Задача 4
С помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис линейной оболочки, порождённой системой векторов

$$a_1=(0,3,-1,-2),a_2=(0,-5,5,4),a_3=(1,-5,5,-3),a_4=(1,-1,-3,-7)$$

Найдем размерность данной системы векторов

$$\begin{pmatrix}0&3&-1&-2\\0&-5&5&4\\1&-5&5&-3\\1&-1&-3&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-5&5&-3\\0&-5&5&4\\0&3&-1&-2\\1&-1&-3&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-5&5&-3\\0&-5&5&4\\0&3&-1&-2\\0&4&-8&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-5&5&-3\\0&1&-1&-0.8\\0&3&-1&-2\\0&4&-8&-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-7\\0&1&-1&-0.8\\0&0&2&0.4\\0&0&-4&-0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-7\\0&1&-1&-0.8\\0&0&1&0.2\\0&0&-4&-0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-7\\0&1&0&-0.6\\0&0&1&0.2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Размерность равна 3 => базис состоит из трех векторов

$$e_1=(0,3,-1,-2),e_2=(0,-5,5,4),e_3=(1,-5,5,-3)$$

Найдем ортогональный базис

$$b_1=e_1=(0,3,-1,-2)$$
$$b_2=e_2-\frac{e_2\cdot b_1}{b_1\cdot b_1}b_1=(0,-5,5,4)-\frac{0*0+(-5)*3+5*(-1)+4*(-2)}{0*0+3*3+(-1)*(-1)+(-2)*(-2)}(0,3,-1,-2)$$
$$b_2=(0,-5,5,4)-\frac{-28}{14}(0,3,-1,-2)=(0,-5,5,4)+(0,6,-2,-4)=(0,1,3,0)$$
$$b_3=e_3-\frac{e_3\cdot b_1}{b_1\cdot b_1}b_1-\frac{e_3\cdot b_2}{b_2\cdot b_2}b_2=$$
$$(1,-5,5,-3)-\frac{1*0+(-5)*3+5*(-1)+(-3)*(-2)}{14}(0,3,-1,-2)-\frac{1*0+(-5)*1+5*3+(-3)*0}{0*0+1*1+3*3+0*0}(0,1,3,0)$$
$$=(1,-5,5,-3)-\frac{-14}{14}(0,3,-1,-2)-\frac{10}{10}(0,1,3,0)$$
$$=(1,-5,5,-3)+(0,3,-1,-2)-(0,1,3,0)=(1,-3,1,-5)$$

$$b_1=(0,3,-1,-2),b_2=(0,1,3,0),b_3=(1,-3,1,-5)$$

Ортонормированный базис

$$|b_1|=\sqrt{14},|b_2|=\sqrt{10},|b_3|=6$$

$$b_1=(0,\frac{3}{\sqrt{14}},-\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}})$$
$$b_2=(0,\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}},0)$$
$$b_3=(\frac{1}{6},-\frac{1}{2},\frac{1}{6},-\frac{5}{6})$$

Задача 5
Найти базис ортогонального дополнения подпространства, порождённого системой векторов

$$a_1=(3,0,4,3),a_2=(0,1,-1,1),a_3=(3,1,3,-1)$$

Найдем базис данного подпространства

$$\begin{pmatrix}3&0&4&3\\0&1&-1&1\\3&1&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4/3&1\\0&1&-1&1\\3&1&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4/3&1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4/3&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4/3&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1&0&4/3&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Размерность равна 3 => базис подпространства состоит из 3 векторов

$$a_1=(3,0,4,3),a_2=(0,1,-1,1),a_3=(3,1,3,-1)$$

Значит базис ортогонального дополнения имеет размерность 1 и состоит из одного вектора

Найдем базис ортогонального дополнения $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$

$$\begin{aligned}a_1\cdot e&=3*e_1+0*e_2+4*e_3+3*e_4=0\\a_2\cdot e&=0*e_1+1*e_2-1*e_3+1*e_4=0\\a_3\cdot e&=3*e_1+1*e_2+3*e_3-1*e_4=0\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&0&4&3&0\\0&1&-1&1&0\\3&1&3&-1&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4/3&1&0\\0&1&-1&1&0\\3&1&3&-1&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4/3&1&0\\0&1&-1&1&0\\0&1&-1&-4&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4/3&1&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&-5&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4/3&1&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4/3&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}e_1+\frac{4}{3}e_3=0\\e_2-e_3=0\\e_4=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}e_1=-\frac{4}{3}e_3\\e_2=e_3\\e_4=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}e_1=c\\e_2=e_3=-0.75c\\e_4=0\end{matrix}\Rightarrow e=(1,-0.75,-0.75,0)$$