Рязанов Демид (№ 1, 3, 5)
Романюк Михаил (№ 2, 4)

1 Задача

Будет ли линейным оператором, действующиим в V, каждое из следующих отображений $A:V\to V$?

а) $A(M)=tr(M)*\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $\quad tr(M)=m_{11}+m_{22}$

-) $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ $\quad Y=\begin{pmatrix}y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{pmatrix}$

$A(X)=\begin{pmatrix}x_{11}+x_{22} & 0\\ 0 & -x_{11}-x_{22}\end{pmatrix}$ $\quad A(Y)=\begin{pmatrix}y_{11}+y_{22} & 0\\ 0 & -y_{11}-y_{22}\end{pmatrix}$

$A(X)+A(Y)=\begin{pmatrix}x_{11}+x_{22}+y_{11}+y_{22} & 0\\ 0 & -x_{11}-x_{22}-y_{11}-y_{22}\end{pmatrix}$

$A(X+Y)=\begin{pmatrix}x_{11}+y_{11}+x_{22}+y_{22} & 0\\ 0 & -x_{11}-y_{11}-x_{22}-y_{22}\end{pmatrix}$

$A(X)+A(Y)=A(X+Y)$ верно

-) $\partial X=\begin{pmatrix}\partial x_{11} & \partial x_{12}\\ \partial x_{21} & \partial x_{22}\end{pmatrix}$

$A(\partial X)=\begin{pmatrix}\partial x_{11}+\partial x_{22} & 0\\ 0 & -\partial x_{11}-\partial x_{22}\end{pmatrix}$

$\partial A(X)=\partial\begin{pmatrix}x_{11}+x_{22} & 0\\ 0 & -x_{11}-x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial x_{11}+\partial x_{22} & 0\\ 0 & -\partial x_{11}-\partial x_{22}\end{pmatrix}$

$A(\partial X)=\partial A(X)$ верно

Значит А - линейный оператор

б) $A(X)=(abX)X=\begin{pmatrix}abX*x_1\\ abX*x_2\\ abX*x_3\end{pmatrix}$ $\quad a=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

$abX=a_1b_2x_3+a_2b_3x_1+a_3b_1x_2-a_3b_2x_1-a_2b_1x_3-a_1b_3x_2$

-) $\partial X=\begin{pmatrix}\partial x_1\\ \partial x_2\\ \partial x_3\end{pmatrix}$

$A(\partial X)=ab(\partial X)\partial X=\begin{pmatrix}ab(\partial X)*\partial x_1\\ ab(\partial X)*\partial x_2\\ ab(\partial X)*\partial x_3\end{pmatrix}$

$$ab(\partial X)=a_1 b_2 \partial x_3+a_2 b_3 \partial x_1+a_3 b_1 \partial x_2-a_3 b_2 \partial x_1-a_2 b_1 \partial x_3-a_1 b_3 \partial x_2=\partial abX$$

$$A(\partial X)=\begin{pmatrix} abX*\partial^2*x_1 \\ abX*\partial^2*x_2 \\ abX*\partial^2*x_3 \end{pmatrix}=\partial^2 A(X)\neq\partial A(X)$$ => А – не линейный оператор

в) $A(f)=(x+1)f''$ $\quad f(x)=f_0 x^n+\ldots+f_n \quad g(x)=g_0 x^n+\ldots+g_n$

-) $A(f+g)=(x+1)*(f+g)''=(x+1)*(f''+g'')=(x+1)f''+(x+1)g''=A(f)+A(g)$ верно
-) $A(\partial f)=(x+1)*(\partial f)''=(x+1)\partial f''=\partial A(f)$ верно

Значит А – линейный оператор

2 Задача

Пусть P – оператор проектирования плоскости (проектирования любого вектора плоскости) на ось Ox параллельно оси Oy, Q – оператор проектирования плоскости на ось Oy параллельно Ox. Найти:

а) I-P, где I - единичный оператор:

I-P означает, что мы сначала проецируем на ось x, а затем вычитаем полученный результат из исходного вектора. Это означает, что вектор будет иметь только y-компоненту.

Таким образом, оператор I-P можно записать в виде матрицы:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

б) I-Q, где I - единичный оператор:

I-Q означает, что мы сначала проецируем на ось y, а затем вычитаем полученный результат из исходного вектора. Это означает, что вектор будет иметь только x-компоненту.

Таким образом, оператор I-Q можно записать в виде матрицы:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в) 2P+Q:

2P означает, что мы проецируем на ось x, умножаем результат на 2, а затем проецируем на ось y. Затем мы проецируем на ось y и добавляем результат к исходному вектору.

Q означает, что мы проецируем на ось y, а затем проецируем на ось x и добавляем результат к исходному вектору.

Таким образом, оператор 2P+Q можно записать в виде матрицы:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

г) -P-Q:

-P означает, что мы сначала проецируем на ось x, а затем вычитаем полученный результат из исходного вектора.

-Q означает, что мы сначала проецируем на ось y, а затем вычитаем полученный результат из исходного вектора.

Таким образом, оператор -P-Q можно записать в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

д) f(P), где $f(x)=2x^3+x^2-4x+1$:

Чтобы найти f(P), мы должны подставить оператор P вместо x в выражение f(x).

$$P^2=P, P^3=P^2*P=P*P=P$$

Таким образом, f(P) можно записать в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

е) f(Q), где $f(x)=2x^6-x^3-x^2$:

Чтобы найти f(Q), мы должны подставить оператор Q вместо x в выражение f(x).

$$Q^2=Q, Q^3=Q^2*Q=Q*Q=Q$$

Таким образом, f(Q) можно записать в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Задача

Показать, что отображение, действующее в линейном пространстве R^3, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любого вектора $x=(x_1, x_2, x_3)\in R^3$

$$Ax=\begin{pmatrix} -2x_2-x_3 \\ 3x_1+2x_2+3x_3 \\ x_1+2x_2+2x_3 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

-) $A(X)=\begin{pmatrix} -2x_2-x_3 \\ 3x_1+2x_2+3x_3 \\ x_1+2x_2+2x_3 \end{pmatrix} \qquad A(Y)=\begin{pmatrix} -2y_2-y_3 \\ 3y_1+2y_2+3y_3 \\ y_1+2y_2+2y_3 \end{pmatrix}$

$$A(X)+A(Y)=\begin{pmatrix} -2x_2-x_3-2y_2-y_3 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+3y_1+2y_2+3y_3 \\ x_1+2x_2+2x_3+y_1+2y_2+2y_3 \end{pmatrix}$$

$$A(X+Y)=\begin{pmatrix} -2x_2-x_3-2y_2-y_3 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+3y_1+2y_2+3y_3 \\ x_1+2x_2+2x_3+y_1+2y_2+2y_3 \end{pmatrix}$$

$A(X+Y)=A(X)+A(Y)$ верно

-) $A(\partial X)=\begin{pmatrix} -2\partial x_2-\partial x_3 \\ 3\partial x_1+2\partial x_2+3\partial x_3 \\ \partial x_1+2\partial x_2+2\partial x_3 \end{pmatrix}=\partial\begin{pmatrix} -2x_2-x_3 \\ 3x_1+2x_2+3x_3 \\ x_1+2x_2+2x_3 \end{pmatrix}=\partial A(X)$ верно

Значит A – линейный оператор

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad detA=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}=0-6-6-(-2)-(-12)-0=2$$

4 Задача

Чтобы найти матрицу линейного оператора A в новом базисе u, нужно выполнить следующие шаги:

1.Найти матрицу перехода P из старого базиса e в новый базис u.
2.Найти обратную матрицу P^{-1} .
3.Вычислить матрицу $A_u = P^{-1} * A_e * P$.

Шаг 1. Найдем матрицу перехода P.

Необходимо найти координаты векторов нового базиса u в старом базисе e, чтобы составить из них матрицу перехода.

$$u_1 = 2e_1 - 3e_2 + 0e_3$$
$$u_2 = -e_1 + 2e_2 + 1e_3$$
$$u_3 = 3e_1 - 4e_2 + 2e_3$$

Таким образом, матрица перехода будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Шаг 2. Найдем обратную матрицу P^{-1} .

Для этого мы можем воспользоваться формулой: $P^{-1} = \frac{1}{|P|} * Adj(P)$, где |P| - определитель матрицы P, Adj(P) - матрица алгебраических дополнений.

Вычислим определитель матрицы P:

$$|P| = 8 + 0 - 9 - 0 - 6 - (-8) = 1$$

Таким образом, |P| ≠ 0, и обратная матрица существует.

Вычислим матрицу алгебраических дополнений Adj(P):

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонируем эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь мы можем вычислить обратную матрицу:

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}*Adj(P)=1*\begin{pmatrix} 8 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Вычислим матрицу A_u :

$$A_u=P^{-1}*A_e*P=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Выполняя матричное умножение

Ответ: $A_u=\begin{pmatrix} 45 & -23 & 66 \\ 38 & -19 & 57 \\ -18 & 10 & -25 \end{pmatrix}$

5 Задача

Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора A, действующего в линейном пространстве R^4 .

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$2x_1+x_2+2x_3+3x_4=0$

$-x_1-x_3-x_4=0$

$-2x_1-2x_2+2x_3=0$

$-2x_1+2x_3+2x_4=0$

=> $-x_1=x_3+x_4$ (из 2) =>

=> $-2x_1=2x_3+2x_4$ (умножил предыдущее на 2)

=> $4x_3+4x_4=0$ (пред. + 4)

=> $x_3=-x_4$ => $x_1=0$ (пред. + 2)

=> $x_2=x_3$ (пред. + 3)=> $x_2=x_3=-x_4=c$

KerA = { $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ } => |KerA| = 1 => |ImA| = 3 => rankA = 3

ImA = { $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ }