

Reporte de Actividad 7 - Sistema de resortes acoplados Completo

Diego Iván Moreno Campa

07 de Abril, 2018

1 Introducción

Esta actividad es el sexto trabajo para la materia de Física computacional I en la licenciatura de Física, en la cual se intenta resolver un sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de dos masas unidas por resortes con valores iniciales descritos en el artículo llamado *Coupled spring equations* de Fay & Graham. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden son separadas en 4 ecuaciones de primer orden, utilizando un solucionador de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODE Solver) en Python.

2 Fundamentos

ODEint es una API de SciPy para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando un método numérico para el lenguaje de programación Python. La API que utilizamos en esta actividad es la conjunción de viejos solucionadores de FORTRAN principalmente ODEPACK.

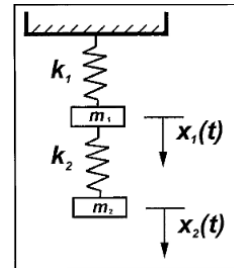
Para comenzar a resolver cualquier sistema de ecuaciones diferenciales que describen a dos resortes unidos, se nos proporcionó un ejemplo para la resolución de tales sistemas en Python, del cual nos basaremos para resolver los ejemplos 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 del artículo de Fay & Graham.

3 Procedimiento

Para entrar al tema de ecuaciones diferenciales en estos tiempos se suelen utilizar sistemas para mostrar las cualidades de las ecuaciones diferenciales en lugar de mostrar las formas de solucionar la variedad de ecuaciones diferenciales, en la cual se muestran ecuaciones no-lineales. Esto es debido a la facilidad de los algoritmos de algebra computacional como *Mathematica* y *Maple*. En este artículo se investigó un viejo problema de dos resortes con pesas en serie colgando. Asumiendo que las fuerzas restauradoras van de acuerdo a la Ley de Hooke, este se vuelve un problema de dos grados de libertad, el cual se resuelve con sustituciones y derivaciones para encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales de cuarto orden. Con este sistema se pueden apreciar las características y cualidades de las ecuaciones diferenciales cuando se juega con los valores iniciales o las constantes de los resortes, debido a que se pueden observar cambios más interesantes en las oscilaciones. Sin embargo también se aprecian, a través de ejemplos, los efectos al agregar características no-lineales a las ecuaciones como lo es introducir una fuerza restauradora más físicamente real que afectan la periodicidad del movimiento en el sistema.

3.1 El modelo de resortes acoplados

Este modelo consiste en dos masas y dos resortes, el primer resorte conectado al techo con constante de resorte k_1 el cual sostiene una pesa con m_1 que tiene sujeta a ella un segundo resorte con constante de resorte k_2 que a su vez, sostiene una pesa con masa m_2 . De aquí se puede medir el desplazamiento a partir del punto de equilibrio de cada resorte como función del tiempo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ respectivamente.



3.1.1 Asumiendo la Ley de Hooke

Considerando la ley de Hooke como las fuerzas de restauración sobre los resortes, tenemos que la primera pesa tiene dos fuerzas ejercidas sobre ella por la fuerza de restauración del primer resorte y otra del segundo resorte, mientras que la segunda pesa únicamente tiene la fuerza de restauración del segundo resorte siendo ejercida.

Si primeramente se asume que no hay fuerzas de amortiguamiento en el sistema, por la segunda ley de Newton tenemos las siguientes ecuaciones que describen al sistema:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1)$$

De donde podemos tomar a \dot{x}_1 y \dot{x}_2 como u y v , con lo que tenemos cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = u$$

$$\dot{u} = -\frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2)$$

$$\dot{x}_2 = v$$

$$\dot{v} = -\frac{k_2}{m_2} (x_2 - x_1)$$

en el cual se deben considerar los valores iniciales $x_1(0)$, $u(0)$, $x_2(0)$ y $v(0)$

3.1.2 Ejemplos con masas iguales

Para resolver los ejemplos de la actividad, utilizamos el código siguiente de ejemplo proporcionado en la descripción de la actividad por el *SciPy CookBook*:

En este segmento del código se define un "espacio vectorial" o sistema de ecuaciones en el que únicamente se muestra el "lado derecho" de la ecuación. Donde y_1 es \dot{x}_1 y y_2 es \dot{x}_2 , $L1=L2=0$ debido a que en nuestro caso es un sistema de resortes colgando.

```
def vectorfield(w, t, p):
    """
    Defines the differential equations for the coupled
    spring-mass system.

    Arguments:
        w : vector of the state variables:
            w = [x1,y1,x2,y2]
        t : time
        p : vector of the parameters:
            p = [m1,m2,k1,k2,L1,L2,b1,b2]
    """
    x1, y1, x2, y2 = w
    m1, m2, k1, k2, L1, L2, b1, b2 = p
```

```

# Create f = (x1',y1',x2',y2'):
f = [y1,
      (-b1 * y1 - k1 * (x1 - L1) + k2 * (x2 - x1 - L2)) / m1,
      y2,
      (-b2 * y2 - k2 * (x2 - x1 - L2)) / m2]
return f

```

Luego se agrupan los valores de los parametros y del espacio vectorial para mandarlos al `scipy.integrate.odeint()`

```

# Use ODEINT to solve the differential equations defined by the
vector field
from scipy.integrate import odeint

# Parameter values
# Masses:
m1 = 1.0
m2 = 1.5
# Spring constants
k1 = 8.0
k2 = 40.0
# Natural lengths
L1 = 0.5
L2 = 1.0
# Friction coefficients
b1 = 0.8
b2 = 0.5

# Initial conditions
# x1 and x2 are the initial displacements; y1 and y2 are the
initial velocities
x1 = 0.5
y1 = 0.0
x2 = 2.25
y2 = 0.0

# ODE solver parameters
abserr = 1.0e-8
relerr = 1.0e-6
stoptime = 50.0
numpoints = 1250

```

```

# Create the time samples for the output of the ODE solver.
# I use a large number of points, only because I want to make
# a plot of the solution that looks nice.
t=[stoptime*float(i)/(numpoints - 1) for i in range(numpoints)]

# Pack up the parameters and initial conditions:
p = [m1, m2, k1, k2, L1, L2, b1, b2]
w0 = [x1, y1, x2, y2]

# Call the ODE solver.
wsol = odeint(vectorfield, w0, t, args=(p,),
              atol=abserr, rtol=relerr)

with open('two_springs.dat', 'w') as f:
    # Print & save the solution.
    for t1, w1 in zip(t, wsol):
        print (t1, w1[0], w1[1], w1[2], w1[3], file=f)

```

En el cual se modifican los valores de los parametros para cada ejemplo, y en lugar de imprimir sobre el archivo únicamente los valores de t , x_1 , y_1 , x_2 y y_2 se agregan los errores relativos a correspondientes a cada x_1 y x_2 de cada ejemplo.

Ejemplo 2.1

En este ejemplo se nos pide describir el movimiento de un sistema de resortes con constantes $k_1 = 6$ y $k_2 = 4$ y condiciones iniciales $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (1, 0, 2, 0)$. De acuerdo al método analítico, la solución para el movimiento del sistema es:

$$x_1(t) = \cos \sqrt{2}t$$

$$x_2(t) = 2 \cos \sqrt{2}t$$

Al indicar en el código del ejemplo para este caso particular con las condiciones iniciales y parametros del ejemplo, obtenemos las siguientes representaciones de las soluciones dadas por 50 segundos en 1250 particiones

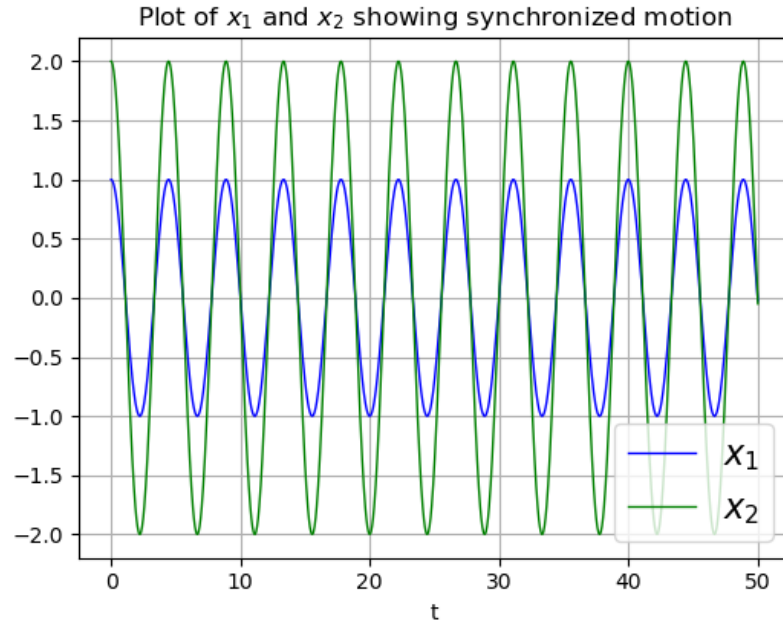
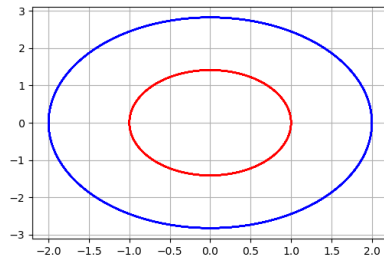
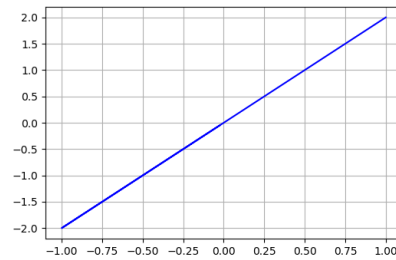


Figure 1: Movimiento de x_1 y x_2 sincronizado



(a) Retratos de fase para x_1 y x_2



(b) Relación del movimiento de x_1 con x_2

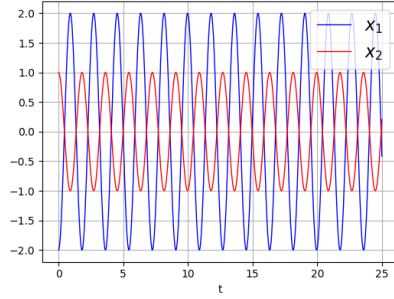
Ejemplo 2.2

En este ejemplo se nos pide describir el movimiento de un sistema de resortes con constantes $k_1 = 6$ y $k_2 = 4$ y condiciones iniciales $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (-2, 0, 1, 0)$. De acuerdo al método analítico, la solución para el movimiento del sistema es:

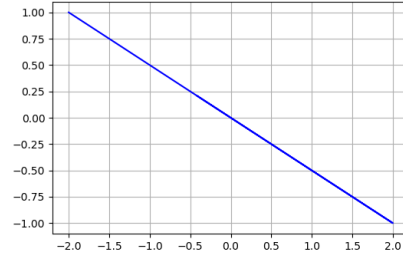
$$x_1(t) = -2 \cos 2\sqrt{3}t$$

$$x_2(t) = \cos 2\sqrt{3}t$$

En este ejercicio se obtuvieron los siguientes resultados para 25 segundos en 1250 particiones.



(a) Movimientos descritos por x_1 y x_2

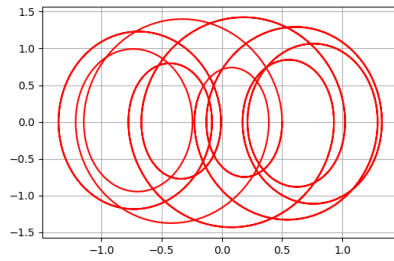


(b) Relación del movimiento de x_1 con x_2

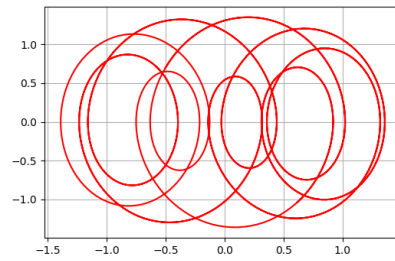
Ejemplo 2.3

En este ejemplo se nos pide describir el movimiento de un sistema de resortes con constantes $k_1 = 0.4$ y $k_2 = 1.808$ y condiciones iniciales $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (1/2, 0, -1/2, 7/10)$. En este ejercicio se ha proporcionado a la segunda masa con una velocidad inicial

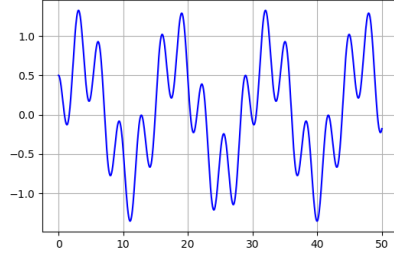
En este ejercicio se obtuvieron los siguientes resultados para 50 segundos en 1250 particiones.



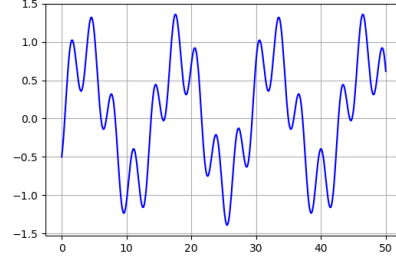
(a) retrato de fase de x_1



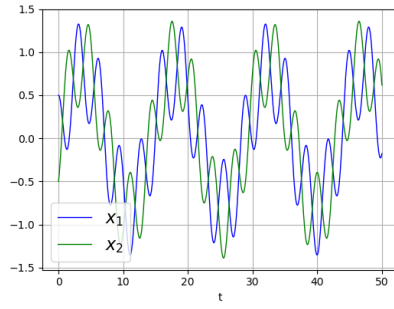
(b) retrato de fase de x_2



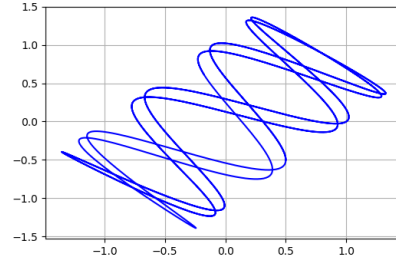
(a) gráfica del movimiento de x_1



(b) gráfica del movimiento de x_2



(a) movimiento de ambas masas, x_1 y x_2



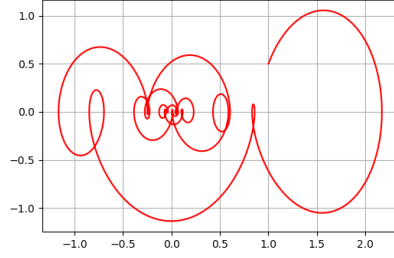
(b) Relación del movimiento de x_1 con x_2

3.1.3 Amortiguamiento

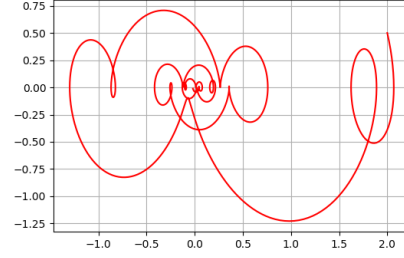
Ejemplo 2.4

En este ejemplo se nos pide describir el movimiento de un sistema de resortes con constantes $k_1 = 0.4$ y $k_2 = 1.808$, con coeficientes de fricción $b_1 = 0.1$ y $b_2 = 0.2$ y condiciones iniciales $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (1, 1/2, 2, 1/2)$. En este ejercicio se han introducido los efectos de amortiguamiento al cambiar los parámetros b_1 y b_2 .

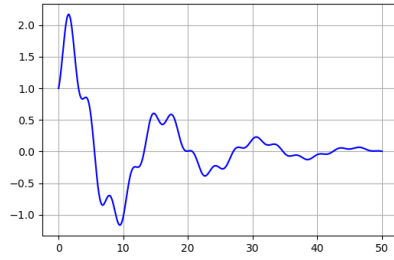
En este ejercicio se obtuvieron los siguientes resultados para 50 segundos en 1250 particiones.



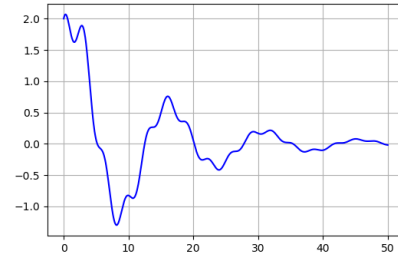
(a) retrato de fase de x_1



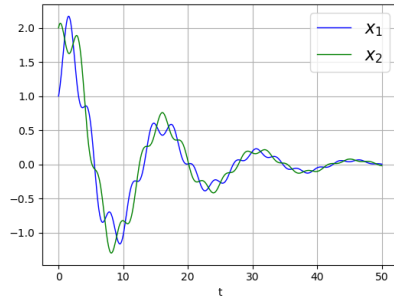
(b) retrato de fase de x_2



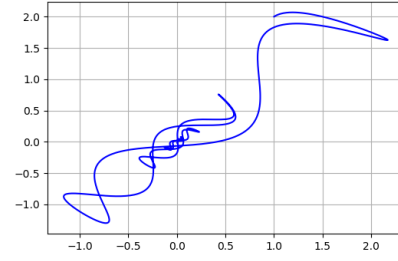
(a) gráfica del movimiento de x_1



(b) gráfica del movimiento de x_2



(a) movimiento de ambas masas, x_1 y x_2



(b) Relación del movimiento de x_1 con x_2

3.1.4 Añadiendo no-linealidad

Para los siguientes ejercicios añadimos no-linealidad al cambiar la fuerza restauradora $-kx$ con una fuerza no-lineal como $-kx + \mu x^3$ lo que podemos modelar con las siguientes expresiones:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + \mu_1 x_1^3 - k_2 (x_1 - x_2) + \mu_2 (x_1 - x_2)^3$$

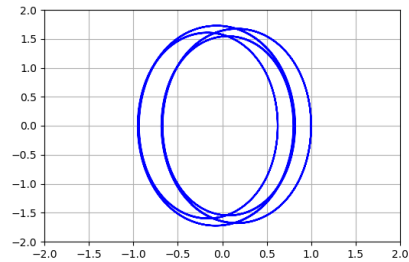
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) + \mu_2 (x_2 - x_1)^3$$

Al editar las ecuaciones adecuadamente en el código de *vectorfield* de la siguiente manera podemos obtener las soluciones descritas por esta no-linealidad:

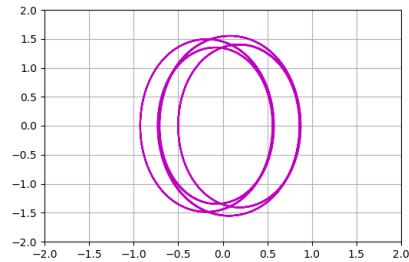
```
f = [y1,
      (-b1*y1-k1*x1+mu1*x1**3.0-k2*(x1-x2)+mu2*(x1-x2)**3.0)/m1,
      y2,
      (-b2*y2-k2*(x2-x1)+mu2*(x2-x1)**3.0) / m2]
return f
```

Ejemplo 3.1

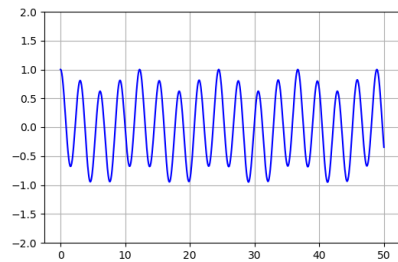
En este ejemplo se nos pide describir el movimiento de un sistema de resortes con constantes $k_1 = 0.4$ y $k_2 = 1.808$, con coeficientes de fricción $b_1 = 0$ y $b_2 = 0$, coeficientes de no-linealidad $\mu_1 = -1/6$ y $\mu_2 = -1/10$ y condiciones iniciales $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (1, 0, -1/2, 0)$.



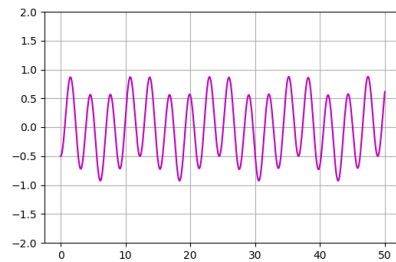
(a) retrato de fase de x_1



(b) retrato de fase de x_2

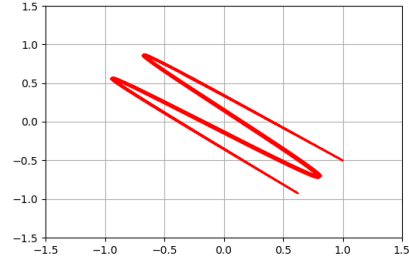
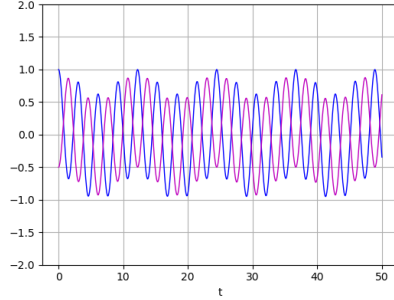


(a) gráfica del movimiento de x_1



(b) gráfica del movimiento de x_2

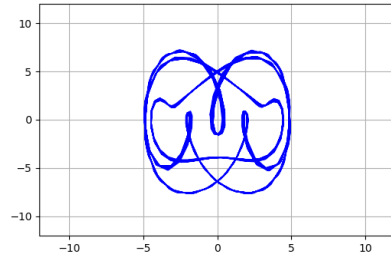
En este ejemplo como no hay amortiguamiento podemos observar movimientos oscilatorios, lo cual lo hace un sistema bonito



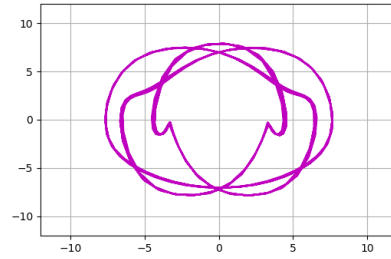
(a) movimiento de ambas masas, x_1 y x_2 (b) Relación del movimiento de x_1 con x_2

Ejemplo 3.2

En este ejemplo se nos pide describir el movimiento de un sistema de resortes con constantes $k_1 = 0.4$ y $k_2 = 1.808$, con coeficientes de fricción $b_1 = 0$ y $b_2 = 0$, coeficientes de no-linealidad $\mu_1 = -1/6$ y $\mu_2 = -1/10$ y condiciones iniciales $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (-0.5, 1/2, 3.001, 5.9)$.



(a) retrato de fase de x_1



(b) retrato de fase de x_2

De aquí podemos observar un movimiento agradable, pero en el siguiente ejercicio después de mover muy poco las condiciones iniciales obtenemos gráficas del movimiento totalmente diferentes:

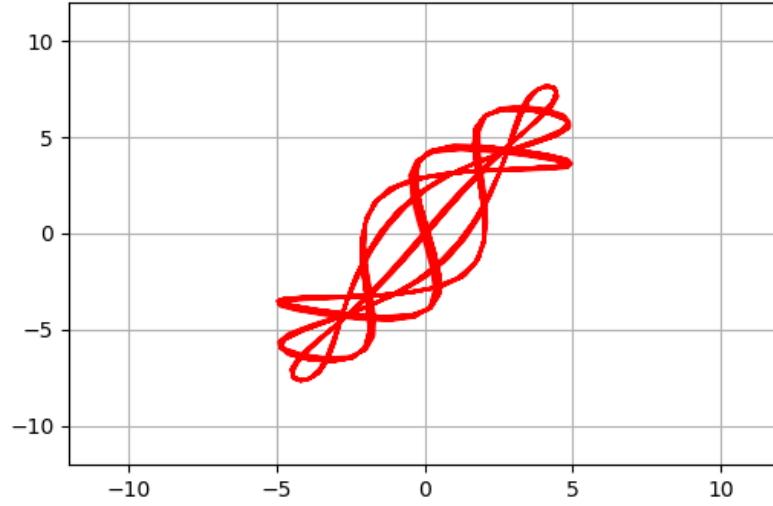
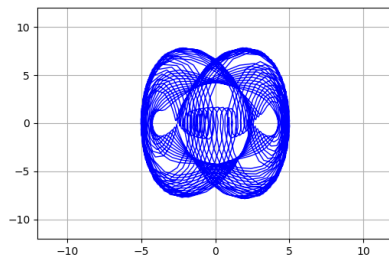


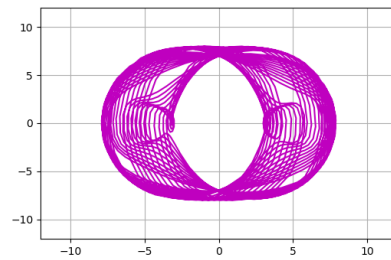
Figure 14: Gráfica de x_1 contra x_2 del ejercicio 3.2

Ejemplo 3.3

En este ejemplo se nos pide describir el movimiento de un sistema de resortes con constantes $k_1 = 0.4$ y $k_2 = 1.808$, con coeficientes de fricción $b_1 = 0$ y $b_2 = 0$, coeficientes de no-linealidad $\mu_1 = -1/6$ y $\mu_2 = -1/10$ y condiciones iniciales $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (-0.6, 1/2, 3.001, 5.9)$.



(a) retrato de fase de x_1



(b) retrato de fase de x_2

notamos claramente que el cambio de la posición inicial x_1 por un décimo afectó bastante el movimiento de los resortes.

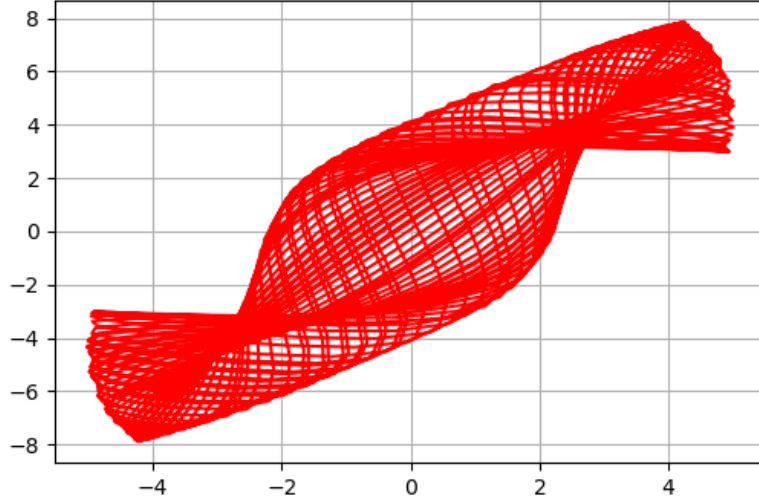


Figure 16: Gráfica de x_1 contra x_2 del ejercicio 3.3

3.1.5 Forzamiento

Si agregamos una fuerza simple sinusoidal de la forma $F \cos \omega t$ al sistema podemos modelar el sistema con la ecuación:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + \mu_1 * x_1^3 - k_2(x_1 - x_2) + \mu_1(x_1 - x_2)^3 + F_1 \cos \omega_1 t$$

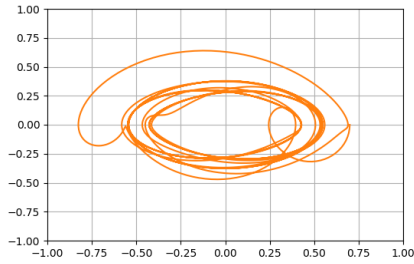
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) + \mu_2(x_2 - x_1)^3 + F_2 \cos \omega_2 t$$

El sistema modelado por el forzamiento es bastante caótico, a pesar de dar soluciones con límites o sin límites

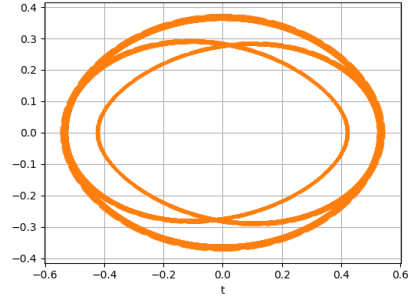
Ejemplo 4.1

En este ejemplo se nos pide describir el movimiento de un sistema de resortes con constantes $k_1 = 0.4$ y $k_2 = 1$, con coeficientes de fricción $b_1 = 1/10$ y $b_2 = 1/5$, coeficientes de no-linealidad $\mu_1 = 1/6$ y $\mu_2 = 1/10$, amplitudes de forzamiento $F_1 = 1/3$ y $F_2 = 1/5$, sus frecuencias de forzamiento $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 3/5$ y condiciones iniciales $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = (0.7, 0, 0.1, 0)$.

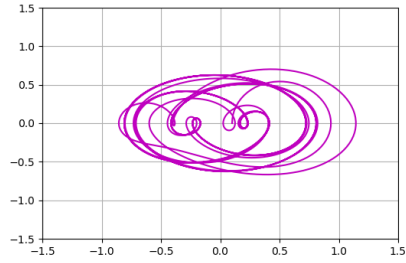
obtenemos las siguientes gráficas del movimiento del sistema, donde por el amortiguamiento podemos ver movimientos caóticos a pequeños valores de t , a pesar de esto podemos ver que para valores grandes de t se muestra un ciclo límite para el movimiento:



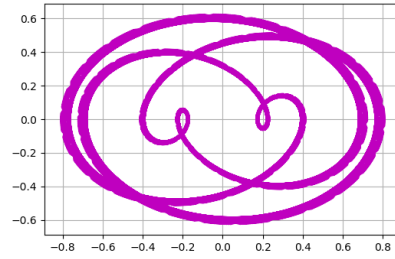
(a) Retrato de fase de x_1



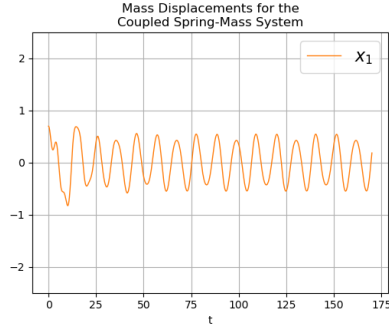
(b) Ciclo límite de x_1



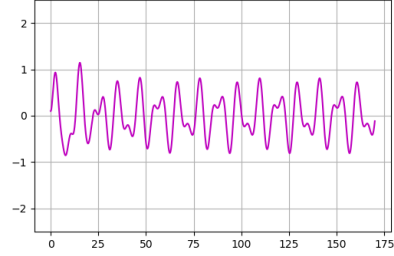
(a) Retrato de fase de x_2



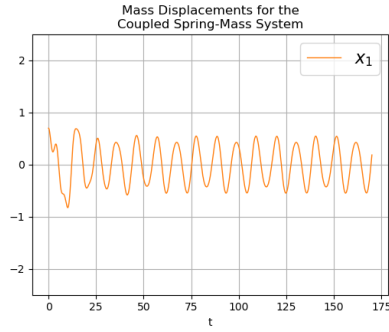
(b) Ciclo límite de x_2



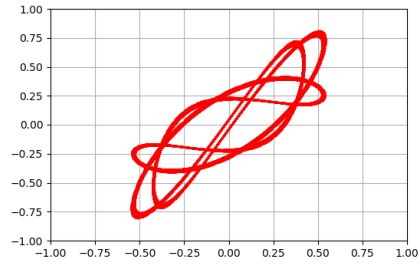
(a) Movimiento de x_1



(b) Movimiento de x_2



(a) Movimiento de x_1 con movimiento de x_2



(b) Gráfica de x_1 contra x_2

4 Resultados

Para conocer que tan buena es nuestra aproximación de la solución requerimos calcular el error relativo de las soluciones comparandolas con las soluciones analíticas proporcionadas por el artículo de Fay & Graham para los ejercicios 2.1 y 2.2

Para obtener el error relativo de las soluciones x_1 y x_2 en el ejercicio 2.1 añadimos la siguiente expresión a la lista de datos:

$$e_1 = \left| \frac{\cos \sqrt{2}t - x_1}{\cos \sqrt{2}t} \right|$$

$$e_2 = \left| \frac{2 \cos \sqrt{2}t - x_2}{2 \cos \sqrt{2}t} \right|$$

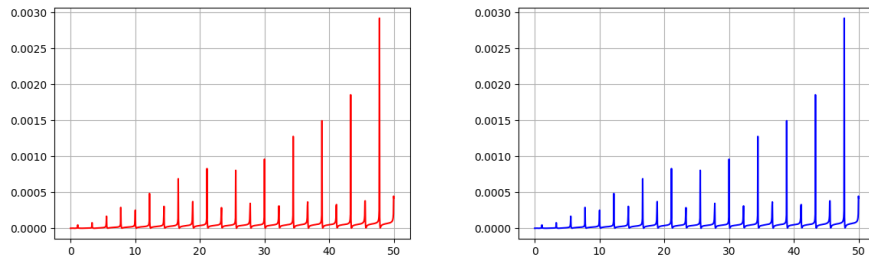
El cambio en el código yace al imprimir la solución en un archivo:

```

with open('ejercicio21.dat', 'w') as f:
    # Print & save the solution.
    for t1, w1 in zip(t, wsol):
        print(t1, w1[0], w1[1], w1[2], w1[3],
              np.abs((w1[0]-(np.cos(np.sqrt(2)*t1)))
                    /(np.cos(np.sqrt(2)*t1))),
              np.abs((w1[2]-(2*np.cos(np.sqrt(2)*t1)))
                    /(2*np.cos(np.sqrt(2)*t1))),
              file=f)

```

donde x_1 y x_2 son las soluciones en los momentos t . Esto nos dan las siguientes gráficas para los errores con respecto al tiempo:



(a) error relativo de la solución x_1

(b) error relativo de la solución x_2

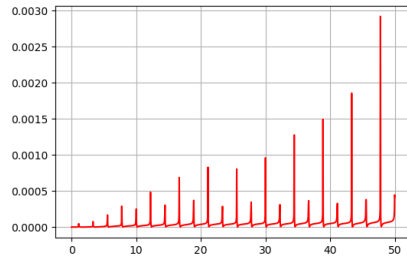
Figure 21: Errores para el ejercicio 2.1

Se realizó el mismo proceso para el ejercicio 2.2 con las expresiones para el error relativo correspondientes:

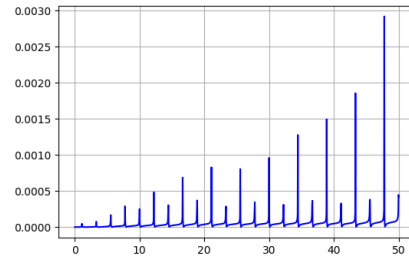
$$e_1 = \left| \frac{2 \cos 2\sqrt{3}t - x_1}{2 \cos 2\sqrt{3}t} \right|$$

$$e_2 = \left| \frac{\cos 2\sqrt{3}t - x_2}{\cos 2\sqrt{3}t} \right|$$

Obtuvimos las siguientes gráficas para los errores de las soluciones:



(a) error relativo de la solución x_1



(b) error relativo de la solución x_2

Figure 22: Errores para el ejercicio 2.2

5 Conclusión

Con esto podemos darnos cuenta que Python es una buena herramienta para buscar soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para graficar

Se pueden obtener gráficas que se aprecian correctamente aparte de que se pueden manejar fácilmente.

6 Bibliografia

- The Scipy community. (Oct 25, 2017). Integration and ODE's (scipy.integrate). Mar 18, 2018, de The Scipy community Sitio web:
<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/integrate.html>
- TEMPLE H. FAY, SARAH DUNCAN GRAHAM. (12 September 2002). Coupled spring equations. En int. j. math. educ. sci. technol., 2003(65–79). attiesburg, MS: Taylor & Francis.

Apéndice

1. ¿Qué más te llama la atención de la actividad completa? ¿Que se te hizo menos interesante?

Se me hizo interesante que si quisieramos remodelar el sistema y gráficar, únicamente cambiamos la ecuación declarada

2. ¿De un sistema de masas acopladas como se trabaja en esta actividad, hubieras pensado que abre toda una nueva área de fenómenos no lineales?

pues, creo que no, no parecería

3. ¿Qué propondrías para mejorar esta actividad? ¿Te ha parecido interesante este reto?

no propondría nada nuevo, fue buena idea basarse en un artículo y así

4. ¿Quisieras estudiar mas este tipo de fenómenos no lineales?

Definitivamente SI!