

## Capítulo 7: Método do Lugar das Raízes

### 7.1 Introdução

O **método do lugar das raízes** (Evans, 1948) é uma técnica gráfica que mostra, no plano- $s$ , *como os polos de malha fechada se movem* quando um parâmetro (tipicamente o ganho  $K$ ) varia. Ele ajuda a avaliar estabilidade, sensibilidade e desempenho transitório, e combina muito bem com o critério de Routh–Hurwitz.

### 7.2 O Conceito do Lugar da Raízes

Para um sistema de malha fechada

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{q(s)},$$

os **polos de malha fechada** são as raízes de  $q(s) = 0$ . Em malha única padrão,

$$1 + K G(s) = 0,$$

onde  $K$  é o parâmetro que varia. O **lugar das raízes (LGR)** é o conjunto das posições de polos de malha fechada quando  $K$  vai de 0 a  $\infty$  (e, por extensão, também pode-se estudar  $K < 0$ ).

Escrevendo

$$P(s) = \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{j=1}^N (s - p_j)}, \quad D(s) = 1 + K P(s),$$

um ponto  $s^*$  pertence ao LGR (para algum  $K > 0$ ) se satisfaz as **condições**:

$$\angle P(s^*) = (2k + 1) 180^\circ, \quad K = \frac{1}{|P(s^*)|}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para sistemas com múltiplas malhas, costuma-se reduzir a uma forma equivalente  $F(s) = K \prod (s - z_i) \prod (s - p_j)$  e aplicar os mesmos critérios de **fase** e **magnitude**.

### 7.3: Procedimento do Lugar Geométrico das Raízes

O LGR estuda como as raízes da equação característica evoluem quando  $K$  varia. Considere

$$1 + K P(s) = 0, \quad P(s) = \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{j=1}^N (s - p_j)}.$$

### Passo 1: Preparação da Equação Característica

Coloque a equação característica na forma  $1 + K P(s) = 0$ . Marque no plano- $s$  os **polos** de malha aberta ( $\times$ ) e os **zeros** de malha aberta ( $\circ$ ).

### Passo 2: Segmentos do Eixo Real

Um ponto real pertence ao LGR se, à sua direita, houver um **número ímpar** de polos e zeros reais de malha aberta (regra do ângulo).

### Passo 3: Assíntotas (ramos ao infinito)

Se  $n > M$ , existirão  $n - M$  ramos que vão ao infinito, aproximando-se de assíntotas com:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^M z_i}{n - M}, \quad \phi_A = \frac{(2k + 1) 180^\circ}{n - M}, \quad k = 0, 1, \dots, n - M - 1,$$

onde  $p_j$  e  $z_i$  são as *localizações* (em  $s$ ) dos polos e zeros de malha aberta.

### Passo 4: Cruzamento com o Eixo Imaginário

Se houver cruzamento do eixo  $j\omega$ , o valor crítico de  $K$  e a frequência são obtidos por **Routh–Hurwitz** aplicado à equação característica (substituindo  $s = j\omega$  indiretamente via tabela).

### Passo 5: Pontos de Saída/Entrada no Eixo Real (breakaway/break-in)

Quando ramos se separam ou se juntam no eixo real, o ponto satisfaz

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad (\text{usando } K = 1/|P(s)| \text{ sobre o eixo real}).$$

### Passo 6: Ângulos de Partida e Chegada

Para polos/zeros complexos, os ângulos são dados pelo critério de fase. Por exemplo, o **ângulo de partida** de um polo complexo  $p_k$  é:

$$\theta_{partida} = 180^\circ - \left[ \sum_{j \neq k} \angle(p_k - p_j) - \sum_i \angle(p_k - z_i) \right]$$

(ajustado para o quadrante correto). Fórmula análoga vale para o **ângulo de chegada** a um zero complexo.

### Passo 7: Construção Final

Com polos/zeros marcados, trechos reais, assíntotas, pontos de saída/entrada e cruzamentos, esboça-se o LGR completo, mostrando a evolução dos polos de malha fechada com  $K$ .

## Observações Importantes

- O LGR **começa** nos polos de malha aberta ( $K \rightarrow 0^+$ ) e **termina** nos zeros de malha aberta ( $K \rightarrow \infty$ ). Se faltarem zeros, ramos vão ao infinito.
- O LGR é **simétrico** em relação ao eixo real (coeficientes reais).

## 7.4 Projeto de Parâmetros pelo Método do Lugar das Raízes

A equação característica tem a forma

$$1 + F(s) = 0, \quad \text{com } F(s) \text{ dependendo de parâmetros (ex.: } K, a_1, \dots).$$

Para estudar o efeito de um parâmetro (ex.:  $a_1$ ), fixa-se os demais e traça-se o LGR variando  $a_1$ . Se dois parâmetros são livres, usa-se **contornos** ou **famílias de LGR**: fixa-se um e varre-se o outro (ou empregam-se mapas de *root contours/grid* de amortecimento e frequência natural), escolhendo a combinação que posicione os polos desejados.

## 7.5 Sensibilidade e o Lugar das Raízes

Uma razão central do *feedback* é reduzir a sensibilidade a variações de parâmetros. A **sensibilidade logarítmica** de  $T$  a  $K$  é

$$S_K = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln K} = \frac{K}{T} \frac{\partial T}{\partial K}.$$

Para a **sensibilidade das raízes** de  $D(s, K) = 1 + K P(s) = 0$ , derivando implicitamente:

$$\frac{\partial D}{\partial s} \frac{ds}{dK} + \frac{\partial D}{\partial K} = 0 \Rightarrow \frac{ds}{dK} = -\frac{P(s)}{K P'(s)}, \quad \frac{\partial s}{\partial \ln K} = K \frac{ds}{dK} = -\frac{P(s)}{P'(s)}.$$

Essas expressões mostram *quanto* um polo de malha fechada  $s(K)$  se move quando  $K$  varia — informação muito útil ao projetar pelo LGR.

## 7.6 Controladores PID

Um PID tem

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s,$$

o que no tempo dá

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}.$$

Casos particulares:

$$PI : G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \quad (K_D = 0), \quad PD : G_c(s) = K_p + K_D s \quad (K_I = 0).$$

No LGR, PI adiciona um **polo na origem** e um zero à esquerda; PD adiciona um **zero** (melhora amortecimento/taxa inicial).

## 7.7 Lugar das Raízes com Ganho Negativo

Para  $K < 0$ , escreva  $K = -K'$  com  $K' > 0$ :

$$1 + K P(s) = 1 - K' P(s) = 0.$$

A **condição de fase** muda para  $\angle P(s) = 0^\circ \pmod{360^\circ}$  (pois o sinal do ganho inverte). Ainda vale a condição de magnitude com  $K' = \frac{1}{|P(s)|}$ . O LGR para ganho negativo é útil quando a planta tem *sinal efetivo* tal que o realimentador precisa inverter o sentido para estabilizar.

## 7.8 Exemplos de Projeto

### Exemplo 7.11: Controle de Velocidade de Turbina Eólica

Um modelo linearizado (inclinação coletiva  $\rightarrow$  velocidade do gerador) pode ser

$$G(s) = \frac{4,2158(s - 827,1)}{(s + 0,195)(s^2 + 0,101s + 482,6)},$$

com um zero de malha aberta em RHP. Um modelo simplificado de 1<sup>a</sup> ordem é

$$G(s) = \frac{K}{T s + 1}.$$

Usando um PI

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s},$$

o **sinal efetivo** do loop determina se ganhos  $K_p, K_I$  positivos ou negativos produzem realimentação *negativa*. Dependendo do modelo (e do zero em RHP), pode ser necessário escolher o *sinal dos ganhos* para garantir estabilidade (via LGR, buscando polos no SPE). A análise de estabilidade deve então confirmar margens adequadas e rejeição de perturbações.