Mini Projet

Exercice 1 (Dates de défaillance d'un système)

1. $$g(\theta) = E_\theta(X_1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\theta(1-\theta)^{k-1}$$
$$= \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d[-(1-\theta)^k]}{d\theta}$$
$$= -\theta \cdot \frac{d\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)}{d\theta}$$
$$= -\theta \cdot \left(-\frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta}$$

2. Parce que tout modèle défini sur un espace fini ou dénombrable $(X, \mathcal{P}(X))$ est dominé par la mesure de comptage sur X
$$\mu = \sum_{x \in X} \delta_x$$

3. On a $$Var_\theta[T(x)] \geq \frac{g'(\theta)^2}{I(\theta)}$$
$$Var_\theta[T(x)] = Var_\theta\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} Var_\theta(X_1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\theta}{\theta^2}$$
$$g(\theta) = \frac{1}{\theta} \Rightarrow g'(\theta)^2 = \frac{1}{\theta^4}$$
$$I(\theta) = n I_1(\theta)$$
$$I_1(\theta) = Var_\theta\left[\frac{\partial \log \theta(1-\theta)^{X-1}}{\partial \theta}\right]$$
$$= Var_\theta\left[\frac{1}{\theta} - (X-1)\frac{1}{1-\theta}\right]$$
$$= Var_\theta\left[\frac{1-X\theta}{\theta(1-\theta)}\right]$$
$$= \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2} Var(1-\theta X)$$
$$= \frac{1}{(1-\theta)^2} Var(X)$$
$$= \frac{1}{(1-\theta)^2} \cdot \frac{1-\theta}{\theta^2} = \frac{1}{(1-\theta)\theta^2}$$
$$\therefore \frac{g'(\theta)^2}{I(\theta)} = \frac{1-\theta}{n\theta^2}$$
Donc $Var_\theta[T(x)] = \dfrac{g'(\theta)^2}{I(\theta)}$. $T(x)$ est un estimateur U.V.M.B

4. $R(\theta, S_h) = E_\theta\left[\left(g(\theta) - hT(x)\right)^2\right]$

$= E_\theta\left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{2h}{\theta}T(x) + h^2 T(x)^2\right]$

$= \frac{1}{\theta^2} - \frac{2h}{\theta}E_\theta[T(x)] + h^2 E_\theta[T(x)^2]$

$= \frac{1}{\theta^2} - \frac{2h}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta} + h^2\left(\frac{1-\theta}{n\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}\right)$

$R(\theta, T) = E_\theta\left[\left(g(\theta) - T(x)\right)^2\right]$

$= E_\theta\left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta}T(x) + T(x)^2\right]$

$= \frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta}E_\theta[T(x)] + E_\theta[T(x)^2]$

$= \frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{1-\theta}{n\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}$

i) $R(\theta, T) - R(\theta, S_h) = -\frac{n+1-\theta}{n\theta^2}h^2 + \frac{2}{\theta^2}h + \frac{1-n-\theta}{n\theta^2}$

On peut trouver certaines valeurs de h tel que $R(\theta, T) - R(\theta, S_h) > 0$.

ii). $h^*(\theta) = \frac{n}{n+1-\theta}$

5. Il n'existe pas un h^* pour $\forall\theta > 0$, $\forall h > 0$. $R(\theta, S_{h^*}) \le R(\theta, S_h)$

Exercice 2.

1. $\pi(\theta|x) \propto p(x|\theta)\cdot\pi(\theta)$

$p(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n}\theta(1-\theta)^{x_i-1} = \theta(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i - n}$

$\pi(\theta|x) \propto \theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i - n}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$

$\propto \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha+n-1}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta-(n+1)}$

donc $\alpha' = n+\alpha$,

$\beta' = \sum_{i=1}^{n}x_i + \beta - n$.

2. D'après 1, $E_\pi(\theta|x) = \frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'} = \frac{n+\alpha}{\alpha+\beta+\sum_{i=1}^{n}x_i}$

3. $E_\pi(\theta|x) = \frac{1+\frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i} = \frac{1}{\frac{1}{\theta_0}} = \theta_0$

Exercice 3.

1. L'espace des paramètres Θ du modèle :

$$\Theta_0 : \cancel{\mu = 0} \quad \{0\}$$

$$\Theta_1 : \cancel{\mu \neq 0} \quad R^{*+}$$

2. $$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$Y_i \sim N(0,1) \Rightarrow S_n(x) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

Donc, le loi de $\sqrt{n}\, S_n(x)$ est : $N(0,1)$

$F(\sqrt{n}A) \geq 0.025$. F est le fonction de répartition de $N(0,1)$

$$\Rightarrow F^{\leftarrow}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{n}A$$

$$\Rightarrow A = \frac{-F^{\leftarrow}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n}}$$

4. $$E(x) = E(\exp(Y))$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mu)^2\right) dy$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}((y-\mu)^2 - 2(y-\mu) + 1)\right) dy$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\right)$$