Содержание

1 Элементы теории меры и интеграла

1.1 Пространства с мерой

Определение 1.1. Пусть X — непустое множество. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ из X называется *σ-алгеброй*, если выполняются следующие условия:

1. $X \in \mathcal{F}$;
2. $X \setminus A \in \mathcal{F}$ для всех A из $\mathcal{F}$;
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ для всех A_i, $i \in \mathbb{N}$ из $\mathcal{F}$.

Подмножества, принадлежащие этому семейству, называются *измеримыми.*

Определение 1.2. Отображение $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется *мерой*, если

1. $\mu(A) \geqslant 0$ для всех измеримых подмножеств A;
2. $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ для любой последовательности $\{A_i\}$ *взаимно непересекающихся* измеримых подмножеств.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие свойства:*

1. *Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество;*
2. *Если E_1 и E_2 — измеримые множества и $E_1 \subset E_2$, то*
$$\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2).$$

Доказательство. См. методичку □

Определение 1.3. Тройка $(X, \mathcal{F}, \mu)$, где X — непустое множество, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра измеримых подмножеств из X, а μ — мера, называется *пространством с мерой.*

Пример 1.1. Пусть X — некоторое непустое множество. В качестве $\mathcal{F}$ возьмем всевозможные подмножества из X. Очевидно, что они образуют σ-алгебру. Меру $\mu_a\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, где a — некоторый элемент из X, определим следующим образом:

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство того, что определенная таким образом функция в самом деле является мерой, элементарно (см. методичку).

Построенная мера называется *мерой Дирака, сосредоточенной в точке a.* ♢

Пример 1.2. В качестве X возьмем вещественную прямую $\mathbb{R}$. Определим длину интервала (a, b) равенством $\mu((a, b)) = b - a$. Любое открытое множество на прямой представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся интервалов. Тогда определим меру открытого множеств по формуле $\mu(G) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$, где $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество на прямой. Его можно покрыть некоторым открытым множеством $G \supset E$. Величина $\mu^*(E) = \inf\limits_{G \supset E} \mu(G)$, где инфимум берется по всем открытым покрытиям E, называется *верхней мерой* множества E.

Нижняя мера множества E определяется по формуле $\mu_*(E) = b - a - \mu([a, b] \setminus E)$, где $[a, b]$ — наименьший отрезок, содержащий множество E.

Назовём ограниченное множество E *измеримым по Лебегу*, если $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. Тогда *мерой Лебега* множества E назовём общее значение верхней и нижней мер этого множества.

Мера Лебега также определяется и для неограниченных множеств. Для этого в качестве нижней меры множества E берется предел нижних мер множеств вида $E_n = E \cap [-n, n]$ при $n \to \infty$. Этот предел существует или бесконечен, поскольку последовательность $\mu_*(E_n)$, как можно показать, монотонно неубывает. ♢

Теорема 1.2. *Тройка $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$, где $\mathcal{F}$ — множество измеримых по Лебегу множеств на прямой, а μ — мера Лебега, является пространством с мерой.*

Пример 1.3. Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где Ω — пространство элементарных исходов, $\mathfrak{A}$ — алгебра событий, P — вероятностная мера, является пространством с мерой. ♢

1.2 Простые функции. Интегрирование простых функций

Пусть далее $(X, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathcal{F}$ — некоторое измеримое подмножество.

Определение 1.4. Функция $f \colon E \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если E можно представить в виде счетного объединения взаимно непересекающихся измеримых подмножеств E_i так, что функция f принимает на этих подмножествах постоянное значение: $f(x) = a_i$

для всех x из E_i.

Функция f называется *ступенчатой*, если такое объединение конечно.

Пример 1.4. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ — прямая с мерой Лебега, $E = [0, 1]$. Функция Дирихле, определенная на E и принимающая значение 1 для рациональных аргументов и 0 для иррациональных, является простой (и даже ступенчатой). В качестве E_1 можно взять множество рациональных чисел из отрезка E, а в качестве E_2 — множество иррациональных чисел из того же отрезка. Оба этих множества измеримы по Лебегу. $\diamondsuit$

Лемма 1.1. *Линейная комбинация простых функций, определенных на измеримом множестве E является простой функцией.*

Доказательство. Покажем, что $\alpha f + \beta g$ также простая функция для простых функций $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Пусть

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j,$$

причем

$$f(x) = a_i, \quad x \in E_i,$$

$$g(x) = b_j, \quad x \in F_j.$$

Обозначим $G_{ij} = E_i \cap F_j$. Это также измеримые множества. Более того непосредственно проверяется, что

$$E = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} G_{ij}.$$

На множестве G_{ij} функция $\alpha f + \beta g$ принимает значение

$$(\alpha f + \beta g) = \alpha a_i + \beta b_j.$$

Этим доказано, что функция $\alpha f + \beta g$ простая, принимающая постоянные значения на множествах G_{ij}. $\square$

Из этой леммы следует, что простые функции образуют линейное пространство.

Далее будем считать, что мера множества E конечна.

Определение 1.5. Простая функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *аб-*

солютно суммируемой, если конечна величина

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\, \mu(E_i),$$

в обозначениях предыдущего определения.

Определение 1.6. *Интегралом* от абсолютно суммируемой функции f называется сумма вида

$$\int_E f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i).$$

Аргумент в записи интеграла часто опускают и пишут просто

$$\int_E f\, \mathrm{d}\mu.$$

В следующей теореме доказываются основные свойства интеграла от абсолютно суммируемых функций.

Теорема 1.3. *Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ — абсолютно суммируемые функции. Тогда справедливы следующие свойства:*

1. *Линейность: для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ абсолютно суммируема и справедливо равенство*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\, \mathrm{d}\mu + \beta \int_E g\, \mathrm{d}\mu;$$

2. *Оценка модуля интеграла:*

$$\left| \int_E f\, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \mu(E) \sup_{x \in E} |f(x)|\,;$$

3. *Неотрицательность: если $f \geqslant 0$, то*

$$\int_E f\, \mathrm{d}\mu \geqslant 0;$$

4. *Монотонность: если $f \geqslant g$, то*

$$\int_E f\, \mathrm{d}\mu \geqslant \int_E g\, \mathrm{d}\mu;$$

5. *Аддитивность: если E представимо в виде объединения не*

более чем счетного числа взаимно непересекающихся измеримых подмножеств A_k, то

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sum_k \int_{A_k} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

1. Абсолютная суммируемость линейной комбинации следует из предыдущей леммы, свойств абсолютно сходящихся числовых рядов и из свойства монотонности меры.

   Покажем, что справедливо указанное в утверждении теоремы равенство. Будем пользоваться обозначениями из леммы.

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i,j=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_j)\mu(G_{ij}) =$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(G_{ij}) =$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}).$$

   Поскольку, как нетрудно видеть, $E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G_{ij}$, $F_j = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_{ij}$, а множества G_{ij} взаимно не пересекаются, из свойства аддитивности меры получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(E_i); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(F_j).$$

   Таким образом

$$\alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i) +$$
$$+ \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(F_j) = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

2. Тривиально (неравенство треугольника, аддитивность меры).

3. Тривиально.

4. Рассмотреть функцию $f-g$ и применить линейность и предыдущее свойство.

5. Рассмотреть взаимно непересекающиеся множества вида $H_{ik} = E_i \cap A_k$, на которых функция принимает постоянные значения c_{ik}, и которые образуют разбиение E:

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \sum_k c_{ik}\mu(H_{ik}) = \sum_k \sum_i c_{ik}\mu(H_{ik}) = \sum_k \int_{A_k} f \,\mathrm{d}\mu$$

□

1.3 Измеримые функции. Интегрирование измеримых функций

Определение 1.7. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на измеримом множестве E, называется *измеримой*, если она является равномерным пределом на E последовательности простых функций, т.е. существует такая последовательность $\{f_n\}$, $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, что

$$\sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Определение 1.8. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если

$$f^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1.4. *Вышеприведенные определения измеримой функции эквивалентны.*

Доказательство. см. в методичке на с. 51 (требуется только необходимость). □

Определение 1.9. Если существует последовательность простых интегрируемых функций, сходящаяся равномерно к измеримой функции f, то *интегралом* функции f назовем предел

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Можно показать, что предел (быть может, бесконечный) всегда существует и не зависит от выбора последовательности f_n.

Определение 1.10. Неотрицательная функция f называется *интегрируемой* на множестве E, если предел из предыдущего определения конечен.

Всякая измеримая функция f представима в виде разности двух неотрицательных измеримых функций:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leqslant 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}.$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Тогда если хотя бы одна из функций f_+ или f_- интегрируема, интегралом функции f назовём величину

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f_- \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение 1.11. В случае, когда $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств на $\mathbb{R}$, μ — мера Лебега, интеграл, определённый по схеме, приведённой в данном разделе, называется *интегралом Лебега* на прямой.

Теорема 1.5. *Если $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ — прямая с мерой Лебега, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то тогда она интегрируема по Лебегу и значения интегралов Римана и Лебега совпадают.*

1.4 Пространства Лебега

Определение 1.12. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на измеримом множестве E, называется *суммируемой со степенью p*, $p \geqslant 1$, если величина

$$\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x)$$

определена и конечна.

Определение 1.13. Будем говорить, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на измеримом множестве E, если оно выполнено на всём множестве E, за исключением, быть может, множества меры нуль.

Определение 1.14. Две функции $f_1, f_2\colon E \to \mathbb{R}$ назовём *эквивалентными* на множестве E, если их значения совпадают почти всюду.

Отношение $\sim$, введённое в определении выше, является отношением эквивалентности.

Пусть $\mathcal{L}^p(E,\mu)$, $p \geqslant 1$ — линейное пространство суммируемых со степенью p функций, определенных на множестве E.

Рассмотрим фактормножество $L^p(E,\mu) = \mathcal{L}^p(E,\mu)/\sim$. Оно также будет являться линейным пространством. В нём можно ввести норму по формуле

$$\left\|\tilde{f}\right\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Классы эквивалентности из $L^p(E,\mu)$, допуская неточность, часто отождествляют с функциями-представителями из этого класса.

Если $E = [a,b] \subset \mathbb{R}$, μ — мера Лебега на прямой, то вместо $L^p([a,b],\mu)$ обычно пишут просто $L^p[a,b]$.

Теорема 1.6 (Лебега). $L^p(E,\mu)$ — *банахово пространство.*

2 Ограниченные операторы

Далее X и Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

Определение 2.1. Отображение $A\colon X \to Y$ называется *линейным оператором*, действующим из пространства X в Y, если

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Если $Y = \mathbb{K}$, то вместо слова «оператор» говорят «функционал».

Пример 2.1. Отображение $D\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$, определённое по правилу $Dx = x'$ называется *оператором дифференцирования.* Это линейный оператор. $\diamondsuit$

Пример 2.2. Отображение $J\colon C[a,b] \to C[a,b]$, определённое по правилу

$$(Jx)(t) = \int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b],$$

называется *оператором неопределённого интегрирования.* $\diamondsuit$

Пример 2.3. Пусть $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ — пространство с мерой, $L^1(\Omega,\mu)$ — банахово пространство классов эквивалентности суммируемых функций на Ω. Отображение $J_0\colon L^1(\Omega,\mu) \to \mathbb{R}$, определенное по правилу

$$J_0 x = \int_\Omega x\,\mathrm{d}\mu,$$

есть линейный функционал. $\diamondsuit$

Пример 2.4. Отображение $A\colon \ell^1 \to \ell^\infty$, определённое по пра-

вилу
$$(Ax)(n) = \sum_{k=1}^{n} x(k),$$
есть линейный оператор, который каждой последовательности из ℓ^1 ставит в соответствие её последовательность частичных сумм. $\diamondsuit$

Пример 2.5. Отображение $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$, определённое по правилу
$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b],$$
где $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, называется *интегральным оператором.* При этом функция K называется *ядром* этого интегрального оператора. $\diamondsuit$

Определение 2.2. Оператор $A\colon X \to Y$ между нормированными пространствами называется *ограниченным*, если величина
$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$$
конечна. Эта величина, в таком случае, называется нормой оператора A.

Можно показать, что все следующие определения нормы совпадают с данным выше:

1. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\|$
2. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$
3. $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$;
4. $\|A\| = \inf\left\{C \geqslant 0 : \forall x \in X \ \ \|Ax\| \leqslant C\|x\|\right\}$

Нетрудно видеть, что $\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|$ для всех $x \in X$.

Пример 2.6. Рассмотрим оператор умножения $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $Ax = ax$, где $a \in \mathbb{C}$. Если $\|x\| = |x| = 1$, то
$$\|Ax\| = |ax| = |a|\,.$$
Таким образом $\|A\| = |a|$. $\diamondsuit$

Множество всех линейных ограниченных операторов между нормированными пространствами X и Y будем обозначать $L(X,Y)$.

Теорема 2.1. $L(X, Y)$ *— нормированное пространство.*

Доказательство. Непосредственно доказывается, что сумма ограниченных операторов есть ограниченный оператор. Также легко показать, что норма оператора — в самом деле норма в $L(X, Y)$. Установим, например, справедливость неравенства треугольника. Пусть $A, B \in L(X, Y)$ и $\|x\| = 1$. Тогда

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| .$$

Взяв верхнюю грань по всем x с нормой 1, получим, что

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\| . \qquad \square$$

Определение 2.3. Алгебру $\mathcal{B}$ называют *банаховой алгеброй*, если она как линейной пространство является банаховым пространством, причем для всех $a, b \in \mathcal{B}$

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \, \|b\| .$$

Если $\mathcal{B}$ при этом является алгеброй с единицей e, то требуют также, чтобы выполнялось свойство

$$\|e\| = 1.$$

Теорема 2.2. *Если* Y *— банахово пространство, то* $L(X, Y)$ *— банахово пространство.*

Доказательство. см. Антоневич, Радыно, 1984, с. 180. $\square$

Следствие 1. *Если* X *— банахово пространство, то* $L(X)$ *— банахова алгебра с единицей.*

Доказательство. Из алгебры известно, что $L(X)$ образует алгебру с единицей I. Покажем, что выполняется мультипликативное свойство для нормы операторов. Пусть $\|x\| \leqslant 1$:

$$\|ABx\| \leqslant \|A\| \, \|Bx\| \leqslant \|A\| \, \|B\| \, \|x\| \leqslant \|A\| \, \|B\| .$$

Взяв в этом неравенстве верхнюю грань по $\|x\| \leqslant 1$, получим

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\| .$$

Норма тождественного оператора, очевидно, равна единице. $\square$

Определение 2.4. Если $f\colon X \to \mathbb{K}$ и f — линейный оператор, то f называют *линейным функционалом* на X.

Пространство ограниченных линейных функционалов $L(X, \mathbb{K})$ называют *сопряженным пространством* к пространству X и обозначают символом X^*.

Теорема 2.3. *Пусть $A \in L(X, Y)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *A — непрерывное отображение;*

2. *A — непрерывное в точке 0 отображение;*

3. *A — ограниченный оператор;*

4. *A — липшицево отображение.*

Доказательство. Импликации $1 \Rightarrow 2$, и $4 \Rightarrow 1$ очевидны. Докажем, что $2 \Rightarrow 3$. Непрерывность A означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X : \; \|x\| < \delta \to \|Ax\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторый $\varepsilon > 0$ и соответствующий ему δ. Тогда для любого $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$, справедливо

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta} \left\| A \left(\frac{\delta}{2} x \right) \right\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Переходя в неравенстве к верхней грани, получаем, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

что и означает ограниченность оператора A.

Импликация $3 \Rightarrow 4$ проверяется непосредственно: если A — ограниченный оператор, $x_1, x_2 \in X$, то

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leqslant \|A\| \, \|x_1 - x_2\| . \qquad \square$$

3 Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза)

Определение 3.1. Множество из метрического пространства называется *множеством I категории («тощим», разреженным)*, если его можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств, каждое из которых не содержит шара.

Определение 3.2. Множество, не являющееся множеством I категории, называется *множеством II категории («тучным»)*.

Теорема 3.1 (Бэра). *Полное метрическое пространство является множеством II категории.*

Пусть X и Y — банаховы пространства, Ω — множество индексов, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — семейство ограниченных операторов.

Будем называть семейство операторов *ограниченным поточечно*, если для каждого $x \in X$ существует такая константа $M(x) > 0$, что

$$\|A_\alpha x\| \leqslant M(x)$$

для всех $\alpha \in \Omega$, то есть для каждого $x \in X$ множество

$$\{A_\alpha x : \alpha \in \Omega\} \subset Y$$

ограничено в Y.

Семейство операторов назовём *ограниченным равномерно*, если существует такое число $C > 0$, что для всех $\alpha \in \Omega$ выполнено неравенство

$$\|A_\alpha\| < C,$$

то есть числовое множество

$$\{\|A_\alpha\| : \alpha \in \Omega\}$$

ограничено.

Теорема 3.2 (Банаха-Штейнгауза). *Если семейство операторов $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, действующих из банахова пространства X в нормированное пространство Y, ограничено поточечно, то оно ограничено и равномерно.*

Доказательство. Рассмотрим множества вида

$$X_n = \{x \in X : \forall\alpha \in \Omega \ \ \|A_\alpha x\| \leqslant n\}.$$

В силу поточечной ограниченности семейства, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

Каждое из множеств X_n замкнуто. В самом деле: если $\{x_k\}$ — сходящаяся к $x_0 \in X$ последовательность элементов из X_n, то, в силу непрерывности операторов A_α, $\lim\limits_{k\to\infty} \|A_\alpha x_k\| = \|A_\alpha x_0\|$, а поскольку для всех x_k и всех $\alpha \in \Omega$ выполняется неравенство $\|A_\alpha x_k\| \leqslant n$, то и $\|A_\alpha x_0\| \leqslant n$, а значит $x_0 \in X_n$, что и означает замкнутость X_n.

Поскольку пространство X полно, по теореме Бэра существует такой номер n_0, что X_{n_0} содержит в себе шар, который будем обозначать $B(x', r)$, где r — радиус этого шара, а x' — его центр.

Для всех элементов x из $B(x', r)$ и для всех $\alpha \in \Omega$ справедливо, что

$$\|A_\alpha x\| \leqslant n_0,$$

то есть значения $\|A_\alpha x\|$ ограничены на этом шаре. Покажем, что они ограничены и на единичном шаре, что будет означать ограниченность норм A_α.

Пусть $x \in B(0, 1)$. Тогда, как нетрудно проверить, $z = rx + x' \in B(x', r)$. В таком случае для всех $\alpha \in \Omega$

$$\|A_\alpha x\| = \left\| A_\alpha \left(\frac{z - x'}{r} \right) \right\| \leqslant \frac{1}{r}(\|A_\alpha z\| + \|A_\alpha x'\|) \leqslant \frac{2n_0}{r},$$

откуда, взяв верхнюю грань по всем $x \in B(0, 1)$, получаем утверждение теоремы. $\square$

4 Ряды в банаховом пространстве

Определение 4.1. *Рядом* элементов из нормированного пространства X называется пара последовательностей (x_n, s_n), связанных соотношением

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

x_n называют *n-ым членом* ряда, а s_n — *n-ой частичной суммой* ряда.

Определение 4.2. Говорят, что ряд (x_n, s_n) сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Тогда предел этой последовательности называют суммой ряда и обозначают

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_n.$$

Определение 4.3. Говорят, что ряд (x_n, s_n) *абсолютно сходится*, если сходится числовой ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Теорема 4.1. *Если ряд элементов из банахова пространства сходится абсолютно, то он сходится.*

Теорема 4.2. *Пусть задан ряд (x_n, s_n) элементов из банахова пространства X и существует числовой ряд a_n такой, что для всех n выполняется неравенство*

$$\|x_n\| \leqslant a_n.$$

Тогда ряд (x_n, s_n) сходится абсолютно.

Эти теоремы доказываются аналогично знакомым теоремам из курса математического анализа.

5 Гильбертовы пространства

5.1 Начальные сведения

Определение 5.1. Линейное пространство H над полем $\mathbb{K}$ называется *пространством со скалярным произведением*, если в нем задана функция $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{K}$, такая что для всех $x, y, z \in H$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ справедливы следующие свойства:

1. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (невырожденность);

2. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ (положительная определённость);

3. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ (линейность по первому аргументу);

4. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (эрмитова симметричность).

Такая функция называется *скалярным произведением.*

Далее будем рассматривать только комплексные пространства со скалярным произведением.

В пространстве со скалярным произведением можно ввести норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{5.1}$$

Неравенство треугольника следует из неравенства

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|, \tag{5.2}$$

которое называют *неравенством Коши-Буняковского-Шварца* или просто неравенством Шварца.

Теорема 5.1. *Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — последовательности из H, причем $x_n \to x$, $y_n \to y$. Тогда $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Доказательство. Используем неравенство Шварца:

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leqslant \\ \leqslant |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leqslant \\ \leqslant \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0, \quad n \to \infty\end{aligned}$$ □

Определение 5.2. Если пространство со скалярным произведением полно по норме, определённой равенством (5.1), то оно называется *гильбертовым пространством.*

Пример 5.1. Лебегово пространство $L^2(E, \mu)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определённым по формуле

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Существование этого интеграла следует из неравенства

$$\left|f(x)\overline{g(x)}\right| \leqslant \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2}.$$ ♢

Пример 5.2. В частности, гильбертовым пространством является пространство суммируемых с квадратом последовательностей ℓ^2. Скалярное произведение задаётся формулой

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Сходимоть ряда обеспечивается аналогичной оценкой. ♢

Определение 5.3. Векторы $x, y \in H$ называются *ортогональными*, если $\langle x, y\rangle = 0$. При этом пишут $x \perp y$.

Определение 5.4. Пусть $M \subset H$ — множество из H. Тогда говорят, что вектор $x \in H$ *ортогонален* M, если x ортогонален любому вектору $m \in M$ (в этом случае используется обозначение $x \perp M$).

Теорема 5.2. *Для всех векторов $x, y \in H$ выполняется тождество параллелограмма:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Доказательство. Доказывается элементарными преобразованиями. □

5.2 Теорема об ортогональном дополнении

Определение 5.5. Множество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если для любых векторов $a, b \in A$ векторы вида $(1-t)a+tb, t \in [0,1]$ также лежат в A.

Очевидно, всякое подпространство в нормированном пространстве является выпуклым множеством.

Теорема 5.3 (о наилучшем приближении). *Пусть $A \subset H$ — непустое выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве H. Тогда для любого $x \in H \setminus A$ найдётся единственный вектор $a_0 \in A$ такой, что*

$$\|x - a_0\| = \inf_{a \in A} \|x - a\| .$$

Иначе говоря, в A найдется вектор a_0, который находится от x на наименьшем возможном расстоянии. Такой вектор a_0 называется элементом наилучшего приближения вектора x в множестве A.

Доказательство. По определению нижней грани, существует такая последовательность $\{a_n\}$ элементов из A, что

$$d_n = \|x - a_n\| \to \inf_{a \in A} \|x - a\| = d.$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальна.

По тождеству параллелограмма получаем:

$$\|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2 = \\ = 2\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right).$$

Заметим, что правая часть равенства стремится к $4d^2$ при стремлении n и m к бесконечности. Разделим обе части равенства на 4:

$$\frac{1}{4}\left(\|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right).$$

После преобразований получаем:

$$\left\|\frac{a_n + a_m}{2} - x\right\|^2 + \frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right).$$

Поскольку множество A выпукло, вектор $(a_n + a_m)/2$ принадлежит A, а значит, в силу определения нижней грани, справедлива оценка

$$\left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \geqslant d^2.$$

Тогда

$$\frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right) - \left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right) - d^2.$$

Правая часть неравенства стремится к нулю, а это значит, что $\|a_n - a_m\|$ также стремится к нулю, что и означает фундаментальность последовательности $\{a_n\}$.

Поскольку пространство полно, существует вектор $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. В силу замкнутости множества A этот вектор также лежит в A. При этом

$$\|x - a_0\| \leqslant \|x - a_n\| + \|a_n - a_0\| \to d, \quad n \to \infty,$$

то есть $\|x - a_0\| = d$, что и означает, что a_0 является элементом наилучшего приближения x в A.

Покажем, что других векторов наилучшего приближения в A нет. Пусть $a_0' \in A$ и $\|a_0' - x\| = d$. Тогда, снова используя тождество параллелограмма, получаем

$$4\left\| x - \frac{a_0 - a_0'}{2} \right\|^2 + \|a_0 - a_0'\|^2 = 2\|x - a_0\|^2 + 2\|x - a_0'\|^2 = 4d^2.$$

Первый квадрат нормы не меньше $4d^2$, откуда следует, что второй не превосходит нуля, а значит

$$\|a_0 - a_0'\|^2 = 0,$$

то есть $a_0 = a_0'$. □

Определение 5.6. Пусть $M \subset H$ — подпространство из H. Вектор $a \in M$ называется *проекцией* вектора $x \in H$ на M если $x - a \perp M$, то есть для всех $m \in M$ выполняется равенство

$$\langle x - a, m \rangle = 0.$$

Теорема 5.4. *Если $M \subset H$ — замкнутое подпространство, $x \in H \setminus M$, то тогда вектор $a \in M$ является проекцией x на M тогда и только тогда, когда a — элемент наилучшего приближения x в M.*

Доказательство.

Необходимость:

Пусть $x-a \perp M$. Тогда по теореме Пифагора для любого $m \in M$ справедливо равенство

$$\|x-m\|^2 = \|x-a\|^2 + \|a-m\|^2 .$$

Значит,

$$\inf_{m\in M} \|x-m\| = \|x-a\| ,$$

откуда и следует, что a — элемент наилучшего приближения x в M.

Достаточность:

Пусть $a \in M$ — элемент наилучшего приближения x в M, то есть

$$\inf_{m\in M} \|x-m\| = \|x-a\| = d.$$

Покажем, что для любого $m \in M$ выполнено равенство $\langle x-a, m\rangle = 0$.

Обозначим $x-a=z$ и пусть $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned}\|x-(a+tm)\|^2 &= \|z-tm\|^2 = \langle z-tm, z-tm\rangle = \\ &= \|z\|^2 - 2t\,\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle + t^2\|m\|^2 = d^2 - 2t\,\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle + t^2\|m\|^2 .\end{aligned}$$

Поскольку $a+tm \in M$, $\|x-(a+tm)\|^2 \geqslant d^2$, откуда

$$d^2 - 2t\,\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle + t^2\|m\|^2 \geqslant d^2,$$

то есть при всех $t \in \mathbb{R}$

$$t^2\|m\|^2 - 2t\,\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle \geqslant 0,$$

что возможно только в случае $\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle = 0$.

Взяв теперь вместо t величину it, $t \in \mathbb{R}$, можно аналогично показать, что $\mathfrak{Im}\langle z,m\rangle = 0$, что в совокупности даёт

$$\langle z,m\rangle = 0,$$

то есть $x-a \perp M$. □

Таким образом мы доказали, что для всякого замкнутого подпространства $M \in H$ и вектора $x \in H \setminus M$ существует проекция x на M, причём она совпадает с элементом наилучшего приближения x в M.

Определение 5.7. *Ортогональным дополнением* множества A из гильбертова пространства H называется множество

$$A^{\perp} = \{x \in H : x \perp A\}.$$

Из свойств скалярного произведения и теоремы 5.1 нетрудно видеть, что $A^{\perp}$ — замкнутое подпространство из H для любого подмножества $A \subset H$.

Теорема 5.5 (об ортогональном дополнении). *Если M — замкнутое подпространство из H, то $H = M \oplus M^{\perp}$.*

Доказательство. Покажем, что всякий вектор $x \in H$ можно представить в виде суммы векторов из M и $M^{\perp}$. Пусть a — элемент наилучшего приближения x в M. Тогда по предыдущей теореме $x - a \perp M$, то есть $x - a \in M^{\perp}$, откуда получаем

$$x = a + (x - a),$$

где $a \in M$, $x - a \in M^{\perp}$.

Единственность такого представления обеспечивается тем фактом, что

$$M \cap M^{\perp} = \{0\}. \qquad \square$$

5.3 Базис в гильбертовом пространстве

Определение 5.8. Банахово пространство X называется *сепарабельным*, если существует такое счетное множество $M \subset X$, что $\overline{M} = X$, то есть, как еще говорят, M всюду плотно в X.

Определение 5.9. Множество $M \subset H$ называется *ортонормированным*, если для всех $x, y \in M$

1. $\|x\| = 1$;
2. $x \neq y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$.

Лемма 5.1. *В сепарабельном гильбертовом пространстве всякое ортонормированное множество не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть E — ортонормированное множество в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда для любых векторов e_1, e_2 из F справедливо (проверяется непосредственно):

$$\|e_1 - e_2\| = \sqrt{2}.$$

Поскольку H сепарабельно, существует счетное множество $F = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$, такое что для любого $e \in E$ найдется $f \in F$, что $\|e - f\| < \sqrt{2}/2$. Но тогда, если $\|e_1 - f\| < \sqrt{2}/2$, то (из неравенства треугольника)

$$\|e_2 - f\| \geqslant \|e_1 - e_2\| - \|e_1 - f\| > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то есть двум разным e_1 и e_2 не может соответствовать один и тот же f с вышеуказанным свойством, то есть существует инъективное отображение E в F. Из этого следует, что множество F имеет мощность, не меньшую чем множество E, то есть E — не более, чем счетно. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ — ортогональная последовательность векторов из H. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ *сходится;*

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2$ *сходится*

Доказательство. По теореме Пифагора

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|e_k\|^2 .$$

Из этого равенства и полноты пространства утверждение теоремы следует немедленно. $\square$

Далее H — сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 5.10. Последовательность $\{e_n\}$ называется *ортонормированным базисом* (Шаудера) в H, если выполнены следующие условия:

1. Элементы последовательности $\{e_n\}$ образуют ортонормированное множество;

2. Если $a \perp e_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $a = 0$ (свойство полноты).

Определение 5.11. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H. Тогда *рядом Фурье* вектора $x \in H$ называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

Теорема 5.6. *Для любого вектора $x \in H$ ряд Фурье сходится, причем сходится к вектору x.*

Доказательство. По лемме 5.2 ряд Фурье сходится в точности тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$. По неравенству Бесселя (см. «Лекции по алгебре», параграф 17)

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 ,$$

откуда получаем, что ряд Фурье сходится (последовательность частичных сумм ограничена). Обозначим через y сумму этого ряда.

Покажем, что $x = y$:

$$\langle x-y, e_j\rangle = \langle x - \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k, e_j\rangle =$$
$$= \langle x, e_j\rangle - \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0.$$

В силу свойства полноты базиса, $x - y = 0$. Дальнейшее очевидно. □

Следствие 1 (равенство Парсеваля). *Для любого вектора $x \in H$*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 .$$

Теорема 5.7. *Для всякого бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства существует ортонормированный базис Шаудера.*

Доказательство. Пусть $\{y_n\} \subset H$ — счетное всюду плотное множество. Применяя процесс Грама-Шмидта (см. алгебру), получим не более чем счетное ортонормированное множество $M = \{e_n\}$. Линейная оболочка $\operatorname{span} M$, как нетрудно видеть, плотна в H (в силу процесса Грама-Шмидта, всякий вектор y_n выражается как конечная линейная комбинация векторов из M).

Покажем, что M обладает свойством полноты. Пусть

$$\langle a, e_k\rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим последовательность подпространств

$$E_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

В силу условия $\overline{\operatorname{span} M} = H$,

$$d(a, E_n) \to 0, \tag{5.4}$$

где $d(a, E_n) = \inf\limits_{z \in E_n} \|a - z\|$.

По теореме 5.4, проекция $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle a, e_k\rangle e_k$ вектора a на E_n есть элемент наилучшего приближения, то есть

$$d(a, E_n) = \|a - a_n\|.$$

Но $a_n = 0$ для всех n в силу условия (5.3). Поэтому

$$d(a, E_n) = \|a\|,$$

откуда получаем, что $a = 0$ в силу (5.4).

Таким образом, $\{e_n\}$ — базис в H. $\square$

Определение 5.12. Два нормированных пространства X и Y называют *изометрически изоморфными*, если существует такой биективный оператор $J \in L(X, Y)$, что для всех $x \in X$

$$\|Jx\| = \|x\|.$$

Теорема 5.8. *Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ изометрически изоморфно пространству последовательностей $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}$ в H, существующий в силу теоремы 5.7.

Определим оператор $J\colon H \to l^2$ по правилу

$$Jx = (\langle x, e_n\rangle)_{n=1}^{\infty},$$

то есть J ставит x в соответствие последовательность его координат

$\langle x, e_n \rangle$.

Инъективность следует из теоремы 5.6, сюръективность из леммы 5.2. Изометричность следует из равенства Парсеваля. □

Следствие 1 (теорема Фишера-Рисса). *Все сепарабельные гильбертовы пространства изометрически изоморфны между собой.*

5.4 Теорема Рисса об общем виде линейного функционала

Теорема 5.9 (Рисса о представлении). *Каждый линейный ограниченный функционал $f \in H^*$ допускает единственное представление вида*

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \tag{5.5}$$

где $a \in H$, причем

$$\|f\| = \|a\| .$$

Доказательство.

1. Если $a \in H$ — фиксированный вектор, то (5.5), очевидно, задаёт линейный функционал. Определим его норму:

   $$|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leqslant \|a\| \, \|x\| \quad x \in H;$$

   $$\|f\| \leqslant \|a\| ;$$

   $$\left| f(\frac{a}{\|a\|}) \right| = \langle a, \frac{a}{\|a\|} \rangle = \|a\| .$$

   Таким образом

   $$\|f\| = \|a\|$$

2. Пусть $f \in H^*$. Будем считать, что $f \neq 0$, потому что в противном случае достаточно взять $a = 0$. Тогда $M = \operatorname{Ker} f \neq H$.

   Возьмем ненулевой вектор $b \in \operatorname{Ker} f$. Очевидно, что (проверяется непосредственно)

   $$f(x)b - f(b)x \in \operatorname{Ker} f.$$

   Тогда $f(x)b - f(b)x \perp b$. В таком случае

   $$\langle f(x)b - f(b)x, b \rangle = f(x)\langle b, b \rangle - f(b)\langle x, b \rangle = 0,$$

откуда получаем

$$f(x) = \frac{f(b)\langle x, b\rangle}{\|b\|^2} = \langle x, \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b\rangle = \langle x, a\rangle,$$

где $a = \dfrac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b$. $\square$

6 Теорема Хана-Банаха

Далее X — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 6.1. Отображение $p\colon X \to \mathbb{R}$ называется *полунормой*, если для всех $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{K}$

1. $p(x) \geqslant 0$;
2. $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$;
3. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Очевидно, что всякая полунорма является нормой.

Пример 6.1. Отображение $p\colon C[a, b] \to \mathbb{R}$, $p(x) = \max\limits_{t\in[a,c]} |x(t)|$, где $c < b$, является полунормой, но не является нормой. $\diamondsuit$

Определение 6.2. *Носителем* функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется множество

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}},$$

где черта, как обычно, означает замыкание.

Определение 6.3. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если её носитель — компактное множество в $\mathbb{R}$.

Пример 6.2. Множество финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(\mathbb{R})$ можно наделить семейством полунорм по формуле

$$p_{k,a,b} = \max_{t\in[a,b]} \left| x^{(k)}(t) \right|, \quad k \geqslant 0.$$

$\diamondsuit$

Определение 6.4. Пусть $M \subset X$ — линейное подпространство, $f_0\colon M \to \mathbb{K}$ — линейный функционал. Будем говорить, что линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{K}$ является *продолжением* f_0 на X если

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in M.$$

Теорема 6.1 (Хана-Банаха).
Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, p — полунорма на X, $M \subset X$ — подпространство из X и $f_0 \colon M \to \mathbb{K}$ — линейный функционал со свойством

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \quad x \in M.$$

Тогда существует такой линейный функционал $f \colon X \to \mathbb{K}$, что

1. *f — продолжение f_0 на X;*

2. *$|f(x)| \leqslant p(x)$, $x \in X$.*

Следствие 1. *Пусть X — линейное нормированное пространство. Тогда для всякого $x_0 \neq 0$ из X существует такой линейный ограниченный функционал $f \in X^*$, что*

1. *$|f(x_0)| = \|x_0\| \neq 0$;*

2. *$\|f\| = 1$.*

Доказательство. Пусть $M = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}$.
Функционал $f_0 \in M^*$ определим по правилу

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|,$$

а в качестве полунормы p возьмём норму:

$$p(x) = \|x\|, \quad x \in X.$$

По теореме Хана-Банаха существует продолжение f_0 на X, причем

1. $f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\| \neq 0$;

2. $|f(x)| \leqslant \|x\|$.

В таком случае получаем, что $\|f\| = 1$. □

Из этого следствия ясно видно, что если $X \neq \{0\}$, то и $X^* \neq \{0\}$.
Рассмотрим пространство $(X^*)^*$, которое далее будем обозначать X^{**}. Зафиксируем некоторый $x_0 \in X$ и определим функционал $\xi_{x_0} \in X^{**}$ по правилу

$$\xi_{x_0}(f) = f(x_0), \quad f \in X^*. \tag{6.1}$$

Из следствия 1 получаем, что

$$\|\xi_{x_0}\| = \|x_0\|.$$

Таким образом мы построили инъективное (проверьте!) отображение $\xi_\bullet \colon X \to X^{**}$. Такое отображение называется *каноническим вложением* пространства X в X^{**}. Заметим, что это линейный ограниченный оператор, сохраняющий норму.

Определение 6.5. Банахово пространство X называется *рефлексивным*, если каждый функционал из X^{**} представим в виде (6.1). Иначе говоря, каноническое вложение осуществляет изометрический изоморфизм между X и X^{**}.

Примерами рефлексивных пространств являются лебеговы пространства $L^p[a,b]$, ℓ^p, где $p \in [1,\infty)$. С другой стороны, пространства ℓ^∞ и $C[a,b]$ не рефлексивны.

7 Элементы нелинейного анализа

7.1 Производная отображения

Всюду далее X, Y — банаховы пространства над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, буквами U и V обозначаются открытые множества в X и Y.

Определение 7.1. Пусть $f \colon U \subset X \to Y$, $g \colon U \subset X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$. Говорят, что

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to x_0,$$

если справедливо равенство

$$\|f(x)\| = \varepsilon(x) g(x),$$

где $\varepsilon \colon U \subset X \to \mathbb{R}$, $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Определение 7.2. Пусть $f, g \colon U \subset X \to Y$ — отображения, определенные на открытом множестве U из пространства X. Отображение g называется *касательным* к f в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = g(x) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{при } x \to x_0,$$

то есть

$$\frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} \to 0 \quad \text{при } x \to x_0,$$

Легко видеть, что «f касательно g» есть отношение эквивалентности.

Определение 7.3. Отображение $f\colon U \subset X \to Y$ называется *дифференцируемым* в точке x_0, если существует такой оператор $A \in L(X,Y)$, что f касательно g в точке x_0, где g определено по формуле

$$g(x) = f(x_0) + A(x - x_0), \quad x \in U.$$

Иначе говоря, f дифференцируемо в точке x_0 если

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{при } x \to x_0.$$

Если f дифференцируемо в каждой точке U, то f называют *дифференцируемым.*

Оператор A называется *производной* отображения f в точке x_0. При этом используется привычное обозначение:

$$f'(x_0) = A.$$

Также пишут $Df(x_0), D_{x_0}f$ и т. д.

Теорема 7.1. *Определение производной корректно: линейный оператор A определён однозначно для каждой точки x_0.*

Доказательство. Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо в точке x_0. Тогда f касательно g в точке x_0, где $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$. Пусть теперь $g_0(x) = f(x_0) + B(x - x_0)$, $B \in L(X,Y)$, также касательно к f в точке x_0. Тогда g_0 касательно g в точке x_0:

$$g(x) - g_0(x) = (A - B)(x - x_0),$$

причем

$$g(x) - g_0(x) = o(\|x - x_0\|).$$

Примем обозначение $h = x - x_0$. Тогда

$$(A - B)h = o(\|h\|).$$

Раскрывая определение символа «o» получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что если $\|h\| < \delta$, то

$$\left\|(A - B)\frac{h}{\|h\|}\right\| < \varepsilon, \quad \|h\| < \delta.$$

Тогда

$$\sup_{\|h\|<\delta}\left\|(A - B)\frac{h}{\|h\|}\right\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|(A - B)x\| = \|A - B\| < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε получаем, что $A = B$. $\square$

Теорема 7.2. *Пусть $f, g\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда $\alpha f + \beta g$ также дифференцируемо в точке x_0, причем*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

Доказательство. Отображения f, g дифференцируемы в точке x_0, значит

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|). \end{aligned}$$

Домножая эти равенства на α и β соответственно и сложив, получаем, в силу свойств символа «o»:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(x_0) + \\ + (\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0))(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \end{aligned}$$

то есть, в силу корректности определения производной,

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \qquad \square$$

Следующие две теоремы предлагаются в качестве упражнения.

Теорема 7.3. *Если $f\colon X \to Y$ — постоянное отображение, то f дифференцируемо в любой точке пространства X, причем $f'(x) = \mathbf{0}$ в любой точке $x \in X$.*

Теорема 7.4. *Если $A \in L(X, Y)$, то отображение A дифференцируемо в любой точке $x \in X$ и $A'(x) = A$.*

Теорема 7.5. *Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо в точке $x_0 \in U$, а $g\colon V \subset Y \to Z$ дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$ и $f(U) \subset V$. Тогда отображение $h = g \circ f\colon U \subset X \to Z$ дифференцируемо в точке x_0 и*

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \in L(X, Z).$$

Доказательство. Рассмотрим приращение отображения h:

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = \\ = g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ = g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ = g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \end{aligned}$$

$$+ g'(f(x_0))o(\|x-x_0\|) + o(\|f(x)-f(x_0)\|)$$

Покажем, что

$$g'(f(x_0))o(\|x-x_0\|) + o(\|f(x)-f(x_0)\|) = o(\|x-x_0\|)$$

при $x \to x_0$. Введем для краткости замену $h = x - x_0$. Тогда, с учетом того, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)\|}{\|h\|} \leqslant f'(x_0),$$

получаем

$$\frac{\|g'(f(x_0))o(\|h\|) + o(\|f(x_0+h)-f(x_0)\|)\|}{\|h\|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|g'(f(x_0))\|\,\|o(\|h\|)\| + \|o(\|f(x_0+h)-f(x_0)\|)\|}{\|h\|} =$$
$$= \frac{\|g'(f(x_0))\|\,\varepsilon_1(h)\,\|h\| + \varepsilon_2(h)\,\|f(x_0+h)-f(x_0)\|}{\|h\|} =$$
$$= \|g'(f(x_0))\|\,\varepsilon_1(h) + \frac{\varepsilon_2(h)\,\|f(x_0+h)-f(x_0)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Таким образом

$$h(x) - h(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|) \text{ при } x \to x_0.$$

□

См. «Лекции по алгебре» для определения полилинейного (билинейного) оператора.

Определение 7.4. Билинейный оператор $A\colon X \times X \to Y$ называется *ограниченным*, если

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ \|x_2\|\leqslant 1} \|A(x_1,x_2)\| < \infty.$$

Символом $B_2(X,Y)$ будем обозначать нормированное пространство билинейных ограниченных операторов, действующих из $X \times X$ в Y.

Аналогично определяется полилинейный ограниченный оператор. Пространство n-линейных ограниченных операторов обозначается $B_n(X,Y)$.

Теорема 7.6. *Пространство операторов $L(X,L(X,Y))$ и пространство билинейных операторов $B_2(X,Y)$ изометрически изо-*

морфны.

Доказательство. Пусть отображение

$$J\colon L(X, L(X,Y)) \to B_2(X,Y)$$

действует по правилу

$$(JA)(x_1, x_2) = (Ax_1)x_2.$$

Очевидно, это линейный оператор между $L(X, L(X,Y))$ и $B_2(X,Y)$. Биективность проверяется непосредственно. Проверим изометричность:

$$\begin{aligned}\|JA\|_{B_2(X,Y)} &= \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ \|x_2\|\leqslant 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y = \\ &= \sup_{\|x_1\|\leqslant 1} \Big(\sup_{\|x_2\|\leqslant 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y \Big) = \sup_{\|x_1\|\leqslant 1} \left(\|Ax_1\|_{L(X,Y)} \right) = \\ &= \|A\|_{L(X,L(X,Y))}. \quad \square\end{aligned}$$

Аналогичный результат справедлив для полилинейных операторов:

Теорема 7.7.

Пространства $L(\underbrace{X, L(X, \ldots, L(X}_{n\ \text{раз}}, Y)))$ *и* $B_n(X,Y)$ *изометрически изоморфны.*

Из этих теорем, в частности, следует, что $B_n(X,Y)$ — банахово пространство, если Y банахово.

Определение 7.5. Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо в каждой точке U и отображение $f'\colon U \subset X \to L(X,Y)$ дифференцируемо в точке x_0. Тогда *второй производной* отображения f в точке x_0 называется производная отображения f' в точке x_0.

Таким образом, вторая производная отображения f в точке x_0 есть линейный оператор $f''(x_0) \in L(X, L(X,Y))$, или, в силу предыдущей теоремы, вторую производную можно считать билинейным оператором из $B_2(X,Y)$.

Аналогично определяется n-ая производная отображения f в точке x_0. Тогда $f^{(n)}(x_0) \in B_n(X,Y)$.

Определение 7.6. Отображение $f\colon U \subset X \to Y$ называется *n раз непрерывно дифференцируемым*, если для каждого $k = \overline{1,n}$ существует k-ая производная $f^{(k)}(x)$, определенная для всех $x \in U$ и при этом $f^{(n)}\colon U \subset X \to B_n(X,Y)$ — непрерывное отображение.

Пусть $A \in B_n(X,Y)$. Введём следующее обозначение:

$$Ah^n := A(h,\dots,h).$$

Договоримся также, что $f^{(0)}(x) = f(x)$ для всех $x \in U$, и $h^0 = 1 \in \mathbb{K}$.

Теорема 7.8 (Тейлора). *Пусть отображение $f\colon U \subset X \to Y$ n раз непрерывно дифференцируемо. Тогда для любой точки $x_0 \in U$ и любого вектора h такого, что $x_0 + h \in U$, имеет место формула (Тейлора):*

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + o(\|h\|^n) \text{ при } h \to 0.$$

7.2 Задачи на экстремум

Определение 7.7. Точка $x_0 \in U$ называется *точкой локального минимума (максимума)* функции $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$, если существует шар $B(x_0,\varepsilon) \subset U$ такой, что $f(x_0) \leqslant f(x)$ $(f(x_0) \geqslant f(x))$ для всех $x \in B(x_0,\varepsilon)$. Если же выполняется строгое неравенство, то точка x_0 называется *точкой строгого локального минимума (максимума)*.

Точка, являющаяся точкой (строгого) локального минимума либо максимума, также называется *точкой (строгого) локального экстремума*.

Теорема 7.9 (Ферма). *Пусть $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке x_0 функция и $x_0 \in U$ — точка локального экстремума. Тогда $f'(x_0) = 0$, то есть $f'(x_0) \in X^*$ — нулевой функционал.*

Доказательство. Пусть, для определенности, x_0 — точка локального минимума (случай локального максимума рассматривается аналогично), и для всех $h \in X$ таких, что $\|h\| < \varepsilon$ выполняется условие $f(x_0+h) \geqslant f(x_0)$.

Предположим противное: пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда найдется такой вектор h_0, $\|h_0\| < \varepsilon$, что $\alpha_0 = f'(x_0)h_0 > 0$. Пусть $t \in (-1,0) \subset \mathbb{R}$. Тогда, разумеется, $\|th_0\| < \varepsilon$ и $f'(x_0)(th_0) < 0$. В силу дифференцируемости функции в точке x_0 справедливо равенство

$$f(x_0+th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t).$$

Тогда

$$0 \leqslant f(x_0 + th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t) = t\left(\alpha_0 + \frac{o(t)}{t}\right).$$

Но, поскольку $\alpha_0 > 0$, при достаточно малых $t < 0$ справедливо

$$\alpha_0 + \frac{o(t)}{t} > 0,$$

откуда следует, что в правой части равенства стоит строго отрицательная величина. Получили противоречие. □

Определение 7.8. Билинейная форма $\xi\colon X^2 \to \mathbb{R}$ называется равномерно положительной (равномерно отрицательной), если существует такая константа $c > 0$, что для всех $h \in X$

$$\xi(h,h) \geqslant c\left\|h\right\|^2$$

$$(\xi(h,h) \leqslant -c\left\|h\right\|^2).$$

Теорема 7.10 (достаточное условие экстремума). *Пусть $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция, $f'(x_0) = 0$ и пусть $f''(x_0)$ — равномерно отрицательная (равномерно положительная) билинейная форма. Тогда x_0 — точка строгого локального максимума (минимума).*

Доказательство. Пусть, для определённости, $f''(x_0)$ равномерно отрицательна, то есть существует такая константа $\alpha > 0$, что

$$f''(x_0)h^2 \leqslant -\alpha\left\|h^2\right\|.$$

Разложим функцию по формуле Тейлора в окрестности x_0:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\left\|h\right\|^2).$$

Поскольку $f'(x_0) = 0$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\left\|h\right\|^2) \leqslant -\frac{\alpha\left\|h\right\|^2}{2} + o(\left\|h\right\|^2).$$

Найдется такое $\delta > 0$, что при $\|h\| < \delta$ выполняется неравенство

$o(\|h\|^2) \leqslant \frac{\alpha}{4}\|h\|^2$, поэтому

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leqslant -\frac{\alpha\|h\|^2}{2} + o(\|h\|^2) \leqslant -\frac{\alpha\|h\|^2}{4} < 0$$

при $\|h\| < \delta$. А это в точности и означает, что x_0 — точка строгого локального максимума. Аналогично рассматривается случай локального минимума. □

8 Элементы теории функции комплексной переменной

Более подробную информацию можно найти, например, в книге Шабата Б. В. «Введение в комплексный анализ».

Рассмотрим функцию $F\colon E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Её можно представить в виде

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)),$$

где $P, Q\colon E \to \mathbb{R}$. Более того, эту функцию можно рассматривать как функцию $F\colon E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y).$$

Пусть теперь F дифференцируема в точке $x_0 \in E$ как отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Исследуем, при каких условиях эта функция будет дифференцируема как отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Заметим, что существуют функции, для которых это не выполняется. Примером может служить функция

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \mathfrak{Re}\, z.$$

Если рассматривать эту функцию как отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, то легко видеть, что это линейный оператор:

$$f(x_1, x_2) = x_1.$$

То есть f дифференцируемо в каждой точке из $\mathbb{R}^2$. Однако если мы рассмотрим предел

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathfrak{Re}\, z}{z} \tag{8.1}$$

при стремлении z к нулю вдоль мнимой оси и вдоль действительной оси

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathfrak{Re}\, z=0}} \frac{\mathfrak{Re}\, z}{z} = 0;$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathfrak{Im}\, z=0}} \frac{\mathfrak{Re}\, z}{z} = \frac{z}{z} = 1.$$

Таким образом предел (8.1) не существует, то есть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ не дифференцируема.

Как известно, если отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке $x_0 = (x, y)$, то у него существуют частные производные первого порядка, и матрица Якоби в точке x_0 есть матрица оператора $f'(x_0)$ в стандартном базисе.

Пусть $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

$$f'(x_0) \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Следующее утверждение вытекает из представления комплексных чисел в виде матрицы и утверждения, что все линейные операторы в $\mathbb{C}$ действуют по правилу $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Лемма 8.1. *Для того чтобы матрица* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *с вещественными коэффициентами задавала линейный оператор в комплексном линейном пространстве* $\mathbb{C}$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Непосредственно из леммы получаем

Теорема 8.1 (условия Коши-Римана). *Дифференцируемое в точке* $x_0 = (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ *отображение* $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ *дифференцируемо как отображение* $U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *в том и только в том случае, если выполняются следующие условия (условия Коши-Римана):*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Определение 8.1. Функция $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *ана-*

литической (чаще говорят *голоморфной*) на открытом множестве U, если она дифференцируема (как функция в комплексном пространстве) в каждой точке множества U.

Определение 8.2. *Путём* в $U \subset \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \to U$. Если это отображение является кусочно непрерывно дифференцируемым, то его называют *кусочно гладким путём.*

Определение 8.3. *Интегралом* от функции $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *вдоль кусочно гладкого пути* $\gamma\colon [a,b] \to U$ называется

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Если $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, то интеграл можно записать в виде

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (u(x,y) + iv(x,y))\,\mathrm{d}(x+iy) =$$
$$= \int_\gamma u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + i\int_\gamma v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

где в правой части стоят известные из курса анализа криволинейные интегралы второго рода.

Теорема 8.2 (Коши). *Если функция f является аналитической в односвязной области $U \subset \mathbb{C}$, то ее интеграл вдоль любого кусочно гладкого замкнутого пути $\gamma\colon [a,b] \to U$ равен нулю:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Доказательство. Вспомним известную из анализа формулу Грина:

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где D — область, ограниченная путем γ. Тогда, применяя формулу Грина и условия Коши-Римана, получаем:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + i\int_\gamma v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0. \qquad \square$$

Теорема 8.3 (интегральная формула Коши).

Пусть $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— аналитическая функция, определенная в односвязной области* U*. Тогда для всех* $z \in U$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\,\mathrm{d}\lambda,$$

где γ *— граница области* U*, причем направление обхода контура положительно.*

Из формулы Коши вытекает следующая теорема.

Теорема 8.4. *Если* $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— аналитическая функция и* $z_0 \in U$*, то в любом круге* $D = \{|z - z_0| < R\} \subset U$ *эту функцию можно представить в виде сходящегося степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z_0)^{n+1}} d\lambda, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,$$

а контур $\gamma\colon [a, b] \to D$ *есть круг радиуса* $r < R$ *с центром в точке* z_0*.*

Эта теорема влечет за собой, что всякая дифференцируемая функция комплексной переменной дифференцируема бесконечное ч‘исло раз, причем, поскольку из теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов следует, что

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

получаем

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Справедлива также и обратная теорема.

Теорема 8.5. *Если* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

сходится при $|z - z_0| < R$*, то функция* f *является аналитической в круге* $|z - z_0| < R$*.*

Теорема 8.6 (единственности). *Если* $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *анали-*

тична на U *и*

$$f(z_n) = 0,$$

где $\{z_n\}$ *— сходящаяся последовательность, то для всех* $z \in U$

$$f(z) = 0.$$

Определение 8.4. Функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *целой*, если она является аналитической на всей комплексной плоскости.

Всякую целую функцию можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Теорема 8.7 (Лиувилля). *Если* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *— целая ограниченная функция, то она постоянна, т.е.* $f(z) = c \in \mathbb{C}$ *для всех* $z \in \mathbb{C}$.

Результаты данного параграфа легко обобщаются на функции комплексной переменной, принимающие значение в некоторой банаховой алгебре.

9 Спектральная теория линейных операторов

Определение обратного оператора и другие алгебраические аспекты теории можно найти в «Лекциях по алгебре».

Далее всюду X — комплексное банахово пространство.

9.1 Обратные операторы и их свойства

Лемма 9.1. *Если* $A \in L(X)$ *и* $\|A\| < 1$, *то оператор* $I - A$ *обратим, а обратный задается формулой*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

причем ряд сходится абсолютно и

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Доказательство. Покажем, что ряд сходится абсолютно. Используем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Итак, ряд сходится абсолютно, значит он сходится. Отсюда же следует и оценка нормы. Обозначим сумму ряда через $B \in L(X)$. Покажем, что B — обратный к $I - A$.

$$(I - A)B = (I - A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \lim_{m\to\infty}(I - A)\sum_{n=0}^{m} A^n =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(A^n - A^{n+1}) = \lim_{m\to\infty}(I - A^{m+1}) = I,$$

где последнее равенство справедливо в силу условия $\|A\| < 1$.

Аналогично доказывается, что $B(I - A) = I$. □

Теорема 9.1. *Пусть $A, B \in L(X)$, A обратим, $\|B\| \left\|A^{-1}\right\| < 1$. Тогда $A - B$ обратим и*

$$(A - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(A^{-1}B)^n A^{-1},$$

и справедлива оценка

$$\left\|(A - B)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1 - \|B\| \left\|A^{-1}\right\|}.$$

Доказательство. Предствим оператор $A - B$ в виде $A - B = A(I - A^{-1}B)$. Оператор A обратим, оператор $I - A^{-1}B$ обратим в силу леммы. Значит и $A - B$ обратим. Остальное прямо следует из леммы, если её применить к оператору $I - A^{-1}B$. □

Далее $A\colon D(A) \subset X \to X$ — линейный оператор, определенный на некотором подпространстве $D(A)$ пространства X.

Определение 9.1. Оператор $A\colon D(A) \subset X \to X$ называется *замкнутым*, если его график

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$$

является замкнутым подмножеством в пространстве $X \times X$, наделённом нормой

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}.$$

Иначе говоря, оператор замкнут, если для всякой сходящейся последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$ такой, что $Ax_n \to y \in X$, предел x лежит в $D(A)$ и $y = Ax$.

Пример 9.1. Оператор $A\colon D(A) \subset C[a,b] \to C[a,b]$, $D(A) = C^1[a,b]$, действующий по правилу $Ax = x'$, является замкнутым. Это следует из теоремы о почленном дифференцировании функциональных последовательностей, известной из курса математического анализа. $\diamondsuit$

Теорема 9.2. *Всякий ограниченный оператор $A \in L(X)$ замкнут.*

Доказательство. Пусть $A \in L(X)$, $x_n \to x_0$, $Ax_n \to y_0$. В силу непрерывности A, $Ax_n \to Ax_0$, значит, в силу единственности предела последовательности, $Ax_0 = y_0$. $\square$

Теорема 9.3 (Банаха о замкнутом графике).
Пусть $A\colon X \to X$ — замкнутый линейный оператор, определенный на всем банаховом пространстве X. Тогда оператор A ограничен.

Пусть $A \in L(X)$. Рассмотрим два условия:

1. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ — оператор A инъективен.

2. $\operatorname{Im} A = X$ — оператор A сюръективен.

В случае, когда X — конечномерное пространство, как известно из алгебры, эти два условия эквивалентны. Однако в случае бесконечномерных пространств это не так.

Если для оператора из $A \in L(X)$ выполняются условия (1, 2), он является биективным, а значит существует обратное отображение A^{-1}, которое, как известно из алгебры, также является линейным оператором. Будет ли этот оператор ограниченным? Оказывается, если пространство X банахово, это всегда так.

Теорема 9.4 (Банаха об обратном операторе). *Пусть линейный оператор $A \in L(X)$, действующий в банаховом пространстве X, биективен, т.е. выполнены условия (1) и (2). Тогда A^{-1} ограничен.*

Доказательство. Поскольку A ограничен, он замкнут. Покажем, что A^{-1} также замкнут.

$$\Gamma(A^{-1}) = \left\{(x, A^{-1}x) : x \in X\right\} = \{(Ax, x) : x \in X\}.$$

Пусть $Ax_n \to y_0$, а $x_n \to x_0$. Поскольку A замкнут, $y_0 = Ax_0$, и $(y_0, x_0) = (Ax_0, x_0) \in \Gamma(A^{-1})$, то есть множество $\Gamma(A^{-1})$ замкнуто. Значит, оператор A^{-1} замкнут, а по теореме о замкнутом графике он и ограничен. □

Если $A\colon D(A) \subset X \to X$ определен не на всем пространстве, то для него также можно рассматривать условия (1, 2). Тогда будем называть обратным к оператору A оператор $A^{-1}\colon X \to X$, который удовлетворяет естественным условиям

$$AA^{-1} = I_X$$

и

$$A^{-1}Ax = x$$

для всех $x \in D(A)$. Обратим внимание, что мы считаем A^{-1} действующим из X *во всё пространство* X, а не в $D(A)$.

Теорема 9.5 (Банаха об обратном операторе).

Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$ — замкнутый биективный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X. Тогда $A^{-1}\colon X \to X$ — ограниченный оператор.

Доказательство аналогично предыдущему.

9.2 Спектр оператора

Лемма 9.2. *Если $A\colon D(A) \subset X \to X$ замкнут, то и $A - \lambda I$ замкнут, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $I\colon D(A) \subset X \to X$ — тождественный оператор.*

Доказательство. Пусть A замкнут, $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to x$, $(A - \lambda I)x_n \to y$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} (Ax_n - \lambda x_n + \lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} (A - \lambda I)x_n + \\ + \lambda \lim_{n\to\infty} x_n = y + \lambda x.$$

Тогда, в силу замкнутости A,

$$Ax = \lambda x + y \Rightarrow (A - \lambda I)x = y,$$

то есть $A - \lambda I$ также замкнут. □

Определение 9.2. Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$ — замкнутый оператор. Будем называть число $\lambda \in \mathbb{C}$ *точкой спектра* оператора A, если оператор $A - \lambda I\colon D(A) \subset X \to X$ необратим, то есть выполнено хотя бы одно из условий

1. $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ — оператор не инъективен.

2. $\operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq X$ — оператор не сюръективен.

Если же число $\lambda \in \mathbb{C}$ не является точкой спектра, то его называют *регулярной точкой* оператора A.

Заметим, что по теореме Банаха об обратном операторе, если число λ — регулярная точка A, то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен.

Определение 9.3. Множество $\sigma(A)$ точек спектра оператора A называется *спектром* оператора A.

Определение 9.4. Множество $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A.

Спектр оператора принято разбивать на три взаимно непересекающиеся части:

1. Дискретный спектр $\sigma_d(A)$ — множество собственных значений оператора A, то есть такие $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$.

2. Непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ — множество таких $\lambda \in \mathbb{C}$, не являющихся собственными значениями, что $\operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq X$, но $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} = X$.

3. Остаточный спектр $\sigma_r(A)$ — множество точек спектра, не вошедших ни в дискретный спектр, ни в непрерывный спектр.

Ясно, что $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

Определение 9.5. Отображение $\mathrm{R}(\bullet, A)\colon \rho(A) \to L(X)$, действующее по правилу

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

называется *резольвентой* оператора A.

Теорема 9.6. *Для всякого замкнутого оператора A множество $\rho(A)$ открыто. Резольвента $\mathrm{R}(\bullet, A)\colon \rho(A) \to L(X)$ — аналитическая функция на $\rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ таково, что

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|\mathrm{R}(\lambda_0, A)\|}.$$

Тогда представим оператор $A - \lambda I$ в следующем виде:

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I + \lambda_0 I - \lambda I = (A - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A)).$$

Оператор $I - (\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A)$ обратим, поскольку (см. лемму 9.1)

$$\|(\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A))\| < 1.$$

Так как $A - \lambda_0 I$ также обратим, то и $A - \lambda I$ обратим как произведение обратимых операторов. Отсюда следует, что резольвентное множество открыто: вместе с каждой точкой λ_0 в $\rho(A)$ входит открытый круг радиусом меньше $\|\mathrm{R}(\lambda_0, A)\|^{-1}$ с центром в точке λ_0.

Оператор, обратный к $(I - (\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A))$ представляется в виде

$$(I - (\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n\,\mathrm{R}(\lambda_0, A)^n.$$

Тогда

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1} = (I - (\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A))^{-1}(A - \lambda_0 I)^{-1} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n\,\mathrm{R}(\lambda_0, A)^{n+1}.$$

Таким образом мы получили, что $\mathrm{R}(\lambda, A)$ в некоторой окрестности каждой точки $\lambda_0 \in \rho(A)$ представляется в виде суммы степенного ряда с коэффициентами $c_n = \mathrm{R}(\lambda_0, A)^{n+1}$. Значит, по теореме 8.5, функция $\mathrm{R}(\lambda, A)$ аналитична на $\rho(A)$. □

Следствие 1. *Для всякого замкнутого оператора A множество $\sigma(A)$ замкнуто.*

Теорема 9.7 (тождество Гильберта). *Для любого линейного замкнутого оператора A и любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\mathrm{R}(\lambda, A) - \mathrm{R}(\mu, A) = (\lambda - \mu)\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{R}(\mu, A).$$

Доказательство. Применяя к правой и левой частям равенства $A-\lambda I$ справа и $A-\mu I$ слева, получим одинаковые выражения:

$$(A-\lambda I)(\mathrm{R}(\lambda,A)-\mathrm{R}(\mu,A))(A-\mu I)=A-\mu I-A+\lambda I=(\lambda-\mu)I;$$

$$(\lambda-\mu)(A-\lambda I)\,\mathrm{R}(\lambda,A)\,\mathrm{R}(\mu,A)(A-\mu I)=(\lambda-\mu)I,$$

то есть

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)(\mathrm{R}(\lambda,A)-\mathrm{R}(\mu,A))(A-\mu I)&=\\ =(\lambda-\mu)(A-\lambda I)\,\mathrm{R}(\lambda,A)\,\mathrm{R}(\mu,A)(A-\mu I).\end{aligned}$$

Из биективности $A-\lambda I$ и $A-\mu I$ следует, что на них можно «сократить» справа и слева. Тогда получаем требуемое равенство. □

Следствие 1. *Операторы* $\mathrm{R}(\lambda,A)$ *и* $\mathrm{R}(\mu,A)$ *перестановочны.*

Теорема 9.8 (о спектре ограниченного оператора).
Пусть $A\in L(X)$ *— ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве* X*. Тогда его спектр* $\sigma(A)$ *есть непустое компактное множество в* $\mathbb{C}$*.*

Доказательство. Сначала покажем, что $\sigma(A)$ — компактное множество. Как известно из анализа, множество в евклидовом пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Замкнутость спектра следует из предыдущей теоремы. Докажем ограниченность.

Пусть $|\lambda|>\|A\|\geqslant 0$. Тогда

$$A-\lambda I=-\lambda(I-\lambda^{-1}A).$$

Оператор $(I-\lambda^{-1}A)$ обратим, поскольку

$$\left\|\lambda^{-1}A\right\|=\frac{\|A\|}{|\lambda|}<1.$$

Тогда и $A-\lambda I$ обратим. Отсюда получаем, что спектр оператора A лежит внутри круга радиуса $\|A\|$ и с центром в нуле, то есть $\sigma(A)$ — ограниченное множество и, в силу замкнутости, компактное.

Покажем, что $\sigma(A)$ непустое множество. Предположим противное: пусть $\rho(A)=\mathbb{C}$ и $|\lambda|>\|A\|$. Тогда при таких λ резольвента представляется в виде

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

При этом для нормы резольвенты справедлива оценка

$$\|\mathrm{R}(\lambda, A)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \dfrac{\|A\|}{|\lambda|}} =$$

$$= \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

То есть при $\lambda \to \infty$ норма $\|\mathrm{R}(\lambda, A)\|$ стремится к нулю.

При этом, по теореме 9.6, резольвента является аналитической функцией на $\rho(A) = \mathbb{C}$, то есть в нашем случае резольвента оказывается целой ограниченной функцией (ограниченность следует из стремления к нулю на бесконечности и непрерывности). Поэтому, по теореме Лиувилля, $\mathrm{R}(\lambda, A) = \mathbf{0} \in L(X)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, что невозможно. Получили противоречие. Значит спектр оператора A непуст. □

Определение 9.6. *Спектральным радиусом* линейного ограниченного оператора $A \in L(X)$ называется величина

$$r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Спектральный радиус корректно определен в виду компактности и непустоты спектра A. Из доказательства теоремы 9.8 видно, что

$$r(A) \leqslant \|A\|,$$

поскольку, если $|\lambda| > \|A\|$, то оператор $A - \lambda I$ обратим.

Теорема 9.9 (формула Бёрлинга-Гельфанда). *Пусть $A \in L(X)$. Тогда для спектрального радиуса оператора A справедлива формула*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

10 Элементы функционального исчисления операторов

10.1 Операторное исчисление

Далее X — комплексное банахово пространство. Обозначим символом $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ алгебру целых функций $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Пусть $A \in L(X)$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, а f разлагается в ряд

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n.$$

Определим отображение $\Phi_A\colon \mathcal{F}(\mathbb{C}) \to L(X)$ следующим образом:

$$\Phi_A(f) = f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

Можно показать, что ряд сходится, а отображение Φ_A является гомоморфизмом алгебр.

Отображение Φ_A называется *целым исчислением* оператора A.

Пример 10.1. Экспонентой оператора $A \in L(X)$ назовём оператор e^A, определяемый формулой

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

$\diamondsuit$

Рассмотрим более общий вид функционального исчисления операторов.

Обозначим символом $\mathcal{F}(A)$ множество функций, аналитических на некотором открытом множестве, содержащем спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in L(X)$. Это множество является алгеброй с поточечными операциями сложения и умножения: если $f\colon U_1 \supset \sigma(A) \to \mathbb{C}$, $g\colon U_2 \supset \sigma(A) \to \mathbb{C}$, то $f+g$ и fg действуют из $U_1 \cap U_2 \supset \sigma(A)$ в $\mathbb{C}$ по правилу

$$\begin{aligned} (f+g)(z) &= f(z) + g(z), \\ (fg)(z) &= f(z)g(z) \end{aligned} \qquad z \in U_1 \cap U_2.$$

Вспомним интегральную формулу Коши:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Идея *исчисления Данфорда* (еще говорят *голоморфного функционального исчисления*, *операторного исчисления*) состоит в том, чтобы использовать интегральную формулу Коши для определения значения функции от оператора.

Пусть $A \in L(X)$. Определим отображение $\Psi_A \colon \mathcal{F}(A) \to L(X)$ по правилу

$$\Psi_A(f) = f(A) := -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda,$$

где контур γ — граница открытого множества $V \supset \sigma(A)$, лежащего в множестве аналитичности функции f.

Отображение Ψ_A называется *исчислением Данфорда* оператора A или просто *операторным исчислением.* Следующая теорема обосновывает корректность такого названия.

Теорема 10.1.

Отображение Ψ_A является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{F}(A)$ в алгебру $L(X)$, то есть для всех $f, g \in \mathcal{F}(A)$ справедливо

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A),$$

$$(fg)(A) = f(A)g(A).$$

Кроме того, если f — целая функция, то

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n,$$

то есть целое исчисление и исчисление Данфорда совпадают для целых функций.

Доказательство. Первое свойство следует из линейности интеграла по контуру. Докажем второе свойство. Пусть U_1 и U_2 — открытые множества, содержащие спектр, причем такие, что замыкание U_1 лежит в U_2, а замыкание U_2 лежит в общем множестве аналитичности функций f и g. Символами γ_1 и γ_2 обозначим контуры, обходящие границы U_1 и U_2 соответственно в положительном направлении обхода (так, чтобы внутренность множества оставалась слева). Тогда, применяя интегральную формулу Коши и тождество Гильберта, получим

$$f(A)g(A) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} f(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda \cdot \int_{\gamma_2} f(\mu)\,\mathrm{R}(\mu, A)\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} f(\lambda)g(\mu)\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{R}(\mu, A)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\lambda-\mu)^{-1}(\mathrm{R}(\lambda,A)-\mathrm{R}(\mu,A))\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\lambda-\mu)^{-1}\,\mathrm{R}(\lambda,A)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\lambda-\mu)^{-1}\,\mathrm{R}(\mu,A)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda,A)\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{g(\mu)}{\lambda-\mu}\,\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\lambda -$$

$$- \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{\gamma_2} g(\mu)\,\mathrm{R}(\mu,A)\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\,\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\mu =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda,A)\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{g(\mu)}{\lambda-\mu}\,\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda,A)\,\mathrm{d}\lambda = (fg)(A),$$

где интеграл

$$\int_{\gamma_1}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\,\mathrm{d}\lambda$$

равен нулю, поскольку μ лежит за пределами U_1 (на контуре γ_2), то есть функция

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}$$

аналитична в области U_1 (знаменатель в ноль не обращается).

Третье свойство дано без доказательства. □

Теорема 10.2 (Данфорда об отображении спектра). *Пусть $A \in L(X)$, $f \in \mathcal{F}(A)$. Тогда*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

10.2 Проекторы Рисса

Теорема 10.3. *Пусть спектр оператора $A \in L(X)$ представим в виде объединения двух непересекающихся замкнутых частей: $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Тогда существует разложение X в пря-*

мую сумму замкнутых подпространств $X = X_1 \oplus X_2$, *причем пространства* X_1 *и* X_2 *инвариантны относительно оператора* A. *Более того, если* $A_k = A|_{X_k}$, $k = 1, 2$, *то* $\sigma(A_1) = \sigma_1$ *и* $\sigma(A_2) = \sigma_2$.

Доказательство. Определим функцию $f\colon U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C}$ по правилу

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in U_1, \\ 0, & \lambda \in U_2, \end{cases}$$

где U_1 и U_2 — взаимно непересекающиеся открытые множества, содержащие σ_1 и σ_2 соответственно. Очевидно, что f — аналитическая функция: она дифференцируема в каждой точке $U_1 \cup U_2$, то есть $f \in \mathcal{F}(A)$. Значит можно определить оператор $f(A)$:

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda -$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda,$$

где γ — граница $U_1 \cup U_2$, являющаяся объединением γ_k — границ U_k, $k = 1, 2$.

Введем обозначение $P_1 = f(A)$. Покажем, что P_1 — проектор. Поскольку $(f \cdot f)(\lambda) = (f(\lambda))^2 = f(\lambda)$ для всех $\lambda \in U_1 \cup U_2$, в силу определения гомоморфизма алгебр, получаем:

$$P_1^2 = f(A)f(A) = (f \cdot f)(A) = f(A) = P_1.$$

Итак, P_1 в самом деле проектор.

Пусть $X_1 = \operatorname{Im} P_1$, $X_2 = \operatorname{Ker} P_1$. Из алгебры известно, что пространство X раскладывается в прямую сумму X_1 и X_2. Покажем, что пространства X_1 и X_2 инвариантны относительно A. Для этого достаточно показать, что $AP_1 = P_1 A$ (см. алгебру).

$$AP_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} A\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda,$$
$$P_1 A = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \mathrm{R}(\lambda, A)A\,\mathrm{d}\lambda.$$

Легко показать, что для любого оператора $A \in L(X)$ и любого $\lambda \in \rho(A)$ справедливо равенство[1]

$$A\,\mathrm{R}(\lambda, A) = \mathrm{R}(\lambda, A)A.$$

[1] Рассмотрите очевидное равенство $(A - \lambda I)A = A(A - \lambda I)$

Отсюда получаем, что в самом деле пространства X_1 и X_2 инвариантны относительно A. Значит можно определить сужения $A|_{X_1} = A_1 \in L(X_1)$, $A|_{X_2} = A_2 \in L(X_2)$. Утверждение о спектре этих сужений оставим без доказательства. □

11 Компактные операторы

Далее X и Y — банаховы пространства.

Определение 11.1. Оператор $A \in L(X, Y)$ называется *компактным*, если образ $A(M)$ всякого ограниченного множества $M \subset X$ есть предкомпактное множество в Y.

Множество компактных операторов, действующих из X в Y будем обозначать $\mathrm{Comp}(X, Y)$. Как обычно, если $X = Y$, пишут $\mathrm{Comp}(X)$.

Можно показать, что для компактности оператора A достаточно показать предкомпактность образа единичного шара.

Замечание. Из теоремы Хаусдорфа следует, что оператор компактен тогда и только тогда, когда для каждой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ из последовательности $\{Ax_n\}$ можно выжелить сходящуюся в Y подпоследовательность.

Определение 11.2. Оператор $A \in L(X, Y)$ называется *оператором с конечным рангом*, если его образ $\operatorname{Im} A$ есть конечномерное подпространство в Y.

Теорема 11.1. *Для того чтобы множество из конечномерного банахова пространства было предкомпактно, необходимо и достаточно чтобы оно было ограничено. Как следствие, такое множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Теорема 11.2. *Всякий оператор с конечным рангом компактен.*

Доказательство. Поскольку A ограничен, он переводит ограниченное множество M в ограниченное. Но поскольку $\operatorname{Im} A$ конечномерен, то по предыдущей теореме $A(M)$ предкомпактно. □

Пример 11.1. Пусть $A\colon C[a, b] \to C[a, b]$ — интегральный оператор с ядром $K \in C([a, b] \times [a, b])$.

Используя теорему Арцела, можно показать, что всякий интегральный оператор компактен.

Ядро K называется *вырожденным*, если его можно представить

в виде
$$K(t,s)=\sum_{i=1}^{n}p_i(t)q_i(s),$$
где $p_i, q_i \in C[a,b]$ и p_i линейно независимы.

Оператор с вырожденным ядром является оператором с конечным рангом. В самом деле:
$$(Ax)(t)=\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\int_a^b q_i(s)x(s)\,\mathrm{d}s,$$
то есть всякая функция $Ax \in C[a,b]$ представима в виде линейной комбинации p_i, которые линейно независимы, а значит образуют базис в $\operatorname{Im} A$. $\diamondsuit$

Определение 11.3. Подмножество $I \subset A$ алгебры A называется *идеалом (двусторонним идеалом)*, если оно является подпространством в A и для всех $a \in A$ и $b \in I$ справедливы равенства
$$ab \in I, \quad ba \in I.$$

Теорема 11.3. *Множество* $\mathrm{Comp}(X,Y)$ *образует замкнутое подпространство в* $L(X,Y)$*. Если* $X=Y$*, то* $\mathrm{Comp}(X)$ *— двусторонний идеал в банаховой алгебре* $L(X)$*.*

Доказательство. Докажем, что $\mathrm{Comp}(X,Y)$ — подпространство в $L(X,Y)$. Пусть $A,B \in \mathrm{Comp}(X,Y)$. Если $\{x_n\} \subset X$ — ограниченная последовательность, то из $\{(\alpha A+\beta B)x_n\}$ можно выделить сходящуюся, выделив сходящуюся сначала из последовательности $\{Ax_n\}$ — $\{Ax_{n_k}\}$, а затем выделить сходящуюся из $\{Bx_{n_k}\}$ — $\left\{Bx_{n_{k_i}}\right\}$. Тогда последовательность $\left\{(\alpha A+\beta B)x_{n_{k_i}}\right\}$ также будет сходящейся, то есть линейная комбинация компактных операторов также является компактным оператором.

Покажем, что $\mathrm{Comp}(X,Y)$ замкнуто в $L(X,Y)$. Пусть $\{A_n\} \subset \mathrm{Comp}(X,Y)$ сходится по норме к A, то есть $\|A_n - A\| \to 0$. Покажем, что A компактен. Для этого покажем, что образ единичного шара $B(0,1)$ вполне ограничен (тогда, по теореме Хаусдорфа, он предкомпактен), то есть нужно доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ множество $A(B(0,1))$ можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть m таково, что $\|A_m - A\| < \varepsilon/2$. Поскольку $A_m(B(0,1))$ вполне ограниченное множество, по $\varepsilon/2$ для него найдется конечное покрытие шарами радиуса $\epsilon/2$ с центрами в точках y_i, $i = \overline{1,k}$:

$$A_m(B(0,1)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Покажем, что

$$A(B(0,1)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, \varepsilon).$$

В самом деле, пусть $x \in B(0,1)$ и $A_m x \in B(y_i, \varepsilon/2)$. Тогда

$$\|A_m x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\|Ax - y_i\| \leqslant \|Ax - A_m x\| + \|A_m x - y_i\| < \varepsilon,$$

то есть Ax лежит в шаре $B(y_i, \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(y_i, \varepsilon)$. Компактность оператора A доказана, то есть $\mathrm{Comp}(X,Y)$ — замкнутое подпространство.

Осталось доказать, что $\mathrm{Comp}(X)$ образует двусторонний идеал в $L(X)$. Пусть $A \in \mathrm{Comp}(X)$, $B \in L(X)$. Нужно показать, что $AB, BA \in \mathrm{Comp}(X)$. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность в X. $\{Bx_n\}$ также ограничена. Поскольку оператор A компактен, из последовательности $\{A(Bx_n)\}$ можно выделить сходящуюся, что в точности и означает, что $AB \in \mathrm{Comp}(X)$. Из последовательности $\{Ax_n\}$ также можно выделить сходящуюся $\{Ax_{n_k}\}$, но тогда и $\{B(Ax_{n_k})\}$ сходится, значит $BA \in \mathrm{Comp}(X)$. □

Лемма 11.1 (о почти перпендикуляре). *Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ — замкнутое подпространство, не совпадающее со всем X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой $x \in X \setminus M$, $\|x\| = 1$, что*

$$1 - \inf_{m \in M} \|x - m\| < \varepsilon.$$

Теорема 11.4 (Рисса). *Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Тогда замкнутый шар $\overline{B(a,r)}$ не является компактом.*

Доказательство. Докажем утверждение для единичного шара (общее утверждение следует). Возьмем произвольный x_0, $\|x_0\| = 1$. Определим подпространство $M_1 = \mathrm{span}\,\{x_0\}$. По лемме о почти перпендикуляре для $\varepsilon = 1/2$ найдется такой $x_1 \in X \setminus M_1$, $\|x_1\| = 1$, что $\|x_1 - x_0\| > 1/2$. Для подпространства $M_2 = \operatorname{span}\{x_0, x_1\}$ также справедлива лемма о почти перпендикуляре, значит найдется $x_3 \in X \setminus M_2$, $\|x_3\| = 1$, что $\|x_2 - x_0\| > 1/2$ и $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Продолжая аналогично, получим последовательность $\{x_k\}$ единичных векторов, находящихся друг от друга на расстоянии большем $1/2$. Очевидно, что из такой последовательности выделить сходящуюся нельзя, а значит множество $\overline{B(0,1)}$ не предкомпактно. □

Следующая теорема полностью описывает спектры компактных операторов.

Теорема 11.5. *Пусть* $A \in \operatorname{Comp}(X)$. *Тогда*

1. *Спектр оператора A есть не более чем счетное множество с возможной единственной предельной точкой, равной нулю. Все точки спектра, отличные от нуля, являются собственными значениями. В бесконечномерном пространстве число 0 всегда лежит в спектре A.*

2. *Ядра $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ конечномерны для всех $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A)$.*

3. *Более общо: ядра $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^m$ конечномерны для всех ненулевых λ из спектра, причем найдется такой номер $n > 0$, что $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^n = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^{n+1}$.*

Доказательство.

1. Покажем только, что $0 \in \sigma(A)$, если X бесконечномерно.

   Предположим противное: оператор A обратим, то есть существует $A^{-1} \in L(X)$ такой, что
   $$AA^{-1} = I.$$
   Но поскольку $\operatorname{Comp}(X)$ есть идеал в $L(X)$, оператор I должен быть также компактен, что невозможно в случае бесконечномерного X (образ единичного шара не предкомпактен в силу теоремы Рисса).

   Остальные утверждения данного пункта оставим без доказательства.

2. Покажем, что если $\lambda \neq 0$, то $X_0 = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ конечномерно. Ядро оператора $A - \lambda I$ инвариантно относительно оператора A: если $x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$, то $Ax = \lambda x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$. Также, как нетрудно убедиться, X_0 — замкнутое подпространство (значит, оно банахово). Значит можно определить сужение $A_0 = A|_{X_0}$ оператора A на это подпространство. Оно имеет вид $A_0 = \lambda I_0$, где I_0 — тождественный оператор в X_0.

Сужение компактного оператора на замкнутое подпространство, очевидно, также компактно, а значит X_0 конечномерно в силу той же теоремы Рисса.

3. Без доказательства. □

Определение 11.4. Замкнутый оператор $A\colon D(A) \subset X \to X$ называется *оператором с компактной резольвентой*, если его резольвентное множество непусто и найдется такое $\lambda_0 \in \rho(A)$, что оператор $\mathrm{R}(\lambda_0, A)$ компактен.

Лемма 11.2. *Если A — оператор с компактной резольвентой, то для любого $\mu_0 \in \rho(A)$ оператор $\mathrm{R}(\mu_0, A)$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$ — число из определения оператора с компактной резольвентой. Тогда из тождества Гильберта получаем

$$\mathrm{R}(\mu_0, A) = \mathrm{R}(\lambda_0, A) + (\mu_0 - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\mu_0, A)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A).$$

Оператор $\mathrm{R}(\lambda_0, A)$ компактен, значит компактен

$$(\mu_0 - \lambda_0)\,\mathrm{R}(\mu_0, A)\,\mathrm{R}(\lambda_0, A),$$

но тогда и $\mathrm{R}(\mu_0, A)$ компактен как сумма компактных операторов. □

Теорема 11.6.

Пусть замкнутый оператор $A\colon D(A) \subset X \to X$ обратим. Тогда если $D(A) \neq X$, то

$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\}.$$

Если же $D(A) = X$ (оператор A тогда ограничен), то

$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

Доказательство. Пусть $D(A) \neq X$. Тогда $0 \in \sigma(A^{-1})$, поскольку A^{-1} необратим (его образ не совпадает со всем X). Возьмем $\lambda_0 \in \rho(A)$ и покажем, что $\lambda_0^{-1} \in \rho(A^{-1})$. Обратным для $A^{-1} - \lambda_0^{-1} I$ является оператор $-\lambda_0 A(A - \lambda_0 I)^{-1}$, это проверяется непосредственно. Аналогично, если $\lambda_0 \in \rho(A^{-1})$, то $\lambda_0^{-1} \in \rho(A)$, причем обратный для $A - \lambda_0^{-1} I$ есть $-\lambda_0 A^{-1}(A^{-1} - \lambda_0 I)^{-1}$. □

Лемма 11.3. *Если $A\colon D(A) \subset X \to X$ — обратимый линейный замкнутый оператор, а $x \in D(A)$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda \in \sigma_d(A)$, $\lambda \neq 0$, то x является собственным вектором оператора A^{-1}, соответствующим собственному значению λ^{-1}. Иначе утверждение леммы можно записать в виде*

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \operatorname{Ker}(A^{-1} - \lambda^{-1} I).$$

Доказательство. Если $Ax = \lambda x$, то $x = \lambda A^{-1} x$. Дальнейшее очевидно. □

Теорема 11.7. *Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$ — оператор с компактной резольвентой. Тогда*

1. *Его спектр состоит только из не более чем счетного числа собственных значений с единственной возможной предельной точкой равной ∞.*

2. *Ядра $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ конечномерны для всех $\lambda \in \sigma(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тогда $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ компактен, значит его спектр $\sigma((A - \lambda_0 I)^{-1})$ счетен и единственной возможной предельной точкой является точка 0. Из теоремы 11.6 следует, что

$$\sigma((A - \lambda_0 I)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_0} : \lambda \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\},$$

откуда получаем

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{1}{\mu} + \lambda_0 : \mu \in \sigma((A - \lambda_0 I)^{-1}), \mu \neq 0 \right\}.$$

Отсюда следует, что оператор A имеет не более чем счетный спектр с единственной возможной предельной точкой равной бесконечности.

Покажем, что все точки спектра A являются собственными значениями. Если $\lambda \in \sigma(A)$, то $\lambda = \mu^{-1} + \lambda_0$, где $\mu \in \sigma((A - \lambda_0 I)^{-1}))$. Поскольку оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ компактен и $\mu \neq 0$, μ является собственным значением этого оператора, а значит найдется такой ненулевой $x \in X$, что

$$(A - \lambda_0 I)^{-1} x = \mu x.$$

Из предыдущей леммы следует, что x является собственным вектором оператора $A - \lambda_0 I$, соответствующим собственному значению $\mu^{-1} = \lambda - \lambda_0$, то есть, как легко видеть, x есть собственный вектор A, соответствующий собственному значению λ. Из леммы также получаем, что

$$\mathrm{Ker}((A - \lambda_0 I)^{-1} - (\lambda - \lambda_0)^{-1} I) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I),$$

откуда сразу следует второе утверждение теоремы. $\square$