Содержание

1 Элементы теории меры и интеграла

1.1 Пространства с мерой

Определение 1.1. Пусть X — непустое множество. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ из X называется *σ-алгеброй*, если выполняются следующие условия:

1. $X \in \mathcal{F}$;
2. $X \setminus A \in \mathcal{F}$ для всех A из $\mathcal{F}$;
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ для всех A_i, $i \in \mathbb{N}$ из $\mathcal{F}$.

Подмножества, принадлежащие этому семейству, называются *измеримыми.*

Определение 1.2. Отображение $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется *мерой*, если

1. $\mu(A) \geqslant 0$ для всех измеримых подмножеств A;
2. $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ для любой последовательности $\{A_i\}$ *взаимно непересекающихся* измеримых подмножеств.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие свойства:*

1. *Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество;*
2. *Если E_1 и E_2 — измеримые множества и $E_1 \subset E_2$, то*

$$\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2).$$

Доказательство. См. методичку □

Определение 1.3. Тройка $(X, \mathcal{F}, \mu)$, где X — непустое множество, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра измеримых подмножеств из X, а μ — мера, называется *пространством с мерой.*

Пример 1.1. Пусть X — некоторое непустое множество. В качестве $\mathcal{F}$ возьмем всевозможные подмножества из X. Очевидно, что они образуют σ-алгебру. Меру $\mu_a \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, где a — некоторый элемент из X, определим следующим образом:

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство того, что определенная таким образом функция в самом деле является мерой, элементарно (см. методичку).

Построенная мера называется *мерой Дирака, сосредоточенной в точке a.* ♢

Пример 1.2. В качестве X возьмем вещественную прямую $\mathbb{R}$. Определим длину интервала (a, b) равенством $\mu((a, b)) = b - a$. Любое открытое множество на прямой представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся интервалов. Тогда определим меру открытого множеств по формуле $\mu(G) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$, где $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество на прямой. Его можно покрыть некоторым открытым множеством $G \supset E$. Величина $\mu^*(E) = \inf\limits_{G \supset E} \mu(G)$, где инфимум берется по всем открытым покрытиям E, называется *верхней мерой* множества E.

Нижняя мера множества E определяется по формуле $\mu_*(E) = b - a - \mu([a, b] \setminus E)$, где $[a, b]$ — наименьший отрезок, содержащий множество E.

Назовём ограниченное множество E *измеримым по Лебегу*, если $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. Тогда *мерой Лебега* множества E назовём общее значение верхней и нижней мер этого множества.

Мера Лебега также определяется и для неограниченных множеств. Для этого в качестве нижней меры множества E берется предел нижних мер множеств вида $E_n = E \cap [-n, n]$ при $n \to \infty$. Этот предел существует или бесконечен, поскольку последовательность $\mu_*(E_n)$, как можно показать, монотонно неубывает. ♢

Теорема 1.2. *Тройка $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$, где $\mathcal{F}$ — множество измеримых по Лебегу множеств на прямой, а μ — мера Лебега, является пространством с мерой.*

Пример 1.3. Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где Ω — пространство элементарных исходов, $\mathfrak{A}$ — алгебра событий, P — вероятностная мера, является пространством с мерой. $\diamondsuit$

1.2 Простые функции. Интегрирование простых функций

Пусть далее $(X, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathcal{F}$ — некоторое измеримое подмножество.

Определение 1.4. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если E можно представить в виде счетного объединения взаимно непересекающихся измеримых подмножеств E_i так, что функция f принимает на этих подмножествах постоянное значение: $f(x) = a_i$ для всех x из E_i.

Функция f называется *ступенчатой*, если такое объединение конечно.

Пример 1.4. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ — прямая с мерой Лебега, $E = [0, 1]$. Функция Дирихле, определенная на E и принимающая значение 1 для рациональных аргументов и 0 для иррациональных, является простой (и даже ступенчатой). В качестве E_1 можно взять множество рациональных чисел из отрезка E, а в качестве E_2 — множество иррациональных чисел из того же отрезка. Оба этих множества измеримы по Лебегу. $\diamondsuit$

Лемма 1.1. *Линейная комбинация простых функций, определенных на измеримом множестве E является простой функцией.*

Доказательство. Покажем, что $\alpha f + \beta g$ также простая функция для простых функций $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Пусть

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j,$$

причем

$$f(x) = a_i, \quad x \in E_i,$$
$$g(x) = b_j, \quad x \in F_j.$$

Обозначим $G_{ij} = E_i \cap F_j$. Это также измеримые множества. Более того непосредственно проверяется, что

$$E = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} G_{ij}.$$

На множестве G_{ij} функция $\alpha f + \beta g$ принимает значение

$$(\alpha f + \beta g) = \alpha a_i + \beta b_j.$$

Этим доказано, что функция $\alpha f + \beta g$ простая, принимающая постоянные значения на множествах G_{ij}. □

Из этой леммы следует, что простые функции образуют линейное пространство.

Далее будем считать, что мера множества E конечна.

Определение 1.5. Простая функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно суммируемой,* если конечна величина

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\, \mu(E_i),$$

в обозначениях предыдущего определения.

Определение 1.6. *Интегралом* от абсолютно суммируемой функции f называется сумма вида

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i).$$

Аргумент в записи интеграла часто опускают и пишут просто

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

В следующей теореме доказываются основные свойства интеграла от абсолютно суммируемых функций.

Теорема 1.3. *Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ — абсолютно суммируемые функции. Тогда справедливы следующие свойства:*

1. *Линейность: для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ абсолютно суммируема и справедливо равенство*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathrm{d}\mu;$$

2. *Оценка модуля интеграла:*

$$\left|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \mu(E) \sup_{x\in E} |f(x)|\,;$$

3. *Неотрицательность: если $f \geqslant 0$, то*

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0;$$

4. *Монотонность: если $f \geqslant g$, то*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_E g \, \mathrm{d}\mu;$$

5. *Аддитивность: если E представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся измеримых подмножеств A_k, то*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_k \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

1. Абсолютная суммируемость линейной комбинации следует из предыдущей леммы, свойств абсолютно сходящихся числовых рядов и из свойства монотонности меры.

   Покажем, что справедливо указанное в утверждении теоремы равенство. Будем пользоваться обозначениями из леммы.

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i,j=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_j)\mu(G_{ij}) =$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(G_{ij}) =$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}).$$

   Поскольку, как нетрудно видеть, $E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G_{ij}$, $F_j = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_{ij}$, а множества G_{ij} взаимно не пересекаются, из свойства аддитивности меры получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(E_i); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(F_j).$$

   Таким образом

$$\alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i) +$$

$$+\beta\sum_{j=1}^{\infty} b_j\mu(F_j) = \alpha\int_E f\,\mathrm{d}\mu + \beta\int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

2. Тривиально (неравенство треугольника, аддитивность меры).

3. Тривиально.

4. Рассмотреть функцию $f-g$ и применить линейность и предыдущее свойство.

5. Рассмотреть взаимно непересекающиеся множества вида $H_{ik} = E_i \cap A_k$, на которых функция принимает постоянные значения c_{ik}, и которые образуют разбиение E:

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sum_i\sum_k c_{ik}\mu(H_{ik}) = \sum_k\sum_i c_{ik}\mu(H_{ik}) = \sum_k\int_{A_k} f\,\mathrm{d}\mu$$

□

1.3 Измеримые функции. Интегрирование измеримых функций

Определение 1.7. Функция $f\colon E\to\mathbb{R}$, определенная на измеримом множестве E, называется *измеримой*, если она является равномерным пределом на E последовательности простых функций, т.е. существует такая последовательность $\{f_n\}$, $f_n\colon E\to\mathbb{R}$, что

$$\sup_{x\in E}|f(x)-f_n(x)|\to\infty,\quad n\to\infty.$$

Определение 1.8. Функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ называется *измеримой*, если

$$f^{-1}((-\infty,x))\in\mathcal{F},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Теорема 1.4. *Вышеприведенные определения измеримой функции эквивалентны.*

Доказательство. см. в методичке на с. 51 (требуется только необходимость). □

Определение 1.9. Если существует последовательность простых интегрируемых функций, сходящаяся равномерно к измеримой функции f, то *интегралом* функции f назовем предел

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Можно показать, что предел (быть может, бесконечный) всегда существует и не зависит от выбора последовательности f_n.

Определение 1.10. Неотрицательная функция f называется *интегрируемой* на множестве E, если предел из предыдущего определения конечен.

Всякая измеримая функция f представима в виде разности двух неотрицательных измеримых функций:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leqslant 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}.$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Тогда если хотя бы одна из функций f_+ или f_- интегрируема, интегралом функции f назовём величину

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f_- \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение 1.11. В случае, когда $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств на $\mathbb{R}$, μ — мера Лебега, интеграл, определённый по схеме, приведённой в данном разделе, называется *интегралом Лебега* на прямой.

Теорема 1.5. *Если $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ — прямая с мерой Лебега, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то тогда она интегрируема по Лебегу и значения интегралов Римана и Лебега совпадают.*

1.4 Пространства Лебега

Определение 1.12. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на измеримом множестве E, называется *суммируемой со степенью p*, $p \geqslant 1$, если величина

$$\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x)$$

определена и конечна.

Определение 1.13. Будем говорить, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на измеримом множестве E, если оно выполнено на всём множестве E, за исключением, быть может, множества меры нуль.

Определение 1.14. Две функции $f_1, f_2\colon E \to \mathbb{R}$ назовём *эквивалентными* на множестве E, если их значения совпадают почти всюду.

Отношение $\sim$, введённое в определении выше, является отношением эквивалентности.

Пусть $\mathcal{L}_p(E,\mu)$, $p \geqslant 1$ — линейное пространство суммируемых со степенью p функций, определенных на множестве E.

Рассмотрим фактормножество $L_p(E,\mu) = \mathcal{L}_p(E,\mu)/\sim$. Оно также будет являться линейным пространством. В нём можно ввести норму по формуле

$$\left\|\tilde{f}\right\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Классы эквивалентности из $L_p(E,\mu)$, допуская неточность, часто отождествляют с функциями-представителями из этого класса.

Если $E = [a,b] \subset \mathbb{R}$, μ — мера Лебега на прямой, то вместо $L_p([a,b],\mu)$ обычно пишут просто $L_p[a,b]$.

Теорема 1.6 (Лебега). *$L_p(E,\mu)$ — банахово пространство.*