Capítulo 5: Desempenho dos Sistemas de Controle por Feedback

5.1 Introdução

Sistemas com *feedback* permitem ajustar tanto o desempenho transitório quanto a precisão em regime permanente. Em projeto, costumamos separar as especificações em: (i) **resposta transitória** (o que acontece até o sistema "se acomodar") e (ii) **resposta em regime permanente** (o valor que permanece depois que o transitório morre). As especificações típicas são índices de desempenho no tempo (para um sinal de teste específico) e requisitos de erro estacionário. Na prática, ajustamos esses requisitos para buscar um **compromisso** entre rapidez, amortecimento e precisão.

5.2 Sinais de Entrada de Teste

Usamos sinais de teste padrão porque a resposta a eles se correlaciona bem com o comportamento sob condições reais. Os mais usados são:

- **Degrau:** mudança súbita da referência (ótimo para avaliar rapidez e sobressinal).
- **Rampa:** variação linear no tempo (avalia rastreamento de velocidade).
- **Parabólico:** variação quadrática (rastreio de aceleração).

A **entrada impulso unitário** também é muito útil (especialmente combinada com a integral de convolução), pois sua resposta é a *resposta impulsiva* do sistema.

Propriedades da Função Impulso Unitário

Para a função impulso $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,g(t)\,dt = g(a).$$

Aplicar um impulso unitário em $G(s)$ fornece diretamente a resposta ao impulso do sistema (transformada inversa de $G(s)$).

Relação entre Sinais de Teste

Os sinais padrão estão relacionados por integrações sucessivas: a rampa é a integral do degrau; a parabólica é a integral da rampa. Por isso, se conhecemos a resposta ao degrau, podemos inferir a resposta à rampa/parabólica e vice-versa, via relações de integração/derivação adequadas.

Exemplo de Resposta ao Degrau

Considere a **planta de 1ª ordem** $G(s) = 9s + 10$ sob **degrau unitário** $R(s) = 1s$. A saída é

$$Y(s) = \frac{9}{s(s+10)}.$$

No tempo:

$$y(t) = 0.9\left(1 - e^{-10t}\right).$$

Logo, a saída em regime é $y(\infty) = 0.9$ e o **erro estacionário** (para referência unitária) fica

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+10} = 0.1.$$

Intuição: o ganho CC da planta é $G(0) = 9/10 = 0{,}9$, então ela "chega" a 90% da referência; o erro é o restante (10%).

5.3 - Desempenho de Sistemas de Segunda Ordem

Introdução

Para analisar desempenho em malha fechada (feedback unitário), escrevemos

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}\, R(s).$$

Quando a dinâmica dominante é de **segunda ordem**, podemos aproximar a resposta por um modelo padrão.

Resposta ao Degrau Unitário

Modelo de 2ª ordem (subamortecido, $\zeta < 1$):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Para degrau unitário $R(s) = \frac{1}{s}$, obtemos

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s\big(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\big)}.$$

No tempo:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta}\, e^{-\zeta\omega_n t}\, \sin\!\big(\omega_n\beta\, t + \phi\big), \quad \beta = \sqrt{1-\zeta^2}, \quad \phi = \cos^{-1}(\zeta).$$

Intuição: ζ controla "quão oscilatória" é a resposta; ω_n define a escala de tempo (quão rápido é o sistema).

Medidas de Desempenho

Definimos (para o degrau):

- **Tempo de Subida** (T_r): tempo para a resposta ir de um nível inicial a outro próximo do valor final. Em sistemas subamortecidos usa-se, por convenção, 0% $\to$ 100% (ou 10% $\to$ 90%); em superamortecidos ($\zeta > 1$), usa-se normalmente 10% $\to$ 90%.
- **Tempo de Pico** (T_p): tempo do primeiro pico.
- **Sobressinal Percentual** ($P.O.$): quanto o primeiro pico excede o valor final (em %).
- **Tempo de Estabilização** (T_s): tempo para a resposta entrar e permanecer dentro de uma faixa (tipicamente $\pm 2\%$) do valor final.

Fórmulas de Desempenho

Aproximações clássicas para o modelo de 2ª ordem (com $\zeta \in (0, 1)$):

- **Tempo de Subida** (T_r), convenção 0% $\to$ 100%:

$$T_r \approx \frac{2.16\,\zeta + 0.60}{\omega_n}.$$

- **Tempo de Pico** (T_p):

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

- **Sobressinal Percentual** ($P.O.$):

$$P.O. = 100\, e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

- **Tempo de Estabilização** (T_s), faixa de 2%:

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\, \omega_n}.$$

Intuição: aumentar ζ reduz o sobressinal e costuma aumentar levemente T_r; aumentar ω_n acelera toda a resposta (reduz T_r, T_p e T_s).

Análise Gráfica

Ao reduzir ζ, os polos conjugados de malha fechada se aproximam do eixo imaginário, deixando a resposta mais oscilatória (maior $P.O.$ e maior T_p). A **resposta ao impulso** é a derivada da resposta ao degrau, e evidencia os mesmos parâmetros ζ e ω_n (picos mais altos e mais próximos quando ζ é menor).

5.4 - Efeitos de um Terceiro Polo e um Zero na Resposta de Sistemas de Segunda Ordem

Introdução

Sistemas de **segunda ordem** costumam aproximar bem a dinâmica dominante de muitos sistemas de ordem superior. Porém, um **terceiro polo** ou um **zero** pode alterar de modo significativo o transitório (rapidez, sobressinal e cauda). A ideia prática é verificar quando a aproximação por polos dominantes continua válida.

Sistema de Terceira Ordem

Considere

$$T(s) \; = \; \underbrace{\frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}}_{2ordem(normalizada, \omega_n = 1)} \; \cdot \; \underbrace{\frac{1}{g\,s + 1}}_{poloextraems = -1/g} \; .$$

A aproximação por polos dominantes é válida quando o **polo extra é bem mais rápido** que o par dominante, isto é, quando

$$\left|\Re\{s_{dom}\}\right| \;\ll\; \left|\Re\{s_3\}\right|$$

(regra prática: pelo menos 5 a 10 vezes).

Exemplo de Sistema de Terceira Ordem

Para $\zeta = 0{,}45$, $\omega_n = 1$ (denominador $s^2 + 2\zeta s + 1$) e $g = 1$, os polos são

$$s_{1,2} = -\zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2} = -0{,}45 \pm 0{,}89, \qquad s_3 = -1.$$

A resposta ao degrau unitário (Fig. 5.12) pode ser comparada à de um sistema puramente de 2ª ordem: se o polo extra está suficientemente à esquerda (mais "rápido"), sua contribuição é pequena no transitório principal.

Efeito de um Zero

Considere

$$T(s) = \frac{\omega_n^2\,(s + a)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

onde o zero é $s = -a$ (LHP). Um **zero próximo** dos polos dominantes tende a *alterar o formato* do degrau (geralmente $\uparrow$ sobressinal e/ou mudança na curvatura inicial). À medida que o zero se afasta para a esquerda (a grande), a resposta volta a se parecer com a de 2ª ordem (efeito do zero fica pequeno). A Fig. 5.13 ilustra a influência de diferentes razões $a/(\zeta\omega_n)$.

Seleção de Parâmetros

Para atender a especificações (sobressinal e tempo de estabilização), escolhem-se ζ e ω_n e posicionam-se polos/zeros do compensador. Exemplo: $\zeta = 0{,}707$ e $\omega_n = 1/\zeta$ produzem polos desejados

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -1 \pm 1,$$

que costumam dar bom compromisso entre rapidez e amortecimento.

5.5 - Localização das Raízes no Plano-s e a Resposta Transitória

Introdução

A resposta transitória de um sistema de feedback está diretamente ligada à **posição dos polos** no plano-s. Escrevendo a malha fechada como

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{\Delta(s)},$$

os **polos** são as raízes de $\Delta(s) = 0$ e definem os *modos* da resposta.

Expansão em Frações Parciais

Para entrada degrau unitário e sem raízes repetidas, podemos escrever

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{s+s_i} + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k\, s + C_k}{s^2 + 2a_k s + (a_k^2 + \omega_k^2)},$$

o que leva, no tempo, a

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^{M} A_i\, e^{-s_i t} + \sum_{k=1}^{N} D_k\, e^{-a_k t}\, \sin(\omega_k t + \phi_k).$$

Leitura: polos *reais* geram termos exponenciais; polos *complexos conjugados* geram termos senoidais amortecidos.

Estabilidade

Para estabilidade BIBO, todos os polos devem estar no **semiplano esquerdo** ($\Re\{s\} < 0$). A distância ao eixo imaginário e o ângulo dos polos determinam rapidez ($\Re\{s\}$ mais negativo $\Rightarrow$ mais rápido) e oscilação ($\Im\{s\} \neq 0 \Rightarrow$ modos oscilatórios).

Impacto dos Polos e Zeros

Polos definem os modos presentes; **zeros** ponderam a contribuição de cada modo. Um zero *próximo* de um polo reduz a contribuição daquele modo na saída. (Observação: zeros em RHP — não presentes aqui — tendem a piorar o transitório e podem produzir inversão inicial.)

5.6 - Erro em Regime Permanente dos Sistemas de Controle por Feedback

Introdução

Um dos motivos centrais para usar *feedback* é reduzir o **erro em regime permanente** (precisão). Em geral, um sistema estável em malha fechada tem erro estacionário muito menor que o equivalente em malha aberta.

Erro em Regime Permanente

Para feedback unitário e sem perturbações/ruído, o erro é

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s).$$

Pelo teorema do valor final,

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1 + G_c(s)G(s)} R(s).$$

Erro em Regime Permanente para Entradas Padrão

1. **Degrau (amplitude A):**

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + \lim\limits_{s\to 0} G_c(s)G(s)} \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}, \ \ K_p = \lim_{s\to 0} G_c G.$$

2. **Rampa (inclinação A):**

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s\,G_c(s)G(s)} \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{A}{K_v}, \ \ K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c G.$$

3. **Parabólica:**

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s^2\,G_c(s)G(s)} \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{A}{K_a}, \ \ K_a = \lim_{s\to 0} s^2\,G_c G.$$

Tipos de sistema: o número de integradores em G_cG define o tipo (0, 1, 2, ...). Tipo 0: erro finito a degrau, ∞ a rampa; tipo 1: erro nulo a degrau, finito a rampa; tipo 2: erro nulo a degrau e rampa, finito a parabólica.

Constantes de Erro

As constantes K_p, K_v, K_a quantificam a precisão em regime. São **figuras de mérito** úteis para comparar ajustes de $G_c(s)$ e avaliar o tipo do sistema.

Exemplo: Controle de Direção de um Robô Móvel

Considere $G_c(s) = K_1 + K_2 s$ (PI) e uma planta com ganho estático K.

- **Degrau:** $K_p = \lim_{s\to 0} G_c G = K\,K_1 \Rightarrow e_{ss} = A1 + K_p = A1 + K\,K_1$.
- **Rampa:** $K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c G = \lim_{s\to 0} s\Big(K_1 + \frac{K_2}{s}\Big)K = K\,K_2 \Rightarrow e_{ss} = AK_v = AK\,K_2$.

O termo integrador eleva o *tipo* do sistema e zera o erro a degrau.

Sistemas com Feedback Não Unitário

Quando o caminho de feedback não é unitário, as unidades do sensor diferem das da saída. Equivalemos o sistema a um feedback unitário ajustando ganhos (de escala) no caminho direto ou no sensor, para então aplicar as mesmas fórmulas de K_p, K_v, K_a e de erro estacionário.

5.7 - Índices de Desempenho

Introdução

Na abordagem moderna, especificamos *numericamente* o desempenho desejado. Chamamos de **índice de desempenho** um funcional que mede "quão boa" é a resposta; o sistema é dito ótimo quando esse índice atinge um extremo (geralmente um *mínimo*) por uma escolha adequada de parâmetros.

Índices de Desempenho Comuns

1. **ISE (Integral do Quadrado do Erro):**

$$ISE = \int_0^T e^2(t)\,dt$$

   Em prática, muitos projetos usam $T = \infty$. O ISE *pune* erros grandes (por elevar ao quadrado) e costuma preferir respostas bem amortecidas (menos picos).

2. **IAE (Integral do Valor Absoluto do Erro):**

$$IAE = \int_0^T |e(t)|\,dt$$

   Dá o "erro acumulado total" e não enfatiza tanto picos quanto o ISE.

3. **ITAE (Integral do Tempo pelo Valor Absoluto do Erro):**

$$ITAE = \int_0^T t\,|e(t)|\,dt$$

   Intuição: "penaliza" mais os erros *tardios*, favorecendo respostas com caudas pequenas (acomodação rápida).

4. **ITSE (Integral do Tempo pelo Quadrado do Erro):**

$$ITSE = \int_0^T t\,e^2(t)\,dt$$

   Pesa mais os erros tardios *e* dá ênfase extra a picos (por e^2).

Forma Geral do Índice de Desempenho

Uma forma geral é

$$I = \int_0^T f\big(e(t), r(t), y(t), t\big)\,dt,$$

onde f agrega erro, referência, saída e (opcionalmente) tempo.

Exemplo: Sistema de Controle de Telescópio Espacial

Considere a função de transferência (perturbação $\to$ saída) em malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{s\big(s + K_1K_3\big)}{s^2 + K_1K_3\,s + K_1K_2K_p}.$$

Para o critério ISE, o valor mínimo é obtido quando $K_3 = \sqrt{10} \approx 3{,}16$, o que leva, nesse ajuste, a um fator de amortecimento por volta de $\zeta \approx 0{,}50$.

Coeficientes Ótimos para o Critério ITAE

Para

$$T(s) = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0},$$

existem tabelas de b_i que **minimizam** o ITAE para degrau. Elas fornecem um traço "de referência" muito útil na síntese de controladores.

5.8 - Simplificação de Sistemas Lineares

Introdução

Sistemas de alta ordem podem ser analisados/projetados via **modelos reduzidos** que preservam o comportamento essencial (polos dominantes). Há diversas técnicas de redução.

Método de Redução de Ordem

Se um polo está muito afastado à esquerda (dinâmica muito rápida), sua influência no transitório principal é pequena. Exemplo:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)}.$$

Como $s = -30$ é bem mais rápido, podemos aproximar

$$G(s) \approx \frac{K30}{s(s+2)},$$

reajustando o ganho CC para preservar a escala em baixa frequência.

Método de Aproximação de Resposta em Frequência

Dados

$$G_H(s) = \frac{K\,(a_m s^m + \cdots + a_1 s + 1)}{b_n s^n + \cdots + b_1 s + 1}, \qquad G_L(s) = \frac{K\,(c_p s^p + \cdots + c_1 s + 1)}{d_q s^q + \cdots + d_1 s + 1},$$

escolhem-se c_i, d_i para que $G_L(\omega)$ **aproxime** $G_H(\omega)$ na faixa de interesse (magnitude e fase próximas).

Exemplo de Modelo Simplificado

Para

$$G_H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6},$$

um modelo de 2ª ordem do tipo

$$G_L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2}$$

pode ser ajustado com

$$d_1 = 1{,}615, \qquad d_2 = 0{,}624,$$

resultando em

$$G_L(s) = \frac{1{,}60}{s^2 + 2{,}590\,s + 1{,}60}.$$

Os polos originais são $s = -1, -2, -3$; o modelo reduzido tem polos em $s \approx -1{,}024$ e $-1{,}565$, preservando bem a dinâmica dominante.

Retenção dos Polos Dominantes

Quando necessário, força-se o modelo reduzido a **conter explicitamente** os polos dominantes do sistema original, garantindo correspondência direta no transitório principal.

Método de Aproximação de Routh

Outra técnica é usar o arranjo de Routh para obter uma **aproximação estável** de ordem menor, mantendo propriedades importantes do denominador.

5.9 - Exemplos de Projeto

Introdução

Dois exemplos ilustram como traduzimos requisitos (sobressinal, erro estacionário, rejeição de perturbação) em escolhas de ganhos e dinâmica.

Exemplo 5.8: Controle do Telescópio Espacial Hubble

Contexto

O objetivo é escolher K_1 e K de modo que: $P.O. \leq 10\%$; o erro a **rampa** seja pequeno; e a saída seja pouco sensível a uma **perturbação degrau**.

Modelo do Sistema

A malha fechada referência→saída é

$$T(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$

Se a **perturbação** entrar na planta, então

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}.$$

Seleção de Parâmetros

Para $P.O. \leq 10\%$, uma escolha típica é $\zeta \approx 0{,}6$ (pois $P.O. = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$). Com a equação característica

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2(0{,}6)\,\omega_n s + K,$$

temos $\omega_n = \sqrt{K}$ e

$$K_1 = 2(0{,}6)\,\omega_n = 1{,}2\sqrt{K}.$$

Por exemplo, com $K = 100$, resulta $K_1 = 12$ e $K/K_1 \simeq 8{,}33$. O aumento de K reduz o erro a rampa (eleva ganho CC efetivo), mas deve respeitar margens de estabilidade e overshoot.

Exemplo 5.9: Controle de Atitude de um Avião

Contexto

O controle automático auxilia o piloto, melhorando as qualidades de manobra (rolagem).

Modelo do Sistema

A relação aileron→ângulo de inclinação pode ser aproximada por

$$\frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{k}{s\,(s+e_0)}, \quad e_0 = 1{,}4,\ k = 11{,}4.$$

O atuador do aileron é de 1ª ordem:

$$\frac{e(s)}{\delta_a(s)} = \frac{p}{s+p}, \qquad p = 10.$$

Projeto do Controlador

Com controlador proporcional $G_c(s) = K$, a malha fechada fica

$$T(s) = \frac{11{,}4\,K}{s^3 + 11{,}4\,s^2 + 14\,s + 11{,}4\,K}.$$

Aproximando por 2ª ordem,

$$G_L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2},$$

obtém-se (por ajuste) $d_1 = 2{,}196 - 2{,}96K$ e $d_2 = 0{,}097K$, levando à forma

$$G_L(s) = \frac{11{,}29\,K}{s^2 + \big(2{,}192 - 2{,}91\,K\big)s + 11{,}29\,K}.$$

Para $K = 0{,}16$, temos $\zeta = 0{,}45$ e $\omega_n = 1{,}34$, logo

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2{,}62\ s.$$

Leitura: aumentar K acelera a resposta, mas pode reduzir o amortecimento; escolha-se K respeitando margens de estabilidade e limites de atuador.

5.10 - Desempenho do Sistema Usando Software de Projeto de Controle

Introdução

Aqui investigamos as especificações de desempenho no domínio do tempo, tomando o modelo padrão de 2ª ordem como referência para leitura rápida de parâmetros.

Especificações no Domínio do Tempo

A saída em malha fechada é

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\,\omega_n s + \omega_n^2}\ R(s).$$

Intuição: ζ controla o quanto a resposta oscila; ω_n determina a escala de tempo (quão rápido é o sistema). A partir de (ζ, ω_n) extraímos T_r, T_p, *P.O.* e T_s.

Função Impulso

Como o impulso é a **derivada do degrau**, a **resposta ao impulso** é a derivada temporal da resposta ao degrau do sistema. Assim, conhecer a resposta ao degrau permite obter facilmente a resposta ao impulso.

5.11 - Exemplo de Projeto Sequencial: Sistema de Leitura de Disco Rígido

Introdução

Vamos acompanhar um processo de projeto visando ajustar o ganho para cumprir metas de rapidez, amortecimento e rejeição de perturbações no mecanismo de leitura.

Modelo do Sistema

Com $T_d(s) = 0$, a relação referência–saída é

$$Y(s) = \frac{5K_a}{s(s+20)+5K_a}\ R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\,\omega_n s + \omega_n^2}\ R(s).$$

Logo,

$$\omega_n^2 = 5K_a, \qquad 2\zeta\,\omega_n = 20 \ \Rightarrow\ \zeta = \frac{10}{\omega_n} = \frac{10}{\sqrt{5K_a}}.$$

Leitura: aumentar K_a eleva ω_n (resposta mais rápida) e diminui ζ (tendência a mais oscilação se exagerarmos).

Medidas de Desempenho

Quando elevamos K_a para 60, o ganho de malha em baixas frequências aumenta e a via de perturbação (planta $\to$ saída em malha fechada) é mais atenuada — observando-se, neste caso, **redução de cerca de 50%** no efeito do distúrbio na saída. *Intuição:* mais ganho no loop $\Rightarrow$ $S(j\omega)$ menor em baixas $\Rightarrow$ melhor rejeição.

Compromisso de Projeto

Para equilibrar *rapidez* e *amortecimento* (evitar sobressinal excessivo) com boa *rejeição de perturbação*, escolhemos um valor intermediário, por exemplo

$$K_a = 40,$$

que fornece velocidade adequada sem comprometer a estabilidade relativa e o nível de oscilação.