Лекция 4

4. Случайные величины и функции распределения

4.1. Определения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — произвольное вероятностное пространство. Числовая функция $\xi(\omega)$ на множестве элементарных событий Ω называется *случайной величиной*, если для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$\{\xi < x\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}. \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что

$$\begin{gathered} \{\xi \geq x\} = \overline{\{\xi < x\}} \in \mathcal{F}, \\ \{x_1 \leq \xi < x_2\} = \{\xi < x_2\} \setminus \{\xi < x_1\} \in \mathcal{F}, \\ \{\xi = x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{x \leq \xi < x + \frac{1}{n}\Big\}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Функция

$$F(x) = F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\}, \tag{1.3}$$

определённая при всех $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения*.

Очевидно, что функция распределения $F(x)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq F(x) \leq 1 \tag{1.4}$$

при всяком $x \in \mathbb{R}$

Введём обозначения

$$F(x-0) = \lim_{y \nearrow x} F(y), \quad F(x+0) = \lim_{y \searrow x} F(y), \quad F(\pm\infty) = \lim_{y \to \pm\infty} F(y).$$

Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} &\text{i)} && \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1), \\ &\text{ii)} && \mathsf{P}\{\xi = x\} = F_\xi(x+0) - F_\xi(x), \\ &\text{iii)} && \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = F_\xi(x_2+0) - F_\xi(x_1), \\ &\text{iv)} && \mathsf{P}\{x_1 < \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1+0), \\ &\text{v)} && \mathsf{P}\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F_\xi(x_2+0) - F_\xi(x_1+0). \end{aligned}$$

Доказательство.

i) Так как

$$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} + \{x_1 \leq \xi < x_2\},$$

то из аддитивности P получаем

$$\mathsf{P}\{\xi < x_2\} = \mathsf{P}\{\xi < x_1\} + \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi < x_2\}.$$

Отсюда следует (i).

ii) Из непрерывности P, (1.2), (i) получим

$$\mathsf{P}\{\xi = x\} = \lim_{n\to\infty} \left(F_\xi\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - F_\xi(x)\right) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x).$$

Равенства (iii), (iv), (v) доказываются аналогично. ■

П р и м е р 1. Рассмотрим схему Бернулли, состоящую из n испытаний с вероятностью успеха p. Обозначим через μ число успехов. Случайная величина μ принимает все целочисленные значения от 0 до n включительно. Согласно предыдущей главе

$$\mathsf{P}(\mu = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, \ldots, n.$$

Функция распределения случайной величины μ равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0, \\ \sum\limits_{k<x} P_n(k) & \text{при} \quad 0 < x \leq n, \\ 1 & \text{при} \quad x > n. \end{cases}$$

Функция распределения представляет собой ступенчатую функцию со скачками в точках $x = 0, \ldots, n$; скачок в точке $x = k$ равен $P_n(k)$.

Каждая случайная величина однозначно определяет свою функцию распределения. Обратное неверно, т. е. одной функцию распределения могут соответствовать сколь угодно различных случайных величин.

П р и м е р 2. Пусть случайная величина ξ принимает два значения -1 и $+1$, каждое с вероятностью 1/2. Случайная величина $\nu = -\xi$ всегда отлична от ξ. При этом обе эти случайные величины имеют одну и ту же функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq -1, \\ 1/2 & \text{при} \quad -1 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

4.2. Свойства функции распределения

Пусть ξ — случайная величина. Функция распределения $F(x) = F_\xi(x)$ обладает следующими свойствами:

F1. $F(x)$ не убывает.

F2. $F(x)$ непрерывна слева.

F3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда $\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$ и, следовательно, $F(x_1) \leq F(x_2)$.

2. Пусть числовая последовательность $\{y_n\}$ возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Тогда

$$\{\xi < y_n\} \subset \{\xi < y_{n+1}\}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi < y_n\} = \{\xi < x_0\}.$$

Из непрерывности P и монотонности функции распределения получаем

$$F(x_0 - 0) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi < y_n\} = \mathsf{P}\{\xi < x_0\} = F(x_0).$$

3. В силу п. 1, F монотонна и поэтому существуют пределы $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$. Пусть $A_k = \{k-1 \le \xi < k\}$. Ясно, что $\Omega = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$ и $\mathsf{P}(A_k) = F(k) - F(k-1)$. Получаем

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N+1}^{N} \mathsf{P}(A_k) = \\ = \lim_{N\to\infty} \big(F(N) - F(-N)\big) = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Из неравенства (1.4) следует, что $0 \le F(\pm\infty) \le 1$. Следовательно, $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$. ■

Теорема 2.1. *Пусть Функция $F(x)$ обладает свойствами* F1, F2 *и* F3. *Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и случайная величина ξ на этом пространстве такая, что $F_\xi(x) = F(x)$.*

4.3. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения

Распределение случайной величины ξ называется *дискретным*, если существует конечное или счётное множество чисел x_1, x_1, … таких, что

$$\mathsf{P}\{\xi = x_n\} = p_n,\ n = 1, 2, \ldots; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \tag{3.1}$$

Распределение случайной величины ξ называется *абсолютно непрерывным*, если существует неотрицательная функция $p_\xi(x)$ такая, что для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)\, du. \tag{3.2}$$

Функция $p_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей.*

Очевидно

$$\mathsf{P}\{a \le \xi < b\} = \int_a^b p_\xi(x)\, dx,$$

$$\mathsf{P}\{\xi = a\} = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+\frac{1}{n}} p_\xi(x)\, dx = 0.$$

Отсюда следует, что для абсолютно непрерывных величин

$$\mathsf{P}\{a \le \xi \le b\} = \mathsf{P}\{a < \xi \le b\} = \mathsf{P}\{a \le \xi < b\} = \mathsf{P}\{a < \xi < b\}.$$

Приведём часто встречающиеся распределения. Сначала перечислим дискретные распределения.

1. *Вырожденное распределение*:

$$\mathsf{P}\{\xi = a\} = 1, \quad a \text{ — постоянная.}$$

2. *Гипергеометрическое распределение* (N, M, n — натуральные числа, $M \le N$, $n \le N$):

$$\mathsf{P}\{\xi = m\} = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \ldots, \min\{M, n\}.$$

3. *Биномиальное распределение* (n — натуральные число, $0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

4. *Распределение Пуассона* ($\lambda > 0$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

5. *Геометрическое распределение* ($0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2 \ldots$$

Теперь перечислим некоторые абсолютно непрерывные распределения, указав их плотность.

1. *Равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$*,* $a < b$:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

2. *Нормальное распределение с параметрами* (a, σ^2) ($\sigma > 0$, $a \in \mathbb{R}$):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение также называется *гауссовым.* Нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$ называется *стандартным нормальным распределением.*

3. *Показательное распределение с параметром* $\lambda > 0$:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

4.4. Математическое ожидание

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ, заданной на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, называется величина

$$\mathsf{M}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega), \tag{4.1}$$

если интеграл Лебега, стоящий в правой части равенства, существует.

Говорят, что некоторое свойство выполнено P-*почти наверное*, если существует множество $N \in \mathcal{F}$ с $\mathsf{P}(N) = 0$ такое, что это свойство выполнено для всех $\omega \in \Omega \setminus N$. Вместо слов P-*почти наверное* часто говорят P-*почти всюду* или просто *почти наверное* (п.н.), *почти всюду* (п.в.).

Следующие свойства математического ожидания являются следствиями теории интеграла Лебега.

M1. *Если* c *— постоянная, то* $\mathsf{M}c = c$.

M2. *Если* c *— постоянная, то* $\mathsf{M}(c\xi) = c\mathsf{M}\xi$.

M3. *Для любой случайной величины* ξ

$$|\mathsf{M}\xi| \leq \mathsf{M}|\xi|.$$

M4. *Для любых случайных величин* ξ_1 *и* ξ_2

$$\mathsf{M}(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{M}\xi_1 + \mathsf{M}\xi_2.$$

M5. *Если случайные величины* ξ_1 *и* ξ_2 *независимы, то*

$$\mathsf{M}\xi_1\xi_2 = \mathsf{M}\xi_1 \cdot \mathsf{M}\xi_2.$$

M6. *Если случайная величина* ξ *неотрицательна, то* $\mathsf{M}\xi \geq 0$.

M7. *Если случайная величина* ξ *неотрицательна и* $\mathsf{M}\xi = 0$*, то* $\xi = 0$ *почти наверное.*

Неравенство Коши-Буняковского. Для любых двух случайных величин ξ, η таких, что $\mathsf{M}\xi^2 < \infty$, $\mathsf{M}\eta^2 < \infty$, справедливо неравенство

$$|\mathsf{M}\xi\eta| \leq \sqrt{\mathsf{M}\xi^2 \cdot \mathsf{M}\eta^2} \tag{4.2}$$

Доказательство. Если $\mathsf{M}\xi^2 = 0$ или $\mathsf{M}\eta^2 = 0$, то из M7 следует, что либо $\xi = 0$ п.н. либо $\eta = 0$ п.н. и неравенство (4.2) доказано. Поэтому будем предполагать, что $\mathsf{M}\xi^2 > 0$, $\mathsf{M}\eta^2 > 0$.

Пусть x — константа. Рассмотрим случайную величину $(\xi + x\eta)^2 \geq 0$. Из M2, M6 получаем

$$0 \leq \mathsf{M}(\xi + x\eta)^2 = \mathsf{M}\xi^2 + 2x\mathsf{M}\xi\eta + x^2\mathsf{M}\eta^2.$$

Так как это неравенство справедливо для любого x, то дискриминант $\mathcal{D}$ стоящего справа квадратичного многочлена неположителен. Таким образом,

$$\frac{\mathcal{D}}{4} = (\mathsf{M}\xi\eta)^2 - \mathsf{M}\xi^2\,\mathsf{M}\eta^2 \leq 0.$$

Неравенство (4.2) доказано. ∎

Переформулируем определение математического ожидания в наиболее важных случаях.

Математическим ожиданием $\mathsf{M}\xi$ случайной величины ξ, заданной на дискретном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, называется число

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(\omega_k)\,\mathsf{P}(\omega_k), \tag{4.3}$$

если ряд (4.3) абсолютно сходится. Если ряд (4.3) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Математическим ожиданием $\mathsf{M}\xi$ случайной величины ξ, заданной на абсолютно непрерывном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, называется число

$$\mathsf{M}\xi = \int_{\Omega} \xi(x_1, \ldots, x_n)\pi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n, \tag{4.4}$$

если интеграл (4.4) абсолютно сходится. Если интеграл (4.4) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Теорема 4.1. *Пусть случайная величина* ξ *имеет дискретное распределение. Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g(x_n)| \, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} < \infty,$$

тогда случайная величина $g(\xi)$ *имеет математическое ожидание*

$$\mathsf{M}g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) \, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} \tag{4.5}$$

В частности

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} \tag{4.6}$$

Теорема 4.2. *Пусть случайная величина* ξ *имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью* $p(x)$*. Если*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| \, p(x) \, dx < \infty,$$

тогда случайная величина $g(\xi)$ *имеет математическое ожидание*

$$\mathsf{M}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x) \, dx. \tag{4.7}$$

В частности

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) \, dx. \tag{4.8}$$

4.5. Дисперсия

Дисперсией случайной величины ξ называется величина

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\,(\xi - \mathsf{M}\xi)^2, \tag{5.1}$$

если математическое ожидание, стоящее в правой части равенства, существует. Дисперсия является мерой рассеяния значений случайной величины около её математического ожидания. Величина $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}\xi}$ называется *средним квадратическим отклонением.*

Преобразуем правую часть (5.1). Имеем

$$\mathsf{M}\,(\xi - \mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\,(\xi^2 - 2\xi\,\mathsf{M}\xi + (\mathsf{M}\xi)^2) = \mathsf{M}\xi^2 - 2\mathsf{M}\xi \cdot \mathsf{M}\xi + (\mathsf{M}\xi)^2.$$

Подставляя в (5.1), получаем

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2. \tag{5.2}$$

Если случайная величина ξ имеет дискретное распределение, то из (4.5) при $g(x) = (x - \mathsf{M}\xi)^2$ получаем

$$\mathsf{D}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - \mathsf{M}\xi)^2 \, \mathsf{P}\{\xi = x_n\} \tag{5.3}$$

Аналогично для случайной величины ξ с абсолютно непрерывным распределением из (4.7) будем иметь

$$\mathsf{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathsf{M}\xi)^2 p(x)\, dx. \tag{5.4}$$

Теорема 5.1.

1. *Для любой случайной величины* ξ *справедливо неравенство* $\mathsf{D}\xi \geq 0$.

2. *Если* c *— постоянная, то* $\mathsf{D}c = 0$.

3. *Если* c *— постоянная, то*

$$\mathsf{D}\,(c\xi) = c^2\mathsf{D}\xi, \quad \mathsf{D}\,(\xi + c) = \mathsf{D}\xi$$

4. *Если случайные величины* ξ_1 *и* ξ_2 *независимы, то*

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{D}\xi_1 + \mathsf{D}\xi_2.$$

Доказательство. Свойства 1–3 следуют из определения и свойств математического ожидания. Докажем свойство 4. По определению (5.1)

$$\begin{aligned}\mathsf{D}\,(\xi_1 + \xi_2) &= \mathsf{M}\,[(\xi_1 + \xi_2) - \mathsf{M}\,(\xi_1 + \xi_2)]^2 = \mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1) + (\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)]^2 = \\ &= \mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)]^2 + \mathsf{M}\,[(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)]^2 + 2\mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)].\end{aligned}$$

Так как случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то

$$\mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)] = 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{D}\,(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{M}\,[(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)]^2 + \mathsf{M}\,[(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2)]^2 = \mathsf{D}\xi_1 + \mathsf{D}\xi_2. \quad \blacksquare$$

4.6. Примеры

Вычислим математические ожидания и дисперсии некоторых распределений.

1. *Вырожденное распределение.* В этом случае очевидно, что

$$\mathsf{M}\xi = a, \quad \mathsf{D}\xi = 0. \tag{6.1}$$

2. *Биномиальное распределение* ($n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$). Имеем

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathsf{P}\,\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Так как $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, то

$$\mathsf{M}\xi = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np(p + (1-p))^{n-1} = np.$$

Найдём $\mathsf{M}\,[\xi(\xi - 1)]$. Запишем

$$\mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Учитывая равенство $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$, получим

$$\mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2}\, p^{k-2}(1-p)^{n-k} = \\ = n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2} = n(n-1)p^2.$$

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] + \mathsf{M}\xi - (\mathsf{M}\xi)^2.$$

Следовательно

$$\mathsf{D}\xi = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

В результате

$$\mathsf{M}\xi = np, \quad \mathsf{D}\xi = np(1-p) = npq. \tag{6.2}$$

3. *Распределение Пуассона* ($\lambda > 0$).
Найдём $\mathsf{M}\xi$.

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathsf{P}\,\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

Вычислим $\mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)]$. Имеем

$$\mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2.$$

Далее

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}\,[\xi(\xi-1)] + \mathsf{M}\xi - (\mathsf{M}\xi)^2 = \lambda.$$

В результате

$$\mathsf{M}\xi = \lambda, \quad \mathsf{D}\xi = \lambda. \tag{6.3}$$

4. *Равномерное распределение на отрезке* $[a,b]$, $a < b$:

$$\mathsf{M}\xi = \int_a^b xp(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{2}\,(b^2-a^2) = \frac{a+b}{2}.$$

Далее

$$\mathsf{M}\xi^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{3}\,(b^3-a^3) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Найдём дисперсию.

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

В результате

$$\mathsf{M}\xi = \frac{a+b}{2}, \quad \mathsf{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{6.4}$$

5. *Нормальное распределение с параметрами* (a, σ^2) ($\sigma > 0$, $a \in \mathbb{R}$).

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Сделаем замену $x = a + t\sigma$. Тогда

$$\mathsf{M}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + t\sigma)\, \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}, \tag{6.5}$$

получим $\mathsf{M}\xi = a$.

$$\mathsf{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathsf{M}\xi)^2 p(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

После замены переменной $x = a + t\sigma$

$$\mathsf{D}\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt.$$

Значение интеграла сведём к (6.5) интегрированием по частям:

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = t\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt.$$

В результате

$$\mathsf{M}\xi = a, \quad \mathsf{D}\xi = \sigma^2. \tag{6.6}$$