

Capítulo 7: Método do Lugar das Raízes

7.1 Introdução

O **método do lugar das raízes** (Evans, 1948) é uma técnica gráfica que mostra, no plano- s , como os polos de malha fechada se movem quando um parâmetro (tipicamente o ganho K) varia. Ele ajuda a avaliar estabilidade, sensibilidade e desempenho transitório, e combina muito bem com o critério de Routh–Hurwitz.

7.2 O Conceito do Lugar da Raízes

Para um sistema de malha fechada

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{q(s)},$$

os **polos de malha fechada** são as raízes de $q(s) = 0$. Em malha única padrão,

$$1 + K G(s) = 0,$$

onde K é o parâmetro que varia. O **lugar das raízes (LGR)** é o conjunto das posições de polos de malha fechada quando K vai de 0 a ∞ (e, por extensão, também pode-se estudar $K < 0$).

Escrevendo

$$P(s) = \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{j=1}^N (s - p_j)}, \quad D(s) = 1 + K P(s),$$

um ponto s^* pertence ao LGR (para algum $K > 0$) se satisfaz as **condições**:

$$\angle P(s^*) = (2k + 1) 180^\circ, \quad K = \frac{1}{|P(s^*)|}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para sistemas com múltiplas malhas, costuma-se reduzir a uma forma equivalente $F(s) = K \prod(s - z_i) \prod(s - p_j)$ e aplicar os mesmos critérios de **fase** e **magnitude**.

7.3: Procedimento do Lugar Geométrico das Raízes

O LGR estuda como as raízes da equação característica evoluem quando K varia. Considere

$$1 + K P(s) = 0, \quad P(s) = \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{j=1}^N (s - p_j)}.$$

Passo 1: Preparação da Equação Característica

Coloque a equação característica na forma $1 + K P(s) = 0$. Marque no plano- s os **polos** de malha aberta (\times) e os **zeros** de malha aberta (\circ).

Passo 2: Segmentos do Eixo Real

Um ponto real pertence ao LGR se, à sua direita, houver um **número ímpar** de polos e zeros reais de malha aberta (regra do ângulo).

Passo 3: Assíntotas (ramos ao infinito)

Se $n > M$, existirão $n - M$ ramos que vão ao infinito, aproximando-se de assíntotas com:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^M z_i}{n - M}, \quad \phi_A = \frac{(2k+1)180^\circ}{n - M}, \quad k = 0, 1, \dots, n - M - 1,$$

onde p_j e z_i são as *localizações* (em s) dos polos e zeros de malha aberta.

Passo 4: Cruzamento com o Eixo Imaginário

Se houver cruzamento do eixo $j\omega$, o valor crítico de K e a frequência são obtidos por **Routh–Hurwitz** aplicado à equação característica (substituindo $s = j\omega$ indiretamente via tabela).

Passo 5: Pontos de Saída/Entrada no Eixo Real (breakaway/break-in)

Quando ramos se separam ou se juntam no eixo real, o ponto satisfaz

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad (\text{usando } K = 1/|P(s)| \text{ sobre o eixo real}).$$

Passo 6: Ângulos de Partida e Chegada

Para polos/zeros complexos, os ângulos são dados pelo critério de fase. Por exemplo, o **ângulo de partida** de um polo complexo p_k é:

$$\theta_{partida} = 180^\circ - \left[\sum_{j \neq k} \angle(p_k - p_j) - \sum_i \angle(p_k - z_i) \right]$$

(ajustado para o quadrante correto). Fórmula análoga vale para o **ângulo de chegada** a um zero complexo.

Passo 7: Construção Final

Com polos/zeros marcados, trechos reais, assíntotas, pontos de saída/entrada e cruzamentos, esboça-se o LGR completo, mostrando a evolução dos polos de malha fechada com K .

Observações Importantes

- O LGR **começa** nos polos de malha aberta ($K \rightarrow 0^+$) e **termina** nos zeros de malha aberta ($K \rightarrow \infty$). Se faltarem zeros, ramos vão ao infinito.
- O LGR é **simétrico** em relação ao eixo real (coeficientes reais).

7.4 Projeto de Parâmetros pelo Método do Lugar das Raízes

A equação característica tem a forma

$$1 + F(s) = 0, \quad \text{com } F(s) \text{ dependendo de parâmetros (ex.: } K, a_1, \dots\text{)}.$$

Para estudar o efeito de um parâmetro (ex.: a_1), fixa-se os demais e traçase o LGR variando a_1 . Se dois parâmetros são livres, usa-se **contornos** ou **famílias de LGR**: fixa-se um e varre-se o outro (ou empregam-se mapas de *root contours/grid* de amortecimento e frequência natural), escolhendo a combinação que posicione os polos desejados.

7.5 Sensibilidade e o Lugar das Raízes

Uma razão central do *feedback* é reduzir a sensibilidade a variações de parâmetros. A **sensibilidade logarítmica** de T a K é

$$S_K = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln K} = \frac{K}{T} \frac{\partial T}{\partial K}.$$

Para a **sensibilidade das raízes** de $D(s, K) = 1 + K P(s) = 0$, derivando implicitamente:

$$\frac{\partial D}{\partial s} \frac{ds}{dK} + \frac{\partial D}{\partial K} = 0 \Rightarrow \frac{ds}{dK} = -\frac{P(s)}{K P'(s)}, \quad \frac{\partial s}{\partial \ln K} = K \frac{ds}{dK} = -\frac{P(s)}{P'(s)}.$$

Essas expressões mostram *quanto* um polo de malha fechada $s(K)$ se move quando K varia — informação muito útil ao projetar pelo LGR.

7.6 Controladores PID

Um PID tem

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s,$$

o que no tempo dá

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}.$$

Casos particulares:

$$PI : G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \quad (K_D = 0), \quad PD : G_c(s) = K_p + K_D s \quad (K_I = 0).$$

No LGR, PI adiciona um **polo na origem** e um zero à esquerda; PD adiciona um **zero** (melhora amortecimento/taxa inicial).

7.7 Lugar das Raízes com Ganho Negativo

Para $K < 0$, escreva $K = -K'$ com $K' > 0$:

$$1 + K P(s) = 1 - K' P(s) = 0.$$

A **condição de fase** muda para $\angle P(s) = 0^\circ$ ($mod 360^\circ$) (pois o sinal do ganho inverte). Ainda vale a condição de magnitude com $K' = \frac{1}{|P(s)|}$. O LGR para ganho negativo é útil quando a planta tem *sinal efetivo* tal que o realimentador precisa inverter o sentido para estabilizar.

7.8 Exemplos de Projeto

Exemplo 7.11: Controle de Velocidade de Turbina Eólica

Um modelo linearizado (inclinação coletiva \rightarrow velocidade do gerador) pode ser

$$G(s) = \frac{4,2158(s - 827,1)}{(s + 0,195)(s^2 + 0,101s + 482,6)},$$

com um zero de malha aberta em RHP. Um modelo simplificado de 1ª ordem é

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}.$$

Usando um PI

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s},$$

o **sinal efetivo** do loop determina se ganhos K_p, K_I positivos ou negativos produzem realimentação *negativa*. Dependendo do modelo (e do zero em RHP), pode ser necessário escolher o *sinal dos ganhos* para garantir estabilidade (via LGR, buscando polos no SPE). A análise de estabilidade deve então confirmar margens adequadas e rejeição de perturbações.