Вычислите интеграл $K=\int_0^\infty \frac{\sin(5t+\pi)}{\sqrt{t}}dt$

**План:**

1) Вычислите $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = I$ :

Заметим, что $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^\infty e^{-y^2}dy$. Тогда $I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy$ – двукратный интеграл.

- Перейдите к полярным координатам и вычислите его.

2) Вычислите $\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = J$ (для нечётных номеров команд) или $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt = J$ (для чётных номеров команд):

- Используя предыдущий результат, докажите справедливость интегрального представления функции $\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2t}du$ .
- В исходном интеграле замените $\frac{1}{\sqrt{t}}$ её интегральным представлением и получите двойной (несобственный) интеграл.
- Выберите порядок интегрирования так, чтобы можно было найти первообразную в элементарных функциях. (Смена порядка интегрирования требует обоснования, но в данном случае она разрешена.)
- Вычислите интеграл $J$, затем интеграл $K$.
- Используя замену переменной и сводя эти интегралы к $J$, вычислите также:

$\int_0^\infty \sin x^2 dx$ и $\int_0^\infty \sin(\pi x^2/2)dx$ – для номеров команд: А, В, Д, Ж.

$\int_0^\infty \cos x^2 dx$ и $\int_0^\infty \cos(\pi x^2/2)dx$ – для номеров команд: Б, Г, Е, З.

3) Нарисуйте графики функции ошибок, интегралов Френеля и их подынтегральных функций.

РЕШЕНИЕ:

1) $I^2=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dy$ Перейдем к полярным координатам $\begin{gathered} x=r\cos(\phi) \\ y=r\sin(\phi) \\ dxdy=r\,dr\,d\phi \end{gathered}$

$I^2=\int_0^\infty dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r\,d\phi=\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-r^2}r\,dr$ Заменим $\begin{gathered} r^2=t \\ 2r\,dr=dt \end{gathered}$

$$I^2=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-t}dt=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I=\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2) Вычислите $J=\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$

2.1) Рассмотрим $\int_0^\infty e^{-tu^2}du$ Заменим $\begin{gathered} x^2=tu^2 \\ x=u\sqrt{t} \\ dx=\sqrt{t}\,du \end{gathered}$

$\int_0^\infty e^{-tu^2}du=\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{t}}dx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{4t}}$ Тогда $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}*\sqrt{\frac{\pi}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{t}}$ ЧТД

2.2) Подставим в J $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-tu^2}du$ вместо $\frac{1}{\sqrt{t}}$

$$J=\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty du\int\limits_0^\infty \sin t\, e^{-tu^2}dt$$

2.2.1) Дифференцируем по частям $\int \sin t\, e^{-tu^2}dt$

$$\begin{matrix} k=e^{-tu^2} & dk=-u^2e^{-tu^2}dt \\ dv=\sin t\,dt & v=-\cos t \end{matrix} \Rightarrow \int \sin t\, e^{-tu^2}dt=-\cos t\, e^{-tu^2}-u^2\int \cos t\, e^{-tu^2}dt$$

И еще раз $\int \cos t\, e^{-tu^2}dt$

$$\begin{matrix} k=e^{-tu^2} & dk=-u^2e^{-tu^2}dt \\ dv=\cos t\,dt & v=\sin t \end{matrix} \Rightarrow -\cos t\, e^{-tu^2}-u^2\int \cos t\, e^{-tu^2}dt=-\cos t\, e^{-tu^2}-u^2(\sin t\, e^{-tu^2}+u^2\int \sin t\, e^{-tu^2}dt)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cos t\, e^{-tu^2}-u^2\sin t\, e^{-tu^2}-u^4\int \sin t\, e^{-tu^2}dt=\int \sin t\, e^{-tu^2}dt$$

$$\int \sin t\, e^{-tu^2}dt=\frac{-e^{-tu^2}(\cos t+u^2\sin t)}{1+u^4}$$

Тогда $\int\limits_0^\infty \sin t\, e^{-tu^2}dt=\frac{1}{1+u^4}$, тогда $J=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{du}{1+u^4}$

2.3) $J=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{du}{1+u^4}$

$$\int \frac{du}{1+u^4}=\int \frac{du}{(u^2+u\sqrt{2}+1)(u^2-u\sqrt{2}+1)}=\int \left(\frac{u+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(u^2+u\sqrt{2}+1)}-\frac{u-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(u^2-u\sqrt{2}+1)}\right)du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int \frac{u+\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}du-\int \frac{u-\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1}du\right)$$

2.3.1) $\int \frac{u+\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}du=\frac{1}{2}\int \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}du+\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+u\sqrt{2}+1}du$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}du\Rightarrow \begin{matrix} x=u^2+u\sqrt{2}+1 \\ dx=(2u+\sqrt{2})du \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln(u^2+u\sqrt{2}+1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+u\sqrt{2}+1}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}du\Rightarrow \begin{matrix} x=u\sqrt{2}+1 \\ dx=\sqrt{2}du \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\int \frac{dx}{x^2+1}=arctg(u\sqrt{2}+1)$$

$$\int \frac{u+\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}du=\frac{1}{2}\ln(u^2+u\sqrt{2}+1)+arctg(u\sqrt{2}+1)$$

2.3.2) $\int \frac{u-\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1}du=\frac{1}{2}\int \frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1}du-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2-u\sqrt{2}+1}du$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1}du\Rightarrow \begin{matrix} x=u^2-u\sqrt{2}+1 \\ dx=(2u-\sqrt{2})du \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln(u^2-u\sqrt{2}+1)$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2-u\sqrt{2}+1}du=\frac{-1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{(u-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}du\Rightarrow \begin{matrix} x=u\sqrt{2}-1 \\ dx=\sqrt{2}du \end{matrix} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{2}(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2})}=-\int \frac{dx}{x^2+1}=-arctg(u\sqrt{2}-1)$$

$$\int \frac{u-\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1}du=\frac{1}{2}\ln(u^2-u\sqrt{2}+1)-arctg(u\sqrt{2}-1)$$

Подставим 2.3.1 и 2.3.2 в 2.3

$$\int \frac{du}{1+u^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{1}{2}\ln(u^2+u\sqrt{2}+1)+arctg(u\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}\ln(u^2-u\sqrt{2}+1)+arctg(u\sqrt{2}-1))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}(arctg(u\sqrt{2}+1)+arctg(u\sqrt{2}-1)+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{2\sqrt{2}u}{u^2+u\sqrt{2}+1}))$$

$$J=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{1}{2\sqrt{2}}(2\,arctg(\infty)+\frac{1}{2}\ln(1))-\frac{1}{2\sqrt{2}}(arctg(1)+arctg(-1)+\frac{1}{2}\ln(1)))=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{arctg(\infty)}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

3) Вычислите $K=\int_0^\infty \frac{\sin(5t+\pi)}{\sqrt{t}}dt$ , $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ , $\int_0^\infty \sin(\frac{\pi x^2}{2})dx$

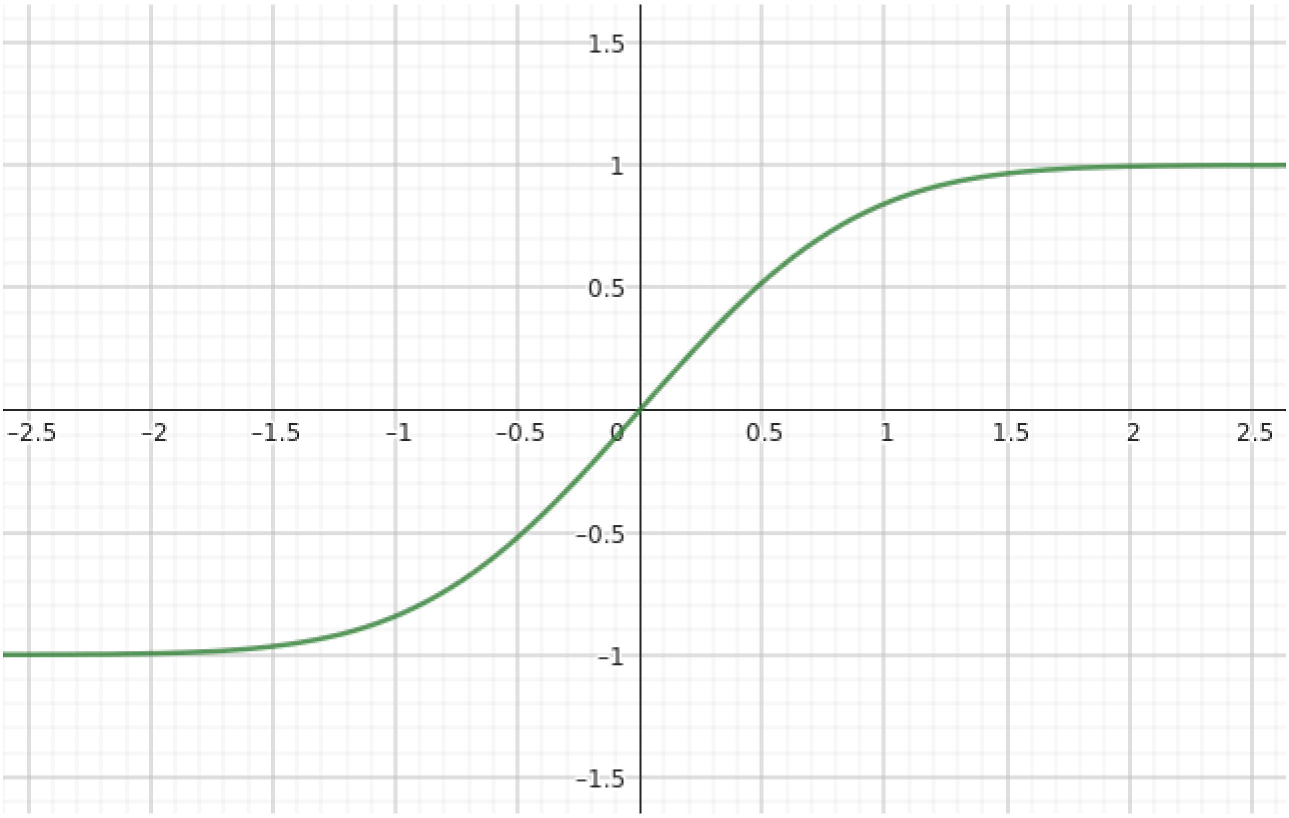
$$K=-\int_0^\infty \frac{\sin(5t)}{\sqrt{t}}dt\Rightarrow \begin{matrix} x=5t \\ dx=5dt \\ t=\frac{x}{5} \end{matrix} \Rightarrow -\int_0^\infty \frac{\sqrt{5}\sin x}{5\sqrt{x}}dx=\frac{-1}{\sqrt{5}}\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{-J}{\sqrt{5}}=-\sqrt{\frac{\pi}{10}}$$

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx\Rightarrow \begin{matrix} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \\ x=\sqrt{t} \end{matrix} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt=\frac{J}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

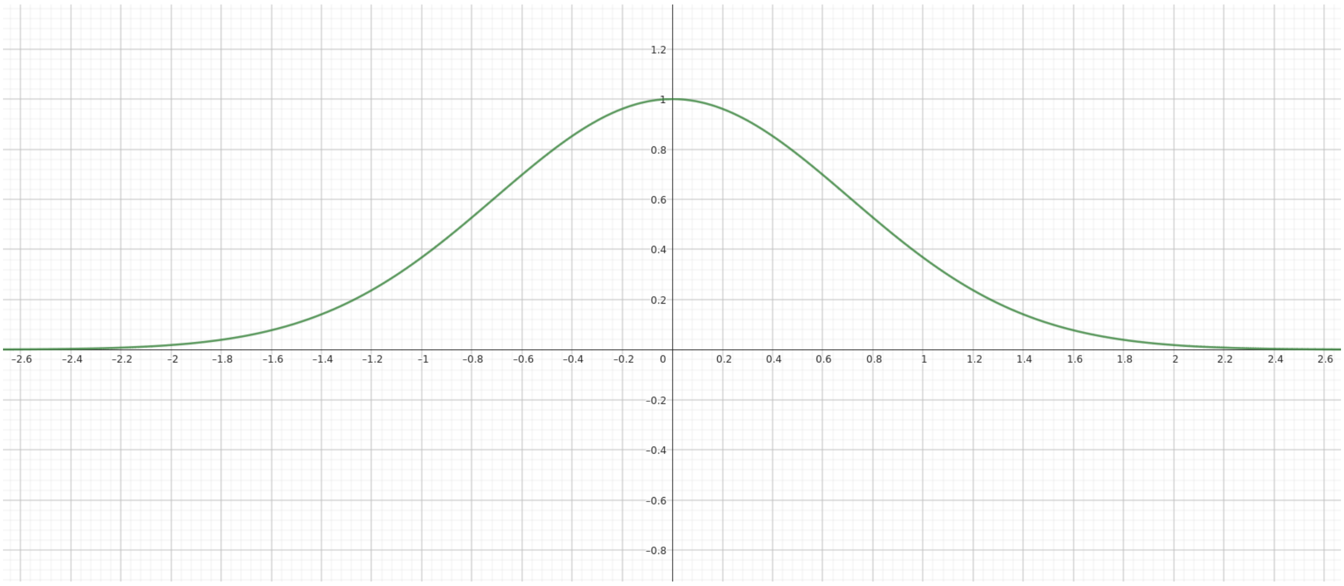
$$\int_0^\infty \sin(\frac{\pi x^2}{2})dx\Rightarrow \begin{matrix} t=\frac{\pi x^2}{2} \\ dt=\pi x\,dx \\ x=\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \end{matrix} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin t}{\pi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}J=\frac{1}{2}$$

4) Нарисуйте графики функции ошибок, интегралов Френеля и их подынтегральных функций.

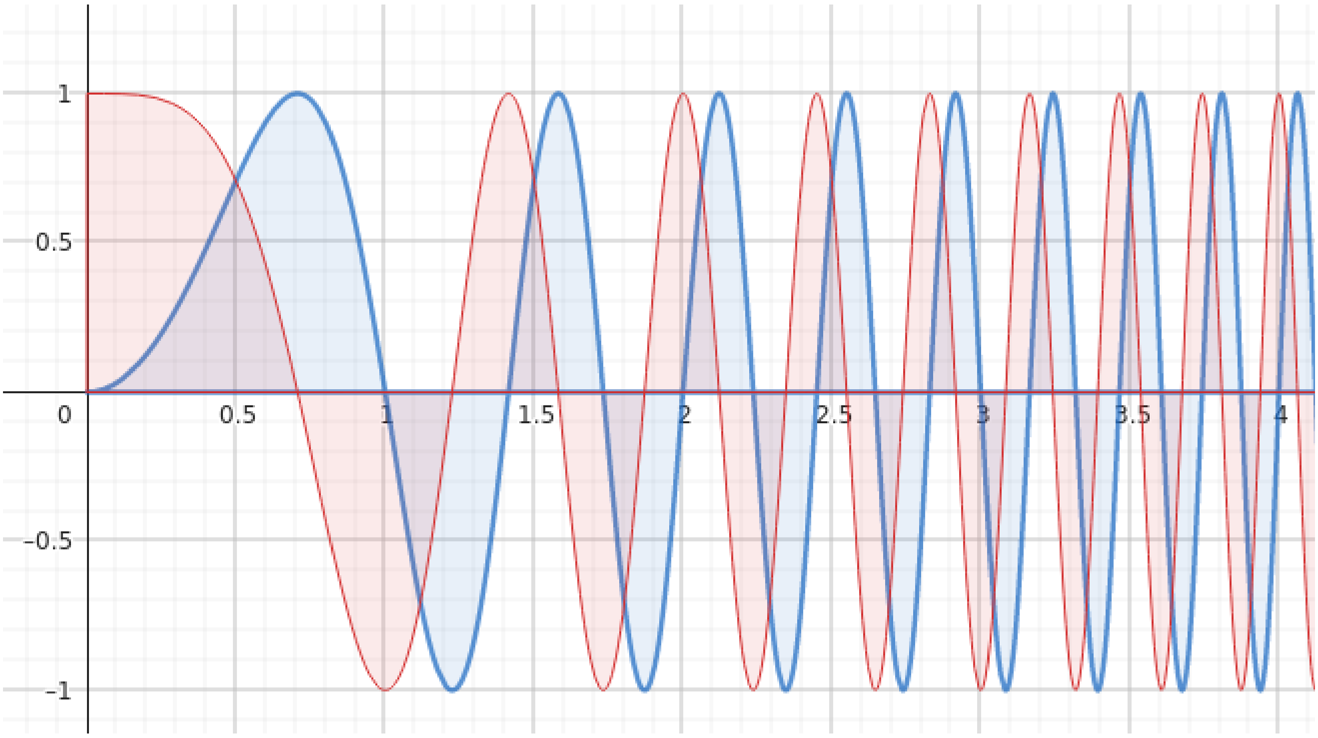
-) Функция ошибок




-) Подынтегральная функция функции ошибок



-) Интегралы Френеля




-) Подынтегральные функции интегралов Френеля (синий — S(x), красный — C(x))