Capítulo 6: A Estabilidade de Sistemas de Feedback Linear

6.1 - O Conceito de Estabilidade

Introdução

Ao projetar e analisar sistemas de controle com *feedback*, a **estabilidade** é central. Muitos processos são instáveis em malha aberta, e alguns são deliberadamente operados assim, contando com o *feedback* para estabilizar a dinâmica.

Estabilidade Absoluta e Relativa

Estabilidade absoluta diz apenas se o sistema é estável ou não (sim/não). Já a **estabilidade relativa** mede "o quão estável" o sistema é — isto é, quão amortecidos e rápidos são os modos (distância dos polos ao eixo imaginário, margens de ganho/fase, etc.).

Definição de Estabilidade

Usaremos a noção BIBO: um sistema é **estável** se *entrada limitada* produz *saída limitada*. A analogia do cone ajuda:

- **Estável:** cone sobre a base — pequenos desvios retornam ao equilíbrio;
- **Neutro (marginal):** cone deitado — permanece onde foi colocado, sem tendência de voltar ou divergir;
- **Instável:** cone sobre a ponta — qualquer pequeno desvio o faz cair.

Localização dos Polos no Plano-s

Para sistemas LTI (causais e próprios), estabilidade BIBO equivale a **todos os polos de malha fechada** no **semiplano esquerdo** (SPE). Polos no eixo $j\omega$ indicam **estabilidade marginal** (senoides sustentadas); polos no semiplano direito (SPD) indicam **instabilidade**.

Estabilidade em Sistemas de Controle

Escrevendo a malha fechada como

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \;=\; \frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{\ell=1}^{N}(s+p_\ell)},$$

o sistema é **estável** se e somente se $\Re\{p_\ell\} < 0$ para todo ℓ. Em termos de projeto: o *feedback* deve posicionar todos os polos de $T(s)$ no SPE.

Estabilidade Marginal

Se a equação característica possui **raízes simples** no eixo $j\omega$ e todas as demais no SPE, a saída a entradas limitadas pode apresentar **oscilações sustentadas** (marginalmente estável). **Atenção:** *raízes repetidas* no eixo $j\omega$ tornam o sistema **instável** (crescimento proporcional a t).

6.2 - O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Introdução

O critério de Routh–Hurwitz determina *sem calcular as raízes* se há polos no SPD. Ele opera diretamente sobre a equação característica

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0, \qquad a_i \in R.$$

Arranjo (Tabela) de Routh

Constrói-se a **tabela de Routh** a partir dos coeficientes:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Os elementos da linha s^{n-2} são obtidos por

$$b_k = \frac{a_{n-1}a_{n-3}a_n a_{n-2}}{a_{n-1}}, \quad \frac{a_{n-1}a_{n-5}a_n a_{n-4}}{a_{n-1}}, \ \ldots$$

e assim sucessivamente para as linhas abaixo (sempre "determinante de 2×2" dividido pelo **primeiro elemento da linha acima**).

Critério: o número de *mudanças de sinal* na **primeira coluna** da tabela é igual ao número de polos no SPD. Logo, para estabilidade, **todos os elementos da primeira coluna** devem ser **positivos** (assumindo $a_n > 0$).

Casos Especiais

- **Elemento nulo na primeira coluna:** substitua por $\varepsilon > 0$ (*truque do* ε), prossiga os cálculos e depois faça $\varepsilon \to 0^+$.
- **Linha inteira de zeros:** forme o **polinômio auxiliar** com a linha imediatamente acima e derive-o para preencher a linha de zeros; isso indica **raízes simétricas** em torno do eixo $j\omega$ (possível marginalidade).
- **Raízes no eixo $j\omega$:** uma mudança de sinal "no limite" ou linha de zeros pode revelar presença de polos em $j\omega$. **Simples** $\Rightarrow$ marginal; repetidas $\Rightarrow$ instável.

6.3 - A Estabilidade Relativa dos Sistemas de Controle de Feedback

Introdução

Routh–Hurwitz responde "estável?" (absoluta), mas não "*quão* estável?". Para isso, avaliamos a estabilidade relativa, ligada a amortecimento e rapidez dos modos (distâncias dos polos ao eixo imaginário).

Estabilidade Relativa

Uma medida simples é exigir que $\Re\{s\} < -\alpha$ para algum $\alpha > 0$ (todos os polos suficientemente à esquerda). Isso garante mínimo *amortecimento/rapidez*.

Método de Deslocamento do Eixo

Podemos aplicar Routh–Hurwitz após deslocar o eixo: faça

$$s_n = s + \alpha \quad (\alpha > 0).$$

Substituir $s = s_n - \alpha$ na equação característica gera um novo polinômio em s_n. Se esse polinômio for estável (todos os coeficientes da primeira coluna positivos), então $\Re\{s\} < -\alpha$ no sistema original.

- **Exemplo 6.6:** $q(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$. Definindo $s_n = s + 1$,

  $$q(s_n - 1) = (s_n - 1)^3 + 4(s_n - 1)^2 + 6(s_n - 1) + 4 = s_n^3 + s_n^2 + s_n + 1.$$

  Se o arranjo de Routh de $s_n^3 + s_n^2 + s_n + 1$ não tem mudanças de sinal na primeira coluna, concluímos que $\Re\{s\} < -1$ no sistema original (boa **estabilidade relativa**).

6.4 - A Estabilidade dos Sistemas de Variáveis de Estado

Introdução

Quando o sistema é modelado em variáveis de estado, podemos verificar a estabilidade tanto por diagramas (fluxo de sinal/diagrama de blocos) quanto diretamente pela matriz de estado. O caminho mais direto é olhar os autovalores de A.

Exemplo 6.7: Estabilidade de um Sistema de Segunda Ordem

Considere

$$\{ \dot{} x_1 = -3x_1 + x_2, \dot{x}_2 = x_2 - Kx_1 + Ku.$$

Com $u = 0$, temos $\dot{x} = Ax$ com $A = -31$
$-K1$. A equação característica vem de $\det(\lambda I - A) = 0$:

$$\det\lambda + 3 - 1K\lambda - 1 = (\lambda + 3)(\lambda - 1) + K = \lambda^2 + 2\lambda + (K - 3) = 0.$$

Para estabilidade BIBO em LTI, exigimos ambos os polos no SPE $\Rightarrow$ coeficientes positivos e, aqui, $K - 3 > 0$. Logo, $K > 3$.

Método de Equação Diferencial Vetorial

De modo geral, para $\dot{x} = Ax$ (sem entrada), os autovalores de A são as raízes de

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

O sistema é estável (no sentido LTI/BIBO para saídas próprias) quando $\Re\{\lambda_i\} < 0$ para todos os autovalores λ_i.

6.5 - Exemplos de Projeto

Exemplo 6.9: Controle de Direção de um Veículo com Esteiras

Equação Característica

A malha fechada leva a

$$q(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + Ka = 0.$$

Matriz (Tabela) de Routh

As duas primeiras linhas são:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 17 & Ka \\ s^3 & 8 & K+10 & 0 \end{array}$$

A linha s^2 tem

$$b_3 = \frac{8 \cdot 17 - 1 \cdot (K + 10)}{8} = \frac{126 - K}{8}, \qquad c_3 = \frac{8 \cdot Ka - 1 \cdot 0}{8} = Ka.$$

A linha s^1 (primeira coluna) fica

$$\frac{(126 - K)(K + 10) - 64Ka}{126 - K}.$$

Condições de estabilidade (primeira coluna > 0):

$$K < 126, \qquad Ka > 0, \qquad (K + 10)(126 - K) - 64Ka > 0.$$

6.6 - Estabilidade do Sistema Usando Software de Projeto de Controle

Critério de Routh-Hurwitz

O critério de Routh–Hurwitz é necessário e suficiente para estabilidade (polinômios com coeficientes reais). Exemplo:

$$q(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24 = 0.$$

A tabela de Routh mostra mudança de sinal na primeira coluna, logo existe pelo menos um polo no SPD $\Rightarrow$ sistema instável.

Exemplo 6.11: Controle de Veículo com Esteiras

A equação característica é

$$q(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + aK = 0.$$

As condições de Routh dão

$$K < 126, \quad aK > 0, \quad (K + 10)(126 - K) - 64aK > 0.$$

Para $a = 0{,}6$ e $K = 70$,

$$T(s) = \frac{70s + 42}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 80s + 42}.$$

6.7 - Exemplo de Projeto Sequencial: Sistema de Leitura de Disco Rígido

Sistema com Chave Aberta

Equação característica:

$$s^3 + 1020s^2 + 20000s + 5000K_a = 0.$$

Pelo critério de Routh para cúbicos, a condição chave é

$$1020 \cdot 20000 - 1 \cdot 5000K_a > 0 \;\Rightarrow\; K_a < 4080.$$

Para $K_a = 4080$, o sistema é marginalmente estável com um par em $j\omega$ (por exemplo, $s = \pm j\,141{,}4$).

Sistema com Feedback de Velocidade (Chave Fechada)

Equação característica:

$$s^3 + 1020s^2 + \big(20000 + 5000K_aK_1\big)s + 5000K_a = 0.$$

Com $K_a > 0$ e $K_1 > 0$, os coeficientes são positivos; aplicando Routh, obtemos a condição análoga

$$1020\,\big(20000 + 5000K_aK_1\big) - 5000K_a > 0,$$

além de $K_a > 0$. Em prática, escolhem-se K_a, K_1 que assegurem essas desigualdades e forneçam margens de estabilidade confortáveis (evitando saturação do atuador e excesso de oscilação).