Лекция 1

1. Вероятностное пространство

1.1. Случайные события. Статистическая вероятность

Рассмотрим некоторый опыт, в результате которого может наступить или не наступить событие A. Примерами такого опыта могут быть:

а) бросание монеты, событие A — выпадение герба;

б) бросание кубика, событие A — выпадение 5;

в) стрельба 10 выстрелами по мишени, событие A — попадание в мишень не менее 7 раз.

Общее в этих опытах то, что каждый из них может реализоваться в данных условиях в принципе какое угодно раз. Такие опыты называются *испытаниями*. *Частотой* $p_n(A)$ события A в n испытаниях называется отношение числа $n(A)$ наступлений события A в этих испытаниях к числу испытаний n:

$$p_n(A) = \frac{n(A)}{n}. \tag{1.1}$$

Во многих реальных случаях с увеличением n частота события A стабилизируется, практически мало отличаясь от некоторого числа $\mathsf{P}(A)$. Такое число $\mathsf{P}(A)$, являющееся мерой возможности наступления события A в испытании, называется *вероятностью* события A:

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A). \tag{1.2}$$

Вероятность события, найденная на основе испытаний, называется его *статистической вероятностью*.

Это определение является математической идеализацией реальных событий, поскольку в действительности можно реализовать лишь конечное число испытаний, а требование полного совпадения их условий выполнимо лишь с некоторым приближением.

Пример. Рассмотрим опыт с подбрасыванием монеты. Он имеет два взаимно исключающих друг друга исхода: выпадение "герба"и выпадение "решётки". Обозначим эти исходы буквами Г и Р.

Номера испытаний	Число появлений герба										Σ
1 — 1000	54	46	53	55	46	54	41	48	51	53	501
1001 — 2000	48	46	40	53	49	49	48	54	53	45	485
2001 — 3000	43	52	58	51	51	50	52	50	53	49	509
3001 — 4000	58	60	54	55	50	48	47	57	52	55	536
4001 — 5000	48	51	51	49	44	52	50	46	53	41	485
5001 — 6000	49	50	45	52	52	48	47	47	47	51	488
6001 — 7000	45	47	41	51	49	59	60	55	53	50	500
7001 — 8000	53	52	46	52	44	51	48	51	46	54	497
8001 — 9000	45	47	46	52	47	48	59	57	45	48	494
9001 — 10000	47	41	51	59	51	52	55	39	41	48	484

В таблице приведены результаты серии испытаний, когда монета подбрасывалась в общей сложности 10 000 раз. При этом отдельно рассматривались серии по $n = 100$ испытаний и в каждой серии регистрировалось соответствующее количество $n(\Gamma)$ выпадений "герба".

1.2. События

Одним из основных понятий теории вероятностей является *случайное событие* или просто событие. В реальном мире случайное событие — это исход какого-либо испытания, наблюдения, который может произойти или не произойти.

Пример 1. При бросании игральной кости может выпасть число очков, равное какому-либо из числу из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Событиями в этом случае будут, например,

$$A = \{\text{выпадает чётное число очков}\},$$
$$B = \{\text{выпадает число очков, не большее трёх}\}.$$

В математической модели можно принять понятие события как первоначальное, которому не даётся определения и которое характеризуется лишь своими свойствами.

Достоверным событием называется событие, которое всегда происходит, и будем обозначать его Ω. *Невозможным* событием называется событие, которое никогда не происходит. Обозначать невозможное событие будем $\varnothing$.

Произведением событий A и B называется событие, обозначаемое AB, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит и A и B вместе. События A и B называются *несовместными*, если $AB = \varnothing$.

Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что произошло по крайней мере одно из событий A или B.

Разностью $A - B$ событий A и B называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит A и не происходит B. Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называется *противоположным* событию A и происходит тогда и только тогда, когда не происходит A.

Если $A \subset B$, то говорят, что событие A *влечёт* событие B. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что события A и B *равносильны* и пишут $A = B$.

Пример 2. В примере 1 с бросанием кости имеем следующие события:

$$A + B = \{\text{выпадает число очков, отличное от пяти}\},$$
$$AB = \{\text{выпадает число очков, равное двум}\},$$
$$A - B = \{\text{выпадает число очков, равное 4 или 6}\},$$
$$\overline{A} = \{\text{выпадает нечётное число очков}\}.$$

Достоверное множество Ω называется *пространством элементарных событий.* Элементы ω множества Ω называются *элементарными событиями.* Если множество Ω конечно, то обычно событиями являются все подмножества множества Ω. В общем случае рассматриваются не все подмножества Ω, а лишь некоторые классы этих подмножеств, называемые алгебрами и σ-алгебрами множеств.

Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется *алгеброй*, если

A1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$, A3) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B,\; A \cap B \in \mathcal{A}$.

В условии A3) достаточно потребовать лишь, чтобы выполнялось либо $A \cup B \in \mathcal{A}$, либо $A \cap B \in \mathcal{A}$, в силу равенств

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}},\; A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-*алгеброй*, если семейство $\mathcal{F}$ является алгеброй и

A3*) если $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},\; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Так как

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega - \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega - \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n,$$

то в условии A3*) достаточно потребовать лишь, чтобы выполнялось либо $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, либо $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Пара $(\Omega, \mathcal{F})$, состоящая из множества Ω и σ-алгебры $\mathcal{F}$ подмножеств Ω, называется *измеримым пространством*.

	Теория множеств	Теория вероятностей
Ω	пространство (основное множество)	пространство элементарных событий; достоверное событие
ω, $\omega \in \Omega$	элемент пространства ω	элементарное событие ω
A, $A \subset \Omega$	множество A	событие A
$A \cup B$, $A + B$	объединение множеств A и B	сумма событий A и B
$A \cap B$, AB	пересечение множеств A и B	произведение событий A и B
$A \setminus B$, $A - B$	разность множеств A и B	разность событий A и B
$\varnothing$	пустое множество	невозможное событие
$\overline{A}$	дополнение множества A	событие, противоположное событию A
$AB = \varnothing$	A и B не пересекаются	A и B несовместны
$A \subset B$	A есть подмножество B	A влечёт событие Bы

1.3. Вероятность

Вероятностью на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ называется числовая функция $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, заданная на σ-алгебре событий $\mathcal{F}$, удовлетворяющая условиям:

P1) $\mathsf{P}(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность P);

P2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ (нормированность P);

P3) $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ для любых A, $B \in \mathcal{F}$, $AB = \varnothing$ (аддитивность P);

P4) если $A_n \downarrow \varnothing$, т. е. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = 0$ (непрерывность P).

Тройку $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где $\mathbf{\Omega}$ — пространство элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра событий, P — вероятность на измеримом пространстве $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F})$, называется *вероятностным пространством.*

Пусть $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Тогда справедливы следующие свойства вероятности.

1. Справедливо равенство

$$\mathsf{P}(\varnothing) = 0. \tag{3.1}$$

Так как $\varnothing + \varnothing = \varnothing$, то из P3) следует, что $\mathsf{P}(\varnothing) + \mathsf{P}(\varnothing) = \mathsf{P}(\varnothing)$. Следовательно $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$. □

2. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(B - A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$.

Так как $B = A + (B - A)$ и $A(B - A) = \varnothing$, то из P3)

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B - A). \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) доказано. □

3. Если $A \subset B$, то $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.

Следует из (3.2) и P1). □

4. Для любого $A \in \mathcal{F}$

$$0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1.$$

Следует из **1**, **3**, так как $\varnothing \subset A \subset \mathbf{\Omega}$. □

5. $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$ для любого события A.

Следует из P3), так как $A + \overline{A} = \mathbf{\Omega}$ и $A\overline{A} = \varnothing$. □

6. *Конечная аддитивность*: если $A_i A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$, то

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i). \tag{3.3}$$

Индукция по n с использованием P3). □

7. Для любых событий $A_1, \ldots, A_n$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k). \tag{3.4}$$

◄ Представим $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ в виде суммы попарно несовместных событий:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \coprod_{k=1}^{n} B_k, \quad B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i.$$

Из аддитивности **6** имеем

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k),$$

откуда следует (3.4), так как $\mathsf{P}(B_k) \leq \mathsf{P}(A_k)$. □

8. Для любых событий A и B

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB).$$

Из $A+B=A+(B-AB)$, P3) следует $\mathsf{P}(A+B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B-AB)$. Из свойства **2** получаем $\mathsf{P}(B-AB)=\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(AB)$. □

Аксиомы P3) и P4) можно заменить одной аксиомой *счётной аддитивности.*

P3*) Если последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ событий такова, что $A_iA_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_n). \tag{3.5}$$

Теорема. *Система аксиом* P1), P2), P3), P4) *равносильна системе аксиом* P1), P2), P3*).

1.4. Дискретное вероятностное пространство

Рассмотрим конечное вероятностное пространство. В этом случае пространство элементарных событий $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ — конечное множество, $\mathcal{A}$ — алгебра всех подмножеств множества Ω. Так как Ω конечно, то алгебра $\mathcal{A}$ автоматически является σ-алгеброй.

Вероятность задаётся следующим образом. Пусть заданы положительные числа p_i, $i=1,\ldots,n$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n}p_i=1. \tag{4.1}$$

Для события $A\subset\Omega$ положим

$$\mathsf{P}(A)=\sum_{\omega_i\in A}p_i=1. \tag{4.2}$$

Для невозможного события $\varnothing$ считаем, что $\mathsf{P}(\varnothing)=0$. Легко проверить, что так определённая вероятность удовлетворяет всем аксиомам.

Частным случаем определения вероятности (4.2) является так называемое *классическое определения вероятности*, когда все p_i равны друг другу. В силу (4.1) в этом случае $p_i=\dfrac{1}{|\Omega|}$ и

$$\mathsf{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{4.3}$$

Модель вероятностного пространства, приводящая к классическому определению вероятности, используется в тех случаях, когда элементарные события обладают свойством *симметрии* в том смысле, что все элементарные события находятся в одинаковом отношении к тем условиям, которые определяют характер испытания.

Пример 1. *Бросание монеты.* В этом случае

$$\Omega=\{\text{Р},\Gamma\},\quad \mathsf{P}(\text{Р})=\mathsf{P}(\Gamma)=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. *Бросание кубика.* В этом случае

$$\Omega=\{\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\},\quad \mathsf{P}(\omega_1)=\ldots=\mathsf{P}(\omega_6)=\frac{1}{6}.$$

Пример 3. *Выборка без возвращения.* Пусть имеется урна с N шарами, которые мы занумеруем числами 1, 2, …, N. Предположим, что шары с номерами 1, 2, …,

M белого цвета, остальные — чёрного. Выборка без возвращения состоит в том, что мы наугад вынимаем из урны последовательно n шаров, не возвращая их обратно.

В этом случае пространством элементарных событий Ω является множество всех упорядоченных наборов

$$\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,) \tag{4.4}$$

чисел α_i, $1 \le \alpha_i \le N$, не равных друг другу. Мощность множества Ω равна

$$|\Omega| = N(N-1)\ldots(N-n+1) = N^{[n]} = \frac{N!}{(N-n)!}. \tag{4.5}$$

П р и м е р 4. *Выборка с возвращением.* Пусть имеется та же урна с N шарами, но выборка n шаров из неё происходит последовательно по одному шару, и при этом каждый раз фиксируется номер шара, а сам шар возвращается обратно в урну.

В этом случае пространство элементарных событий Ω состоит из всевозможных векторов (4.4), координаты которых не имеют никаких дополнительных ограничений, кроме $1 \le \alpha_i \le N$. Мощность множества Ω равна

$$|\Omega| = N^n. \tag{4.6}$$

Следующее пространство является обобщением конечного вероятностного пространства. Пусть

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

— счётное множество, $\mathcal{F}$ — набор всех подмножеств Ω. Пусть p_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Для всякого события $A \in \mathcal{F}$ положим

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{n \in \{n:\, \omega_n \in A\}}^{\infty} p_n. \tag{4.7}$$

Нетрудно показать, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ является вероятностным пространством.

Построенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *дискретным вероятностным пространством.*

П р и м е р 5. Бросается монета до тех пор, пока не выпадет ГЕРБ. В этом случае

$$\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}, \quad p_n = \mathsf{P}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Полученное дискретное вероятностное пространство является счётным.

Отметим, что если $p_n = 0$ при $n > N$, то фактически мы имеем дело с конечным пространством $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$.

1.5. Геометрические вероятности

Пусть Ω — область евклидова n-мерного пространства с конечным n-мерным объёмом. Событиями назовём подмножества Ω, для которых можно определить n-мерный объём. Множеством событий является σ-алгебра $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств Ω.

Вероятностью события A является

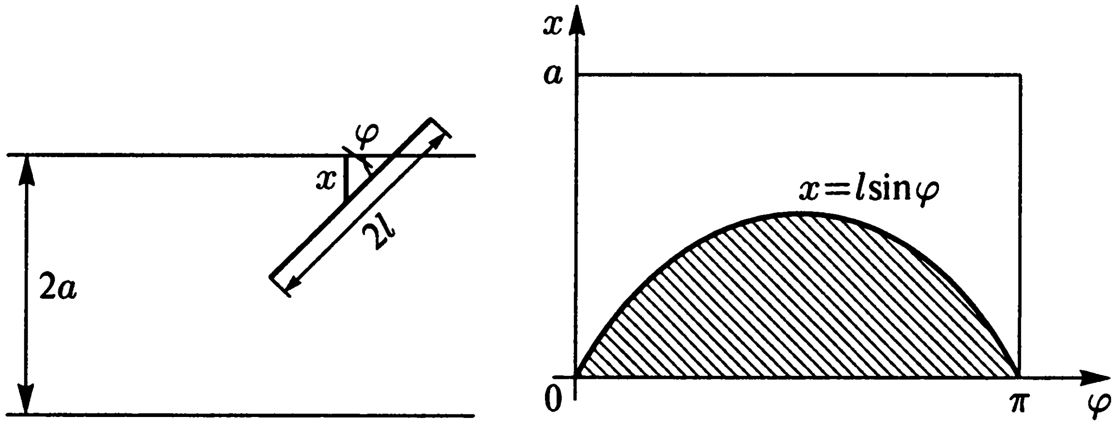
$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{5.1}$$

где $|V|$ означает n-мерный объём множества V.

В результате мы получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$, где вероятность P определяется равенством (5.1). Это вероятностное пространство служит моделью задач, в которых частица случайно бросается в область Ω. Предполагается, что её положение равномерно распределено в этой области, т. е. вероятность попасть частице в область A пропорционально n-мерному объёму этой области.

Пример 1. Стержень разламывается на две части в случайной точке, равномерно распределённой по длине стержня. Найдём вероятность того, что меньший обломок имеет длину, не превосходящую одной трети длины стержня. Обозначим длину стержня L, расстояние точки разлома от одного фиксированного конца стержня — x. Тогда описанное событие произойдёт тогда и только тогда, когда $x \le L/3$ или $x \ge 2L/3$. Следовательно, искомая вероятность равна $2/3$.

Пример 2. *Задача Бюффона.* Плоскость, расчерченная параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость случайным образом бросается игла длины $2l$, $l < a$. Найти вероятность того, что игла пересечёт какую-нибудь прямую.



Обозначим через x расстояние от центра иглы до ближайшей прямой и через φ — угол между этой прямой и иглой. Координаты (φ, x), определяющие положение иглы удовлетворяют условиям $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le x \le a$. Из рисунка видно, что для пересечения иглы с прямой необходимо и достаточно, чтобы

$$x \le l \sin \varphi.$$

По формуле (5.1) находим

$$p = \frac{1}{a\pi} \int_0^\pi l \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Определим обобщение рассмотренного выше вероятностного пространства Пусть

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

— n-мерное вещественное евклидово пространство, $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — неотрицательная функция, интегрируемая по Риману по любой квадрируемой области из Ω. Будем предполагать, что существует несобственный интеграл по $\boldsymbol{\Omega}$ от функции $\boldsymbol{\pi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\pi}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1.$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ алгебру, порождённую квадрируемыми областями в $\boldsymbol{\Omega}$. Для любого $A \in \mathcal{F}$ положим

$$\mathsf{P}(A) = \int_A \boldsymbol{\pi}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n. \tag{5.2}$$

Можно показать, что $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ является вероятностным пространством.

Построенное вероятностное пространство $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *абсолютно непрерывным вероятностным пространством.*