Capítulo 13: Sistemas de Controle Digital

13.1 Introdução

O capítulo aborda que o uso de **computadores digitais** como controladores cresceu muito. Em um sistema de controle *digital* em malha fechada, o computador recebe o erro em forma *discreta*, calcula a ação de controle e envia uma saída que, após **DAC**, atua no processo contínuo. Assim, há conversões **ADC** (analógico→digital) e **DAC** (digital→analógico). Um **retentor de ordem zero** (ZOH) mantém a saída do DAC constante entre amostras.

13.2 Aplicações de Sistemas de Controle em Computadores Digitais

Um computador digital reúne **CPU**, **memórias** e **interfaces** de E/S. A capacidade de processamento segue (historicamente) a **Lei de Moore**.

- **Vantagens do controle digital:** flexibilidade (ajuste por *software*), imunidade a ruído (processamento digital), facilidade de implementação de lógicas avançadas e boa eficiência energética.

13.3 Sistemas de Dados Amostrados

Os sinais são amostrados a cada T_s (período de amostragem), gerando sequências $r[k] = r(kT_s)$. O **sinal amostrado** $r^*(t)$ é uma versão "em escada" do contínuo, e o **ZOH** reconstrói um sinal contínuo mantido entre amostras para excitar a planta. A escolha de T_s influencia desempenho e estabilidade: regra prática, $\omega_s = 2\pi T_s$ bem maior que a frequência de cruzamento do laço.

13.4 A Transformada Z

Definimos o mapeamento $z = e^{sT_s}$. Para a sequência $r[k]$, a transformada Z é

$$\mathcal{Z}\{r[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} r[k]\, z^{-k}.$$

A transformada Z converte equações em diferenças no domínio z de forma análoga ao papel de Laplace no contínuo.

13.5 Sistemas de Dados Amostrados de Feedback em Malha Fechada

Com **feedback unitário** no domínio z,

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}.$$

- **Exemplo (resposta a degrau):** dado $G(z) = 0.3678\,z + 0.2644z^2 - z + 0.6322$ e $R(z) = zz - 1$, obtemos $Y(z) = T(z)R(z)$. A sequência $y[k]$ vem por expansão em série (longa divisão em z^{-1}) ou por $\mathcal{Z}^{-1}$.
- **Estabilidade (discreto):** o sistema é estável se **todos os polos de** $T(z)$ estão **dentro do círculo unitário** ($|z| < 1$). O mapeamento $s \mapsto z = e^{sT_s}$ leva o semiplano esquerdo no contínuo ao interior do círculo unitário.

13.6 Desempenho de um Sistema de Segunda Ordem com Dados Amostrados

Considere a planta contínua

$$G_p(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}.$$

Com ZOH e período T_s, a versão discreta $G(z)$ depende de $E = e^{-T_s/\tau}$. (Cuidado para não confundir T_s com τ.) A equação característica de malha fechada assume a forma

$$q(z) = z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

com coeficientes função de K, E e T_s. A estabilidade exige as raízes de $q(z)$ *dentro* do círculo unitário. *Observação:* diminuir T_s (amostrar mais rápido) aproxima o desempenho do sistema contínuo, mas aumenta esforço computacional.

13.7 Sistemas de Malha Fechada com Compensação por Computador Digital

Com um compensador digital $D(z)$ no caminho direto,

$$T(z) = \frac{G(z)\,D(z)}{1 + G(z)\,D(z)}.$$

O projeto visa requisitos de $y[k]$ (tempo de subida, sobressinal, erro estacionário) e robustez (margens, sensibilidade), respeitando saturações e atraso de processamento.

13.8 O Lugar das Raízes de Sistemas de Controle Digital

A equação característica é

$$1 + K\,G(z)\,D(z) = 0.$$

O **LGR no plano-z** mostra como os polos de malha fechada variam com K. As condições de fase/magnitude são análogas às do contínuo, mas agora em z.

- **Exemplo 13.8:** com $G_p(s) = \frac{1}{s^2}$ (ZOH) e $D(z) = 1$, resulta $K\,G(z) = K\,z + 1(z-1)^2$.
- **Exemplo 13.9:** dado $D(z) = 1.359\,(z - 0.3678)z + 0.240$ e $G(z) = 0.3678\,(z + 0.7189)(z - 1)(z - 0.3678)$ temos

$$T(z) = \frac{0.50\,(z + 0.7189)}{(z-1)(z+0.240)}.$$

13.9 Implementação de Controladores Digitais

No contínuo, um PID paralelo é

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d\,s.$$

Aproximações simples no domínio z (amostragem T_s):

$$\begin{aligned} derivada: & \frac{dx}{dt} \approx \frac{x[k] - x[k-1]}{T_s} \;\Rightarrow\; \mathcal{Z}\{x'[k]\} = \frac{z-1}{T_s z}\,X(z), \\ integral: & \int x\,dt \approx T_s \sum x[k] \;\Rightarrow\; \mathcal{Z}\Big\{\sum x\Big\} = \tfrac{z}{z-1}\,X(z). \end{aligned}$$

Uma forma direta no z-domínio:

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i T_s\,z}{z-1} + \frac{K_d\,(z-1)}{T_s z}.$$

Duas implementações úteis (com $e[k]$ o erro, $u[k]$ a saída do controlador):

- **Forma posicional (clássica):**

$$u[k] = K_p\,e[k] + K_i\,T_s \sum_{i=0}^{k} e[i] + \; K_d\,\frac{e[k] - e[k-1]}{T_s}.$$

- **Forma incremental (diferenças):**

$$\Delta u[k] = u[k] - u[k-1] = K_p \Delta e[k] + K_i T_s\,e[k] + K_d\,\frac{\Delta e[k] - \Delta e[k-1]}{T_s},$$

  onde $\Delta e[k] = e[k] - e[k-1]$.

Prática: use **filtro no derivativo** $T_d s 1 + N T_d s$ e **anti-windup** no integrador quando houver saturação do atuador.

13.10 Exemplo: Superfície de Controle Fly-by-Wire

Para $G_p(s) = 1s(s+1)$, o efeito do ZOH com período T_s aparece como um ganho em $1 - e^{-T_s s}s$ no canal da referência. O bloco equivalente contínuo para a via ZOH–planta é

$$G(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s^2(s+1)}.$$

A discretização (por Tustin ou exata via ZOH) deve preservar margens de fase/ganho; após discretizar e fechar a malha, verifique os polos em z, M_g/M_f e requisitos de tempo.