

Воронежский государственный  
университет

Факультет прикладной математики, информатики и  
механики

---

Конспект лекций по  
функциональному анализу  
4 семестр

---

Лектор  
Баскаков А. Г.

Конспект подготовил

Харитонов В.  
([kharvd@gmail.com](mailto:kharvd@gmail.com))

2014 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Элементы теории меры и интеграла</b>	<b>3</b>
1.1	Пространства с мерой . . . . .	3
1.2	Интегрирование простых функций . . . . .	4
1.3	Интегрирование измеримых функций . . . . .	8
1.4	Пространства Лебега . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Ограниченные операторы</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Принцип равномерной ограниченности</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Ряды в банаховом пространстве</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Гильбертовы пространства</b>	<b>16</b>
5.1	Начальные сведения . . . . .	16
5.2	Теорема об ортогональном дополнении . . . . .	18
5.3	Базис в гильбертовом пространстве . . . . .	21
5.4	Теорема Рисса . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Теорема Хана-Банаха</b>	<b>26</b>
<b>7</b>	<b>Элементы нелинейного анализа</b>	<b>28</b>
7.1	Производная отображения . . . . .	28
7.2	Задачи на экстремум . . . . .	33
<b>8</b>	<b>Элементы теории функции комплексной переменной</b>	<b>35</b>
<b>9</b>	<b>Спектральная теория линейных операторов</b>	<b>39</b>
9.1	Обратные операторы и их свойства . . . . .	39
9.2	Спектр оператора . . . . .	42
<b>10</b>	<b>Элементы функционального исчисления операторов</b>	<b>47</b>
10.1	Операторное исчисление . . . . .	47
10.2	Проекторы Рисса . . . . .	49
<b>11</b>	<b>Компактные операторы</b>	<b>51</b>

# 1 Элементы теории меры и интеграла

## 1.1 Пространства с мерой

**Определение 1.1.** Пусть  $X$  — непустое множество. Семейство подмножеств  $\mathcal{F}$  из  $X$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если выполняются следующие условия:

1.  $X \in \mathcal{F}$ ;
2.  $X \setminus A \in \mathcal{F}$  для всех  $A$  из  $\mathcal{F}$ ;
3.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$  для всех  $A_i, i \in \mathbb{N}$  из  $\mathcal{F}$ .

Подмножества, принадлежащие этому семейству, называются *измеримыми*.

**Определение 1.2.** Отображение  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  называется *мерой*, если

1.  $\mu(A) \geq 0$  для всех измеримых подмножеств  $A$ ;
2.  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  для любой последовательности  $\{A_i\}$  взаимно непересекающихся измеримых подмножеств.

**Теорема 1.1.** *Справедливы следующие свойства:*

1. Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество;
2. Если  $E_1$  и  $E_2$  — измеримые множества и  $E_1 \subset E_2$ , то

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. методичку

□

**Определение 1.3.** Тройка  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , где  $X$  — непустое множество,  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых подмножеств из  $X$ , а  $\mu$  — мера, называется *пространством с мерой*.

**Пример 1.1.** Пусть  $X$  — некоторое непустое множество. В качестве  $\mathcal{F}$  возьмем всевозможные подмножества из  $X$ . Очевидно, что они образуют  $\sigma$ -алгебру. Меру  $\mu_a: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $a$  — некоторый элемент из  $X$ , определим следующим образом:

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство того, что определенная таким образом функция в самом деле является мерой, элементарно (см. методичку).

Построенная мера называется *мерой Дирака, сосредоточенной в точке  $a$* .  $\diamond$

**Пример 1.2.** В качестве  $X$  возьмем вещественную прямую  $\mathbb{R}$ . Определим длину интервала  $(a, b)$  равенством  $\mu((a, b)) = b - a$ . Любое открытое множество на прямой представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся интервалов. Тогда определим меру открытого множеств по формуле  $\mu(G) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$ , где  $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ .

Пусть  $E \subset \mathbb{R}$  — ограниченное множество на прямой. Его можно покрыть некоторым открытым множеством  $G \supset E$ . Величина  $\mu^*(E) = \inf_{G \supset E} \mu(G)$ , где инфимум берется по всем открытым покрытиям  $E$ , называется *верхней мерой* множества  $E$ .

*Нижняя мера* множества  $E$  определяется по формуле  $\mu_*(E) = b - a - \mu([a, b] \setminus E)$ , где  $[a, b]$  — наименьший отрезок, содержащий множество  $E$ .

Назовём ограниченное множество  $E$  *измеримым по Лебегу*, если  $\mu_*(E) = \mu^*(E)$ . Тогда *мерой Лебега* множества  $E$  назовём общее значение верхней и нижней мер этого множества.

Мера Лебега также определяется и для неограниченных множеств. Для этого в качестве нижней меры множества  $E$  берется предел нижних мер множеств вида  $E_n = E \cap [-n, n]$  при  $n \rightarrow \infty$ . Этот предел существует или бесконечен, поскольку последовательность  $\mu_*(E_n)$ , как можно показать, монотонно неубывает.  $\diamond$

**Теорема 1.2.** *Тройка  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ , где  $\mathcal{F}$  — множество измеримых по Лебегу множеств на прямой, а  $\mu$  — мера Лебега, является пространством с мерой.*

**Пример 1.3.** Тройка  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , где  $\Omega$  — пространство элементарных исходов,  $\mathfrak{A}$  — алгебра событий,  $P$  — вероятностная мера, является пространством с мерой.  $\diamond$

## 1.2 Простые функции. Интегрирование простых функций

Пусть далее  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  — пространство с мерой,  $E \in \mathcal{F}$  — некоторое измеримое подмножество.

**Определение 1.4.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется *простой*, если  $E$  можно представить в виде счетного объединения взаимно непересекающихся измеримых подмножеств  $E_i$  так, что функция  $f$  принимает на этих подмножествах постоянное значение:  $f(x) = a_i$

для всех  $x$  из  $E_i$ .

Функция  $f$  называется *ступенчатой*, если такое объединение конечно.

**Пример 1.4.** Пусть  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$  — прямая с мерой Лебега,  $E = [0, 1]$ . Функция Дирихле, определенная на  $E$  и принимающая значение 1 для рациональных аргументов и 0 для иррациональных, является простой (и даже ступенчатой). В качестве  $E_1$  можно взять множество рациональных чисел из отрезка  $E$ , а в качестве  $E_2$  — множество иррациональных чисел из того же отрезка. Оба этих множества измеримы по Лебегу.  $\diamond$

**Лемма 1.1.** *Линейная комбинация простых функций, определенных на измеримом множестве  $E$  является простой функцией.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что  $\alpha f + \beta g$  также простая функция для простых функций  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  и чисел  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Пусть

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j,$$

причем

$$\begin{aligned} f(x) &= a_i, & x \in E_i, \\ g(x) &= b_j, & x \in F_j. \end{aligned}$$

Обозначим  $G_{ij} = E_i \cap F_j$ . Это также измеримые множества. Более того непосредственно проверяется, что

$$E = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} G_{ij}.$$

На множестве  $G_{ij}$  функция  $\alpha f + \beta g$  принимает значение

$$(\alpha f + \beta g) = \alpha a_i + \beta b_j.$$

Этим доказано, что функция  $\alpha f + \beta g$  простая, принимающая постоянные значения на множествах  $G_{ij}$ .  $\square$

Из этой леммы следует, что простые функции образуют линейное пространство.

Далее будем считать, что мера множества  $E$  конечна.

**Определение 1.5.** Простая функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется *аб-*

солютно суммируемой, если конечна величина

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \mu(E_i),$$

в обозначениях предыдущего определения.

**Определение 1.6.** *Интегралом* от абсолютно суммируемой функции  $f$  называется сумма вида

$$\int_E f(x) d\mu(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i).$$

Аргумент в записи интеграла часто опускают и пишут просто

$$\int_E f d\mu.$$

В следующей теореме доказываются основные свойства интеграла от абсолютно суммируемых функций.

**Теорема 1.3.** Пусть  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  — абсолютно суммируемые функции. Тогда справедливы следующие свойства:

1. *Линейность:* для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  функция  $\alpha f + \beta g$  абсолютно суммируема и справедливо равенство

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu;$$

2. *Оценка модуля интеграла:*

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \mu(E) \sup_{x \in E} |f(x)|;$$

3. *Неотрицательность:* если  $f \geq 0$ , то

$$\int_E f d\mu \geq 0;$$

4. *Монотонность:* если  $f \geq g$ , то

$$\int_E f d\mu \geq \int_E g d\mu;$$

5. *Аддитивность:* если  $E$  представимо в виде объединения не

более чем счетного числа взаимно непересекающихся измеримых подмножеств  $A_k$ , то

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{A_k} f \, d\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Абсолютная суммируемость линейной комбинации следует из предыдущей леммы, свойств абсолютно сходящихся числовых рядов и из свойства монотонности меры.

Покажем, что справедливо указанное в утверждении теоремы равенство. Будем пользоваться обозначениями из леммы.

$$\begin{aligned} \int_E (\alpha f + \beta g) \, d\mu &= \sum_{i,j=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_j) \mu(G_{ij}) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(G_{ij}) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}). \end{aligned}$$

Поскольку, как нетрудно видеть,  $E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{ij}$ ,  $F_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ij}$ , а множества  $G_{ij}$  взаимно не пересекаются, из свойства аддитивности меры получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(E_i); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(F_j).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i) + \\ &+ \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(F_j) = \alpha \int_E f \, d\mu + \beta \int_E g \, d\mu. \end{aligned}$$

2. Тривиально (неравенство треугольника, аддитивность меры).

3. Тривиально.
4. Рассмотреть функцию  $f - g$  и применить линейность и предыдущее свойство.
5. Рассмотреть взаимно непересекающиеся множества вида  $H_{ik} = E_i \cap A_k$ , на которых функция принимает постоянные значения  $c_{ik}$ , и которые образуют разбиение  $E$ :

$$\int_E f \, d\mu = \sum_i \sum_k c_{ik} \mu(H_{ik}) = \sum_k \sum_i c_{ik} \mu(H_{ik}) = \sum_k \int_{A_k} f \, d\mu$$

□

### 1.3 Измеримые функции. Интегрирование измеримых функций

**Определение 1.7.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная на измеримом множестве  $E$ , называется *измеримой*, если она является равномерным пределом на  $E$  последовательности простых функций, т.е. существует такая последовательность  $\{f_n\}$ ,  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$\sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Определение 1.8.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется *измеримой*, если

$$f^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 1.4.** Вышеприведенные определения измеримой функции эквивалентны.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** см. в методичке на с. 51 (требуется только необходимость). □

**Определение 1.9.** Если существует последовательность простых интегрируемых функций, сходящаяся равномерно к измеримой функции  $f$ , то *интегралом* функции  $f$  назовем предел

$$\int_E f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Можно показать, что предел (быть может, бесконечный) всегда существует и не зависит от выбора последовательности  $f_n$ .



**Определение 1.10.** Неотрицательная функция  $f$  называется *интегрируемой* на множестве  $E$ , если предел из предыдущего определения конечен.

Всякая измеримая функция  $f$  представима в виде разности двух неотрицательных измеримых функций:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}.$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Тогда если хотя бы одна из функций  $f_+$  или  $f_-$  интегрируема, интегралом функции  $f$  назовём величину

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu.$$

**Определение 1.11.** В случае, когда  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу множеств на  $\mathbb{R}$ ,  $\mu$  — мера Лебега, интеграл, определённый по схеме, приведённой в данном разделе, называется *интегралом Лебега* на прямой.

**Теорема 1.5.** Если  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$  — прямая с мерой Лебега,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Риману, то тогда она интегрируема по Лебегу и значения интегралов Римана и Лебега совпадают.

## 1.4 Пространства Лебега

**Определение 1.12.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая на измеримом множестве  $E$ , называется *суммируемой со степенью  $p$* ,  $p \geq 1$ , если величина

$$\int_E |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

определена и конечна.

**Определение 1.13.** Будем говорить, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на измеримом множестве  $E$ , если оно выполнено на всём множестве  $E$ , за исключением, быть может, множества меры нуль.

**Определение 1.14.** Две функции  $f_1, f_2: E \rightarrow \mathbb{R}$  назовём *эквивалентными* на множестве  $E$ , если их значения совпадают почти всюду.

Отношение  $\sim$ , введённое в определении выше, является отношением эквивалентности.

Пусть  $\mathcal{L}^p(E, \mu)$ ,  $p \geq 1$  — линейное пространство суммируемых со степенью  $p$  функций, определенных на множестве  $E$ .

Рассмотрим фактормножество  $L^p(E, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mu)/\sim$ . Оно также будет являться линейным пространством. В нём можно ввести норму по формуле

$$\|\tilde{f}\|_p = \left( \int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Классы эквивалентности из  $L^p(E, \mu)$ , допуская неточность, часто отождествляют с функциями-представителями из этого класса.

Если  $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\mu$  — мера Лебега на прямой, то вместо  $L^p([a, b], \mu)$  обычно пишут просто  $L^p[a, b]$ .

**Теорема 1.6 (Лебега).**  $L^p(E, \mu)$  — банахово пространство.

## 2 Ограниченные операторы

Далее  $X$  и  $Y$  — нормированные пространства над полем  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**Определение 2.1.** Отображение  $A: X \rightarrow Y$  называется *линейным оператором*, действующим из пространства  $X$  в  $Y$ , если

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Если  $Y = \mathbb{K}$ , то вместо слова «оператор» говорят «функционал».

**Пример 2.1.** Отображение  $D: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , определённое по правилу  $Dx = x'$  называется *оператором дифференцирования*. Это линейный оператор.  $\diamond$

**Пример 2.2.** Отображение  $J: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , определённое по правилу

$$(Jx)(t) = \int_a^t x(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

называется *оператором неопределённого интегрирования*.  $\diamond$

**Пример 2.3.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  — пространство с мерой,  $L^1(\Omega, \mu)$  — банахово пространство классов эквивалентности суммируемых функций на  $\Omega$ . Отображение  $J_0: L^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ , определённое по правилу

$$J_0x = \int_{\Omega} x d\mu,$$

есть линейный функционал.  $\diamond$

**Пример 2.4.** Отображение  $A: \ell^1 \rightarrow \ell^\infty$ , определённое по пра-

виду

$$(Ax)(n) = \sum_{k=1}^n x(k),$$

есть линейный оператор, который каждой последовательности из  $\ell^1$  ставит в соответствие её последовательность частичных сумм.  $\diamond$

**Пример 2.5.** Отображение  $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , определённое по правилу

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

где  $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, называется *интегральным оператором*. При этом функция  $K$  называется *ядром* этого интегрального оператора.  $\diamond$

**Определение 2.2.** Оператор  $A: X \rightarrow Y$  между нормированными пространствами называется *ограниченным*, если величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

конечна. Эта величина, в таком случае, называется *нормой оператора*  $A$ .

Можно показать, что все следующие определения нормы совпадают с данным выше:

1.  $\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|$
2.  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$
3.  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ;
4.  $\|A\| = \inf \{C \geq 0 : \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq C \|x\|\}$

Нетрудно видеть, что  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$  для всех  $x \in X$ .

**Пример 2.6.** Рассмотрим оператор умножения  $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $Ax = ax$ , где  $a \in \mathbb{C}$ . Если  $\|x\| = |x| = 1$ , то

$$\|Ax\| = |ax| = |a|.$$

Таким образом  $\|A\| = |a|$ .  $\diamond$

Множество всех линейных ограниченных операторов между нормированными пространствами  $X$  и  $Y$  будем обозначать  $L(X, Y)$ .

**Теорема 2.1.**  $L(X, Y)$  — нормированное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно доказывается, что сумма ограниченных операторов есть ограниченный оператор. Также легко показать, что норма оператора — в самом деле норма в  $L(X, Y)$ . Установим, например, справедливость неравенства треугольника. Пусть  $A, B \in L(X, Y)$  и  $\|x\| = 1$ . Тогда

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|.$$

Взяв верхнюю грань по всем  $x$  с нормой 1, получим, что

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|. \quad \square$$

**Определение 2.3.** Алгебру  $\mathcal{B}$  называют *банаховой алгеброй*, если она как линейной пространство является банаховым пространством, причем для всех  $a, b \in \mathcal{B}$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Если  $\mathcal{B}$  при этом является алгеброй с единицей  $e$ , то требуют также, чтобы выполнялось свойство

$$\|e\| = 1.$$

**Теорема 2.2.** Если  $Y$  — банахово пространство, то  $L(X, Y)$  — банахово пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. Антонец, Радых, 1984, с. 180.  $\square$

**Следствие 1.** Если  $X$  — банахово пространство, то  $L(X)$  — банахова алгебра с единицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из алгебры известно, что  $L(X)$  образует алгебру с единицей  $I$ . Покажем, что выполняется мультипликативное свойство для нормы операторов. Пусть  $\|x\| \leq 1$ :

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Взяв в этом неравенстве верхнюю грань по  $\|x\| \leq 1$ , получим

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Норма тождественного оператора, очевидно, равна единице.  $\square$

**Определение 2.4.** Если  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  и  $f$  — линейный оператор, то  $f$  называют *линейным функционалом* на  $X$ .

Пространство ограниченных линейных функционалов  $L(X, \mathbb{K})$  называют *сопряженным пространством* к пространству  $X$  и обозначают символом  $X^*$ .

**Теорема 2.3.** Пусть  $A \in L(X, Y)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $A$  — непрерывное отображение;
2.  $A$  — непрерывное в точке 0 отображение;
3.  $A$  — ограниченный оператор;
4.  $A$  — липшицево отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации  $1 \Rightarrow 2$ , и  $4 \Rightarrow 1$  очевидны. Докажем, что  $2 \Rightarrow 3$ . Непрерывность  $A$  означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \|x\| < \delta \rightarrow \|Ax\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторый  $\varepsilon > 0$  и соответствующий ему  $\delta$ . Тогда для любого  $x \in X$ ,  $\|x\| \leq 1$ , справедливо

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta} \left\| A \left( \frac{\delta}{2} x \right) \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Переходя в неравенстве к верхней грани, получаем, что

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

что и означает ограниченность оператора  $A$ .

Импликация  $3 \Rightarrow 4$  проверяется непосредственно: если  $A$  — ограниченный оператор,  $x_1, x_2 \in X$ , то

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\| \|x_1 - x_2\|. \quad \square$$

### 3 Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза)

**Определение 3.1.** Множество из метрического пространства называется *множеством I категории* («тощим», «разреженным»), если его можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств, каждое из которых не содержит шара.

**Определение 3.2.** Множество, не являющееся множеством I категории, называется *множеством II категории* («тучным»).

**Теорема 3.1 (Бэра).** Полное метрическое пространство является множеством II категории.

Пусть  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства,  $\Omega$  — множество индексов,  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  — семейство ограниченных операторов.

Будем называть семейство операторов *ограниченным поточечно*, если для каждого  $x \in X$  существует такая константа  $M(x) > 0$ , что

$$\|A_\alpha x\| \leq M(x)$$

для всех  $\alpha \in \Omega$ , то есть для каждого  $x \in X$  множество

$$\{A_\alpha x : \alpha \in \Omega\} \subset Y$$

ограничено в  $Y$ .

Семейство операторов назовём *ограниченным равномерно*, если существует такое число  $C > 0$ , что для всех  $\alpha \in \Omega$  выполнено неравенство

$$\|A_\alpha\| < C,$$

то есть числовое множество

$$\{\|A_\alpha\| : \alpha \in \Omega\}$$

ограничено.

**Теорема 3.2 (Банаха-Штейнгауза).** Если семейство операторов  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ , действующих из банахова пространства  $X$  в нормированное пространство  $Y$ , ограничено поточечно, то оно ограничено и равномерно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим множества вида

$$X_n = \{x \in X : \forall \alpha \in \Omega \ \|A_\alpha x\| \leq n\}.$$

В силу поточечной ограниченности семейства,  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ .

Каждое из множеств  $X_n$  замкнуто. В самом деле: если  $\{x_k\}$  — сходящаяся к  $x_0 \in X$  последовательность элементов из  $X_n$ , то, в силу непрерывности операторов  $A_\alpha$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_\alpha x_k\| = \|A_\alpha x_0\|$ , а поскольку для всех  $x_k$  и всех  $\alpha \in \Omega$  выполняется неравенство  $\|A_\alpha x_k\| \leq n$ , то и  $\|A_\alpha x_0\| \leq n$ , а значит  $x_0 \in X_n$ , что и означает замкнутость  $X_n$ .

Поскольку пространство  $X$  полно, по теореме Бэра существует такой номер  $n_0$ , что  $X_{n_0}$  содержит в себе шар, который будем

обозначать  $B(x', r)$ , где  $r$  — радиус этого шара, а  $x'$  — его центр.

Для всех элементов  $x$  из  $B(x', r)$  и для всех  $\alpha \in \Omega$  справедливо, что

$$\|A_\alpha x\| \leq n_0,$$

то есть значения  $\|A_\alpha x\|$  ограничены на этом шаре. Покажем, что они ограничены и на единичном шаре, что будет означать ограниченность норм  $A_\alpha$ .

Пусть  $x \in B(0, 1)$ . Тогда, как нетрудно проверить,  $z = rx + x' \in B(x', r)$ . В таком случае для всех  $\alpha \in \Omega$

$$\|A_\alpha x\| = \left\| A_\alpha \left( \frac{z - x'}{r} \right) \right\| \leq \frac{1}{r} (\|A_\alpha z\| + \|A_\alpha x'\|) \leq \frac{2n_0}{r},$$

откуда, взяв верхнюю грань по всем  $x \in B(0, 1)$ , получаем утверждение теоремы.  $\square$

## 4 Ряды в банаховом пространстве

**Определение 4.1.** *Рядом* элементов из нормированного пространства  $X$  называется пара последовательностей  $(x_n, s_n)$ , связанных соотношением

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

$x_n$  называют  $n$ -ым членом ряда, а  $s_n$  —  $n$ -ой частичной суммой ряда.

**Определение 4.2.** Говорят, что ряд  $(x_n, s_n)$  сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Тогда предел этой последовательности называют суммой ряда и обозначают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

**Определение 4.3.** Говорят, что ряд  $(x_n, s_n)$  абсолютно сходится, если сходится числовой ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

**Теорема 4.1.** *Если ряд элементов из банахова пространства сходится абсолютно, то он сходится.*

**Теорема 4.2.** Пусть задан ряд  $(x_n, s_n)$  элементов из банахова пространства  $X$  и существует числовой ряд  $a_n$  такой, что для всех  $n$  выполняется неравенство

$$\|x_n\| \leq a_n.$$

Тогда ряд  $(x_n, s_n)$  сходится абсолютно.

Эти теоремы доказываются аналогично знакомым теоремам из курса математического анализа.

## 5 Гильбертовы пространства

### 5.1 Начальные сведения

**Определение 5.1.** Линейное пространство  $H$  над полем  $\mathbb{K}$  называется *пространством со скалярным произведением*, если в нем задана функция  $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ , такая что для всех  $x, y, z \in H$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  справедливы следующие свойства:

1.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (невырожденность);
2.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  (положительная определённость);
3.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$  (линейность по первому аргументу);
4.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  (эрмитова симметричность).

Такая функция называется *скалярным произведением*.

Далее будем рассматривать только комплексные пространства со скалярным произведением.

В пространстве со скалярным произведением можно ввести норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (5.1)$$

Неравенство треугольника следует из неравенства

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad (5.2)$$

которое называют *неравенством Коши-Буняковского-Шварца* или просто неравенством Шварца.

**Теорема 5.1.** Пусть  $\{x_n\}, \{y_n\}$  — последовательности из  $H$ , причем  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ . Тогда  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ .



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем неравенство Шварца:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \square \end{aligned}$$

**Определение 5.2.** Если пространство со скалярным произведением полно по норме, определённой равенством (5.1), то оно называется *гильбертовым пространством*.

**Пример 5.1.** Лебегово пространство  $L^2(E, \mu)$  является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определённым по формуле

$$\langle f, g \rangle = \int_E f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

Существование этого интеграла следует из неравенства

$$|f(x) \overline{g(x)}| \leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2}. \quad \diamond$$

**Пример 5.2.** В частности, гильбертовым пространством является пространство суммируемых с квадратом последовательностей  $\ell^2$ . Скалярное произведение задаётся формулой

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Сходимость ряда обеспечивается аналогичной оценкой.  $\diamond$

**Определение 5.3.** Векторы  $x, y \in H$  называются *ортogonalными*, если  $\langle x, y \rangle = 0$ . При этом пишут  $x \perp y$ .

**Определение 5.4.** Пусть  $M \subset H$  — множество из  $H$ . Тогда говорят, что вектор  $x \in H$  *ортogonalен*  $M$ , если  $x$  ортogonalен любому вектору  $m \in M$  (в этом случае используется обозначение  $x \perp M$ ).

**Теорема 5.2.** Для всех векторов  $x, y \in H$  выполняется тождество параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывается элементарными преобразованиями.  $\square$

## 5.2 Теорема об ортогональном дополнении

**Определение 5.5.** Множество  $A \subset X$  называется *выпуклым*, если для любых векторов  $a, b \in A$  векторы вида  $(1-t)a + tb, t \in [0, 1]$  также лежат в  $A$ .

Очевидно, всякое подпространство в нормированном пространстве является выпуклым множеством.

**Теорема 5.3 (о наилучшем приближении).** Пусть  $A \subset H$  — непустое выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда для любого  $x \in H \setminus A$  найдётся единственный вектор  $a_0 \in A$  такой, что

$$\|x - a_0\| = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Иначе говоря, в  $A$  найдется вектор  $a_0$ , который находится от  $x$  на наименьшем возможном расстоянии. Такой вектор  $a_0$  называется элементом наилучшего приближения вектора  $x$  в множестве  $A$ .

**Доказательство.** По определению нижней грани, существует такая последовательность  $\{a_n\}$  элементов из  $A$ , что

$$d_n = \|x - a_n\| \rightarrow \inf_{a \in A} \|x - a\| = d.$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальна.

По тождеству параллелограмма получаем:

$$\begin{aligned} \|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2 &= \\ &= 2 \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right). \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть равенства стремится к  $4d^2$  при стремлении  $n$  и  $m$  к бесконечности. Разделим обе части равенства на 4:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left( \|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2 \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right). \end{aligned}$$

После преобразований получаем:

$$\left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 + \frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} = \frac{1}{2} \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right).$$

Поскольку множество  $A$  выпукло, вектор  $(a_n + a_m)/2$  принадлежит  $A$ , а значит, в силу определения нижней грани, справедлива оценка

$$\left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \geq d^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} &= \frac{1}{2} \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right) - \left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right) - d^2. \end{aligned}$$

Правая часть неравенства стремится к нулю, а это значит, что  $\|a_n - a_m\|$  также стремится к нулю, что и означает фундаментальность последовательности  $\{a_n\}$ .

Поскольку пространство полно, существует вектор  $a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . В силу замкнутости множества  $A$  этот вектор также лежит в  $A$ . При этом

$$\|x - a_0\| \leq \|x - a_n\| + \|a_n - a_0\| \rightarrow d, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть  $\|x - a_0\| = d$ , что и означает, что  $a_0$  является элементом наилучшего приближения  $x$  в  $A$ .

Покажем, что других векторов наилучшего приближения в  $A$  нет. Пусть  $a'_0 \in A$  и  $\|a'_0 - x\| = d$ . Тогда, снова используя тождество параллелограмма, получаем

$$4 \left\| x - \frac{a_0 + a'_0}{2} \right\|^2 + \|a_0 - a'_0\|^2 = 2 \|x - a_0\|^2 + 2 \|x - a'_0\|^2 = 4d^2.$$

Первый квадрат нормы не меньше  $4d^2$ , откуда следует, что второй не превосходит нуля, а значит

$$\|a_0 - a'_0\|^2 = 0,$$

то есть  $a_0 = a'_0$ . □

**Определение 5.6.** Пусть  $M \subset H$  — подпространство из  $H$ . Вектор  $a \in M$  называется *проекцией* вектора  $x \in H$  на  $M$  если  $x - a \perp M$ , то есть для всех  $t \in M$  выполняется равенство

$$\langle x - a, t \rangle = 0.$$

**Теорема 5.4.** Если  $M \subset H$  — замкнутое подпространство,  $x \in H \setminus M$ , то тогда вектор  $a \in M$  является проекцией  $x$  на  $M$  тогда и только тогда, когда  $a$  — элемент наилучшего приближения  $x$  в  $M$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

**Необходимость:**

Пусть  $x - a \perp M$ . Тогда по теореме Пифагора для любого  $m \in M$  справедливо равенство

$$\|x - m\|^2 = \|x - a\|^2 + \|a - m\|^2.$$

Значит,

$$\inf_{m \in M} \|x - m\| = \|x - a\|,$$

откуда и следует, что  $a$  — элемент наилучшего приближения  $x$  в  $M$ .

**Достаточность:**

Пусть  $a \in M$  — элемент наилучшего приближения  $x$  в  $M$ , то есть

$$\inf_{m \in M} \|x - m\| = \|x - a\| = d.$$

Покажем, что для любого  $m \in M$  выполнено равенство  $\langle x - a, m \rangle = 0$ .

Обозначим  $x - a = z$  и пусть  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|x - (a + tm)\|^2 &= \|z - tm\|^2 = \langle z - tm, z - tm \rangle = \\ &= \|z\|^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle + t^2 \|m\|^2 = d^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle + t^2 \|m\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $a + tm \in M$ ,  $\|x - (a + tm)\|^2 \geq d^2$ , откуда

$$d^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle + t^2 \|m\|^2 \geq d^2,$$

то есть при всех  $t \in \mathbb{R}$

$$t^2 \|m\|^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle \geq 0,$$

что возможно только в случае  $\Re \langle z, m \rangle = 0$ .

Взяв теперь вместо  $t$  величину  $it$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , можно аналогично показать, что  $\Im \langle z, m \rangle = 0$ , что в совокупности даёт

$$\langle z, m \rangle = 0,$$

то есть  $x - a \perp M$ . □

Таким образом мы доказали, что для всякого замкнутого подпространства  $M \in H$  и вектора  $x \in H \setminus M$  существует проекция  $x$  на  $M$ , причём она совпадает с элементом наилучшего приближения  $x$  в  $M$ .

**Определение 5.7.** *Ортогональным дополнением* множества  $A$  из гильбертова пространства  $H$  называется множество

$$A^\perp = \{x \in H : x \perp A\}.$$

Из свойств скалярного произведения и теоремы 5.1 нетрудно видеть, что  $A^\perp$  — замкнутое подпространство из  $H$  для любого подмножества  $A \subset H$ .

**Теорема 5.5 (об ортогональном дополнении).** *Если  $M$  — замкнутое подпространство из  $H$ , то  $H = M \oplus M^\perp$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что всякий вектор  $x \in H$  можно представить в виде суммы векторов из  $M$  и  $M^\perp$ . Пусть  $a$  — элемент наилучшего приближения  $x$  в  $M$ . Тогда по предыдущей теореме  $x - a \perp M$ , то есть  $x - a \in M^\perp$ , откуда получаем

$$x = a + (x - a),$$

где  $a \in M$ ,  $x - a \in M^\perp$ .

Единственность такого представления обеспечивается тем фактом, что

$$M \cap M^\perp = \{0\}. \quad \square$$

### 5.3 Базис в гильбертовом пространстве

**Определение 5.8.** Банахово пространство  $X$  называется *сепарабельным*, если существует такое счетное множество  $M \subset X$ , что  $\overline{M} = X$ , то есть, как еще говорят,  $M$  всюду плотно в  $X$ .

**Определение 5.9.** Множество  $M \subset H$  называется *ортонормированным*, если для всех  $x, y \in M$

1.  $\|x\| = 1$ ;
2.  $x \neq y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ .

**Лемма 5.1.** *В сепарабельном гильбертовом пространстве всякое ортонормированное множество не более чем счетно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $E$  — ортонормированное множество в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда для любых

векторов  $e_1, e_2$  из  $F$  справедливо (проверяется непосредственно):

$$\|e_1 - e_2\| = \sqrt{2}.$$

Поскольку  $H$  сепарабельно, существует счетное множество  $F = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ , такое что для любого  $e \in E$  найдется  $f \in F$ , что  $\|e - f\| < \sqrt{2}/2$ . Но тогда, если  $\|e_1 - f\| < \sqrt{2}/2$ , то (из неравенства треугольника)

$$\|e_2 - f\| \geq \|e_1 - e_2\| - \|e_1 - f\| > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то есть двум разным  $e_1$  и  $e_2$  не может соответствовать один и тот же  $f$  с вышеуказанным свойством, то есть существует инъективное отображение  $E$  в  $F$ . Из этого следует, что множество  $F$  имеет мощность, не меньшую чем множество  $E$ , то есть  $E$  — не более, чем счетно.  $\square$

**Лемма 5.2.** Пусть  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  — ортогональная последовательность векторов из  $H$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$  сходится;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2$  сходится

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Пифагора

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \|e_k\|^2.$$

Из этого равенства и полноты пространства утверждение теоремы следует немедленно.  $\square$

Далее  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство.

**Определение 5.10.** Последовательность  $\{e_n\}$  называется *ортонормированным базисом* (Шаудера) в  $H$ , если выполнены следующие условия:

1. Элементы последовательности  $\{e_n\}$  образуют ортонормированное множество;
2. Если  $a \perp e_k$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ , то  $a = 0$  (свойство полноты).

**Определение 5.11.** Пусть  $\{e_n\}$  — ортонормированный базис в  $H$ . Тогда *рядом Фурье* вектора  $x \in H$  называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

**Теорема 5.6.** Для любого вектора  $x \in H$  ряд Фурье сходится, причем сходится к вектору  $x$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.2 ряд Фурье сходится в точности тогда, когда сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ . По неравенству Бесселя (см. «Лекции по алгебре», параграф 17)

$$\left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

откуда получаем, что ряд Фурье сходится (последовательность частичных сумм ограничена). Обозначим через  $y$  сумму этого ряда.

Покажем, что  $x = y$ :

$$\begin{aligned} \langle x - y, e_j \rangle &= \langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, e_j \rangle = \\ &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

В силу свойства полноты базиса,  $x - y = 0$ . Дальнейшее очевидно.  $\square$

**Следствие 1 (равенство Парсеваля).** Для любого вектора  $x \in H$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

**Теорема 5.7.** Для всякого бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства существует ортонормированный базис Шаудера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\{y_n\} \subset H$  — счетное всюду плотное множество. Применяя процесс Грама-Шмидта (см. алгебру), получим не более чем счетное ортонормированное множество  $M = \{e_n\}$ . Линейная оболочка  $\text{span } M$ , как нетрудно видеть, плотна в  $H$  (в

силу процесса Грама-Шмидта, всякий вектор  $y_n$  выражается как конечная линейная комбинация векторов из  $M$ ).

Покажем, что  $M$  обладает свойством полноты. Пусть

$$\langle a, e_k \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Рассмотрим последовательность подпространств

$$E_n = \text{span} \{e_1, \dots, e_n\}.$$

В силу условия  $\overline{\text{span } M} = H$ ,

$$d(a, E_n) \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

где  $d(a, E_n) = \inf_{z \in E_n} \|a - z\|$ .

По теореме 5.4, проекция  $a_n = \sum_{k=1}^n \langle a, e_k \rangle e_k$  вектора  $a$  на  $E_n$  есть элемент наилучшего приближения, то есть

$$d(a, E_n) = \|a - a_n\|.$$

Но  $a_n = 0$  для всех  $n$  в силу условия (5.3). Поэтому

$$d(a, E_n) = \|a\|,$$

откуда получаем, что  $a = 0$  в силу (5.4).

Таким образом,  $\{e_n\}$  — базис в  $H$ . □

**Определение 5.12.** Два нормированных пространства  $X$  и  $Y$  называют *изометрически изоморфными*, если существует такой биективный оператор  $J \in L(X, Y)$ , что для всех  $x \in X$

$$\|Jx\| = \|x\|.$$

**Теорема 5.8.** Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство над полем  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  изометрически изоморфно пространству последовательностей  $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольный ортонормированный базис  $\{e_n\}$  в  $H$ , существующий в силу теоремы 5.7.

Определим оператор  $J: H \rightarrow l^2$  по правилу

$$Jx = (\langle x, e_n \rangle)_{n=1}^{\infty},$$

то есть  $J$  ставит  $x$  в соответствие последовательность его координат



$\langle x, e_n \rangle$ .

Инъективность следует из теоремы 5.6, сюръективность из леммы 5.2. Изометричность следует из равенства Парсеваля.  $\square$

**Следствие 1 (теорема Фишера-Рисса).** *Все сепарабельные гильбертовы пространства изометрически изоморфны между собой.*

## 5.4 Теорема Рисса об общем виде линейного функционала

**Теорема 5.9 (Рисса о представлении).** *Каждый линейный ограниченный функционал  $f \in H^*$  допускает единственное представление вида*

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \quad (5.5)$$

где  $a \in H$ , причем

$$\|f\| = \|a\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Если  $a \in H$  — фиксированный вектор, то (5.5), очевидно, задаёт линейный функционал. Определим его норму:

$$|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \|x\| \quad x \in H;$$

$$\|f\| \leq \|a\|;$$

$$\left| f\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \right| = \left\langle a, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle = \|a\|.$$

Таким образом

$$\|f\| = \|a\|$$

2. Пусть  $f \in H^*$ . Будем считать, что  $f \neq 0$ , потому что в противном случае достаточно взять  $a = 0$ . Тогда  $M = \text{Ker } f \neq H$ .

Возьмем ненулевой вектор  $b \in \text{Ker } f$ . Очевидно, что (проверяется непосредственно)

$$f(x)b - f(b)x \in \text{Ker } f.$$

Тогда  $f(x)b - f(b)x \perp b$ . В таком случае

$$\langle f(x)b - f(b)x, b \rangle = f(x)\langle b, b \rangle - f(b)\langle x, b \rangle = 0,$$

откуда получаем

$$f(x) = \frac{f(b)\langle x, b \rangle}{\|b\|^2} = \langle x, \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b \rangle = \langle x, a \rangle,$$

$$\text{где } a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b.$$

□

## 6 Теорема Хана-Банаха

Далее  $X$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{K}$ .

**Определение 6.1.** Отображение  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *полунормой*, если для всех  $x, y \in X$  и  $\alpha \in \mathbb{K}$

1.  $p(x) \geq 0$ ;
2.  $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ ;
3.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

Очевидно, что всякая полунорма является нормой.

**Пример 6.1.** Отображение  $p: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x) = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ ,

где  $c < b$ , является полунормой, но не является нормой. ◇

**Определение 6.2.** *Носителем* функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется множество

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}},$$

где черта, как обычно, означает замыкание.

**Определение 6.3.** Функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *финитной*, если её носитель — компактное множество в  $\mathbb{R}$ .

**Пример 6.2.** Множество финитных бесконечно дифференцируемых функций  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  можно наделить семейством полунорм по формуле

$$p_{k, a, b} = \max_{t \in [a, b]} |x^{(k)}(t)|, \quad k \geq 0.$$

◇

**Определение 6.4.** Пусть  $M \subset X$  — линейное подпространство,  $f_0: M \rightarrow \mathbb{K}$  — линейный функционал. Будем говорить, что линейный функционал  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  является *продолжением*  $f_0$  на  $X$  если

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in M.$$

**Теорема 6.1 (Хана-Банаха).**

Пусть  $X$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{K}$ ,  $p$  — полунорма на  $X$ ,  $M \subset X$  — подпространство из  $X$  и  $f_0: M \rightarrow \mathbb{K}$  — линейный функционал со свойством

$$|f_0(x)| \leq p(x), \quad x \in M.$$

Тогда существует такой линейный функционал  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ , что

1.  $f$  — продолжение  $f_0$  на  $X$ ;
2.  $|f(x)| \leq p(x)$ ,  $x \in X$ .

**Следствие 1.** Пусть  $X$  — линейное нормированное пространство. Тогда для всякого  $x_0 \neq 0$  из  $X$  существует такой линейный ограниченный функционал  $f \in X^*$ , что

1.  $|f(x_0)| = \|x_0\| \neq 0$ ;
2.  $\|f\| = 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $M = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}$ .

Функционал  $f_0 \in M^*$  определим по правилу

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|,$$

а в качестве полунормы  $p$  возьмём норму:

$$p(x) = \|x\|, \quad x \in X.$$

По теореме Хана-Банаха существует продолжение  $f_0$  на  $X$ , причём

1.  $f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\| \neq 0$ ;
2.  $|f(x)| \leq \|x\|$ .

В таком случае получаем, что  $\|f\| = 1$ . □

Из этого следствия ясно видно, что если  $X \neq \{0\}$ , то и  $X^* \neq \{0\}$ .

Рассмотрим пространство  $(X^*)^*$ , которое далее будем обозначать  $X^{**}$ . Зафиксируем некоторый  $x_0 \in X$  и определим функционал  $\xi_{x_0} \in X^{**}$  по правилу

$$\xi_{x_0}(f) = f(x_0), \quad f \in X^*. \quad (6.1)$$

Из следствия 1 получаем, что

$$\|\xi_{x_0}\| = \|x_0\|.$$

Таким образом мы построили инъективное (проверьте!) отображение  $\xi_\bullet: X \rightarrow X^{**}$ . Такое отображение называется *каноническим вложением* пространства  $X$  в  $X^{**}$ . Заметим, что это линейный ограниченный оператор, сохраняющий норму.

**Определение 6.5.** Банахово пространство  $X$  называется *рефлексивным*, если каждый функционал из  $X^{**}$  представим в виде (6.1). Иначе говоря, каноническое вложение осуществляет изометрический изоморфизм между  $X$  и  $X^{**}$ .

Примерами рефлексивных пространств являются лебеговы пространства  $L^p[a, b]$ ,  $\ell^p$ , где  $p \in [1, \infty)$ . С другой стороны, пространства  $\ell^\infty$  и  $C[a, b]$  не рефлексивны.

## 7 Элементы нелинейного анализа

### 7.1 Производная отображения

Всюду далее  $X, Y$  — банаховы пространства над  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ , буквами  $U$  и  $V$  обозначаются открытые множества в  $X$  и  $Y$ .

**Определение 7.1.** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$ ,  $g: U \subset X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in U$ . Говорят, что

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

если справедливо равенство

$$\|f(x)\| = \varepsilon(x)g(x),$$

где  $\varepsilon: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Определение 7.2.** Пусть  $f, g: U \subset X \rightarrow Y$  — отображения, определенные на открытом множестве  $U$  из пространства  $X$ . Отображение  $g$  называется *касательным* к  $f$  в точке  $x_0 \in U$ , если

$$f(x) = g(x) + o(\|x - x_0\|) \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

то есть

$$\frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

Легко видеть, что « $f$  касательно  $g$ » есть отношение эквивалентности.

**Определение 7.3.** Отображение  $f: U \subset X \rightarrow Y$  называется *дифференцируемым* в точке  $x_0$ , если существует такой оператор  $A \in L(X, Y)$ , что  $f$  касательно  $g$  в точке  $x_0$ , где  $g$  определено по формуле

$$g(x) = f(x_0) + A(x - x_0), \quad x \in U.$$

Иначе говоря,  $f$  дифференцируемо в точке  $x_0$  если

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{при } x \rightarrow x_0.$$

Если  $f$  дифференцируемо в каждой точке  $U$ , то  $f$  называют *дифференцируемым*.

Оператор  $A$  называется *производной* отображения  $f$  в точке  $x_0$ . При этом используется привычное обозначение:

$$f'(x_0) = A.$$

Также пишут  $Df(x_0)$ ,  $D_{x_0}f$  и т. д.

**Теорема 7.1.** *Определение производной корректно: линейный оператор  $A$  определён однозначно для каждой точки  $x_0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо в точке  $x_0$ . Тогда  $f$  касательно  $g$  в точке  $x_0$ , где  $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$ . Пусть теперь  $g_0(x) = f(x_0) + B(x - x_0)$ ,  $B \in L(X, Y)$ , также касательно к  $f$  в точке  $x_0$ . Тогда  $g_0$  касательно  $g$  в точке  $x_0$ :

$$g(x) - g_0(x) = (A - B)(x - x_0),$$

причем

$$g(x) - g_0(x) = o(\|x - x_0\|).$$

Примем обозначение  $h = x - x_0$ . Тогда

$$(A - B)h = o(\|h\|).$$

Раскрывая определение символа « $o$ » получаем, что для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta$ , что если  $\|h\| < \delta$ , то

$$\left\| (A - B) \frac{h}{\|h\|} \right\| < \varepsilon, \quad \|h\| < \delta.$$

Тогда

$$\sup_{\|h\| < \delta} \left\| (A - B) \frac{h}{\|h\|} \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A - B)x\| = \|A - B\| < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности  $\varepsilon$  получаем, что  $A = B$ .  $\square$

**Теорема 7.2.** Пусть  $f, g: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемы в точке  $x_0$ . Тогда  $\alpha f + \beta g$  также дифференцируемо в точке  $x_0$ , причем

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Отображения  $f, g$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , значит

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|). \end{aligned}$$

Домножая эти равенства на  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно и сложив, получаем, в силу свойств символа « $o$ »:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(x) &= (\alpha f + \beta g)(x_0) + \\ &\quad + (\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0))(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \end{aligned}$$

то есть, в силу корректности определения производной,

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \quad \square$$

Следующие две теоремы предлагаются в качестве упражнения.

**Теорема 7.3.** Если  $f: X \rightarrow Y$  — постоянное отображение, то  $f$  дифференцируемо в любой точке пространства  $X$ , причем  $f'(x) = \mathbf{0}$  в любой точке  $x \in X$ .

**Теорема 7.4.** Если  $A \in L(X, Y)$ , то отображение  $A$  дифференцируемо в любой точке  $x \in X$  и  $A'(x) = A$ .

**Теорема 7.5.** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо в точке  $x_0 \in U$ , а  $g: V \subset Y \rightarrow Z$  дифференцируемо в точке  $y_0 = f(x_0)$  и  $f(U) \subset V$ . Тогда отображение  $h = g \circ f: U \subset X \rightarrow Z$  дифференцируемо в точке  $x_0$  и

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \in L(X, Z).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим приращение отображения  $h$ :

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) = \\ &= g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ &= g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \end{aligned}$$

$$+ g'(f(x_0))o(\|x - x_0\|) + o(\|f(x) - f(x_0)\|)$$

Покажем, что

$$g'(f(x_0))o(\|x - x_0\|) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = o(\|x - x_0\|)$$

при  $x \rightarrow x_0$ . Введем для краткости замену  $h = x - x_0$ . Тогда, с учетом того, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} \leq f'(x_0),$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\|g'(f(x_0))o(\|h\|) + o(\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|)\|}{\|h\|} \leq \\ & \leq \frac{\|g'(f(x_0))\| \|o(\|h\|)\| + \|o(\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|)\|}{\|h\|} = \\ & = \frac{\|g'(f(x_0))\| \varepsilon_1(h) \|h\| + \varepsilon_2(h) \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} = \\ & = \|g'(f(x_0))\| \varepsilon_1(h) + \frac{\varepsilon_2(h) \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$h(x) - h(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

□

См. «Лекции по алгебре» для определения полилинейного (билинейного) оператора.

**Определение 7.4.** Билинейный оператор  $A: X \times X \rightarrow Y$  называется *ограниченным*, если

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1} \|A(x_1, x_2)\| < \infty.$$

Символом  $B_2(X, Y)$  будем обозначать нормированное пространство билинейных ограниченных операторов, действующих из  $X \times X$  в  $Y$ .

Аналогично определяется полилинейный ограниченный оператор. Пространство  $n$ -линейных ограниченных операторов обозначается  $B_n(X, Y)$ .

**Теорема 7.6.** Пространство операторов  $L(X, L(X, Y))$  и пространство билинейных операторов  $B_2(X, Y)$  изометрически изо-

морфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение

$$J: L(X, L(X, Y)) \rightarrow B_2(X, Y)$$

действует по правилу

$$(JA)(x_1, x_2) = (Ax_1)x_2.$$

Очевидно, это линейный оператор между  $L(X, L(X, Y))$  и  $B_2(X, Y)$ . Биективность проверяется непосредственно. Проверим изометричность:

$$\begin{aligned} \|JA\|_{B_2(X, Y)} &= \sup_{\|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y = \\ &= \sup_{\|x_1\| \leq 1} \left( \sup_{\|x_2\| \leq 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y \right) = \sup_{\|x_1\| \leq 1} (\|Ax_1\|_{L(X, Y)}) = \\ &= \|A\|_{L(X, L(X, Y))}. \quad \square \end{aligned}$$

Аналогичный результат справедлив для полилинейных операторов:

**Теорема 7.7.**

Пространства  $L(X, \underbrace{L(X, \dots, L(X, Y))}_{n \text{ раз}})$  и  $B_n(X, Y)$  изометри-

чески изоморфны.

Из этих теорем, в частности, следует, что  $B_n(X, Y)$  — банахово пространство, если  $Y$  банахово.

**Определение 7.5.** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо в каждой точке  $U$  и отображение  $f': U \subset X \rightarrow L(X, Y)$  дифференцируемо в точке  $x_0$ . Тогда *второй производной* отображения  $f$  в точке  $x_0$  называется производная отображения  $f'$  в точке  $x_0$ .

Таким образом, вторая производная отображения  $f$  в точке  $x_0$  есть линейный оператор  $f''(x_0) \in L(X, L(X, Y))$ , или, в силу предыдущей теоремы, вторую производную можно считать билинейным оператором из  $B_2(X, Y)$ .

Аналогично определяется  $n$ -ая производная отображения  $f$  в точке  $x_0$ . Тогда  $f^{(n)}(x_0) \in B_n(X, Y)$ .

**Определение 7.6.** Отображение  $f: U \subset X \rightarrow Y$  называется  $n$  раз непрерывно дифференцируемым, если для каждого  $k = \overline{1, n}$  существует  $k$ -ая производная  $f^{(k)}(x)$ , определенная для всех  $x \in U$  и при этом  $f^{(n)}: U \subset X \rightarrow B_n(X, Y)$  — непрерывное отображение.



Пусть  $A \in B_n(X, Y)$ . Введём следующее обозначение:

$$Ah^n := A(h, \dots, h).$$

Договоримся также, что  $f^{(0)}(x) = f(x)$  для всех  $x \in U$ , и  $h^0 = 1 \in \mathbb{K}$ .

**Теорема 7.8 (Тейлора).** Пусть отображение  $f: U \subset X \rightarrow Y$   $n$  раз непрерывно дифференцируемо. Тогда для любой точки  $x_0 \in U$  и любого вектора  $h$  такого, что  $x_0 + h \in U$ , имеет место формула (Тейлора):

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + o(\|h\|^n) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

## 7.2 Задачи на экстремум

**Определение 7.7.** Точка  $x_0 \in U$  называется *точкой локального минимума (максимума)* функции  $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ , если существует шар  $B(x_0, \varepsilon) \subset U$  такой, что  $f(x_0) \leq f(x)$  ( $f(x_0) \geq f(x)$ ) для всех  $x \in B(x_0, \varepsilon)$ . Если же выполняется строгое неравенство, то точка  $x_0$  называется *точкой строгого локального минимума (максимума)*.

Точка, являющаяся точкой (строгого) локального минимума либо максимума, также называется *точкой (строгого) локального экстремума*.

**Теорема 7.9 (Ферма).** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая в точке  $x_0$  функция и  $x_0 \in U$  — точка локального экстремума. Тогда  $f'(x_0) = 0$ , то есть  $f'(x_0) \in X^*$  — нулевой функционал.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть, для определенности,  $x_0$  — точка локального минимума (случай локального максимума рассматривается аналогично), и для всех  $h \in X$  таких, что  $\|h\| < \varepsilon$  выполняется условие  $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ .

Предположим противное: пусть  $f'(x_0) \neq 0$ . Тогда найдется такой вектор  $h_0$ ,  $\|h_0\| < \varepsilon$ , что  $\alpha_0 = f'(x_0)h_0 > 0$ . Пусть  $t \in (-1, 0) \subset \mathbb{R}$ . Тогда, разумеется,  $\|th_0\| < \varepsilon$  и  $f'(x_0)(th_0) < 0$ . В силу дифференцируемости функции в точке  $x_0$  справедливо равенство

$$f(x_0 + th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t).$$

Тогда

$$0 \leq f(x_0 + th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t) = t \left( \alpha_0 + \frac{o(t)}{t} \right).$$

Но, поскольку  $\alpha_0 > 0$ , при достаточно малых  $t < 0$  справедливо

$$\alpha_0 + \frac{o(t)}{t} > 0,$$

откуда следует, что в правой части равенства стоит строго отрицательная величина. Получили противоречие.  $\square$

**Определение 7.8.** Билинейная форма  $\xi: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется равномерно положительной (равномерно отрицательной), если существует такая константа  $c > 0$ , что для всех  $h \in X$

$$\xi(h, h) \geq c \|h\|^2$$

$$(\xi(h, h) \leq -c \|h\|^2).$$

**Теорема 7.10 (достаточное условие экстремума).**

Пусть  $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  — дважды дифференцируемая функция,  $f'(x_0) = 0$  и пусть  $f''(x_0)$  — равномерно отрицательная (равномерно положительная) билинейная форма. Тогда  $x_0$  — точка строгого локального максимума (минимума).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть, для определённости,  $f''(x_0)$  равномерно отрицательна, то есть существует такая константа  $\alpha > 0$ , что

$$f''(x_0)h^2 \leq -\alpha \|h\|^2.$$

Разложим функцию по формуле Тейлора в окрестности  $x_0$ :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\|h\|^2).$$

Поскольку  $f'(x_0) = 0$ ,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\|h\|^2) \leq -\frac{\alpha \|h\|^2}{2} + o(\|h\|^2).$$

Найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $\|h\| < \delta$  выполняется неравенство

$o(\|h\|^2) \leq \frac{\alpha}{4} \|h\|^2$ , поэтому

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq -\frac{\alpha \|h\|^2}{2} + o(\|h\|^2) \leq -\frac{\alpha \|h\|^2}{4} < 0$$

при  $\|h\| < \delta$ . А это в точности и означает, что  $x_0$  — точка строгого локального максимума. Аналогично рассматривается случай локального минимума.  $\square$

## 8 Элементы теории функции комплексной переменной

Более подробную информацию можно найти, например, в книге Шабата Б. В. «Введение в комплексный анализ».

Рассмотрим функцию  $F: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Её можно представить в виде

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

где  $P, Q: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Более того, эту функцию можно рассматривать как функцию  $F: E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$F(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Пусть теперь  $F$  дифференцируема в точке  $x_0 \in E$  как отображение из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ . Исследуем, при каких условиях эта функция будет дифференцируема как отображение из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$ . Заметим, что существуют функции, для которых это не выполняется. Примером может служить функция

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \Re z.$$

Если рассматривать эту функцию как отображение  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , то легко видеть, что это линейный оператор:

$$f(x_1, x_2) = x_1.$$

То есть  $f$  дифференцируемо в каждой точке из  $\mathbb{R}^2$ . Однако если мы рассмотрим предел

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re z}{z} \quad (8.1)$$

при стремлении  $z$  к нулю вдоль мнимой оси и вдоль действительной

оси

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \Re z = 0}} \frac{\Re z}{z} = 0;$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \Im z = 0}} \frac{\Re z}{z} = \frac{z}{z} = 1.$$

Таким образом предел (8.1) не существует, то есть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  не дифференцируема.

Как известно, если отображение  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  дифференцируемо в точке  $x_0 = (x, y)$ , то у него существуют частные производные первого порядка, и матрица Якоби в точке  $x_0$  есть матрица оператора  $f'(x_0)$  в стандартном базисе.

Пусть  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ .

$$f'(x_0) \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Следующее утверждение вытекает из представления комплексных чисел в виде матрицы и утверждения, что все линейные операторы в  $\mathbb{C}$  действуют по правилу  $x \mapsto \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Лемма 8.1.** *Для того чтобы матрица  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с вещественными коэффициентами задавала линейный оператор в комплексном линейном пространстве  $\mathbb{C}$ , необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Непосредственно из леммы получаем

**Теорема 8.1 (условия Коши-Римана).** *Дифференцируемое в точке  $x_0 = (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$  отображение  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  дифференцируемо как отображение  $U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  в том и только в том случае, если выполняются следующие условия (условия Коши-Римана):*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

**Определение 8.1.** Функция  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  называется ана-

литической (чаще говорят *голоморфной*) на открытом множестве  $U$ , если она дифференцируема (как функция в комплексном пространстве) в каждой точке множества  $U$ .

**Определение 8.2.** *Путь* в  $U \subset \mathbb{C}$  называется непрерывное отображение  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ . Если это отображение является кусочно непрерывно дифференцируемым, то его называют *кусочно гладким путём*.

**Определение 8.3.** *Интегралом* от функции  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  вдоль *кусочно гладкого пути*  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  называется

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Если  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y)) d(x + iy) = \\ &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy, \end{aligned}$$

где в правой части стоят известные из курса анализа криволинейные интегралы второго рода.

**Теорема 8.2 (Коши).** *Если функция  $f$  является аналитической в односвязной области  $U \subset \mathbb{C}$ , то ее интеграл вдоль любого кусочно гладкого замкнутого пути  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  равен нулю:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вспомним известную из анализа формулу Грина:

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где  $D$  — область, ограниченная путем  $\gamma$ . Тогда, применяя формулу Грина и условия Коши-Римана, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy = \\ &= \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 8.3 (интегральная формула Коши).**

Пусть  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая функция, определенная в односвязной области  $U$ . Тогда для всех  $z \in U$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda,$$

где  $\gamma$  — граница области  $U$ , причем направление обхода контура положительно.

Из формулы Коши вытекает следующая теорема.

**Теорема 8.4.** Если  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая функция и  $z_0 \in U$ , то в любом круге  $D = \{|z - z_0| < R\} \subset U$  эту функцию можно представить в виде сходящегося степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z_0)^{n+1}} d\lambda, \quad n = 0, 1, \dots,$$

а контур  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  есть круг радиуса  $r < R$  с центром в точке  $z_0$ .

Эта теорема влечет за собой, что всякая дифференцируемая функция комплексной переменной дифференцируема бесконечное число раз, причем, поскольку из теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов следует, что

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

получаем

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Справедлива также и обратная теорема.

**Теорема 8.5.** Если  $z_0 \in \mathbb{C}$  и ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

сходится при  $|z - z_0| < R$ , то функция  $f$  является аналитической в круге  $|z - z_0| < R$ .

**Теорема 8.6 (единственности).** Если  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  аналитическая функция, то она единственно определяется своими значениями на любом открытом множестве.

тична на  $U$  и

$$f(z_n) = 0,$$

где  $\{z_n\}$  — сходящаяся последовательность, то для всех  $z \in U$

$$f(z) = 0.$$

**Определение 8.4.** Функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  называется *целой*, если она является аналитической на всей комплексной плоскости.

Всякую целую функцию можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

**Теорема 8.7 (Лиувилля).** Если  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — целая ограниченная функция, то она постоянна, т.е.  $f(z) = c \in \mathbb{C}$  для всех  $z \in \mathbb{C}$ .

Результаты данного параграфа легко обобщаются на функции комплексной переменной, принимающие значение в некоторой банаховой алгебре.

## 9 Спектральная теория линейных операторов

Определение обратного оператора и другие алгебраические аспекты теории можно найти в «Лекциях по алгебре».

Далее всюду  $X$  — комплексное банахово пространство.

### 9.1 Обратные операторы и их свойства

**Лемма 9.1.** Если  $A \in L(X)$  и  $\|A\| < 1$ , то оператор  $I - A$  обратим, а обратный задается формулой

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

причем ряд сходится абсолютно и

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что ряд сходится абсолютно. Используем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Итак, ряд сходится абсолютно, значит он сходится. Отсюда же следует и оценка нормы. Обозначим сумму ряда через  $B \in L(X)$ . Покажем, что  $B$  — обратный к  $I - A$ .

$$\begin{aligned} (I - A)B &= (I - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - A) \sum_{n=0}^m A^n = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m (A^n - A^{n+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - A^{m+1}) = I, \end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо в силу условия  $\|A\| < 1$ .

Аналогично доказывается, что  $B(I - A) = I$ .  $\square$

**Теорема 9.1.** Пусть  $A, B \in L(X)$ ,  $A$  обратим,  $\|B\| \|A^{-1}\| < 1$ . Тогда  $A - B$  обратим и

$$(A - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}B)^n A^{-1},$$

и справедлива оценка

$$\|(A - B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B\| \|A^{-1}\|}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Представим оператор  $A - B$  в виде  $A - B = A(I - A^{-1}B)$ . Оператор  $A$  обратим, оператор  $I - A^{-1}B$  обратим в силу леммы. Значит и  $A - B$  обратим. Остальное прямо следует из леммы, если её применить к оператору  $I - A^{-1}B$ .  $\square$

Далее  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  — линейный оператор, определенный на некотором подпространстве  $D(A)$  пространства  $X$ .

**Определение 9.1.** Оператор  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  называется *замкнутым*, если его график

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$$



является замкнутым подмножеством в пространстве  $X \times X$ , наделённом нормой

$$\|(x_1, x_2)\| = \max \{\|x_1\|, \|x_2\|\}.$$

Иначе говоря, оператор замкнут, если для всякой сходящейся последовательности  $\{x_n\} \subset D(A)$  такой, что  $Ax_n \rightarrow y \in X$ , предел  $x$  лежит в  $D(A)$  и  $y = Ax$ .

**Пример 9.1.** Оператор  $A: D(A) \subset C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ,  $D(A) = C^1[a, b]$ , действующий по правилу  $Ax = x'$ , является замкнутым. Это следует из теоремы о почленном дифференцировании функциональных последовательностей, известной из курса математического анализа.  $\diamond$

**Теорема 9.2.** *Всякий ограниченный оператор  $A \in L(X)$  замкнут.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $A \in L(X)$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $Ax_n \rightarrow y_0$ . В силу непрерывности  $A$ ,  $Ax_n \rightarrow Ax_0$ , значит, в силу единственности предела последовательности,  $Ax_0 = y_0$ .  $\square$

### Теорема 9.3 (Банаха о замкнутом графике).

*Пусть  $A: X \rightarrow X$  — замкнутый линейный оператор, определенный на всем банаховом пространстве  $X$ . Тогда оператор  $A$  ограничен.*

Пусть  $A \in L(X)$ . Рассмотрим два условия:

1.  $\text{Ker } A = \{0\}$  — оператор  $A$  инъективен.
2.  $\text{Im } A = X$  — оператор  $A$  сюръективен.

В случае, когда  $X$  — конечномерное пространство, как известно из алгебры, эти два условия эквивалентны. Однако в случае бесконечномерных пространств это не так.

Если для оператора из  $A \in L(X)$  выполняются условия (1, 2), он является биективным, а значит существует обратное отображение  $A^{-1}$ , которое, как известно из алгебры, также является линейным оператором. Будет ли этот оператор ограниченным? Оказывается, если пространство  $X$  банахово, это всегда так.

**Теорема 9.4 (Банаха об обратном операторе).** *Пусть линейный оператор  $A \in L(X)$ , действующий в банаховом пространстве  $X$ , биективен, т.е. выполнены условия (1) и (2). Тогда  $A^{-1}$  ограничен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку  $A$  ограничен, он замкнут. Покажем, что  $A^{-1}$  также замкнут.

$$\Gamma(A^{-1}) = \{(x, A^{-1}x) : x \in X\} = \{(Ax, x) : x \in X\}.$$

Пусть  $Ax_n \rightarrow y_0$ , а  $x_n \rightarrow x_0$ . Поскольку  $A$  замкнут,  $y_0 = Ax_0$ , и  $(y_0, x_0) = (Ax_0, x_0) \in \Gamma(A^{-1})$ , то есть множество  $\Gamma(A^{-1})$  замкнуто. Значит, оператор  $A^{-1}$  замкнут, а по теореме о замкнутом графике он и ограничен.  $\square$

Если  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  определен не на всем пространстве, то для него также можно рассматривать условия (1, 2). Тогда будем называть обратным к оператору  $A$  оператор  $A^{-1}: X \rightarrow X$ , который удовлетворяет естественным условиям

$$AA^{-1} = I_X$$

и

$$A^{-1}Ax = x$$

для всех  $x \in D(A)$ . Обратим внимание, что мы считаем  $A^{-1}$  действующим из  $X$  во всё пространство  $X$ , а не в  $D(A)$ .

**Теорема 9.5 (Банаха об обратном операторе).**

Пусть  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  — замкнутый биективный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве  $X$ . Тогда  $A^{-1}: X \rightarrow X$  — ограниченный оператор.

Доказательство аналогично предыдущему.

## 9.2 Спектр оператора

**Лемма 9.2.** Если  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  замкнут, то и  $A - \lambda I$  замкнут, где  $\lambda \in \mathbb{C}$ , а  $I: D(A) \subset X \rightarrow X$  — тождественный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $A$  замкнут,  $\{x_n\} \subset D(A)$ ,  $x_n \rightarrow x$ ,  $(A - \lambda I)x_n \rightarrow y$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n - \lambda x_n + \lambda x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)x_n + \\ &\quad + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y + \lambda x. \end{aligned}$$

Тогда, в силу замкнутости  $A$ ,

$$Ax = \lambda x + y \Rightarrow (A - \lambda I)x = y,$$

то есть  $A - \lambda I$  также замкнут.  $\square$

**Определение 9.2.** Пусть  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  — замкнутый оператор. Будем называть число  $\lambda \in \mathbb{C}$  *точкой спектра* оператора  $A$ , если оператор  $A - \lambda I: D(A) \subset X \rightarrow X$  необратим, то есть выполнено хотя бы одно из условий

1.  $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$  — оператор не инъективен.
2.  $\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$  — оператор не сюръективен.

Если же число  $\lambda \in \mathbb{C}$  не является точкой спектра, то его называют *регулярной точкой* оператора  $A$ .

Заметим, что по теореме Банаха об обратном операторе, если число  $\lambda$  — регулярная точка  $A$ , то оператор  $(A - \lambda I)^{-1}$  ограничен.

**Определение 9.3.** Множество  $\sigma(A)$  точек спектра оператора  $A$  называется *спектром* оператора  $A$ .

**Определение 9.4.** Множество  $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  регулярных точек оператора  $A$  называется *резольвентным множеством* оператора  $A$ .

Спектр оператора принято разбивать на три взаимно непересекающиеся части:

1. Дискретный спектр  $\sigma_d(A)$  — множество собственных значений оператора  $A$ , то есть такие  $\lambda \in \mathbb{C}$ , что  $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ .
2. Непрерывный спектр  $\sigma_c(A)$  — множество таких  $\lambda \in \mathbb{C}$ , не являющихся собственными значениями, что  $\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$ , но  $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = X$ .
3. Остаточный спектр  $\sigma_r(A)$  — множество точек спектра, не вошедших ни в дискретный спектр, ни в непрерывный спектр.

Ясно, что  $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ .

**Определение 9.5.** Отображение  $R(\bullet, A): \rho(A) \rightarrow L(X)$ , действующее по правилу

$$R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

называется *резольвентой* оператора  $A$ .

**Теорема 9.6.** Для всякого замкнутого оператора  $A$  множество  $\rho(A)$  открыто. Резольвента  $R(\bullet, A): \rho(A) \rightarrow L(X)$  — аналитическая функция на  $\rho(A)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\lambda_0 \in \rho(A)$ , а  $\lambda \in \mathbb{C}$  таково, что

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}.$$

Тогда представим оператор  $A - \lambda I$  в следующем виде:

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I + \lambda_0 I - \lambda I = (A - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)).$$

Оператор  $I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)$  обратим, поскольку (см. лемму 9.1)

$$\|(\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)\| < 1.$$

Так как  $A - \lambda_0 I$  также обратим, то и  $A - \lambda I$  обратим как произведение обратимых операторов. Отсюда следует, что резольвентное множество открыто: вместе с каждой точкой  $\lambda_0 \in \rho(A)$  входит открытый круг радиусом меньше  $\|R(\lambda_0, A)\|^{-1}$  с центром в точке  $\lambda_0$ .

Оператор, обратный к  $(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))$  представляется в виде

$$(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= (A - \lambda I)^{-1} = (I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))^{-1} (A - \lambda_0 I)^{-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом мы получили, что  $R(\lambda, A)$  в некоторой окрестности каждой точки  $\lambda_0 \in \rho(A)$  представляется в виде суммы степенного ряда с коэффициентами  $c_n = R(\lambda_0, A)^{n+1}$ . Значит, по теореме 8.5, функция  $R(\lambda, A)$  аналитична на  $\rho(A)$ .  $\square$

**Следствие 1.** Для всякого замкнутого оператора  $A$  множество  $\sigma(A)$  замкнуто.

**Теорема 9.7 (тождество Гильберта).** Для любого линейного замкнутого оператора  $A$  и любых чисел  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  справедливо равенство

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к правой и левой частям равенства  $A - \lambda I$  справа и  $A - \mu I$  слева, получим одинаковые выражения:

$$(A - \lambda I)(R(\lambda, A) - R(\mu, A))(A - \mu I) = A - \mu I - A + \lambda I = (\lambda - \mu)I;$$

$$(\lambda - \mu)(A - \lambda I)R(\lambda, A)R(\mu, A)(A - \mu I) = (\lambda - \mu)I,$$

то есть

$$(A - \lambda I)(R(\lambda, A) - R(\mu, A))(A - \mu I) =$$

$$= (\lambda - \mu)(A - \lambda I)R(\lambda, A)R(\mu, A)(A - \mu I).$$

Из биективности  $A - \lambda I$  и  $A - \mu I$  следует, что на них можно «сократить» справа и слева. Тогда получаем требуемое равенство.  $\square$

**Следствие 1.** *Операторы  $R(\lambda, A)$  и  $R(\mu, A)$  перестановочны.*

### Теорема 9.8 (о спектре ограниченного оператора).

Пусть  $A \in L(X)$  — ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве  $X$ . Тогда его спектр  $\sigma(A)$  есть непустое компактное множество в  $\mathbb{C}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что  $\sigma(A)$  — компактное множество. Как известно из анализа, множество в евклидовом пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Замкнутость спектра следует из предыдущей теоремы. Докажем ограниченность.

Пусть  $|\lambda| > \|A\| \geq 0$ . Тогда

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A).$$

Оператор  $(I - \lambda^{-1}A)$  обратим, поскольку

$$\|\lambda^{-1}A\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1.$$

Тогда и  $A - \lambda I$  обратим. Отсюда получаем, что спектр оператора  $A$  лежит внутри круга радиуса  $\|A\|$  и с центром в нуле, то есть  $\sigma(A)$  — ограниченное множество и, в силу замкнутости, компактное.

Покажем, что  $\sigma(A)$  непустое множество. Предположим противное: пусть  $\rho(A) = \mathbb{C}$  и  $|\lambda| > \|A\|$ . Тогда при таких  $\lambda$  резольвента

представляется в виде

$$R(\lambda, A) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

При этом для нормы резольвенты справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \\ &= \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

То есть при  $\lambda \rightarrow \infty$  норма  $\|R(\lambda, A)\|$  стремится к нулю.

При этом, по теореме 9.6, резольвента является аналитической функцией на  $\rho(A) = \mathbb{C}$ , то есть в нашем случае резольвента оказывается целой ограниченной функцией (ограниченность следует из стремления к нулю на бесконечности и непрерывности). Поэтому, по теореме Лиувилля,  $R(\lambda, A) = \mathbf{0} \in L(X)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ , что невозможно. Получили противоречие. Значит спектр оператора  $A$  пуст.  $\square$

**Определение 9.6.** *Спектральным радиусом* линейного ограниченного оператора  $A \in L(X)$  называется величина

$$r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Спектральный радиус корректно определен в виду компактности и непустоты спектра  $A$ . Из доказательства теоремы 9.8 видно, что

$$r(A) \leq \|A\|,$$

поскольку, если  $|\lambda| > \|A\|$ , то оператор  $A - \lambda I$  обратим.

**Теорема 9.9 (формула Бёрлинга-Гельфанда).** *Пусть  $A \in L(X)$ . Тогда для спектрального радиуса оператора  $A$  справедлива формула*

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

## 10 Элементы функционального исчисления операторов

### 10.1 Операторное исчисление

Далее  $X$  — комплексное банахово пространство. Обозначим символом  $\mathcal{F}(\mathbb{C})$  алгебру целых функций  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Пусть  $A \in L(X)$ ,  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ , а  $f$  разлагается в ряд

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n.$$

Определим отображение  $\Phi_A: \mathcal{F}(\mathbb{C}) \rightarrow L(X)$  следующим образом:

$$\Phi_A(f) = f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

Можно показать, что ряд сходится, а отображение  $\Phi_A$  является гомоморфизмом алгебр.

Отображение  $\Phi_A$  называется *целым исчислением* оператора  $A$ .

**Пример 10.1.** Экспонентой оператора  $A \in L(X)$  назовём оператор  $e^A$ , определяемый формулой

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

◇

Рассмотрим более общий вид функционального исчисления операторов.

Обозначим символом  $\mathcal{F}(A)$  множество функций, аналитических на некотором открытом множестве, содержащем спектр  $\sigma(A)$  оператора  $A \in L(X)$ . Это множество является алгеброй с поточечными операциями сложения и умножения: если  $f: U_1 \supset \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: U_2 \supset \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ , то  $f + g$  и  $fg$  действуют из  $U_1 \cap U_2 \supset \sigma(A)$  в  $\mathbb{C}$  по правилу

$$\begin{aligned} (f + g)(z) &= f(z) + g(z), \\ (fg)(z) &= f(z)g(z) \end{aligned} \quad z \in U_1 \cap U_2.$$

Вспомним интегральную формулу Коши:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda.$$

Идея исчисления Данфорда (еще говорят голоморфного функционального исчисления, операторного исчисления) состоит в том, чтобы использовать интегральную формулу Коши для определения значения функции от оператора.

Пусть  $A \in L(X)$ . Определим отображение  $\Psi_A: \mathcal{F}(A) \rightarrow L(X)$  по правилу

$$\Psi_A(f) = f(A) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda,$$

где контур  $\gamma$  — граница открытого множества  $V \supset \sigma(A)$ , лежащего в множестве аналитичности функции  $f$ .

Отображение  $\Psi_A$  называется *исчислением Данфорда* оператора  $A$  или просто *операторным исчислением*. Следующая теорема обосновывает корректность такого названия.

**Теорема 10.1.**

*Отображение  $\Psi_A$  является гомоморфизмом алгебры  $\mathcal{F}(A)$  в алгебру  $L(X)$ , то есть для всех  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  справедливо*

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A),$$

$$(fg)(A) = f(A)g(A).$$

*Кроме того, если  $f$  — целая функция, то*

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n,$$

*то есть целое исчисление и исчисление Данфорда совпадают для целых функций.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое свойство следует из линейности интеграла по контуру. Докажем второе свойство. Пусть  $U_1$  и  $U_2$  — открытые множества, содержащие спектр, причем такие, что замыкание  $U_1$  лежит в  $U_2$ , а замыкание  $U_2$  лежит в общем множестве аналитичности функций  $f$  и  $g$ . Символами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  обозначим контуры, обходящие границы  $U_1$  и  $U_2$  соответственно в положительном направлении обхода (так, чтобы внутренность множества оставалась слева). Тогда, применяя интегральную формулу Коши и тождество Гильберта, получим

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda \cdot \int_{\gamma_2} f(\mu) R(\mu, A) d\mu = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(\lambda)g(\mu) R(\lambda, A) R(\mu, A) d\mu d\lambda = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(\lambda) g(\mu) (\lambda - \mu)^{-1} (R(\lambda, A) - R(\mu, A)) d\mu d\lambda = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(\lambda) g(\mu) (\lambda - \mu)^{-1} R(\lambda, A) d\mu d\lambda - \\
&\quad - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(\lambda) g(\mu) (\lambda - \mu)^{-1} R(\mu, A) d\mu d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\lambda) R(\lambda, A) \left( -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu \right) d\lambda - \\
&\quad - \left( -\frac{1}{2\pi i} \right) \int_{\gamma_2} g(\mu) R(\mu, A) \left( -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda \right) d\mu = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\lambda) R(\lambda, A) \left( -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu \right) d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\lambda) g(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda = (fg)(A),
\end{aligned}$$

где интеграл

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda$$

равен нулю, поскольку  $\mu$  лежит за пределами  $U_1$  (на контуре  $\gamma_2$ ), то есть функция

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu}$$

аналитична в области  $U_1$  (знаменатель в ноль не обращается).

Третье свойство дано без доказательства.  $\square$

**Теорема 10.2 (Данфорда об отображении спектра).**

Пусть  $A \in L(X)$ ,  $f \in \mathcal{F}(A)$ . Тогда

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

## 10.2 Проекторы Рисса

**Теорема 10.3.** Пусть спектр оператора  $A \in L(X)$  представим в виде объединения двух непересекающихся замкнутых частей:  $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ . Тогда существует разложение  $X$  в пря-

мую сумму замкнутых подпространств  $X = X_1 \oplus X_2$ , причем пространства  $X_1$  и  $X_2$  инвариантны относительно оператора  $A$ . Более того, если  $A_k = A|_{X_k}$ ,  $k = 1, 2$ , то  $\sigma(A_1) = \sigma_1$  и  $\sigma(A_2) = \sigma_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию  $f: U_1 \cup U_2 \rightarrow \mathbb{C}$  по правилу

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in U_1, \\ 0, & \lambda \in U_2, \end{cases}$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — взаимно непересекающиеся открытые множества, содержащие  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Очевидно, что  $f$  — аналитическая функция: она дифференцируема в каждой точке  $U_1 \cup U_2$ , то есть  $f \in \mathcal{F}(A)$ . Значит можно определить оператор  $f(A)$ :

$$\begin{aligned} f(A) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R(\lambda, A) d\lambda, \end{aligned}$$

где  $\gamma$  — граница  $U_1 \cup U_2$ , являющаяся объединением  $\gamma_k$  — границ  $U_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Введем обозначение  $P_1 = f(A)$ . Покажем, что  $P_1$  — проектор. Поскольку  $(f \cdot f)(\lambda) = (f(\lambda))^2 = f(\lambda)$  для всех  $\lambda \in U_1 \cup U_2$ , в силу определения гомоморфизма алгебр, получаем:

$$P_1^2 = f(A)f(A) = (f \cdot f)(A) = f(A) = P_1.$$

Итак,  $P_1$  в самом деле проектор.

Пусть  $X_1 = \text{Im } P_1$ ,  $X_2 = \text{Ker } P_1$ . Из алгебры известно, что пространство  $X$  раскладывается в прямую сумму  $X_1$  и  $X_2$ . Покажем, что пространства  $X_1$  и  $X_2$  инвариантны относительно  $A$ . Для этого достаточно показать, что  $AP_1 = P_1A$  (см. алгебру).

$$\begin{aligned} AP_1 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} A R(\lambda, A) d\lambda, \\ P_1A &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R(\lambda, A) A d\lambda. \end{aligned}$$

Легко показать, что для любого оператора  $A \in L(X)$  и любого  $\lambda \in \rho(A)$  справедливо равенство<sup>1</sup>

$$A R(\lambda, A) = R(\lambda, A) A.$$

<sup>1</sup>Рассмотрите очевидное равенство  $(A - \lambda I)A = A(A - \lambda I)$

Отсюда получаем, что в самом деле пространства  $X_1$  и  $X_2$  инвариантны относительно  $A$ . Значит можно определить сужения  $A|_{X_1} = A_1 \in L(X_1)$ ,  $A|_{X_2} = A_2 \in L(X_2)$ . Утверждение о спектре этих сужений оставим без доказательства.  $\square$

## 11 Компактные операторы

Далее  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства.

**Определение 11.1.** Оператор  $A \in L(X, Y)$  называется *компактным*, если образ  $A(M)$  всякого ограниченного множества  $M \subset X$  есть предкомпактное множество в  $Y$ .

Множество компактных операторов, действующих из  $X$  в  $Y$  будем обозначать  $\text{Comp}(X, Y)$ . Как обычно, если  $X = Y$ , пишут  $\text{Comp}(X)$ .

Можно показать, что для компактности оператора  $A$  достаточно показать предкомпактность образа единичного шара.

**Замечание.** Из теоремы Хаусдорфа следует, что оператор компактен тогда и только тогда, когда для каждой ограниченной последовательности  $\{x_n\}$  из последовательности  $\{Ax_n\}$  можно выжелить сходящуюся в  $Y$  подпоследовательность.

**Определение 11.2.** Оператор  $A \in L(X, Y)$  называется *оператором с конечным рангом*, если его образ  $\text{Im } A$  есть конечномерное подпространство в  $Y$ .

**Теорема 11.1.** Для того чтобы множество из конечномерного банахова пространства было предкомпактно, необходимо и достаточно чтобы оно было ограничено. Как следствие, такое множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

**Теорема 11.2.** Всякий оператор с конечным рангом компактен.

**Доказательство.** Поскольку  $A$  ограничен, он переводит ограниченное множество  $M$  в ограниченное. Но поскольку  $\text{Im } A$  конечномерен, то по предыдущей теореме  $A(M)$  предкомпактно.  $\square$

**Пример 11.1.** Пусть  $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  — интегральный оператор с ядром  $K \in C([a, b] \times [a, b])$ .

Используя теорему Арцела, можно показать, что всякий интегральный оператор компактен.

Ядро  $K$  называется *вырожденным*, если его можно представить

в виде

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^n p_i(t) q_i(s),$$

где  $p_i, q_i \in C[a, b]$  и  $p_i$  линейно независимы.

Оператор с вырожденным ядром является оператором с конечным рангом. В самом деле:

$$(Ax)(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) \int_a^b q_i(s) x(s) ds,$$

то есть всякая функция  $Ax \in C[a, b]$  представима в виде линейной комбинации  $p_i$ , которые линейно независимы, а значит образуют базис в  $\text{Im } A$ .  $\diamond$

**Определение 11.3.** Подмножество  $I \subset A$  алгебры  $A$  называется *идеалом* (*двусторонним идеалом*), если оно является подпространством в  $A$  и для всех  $a \in A$  и  $b \in I$  справедливы равенства

$$ab \in I, \quad ba \in I.$$

**Теорема 11.3.** Множество  $\text{Compr}(X, Y)$  образует замкнутое подпространство в  $L(X, Y)$ . Если  $X = Y$ , то  $\text{Compr}(X)$  — двусторонний идеал в банаховой алгебре  $L(X)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем, что  $\text{Compr}(X, Y)$  — подпространство в  $L(X, Y)$ . Пусть  $A, B \in \text{Compr}(X, Y)$ . Если  $\{x_n\} \subset X$  — ограниченная последовательность, то из  $\{(\alpha A + \beta B)x_n\}$  можно выделить сходящуюся, выделив сходящуюся сначала из последовательности  $\{Ax_n\} - \{Ax_{n_k}\}$ , а затем выделить сходящуюся из  $\{Bx_{n_k}\} - \{Bx_{n_{k_i}}\}$ . Тогда последовательность  $\{(\alpha A + \beta B)x_{n_{k_i}}\}$  также будет сходящейся, то есть линейная комбинация компактных операторов также является компактным оператором.

Покажем, что  $\text{Compr}(X, Y)$  замкнуто в  $L(X, Y)$ . Пусть  $\{A_n\} \subset \text{Compr}(X, Y)$  сходится по норме к  $A$ , то есть  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ . Покажем, что  $A$  компактен. Для этого покажем, что образ единичного шара  $B(0, 1)$  вполне ограничен (тогда, по теореме Хаусдорфа, он предкомпактен), то есть нужно доказать, что для каждого  $\varepsilon > 0$  множество  $A(B(0, 1))$  можно покрыть конечным числом шаров радиуса  $\varepsilon$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $m$  таково, что  $\|A_m - A\| < \varepsilon/2$ . Поскольку  $A_m(B(0, 1))$  вполне ограниченное множество, по  $\varepsilon/2$  для него найдется конечное покрытие шарами радиуса  $\varepsilon/2$  с центрами

в точках  $y_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ :

$$A_m(B(0, 1)) \subset \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Покажем, что

$$A(B(0, 1)) \subset \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon).$$

В самом деле, пусть  $x \in B(0, 1)$  и  $A_mx \in B(y_i, \varepsilon/2)$ . Тогда

$$\|A_mx - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\|Ax - y_i\| \leq \|Ax - A_mx\| + \|A_mx - y_i\| < \varepsilon,$$

то есть  $Ax$  лежит в шаре  $B(y_i, \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon)$ . Компактность оператора  $A$  доказана, то есть  $\text{Compr}(X, Y)$  — замкнутое подпространство.

Осталось доказать, что  $\text{Compr}(X)$  образует двусторонний идеал в  $L(X)$ . Пусть  $A \in \text{Compr}(X)$ ,  $B \in L(X)$ . Нужно показать, что  $AB, BA \in \text{Compr}(X)$ . Пусть  $\{x_n\}$  — ограниченная последовательность в  $X$ .  $\{Bx_n\}$  также ограничена. Поскольку оператор  $A$  компактен, из последовательности  $\{A(Bx_n)\}$  можно выделить сходящуюся, что в точности и означает, что  $AB \in \text{Compr}(X)$ . Из последовательности  $\{Ax_n\}$  также можно выделить сходящуюся  $\{Ax_{n_k}\}$ , но тогда и  $\{B(Ax_{n_k})\}$  сходится, значит  $BA \in \text{Compr}(X)$ .  $\square$

**Лемма 11.1 (о почти перпендикуляре).** Пусть  $X$  — банахово пространство,  $M \subset X$  — замкнутое подпространство, не совпадающее со всем  $X$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой  $x \in X \setminus M$ ,  $\|x\| = 1$ , что

$$1 - \inf_{m \in M} \|x - m\| < \varepsilon.$$

**Теорема 11.4 (Рисса).** Пусть  $X$  — бесконечномерное банахово пространство. Тогда замкнутый шар  $\overline{B(a, r)}$  не является компактом.

**Доказательство.** Докажем утверждение для единичного шара (общее утверждение следует). Возьмем произвольный  $x_0$ ,  $\|x_0\| = 1$ . Определим подпространство  $M_1 = \text{span}\{x_0\}$ . По лемме о почти перпендикуляре для  $\varepsilon = 1/2$  найдется такой  $x_1 \in X \setminus M_1$ ,  $\|x_1\| = 1$ ,

что  $\|x_1 - x_0\| > 1/2$ . Для подпространства  $M_2 = \text{span}\{x_0, x_1\}$  также справедлива лемма о почти перпендикуляре, значит найдется  $x_3 \in X \setminus M_2$ ,  $\|x_3\| = 1$ , что  $\|x_2 - x_0\| > 1/2$  и  $\|x_2 - x_1\| > 1/2$ . Продолжая аналогично, получим последовательность  $\{x_k\}$  единичных векторов, находящихся друг от друга на расстоянии большем  $1/2$ . Очевидно, что из такой последовательности выделить сходящуюся нельзя, а значит множество  $\overline{B}(0, 1)$  не предкомпактно.  $\square$

Следующая теорема полностью описывает спектры компактных операторов.

**Теорема 11.5.** Пусть  $A \in \text{Comp}(X)$ . Тогда

1. Спектр оператора  $A$  есть не более чем счетное множество с возможной единственной предельной точкой, равной нулю. Все точки спектра, отличные от нуля, являются собственными значениями. В бесконечномерном пространстве число 0 всегда лежит в спектре  $A$ .
2. Ядра  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  конечномерны для всех  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \sigma(A)$ .
3. Более общо: ядра  $\text{Ker}(A - \lambda I)^m$  конечномерны для всех ненулевых  $\lambda$  из спектра, причем найдется такой номер  $n > 0$ , что  $\text{Ker}(A - \lambda I)^n = \text{Ker}(A - \lambda I)^{n+1}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Покажем только, что  $0 \in \sigma(A)$ , если  $X$  бесконечномерно.

Предположим противное: оператор  $A$  обратим, то есть существует  $A^{-1} \in L(X)$  такой, что

$$AA^{-1} = I.$$

Но поскольку  $\text{Comp}(X)$  есть идеал в  $L(X)$ , оператор  $I$  должен быть также компактен, что невозможно в случае бесконечномерного  $X$  (образ единичного шара не предкомпактен в силу теоремы Рисса).

Остальные утверждения данного пункта оставим без доказательства.

2. Покажем, что если  $\lambda \neq 0$ , то  $X_0 = \text{Ker}(A - \lambda I)$  конечномерно. Ядро оператора  $A - \lambda I$  инвариантно относительно оператора  $A$ : если  $x \in \text{Ker}(A - \lambda I)$ , то  $Ax = \lambda x \in \text{Ker}(A - \lambda I)$ . Также, как нетрудно убедиться,  $X_0$  — замкнутое подпространство (значит, оно банахово). Значит можно определить сужение  $A_0 = A|_{X_0}$  оператора  $A$  на это подпространство. Оно имеет вид  $A_0 = \lambda I_0$ , где  $I_0$  — тождественный оператор в  $X_0$ .

Сужение компактного оператора на замкнутое подпространство, очевидно, также компактно, а значит  $X_0$  конечномерно в силу той же теоремы Рисса.

3. Без доказательства. □

**Определение 11.4.** Замкнутый оператор  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  называется *оператором с компактной резольвентой*, если его резольвентное множество непусто и найдется такое  $\lambda_0 \in \rho(A)$ , что оператор  $R(\lambda_0, A)$  компактен.

**Лемма 11.2.** Если  $A$  — оператор с компактной резольвентой, то для любого  $\mu_0 \in \rho(A)$  оператор  $R(\mu_0, A)$  компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\lambda_0 \in \rho(A)$  — число из определения оператора с компактной резольвентой. Тогда из тождества Гильберта получаем

$$R(\mu_0, A) = R(\lambda_0, A) + (\mu_0 - \lambda_0) R(\mu_0, A) R(\lambda_0, A).$$

Оператор  $R(\lambda_0, A)$  компактен, значит компактен

$$(\mu_0 - \lambda_0) R(\mu_0, A) R(\lambda_0, A),$$

но тогда и  $R(\mu_0, A)$  компактен как сумма компактных операторов. □

### Теорема 11.6.

Пусть замкнутый оператор  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  обратим. Тогда если  $D(A) \neq X$ , то

$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\}.$$

Если же  $D(A) = X$  (оператор  $A$  тогда ограничен), то

$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $D(A) \neq X$ . Тогда  $0 \in \sigma(A^{-1})$ , поскольку  $A^{-1}$  необратим (его образ не совпадает со всем  $X$ ). Возьмем  $\lambda_0 \in \rho(A)$  и покажем, что  $\lambda_0^{-1} \in \rho(A^{-1})$ . Обратным для  $A^{-1} - \lambda_0^{-1}I$  является оператор  $-\lambda_0 A(A - \lambda_0 I)^{-1}$ , это проверяется непосредственно. Аналогично, если  $\lambda_0 \in \rho(A^{-1})$ , то  $\lambda_0^{-1} \in \rho(A)$ , причем обратный для  $A - \lambda_0^{-1}I$  есть  $-\lambda_0 A^{-1}(A^{-1} - \lambda_0 I)^{-1}$ . □

**Лемма 11.3.** Если  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  — обратимый линейный замкнутый оператор, а  $x \in D(A)$  — собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda \in \sigma_d(A)$ ,  $\lambda \neq 0$ , то  $x$  является собственным вектором оператора  $A^{-1}$ , соответствующим собственному значению  $\lambda^{-1}$ . Иначе утверждение леммы можно записать в виде

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(A^{-1} - \lambda^{-1} I).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $Ax = \lambda x$ , то  $x = \lambda A^{-1}x$ . Дальнейшее очевидно.  $\square$

**Теорема 11.7.** Пусть  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  — оператор с компактной резольвентой. Тогда

1. Его спектр состоит только из не более чем счетного числа собственных значений с единственной возможной предельной точкой равной  $\infty$ .
2. Ядра  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  конечномерны для всех  $\lambda \in \sigma(A)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\lambda_0 \in \rho(A)$ . Тогда  $(A - \lambda_0 I)^{-1}$  компактен, значит его спектр  $\sigma((A - \lambda_0 I)^{-1})$  счетен и единственной возможной предельной точкой является точка 0. Из теоремы 11.6 следует, что

$$\sigma((A - \lambda_0 I)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_0} : \lambda \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\},$$

откуда получаем

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{1}{\mu} + \lambda_0 : \mu \in \sigma((A - \lambda_0 I)^{-1}), \mu \neq 0 \right\}.$$

Отсюда следует, что оператор  $A$  имеет не более чем счетный спектр с единственной возможной предельной точкой равной бесконечности.

Покажем, что все точки спектра  $A$  являются собственными значениями. Если  $\lambda \in \sigma(A)$ , то  $\lambda = \mu^{-1} + \lambda_0$ , где  $\mu \in \sigma((A - \lambda_0 I)^{-1})$ . Поскольку оператор  $(A - \lambda_0 I)^{-1}$  компактен и  $\mu \neq 0$ ,  $\mu$  является собственным значением этого оператора, а значит найдется такой ненулевой  $x \in X$ , что

$$(A - \lambda_0 I)^{-1}x = \mu x.$$



Из предыдущей леммы следует, что  $x$  является собственным вектором оператора  $A - \lambda_0 I$ , соответствующим собственному значению  $\mu^{-1} = \lambda - \lambda_0$ , то есть, как легко видеть,  $x$  есть собственный вектор  $A$ , соответствующий собственному значению  $\lambda$ . Из леммы также получаем, что

$$\text{Ker}((A - \lambda_0 I)^{-1} - (\lambda - \lambda_0)^{-1} I) = \text{Ker}(A - \lambda I),$$

откуда сразу следует второе утверждение теоремы. □