计 算 方 法

实验一 Lagrange插值

姓名 孙骁

学号 1180300811

院系 计算机学院

专业 计算机系

哈尔滨工业大学

实验报告一 Lagrange插值

|  |
| --- |
| **题目**  Lagrange插值  **摘要**  给定平面上个不同的数据点，则满足条件    的次拉格朗日插值多项式    是存在唯一的。若，且函数充分光滑，则当时，有误差估计式    **前言（目的和意义）**  目的：  利用Lagrange插值多项式求近似值.  意义：  通过此次实验，使用编程语言实现Lagrange插值方法，学会使用Lagrange插值法求解函数的近似值，以解决其他科学实验中的函数估计计算问题. |
| **数学原理**  Lagrange插值问题  已知函数在上有个互异点，其函数值分别为.  记为次数的多项式集合，构造一个，满足条件. 则满足此插值条件的多项式存在且唯一. 且有    即    则Lagrange插值多项式为  .  若，在内存在阶导数，其中是包含点的一区间，则对任意给定的，总存在一点使得    称为Lagrange插值多项式的余项. 于是有Lagrange插值公式  . |
| **程序设计流程**    Lagrange插值程序流程 |
| **实验结果、结论与讨论**  **问题1：**  1.  时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | 0.75 | 0.905441810344828 | 0.64 | -0.265441810344828 | | 1.75 | 0.525799900530504 | 0.246153846153846 | -0.279646054376658 | | 2.75 | 0.00955321618037138 | 0.116788321167883 | 0.107235104987512 | | 3.75 | -0.356826094164456 | 0.0663900414937759 | 0.423216135658232 | | 4.75 | -0.159544927055703 | 0.0424403183023873 | 0.20198524535809 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | 0.75 | 0.690717622465352 | 0.64 | -0.0507176224653517 | | 1.75 | 0.232998135375749 | 0.246153846153846 | 0.013155710778097 | | 2.75 | 0.112245498272776 | 0.116788321167883 | 0.0045428228951068 | | 3.75 | 0.10840041819812 | 0.0663900414937759 | -0.0420103767043436 | | 4.75 | -0.236036984650529 | 0.0424403183023873 | 0.278477302952917 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | 0.75 | 0.641340346544816 | 0.64 | -0.00134034654481563 | | 1.75 | 0.249055752717957 | 0.246153846153846 | -0.00290190656411057 | | 2.75 | 0.128218767039017 | 0.116788321167883 | -0.0114304458711337 | | 3.75 | 0.190261670108915 | 0.0663900414937759 | -0.123871628615139 | | 4.75 | 6.41503206147495 | 0.0424403183023873 | -6.37259174317256 |   2.  时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.386293875908856 | 0.386741023454501 | 0.000447147545645177 | | -0.05 | 0.951334527877977 | 0.951229424500714 | -0.000105103377262772 | | 0.05 | 1.05116423974907 | 1.05127109637602 | 0.000106856626955754 | | 0.95 | 2.58632252991597 | 2.58570965931585 | -0.000612870600124715 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.386741026580096 | 0.386741023454501 | -3.12559478299335e-09 | | -0.05 | 0.951229424555521 | 0.951229424500714 | -5.48073808559479e-11 | | 0.05 | 1.05127109643133 | 1.05127109637602 | -5.53064261055169e-11 | | 0.95 | 2.58570966303014 | 2.58570965931585 | -3.71429642598287e-09 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.386741023454198 | 0.386741023454501 | 3.03701508386212e-13 | | -0.05 | 0.951229424500714 | 0.951229424500714 | 0 | | 0.05 | 1.05127109637602 | 1.05127109637602 | -4.44089209850063e-16 | | 0.95 | 2.58570965931524 | 2.58570965931585 | 6.02184968556685e-13 |   **问题2：**  1.  时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.5135525 | 0.525624178712221 | 0.0120716787122208 | | -0.05 | 0.9977525 | 0.997506234413965 | -0.0002462655860348 | | 0.05 | 0.9977525 | 0.997506234413965 | -0.000246265586035022 | | 0.95 | 0.5135525 | 0.525624178712221 | 0.0120716787122207 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.524273974664652 | 0.525624178712221 | 0.00135020404756836 | | -0.05 | 0.997464701884015 | 0.997506234413965 | 4.15325299498726e-05 | | 0.05 | 0.997464701884015 | 0.997506234413965 | 4.15325299498726e-05 | | 0.95 | 0.524273974664649 | 0.525624178712221 | 0.00135020404757136 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.525631201741019 | 0.525624178712221 | -7.02302879829197e-06 | | -0.05 | 0.997506234361833 | 0.997506234413965 | 5.21316323442989e-11 | | 0.05 | 0.997506234361834 | 0.997506234413965 | 5.21315213219964e-11 | | 0.95 | 0.525631201740544 | 0.525624178712221 | -7.0230283230055e-06 |   2.  时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -4.75 | -1.93214926360277 | 0.00865169520312063 | 1.94080095880589 | | -0.25 | 1.4275370211018 | 0.778800783071405 | -0.648736238030395 | | 0.25 | 0.588185463991354 | 1.28402541668774 | 0.695839952696387 | | 4.75 | 123.714558835116 | 115.584284527188 | -8.13027430792803 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -4.75 | 0.0425159586621753 | 0.00865169520312063 | -0.0338642634590546 | | -0.25 | 0.779562065562605 | 0.778800783071405 | -0.000761282491200554 | | 0.25 | 1.28482007548394 | 1.28402541668774 | -0.000794658796201553 | | 4.75 | 115.663039200175 | 115.584284527188 | -0.0787546729868609 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -4.75 | 0.0086517043449682 | 0.00865169520312063 | -9.14184756888037e-09 | | -0.25 | 0.778800783071361 | 0.778800783071405 | 4.41868763800812e-14 | | 0.25 | 1.2840254166877 | 1.28402541668774 | 4.44089209850063e-14 | | 4.75 | 115.584284541532 | 115.584284527188 | -1.43442377975589e-08 |   **问题3：**  1.  时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.525417073170731 | 0.525624178712221 | 0.000207105541489283 | | -0.05 | 0.99780731707317 | 0.997506234413965 | -0.000301082659205254 | | 0.05 | 0.99780731707317 | 0.997506234413965 | -0.000301082659205365 | | 0.95 | 0.525417073170732 | 0.525624178712221 | 0.000207105541489172 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.525467972887303 | 0.525624178712221 | 0.000156205824917599 | | -0.05 | 0.9972459625394 | 0.997506234413965 | 0.000260271874565343 | | 0.05 | 0.9972459625394 | 0.997506234413965 | 0.000260271874565454 | | 0.95 | 0.525467972887303 | 0.525624178712221 | 0.000156205824917821 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.525624155528343 | 0.525624178712221 | 2.31838773734339e-08 | | -0.05 | 0.997506210602481 | 0.997506234413965 | 2.38114840067638e-08 | | 0.05 | 0.997506210602482 | 0.997506234413965 | 2.38114835626746e-08 | | 0.95 | 0.525624155528343 | 0.525624178712221 | 2.31838773734339e-08 |   2.  时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.386733160435482 | 0.386741023454501 | 7.86301901900543e-06 | | -0.05 | 0.951361132942333 | 0.951229424500714 | -0.000131708441618805 | | 0.05 | 1.05113719086242 | 1.05127109637602 | 0.000133905513605592 | | 0.95 | 2.58572043657629 | 2.58570965931585 | -1.07772604467371e-05 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.386741023958965 | 0.386741023454501 | -5.04464137129901e-10 | | -0.05 | 0.951229424979854 | 0.951229424500714 | -4.79139727893596e-10 | | 0.05 | 1.05127109685953 | 1.05127109637602 | -4.83502127224256e-10 | | 0.95 | 2.58570965991527 | 2.58570965931585 | -5.99424510028257e-10 |   时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | -0.95 | 0.386741023454501 | 0.386741023454501 | -1.11022302462516e-16 | | -0.05 | 0.951229424500714 | 0.951229424500714 | -1.11022302462516e-16 | | 0.05 | 1.05127109637602 | 1.05127109637602 | 0 | | 0.95 | 2.58570965931585 | 2.58570965931585 | 4.44089209850063e-16 |   **问题4：**    1. 时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | 5 | 2.26666666666667 | 2.23606797749979 | -0.0305986891668768 | | 50 | -20.2333333333333 | 7.07106781186548 | 27.3044011451988 | | 115 | -171.9 | 10.7238052947636 | 182.623805294764 | | 185 | -492.733333333333 | 13.6014705087354 | 506.334803842069 |   2. 时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | 5 | 3.11575091575092 | 2.23606797749979 | -0.879682938251126 | | 50 | 7.07179487179487 | 7.07106781186548 | -0.000727059929396034 | | 115 | 10.167032967033 | 10.7238052947636 | 0.556772327730613 | | 185 | 10.0388278388278 | 13.6014705087354 | 3.56264266990766 |   3. 时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | 5 | 4.43911161302466 | 2.23606797749979 | -2.20304363552487 | | 50 | 7.2849614153962 | 7.07106781186548 | -0.213893603530728 | | 115 | 10.7227555053642 | 10.7238052947636 | 0.00104978939940636 | | 185 | 13.5356672313194 | 13.6014705087354 | 0.0658032774160358 |   4. 时   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 插值点 | 计算插值 | 实际值 | 误差 | | 5 | 5.497172048896 | 2.23606797749979 | -3.26110407139621 | | 50 | 7.80012771392083 | 7.07106781186548 | -0.729059902055354 | | 115 | 10.8004926108374 | 10.7238052947636 | -0.0766873160738299 | | 185 | 13.6006203247583 | 13.6014705087354 | 0.000850183977188834 |   **思考题**  **问题1：**  拉格朗日插值多项式的次数并不是越大越好，根据定义，插值多项式可以在节点处与实际函数匹配，但不能保证在节点之间很好的逼近实际函数。这个现象就是多项式摆动——Runge现象，有时多项式摆动可以通过谨慎选择基础函数的取样点来减小。通常采用分段插值例如Hermite插值可以很好的消除多项式摆动现象。  **问题2：**  在分段数量相同的情况下，插值区间越大，误差越大。原因是大部分情况下，相对于比较大的区间，函数在比较小的区间上的函数值变化较缓和，因此即使出现摆动也不会过大的偏离原函数。  **问题3：**  Runge现象可以通过谨慎选择基础函数的取样点来减小。例如在函数变化趋势较大的区间选取更多取样点，变化趋势平缓的区间适当减少取样点。  **问题4：**  一般情况下，内插时插值收敛于实际函数，一旦超出内插的范围，插值函数会发散，且离插值区间越远外推误差越大。使用不用的插值方法在同一点外推的值也会相差很多，即外推本身就存在很大的不确定性。  **程序代码**  Lagrange.m  % X代表样本值的横坐标向量  % Y代表对应样本值的函数值向量  % x代表待计算点的横坐标向量  % 输出y代表x对应的计算得出的插值  function y = Lagrange(X, Y, x)  dataNumber = length(X);  sampleNumber = length(x);  for i = 1:sampleNumber  z = x(i);  s = 0.0;  for k = 1:dataNumber  p = 1.0;  for j = 1:dataNumber  if j~=k  p = p \* (z - X(j)) / (X(k) - X(j));  end  end  s = p \* Y(k) + s;  end  y(i) = s;  end  Test1.m  % fun为输入函数  % a,b为计算区间  % n为区间分段数  % xi为待计算插值点  function Test1(fun, a, b, n, xi)  x = linspace(a, b, n);  y = feval(fun, x);  yi = Lagrange(x, y, xi);  yFact = feval(fun, xi);  err = yFact - yi;  fprintf('区间[%d,%d]分为%d段\n', a, b, n);  fprintf('计算插值点xi:\n');  disp(xi);  fprintf('计算得插值yi:\n');  disp(yi);  fprintf('插值点处函数值yFact:\n');  disp(yFact);  fprintf('计算误差err:\n');  disp(err);  plot(x, y, '-b', xi, yi, '-r', xi, yi, 'og');  Test2.m  % fun为输入函数  % a,b为计算区间  % n为区间分段数  % xi为待计算插值点  function Test2(fun, a, b, n, xi)  x = zeros(1, n);  for k = 1:n  x(k) = cos((2 \* k - 1) \* pi / (2 \* n));  end  y = feval(fun, x);  yi = Lagrange(x, y, xi);  yFact = feval(fun, xi);  err = yFact - yi;  fprintf('区间[%d,%d]分为%d段\n', a, b, n);  fprintf('计算插值点xi:\n');  disp(xi);  fprintf('计算得插值yi:\n');  disp(yi);  fprintf('插值点处函数值yFact:\n');  disp(yFact);  fprintf('计算误差err:\n');  disp(err);  plot(x, y, '-b', xi, yi, '-r', xi, yi, 'og');  Test3.m  % x为插值点  % xi为待计算点  function Test3(x, xi)  y = sqrt(x);  yi = Lagrange(x, y, xi);  yFact = sqrt(xi);  err = yFact - yi;  fprintf('计算插值点xi:\n');  disp(xi);  fprintf('计算得插值yi:\n');  disp(yi);  fprintf('插值点处函数值yFact:\n');  disp(yFact);  fprintf('计算误差err:\n');  disp(err);  plot(x, y, '-b', xi, yi, '-r', xi, yi, 'og'); |