно выразить x_1 через x_2.

$-2x_1 = -2x_2 + 2$

$x_1 = x_2 - 1$, подставим это выражение для x_1 в уравнение $\frac{df}{dx_1}$:

$3(x_2 - 1)^2 - 2x_2 - 3 = 0,$

$3(x_2^2 - 2x_2 + 1) - 2x_2 - 3 = 0,$

$3x_2^2 - 6x_2 + 3 - 2x_2 - 3 = 0,$

$3x_2^2 - 8x_2 = 0,$

$x_2(3x_2 - 8) = 0$

$x_2 = 0$ или $x_2 = \frac{8}{3}$

Теперь найдём соответствующее значения x_1:

Для $x_2 = 0$: $x_1 = 0 - 1 = -1$

Для $x_2 = \frac{8}{3}$: $x_1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$

Получаем две критические точки:

$x_{c1} = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$ и $x_{c2} = (-1, 0)$.

2.2. $F = \ln(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$$

Подставим частные производные в уравнение

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + x_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2}} =$$

$$= \frac{x_1}{2(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\cdot\sqrt{x_1}} + \frac{x_2}{2(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\sqrt{x_2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_1\sqrt{x_2}}{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} + \frac{x_2\sqrt{x_1}}{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\sqrt{x_2}\sqrt{x_1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}}{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}}{x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}} = \frac{1}{2},$$

т.о. функция удовлетворяет уравнению.

2.3. $f_1 = x+y+z$; $f_2 = xyz$.

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Численное значение в точке $V = (1,2,3)^T$:

$$J_{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.4. –
2.5. –
2.6. –
2.7. –