Лекция 3

3. Последовательности независимых испытаний

3.1. Схема Бернулли

Одинаковые независимые между собой испытания называются *схемой Бернулли* или *испытаниями Бернулли*, если при каждом испытании имеется только два возможных исхода, причём вероятности этих исходов положительны и неизменны для всех испытаний.

Исходы испытаний обычно называют *успехом* и *неудачей* и обозначают соответственно буквами p и q. Очевидно, что $p > 0$, $q > 0$ и

$$p + q = 1. \tag{1.1}$$

Опишем вероятностное пространство, соответствующее n испытаниям Бернулли. Будем считать, что исходами каждого испытания являются либо 0, либо 1. Пусть успеху соответствует 1, а неудаче — 0. Пространством элементарных событий является множество

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_i = \text{У}, \text{Н}\}.$$

Вероятность элементарного события задаётся формулой

$$\mathsf{P}(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i}.$$

Теорема 1.1. *Если μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли, то*

$$\mathsf{P}(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если число успехов элементарного события ω равно m, то

$$\mathsf{P}(\omega) = p^m q^{n-m}.$$

Очевидно, что количество таких событий равно C_n^m. ■

П р и м е р 1. Монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность события A, состоящее в выпадении 3 гербов.

Р е ш е н и е. Выпадение герба будем считать успехом. Так как $p = q = \dfrac{1}{2}$, то из формулы (3.2) получаем

$$\mathsf{P}(A) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

Одинаковые независимые между собой испытания называются *полиномиальной схемой*, если при каждом испытании имеется только k возможных исходов, причём вероятности этих исходов положительны и неизменны для всех испытаний. Схема Бернулли является является частным случаем полиномиальной схемы при $k = 2$.

Пусть E_1, E_2, …, E_k — исходы испытаний и $p_i = \mathsf{P}(E_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Очевидно, что $p_i > 0$ и

$$p_1 + \ldots + p_k = 1. \tag{1.3}$$

Теорема 1.2. *Рассмотрим полиномиальную схему, состоящую из n испытаний с возможными исходами E_1, E_2, ..., E_k. Вероятность того, что событие E_i произойдёт r_i раз, $i = 1$, ..., k, равна*

$$P_n(r_1, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}\, p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Вероятность элементарного события $\omega = (E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})$, в котором E_i встречается r_i раз, $i = 1$, ..., k, равна

$$\mathsf{P}(\omega) = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}.$$

Из теоремы о полиномиальных коэффициентах следует, что количество таких событий равно $\dfrac{n!}{r_1! \ldots r_k!}$. ■

Пример 2. Игральная кость бросается 12 раз. Найти вероятность события A, состоящее в том, что каждая грань выпадет дважды.

Решение. Пусть E_1, ..., E_6 соответствуют шести граням. По условию все $p_i = 1/6$ и все $r_i = 2$. В силу (1.4) получаем

$$P(A) = \frac{12!}{(2!)^6} \left(\frac{1}{6}\right)^{12} = \frac{1925}{559872} = 0{,}003438\ldots.$$

3.2. Локальная предельная теорема

Будем рассматривать схему Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$. Число испытаний будем обозначать через n. Мы хотим получить асимптотическую оценку $P_n(m)$ при $n \to \infty$. Вывод этой оценки существенно опирается на формулу Стирлинга.

Формула Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp(\theta_n), \quad \frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1.(Локальная теорема Муавра-Лапласа.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха p, $0 < p < 1$, постоянна, то для любого конечного промежутка $[a, b]$, $a \le b$,*

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{npq}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\,(1 + O(n^{-1/2})). \tag{2.2}$$

равномерно для $x \in [a, b]$ вида

$$x = x_{mn} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{2.3}$$

где m — целое неотрицательное число.

Доказательство. Так как

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m q^{n-m},$$

то, используя формулу Стирлинга, запишем

$$P_n(m) = \frac{\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n e^{(\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m})}\, p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}\, e^{-m} m^m\, \sqrt{2\pi(n-m)}\, e^{-(n-m)}(n-m)^{n-m}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} e^{\theta},$$

где $\theta = \theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}$.

Из (2.3) следуют равенства

$$\begin{aligned} m &= np + x\sqrt{npq} = np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right), \\ n - m &= nq - x\sqrt{npq} = nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Так как x принадлежит ограниченному промежутку $[a, b]$, то $m = O(n)$, $n-m = O(n)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [a, b]$. Следовательно,

$$|\theta| \leq |\theta_n| + |\theta_m| + |\theta_{n-m}| \leq \frac{1}{12n} + \frac{1}{12m} + \frac{1}{12(n-m)} = O(n^{-1}).$$

Поэтому,

$$e^{\theta} = 1 + O(n^{-1}) \tag{2.5}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [a, b]$.

Рассмотрим величину

$$\ln A_n = \ln\left\{\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}\right\} = m\ln\left(\frac{np}{m}\right) + (n-m)\ln\left(\frac{nq}{n-m}\right).$$

Из равенств (2.4) следует

$$\ln A_n = -np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Величины $x\sqrt{q/np}$ и $x\sqrt{p/nq}$ есть величины $O(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [a, b]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) &= x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{np} + O(n^{-3/2}) \\ \ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) &= -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}\frac{px^2}{nq} + O(n^{-3/2}) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) &= x\sqrt{npq} + \frac{qx^2}{2} + O(n^{-1/2}), \\ nq\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) &= -x\sqrt{npq} + \frac{px^2}{2} + O(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

и поэтому

$$\ln A_n = -\frac{x^2}{2} + O(n^{-1/2}). \tag{2.6}$$

Осталось рассмотреть множитель $\sqrt{\dfrac{n}{m(n-m)}}$. Из равенств (2.4) следует

$$m(n-m) = n^2 pq\bigl(1 + O(n^{-1/2})\bigr).$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left((1 + O(n^{-1/2})\right). \tag{2.7}$$

Теперь утверждение теоремы следует из (2.5), (2.6), (2.7). ■

Пример 1. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию $n = 400$, $m = 80$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Из локальной теоремы Муавра-Лапласа имеем

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Находим x:

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = 0.$$

В результате

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} = 0{,}0498678.$$

Точное значение

$$P_{400}(80) = \frac{400!}{80!\,320!}\,0{,}2^{80}\,0{,}8^{320} = 0{,}049813272.... \quad ■$$

3.3. Интегральная предельная теорема

Будем рассматривать схему Бернулли с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи q. Число испытаний будем обозначать через n. Пусть μ — число успехов в n испытаниях.

Теорема 3.1.(Интегральная теорема Муавра-Лапласа.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха p, $0 < p < 1$, постоянна, то равномерно по $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx. \tag{3.1}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $|a| \le C$, $|b| \le C$. Пусть $]x[$ — наименьшее целое число такое, что $x \le]x[$, а $[x]$ — наибольшее целое число такое, что $[x] \le x$. Пусть

$$m_1 =]\,np + a\sqrt{npq}\,[,\quad m_2 = [\,np + b\sqrt{npq}\,].$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \sum_{m=m_1}^{m_2}\mathsf{P}\{\mu = m\}. \tag{3.2}$$

Обозначим $m = np + x_m\sqrt{npq}$, тогда

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

По локальной предельной теореме запишем (3.2) в виде

$$\mathsf{P}\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x_m^2/2}\, \Delta x_m (1 + O(n^{-1/2})). \tag{3.3}$$

Справа в (3.3) стоит интегральная сумма, сходящаяся равномерно по a, b при $n \to \infty$ к интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx.$$

Следовательно, теорема доказана при $|a| \le C$, $|b| \le C$.

Избавимся теперь от ограничения $|a| \le C$, $|b| \le C$. Обозначим $\xi_n = \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}}$. Имеем равенство

$$\mathsf{P}\{\,|\xi_n| > C\} = 1 - \mathsf{P}\{\,|\xi_n| \le C\}. \tag{3.4}$$

Из анализа известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx = 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-C}^{C} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) получаем

$$\left|\mathsf{P}\{\,|\xi_n| > C\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx\right| = \left|\mathsf{P}\{\,|\xi_n| \le C\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-C}^{C} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx\right|. \tag{3.6}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такое C, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{3.7}$$

Зафиксируем C. По доказанному выше найдётся такое n_1, что для всех $n \ge n_1$

$$\left|\mathsf{P}\{\,|\xi_n| \le C\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-C}^{C} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{8},$$

откуда, в силу (3.6) и (3.7), для тех же $n \ge n_1$ имеем

$$\mathsf{P}\{\,|\xi_n| > C\} \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.8}$$

Возьмём теперь произвольный интервал $[a, b]$. Обозначим $[A, B] = [a, b] \cap [-C, C]$. Так как $-C \le A \le B \le C$, то, по уже доказанному, существует такое n_2, что для всех $n \ge n_2$ справедливо неравенство

$$\left|\mathsf{P}\{\,\xi_n \in [A, B]\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Из неравенства

$$\left|\mathsf{P}\{\,\xi_n \in [a, b]\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx\right| \le \mathsf{P}\{\,|\xi_n| > C\} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>C} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx + \left|\mathsf{P}\{\,\xi_n \in [A, B]\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx\right|$$

получаем, в силу (3.7)–(3.9), что при $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$\left| \mathsf{P}\left\{ \xi_n \in [a, b] \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx \right| < \varepsilon$$

равномерно по всем $a \leq b$. Теорема доказана. ■

Следствие. (Закон больших чисел Бернулли). *Пусть выполнены условия интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Тогда для любого* $\varepsilon >$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1. \tag{3.10}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathsf{P}\left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = \mathsf{P}\left\{ -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right\}.$$

В силу интегральной теоремы Муавра-Лапласа

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1.$$

Следствие доказано. ■

3.4. Применение интегральной теоремы Муавра-Лапласа

Введём функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ равенствами:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt. \tag{4.1}$$

Функция $\Phi(x)$ называется *нормальной функцией распределения*, а функция $\varphi(x)$ — *плотностью нормального распределения.*

Значения функций $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ при $x > 0$ можно найти в специальных таблицах. При $x < 0$ можно воспользоваться тождеством

$$\Phi(x) + \Phi(-x) \equiv 1, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Докажем (4.2). Пусть $x \in \mathbb{R}$, тогда

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt + \int_{x}^{+\infty} \varphi(t)\, dt.$$

Первый интеграл равен $\Phi(x)$. Во втором интеграле сделаем замену $s = -t$. Получим

$$\int_{x}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = -\int_{-x}^{-\infty} \varphi(-s)\, ds = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(s)\, ds = \Phi(-x).$$

Здесь мы учли чётность функции $\varphi(x)$.

Предположим, что нам нужно вычислить вероятность $\mathsf{P}\{m_1 \leq \mu \leq m_2\}$ в схеме Бернулли с n независимыми испытаниями и с вероятностью успеха p. Вычислим

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \tag{4.3}$$

Далее
$$\mathsf{P}\{m_1 \le \mu \le m_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \tag{4.4}$$

П р и м е р 1. В партии из $n = 22500$ изделий, каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 1/5$. Найти вероятность того, что число μ бракованных изделий находится между 4380 и 4560.

Решение. Значение $npq = 3600$ велико, поэтому можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Вычисляем по формулам (4.3) значения x_1, x_2:
$$x_1 = \frac{4380 - 4500}{60} = -2, \quad x_2 = \frac{4560 - 4500}{60} = 1.$$

Из интегральной теоремой Муавра-Лапласа получаем
$$\mathsf{P}\,\{4380 \le \mu \le 4560\} = \Phi(1) - \Phi(-2).$$

Из таблицы находим: $\Phi(1) = 0{,}841345$, $\Phi(2) = 0{,}9772499$. По формуле (4.2) $\Phi(-2) = 0{,}0227501$. В результате
$$\mathsf{P}\,\{4380 \le \mu \le 4560\} = 0{,}841345 - 0{,}0227501 = 0{,}8185949.$$

Точный расчёт даёт значение 0,8213141718.

При использовании формул (4.3), (4.4) мы допускаем погрешность. Эту погрешность можно значительно уменьшить, если немного изменить формулы (4.3), (4.4). Положим
$$x_1' = \frac{m_1 - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2' = \frac{m_2 + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}, \tag{4.3*}$$
$$\mathsf{P}\{m_1 \le \mu \le m_2\} \approx \Phi(x_2') - \Phi(x_1'). \tag{4.4*}$$

П р и м е р 2. Решим пример 1, используя формулы (4.3*), (4.4*).
$$x_1' = \frac{4380 - 4500 - 1/2}{60} \approx -2{,}008, \quad x_2' = \frac{4560 - 4500 + 1/2}{60} \approx 1{,}008.$$

Далее
$$\mathsf{P}\,\{4380 \le \mu \le 4560\} = \Phi(1{,}008) - \Phi(-2{,}008).$$

Из таблицы находим: $\Phi(1{,}008) = 0{,}843273$, $\Phi(2) = 0{,}9776784$. По формуле (4.2) $\Phi(-2{,}008) = 0{,}0223216$. Получаем
$$\mathsf{P}\,\{4380 \le \mu \le 4560\} = 0{,}843273 - 0{,}0223216 = 0{,}8209514.$$

Полученное значение ближе к точному значению 0,8213141718.

Часто вместо функции $\Phi(x)$ используют функцию
$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt, \tag{4.5}$$

называемую *интегралом Лапласа.* Значения $\Phi_0(x)$ при положительных x приведены в специальных таблицах. Для отрицательных x следует воспользоваться нечётностью $\Phi_0(x)$: $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$. Отметим формулу:
$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \Phi_0(x), & \text{при } x \ge 0, \\ \dfrac{1}{2} - \Phi_0(-x), & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

3.5. Теорема Пуассона

Теорема 5.1.(Теорема Пуассона.) *Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, вероятность успеха $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!} \mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Положим $\lambda = np$. Имеем

$$\begin{aligned} P_n(m) &= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{\lambda_n^m}{m!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Отсюда при $n \to \infty$ получим утверждение теоремы. ■

Обозначим

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{5.2}$$

Полученное распределение вероятностей носит название *закона Пуассона*.

Пример 1. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна $p = 0{,}001$. Найти вероятность попадания в цель двумя и более пулями, если число выстрелов равно 5000.

Решение. Будем считать, что каждый выстрел это испытание и попадание в цель это событие. Нужно вычислить $\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\}$. В данном примере

$$\lambda = np = 0.001 \cdot 5000 = 5.$$

Искомая вероятность равна

$$\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\} = \sum_{m=2}^{n} P_n(m) = 1 - P_n(0) - P_n(1).$$

По теореме Пуассона

$$P_n(0) \approx \mathrm{e}^{-5}, \quad P_n(1) \approx 5\mathrm{e}^{-5}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\} \approx 1 - 6\mathrm{e}^{-5} = 0{,}9595723180\dots$$

Точное вычисление даёт

$$\begin{aligned} P_n(0) &= (1-p)^n = 0.999^{5000} = 0{,}006721111960, \\ P_n(1) &= np(1-p)^{n-1} = 0.999^{5000} = 0{,}0336391990. \end{aligned}$$

В результате

$$\mathsf{P}\{\mu_n \geq 2\} = 0{,}9596396890\dots$$

Ошибка от использования теоремы Пуассона составляет около 0,007%. ■