Capítulo 4: Características do Sistema de Controle de Feedback

4.1 Introdução

Um sistema de controle é uma interconexão de componentes que, juntos, produzem uma saída desejada. Quando comparamos a saída real com a referência e geramos um sinal proporcional ao **erro** (diferença entre desejado e medido) para corrigir o processo, temos um sistema em malha fechada (closed-loop). Essa correção contínua é o que chamamos de *feedback*.

Tipos básicos de sistemas de controle:

Sistema em malha aberta (Open-loop)

Um sistema de malha aberta (sem realimentação) não mede a saída para corrigir sua ação. Por isso, é mais sensível a distúrbios e a variações de parâmetros do processo. Se a resposta de malha aberta não for satisfatória, pode-se inserir um *controlador em cascata* antes do processo para ajustar a função de transferência e tentar moldar a resposta transitória — ainda assim, sem realimentação.

Sistema em malha fechada (Closed-loop)

No sistema por feedback, mede-se a saída e compara-se com a referência para obter o erro. O controlador usa esse erro para acionar o atuador. Em geral, esse arranjo torna o sistema menos sensível a variações do processo e a distúrbios, melhora a atenuação de ruído de medição e reduz o *erro em regime permanente (steady-state error).*

Vantagens do Controle por Feedback

Apesar de aumentar a complexidade e o custo, o feedback em malha fechada traz benefícios importantes:

- Reduz a sensibilidade a variações nos parâmetros do processo;
- Melhora a rejeição de distúrbios;
- Ajuda a atenuar ruído de medição (se projetado com *roll-off* adequado em altas frequências);
- Reduz o erro em regime permanente;
- Permite ajustar a resposta transitória (tempo de subida, sobressinal, tempo de acomodação).

4.2 Análise de Sinal de Erro

Considere um sistema de feedback com três entradas: $R(s)$ (referência), $T_d(s)$ (distúrbio) e $N(s)$ (ruído de medição), e saída $Y(s)$. Definimos o erro de rastreamento como $E(s) = R(s) - Y(s)$.

Sistema de Feedback Unitário

Considera-se um sistema de feedback unitário, onde $H(s) = 1$. Após manipulações no diagrama de blocos, a saída é dada por:

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)T_d(s)} - \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s)$$

Erro de Rastreamento

Com $E(s) = R(s) - Y(s)$, temos:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)T_d(s)} - \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s)$$

Função de Ganho de Malha

Com $L(s) = G_c(s)G(s)$, as expressões acima mostram claramente como cada entrada afeta $E(s)$ e $Y(s)$. Em particular, $S(s) = 11 + L(s)$ "bloqueia" o erro de referência e distúrbios na planta em baixas frequências quando $|L|$ é grande, enquanto $T(s) = L1 + L$ transmite referência (bom) e também ruído de medição (indesejado) em altas frequências se não houver *roll-off* suficiente.

Funções de Sensibilidade

Definimos a função de sensibilidade $S(s)$ e a função de sensibilidade complementar $C(s)$ como:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$C(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Análise do Erro de Rastreamento

Escrevendo explicitamente,

$$E(s) = S(s)\,R(s) \;-\; S(s)\,G(s)\,T_d(s) \;+\; C(s)\,N(s).$$

Intuição: gostaríamos que $S(s)$ fosse pequeno (erro pequeno e boa rejeição de distúrbios) e que $C(s)$ também fosse pequeno (não amplificar ruído). Porém, como $S + C = 1$, **não dá para minimizar ambos em todas as frequências**.

O projeto escolhe onde S será pequeno (típ. baixas frequências) e onde C será pequeno (típ. altas), via desenho de $G_c(s)$.

Magnitude das Funções de Transferência

Para reduzir a influência de $T_d(s)$ (geralmente concentrado em baixas frequências), desejamos $|L(j\omega)|$ grande nessas frequências $\Rightarrow |S|$ pequeno. Já para atenuar o ruído de medição $N(s)$ (normalmente mais significativo em altas frequências), desejamos $|L(j\omega)|$ pequeno em altas $\Rightarrow |C|$ pequeno. Em resumo: **ganho alto em baixas** (rejeição de distúrbios) e **roll-off em altas** (não amplificar ruído).

4.3 Sensibilidade dos Sistemas de Controle às Variações de Parâmetros

Introdução

A planta $G(s)$ pode mudar por envelhecimento, ambiente, incerteza de parâmetros, etc. Em malha aberta, essas variações aparecem diretamente na saída. Em malha fechada, o erro realimentado "corrige" parte dessas mudanças. Uma grande vantagem do feedback é justamente reduzir a sensibilidade a variações de $G(s)$.

Redução da Sensibilidade

Se o processo real for $G(s) + \Delta G(s)$, a variação do erro $\Delta E(s)$ é reduzida por um fator próximo de $1 + L(s)$. Para $|L(s)| \gg 1$ (em baixas frequências), $1 + L(s) \approx L(s)$, e podemos aproximar:

$$\Delta E(s) \;\approx\; \frac{\Delta G(s)}{L(s)\, G(s)}\, R(s).$$

Leitura direta: quanto maior $|L|$, menor o efeito relativo de ΔG sobre o erro.

Definição de Sensibilidade

A sensibilidade relativa de T em relação a G em malha aberta é 1 (o efeito passa *direto*). Em **malha fechada**, a sensibilidade é

$$S_G^T = \frac{\partial(T/T)}{\partial(G/G)} = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} = S(s).$$

Logo, $|S|$ pequeno significa **robustez** a variações de parâmetros.

Funções de Sensibilidade

Reunindo:

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}, \qquad C(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad (também T(s)).$$

Essas funções aparecem repetidamente na análise de robustez, rastreamento e ruído.

Exemplo: Amplificador com Feedback

Considere um amplificador de ganho $-K_a$ com realimentação fracionária β (p. ex., por um potenciômetro R_p). Sem feedback, $T(s) = -K_a$ e a sensibilidade relativa a K_a é $S^T_{K_a} = 1$. Com feedback negativo,

$$T(s) = \frac{-K_a}{1+K_a\,\beta}, \qquad S^T_{K_a} = \frac{\partial(T/T)}{\partial(K_a/K_a)} = \frac{1}{1+K_a\,\beta}.$$

Se K_a for grande, $S^T_{K_a}$ é pequeno. Por exemplo, com $K_a = 10^4$ e $\beta = 0.1$, $1 + K_a\beta = 1 + 1000 = 1001$, logo $S^T_{K_a} \approx 10^{-3}$: **mil vezes menos sensível** que em malha aberta.

4.4 Sinais de Perturbação em um Sistema de Controle de Feedback

Introdução

Muitos sistemas estão sujeitos a perturbações que empurram a saída para longe do valor desejado. Uma função importante do *feedback* é justamente reduzir o efeito dessas perturbações na saída (e no erro).

Rejeição de Perturbações

Com $R(s) = N(s) = 0$, do resultado geral $E(s) = S(s)R(s) - S(s)G(s)T_d(s) + T(s)N(s)$ obtemos

$$E(s) \;=\; -\,S(s)\,G(s)\,T_d(s) \;=\; -\,\frac{G(s)}{1+L(s)}\,T_d(s).$$

Para $G(s)$ fixo e dado $T_d(s)$, quanto maior o ganho de malha $L(s)$ (em particular nas **baixas frequências**, onde perturbações são mais comuns), **menor** o efeito de $T_d(s)$ sobre o erro. Em outras palavras: **ganho alto em baixas** $\Rightarrow$ boa rejeição de perturbações.

Exemplo: Controle de Velocidade em um Laminador de Aço

Os rolos de um laminador sofrem grandes variações de carga (torque de perturbação).

Sistema de Controle de Velocidade em Malha Aberta

Para malha aberta, a velocidade varia com a perturbação segundo

$$E(s) = -v(s) \;=\; \frac{1}{Js + b + \frac{K_m K_b}{R_a}}\, T_d(s).$$

Pelo teorema do valor final, para um degrau de torque de carga de amplitude D,

$$\lim_{t\to\infty} E(t) \;=\; \lim_{s\to 0} sE(s) \;=\; \frac{D}{b + \frac{K_m K_b}{R_a}}.$$

Assim, mesmo em regime permanente, a perturbação deixa um erro diferente de zero (pois não há mecanismo de correção).

Sistema de Controle de Velocidade em Malha Fechada

Em malha fechada com realimentação de velocidade (tacogerador), vale

$$E(s) \;=\; -v(s) \;=\; \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}\, T_d(s).$$

Se $G_1(s)G_2(s)H(s) \gg 1$, então

$$E(s) \;\approx\; \frac{G_2(s)}{G_1(s)G_2(s)H(s)}\, T_d(s) \;=\; \frac{1}{G_1(s)H(s)}\, T_d(s),$$

ou seja, o erro devido à perturbação é **fortemente reduzido** pelo loop (correção do sinal: não é $11 + G_1 H$ nesse limite, e sim $1G_1H$).

Atenuação de Ruído de Medição

Com $R(s) = T_d(s) = 0$, segue de $E(s) = S(s)R - S(s)G\,T_d + T(s)N$ que

$$E(s) \;=\; T(s)\,N(s) \;=\; \frac{L(s)}{1 + L(s)}\, N(s).$$

Logo, para **atenuar ruído** (tipicamente de **altas frequências**), queremos $|T| = \big|L1 + L\big|$ pequeno nessas frequências — o que se obtém com **roll-off** do controlador em alta (deixando $|L|$ pequeno em altas). Resumo do compromisso: **alto ganho em baixas** (rejeitar T_d) e **baixo ganho em altas** (não amplificar N).

4.5 Controle da Resposta Transitória

Introdução

A **resposta transitória** é o comportamento temporal antes do regime permanente. Em projeto, ajustamos o sistema para atingir metas como tempo de subida, sobressinal e tempo de acomodação.

Ajuste da Resposta Transitória

Se a resposta em malha aberta não for satisfatória, ajusta-se a função de malha $G_c(s)G(s)$ (escolha de ganho/compensador) ou a própria planta quando possível. Exemplo clássico: controle de velocidade com operação em modo aberto/fechado.

Sistema de Controle de Velocidade em Malha Aberta

A função de transferência típica é de primeira ordem:

$$\frac{v(s)}{V_a(s)} = G(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}.$$

Resposta Transitória em Malha Aberta

Se aplicarmos um degrau de referência por potenciômetro/amplificador, $R(s) = k_2 E s$ e $V_a(s) = K_a\, R(s)$, obtemos a resposta

$$v(t) = K_a\, K_1\, K_2\, E\, \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right).$$

Se essa resposta for lenta, poderíamos desejar alterar τ_1; mas, como τ_1 é dominada pela inércia J, isso pode não ser viável na prática.

Sistema de Controle de Velocidade em Malha Fechada

Com realimentação de velocidade via tacômetro (ganho K_t), a função de transferência fecha em

$$\frac{v(s)}{R(s)} = \frac{K_a\, G(s)}{1 + K_a\, K_t\, G(s)} = \frac{K_a K_1 \tau_1}{s + 1 + K_a K_t K_1 \tau_1}.$$

Os parâmetros K_a (amplificador) e K_t (tacômetro) permitem ajustar o polo de malha fechada (logo, t_r, M_p, t_s).

Resposta Transitória em Malha Fechada

Para um degrau de referência $k_2 E$, a resposta é

$$v(t) = \frac{K_a K_1}{1 + K_a K_t K_1}\, k_2 E \left(1 - e^{-pt}\right), \qquad p = \frac{1 + K_a K_t K_1}{\tau_1}.$$

Quanto maior $K_a K_t K_1$, mais rápido o transitório (polo mais à esquerda) e menor o ganho CC total (sendo possível compensar com o próprio K_a).

4.6 Erro de Estado Estacionário

Introdução

O **erro em regime permanente** mede a precisão após o transitório. Pelo teorema do valor final:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) \;=\; \lim_{s\to 0} s\,E(s).$$

Erro em Regime Permanente

Para comparar, considere referência degrau unitário e realimentação unitária:

- **Malha aberta (sem feedback):** depende de como a referência alimenta a planta. Se $y(t) = G_c(0)G(0)\,r(t)$ para entrada constante $r = 1$, então

$$e_o(\infty) \;=\; 1 - G_c(0)\,G(0).$$

- **Malha fechada (feedback unitário):**

$$e_c(\infty) \;=\; \frac{1}{1 + G_c(0)\,G(0)}.$$

Em malha fechada, o erro tende a ser **menor e menos sensível** a mudanças de parâmetros, pois o sistema mede o erro e corrige continuamente a ação de controle.

4.7 O Custo do Feedback

Custos do Feedback

- **Complexidade e custo:** sensores, condicionamento de sinal e hardware extra aumentam custo e podem introduzir ruído;
- **Perda de ganho efetivo:** com feedback negativo unitário, a sensibilidade a variações diminui (bom), mas o ganho CC total também (pode exigir compensação);
- **Potencial de instabilidade:** ganhos altos e dinâmica não modelada podem levar a oscilação/instabilidade.

Ao projetar, equilibra-se **desempenho, robustez e estabilidade**: alto ganho *onde importa* (baixas frequências) e *roll-off* em altas (não amplificar ruído), garantindo margens de estabilidade adequadas.

4.8 Exemplos de Projeto

Exemplo 4.2: Máquinas de Perfuração do Canal da Mancha

Contexto

O túnel sob o Canal da Mancha conecta a França à Grã-Bretanha, com cerca de 37,9 km de extensão e ponto mais baixo a 75 m sob o nível do mar. As máquinas de perfuração, operando de ambos os lados, usavam orientação a laser para manter o alinhamento.

Objetivo do Projeto

Escolher o ganho K para que a resposta a variações no ângulo de entrada seja adequada, enquanto o efeito da perturbação seja pequeno.

Modelo do Sistema

A saída devida à referência e à perturbação é

$$Y(s) \;=\; \frac{K}{s^2+12s+K}\,R(s) \;+\; \frac{1}{s^2+12s+K}\,T_d(s).$$

Para reduzir o efeito de $T_d(s)$, K deve ser suficientemente grande (por exemplo, $K > 10$). Ilustrações típicas: para $K = 100$ (Fig. 4.15) e $K = 20$ (Fig. 4.16), observam-se respostas distintas à referência e à perturbação.

Sensibilidade do Sistema

A sensibilidade (malha fechada) à variação do processo $G(s)$ é

$$S_T^G(s) \;=\; \frac{s(s+12)}{s(s+12)+K}.$$

Em **baixas frequências**, $s(s+12) \approx 12s$, de modo que

$$S_T^G(s) \;\approx\; \frac{12\,s}{K}\,.$$

Logo, aumentar K reduz a sensibilidade (robustez maior) nas baixas frequências. Um valor como $K = 20$ pode ser um **compromisso razoável** entre rejeição de perturbações e resposta à referência.

4.9 Características do Sistema de Controle Usando Software de Projeto de Controle

Introdução

Mostramos as vantagens do feedback com dois exemplos: (i) controle de velocidade com tacômetro para rejeitar perturbações; (ii) o caso das máquinas do

Canal da Mancha, destacando redução de sensibilidade, ajuste do transitório e precisão em regime.

Exemplo 4.4: Sistema de Controle de Velocidade

- **Malha Aberta:** $\dfrac{v(s)}{T_d(s)} = -\dfrac{1}{2s+1.5}$. A resposta a um degrau de perturbação apresenta erro em regime permanente significativo (não há correção).
- **Malha Fechada:** $\dfrac{v(s)}{T_d(s)} = -\dfrac{1}{2s+54.5}$. A resposta ao mesmo degrau tem rejeição muito melhor (constante de tempo bem menor) e erro em regime permanente reduzido.

Exemplo 4.5: Máquinas de Perfuração do Canal da Mancha

- **Função de Transferência:** $Y(s) = \dfrac{K}{s^2+12s+K}\,R(s) + \dfrac{1}{s^2+12s+K}\,T_d(s)$.
- **Análise da Resposta Transitória:** A equação característica é $s^2 + 12s + K \Rightarrow \omega_n = \sqrt{K}$ e $2\zeta\omega_n = 12 \Rightarrow \zeta = 6/\sqrt{K}$. Assim, **aumentar** K torna ζ **menor** (tendência a $\uparrow$ overshoot), enquanto $\zeta\omega_n = 6$ **permanece constante**, mantendo o *settling time* (critério 2%) aproximadamente constante. A escolha de K deve equilibrar *rejeição de perturbações* (favorável a K maior) e *comportamento transitório* (evitar overshoot excessivo).

4.10 - Exemplo de Projeto Sequencial: Sistema de Leitura de Disco Rígido

Introdução

No projeto de um disco rígido, é preciso posicionar a cabeça de leitura com precisão, reduzindo efeitos de variações de parâmetros e choques externos. O projeto envolve compromissos entre rapidez, amortecimento e robustez.

Configuração do Sistema

- **Sistema em Malha Fechada:** usa um amplificador com ganho variável K_a como controlador. As funções de transferência dos blocos são:

$$G_1(s) = \frac{5000}{s(s+1000)}, \qquad G_2(s) = \frac{1}{s(s+20)}.$$

Análise de Erros em Regime Permanente

- **Erro a degrau:** Como a estrutura efetiva possui múltiplos integradores no caminho direto, o *tipo* do sistema é elevado e o erro a degrau unitário é **nulo** (rastreio preciso em regime permanente), mesmo com variações moderadas de parâmetros.

Análise da Resposta Transitória

- **Função de Transferência em Malha Fechada:**

$$T(s) = \frac{5000\,K_a}{s^3 + 1020\,s^2 + 20000\,s + 5000\,K_a}.$$

Aumentar K_a acelera a resposta (polos mais à esquerda), *mas* pode reduzir amortecimento e induzir oscilação. A escolha de K_a deve respeitar margens de estabilidade.

Resposta a Perturbações

- **Função de Transferência da Perturbação:**

$$Y(s) \;=\; \frac{G_2(s)}{1 + K_a\,G_1(s)\,G_2(s)}\;T_d(s).$$

Ganhos K_a maiores tendem a **atenuar** a passagem de T_d (melhor rejeição), porém podem aproximar polos do eixo imaginário se o amortecimento não for garantido pelo projeto do loop.