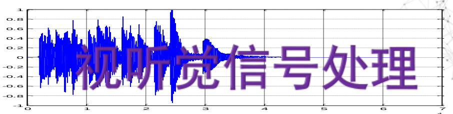
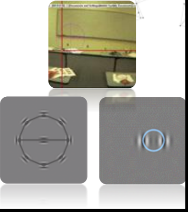


视听觉信号处理

Visual-Audio Signal Processing

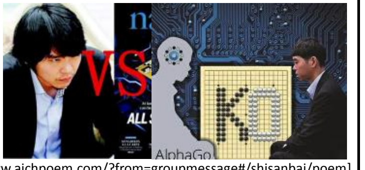


计算机学院

姚鸿勋，郑铁然

2020.9.14

- 心中有梦想
- 肩上担使命

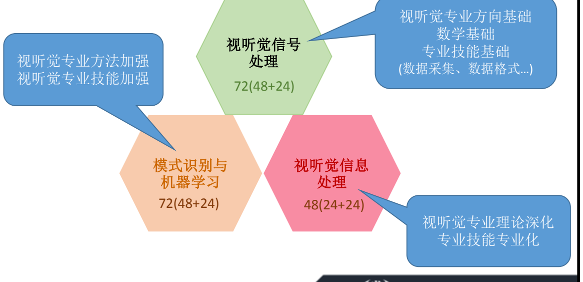


人脸识别…
同声翻译…
变脸…
机器人写诗…

人工智能新时代

[链接https://www.aichpoem.com/?from=groupmessage#/shisanbai/poem]

《视听觉信息处理》专业大方向系列课程目标



《视听觉信号处理》大纲

一. 课程基本信息

课程编号：**CS32261**
课程名称：**视听觉信号处理**
英文名称：**Visual-Audio Signal Processing**
课程类别：**专业基础课**
课程学时：**72；授课：48；实验：24；总学分4.5**
先修课程：无
适用专业：**计算机大类专业**
开课学期：**3秋**
开课单位：**计算机科学与技术学院**

《视听觉信号处理》大纲

二. 课程目标与课程内容对应关系（I）

序号	教学内容	教学要求	推荐学时	推荐教学方式	对应的课程目标
1	1.信号与系统 (1)信号和系统的定义 (2)信号的采集（包括语音、图像、视频） (3)信号的表示与编码（包括语音、图像、视频）	1.掌握信号与系统的定义、关系 2.掌握信号种类、采集方式 3.理解信号表达与编码方法及其应用	4	课堂讲授	课程目标2
2	2.信号处理方法 (1)傅里叶变换 (2)卷积运算	1.掌握傅里叶变换的概念和特性 2.掌握傅卷积运算的概念和特性	2	课堂讲授	课程目标2
3	3.信号分析 (1) 正交空间 (2) 正交函数集与信号的分解 (3) 信号的稀疏表示	1.能够理解和运用正交概念 2.正确理解信号分解	4	课堂讲授	课程目标2

《视听觉信号处理》大纲

二. 课程目标与课程内容对应关系（II）

序号	教学内容	教学要求	推荐学时	推荐教学方式	对应的课程目标
4	4.语音学概要 (1) 语音的声学特性及听感特性 (2) 语音的产生机理和产生模型 (3) 声音的听觉感知模型 (4) 相关的语音学、韵律学和语言学知识 (5) 语音处理研究的历史和现状 (6) 应用前景	1.理解语音和其表示 2.从生理学、心理学、声学、语音学、韵律学和语言学等多个学科理解语音产生、传输、感知、认知等各方面的特性 3.理解综合运用各学科知识所建立各个仿真数学模型 4.理解语音处理研究的发展轨迹	4	课堂讲授	课程目标1 课程目标2
5	5.语音的时域频域分析 (1) 预处理和短时分析； (2) 语音的时域分析方法：短时能量分析、短时过零分析、短时相关分析、语音端点检测、语音基音周期估计； (3) 语音的频域分析方法：滤波器组、频谱和语谱图、同态信号处理、倒谱和复倒谱、线性预测分析、Mel频域滤波器组。	1.理解特征分析在语音处理研究中所扮演的重要角色 2.理解各类模型和数据工具的运用技巧 3.掌握各种时频分析方法 4.能够在典型语音信号处理问题中选择和实现适当的分析算法 实验1：语音特征提取实验： 1. 掌握基于声卡和麦克风的语音信号采集方法 2. 实现基于能量和过零率的语音端点检测算法； 3. 实现分帧和预加重处理算法 4. 理解对语音信号进行频域分析的FFT算法 5. 熟悉LPCC特征的提取方法 6. 熟悉MFCC特征的提取方法 7.能够完成项目系统中语音采集模块和特征提取模块的构建	6+6	课堂讲授/以练代讲/翻转课堂 实验1	课程目标2 课程目标3 课程目标4

哈尔滨工业大学 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《视听觉信号处理》大纲

二. 课程目标与课程内容对应关系（III）

序号	教学内容	教学要求	推荐学时	推荐教学方式	对应的课程目标
6	6.语音编码技术 (1)语音编码技术框架 (2) 波形编码：PCM、压扩PCM、DPCM、一般化的DPCM、ADPCM、G.726编码标准 (3) 参数编码：LPC编码、多脉冲激励线性预测声码器、规则脉冲激励线性预测声码器、长时预测滤波器、感觉加权滤波器、闭环搜索、码激励线性预测声码器、多带激励声码器	1.了解语音编码的概念和发展轨迹 2.理解语音编码技术的基本框架 3.理解主要的语音编码算法 4.了解最新研究动态 5.能够设计和实现典型的语音编码算法 实验2 语音编码实验 1.实现基于DPCM的语音编码算法 2.实现基于ADPCM的语音编码算法 3.掌握语音编码系统实现的一般框架	6+2	课堂讲授/翻转课堂 实验2	课程目标1 课程目标3
7	7.语音识别技术概述	1.了解语音识别任务和其对应的不同解决方案 2.了解说话人识别任务和其多种解决方案 实验3 命令词识别实验 1.实现基于DTW的语音识别算法 2.了解基于HMM的语音识别方法	4+4	课堂讲授/以练代讲/翻转课堂 实验3	课程目标1 课程目标4

HIT-Visual Intelligence Lab

哈尔滨工业大学 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《视听觉信号处理》大纲

二. 课程目标与课程内容对应关系（IV）

序号	教学内容	教学要求	推荐学时	推荐教学方式	对应的课程目标
8	8.数字成像、光度学与色度学	1.掌握数字成像（包括电磁波成像、声波成像）特点 2.了解图像处理历史发展状况 3.掌握光度学、色度学及视觉特性 4.理解彩色空间、形状、纹理、尺度关系 实验4: 完成图像读写、彩色空间转换及图像运算变换实验	4+4	课堂讲授 实验4	课程目标1 课程目标2
9	9..空域图像增强方法 (1)各类空域图像平滑算子 (2)各类空域图像锐化算子 比较各种算法优劣及适用情景	1.理解图像处理中各类算子的作用 2.理解各类模型和数据工具的运用技巧 3.掌握各种图像处理算子方法 4.具有科研动手能力，能够设计实现针对问题的图像特征提取系统 实验5: 完成图像增强算子实验，并可多选图像增强算子实验，或可选择完成一个具备若干图像(或语音)信号增强处理算子的基本系统。	6+8	课堂讲授 实验5	课程目标1 课程目标3 课程目标4

HIT-Visual Intelligence Lab

哈尔滨工业大学 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《视听觉信号处理》大纲

二. 课程目标与课程内容对应关系（V）

序号	教学内容	教学要求	推荐学时	推荐教学方式	对应的课程目标
10	10.频域图像增强方法 (1)各类频域图像平滑算子 (2)各类频域图像锐化算子 比较各种算法优劣及适用情景	1.理解频域图像处理中各类算子的作用 2.理解各类模型和数据工具的运用技巧 3.掌握各种图像处理算子方法 4.具有科研动手能力，能够设计实现针对问题的图像特征提取系统	4	课堂讲授/翻转课堂	课程目标1 课程目标3 课程目标4
11	11.图像复原 图像恢复原理、图像退化模型及图像复原法	1.掌握图像退化模型 2.掌握图像恢复原理及图像复原法	4	课堂讲授/翻转课堂	课程目标1 课程目标2

HIT-Visual Intelligence Lab

哈尔滨工业大学 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

10

1. 部分

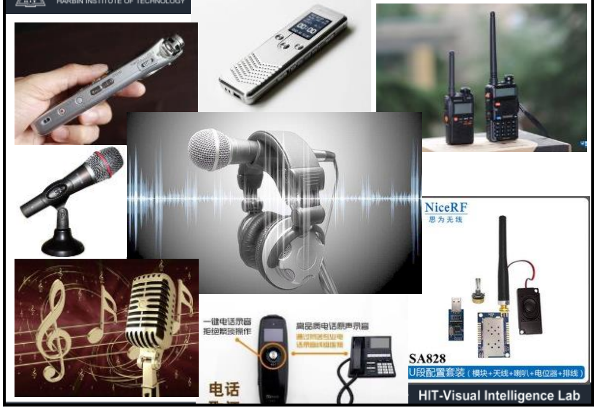
教学要求

1. 掌握信号与系统的定义、关系
2. 掌握信号种类、采集方式（自补）
3. 理解信号表达与编码方法及其应用

HIT-Visual Intelligence Lab

哈尔滨工业大学 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

11



HIT-Visual Intelligence Lab

哈尔滨工业大学 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

12

HIT-Visual Intelligence Lab

1. 部分

内容提要

- 信号的概念、描述、分类
- 典型信号介绍
- 信号的基本运算
- 信号处理的目的、步骤
- 信号的分解

信号的概念

信号是反映（或载有）信息的各种物理量，是【系统】可以进行加工、变换的对象。

信号是信息的表现形式，信息则是信号的具体内容。

- 自然和物理信号
  - 例如：语音、图像、地震信号、生理信号等
- 人工产生的信号
  - 例如：雷达信号、通讯信号、医用超声信号、机械探伤信号等

信号描述方法

数学描述：

- 使用具体的数学表达式，把信号描述为一个或若干个自变量的函数或序列的形式。

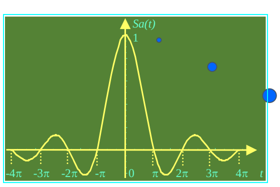
$f(t) = \sin(t)$

因此，常可将“信号”与“函数”和“序列”等同起来

$x(n) = a^n u(n)$ $\quad f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$

信号描述方法

- 波形描述
  - 按照函数随自变量的变化关系，把信号的波形画出来。



$Sa(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$

信号描述方法

- 信号的特征

•时间特性

- 信号表现出一定波形的时间特性，如出现时间的先后、持续时间的长短、重复周期的大小及随时间变化的快慢等。

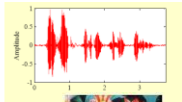
•频率特性

- 任意信号在一定条件下总可以分解为许多不同频率的正弦分量，即具有一定的频率成分。信号的频谱分析就是研究信号的频率特性。

信号的分类

可根据自变量个数多少分——

- **一维：语音 $f(t)$**
- **多维**
  - **二维：图像 $f(x, y)$**
  - **三维：视频 $f(x, y, t)$**
  - **四维：电磁波 $f(x, y, z, t)$….**



信号的分类

确定信号与随机信号 ——①信号函数表达式确定性

要点： 给定的自变量的值，是否可以唯一确定信号的取值。

区分方法：任意给定一个自变量的值，如果可以唯一确定其信号和取值，则该信号是确定信号，否则，如果取值是不确定的随机值，则是随机信号。

周期信号与非周期信号 ——②周期性

要点： 关系式是否成立？ $f(t)=f(t+T), \quad \forall t\in R$

周期信号的周期（正值）： 最小T值

非周期信号可以视为是周期无穷大的周期信号。

信号的分类

时间连续信号与时间离散信号——③时间函数取值连续性

- **连续时间**
  - **模拟：连续幅度**
  - **离散幅度**
- **离散时间**
  - **抽样：连续幅度**
  - **数字：离散幅度**

模拟信号 → 抽样 → 抽样信号 → 量化 → 数字信号

A/D转换

信号的分类

时间连续信号与时间离散信号——③时间函数取值连续性

信号的自变量是否在所讨论的整个连续区间内都有定义？

定义域连续？ —NO→ 时间离散信号（通常被称为"序列"）

定义域连续？ —YES→ 时间连续信号

模拟信号、抽样信号与数字信号

模拟信号的定义域和值域都有是连续的；

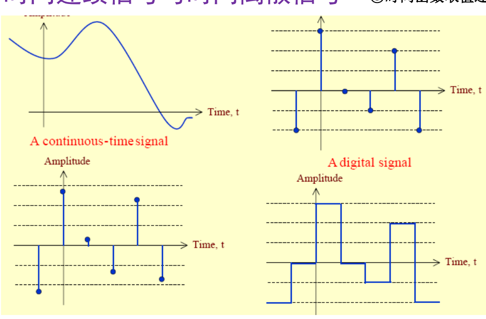
抽样信号的定义域离散而值域连续；

数字信号在定义域和值域都是离散的。

——计算机特别适合于处理数字信号

信号的分类

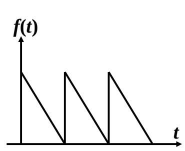
时间连续信号与时间离散信号——③时间函数取值连续性



信号的分类

时间连续信号与时间离散信号——③时间函数取值连续性

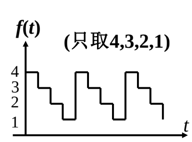
[例1]：信号类型



（a）

连续时间信号

模拟信号



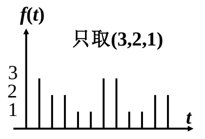
（b）

连续时间离散幅度信号

信号的分类

时间连续信号与时间离散信号——③时间函数取值连续性

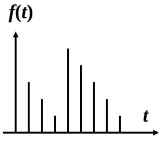
[例1]：信号类型



（c）

离散时间信号

数字信号



（d）

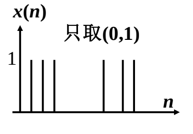
离散时间信号

抽样信号

信号的分类

时间连续信号与时间离散信号——③时间函数取值连续性

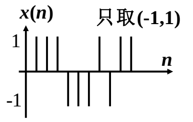
[例1]：信号类型



（e）

离散时间信号

数字信号



（f）

离散时间信号

数字信号

信号的分类

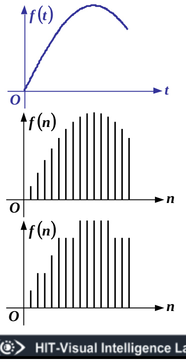
- 模拟信号：时间和幅值均为连续的信号。

抽样

- 抽样信号：时间离散的，幅值连续的信号。

量化

- 数字信号：时间和幅值均为离散的信号。



信号的分类

因果信号与非因果信号——④

如果信号在时间零点之前，取值为零，则称为因果信号。

表示信号在过去时间内不可能发生（取值为零）！

若信号**仅**在过去（时间零点之前）有非零值，则称为**反**因果信号。

不是因果信号，就是非因果信号，信号在时间零点之前有非零值。

实值信号与复值信号——⑤

如果信号的取值是实数，则称为实值信号，简称实信号。

如果信号的取值是复数，则称为复值信号，简称复信号。

复信号是为了研究方便而引入的

信号的分类

能量信号与功率信号 ——⑥

定义信号的能量为：

连续时间信号 $E[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2dt$

离散时间信号 $E[f(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f(n)\|^2$

定义信号的功率为：

连续时间信号 $P[f(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\|f(t)\|^2dt$

离散时间信号 $P[f(n)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\|f(n)\|^2$

如果信号的能量是有限的，则称为能量有限信号，简称能量信号。

如果信号的功率是有限的，则称为功率有限信号，简称功率信号。

信号的表示

- **常见音视频数据文件格式**

语音格式文件有wmv,mp3,mp4,dat,rm,avi等。

图像格式最常见的有，JPG格式，也可能是JPEG格式，还有PNG、GIF等格式，甚至BMP格式。

相对于PNG等格式来说，JPG格式的体积相对较小。

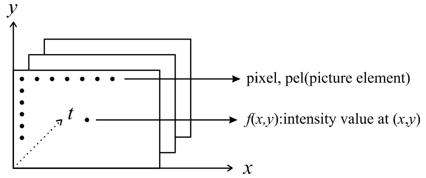
JPEG，全称为“Joint Photographic Experts Group”，翻译成中文，则是“联合图像专家小组”，这是一个成立于1986年的组织，1992年，该组织发布了“JPEG标准”，这是一种针对图像的压缩而制定的标准。

使用JPEG标准压缩的图片文件，被称为“JPEG文件”，这种文件的扩展名通常是JPG、JPEG、JPE、JFIF以及JIF，在这些文件格式中，以JPG的使用最为广泛。

JPEG，采用YCbCr模型。取样的比例可以是4:4:4（无缩减取样）、4:2:2（在水平方向2的倍数中取样）和4:2:0（在水平方向和垂直方向的2的倍数中取样），其中，以4:2:0最为常见。

信号的表示

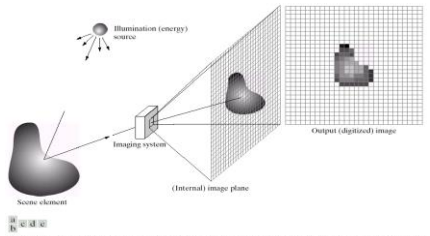
- 二维信号表示



- picture size ⇒ picture resolution ； 256×256, 512×512
- $0 \leq f(x,y) \leq L(=255)$ ； gray level, 8bit/pixel
- (x,y) ; spatial coordinate
- t ; temporal coordinate

信号的表示

- 二维信号表示

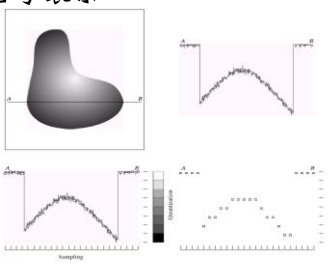


a b c d e

FIGURE 2.15 An example of the digital image acquisition process. (a) Energy ("illumination") source. (b) An element of a scene. (c) Imaging system. (d) Projection of the scene onto the image plane. (e) Digitized image.

信号的表示

- 二维信号表示

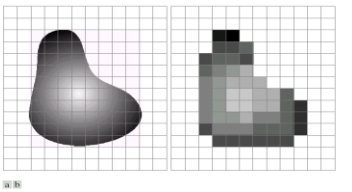


a b
c d

FIGURE 2.16 Generating a digital image. (a) Continuous image. (b) A scan line from A to B in the continuous image, used to illustrate the concepts of sampling and quantization. (c) Sampling and quantization. (d) Digital scan line.

信号的表示

- 二维信号表示



a b

FIGURE 2.17 (a) Continuos image projected onto a sensor array. (b) Result of image sampling and quantization.

信号描述方法

- 二维信号表示

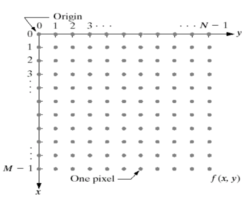


FIGURE 2.18 Coordinate convention used in this book to represent digital images.

信号的表示

- 二维信号表示

$$f(x,y)=\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N-1) \\ \vdots & & & \\ f(M-1,0) & \cdots & \cdots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix} \quad ;\ M\times N \text{ matrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,N-1} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{M-1,0} & \cdots & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix} \quad ;\ a_{ij}=f(x=i, y=j)$$

信号的表示

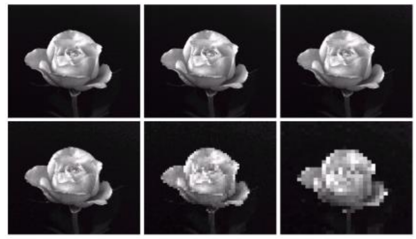
- 二维信号表示

FIGURE 2.19 A 1024 × 1024, 8-bit image subsampled down to size 32 × 32 pixels. The number of allowable gray levels was kept at 256.

Spatial resolution

信号的表示

- 二维信号表示

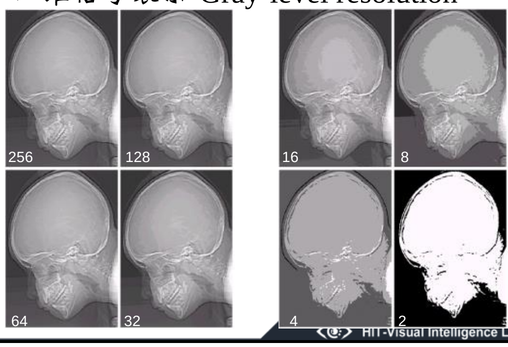


a b c
d e f

FIGURE 2.20 (a) 1024 × 1024, 8-bit image. (b) 512 × 512 image resampled into 1024 × 1024 pixels by row and column duplication. (c) through (f) 256 × 256, 128 × 128, 64 × 64, and 32 × 32 images resampled into 1024 × 1024 pixels.

信号的表示

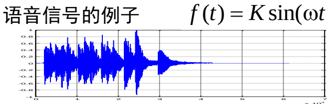
- 二维信号表示 Gray-level resolution



信号的表示

- 信号——

语音信号的例子 $f(t) = K\sin(\omega t + \theta)$



$\sum_{i=1}^{N} A_i \sin\{2\pi u_i t + \theta_i\}$

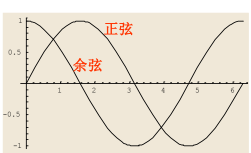
心电图（ECG）信号的例子

典型信号

- 正余弦信号：

正弦信号 $f(t) = K\sin(\omega t + \theta)$

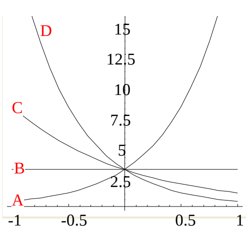
余弦信号 $f(t) = K\cos(\omega t + \theta)$



说明：
(1) K为振幅
(2) ω为角频率
(3) θ为初相位

典型信号

- 指数信号： $f(t) = Ke^{\alpha t}$



参数α
- 符号
  - 正号 信号增强A
  - 0 直流信号B
  - 负号 信号衰减CD
- 绝对值
  - 大 变化速度快D
  - 小 变化速度慢C

微分或积分后还是指数信号

典型信号

• 复指数信号： $f(t)=Ke^{st}$

指数因子 s 是复数

欧拉公式

$$\begin{cases} e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\omega t=\dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin\omega t=\dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases}$$

复指数信号与正余弦信号之间的关系

$$f(t)=Ke^{st}=Ke^{(\sigma+j\omega)t}$$
$$=Ke^{\sigma t}\cdot e^{+j\omega t}$$
$$=Ke^{\sigma t}\cdot(\cos\omega t+j\sin\omega t)$$
$$=\left(Ke^{\sigma t}\cos\omega t\right)+j\left(Ke^{\sigma t}\sin\omega t\right)$$

典型信号

• 复指数信号： $f(t)=Ke^{st}=Ke^{\sigma t}\cos\omega t+jKe^{\sigma t}\sin\omega t$

一个复指数信号可以分解成为实、虚两部分。其中，实部包含余弦信号，虚部则为正弦信号。

指数因子实部 σ 表征了正弦与余弦函数振幅随时间变化的情况：

若 $\sigma>0$，正弦、余弦信号是增幅振荡；

若 $\sigma<0$，正弦、余弦信号是衰减振荡。

指数因子虚部 ω 则表示正弦与余弦信号的角频率。

几个特殊情况：

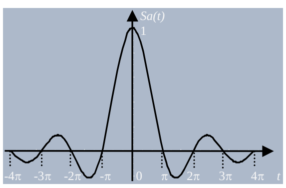
☆ 当 $\sigma=0$，即 s 为虚数，则正弦、余弦信号是等幅振荡；

☆ 当 $\omega=0$，即 s 为实数，则复指数信号成为一般的指数信号；

☆ 当 $\sigma=0$ 且 $\omega=0$，即 s 等于零，则复指数信号的实部与虚部都与时间无关，成为直流信号。

典型信号

• Sa函数： $Sa(t)=\dfrac{\sin t}{t}$



特点：

(1) Sa函数是偶函数

(2) 过零区间宽度

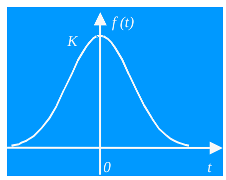
(3) Sa函数过零位置

$$\int_{-\infty}^{\infty}Sa(t)dt=\pi \longrightarrow \int_{-\infty}^{0}Sa(t)dt=\int_{0}^{\infty}Sa(t)dt=\frac{\pi}{2}$$

典型信号

• 高斯信号：

$$f(t)=Ke^{-(t/\tau)^2}$$



特点：

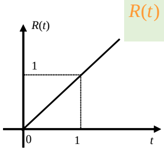
(1) 形状象一口钟，故有时也称钟形脉冲信号

(2) 在随机信号分析中有重要地位

奇异信号

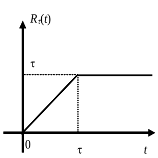
• 单位斜变信号 $R(t)$：

$$R(t)=\begin{cases}0, & t<0 \\ t, & t\geq 0\end{cases}$$



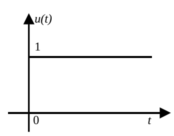
截顶的单位斜变信号：

$$R(t)=\begin{cases}0, & t<0 \\ t, & t>0 \\ \tau, & t\geq\tau\end{cases}$$



奇异信号

• 单位阶跃信号 $u(t)$： $u(t)=\begin{cases}0, & t<0 \\ 1, & t>0\end{cases}$



$$\frac{dR(t)}{dt}=u(t)$$
$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)dt$$

特点：

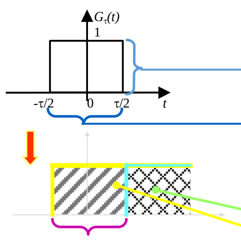
(1) 与单位斜变信号是积分/微分关系

(2) 用于描述分段信号

奇异信号

- 单位矩形脉冲信号$G_\tau(t)$：

$$G_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\le \tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$$



脉高：矩形脉冲的高度

脉宽：矩形脉冲的宽度

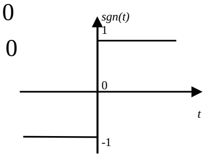
信号四则运算

$$G_\tau(t)=u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2)$$

奇异信号

- 符号函数sgn(t)： 用以表示自变量的符号特性

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$



sgn(t) + 1 = 2$u(t)$ →

sgn(t) = 2$u(t)$ - 1

奇异信号

- 单位冲激信号 $\delta(t)$

引入原因：

描述自然界中那些发生后持续时间很短的现象。

信号定义： ⟵ 非常规的定义方法

设信号有一个总的冲激强度，它在整个时间域上的积分等于该强度值，而在除冲激点之外的其他点的函数取值为零。

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=0\ \ (t\ne 0)\end{cases}$$

狄拉克定义式

奇异信号

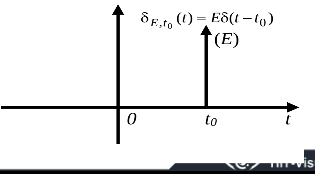
- 单位冲激信号 $\delta(t)$

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=0\ \ (t\ne 0)\end{cases}$$

波形表示：

在冲激点处画一条带箭头的线，线的方向和长度与冲激强度的符号和大小一致。

冲激点在t_0、强度为E的冲激信号



奇异信号

- 单位冲激信号 $\delta(t)$ 函数的性质：

1 **对称性**： 冲激函数是偶函数

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

2 **时域压扩性**： $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\ \ (a\ne 0)$

3 **抽样特性☆**： $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$ ⟵ 也称“筛选特性”

4 **积分**：

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=1\ \ (t>0)$$
$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=0\ \ (t<0)$$

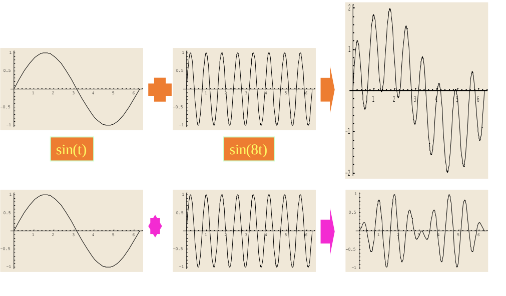
→ $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$

信号运算

四则运算：四则运算后的信号在任意一点的取值定义为原信号在同一点处函数值作相同四则运算的结果

加法

乘法



信号运算

冲激信号 —加法→ 冲激串 ; 冲激串 + 连续信号 —乘法→ 抽样信号

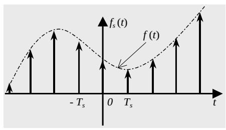
冲激串: $\Delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$

—用途→ 产生抽样信号

抽样信号的产生方法

$f_s(t)=f(t)\cdot\Delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$

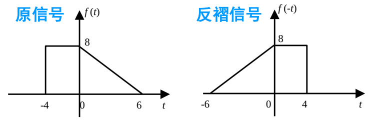
抽样信号波形表示



波形变换

反褶运算：

$f(t)\longrightarrow f(-t)$



将原信号 $f(t)$ 的波形 按纵轴对称翻转 过来。

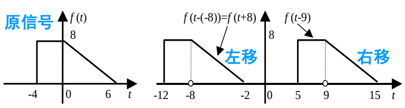
波形变换

时移运算

$f(t)\longrightarrow f(t-b)$

参数b决定平移方向和位移量

$b>0$：右移　$b<0$：左移



将原信号$f(t)$的波形 沿横轴平移 b个单位。

波形变换

压扩运算 (也被称为尺度变换)

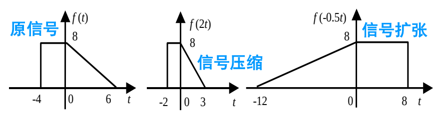
$f(t)\longrightarrow f(at)$

参数a的符号控制是否先要反褶?

>0：不需反褶　<0：需要反褶

参数a的绝对值控制是压缩还是扩张?

>1：压缩　<1：扩张 ← 倍数为$1/|a|$



信号运算

数学运算：

$f(t)$ → 微分运算 → $\frac{d}{dt}[f(t)]$

$f(t)$ → 积分运算 → $\int_{-\infty}^{t}f(t)$

连续进行 →

连续n次微分 $\left(\frac{d}{dt}\right)^n$

连续n次积分 $\left(\int_{-\infty}^{t}dt\right)^n$

卷积运算

定义：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

性质：

交换律　$f_1*f_2=f_2*f_1$　卷积积分的次序可以交换

(通过变换积分变量来证明)

分配律　$f_1*(f_2+f_3)=f_1*f_2+f_1*f_3$　用于并联系统的分析

(利用积分运算的线性性来证明)

卷积运算

结合律 $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$

证明：

用于串联系统的分析

$$((f_1 * f_2) * f_3)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\tau-\lambda)d\lambda\right] f_3(t-\tau)d\tau \quad \text{（卷积定义）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\tau-\lambda) f_3(t-\tau)d\lambda d\tau \quad \text{（二重积分）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau-\lambda) f_3(t-\tau)d\tau\right]d\lambda \quad \text{（变换积分次序）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_3(\underline{t-\lambda}-\tau)d\tau\right]d\lambda \quad \text{（变量替换）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)[(f_2 * f_3)(t-\lambda)]d\lambda \quad \text{（定义）}$$

$$= (f_1 * (f_2 * f_3))(t) \quad \text{（定义）}$$

卷积运算

☆函数与单位冲激函数的卷积

$$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$$

一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数**平移**到单位冲激函数的冲激点位置。

——亦称单位冲激函数的**搬移特性**

证明：

$$f(t) * \delta(t-t_0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0) f(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0) f(t-t_0)d\tau$$

$$= f(t-t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0)d\tau$$

$$= f(t-t_0)$$

卷积运算

单位冲激信号**搬移特性**的应用：

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f_1(t) * f_2(t-t_1-t_2)$$

证明：

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2)$$

$$= (f_1(t) * \delta(t-t_1)) * (f_2(t) * \delta(t-t_2))$$

$$= f_1(t) * f_2(t) * \delta(t-t_1-t_2)$$

$$= f_1(t-t_1-t_2) * f_2(t)$$

$$= f_1(t) * f_2(t-t_1-t_2)$$

卷积运算

卷积的微分：

两个信号卷积的微分等于其中任一信号的微分与另一信号卷积。

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \left[\frac{d}{dt} f_2(t)\right] = \left[\frac{df_1(t)}{dt}\right] * f_2(t)$$

证明：

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)]$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau \quad \text{（定义）}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\left(\frac{d}{dt} f_2(t-\tau)\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\left(\frac{df_2}{dt}\right)(t-\tau)d\tau \quad \text{（交换微分、积分顺序）}$$

$$= \left(f_1 * \frac{df_2}{dt}\right)(t) \quad \text{（定义）}$$

卷积运算

卷积的积分：

两个信号卷积的积分等于其中任一信号的积分与另一信号的卷积。

$$\int_{-\infty}^{t} (f_1 * f_2)(\lambda)d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)d\lambda = \left(\int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)d\lambda\right) * f_2(t)$$

→ $f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda$ 一个函数与单位阶跃函数的卷积等于该函数的积分。

证明：

$$f(t) * u(t)$$

$$= f(t) * \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(t) * \delta(t)dt \quad \text{← 卷积的积分特性}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(t)dt \quad \text{← 冲激函数的搬移特性}$$

卷积运算

应用类似的推演可以导出卷积的高阶导数或多重积分之运算规律

$$(f_1 * f_2)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t)$$

上式中的 m、n 及 $n-m$ 取正整数时为导数的阶次，而取负整数时为重积分的次数。

相关运算

相关运算：

$$R_{f_1f_2}(t)=R\big(f_1(t),f_2(t)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau+t)f_2^*(\tau)d\tau$$

$$R_{f_2f_1}(t)=R\big(f_2(t),f_1(t)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)f_1^*(\tau-t)d=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau+t)f_1^*(\tau)d\tau$$

→ $R_{f_1f_2}(t)=R_{f_2f_1}^*(-t)$ 即相关与次序有关

相关与卷积的关系 $R_{f_2f_1}(t)=f_1^*(-t)*f_2(t)$

相关运算

自相关（函数自身求相关）：

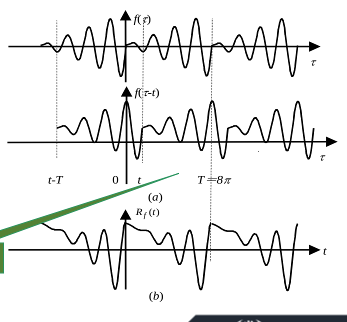
$$R_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)f^*(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau+t)f^*(\tau)d\tau$$

→ 实函数的自相关是偶函数

→ 周期函数的相关函数总是在周期的整数倍nT处取得最大值。

相关运算

用自相关函数检测准周期信号的准周期



t 是平移量

信号处理及目的

信号处理

对信号进行提取、变换、分析和综合等处理过程的统称。

信号处理的目的

去伪存真　去除信号中冗余的和次要的成分。

特征抽取　把信号变成易于进行分析和识别的形式。

编码解码　把信号变成易于传输、交换与存储的形式（编码），或从编码信号中恢复出原始信号（解码）。

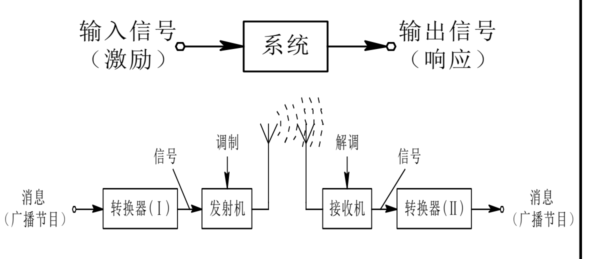
数字信号处理步骤

模数转换ADC → 数字信号处理DSP → 数模转换DAC

- 模数转换ADC：自变量(时间)和幅值同时离散化
- 数字信号处理DSP：变换域分析、数字滤波、识别、合成
- 数模转换DAC：数字信号还原为模拟信号

保证信息不丢失的理论基础是：采样定理

系统的概念



系统的概念

系统是若干相互作用和相互依赖的事物所组成的具有特定功能的整体。

系统、电路（网络）： $e(t) \to \boxed{\quad} \to r(t)$

系统强调功能与特性，关心全局；

电路强调结构与参数，关心局部

广义系统分类：

物理/非物理；自然/人工

系统的分类

①
- 连续时间系统 $e(t) \to \boxed{\quad} \to r(t)$ 微分方程
- 离散时间系统 $x(n) \to \boxed{\quad} \to y(n)$ 差分方程
- 混合系统 $e(t) \to \boxed{\quad} \to y(n)$ $x(n) \to \boxed{\quad} \to r(t)$

②
- 即时系统：输出决定于同时刻输入
  R 代数方程
- 动态系统：输出与历史输入有关
  L, C 微分、差分方程

③
- 集总参数：只含集总参数元件
  R, L, C 微分方程
- 分布参数：含有分布参数元件
  传输线、波导 偏微分方程

系统的分类

④
- 线性系统：叠加性、均匀性
  $e_1(t) \to \boxed{\quad} \to r_1(t)$
  $e_2(t) \to \boxed{\quad} \to r_2(t)$
  $\Rightarrow a_1e_1(t)+a_2e_2(t) \to \boxed{\quad} \to a_1r_1(t)+a_2r_2(t)$
- 非线性系统

⑤
- 时变：参数随时间变化
- 时不变：参数不随时间变化
  $e(t) \to \boxed{\quad} \to r(t) \Rightarrow e(t-t_0) \to \boxed{\quad} \to r(t-t_0)$

系统的分类

⑥
- 因果：输出变化出现在输入变化之后
  $t = t_0$时刻输出只与 $t = t_0$及 $t < t_0$
  时刻输入有关，如 $r(t) = e(t-1)$
- 非因果：反之，如 $r(t) = e(t+1)$

⑦
- 稳定：有界输入 $\Rightarrow$ 有界输出
  $|e(t)| \le M \Rightarrow |r(t)| \le K \quad -\infty < t < +\infty$
- 不稳定

系统的分类

⑧
- 可逆：不同激励 $\Rightarrow$ 不同响应
  如 $r(t) = 5e(t)$
- 不可逆：不同激励 $\Rightarrow$ 相同响应
  如 $r(t) = e^2(t)$

$e_1(t) \to \boxed{系统} \to r_1(t) \to \boxed{逆系统} \to e_2(t)=e_1(t)$

系统的分类

线性时不变系统(Linear Time Invariant-LTI系统)：

① 满足叠加性：
$e_1(t) \to r_1(t) \quad e_2(t) \to r_2(t) \Rightarrow$
$e_1(t)+e_2(t) \to r_1(t)+r_2(t)$
} 线性

② 满足均匀性：
$e(t) \to r(t) \Rightarrow ae(t) \to ar(t)$

③ 满足时不变特性：
$e(t) \to r(t) \Rightarrow e(t-t_0) \to r(t-t_0)$

系统的分类

④ 满足微（积）分特性：

$$e(t) \to r(t) \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} \to \frac{dr(t)}{dt}$$

$$e(t) \to r(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau \to \int_{-\infty}^{t} r(\tau)d\tau$$

⑤ 因果特性：

若$t < t_0$不存在激励，且t_0起始状态为0，则线性常系数微分方程描述的系统满足因果性，即：线性时不变系统未必就满足因果性。

系统分析

$e(t)$ √ → 系统 √ → $r(t)$ ？

系统分析：已知$e(t)$和系统，求响应$r(t)$

①步骤

i) 建数学模型：用框图或数学表达式描述

ii) 解数学模型：已知数学模型或输入激励

②方法

i) 描述方法：输入—输出描述法、状态变量描述法

ii) 求解方法：时域（经典、卷积、数值）和变换域（频域、复频域、Z域、FFT）

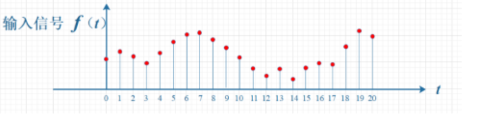
iii) 非线性方法（人工神经网、遗传算法、模糊理论）

参考文献

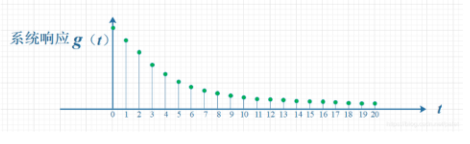
- Alanv. Oppenheim (刘树棠 译),《信号与系统》，西安交通大学出版社
- 王宝祥,《信号与系统》，电子工业出版社
- 郑君里《信号与系统》，高等教育出版社
- 余成波，陶红艳，《信号与系统》，清华大学出版社

卷 积

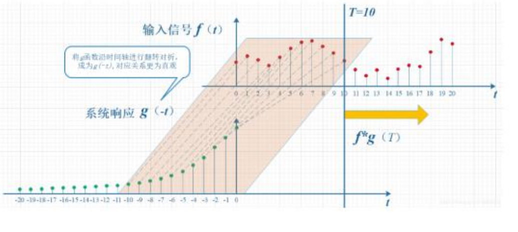
鼓点信号：



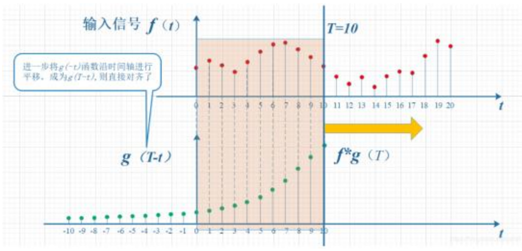
卷 积



卷 积

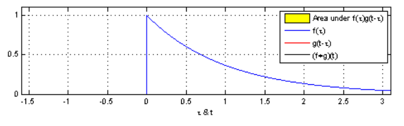


卷 积



卷 积

$$(f*g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau。$$



卷 积

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx = A$$

卷积定义的解释：

δ脉冲激励函数 $\xrightarrow{\text{系统}}$ g(t)脉冲响应函数

$f(x)$ 激励函数 $\xrightarrow{\text{系统}}$ 各激励在 τ时刻的响应总和

各个小脉冲在 τ时刻的响应总和

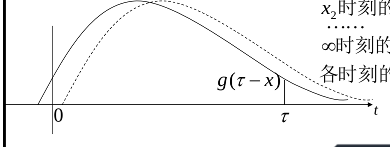
x_1时刻的小脉冲的响应 $g(\tau - x_1)$

x_2时刻的小脉冲的响应 $g(\tau - x_2)$

…… ……

∞时刻的小脉冲的响应 $g(\tau - \infty)$

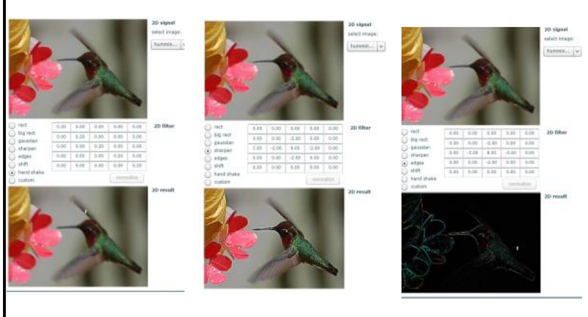
各时刻的小脉冲的响应$\int$



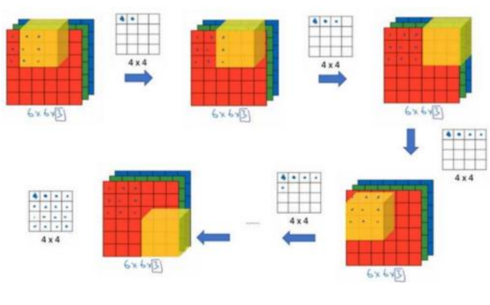
卷 积

3_0	3_1	2_2	1	0
0_2	0_2	1_0	3	1
3_0	1_1	2_2	2	3
2	0	0	2	2
2	0	0	0	1

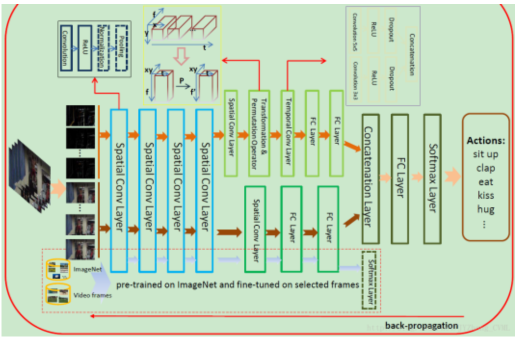
12.0	12.0	17.0
10.0	17.0	19.0
9.0	6.0	14.0



卷 积



卷 积



信号分解

信号
- 直流分量+交流分量
- 偶分量+奇分量
- 实部分量+虚部分量
- 脉冲分量
- 正交分量

分解结果是唯一的

信号分解

信号的直流分量 $f_{DC}(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ 信号的均值

信号的交流分量 $f_{AC}(t)=f(t)-f_{DC}(t)$

信号的偶分量 $f_e(t)=Ev[f(t)]=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$

信号的奇分量 $f_o(t)=Od[f(t)]=\frac{f(t)-f(-t)}{2}$

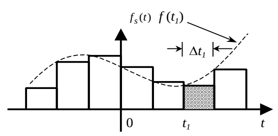
信号的实部分量 $f_r(t)=\mathrm{Re}[f(t)]=\frac{1}{2}\left(f(t)+f^*(t)\right)$

信号的虚部分量 $f_i(t)=\mathrm{Im}[f(t)]=\frac{1}{2j}\left(f(t)-f^*(t)\right)$

信号分解

信号的脉冲分量分解

信号可以近似表示为一组矩形脉冲的和的形式。



信号分解后，t_1 处宽度为Δt_1 的矩形脉冲可以表示为

$$f_{t_1}(t)=f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$$

于是原始函数可以表示为：

$$f(t)\approx\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f_{t_1}(t)$$

信号分解

正交函数：

如果在区间 (t_1, t_2) 上，函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 互不含有对方的分量，则称 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在 (t_1, t_2) 上**正交**。

函数正交的充要条件是它们的内积为0 $<f_1, f_2>=0$

函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在 (t_1,t_2) 上的内积：

$$<f_1, f_2>=\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt$$

任一函数 $f(t)$在(t_1,t_2)上可表示为正交函数集内函数的线性组合。

$$f(t)\approx\sum_{n=1}^{N} c_n g_n(t)$$

正交分量的系数

信号分解

信号正交分解的作用：

1. 方便处理 例如：旋转
2. 便于抽取特性
3. 数据压缩

信号分解

正交变换方法：

1. 傅立叶变换 **Fourier Transform**
2. 离散余弦变换 **Discrete Cosine Transform**
3. 沃尔希-哈德玛变换 **Walsh-Hadamard Transform**
4. 斜变换 **Slant Transform**
5. 哈尔变换 **Haar Transform**
6. 离散小波变换 **Discrete Wavelet Transform**
7. 离散K-L变换 **Discrete Karhunen-Leave Transform**
8. 奇异值分解SVD变换 **Singular-Value Decomposition**
9. **Z变换**

傅里叶变换

傅立叶变换

——线性系统分析中有力工具

傅氏变换在很多领域中应用很广泛，这是因为

依靠它，建立起了非常完善的线性系统理论

——通信及控制论的基础

它被移植到光学中，形成光学信息处理的基础

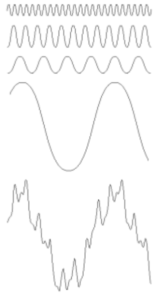
——傅氏光学

在图像、语音信号处理领域，

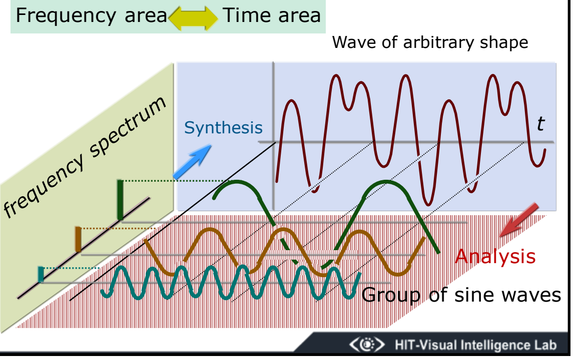
傅氏变换和线性系统理论是进行信号恢复和重构的重要手段。

信号分解

傅氏变换是将信号分解为



傅里叶变换



傅里叶变换

📖一.一维傅立叶变换

令 $f(x)$为实变量x的连续函数，$f(x)$的傅立叶变换定义如下式，并记为 $\Im$ 。

$$\Im\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx=F(u) \quad 其中\ j^2=-1$$

傅立叶的反变换（the inverse Fourier's transform）定义为下式：

$$\Im^{-1}\{F(u)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{j2\pi ux}du=f(x)$$

——傅立叶变换对（the Fourier transform pair）

傅里叶变换

📖一.一维傅立叶变换

另一种形式

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

关系 $\omega=2\pi u, \qquad t=x$

傅里叶变换

$f(x) \rightarrow F(u)$

实　　复

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

$$= |F(u)|\, e^{j\phi(u)} \text{——指数形式}$$

模： $|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$

也称幅度函数，傅立叶谱，频谱

相角： $\phi(u) = tan^{-1}[I(u)/R(u)]$

傅里叶变换

$f(x)$ 的能量谱 $E(u)$ 为：

$$E(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

又称功率谱 $P_f(u)$(Power spectrum)

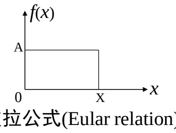
$$P_f(u) = \Im\{R_f(\tau)\} = \Im\{f(t) * f(-t)\}$$

$$= F(u)F(-u)$$

$$= |F(u)|^2$$

傅里叶变换

例1. 简单函数$f(x)$如图所示:



由欧拉公式(Eular relation)可知

$$e^{-j2\pi ux} = \cos(2\pi ux) - j\sin(2\pi ux)$$

$$e^{j2\pi ux} = \cos(2\pi ux) + j\sin(2\pi ux)$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$= \int_0^X Ae^{-j2\pi ux}dx$$

$$= \frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi ux}]_0^X$$

$$= \frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi uX} - 1]$$

$$= \frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j\pi uX} - e^{j\pi uX}]e^{-j\pi uX}$$

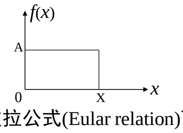
$$= \frac{-A}{j2\pi u}[-2j\sin(\pi uX)]e^{-j\pi uX}$$

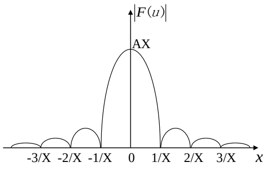
$$= \frac{A}{\pi u}\sin(\pi uX)e^{-j\pi uX}$$

$$|F(u)| = \frac{A}{\pi u}|\sin(\pi uX)| = AX\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}$$

傅里叶变换

例1. 简单函数$f(x)$如图所示:





由欧拉公式(Eular relation)可知

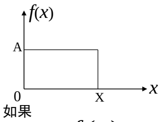
$$e^{-j2\pi ux} = \cos(2\pi ux) - j\sin(2\pi ux)$$

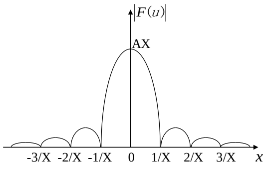
$$e^{j2\pi ux} = \cos(2\pi ux) + j\sin(2\pi ux)$$

$$|F(u)| = \frac{A}{\pi u}|\sin(\pi uX)| = AX\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}$$

傅里叶变换

例1. 简单函数$f(x)$如图所示:





如果

$$f(x) = e^{-\pi x^2}$$

则

$$F(u) = e^{-\pi u^2}$$

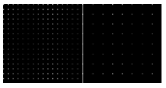
高斯函数的傅立叶变换依然是高斯函数

傅里叶变换

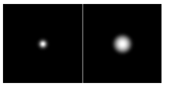
常用函数的傅立叶变换

函数	$f(t)$	$F(s)$
高斯	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi s^2}$
矩形脉冲	$\Pi(t)$	$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$
三角脉冲	$\Lambda(t)$	$\frac{\sin^2(\pi s)}{\pi s^2}$
冲激	$\delta(t)$	1
单位阶越	$u(t)$	$\frac{1}{2}[\delta(s) - \frac{j}{\pi s}]$
余弦	$\cos(2\pi ft)$	$\frac{1}{2}[\delta(s+f) + \delta(s-f)]$
正弦	$\sin(2\pi ft)$	$j\frac{1}{2}[\delta(s+f) - \delta(s-f)]$
复指数	$e^{j2\pi ft}$	$\delta(s-f)$

傅里叶变换

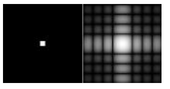


Left: Impulses, Right: its DFT



Left: Gaussian, Right: its DFT

Left: Sine wave, Right: its DFT



Left: small square, Right: its DFT

傅里叶变换

二. 双变量函数$f(x,y)$的FT (二维FT)

- 一维连续的**FT**可以很容易推广到二维连续的**FT**。

$$\Im\{f(x,y)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy=F(u,v)$$

$$\Im^{-1}\{F(u,v)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dxdy=f(x,y)$$

其中 u,v 是频率变量.

$F(x,y)$的傅立叶谱: $|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$

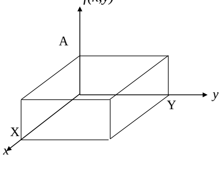
相位$\phi(u,v)$ $\phi(u,v)=\tan^{-1}[I(u,v)/R(u,v)]$

能量谱$E(u,v)$: $E(u,v)=R^2(u,v)+I^2(u,v)$

傅里叶变换

例2 给定二维函数 $f(x,y)$ 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}A & \text{当 } 0\le x\le X\text{时},\ 0\le y\le Y\text{时}\\ 0 & \text{当 } x>X;x<0\text{时},\ y>Y;y<0\text{时}\end{cases}$$



傅里叶变换

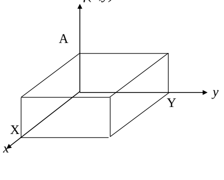
$$\begin{aligned}F(u,v)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy\\&=A\int_0^X e^{-j2\pi ux}dx\int_0^Y e^{-j2\pi vy}dy\\&=A[\frac{e^{-j2\pi ux}}{-j2\pi u}]_0^X[\frac{e^{-j2\pi vy}}{-j2\pi v}]_0^Y\\&=\frac{A}{-j2\pi u}[e^{-j2\pi uX}-1]\cdot\frac{A}{-j2\pi v}[e^{-j2\pi vY}-1]\\&=AXY[\frac{\sin(\pi ux)\cdot e^{-j\pi uX}}{\pi uX}][\frac{\sin(\pi vy)\cdot e^{-j\pi vY}}{\pi vY}]\end{aligned}$$

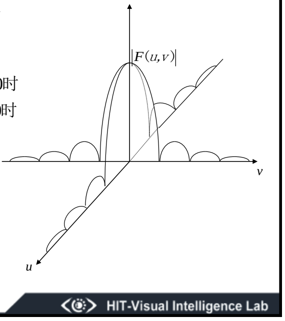
傅立叶谱: $|F(u,v)|=AXY||\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}|\cdot|\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}|$

傅里叶变换

例2 给定二维函数 $f(x,y)$ 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}A & \text{当 } 0\le x\le X\text{时},\ 0\le y\le Y\text{时}\\ 0 & \text{当 } x>X;x<0\text{时},\ y>Y;y<0\text{时}\end{cases}$$



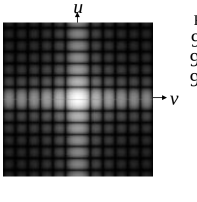


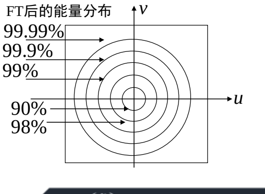
傅里叶变换

三. FT的性质

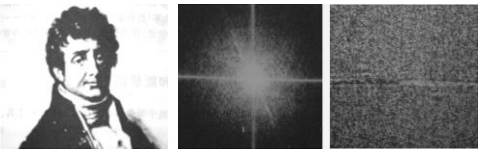
1. 振幅谱图(亮度正比于|$F(u,v)$|的幅度）
2. 能量

一般灰度图像，能量分布在整幅图上，**FT**后能量都集中在原点。另有 $F(0,0)=\bar{f}(x,y)$ 。

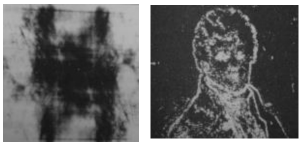




傅里叶变换



原图像	幅值谱图	相位谱图
	幅值谱图重构图像	相位谱图重构图像



傅里叶变换

3. 对称性 **symmetry properties**

(1)奇偶性

函数$f_e(x)$偶函数 $\Leftrightarrow f_e(x)=f_e(-x)$

函数$f_o(x)$奇函数 $\Leftrightarrow f_o(x)=-f_o(-x)$

函数非奇非偶，则可拆成奇、偶两部分:

$$f_e(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \qquad f_o(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

$$f(x)=f_e(x)+f_o(x)$$

傅里叶变换

$$\begin{aligned}
F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\cos(2\pi ux)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)\cos(2\pi ux)dx \\
&\quad - j\int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\sin(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)\sin(2\pi ux)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\cos(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)\sin(2\pi ux)dx \\
&= F_e(u) - jF_o(u)
\end{aligned}$$

傅氏变换的对称性列表:

a)偶分量函数在变换中产生偶分量函数;

b)奇分量函数在变换中产生奇分量函数;

c)奇分量函数在变换中引入系数-*j*;

d)偶分量函数在变换中不引入系数.

傅里叶变换

(2)虚实分量

一个复函数可表示为：

实部的偶部和奇部，虚部的偶部和奇部

傅氏变换:

a)实偶部产生一个实偶部分；

b)实奇部产生一个虚奇部分；

c)虚偶部产生一个虚偶部分；

d)虚奇部产生一个实奇部分。

通常，我们的图像是实变量函数，因此其傅氏变换为实偶部和虚奇部。因此，它具有共轭对称性。

$F(u)=F^*(-u)$ 其中*表示复共轭

傅里叶变换

4. 加法原理 **the addition theorem**

假设两个傅式变换如下:

$$\Im\{f(x)\}=F(u) \qquad \Im\{g(x)\}=G(u)$$

$$\begin{aligned}
\Im\{f(x)+g(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)+g(x)\right]e^{-j2\pi ux}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j2\pi ux}dx \\
&= F(u)+G(u)
\end{aligned}$$

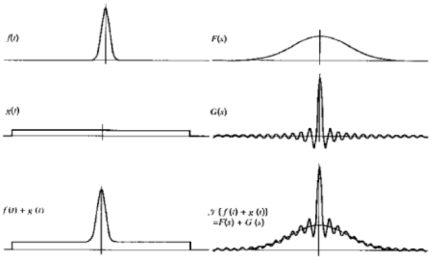
说明：(1)空域或时域中的加法，在频域中也是加法。

(2)从加法原理可得$\Im\{cf(x)\}=cF(u)$

其中c是一个比例常量(rational constant)

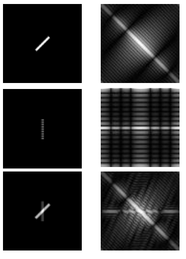
傅里叶变换

4. 加法原理 **the addition theorem**



傅里叶变换

4. 加法原理 **the addition theorem**



傅里叶变换

5. 平移原理 **the shift theorem**

$$\Im\{f(x-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-j2\pi u(x-a)}e^{-j2\pi ua}dx$$

令 $s = x - a$ 则 $ds = dx$

$$\Im\{f(x-a)\} = e^{-j2\pi ua}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j2\pi us}ds = e^{-j2\pi ua}F(u)$$

如果 $a = 0$，则系数为单位1。

结论：函数的平移不改变其傅氏变换后的模值(幅值)
只改变其实部和虚部间的能量分布。

傅里叶变换

6.卷积定理 **the convolution theorem**

一维卷积定义：

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx = A$$

卷积满足
- 交换律
- 对加法的分配律
- 结合律

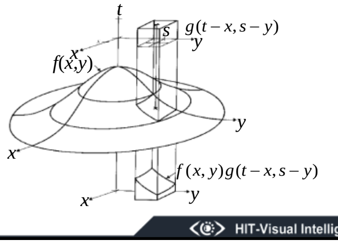
傅里叶变换

6.卷积定理 **the convolution theorem**

二维卷积定义：

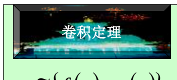
$$h(t,s) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g(t-x,s-y)dxdy$$

体积



傅里叶变换

6.卷积定理 **the convolution theorem**



$$\Im\{f(x)*g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\underline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx}\cdot e^{-j2\pi ut}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\cdot e^{-j2\pi ut}dtdx$$

$$\underline{\underline{\text{平移原理}}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}G(u)dx$$

$$= F(u)G(u)$$

$$\Im^{-1}\{F(u)G(u)\} = f(t)*g(t)$$

傅里叶变换

7. 相似性原理 **the similarity theorem**

$$\Im\{f(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-j2\pi uax/a}dx$$

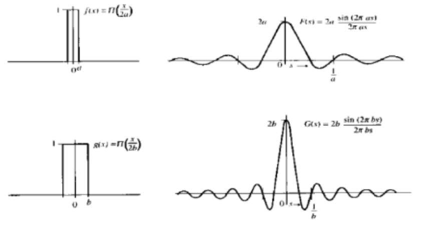
$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-j2\pi(\frac{u}{a})(ax)}d(ax)$$

$$= \frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a})$$

——展缩性质

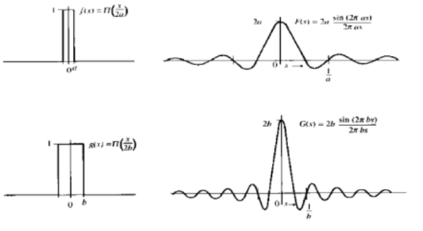
傅里叶变换

7. 相似性原理 **the similarity theorem**



傅里叶变换

7. 相似性原理 **the similarity theorem**



傅里叶变换

8. **the Rayleigh's theorem**

能量函数的定义为 $energy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$

Rayleigh's原理：$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du$

能量守衡:说明变换函数与原函数有相同的能量。

证明: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) e^{-j2\pi ux} dx \qquad (u=0)$$

$$\Im^{-1}\{f(x) f^*(x)\} = F(u) * F^*(-u) \qquad (u=0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(s) F^*(s-u) ds \qquad (u=0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(s) F^*(s) ds \qquad (u=0)$$

傅里叶变换

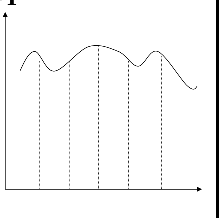
二维傅立叶变换的性质

性质	空域	频域
加法定理	$f(x,y)+g(x,y)$	$F(u,v)+G(u,v)$
相似性定理	$f(ax,by)$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert} F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$
位移定理	$f(x-a,y-b)$	$e^{-j2\pi(au+bv)} F(u,v)$
卷积定理	$f(x,y) * g(x,y)$	$F(u,v)G(u,v)$
可分离乘积	$f(x)g(y)$	$F(u)G(v)$
微分	$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)$	$(j2\pi u)^m (j2\pi v)^n F(u,v)$
旋转	$f(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$	$F(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta)$
拉普拉斯	$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$	$-4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$
Rayleigh定理	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(x,y)\rvert^2 dxdy$	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(u,v)\rvert^2 dudv$

傅里叶变换

- 四. 离散的傅立叶变换 **Discrete FT**

假设：取N个相同间隔 Δx 单位的抽样方法，将连续函数 $f(x)$离散化为一个序列：



$\{f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x), \cdots, f(x_0+(N-1)\Delta x)\}$

则有 $f(x_i) = f(x_0 + i\Delta x)$

其中 $x_0 = 0, x = 0,1,2,\cdots,N-1$

$\rightarrow \{f(0), f(1), f(2), \cdots, f(N-1)\}$

傅里叶变换

一维离散的傅立叶变换时:

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(i) e^{-j2\pi ui/N} \quad 其中\ u = 0,1,2,\cdots,N-1$$

$$f(i) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ui/N} \quad 其中\ i = 0,1,2,\cdots,N-1$$

傅氏级数展开:

$$F_n = F(n\Delta u) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-j2\pi(n\Delta ux)} dx \quad 其中T是周期，\Delta u = \frac{1}{T}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n\Delta u) e^{j2\pi(n\Delta ux)} \Delta u = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{j2\pi(\frac{n}{T}x)}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi \frac{n}{T}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi \frac{n}{T}x)$$

$$其中 a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(2\pi\frac{n}{T}x)dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(2\pi\frac{n}{T}x)dx$$

傅里叶变换

二维离散的傅立叶变换：

设 x 轴取样N点，间隔为Δx
设 y 轴取样N点，间隔为Δy

$$f(i,j)=f(i\Delta x, j\Delta y)$$

其中$\begin{cases} i=0,1,2,\cdots,M-1 \\ j=0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$

同理 $F(u,v)=F(u\Delta u, v\Delta v)$

其中$\begin{cases} u=0,1,2,\cdots,M-1 \\ v=0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$

傅里叶变换

于是，傅氏变换对：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

其中$\begin{cases} u=0,1,2,\cdots,M-1 \\ v=0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

其中$\begin{cases} x=0,1,2,\cdots,M-1 \\ y=0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$

傅里叶变换

二维离散傅氏变换的性质：

1. 可分离性

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}e^{-j2\pi ux/N}\cdot\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}$$

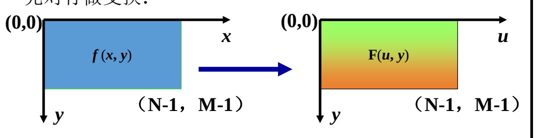
其中 $u,v=0,1,2,\cdots,N-1$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}e^{j2\pi ux/N}\cdot\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi vy/N}$$

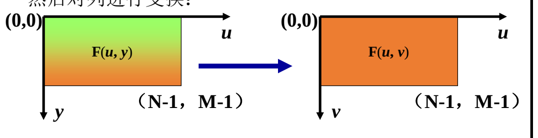
其中 $x,y=0,1,2,\cdots,N-1$

傅里叶变换

先对行做变换：

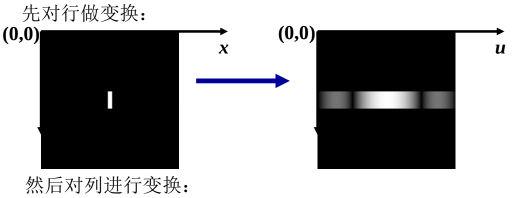


然后对列进行变换：

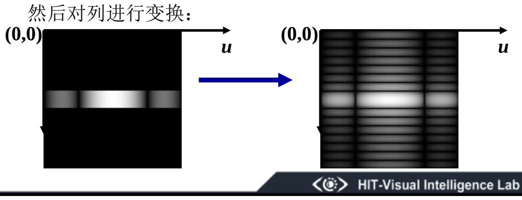


傅里叶变换

先对行做变换：



然后对列进行变换：



傅里叶变换

说明：这种可分离性的主要优点是可把二维FT分成两部，而变为一维FT处理。

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}F(x,v)e^{-j2\pi ux/N}$$

$$F(x,v)=N\cdot[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}]$$

- 2. 线性性质

$$\Im\{af(x,y)+bg(x,y)\}=a\Im\{f(x,y)\}+b\Im\{g(x,y)\}$$

其中 a, b 为常数。

傅里叶变换

3. 比例性

$$\Im\{af(x,y)\} = a\Im\{f(x,y)\} = aF(u,v)$$

$$\Im\{f(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$$

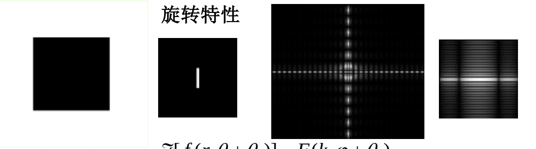
4. 周期性

离散傅氏变换及其逆变换有周期性，以N为周期重复。

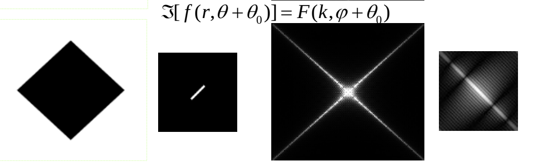
$F(u) = F(u+N)$ ——一维形式

傅里叶变换

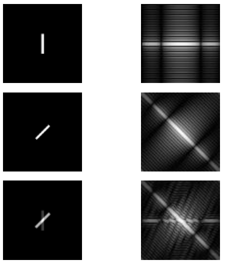
旋转特性



$$\Im[f(r,\theta+\theta_0)] = F(k,\varphi+\theta_0)$$



傅里叶变换



傅里叶变换

9. 卷积定理

Ø1. 离散卷积定义

$$f(x,y)*g(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)g(x-m,y-n)$$

其中
$$\begin{cases} x = 0,1,2,\cdots,M-1 \\ y = 0,1,2,\cdots,N-1 \\ M = A+C-1,\ f(x,y)\text{的尺寸}A\times B \\ N = B+D-1,\ g(x,y)\text{的尺寸}C\times D \end{cases}$$

➢**2.** 卷积定理

$$\Im\{f(x,y)*g(x,y)\} = F(u,v)G(u,v)$$

$$\Im\{f(x,y)g(x,y)\} = \frac{1}{MN}F(u,v)*G(u,v)$$

傅里叶变换

10. Parseval定理

——能量保持定理

连续的二维情形:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^2dxdy = \int\int_{-\infty}^{\infty}|F(u,v)|^2dudv$$

离散的二维情形:

$$\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f^2(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}|F(u,v)|^2$$

傅里叶变换

- 11. 相关

1.一维连续自相关 **autocorrelation function**

$$R_f(\tau) = f(x)*f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x+\tau)dx$$

自卷积 **self-convolution**

$$f(x)*f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(\tau-x)dx$$

2.一维连续协相关 **cross-correlation function**

$$R_{fg}(\tau) = f(x)*g(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(\tau+x)dx$$

3.二维连续协相关函数定义

$$R_{fg}(m,n) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g(x+m,y+n)dxdy$$

傅里叶变换

- 五. 快速傅立叶变换 **Fast FT**

——用共轭性质将逆离散傅立叶变换(IDFT)
变为其共轭数的正离散傅立叶变换

共轭性质:

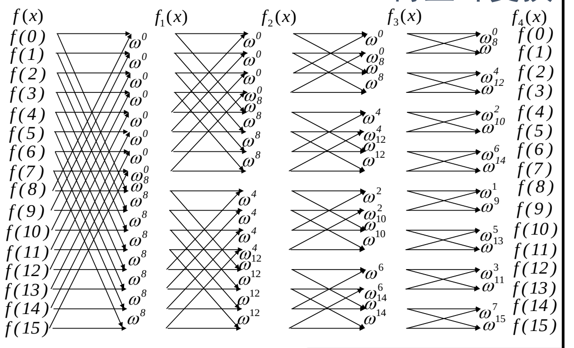
$(A+B)^* = A^* + B^*$　和数的共轭＝共轭数的和

$(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$　乘积的共轭＝共轭数的积

$x = x^*$　当x为实数时

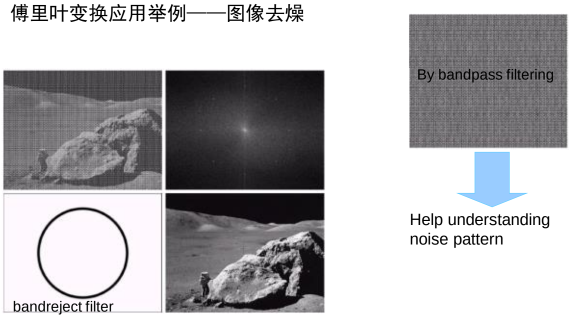
FFT　傅里叶变换

$N = 16$



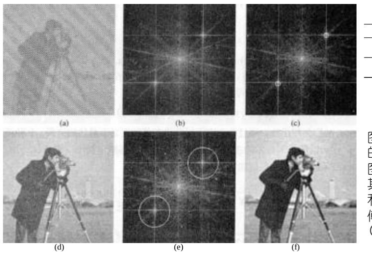
傅里叶变换

傅里叶变换应用举例——图像去燥



傅里叶变换

傅里叶变换应用举例——图像去燥



傅立叶变换

函数	$f(t)$	$F(s)$
余弦	$\cos(2\pi ft)$	$\frac{1}{2}[\delta(s+f)+\delta(s-f)]$
正弦	$\sin(2\pi ft)$	$j\frac{1}{2}[\delta(s+f)-\delta(s-f)]$

图(a)为一幅受正弦干扰模式覆盖的图像。
图(b)是(a)的傅立叶频谱幅度图，其上有一对较明显的脉冲白点。
利用带阻滤波器除掉亮点。然后取傅立叶反变换，就可得到图(d)和(f)所示的恢复效果。

Z变换

- 引入z变换的主要原因是傅里叶变换不是对所有序列都收敛，能有一个包括更广泛信号的傅里叶变换的推广形式是有用的。
- z变换把描述离散系统的差分方程，变换成代数方程，使其求解过程得到简化。这一作用类似连续时间系统的拉普拉斯变换。
- 离散时间信号的z变换和连续时间信号的拉普拉斯变换是相互对应的。

Z变换

- 1730年英国数学家棣莫弗（De Moivre）将生成函数的概念用于概率论的研究，其实这就是Z变换。
- 19世纪拉普拉斯（P.S.Laplace），20世纪沙尔（H.L.Seal）等人在这一方面继续作出了贡献。
- Z变换在当时并没有发挥多大作用

Z变换

- 到了20世纪50~60年代，控制系统和数字计算机的出现为Z变换开拓了应用的空间。
- Z变换在离散信号系统中的地位相当于拉氏变换在连续信号系统中的地位。

Z变换

- Z变换的定义

任意序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换（*DTFT*）可以表示为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

其反变换为

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

据此，序列 $x(n)$ 的z变换 $X(z)$ 定义为：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Z变换

双边 Z 变换：$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

单边 Z 变换又分右边序列和左边序列：

右边序列：$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

左边序列：$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} x(n)z^{-n}$

常用函数的傅立叶变换

函数	$f(t)$	$F(s)$
高斯	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi s^2}$
矩形脉冲	$\Pi(t)$	$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$
三角脉冲	$\Lambda(t)$	$\frac{\sin^2(\pi s)}{\pi s^2}$
冲激	$\delta(t)$	1
单位阶越	$u(t)$	$\frac{1}{2}[\delta(s) - \frac{j}{\pi s}]$
余弦	$\cos(2\pi ft)$	$\frac{1}{2}[\delta(s+f)+\delta(s-f)]$
正弦	$\sin(2\pi ft)$	$j\frac{1}{2}[\delta(s+f)-\delta(s-f)]$
复指数	$e^{j2\pi ft}$	$\delta(s-f)$

Z变换

典型序列的Z变换

1）离散冲激信号：$\delta(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1$$

2）阶跃信号：$u(n)$

$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$，采用等比序列求和公式

Z变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n} = \left.\frac{[1-(\frac{1}{z})^N]}{1-\frac{1}{Z}}\right|_{N\to\infty} = \left.\frac{z[1-(\frac{1}{z})^N]}{z-1}\right|_{N\to\infty},$$

等比无穷序列要收敛，要求后项与前项的比值的模必须小于 1，即要求$|z|>1$，有：

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Z变换

3) 斜线信号：$x(n)=nu(n)$，

根据：$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\frac{1}{1-1/z}$，$|z|>1$（前面阶跃信号 Z 变换的结果）

将等式两边分别对 z^{-1} 求导：

$\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-(n-1)}=\frac{1}{(1-1/z)^2}$，即

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}=\frac{1}{(1-1/z)^2\cdot z}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

Z变换

4）指数序列：$x(n)=a^n u(n)$，

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\left.\frac{1-(a/z)^N}{1-a/z}\right|_{N\to\infty}=\frac{z}{z-a}$$

为保证收敛要求：$|z|>|a|$

Z变换

- 此式一般是一个无穷项的和或者无穷项幂级数，其中z是复变量。也可把它看成一个算子，它将一个序列变换成为一个函数，即将序列 $x(n)$变换为函数$X(z)$，z是一个连续复变量。这称为**双边z变换**，而与此相对应的**单边z变换**的定义为：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

显然，仅当 $x(n)=0, n<0$ 时，双边和单边z变换才相等。

Z变换

$$X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{j\omega})^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x(n)r^{-n}\right]e^{-j\omega n}$$

- 比较离散时间傅里叶变换和z变换的定义，若令：$z=e^{j\omega}$ 则z变换就蜕化为离散时间傅里叶变换，即 $X(z)$变成 $X(e^{j\omega})$ 因为当序列的傅里叶变换存在时，它就是 $z=e^{j\omega}$的 $X(z)$。

r=1时

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Z变换

Z变换的收敛域

- 傅里叶变换的幂级数不是对所有序列都收敛，也就是说该无穷项之和可能不总是有限的。同样，z变换也不是对所有序列或对全部z值都收敛。
- 对给定的序列，使z变换收敛的那些z值就称为**z变换的收敛域，**缩写ROC.

Z变换

傅里叶变换的一致收敛要求序列是绝对可和的，那么z变换收敛的收敛条件为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)r^{-n}\right|<\infty$$

由于序列乘以实指数 r^{-n}，有可能傅里叶变换不存在时，z变换收敛。如阶跃序列 $x(n)=u(n)$ 不是绝对可和的，因此它的傅里叶变换不收敛。然而 $x(n)r^{-n}$ 在 $r>1$ 时是绝对可和的，这表明阶跃序列 $x(n)=u(n)$ 的z变换在收敛域$|z|>1$内存在。

Z变换

1、线性

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$， $y(n)$ 的 Z 变换为 $Y(z)$，

则：

$a \cdot x(n) + b \cdot y(n)$ 的 Z 变换为 $a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$

Z变换

2、时移

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$

则：

$x(n-m)$ 的 Z 变换为 $z^{-m} \cdot X(z)$

Z变换

3、Z域微分

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$

则：

$nx(n)$ 的 Z 变换为 $-z\dfrac{d[X(z)]}{dz}$

Z变换

4、初值定理

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$

则：

$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$

Z变换

5、终值定理

若 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$

则：

$\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1}[(z-1)X(z)]$

Z变换

逆Z变换

1、长除法

例：求 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$ 的逆变换 $x(n)$

做长除有：

$X(z)=z^{-1}+2z^{-2}+\cdots+nz^{-n}$

所以有： $x(n)=nu(n)$

可见，长除法是将 Z 变换分解成一个累加序列然后总结规律。

2、部分分式展开法

这一方法同拉氏反变换中的方法基本相同

例：求 $X(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ 的逆变换 $x(n)$

$X(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}=\dfrac{2z}{z-1}-\dfrac{z}{z-0.5}$

所以有： $x(n)=(2-0.5^n)u(n)$

Z变换

F变换应用——消除匀速直线运动模糊

例：设平面匀速运动景物图像 $f(x,y)$，采集时间是 T，并设 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 分别是景物在 x 方向和 y 方向的运动分量，由于运动造成的模糊图像为 $g(x,y)$，其它因素忽略，包括噪声，则：

Z变换

Z变换应用——消除匀速直线运动模糊

在曝光时间 T 内，像素点 0 接受的不只是 $f(0)$ 的信息，而是 N 个采样点的信息在此位置上的叠加。

$$g(0)=f(0)+f(1)+\cdots+f(N-2)+f(N-1)$$

考虑到每个采样点在CCD像素上的曝光量的贡献，上式可写为

$$g(0)=\frac{1}{N}[f(0)+f(1)+\cdots+f(N-2)+f(N-1)]$$

而在CCD像素点1上接受的信息

$$g(1)=\frac{1}{N}[f(1)+f(2)+\cdots+f(N-2)+f(N-1)+f(N)]$$

对在CCD上任意一个像素点 n 来说，

$$g(n)=\frac{1}{N}[f(n)+f(n+1)+\cdots+f(n+N-2)+f(n+N-1)]$$

Z变换

Z变换应用——消除匀速直线运动模糊

对上式进行Z变换，则有

$$G(z)=\frac{1}{N}[F(z)+F(z)z+F(z)z^2+\cdots+F(z)z^{N-1}]$$

$G(z),F(z)$ 分别是 $g(n),f(n)$ 的 Z变换。

$$G(z)=\frac{1}{N}F(z)[1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}]$$

由卷积定理得

$$H(z)=\frac{G(z)}{F(z)}=\frac{1}{N}[1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}]=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n-1}z^i$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^N}{1-z}$$

Z变换

Z变换应用——消除匀速直线运动模糊

$$\frac{G(z)}{F(z)}=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^N}{1-z}$$

$$(1-z)\cdot G(z)=\frac{1}{N}\cdot F(z)\cdot(1-z^N)$$

$$G(z)-zG(z)=\frac{1}{N}\cdot[F(z)-z^NF(z)]$$

对方程两边分别进行反 Z变换，则有

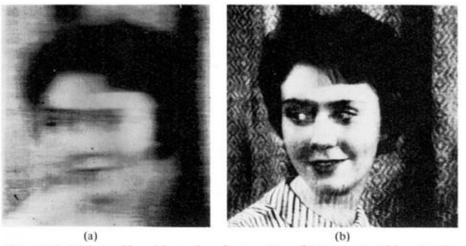
$$g(n)-g(n+1)=\frac{1}{N}\cdot[f(n)-f(n+N)]$$

$$f(n)=Ng(n)-Ng(n+1)+f(n+N)$$

Z变换

Z变换应用——消除匀速直线运动模糊

$$f(x, y) \approx A - \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{k} g'[x - ma + (k - j)a, y] + \sum_{j=0}^{m} g'(x - ja, y) \quad (5.4\text{-}36)$$



(a) (b)

Figure 5.4 (a) Image blurred by uniform linear motion; (b) image restored by using Eq. (5.4-36). (From Sondhi [1972].)

视听觉信号处理

Visual-Audio Signal Processing