Télécom ParisTech 10 novembre 2015 Année 2015-2016

Contrôle de connaissances de MDI 210 - OPTIM

Durée : 3 h.
Documents autorisés : trois feuilles recto verso (soit six pages), format A4 ; dictionnaires pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.
L'épreuve est constituée de cinq exercices indépendants.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.

Exercice 1

1. Déterminer la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. À l'aide de la décomposition LU de A, déterminer l'inverse de A.
Indication : l'inverse de A fait intervenir des fractions rationnelles de dénominateur égal à 7.

Exercice 2

1. En appliquant la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -20 \\ 12 & 8 & 15 \\ -20 & 15 & -8 \end{pmatrix}$.

Indication : on rappelle que 144 est le carré de 12 et 625 celui de 25.

2. On pose $b = (-1\ \ -12\ \ 20)^t$ et on considère, pour $X \in \mathbb{R}^3$, la forme quadratique Q définie par $Q(X) = \frac{1}{2} X^t.A.X + b^t.X$. La forme Q atteint-elle un minimum sur R^3 ? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 3

1. On considère le problème (P1) suivant :

Maximiser $z_1 = 7x_1 + 8x_2$

avec les contraintes $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \leq 32 & (1) \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 32 & (2) \\ x_1 + x_2 \leq 5 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Résoudre (P1) à l'aide de l'algorithme du simplexe.
2. On considère maintenant le problème (P2) suivant, qui ne diffère de (P1) que par le premier coefficient de la fonction objectif :

$$\text{Maximiser } z_2 = 9x_1 + 8x_2$$

$$\text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \leq 32 & (1) \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 32 & (2) \\ x_1 + x_2 \leq 5 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a. Comment le dernier dictionnaire obtenu lors de la résolution de (P1) à la question précédente doit-il être modifié pour représenter un dictionnaire pour le problème (P2) ?
b. Résoudre (P2) à l'aide de l'algorithme du simplexe en partant de ce dictionnaire.
3.a. Écrire le problème dual de (P2).
b. Donner une solution optimale de ce problème dual (on expliquera comment on obtient la valeur des variables duales de cette solution).
4. Une des contraintes (1), (2) ou (3) est en fait redondante par rapport aux autres. Indiquer laquelle. Comment cela se traduit-il du point de vue de la répartition entre variables de base et variables hors base ?

Exercice 4

On considère le problème P consistant à minimiser la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \ln x + 3x^2 + 2y^2 - 4xy$$

en respectant la contrainte $x \geq 1$. On appelle D le domaine réalisable, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) vérifiant $x \geq 1$.
1. La fonction f est-elle convexe sur D ?
2. Déterminer le minimum de P en appliquant la méthode de plus grande descente à partir du point (1, 0) (on détaillera les calculs ; on pourra s'aider d'un dessin pour déterminer les directions à suivre).
3. Le minimum obtenu est-il global ? Y a-t-il unicité du minimum global ?

Exercice 5

Soit α un paramètre réel. On considère la famille de fonctions

$$f_\alpha(x, y) = (2x - 1)^4 + (x - 2)^2 + \alpha(2y - 1)^2$$

définies sur le domaine D avec :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } g_1(x, y) = 1 - x \leq 0,\ g_2(x, y) = -y \leq 0,\ g_3(x, y) = 3 - x - y \leq 0\}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α atteint-elle un minimum au point (1, 2) ?
2. Soit (x^*, y^*) un point de l'intérieur strict de D : $g_1(x^*, y^*) < 0$, $g_2(x^*, y^*) < 0$, $g_3(x^*, y^*) < 0$. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α atteint-elle un minimum au point (x^*, y^*) ?
3. Soit (x^*, y^*) un point ne saturant que g_1 : $g_1(x^*, y^*) = 0$, $g_2(x^*, y^*) < 0$, $g_3(x^*, y^*) < 0$. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α atteint-elle un minimum au point (x^*, y^*) ? Indiquer alors le ou les points (x^*, y^*) atteignant le minimum, dont on précisera la valeur.