Corrigé : Feuille de travaux dirigés 6

Solution Exercice 1

1. Supposons pour commencer que F soit continue *et strictement croissante* sur $\mathbb{R}$ (c'est le cas par exemple pour la fonction de répartition d'une loi normale, d'une Student,...). F est alors une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. Soit F^{-1} l'inverse de F. On a alors, pour $u \in]0,1[$, en posant $U = F(X)$,

$$\mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(F(X) \leq u) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u.$$

La fonction de répartition de U est donc

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } u \in [0,1] \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}$$

De sorte que U est une v.a. uniforme sur $[0,1]$.

Dans le cas général, F n'est pas forcément *strictement* croissante. Pour $u \in]0,1[$, posons

$$F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\} \quad ; \quad I_u = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$$

de sorte que $F^{\leftarrow}(u) = \inf I_u$. (Rappelons que l' « inf » d'un ensemble est le plus grand de ses minorants). Notons une propriété essentielle de I_u : puisque F est croissante,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left.\begin{matrix} x \in I_u \\ x < y \end{matrix}\right\} \Rightarrow y \in I_u. \tag{1}$$

Ainsi, si $z \in \mathbb{R}$ est tel que $z \notin B_u$, alors z est un minorant de B_u.

(a) Montrons que $F(F^{\leftarrow}(u)) = u$.

— Pour $z > F^{\leftarrow}(u)$, $F(z) \geq u$ car sinon on aurait $z \notin I_u$, de sorte que z serait un minorant de I_u strictement plus grand que $F^{\leftarrow}(u)$, contredisant la définition de $F^{\leftarrow}(u)$. Par continuité à droite de F,

$$F(F^{\leftarrow}(u)) = \lim_{z \downarrow F^{\leftarrow}(u), z > u} F(z) \geq u.$$

— D'autre part pour $z < F^{\leftarrow}(u)$, $z \notin I_u$ (sinon $F^{\leftarrow}(u)$ ne serait pas un minorant de I_u) donc $F(z) < F^{\leftarrow}(u)$. Par continuité à gauche de F,

$$F(F^{\leftarrow}(u)) = \lim_{z \uparrow F^{\leftarrow}(u), z < u} F(z) \leq u.$$

(b) Soit $u \in]0,1[$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Si $F(x) < u$, alors $x \notin I_u$ donc $x \leq F^{\leftarrow}(u)$. Le point (a) montre de plus que $F^{\leftarrow}(u) \in I_u$, donc $x \neq F^{\leftarrow}(u)$. Par conséquent $x < F^{\leftarrow}(u)$.
Réciproquement, si $x < F^{\leftarrow}(u)$, alors $x \notin I_u$ donc $F(x) < u$. On a donc bien

$$F(x) < u \iff x < F^{\leftarrow}(u)$$

(c) Posons $Z = F(X)$. Pour montrer que Z suit une loi uniforme, il suffit de montrer que pour $u \in]0,1[$, $\mathbb{P}(Z \leq u) = u$. Il suffit pour cela de montrer que $\mathbb{P}(Z < u) = u$ car alors $\mathbb{P}(Z \leq u) = \lim_{s \downarrow u} \mathbb{P}(Z < s) = \lim_{s \downarrow u} s = u$.
Soit $u \in]0,1[$. D'après le point (b),

$$\mathbb{P}(Z < u) = \mathbb{P}(F(X) < u) = \mathbb{P}(X < F^{\leftarrow}(u)).$$

Puisque F est continue,

$$\mathbb{P}(X < F^{\leftarrow}(u)) = \lim_{s \uparrow F^{\leftarrow}(u)} \mathbb{P}(X \leq s) = \lim_{s \uparrow F^{\leftarrow}(u)} F(s) = F(F^{\leftarrow}(u)) = u,$$

où la dernière inégalité vient du point (a), d'où le résultat.

2. Soit $X \sim \mathcal{B}er(p)$ et F sa fonction de répartition. Alors $F(x) = (1-p)\mathbb{1}_{0 \leq x < 1} + p\mathbb{1}_{1 \leq x}$ et

$$F(X) = \begin{cases} 1-p & \text{avec probabilité 1 - p} \\ 1 & \text{avec probabilité p} \end{cases}$$

$F(X)$ n'est donc pas une v.a. uniforme sur $[0,1]$.

Solution Exercice 2

1. Notons F_θ la fonction de répartition de X_1 et $F_{(n),\theta}$ la fonction de répartition de $M_n(X)$, lorsque $X_1 \sim \mathrm{P}_\theta = \mathcal{U}_{[0,\theta]}$. On a

$$F_\theta(x) = \mathbb{1}_{x>0} \min(x/\theta, 1).$$

Par indépendance des X_i, on a donc, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{(n),\theta}(x) &= \mathbb{P}_\theta(M_n(X) \leq x) = \mathbb{P}_\theta(\forall i \leq n, X_i \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(X_i \leq x) = F_\theta^n(x) \\ &= \mathbb{1}_{x>0} \min(x/\theta, 1)^n. \end{aligned}$$

2. D'après l'exercice 1, puisque $F_{(n),\theta}$ est continue, on a $F_{(n),\theta}(M_n(X)) \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. De plus, avec probabilité 1, $0 < M_n(X) < \theta$, de sorte que si l'on prend comme fonction pivotale $\varphi(x,\theta) = (\max x_i/\theta)^n$, et si l'on pose

$$Z = \varphi(M_n(X), \theta) = \left(\frac{M_n(X)}{\theta}\right)^n,$$

alors $Z \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.

3. Avec probabilité 1, on a $M_n(X) \leq \theta$. Pour que $\mathbb{P}_\theta(M_n(X) \leq \theta \leq R(X)] = 1-\alpha$, il faut et il suffit que $\mathbb{P}_\theta(\theta \leq R(X)) = 1-\alpha$. On cherche donc une borne supérieure de confiance $R(X)$ de niveau $1-\alpha$ pour θ. La fonction $\theta \mapsto \varphi(x,\theta)$ étant (pour $P_\theta^{\otimes n}$-presque tout x) décroissante en θ, on cherche une région pour Z de type $]a,+\infty[$. Enfin, Z étant uniformément distribuée sur $[0,1]$, pour tout $\alpha \in]0,1[$, pour tout θ, $\mathbb{P}_\theta(Z > \alpha) = 1-\alpha$. Ainsi

$$\begin{aligned}\forall\theta > 0, 1-\alpha &= \mathbb{P}_\theta(Z \geq \alpha)\\ &= \mathbb{P}_\theta(M_n(X)/\theta \geq \alpha^{1/n})\\ &= \mathbb{P}_\theta(\theta \leq \underbrace{\frac{M_n(X)}{\alpha^{1/n}}}_{R(X)})\end{aligned}$$

La région de confiance cherchée au niveau $1-\alpha$ est donc $[M_n(X), R(X)] = [M_n(X), \frac{M_n(X)}{\alpha^{1/n}}]$.

4. Soit $\theta_0 > 0$. On cherche à construire un test de niveau α pour l'hypothèse $H_0 : \theta \geq \theta_0$ contre $H_1 : \theta < \theta_0$.
Considérons pour commencer l'hypothèse simple $\tilde{H}_0 : \{\theta = \theta_0\}$. On va construire un test dont on montrera ensuite qu'il convient pour l'hypothèse H_0. Il parait « naturel » de rejeter H_0 lorsque θ_0 dépasse la borne de confiance $R(X)$ construite précédemment (voir le paragraphe « dualité tests-intervalles de confiance du poly » si cela ne vous parait pas si naturel). Considérons le test

$$\delta_{\theta_0} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } R(X) < \theta_0 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Le risque de première espèce de ce test est

$$R(\theta_0, \delta_{\theta_0}) = \mathbb{P}_{\theta_0}(R(X) < \theta_0) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\theta_0 \notin [M_n(X), R(X)] = \alpha.$$

Le test δ_{θ_0} est donc de niveau α pour $\tilde{H}_0$.
Supposons maintenant que l'on utilise δ_{θ_0} pour tester l'hypothèse $H_0 : \{\theta \geq \theta_0\}$. Pour $\theta > \theta_0$, le risque de première espèce $R(\theta, \delta_0)$ est

$$\begin{aligned}R(\theta, \delta_0) &= \mathbb{P}_\theta(\delta_0(X) = 1) = \mathbb{P}_\theta(R(X) < \theta_0)\\ &\leq \mathbb{P}_\theta(R(X) < \theta) \quad (\text{car } \theta_0 \leq \theta\\ &= \alpha \text{ par construction de la borne sup de confiance } R(X).\end{aligned}$$

On a donc bien, en notant $\Theta_0 = \{\theta : \theta \geq \theta_0\}$,

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} R(\theta, \delta_{\theta_0}) = \alpha$$

ce qui prouve que δ_{θ_0} est un test de niveau α pour H_0.

5. Application numérique : si $n = 10$ et $M_n(X) = 5$, alors la borne supérieure $R(X)$ pour θ au niveau de confiance 95% est

$$R(X) = \frac{M_n(X)}{(5/100)^{1/n}} = 6.74.$$

Puisque $\theta_0 = 6 < 6.74$, $\delta_{\theta_0}(X) = 0$: on ne rejette pas l'hypothèse $\{\theta \geq 6\}$.

Solution Exercice 3

1. (a) En notant $\tilde{P}_1 = H_1 H_1^\top$, il faut vérifier que $(\tilde{P}_1)^2 = \tilde{P}_1$, que $\tilde{P}_1^\top = \tilde{P}_1$ et que $E_1^\perp = \ker(\tilde{P}_1)$..
   — Puisque H_1 est la matrice d'une base orthonormée à r éléments, $H_1^\top H_1 = \mathbf{I}_r$ d'où $(\tilde{P}_1)^2 = H_1 H_1^\top H_1 H_1^\top = H_1 \mathbf{I}_r H_1^\top = H_1 H_1^\top = \tilde{P}_1$.
   — $\tilde{P}_1^\top = \tilde{P}_1$ est évident.
   — Si $u \in E_1^\perp$, $\langle u, h_i \rangle = 0$ pour $1 \leq i \leq r$, donc $H_1^\top u = 0$, d'où $\tilde{P}_1 u = 0$.
   Ceci prouve que $P_1 = \tilde{P}_1$ Le raisonnement pour P_2 est le même.

   (b) Soit $V_i = H_1^\top X$, $i = 1, 2$. X étant un vecteur gaussien centré, le vecteur $Y = \begin{pmatrix} H_1^\top \\ H_2^\top \end{pmatrix} X$ est gaussien centré, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien centré. D'où : V_1 et V_2 sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{E}(V_1 V_2^\top) = 0_{r\times s}$. Or $\mathbb{C}\mathrm{ov}(V_1, V_2) = \mathbb{E}(V_1 V_2^\top) = \mathbb{E}(H_1^\top X X^\top H_2) = H_1^\top \mathbb{E}(X X^\top) H_2 = H_1^\top H_2 = 0_{r\times s}$, où la dernière égalité vient du fait que E_1 et E_2 étant des sous -espaces orthogonaux, $\langle h_i, h_j \rangle = 0$ si $i \leq r$ et $j > r$.
   Enfin, V_1 et V_2 étant des transformations linéaires d'un vecteur gaussien, ils sont eux aussi gaussiens, de matrices de variance -covariance respectivement $H_1 H_1^\top = \mathbf{I}_r$ et $H_2 H_2^\top = I_s$.

$$V_1 \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_r); \quad V_2 \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_s)$$

   (c) Puisque V_1 et V_2 sont indépendants et puisque $P_i X = H_i V_i$, (une fonction linéaire, donc mesurable de V_i), $P_1 X$ et $P_2 X$ sont aussi indépendants. De plus, puisque V_i est un vecteur gaussien de matrice de covariance égale à l'identité,

$$P_i X \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{H_i H_i^\top}_{P_i}) \quad i = 1, 2$$

   (remarque : ce sont toutes deux des normales dégénérées car P_i n'est pas inversible : c'est un projecteur sur un espace de dimension $< n$.).

   (d) D'après le point précédent, $\|P_1 X\|^2$ et $\|P_2 X\|^2$ sont indépendantes. De plus,

$$\|P_1 X\|^2 = X^\top P_1^\top P_1 X = X^\top P_1 X = X^\top H_1 H_1^\top X = \|V_1\|^2 = \sum_{i=1}^r V_{1,i}^2$$

   Puisque les $(V_{1,i})_{1\leq i\leq r}$ sont indépendantes, on a bien $\|P_1 X\|^2 \sim \chi_2(r)$. Le raisonnement est le même pour $P_2 X$.

2. On identifie le vecteur $\mathbb{1}_n$ et sa matrice colonne. On prend $E_1 = \text{vect}(\mathbb{1}_n)$ et $E_2 = E_1^\perp$, de sorte que $P_2 = \mathbf{I} - P_1$ et $H_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{1}_n$.
   (a) $H_1^\top X == \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{1}_n^\top X == \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_i X_i = \sqrt{n}\bar{X}_n$
   (b) $P_2 = (\mathbf{I}_n - P_1)$. Donc $\|P_2 X\|^2 = \|X - P_1 X\|^2 = \|X - \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{1}_n\sqrt{n}\bar{X}_n\|^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = n\widehat{\sigma_n^2}$.
   (c) On a
   $$\frac{\sqrt{n}\bar{X}_n}{\sqrt{S_n/(n-1)}} = \frac{V_1}{\sqrt{(\sum_1^{n-1} V_{1,i}^2)/(n-1)}}$$
   où $(V_1, V_{2,1}, \ldots V_{2,n})$ sont indépendantes, donc cette statistique suit bien une loi de Student à $(n-1)$ degrés de libertés.
3. Si maintenant $Y_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, en posant $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \ldots, \mu)$, on a
   $$X = \frac{1}{\sigma}(Y - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_n)$$
   et l'on s'est ramené au cas précédent. On a alors, avec les notations de la question 2, $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{\sigma^2}{n}S_n$ et $\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mu) = \sigma\sqrt{n}\bar{X}_n$, d'où le fait que
   $$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mu)}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\widehat{\sigma_n^2}}}$$
   suit une loi de Student $T(n-1)$.
   En notant $t_2 = t_{1-\alpha/2}$ et $t_1 = t_{\alpha_2}$ les quantiles d'ordre $1-\alpha/2$ et $\alpha/2$ de la loi de Student, on a, par symétrie de la densité de la loi de Student, $t_2 = -t_1$; et pour tout $\theta = (\mu, \sigma^2)$, on a
   $$\mathbb{P}_\theta(-t_2 \le Z \le t_2) = 1 - \alpha.$$
   Par conséquent, en inversant par rapport à μ la fonction $\varphi(Y, (\mu, \sigma^2)) = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mu)}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\widehat{\sigma_n^2}}}$, on obtient
   $$\mathbb{P}_\theta\left(\bar{X}_n - \frac{\sqrt{\widehat{\sigma_n^2}}}{\sqrt{n-1}}t_2 \le \mu \le \bar{X}_n + \frac{\sqrt{\widehat{\sigma_n^2}}}{\sqrt{n-1}}t_2\right) = 1 - \alpha$$
   Un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1-\alpha$ est donc donné par les deux bornes de l'encadrement ci-dessus.

Solution Exercice 4

1. Pour commencer, notons que $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2 + \sigma_V^2)$. Soit $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ où les Y_i sont indépendantes ; et $X = \frac{1}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_V^2}}(Y - \mu\mathbb{1}_n) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_n)$. D'après l'exercice 3, $\sum(X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi^2(n-1)$. Or, $\sum(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{\sum(Y_i - \bar{Y}_n)^2}{\sigma_X^2 + \sigma_V^2}$.
   Ainsi
   $$Z = \varphi(Y, \sigma_X^2) = \frac{\sum(Y_i - \bar{Y}_n)^2}{\sigma_X^2 + \sigma_V^2} = \frac{n\widehat{\sigma_2^n}}{\sigma_X^2 + \sigma_V^2} \sim \chi^2(n-1)$$

2. Soient q_1 et q_2 les quantiles respectifs d'ordre $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ de la loi du $\chi^2(n-1)$. Attention : il n'y a pas de symétrie autour de 0 (une v.a. suivant une loi du χ^2 est positive), donc cette fois on n'a *pas* $q_1 = -q_2$. On a $\mathbb{P}_\theta(q_1 \leq Z \leq q_2) = 1-\alpha$, c'est-à-dire, en « inversant par rapport à σ_X^2 » la fonction pivotale, en notant $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{\sum_1^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2}{n}$, et en se souvenant que $\sigma_V^2 = 1$,

$$\mathbb{P}_\theta\left(\frac{\widehat{\sigma_n^2}}{q_2/n} - 1 \leq \sigma_X^2 \leq \frac{\widehat{\sigma_n^2}}{q_1/n} - 1\right) = 1-\alpha.$$

Un intervalle de confiance à 95% pour σ_X^2 est donc donné par

$$I(Y) = \left[\frac{\widehat{\sigma_n^2}}{q_2/n} - 1, \frac{\widehat{\sigma_n^2}}{q_1/n} - 1\right].$$