# Содержание



# 1 Элементы теории меры и интеграла

## 1.1 Пространства с мерой

**Определение 1.1.** Пусть $X$ — непустое множество. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ из $X$ называется *σ-алгеброй*, если выполняются следующие условия:

1. $X \in \mathcal{F}$;
2. $X \setminus A \in \mathcal{F}$ для всех $A$ из $\mathcal{F}$;
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ для всех $A_i$, $i \in \mathbb{N}$ из $\mathcal{F}$.

Подмножества, принадлежащие этому семейству, называются *измеримыми*.

**Определение 1.2.** Отображение $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется *мерой*, если

1. $\mu(A) \geqslant 0$ для всех измеримых подмножеств $A$;
2. $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ для любой последовательности $\{A_i\}$ *взаимно непересекающихся* измеримых подмножеств.

**Теорема 1.1.** *Справедливы следующие свойства:*

1. *Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество;*
2. *Если $E_1$ и $E_2$ — измеримые множества и $E_1 \subset E_2$, то*

$$\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2).$$

Доказательство. См. методичку □

**Определение 1.3.** Тройка $(X, \mathcal{F}, \mu)$, где $X$ — непустое множество, $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра измеримых подмножеств из $X$, а $\mu$ — мера, называется *пространством с мерой*.

**Пример 1.1.** Пусть $X$ — некоторое непустое множество. В качестве $\mathcal{F}$ возьмем всевозможные подмножества из $X$. Очевидно, что они образуют $\sigma$-алгебру. Меру $\mu_a\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, где $a$ — некоторый элемент из $X$, определим следующим образом:

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство того, что определенная таким образом функция в самом деле является мерой, элементарно (см. методичку).

Построенная мера называется *мерой Дирака, сосредоточенной в точке $a$.* ♢

**Пример 1.2.** В качестве $X$ возьмем вещественную прямую $\mathbb{R}$. Определим длину интервала $(a, b)$ равенством $\mu((a, b)) = b - a$. Любое открытое множество на прямой представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся интервалов. Тогда определим меру открытого множеств по формуле $\mu(G) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$, где $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество на прямой. Его можно покрыть некоторым открытым множеством $G \supset E$. Величина

$\mu^*(E) = \inf\limits_{G \supset E} \mu(G)$, где инфимум берется по всем открытым покрытиям $E$, называется *верхней мерой* множества $E$.

*Нижняя мера* множества $E$ определяется по формуле $\mu_*(E) = b - a - \mu([a, b] \setminus E)$, где $[a, b]$ — наименьший отрезок, содержащий множество $E$.

Назовём ограниченное множество $E$ *измеримым по Лебегу*, если $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. Тогда *мерой Лебега* множества $E$ назовём общее значение верхней и нижней мер этого множества.

Мера Лебега также определяется и для неограниченных множеств. Для этого в качестве нижней меры множества $E$ берется предел нижних мер множеств вида $E_n = E \cap [-n, n]$ при $n \to \infty$. Этот предел существует или бесконечен, поскольку последовательность $\mu_*(E_n)$, как можно показать, монотонно неубывает. $\diamondsuit$

**Теорема 1.2.** *Тройка $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$, где $\mathcal{F}$ — множество измеримых по Лебегу множеств на прямой, а $\mu$ — мера Лебега, является пространством с мерой.*

**Пример 1.3.** Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где $\Omega$ — пространство элементарных исходов, $\mathfrak{A}$ — алгебра событий, $P$ — вероятностная мера, является пространством с мерой. $\diamondsuit$

## 1.2 Простые функции. Интегрирование простых функций

Пусть далее $(X, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathcal{F}$ — некоторое измеримое подмножество.

**Определение 1.4.** Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если $E$ можно представить в виде счетного объединения взаимно непересекающихся измеримых подмножеств $E_i$ так, что функция $f$ принимает на этих подмножествах постоянное значение: $f(x) = a_i$ для всех $x$ из $E_i$.

Функция $f$ называется *ступенчатой*, если такое объединение конечно.

**Пример 1.4.** Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ — прямая с мерой Лебега, $E = [0, 1]$. Функция Дирихле, определенная на $E$ и принимающая значение 1 для рациональных аргументов и 0 для иррациональных, является простой (и даже ступенчатой). В качестве $E_1$ можно взять множество рациональных чисел из отрезка $E$, а в качестве $E_2$ — множество иррациональных чисел из того же отрезка. Оба этих множества измеримы по Лебегу. $\diamondsuit$

**Лемма 1.1.** *Линейная комбинация простых функций, определенных на измеримом множестве $E$ является простой функцией.*

Доказательство. Покажем, что $\alpha f+\beta g$ также простая функция для простых функций $f, g\colon E\to\mathbb{R}$ и чисел $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Пусть

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j,$$

причем

$$f(x)=a_i,\quad x\in E_i,$$

$$g(x)=b_j,\quad x\in F_j.$$

Обозначим $G_{ij}=E_i\cap F_j$. Это также измеримые множества. Более того непосредственно проверяется, что

$$E=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}G_{ij}.$$

На множестве $G_{ij}$ функция $\alpha f+\beta g$ принимает значение

$$(\alpha f+\beta g)=\alpha a_i+\beta b_j.$$

Этим доказано, что функция $\alpha f+\beta g$ простая, принимающая постоянные значения на множествах $G_{ij}$. □

Из этой леммы следует, что простые функции образуют линейное пространство.

Далее будем считать, что мера множества $E$ конечна.

**Определение 1.5.** Простая функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ называется *абсолютно суммируемой,* если конечна величина

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\,\mu(E_i),$$

в обозначениях предыдущего определения.

**Определение 1.6.** *Интегралом* от абсолютно суммируемой функции $f$ называется сумма вида

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x):=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mu(E_i).$$

Аргумент в записи интеграла часто опускают и пишут просто

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

В следующей теореме доказываются основные свойства интеграла от абсолютно суммируемых функций.

**Теорема 1.3.** *Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ — абсолютно суммируемые функции. Тогда справедливы следующие свойства:*

1. *Линейность: для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ абсолютно суммируема и справедливо равенство*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathrm{d}\mu;$$

2. *Оценка модуля интеграла:*

$$\left|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \mu(E) \sup_{x\in E} |f(x)|\,;$$

3. *Неотрицательность: если $f \geqslant 0$, то*

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0;$$

4. *Монотонность: если $f \geqslant g$, то*

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_E g\,\mathrm{d}\mu;$$

5. *Аддитивность: если $E$ представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся измеримых подмножеств $A_k$, то*

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sum_k \int_{A_k} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

1. Абсолютная суммируемость линейной комбинации следует из предыдущей леммы, свойств абсолютно сходящихся числовых рядов и из свойства монотонности меры.

   Покажем, что справедливо указанное в утверждении теоремы равенство. Будем пользоваться обозначениями из леммы.

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i,j=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_j)\mu(G_{ij}) =$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(G_{ij}) =$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}).$$

Поскольку, как нетрудно видеть, $E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G_{ij}$, $F_j = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_{ij}$, а множества $G_{ij}$ взаимно не пересекаются, из свойства аддитивности меры получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(E_i); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(F_j).$$

Таким образом

$$\alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i) +$$
$$+ \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(F_j) = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

2. Тривиально (неравенство треугольника, аддитивность меры).

3. Тривиально.

4. Рассмотреть функцию $f-g$ и применить линейность и предыдущее свойство.

5. Рассмотреть взаимно непересекающиеся множества вида $H_{ik} = E_i \cap A_k$, на которых функция принимает постоянные значения $c_{ik}$, и которые образуют разбиение $E$:

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sum_i \sum_k c_{ik}\mu(H_{ik}) = \sum_k \sum_i c_{ik}\mu(H_{ik}) = \sum_k \int_{A_k} f\,\mathrm{d}\mu$$

□

## 1.3 Измеримые функции. Интегрирование измеримых функций

**Определение 1.7.** Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на измеримом множестве $E$, называется *измеримой*, если она является равномерным пределом на $E$ последовательности простых функций, т.е. существует такая последовательность $\{f_n\}$, $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, что

$$\sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| \to \infty, \quad n \to \infty.$$

**Определение 1.8.** Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если

$$f^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 1.4.** *Вышеприведенные определения измеримой функции эквивалентны.*

Доказательство. см. в методичке на с. 51 (требуется только необходимость). □

**Определение 1.9.** Если существует последовательность простых интегрируемых функций, сходящаяся равномерно к измеримой функции $f$, то *интегралом* функции $f$ назовем предел

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Можно показать, что предел (быть может, бесконечный) всегда существует и не зависит от выбора последовательности $f_n$.

**Определение 1.10.** Неотрицательная функция $f$ называется *интегрируемой* на множестве $E$, если предел из предыдущего определения конечен.

Всякая измеримая функция $f$ представима в виде разности двух неотрицательных измеримых функций:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leqslant 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}.$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Тогда если хотя бы одна из функций $f_+$ или $f_-$ интегрируема, интегралом функции $f$ назовём величину

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E f_- \,\mathrm{d}\mu.$$

**Определение 1.11.** В случае, когда $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра измеримых по Лебегу множеств на $\mathbb{R}$, $\mu$ — мера Лебега, интеграл, определённый по схеме, приведённой в данном разделе, называется *интегралом Лебега* на прямой.

**Теорема 1.5.** *Если $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ — прямая с мерой Лебега, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то тогда она интегрируема по Лебегу и значения интегралов Римана и Лебега совпадают.*

## 1.4 Пространства Лебега

**Определение 1.12.** Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на измеримом множестве $E$, называется *суммируемой со степенью $p$*, $p \geqslant 1$, если величина

$$\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x)$$

определена и конечна.

**Определение 1.13.** Будем говорить, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на измеримом множестве $E$, если оно выполнено на всём множестве $E$, за исключением, быть может, множества меры нуль.

**Определение 1.14.** Две функции $f_1, f_2\colon E \to \mathbb{R}$ назовём *эквивалентными* на множестве $E$, если их значения совпадают почти всюду.

Отношение $\sim$, введённое в определении выше, является отношением эквивалентности.

Пусть $\mathcal{L}^p(E, \mu)$, $p \geqslant 1$ — линейное пространство суммируемых со степенью $p$ функций, определенных на множестве $E$.

Рассмотрим фактормножество $L^p(E, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mu)/\sim$. Оно также будет являться линейным пространством. В нём можно ввести норму по формуле

$$\left\|\tilde{f}\right\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Классы эквивалентности из $L^p(E, \mu)$, допуская неточность, часто отождествляют с функциями-представителями из этого класса.

Если $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\mu$ — мера Лебега на прямой, то вместо $L^p([a, b], \mu)$ обычно пишут просто $L^p[a, b]$.

**Теорема 1.6 (Лебега).** *$L^p(E, \mu)$ — банахово пространство.*

# 2 Ограниченные операторы

Далее $X$ и $Y$ — нормированные пространства над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

**Определение 2.1.** Отображение $A\colon X \to Y$ называется *линейным оператором*, действующим из пространства $X$ в $Y$, если

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Если $Y = \mathbb{K}$, то вместо слова «оператор» говорят «функционал».

**Пример 2.1.** Отображение $D\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$, определённое по правилу $Dx = x'$ называется *оператором дифференцирования.* Это линейный оператор. $\diamondsuit$

**Пример 2.2.** Отображение $J\colon C[a,b] \to C[a,b]$, определённое по правилу

$$(Jx)(t) = \int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b],$$

называется *оператором неопределённого интегрирования.* $\diamondsuit$

**Пример 2.3.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой, $L^1(\Omega, \mu)$ — банахово пространство классов эквивалентности суммируемых функций на $\Omega$. Отображение $J_0\colon L^1(\Omega, \mu) \to \mathbb{R}$, определенное по правилу

$$J_0 x = \int_\Omega x\,\mathrm{d}\mu,$$

есть линейный функционал. $\diamondsuit$

**Пример 2.4.** Отображение $A\colon \ell^1 \to \ell^\infty$, определённое по правилу

$$(Ax)(n) = \sum_{k=1}^{n} x(k),$$

есть линейный оператор, который каждой последовательности из $\ell^1$ ставит в соответствие её последовательность частичных сумм. $\diamondsuit$

**Пример 2.5.** Отображение $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$, определённое по правилу

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b],$$

где $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, называется *интегральным оператором.* При этом функция $K$ называется *ядром* этого интегрального оператора. $\diamondsuit$

**Определение 2.2.** Оператор $A\colon X \to Y$ между нормированными пространствами называется *ограниченным*, если величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$$

конечна. Эта величина, в таком случае, называется нормой оператора $A$.

Можно показать, что все следующие определения нормы совпадают с данным выше:

1. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\|$

2. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

3. $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$;

4. $\|A\| = \inf\{C \geqslant 0 : \forall x \in X \ \ \|Ax\| \leqslant C\,\|x\|\}$

Нетрудно видеть, что $\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|$ для всех $x \in X$.

**Пример 2.6.** Рассмотрим оператор умножения $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $Ax = ax$, где $a \in \mathbb{C}$. Если $\|x\| = |x| = 1$, то

$$\|Ax\| = |ax| = |a|\,.$$

Таким образом $\|A\| = |a|$. ♢

Множество всех линейных ограниченных операторов между нормированными пространствами $X$ и $Y$ будем обозначать $L(X, Y)$.

**Теорема 2.1.** $L(X, Y)$ *— нормированное пространство.*

Доказательство. Непосредственно доказывается, что сумма ограниченных операторов есть ограниченный оператор. Также легко показать, что норма оператора — в самом деле норма в $L(X, Y)$. Установим, например, справедливость неравенства треугольника. Пусть $A, B \in L(X, Y)$ и $\|x\| = 1$. Тогда

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\|\,.$$

Взяв верхнюю грань по всем $x$ с нормой 1, получим, что

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|\,.$$

□

**Теорема 2.2.** *Если $Y$ — банахово пространство, то $L(X, Y)$ — банахово пространство.*

Доказательство. см. Антоневич, Радыно, 1984, с. 180. □

**Определение 2.3.** Если $f\colon X \to \mathbb{K}$ и $f$ — линейный оператор, то $f$ называют *линейным функционалом* на $X$.

Пространство ограниченных линейных функционалов $L(X,\mathbb{K})$ называют *сопряженным пространством* к пространству $X$ и обозначают символом $X^*$.

**Теорема 2.3.** *Пусть $A \in L(X,Y)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$A$ — непрерывное отображение;*
2. *$A$ — непрерывное в точке* 0 *отображение;*
3. *$A$ — ограниченный оператор;*
4. *$A$ — липшицево отображение.*

Доказательство. Импликации $1 \Rightarrow 2$, и $4 \Rightarrow 1$ очевидны. Докажем, что $2 \Rightarrow 3$. Непрерывность $A$ означает, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X:\ \|x\| < \delta \to \|Ax\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторый $\varepsilon > 0$ и соответствующий ему $\delta$. Тогда для любого $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$, справедливо

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta}\left\|A\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Переходя в неравенстве к верхней грани, получаем, что

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

что и означает ограниченность оператора $A$.

Импликация $3 \Rightarrow 4$ проверяется непосредственно: если $A$ — ограниченный оператор, $x_1, x_2 \in X$, то

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leqslant \|A\|\,\|x_1 - x_2\|. \qquad \square$$

# 3 Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза)

**Определение 3.1.** Множество из метрического пространства называется *множеством I категории («тощим», разреженным)*, если его можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств, каждое из которых не содержит шара.

**Определение 3.2.** Множество, не являющееся множеством I категории, называется *множеством II категории («тучным»).*

**Теорема 3.1 (Бэра).** *Полное метрическое пространство является множеством II категории.*

Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства, $\Omega$ — множество индексов, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — семейство ограниченных операторов.

Будем называть семейство операторов *ограниченным поточечно*, если для каждого $x \in X$ существует такая константа $M(x) > 0$, что

$$\|A_\alpha x\| \leqslant M(x)$$

для всех $\alpha \in \Omega$, то есть для каждого $x \in X$ множество

$$\{A_\alpha x : \alpha \in \Omega\} \subset Y$$

ограничено в $Y$.

Семейство операторов назовём *ограниченным равномерно*, если существует такое число $C > 0$, что для всех $\alpha \in \Omega$ выполнено неравенство

$$\|A_\alpha\| < C,$$

то есть числовое множество

$$\{\|A_\alpha\| : \alpha \in \Omega\}$$

ограничено.

**Теорема 3.2 (Банаха-Штейнгауза).** *Если семейство операторов $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, действующих из банахова пространства $X$ в нормированное пространство $Y$, ограничено поточечно, то оно ограничено и равномерно.*

Доказательство. Рассмотрим множества вида

$$X_n = \{x \in X : \forall\alpha \in \Omega \ \ \|A_\alpha x\| \leqslant n\}.$$

В силу поточечной ограниченности семейства, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

Каждое из множеств $X_n$ замкнуто. В самом деле: если $\{x_k\}$ — сходящаяся к $x_0 \in X$ последовательность элементов из $X_n$, то, в силу непрерывности операторов $A_\alpha$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|A_\alpha x_k\| = \|A_\alpha x_0\|$, а поскольку для всех $x_k$ и всех $\alpha \in \Omega$ выполняется неравенство $\|A_\alpha x_k\| \leqslant n$, то и $\|A_\alpha x_0\| \leqslant n$, а значит $x_0 \in X_n$, что и означает замкнутость $X_n$.

Поскольку пространство $X$ полно, по теореме Бэра существует такой номер $n_0$, что $X_{n_0}$ содержит в себе шар, который будем обозначать $B(x', r)$, где $r$ — радиус этого шара, а $x'$ — его центр.

Для всех элементов $x$ из $B(x', r)$ и для всех $\alpha \in \Omega$ справедливо, что

$$\|A_\alpha x\| \leqslant n_0,$$

то есть значения $\|A_\alpha x\|$ ограничены на этом шаре. Покажем, что они ограничены и на единичном шаре, что будет означать ограниченность норм $A_\alpha$.

Пусть $x \in B(0,1)$. Тогда, как нетрудно проверить, $z = rx + x' \in B(x', r)$. В таком случае для всех $\alpha \in \Omega$

$$\|A_\alpha x\| = \left\| A_\alpha \left( \frac{z - x'}{r} \right) \right\| \leqslant \frac{1}{r} (\|A_\alpha z\| + \|A_\alpha x'\|) \leqslant \frac{2n_0}{r},$$

откуда, взяв верхнюю грань по всем $x \in B(0,1)$, получаем утверждение теоремы. □

# 4 Ряды в банаховом пространстве

**Определение 4.1.** *Рядом* элементов из нормированного пространства $X$ называется пара последовательностей $(x_n, s_n)$, связанных соотношением

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

$x_n$ называют *$n$-ым членом* ряда, а $s_n$ — *$n$-ой частичной суммой* ряда.

**Определение 4.2.** Говорят, что ряд $(x_n, s_n)$ сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Тогда предел этой последовательности называют суммой ряда и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_n.$$

**Определение 4.3.** Говорят, что ряд $(x_n, s_n)$ *абсолютно сходится*, если сходится числовой ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

**Теорема 4.1.** *Если ряд элементов из банахова пространства сходится абсолютно, то он сходится.*

**Теорема 4.2.** *Пусть задан ряд $(x_n, s_n)$ элементов из банахова пространства $X$ и существует числовой ряд $a_n$ такой, что для всех $n$ выполняется неравенство*

$$\|x_n\| \leqslant a_n.$$

*Тогда ряд $(x_n, s_n)$ сходится абсолютно.*

Эти теоремы доказываются аналогично знакомым теоремам из курса математического анализа.

# 5 Гильбертовы пространства

## 5.1 Начальные сведения

**Определение 5.1.** Линейное пространство $H$ над полем $\mathbb{K}$ называется *пространством со скалярным произведением*, если в нем задана функция $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{K}$, такая что для всех $x, y, z \in H$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ справедливы следующие свойства:

1. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (невырожденность);
2. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ (положительная определённость);
3. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ (линейность по первому аргументу);
4. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (эрмитова симметричность).

Такая функция называется *скалярным произведением.*

Далее будем рассматривать только комплексные пространства со скалярным произведением.

В пространстве со скалярным произведением можно ввести норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{5.1}$$

Неравенство треугольника следует из неравенства

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \,, \tag{5.2}$$

которое называют *неравенством Коши-Буняковского-Шварца* или просто неравенством Шварца.

**Теорема 5.1.** *Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — последовательности из $H$, причем $x_n \to x$, $y_n \to y$. Тогда $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Доказательство. Используем неравенство Шварца:

$$
\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leqslant \\
\leqslant |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leqslant \\
\leqslant \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0, \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$
□

**Определение 5.2.** Если пространство со скалярным произведением полно по норме, определённой равенством (5.1), то оно называется *гильбертовым пространством.*

**Пример 5.1.** Лебегово пространство $L^2(E, \mu)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определённым по формуле

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Существование этого интеграла следует из неравенства

$$\left| f(x)\overline{g(x)} \right| \leqslant \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2}.$$
◊

**Пример 5.2.** В частности, гильбертовым пространством является пространство суммируемых с квадратом последовательностей $\ell^2$. Скалярное произведение задаётся формулой

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Сходимоть ряда обеспечивается аналогичной оценкой. ◊

**Определение 5.3.** Векторы $x, y \in H$ называются *ортогональными*, если $\langle x, y\rangle = 0$. При этом пишут $x \perp y$.

**Определение 5.4.** Пусть $M \subset H$ — множество из $H$. Тогда говорят, что вектор $x \in H$ *ортогонален* $M$, если $x$ ортогонален любому вектору $m \in M$ (в этом случае используется обозначение $x \perp M$).

**Теорема 5.2.** *Для всех векторов $x, y \in H$ выполняется тождество параллелограмма:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Доказательство. Доказывается элементарными преобразованиями. □

## 5.2 Теорема об ортогональном дополнении

**Определение 5.5.** Множество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если для любых векторов $a, b \in A$ векторы вида $(1-t)a+tb, t \in [0,1]$ также лежат в $A$.

Очевидно, всякое подпространство в нормированном пространстве является выпуклым множеством.

**Теорема 5.3 (о наилучшем приближении).** *Пусть $A \subset H$ — непустое выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве $H$. Тогда для любого $x \in H \setminus A$ найдётся единственный вектор $a_0 \in A$ такой, что*

$$\|x - a_0\| = \inf_{a \in A} \|x - a\| .$$

*Иначе говоря, в $A$ найдется вектор $a_0$, который находится от $x$ на наименьшем возможном расстоянии. Такой вектор $a_0$ называется элементом наилучшего приближения вектора $x$ в множестве $A$.*

Доказательство. По определению нижней грани, существует такая последовательность $\{a_n\}$ элементов из $A$, что

$$d_n = \|x - a_n\| \to \inf_{a \in A} \|x - a\| = d.$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальна.

По тождеству параллелограмма получаем:

$$\|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2 = \\ = 2\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right).$$

Заметим, что правая часть равенства стремится к $4d^2$ при стремлении $n$ и $m$ к бесконечности. Разделим обе части равенства на 4:

$$\frac{1}{4}\left(\|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right).$$

После преобразований получаем:

$$\left\|\frac{a_n + a_m}{2} - x\right\|^2 + \frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right).$$

Поскольку множество $A$ выпукло, вектор $(a_n + a_m)/2$ принадлежит $A$, а значит, в силу определения нижней грани, справедлива оценка

$$\left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \geqslant d^2.$$

Тогда

$$\frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right) - \left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2\right) - d^2.$$

Правая часть неравенства стремится к нулю, а это значит, что $\|a_n - a_m\|$ также стремится к нулю, что и означает фундаментальность последовательности $\{a_n\}$.

Поскольку пространство полно, существует вектор $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. В силу замкнутости множества $A$ этот вектор также лежит в $A$. При этом

$$\|x - a_0\| \leqslant \|x - a_n\| + \|a_n - a_0\| \to d, \quad n \to \infty,$$

то есть $\|x - a_0\| = d$, что и означает, что $a_0$ является элементом наилучшего приближения $x$ в $A$.

Покажем, что других векторов наилучшего приближения в $A$ нет. Пусть $a_0' \in A$ и $\|a_0' - x\| = d$. Тогда, снова используя тождество параллелограмма, получаем

$$4\left\| x - \frac{a_0 - a_0'}{2} \right\|^2 + \|a_0 - a_0'\|^2 = 2\,\|x - a_0\|^2 + 2\,\|x - a_0'\|^2 = 4d^2.$$

Первый квадрат нормы не меньше $4d^2$, откуда следует, что второй не превосходит нуля, а значит

$$\|a_0 - a_0'\|^2 = 0,$$

то есть $a_0 = a_0'$. □

**Определение 5.6.** Пусть $M \subset H$ — подпространство из $H$. Вектор $a \in M$ называется *проекцией* вектора $x \in H$ на $M$ если $x - a \perp M$, то есть для всех $m \in M$ выполняется равенство

$$\langle x - a, m \rangle = 0.$$

**Теорема 5.4.** *Если $M \subset H$ — замкнутое подпространство, $x \in H \setminus M$, то тогда вектор $a \in M$ является проекцией $x$ на $M$ тогда и только тогда, когда $a$ — элемент наилучшего приближения $x$ в $M$.*

Доказательство.

**Необходимость:**

Пусть $x-a \perp M$. Тогда по теореме Пифагора для любого $m \in M$ справедливо равенство

$$\|x-m\|^2 = \|x-a\|^2 + \|a-m\|^2 .$$

Значит,

$$\inf_{m\in M} \|x-m\| = \|x-a\| ,$$

откуда и следует, что $a$ — элемент наилучшего приближения $x$ в $M$.

**Достаточность:**

Пусть $a \in M$ — элемент наилучшего приближения $x$ в $M$, то есть

$$\inf_{m\in M} \|x-m\| = \|x-a\| = d.$$

Покажем, что для любого $m \in M$ выполнено равенство $\langle x-a, m\rangle = 0$.

Обозначим $x-a=z$ и пусть $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{gathered}\|x-(a+tm)\|^2 = \|z-tm\|^2 = \langle z-tm, z-tm\rangle = \\ = \|z\|^2 - 2t\,\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle + t^2\|m\|^2 = d^2 - 2t\,\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle + t^2\|m\|^2 .\end{gathered}$$

Поскольку $a+tm \in M$, $\|x-(a+tm)\|^2 \geqslant d^2$, откуда

$$d^2 - 2t\,\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle + t^2\|m\|^2 \geqslant d^2,$$

то есть при всех $t \in \mathbb{R}$

$$t^2\|m\|^2 - 2t\,\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle \geqslant 0,$$

что возможно только в случае $\mathfrak{Re}\langle z,m\rangle = 0$.

Взяв теперь вместо $t$ величину $it$, $t \in \mathbb{R}$, можно аналогично показать, что $\mathfrak{Im}\langle z,m\rangle = 0$, что в совокупности даёт

$$\langle z,m\rangle = 0,$$

то есть $x-a \perp M$. $\square$

Таким образом мы доказали, что для всякого замкнутого подпространства $M \in H$ и вектора $x \in H \setminus M$ существует проекция $x$ на $M$, причём она совпадает с элементом наилучшего приближения $x$ в $M$.

**Определение 5.7.** *Ортогональным дополнением* множества $A$ из гильбертова пространства $H$ называется множество

$$A^{\perp} = \{x \in H : x \perp A\}.$$

Из свойств скалярного произведения и теоремы 5.1 нетрудно видеть, что $A^{\perp}$ — замкнутое подпространство из $H$ для любого подмножества $A \subset H$.

**Теорема 5.5 (об ортогональном дополнении).** *Если $M$ — замкнутое подпространство из $H$, то $H = M \oplus M^{\perp}$.*

Доказательство. Покажем, что всякий вектор $x \in H$ можно представить в виде суммы векторов из $M$ и $M^{\perp}$. Пусть $a$ — элемент наилучшего приближения $x$ в $M$. Тогда по предыдущей теореме $x - a \perp M$, то есть $x - a \in M^{\perp}$, откуда получаем

$$x = a + (x - a),$$

где $a \in M$, $x - a \in M^{\perp}$.

Единственность такого представления обеспечивается тем фактом, что

$$M \cap M^{\perp} = \{0\}. \qquad \square$$

## 5.3 Базис в гильбертовом пространстве

**Определение 5.8.** Банахово пространство $X$ называется *сепарабельным*, если существует такое счетное множество $M \subset X$, что $\overline{M} = X$, то есть, как еще говорят, $M$ всюду плотно в $X$.

**Определение 5.9.** Множество $M \subset H$ называется *ортонормированным*, если для всех $x, y \in M$

1. $\|x\| = 1$;

2. $x \neq y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$.

**Лемма 5.1.** *В сепарабельном гильбертовом пространстве всякое ортонормированное множество не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $E$ — ортонормированное множество в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$. Тогда для любых векторов $e_1$, $e_2$ из $F$ справедливо (проверяется непосредственно):

$$\|e_1 - e_2\| = \sqrt{2}.$$

Поскольку $H$ сепарабельно, существует счетное множество $F = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$, такое что для любого $e \in E$ найдется $f \in F$, что $\|e - f\| < \sqrt{2}/2$. Но тогда, если $\|e_1 - f\| < \sqrt{2}/2$, то (из неравенства треугольника)

$$\|e_2 - f\| \geqslant \|e_1 - e_2\| - \|e_1 - f\| > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то есть двум разным $e_1$ и $e_2$ не может соответствовать один и тот же $f$ с вышеуказанным свойством, то есть существует инъективное отображение $E$ в $F$. Из этого следует, что множество $F$ имеет мощность, не меньшую чем множество $E$, то есть $E$ — не более, чем счетно. □

**Лемма 5.2.** *Пусть $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ — ортогональная последовательность векторов из $H$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ сходится;*

*2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2$ сходится*

Доказательство. По теореме Пифагора

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|e_k\|^2 .$$

Из этого равенства и полноты пространства утверждение теоремы следует немедленно. □

Далее $H$ — сепарабельное гильбертово пространство.

**Определение 5.10.** Последовательность $\{e_n\}$ называется *ортонормированным базисом* (Шаудера) в $H$, если выполнены следующие условия:

1. Элементы последовательности $\{e_n\}$ образуют ортонормированное множество;

2. Если $a \perp e_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $a = 0$ (свойство полноты).

**Определение 5.11.** Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в $H$. Тогда *рядом Фурье* вектора $x \in H$ называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

**Теорема 5.6.** *Для любого вектора $x \in H$ ряд Фурье сходится, причем сходится к вектору $x$.*

Доказательство. По лемме 5.2 ряд Фурье сходится в точности тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$. По неравенству Бесселя (см. «Лекции по алгебре», параграф 17)

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

откуда получаем, что ряд Фурье сходится (последовательность частичных сумм ограничена). Обозначим через $y$ сумму этого ряда.

Покажем, что $x = y$:

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, e_j \rangle =$$
$$= \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.$$

В силу свойства полноты базиса, $x - y = 0$. Дальнейшее очевидно. $\square$

**Следствие 1 (равенство Парсеваля).** *Для любого вектора $x \in H$*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

**Теорема 5.7.** *Для всякого бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства существует ортонормированный базис Шаудера.*

Доказательство. Пусть $\{y_n\} \subset H$ — счетное всюду плотное множество. Применяя процесс Грама-Шмидта (см. алгебру), получим не более чем счетное ортонормированное множество $M = \{e_n\}$. Линейная оболочка $\operatorname{span} M$, как нетрудно видеть, плотна в $H$ (в силу процесса Грама-Шмидта, всякий вектор $y_n$ выражается как конечная линейная комбинация векторов из $M$).

Покажем, что $M$ обладает свойством полноты. Пусть

$$\langle a, e_k \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим последовательность подпространств

$$E_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

В силу условия $\overline{\operatorname{span} M} = H$,

$$d(a, E_n) \to 0, \tag{5.4}$$

где $d(a, E_n) = \inf\limits_{z \in E_n} \|a - z\|$.

По теореме 5.4, проекция $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle a, e_k \rangle e_k$ вектора $a$ на $E_n$ есть элемент наилучшего приближения, то есть

$$d(a, E_n) = \|a - a_n\|.$$

Но $a_n = 0$ для всех $n$ в силу условия (5.3). Поэтому

$$d(a, E_n) = \|a\|,$$

откуда получаем, что $a = 0$ в силу (5.4).

Таким образом, $\{e_n\}$ — базис в $H$. □

**Определение 5.12.** Два нормированных пространства $X$ и $Y$ называют *изометрически изоморфными*, если существует такой биективный оператор $J \in L(X, Y)$, что для всех $x \in X$

$$\|Jx\| = \|x\|.$$

**Теорема 5.8.** *Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ изометрически изоморфно пространству последовательностей $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $H$, существующий в силу теоремы 5.7.

Определим оператор $J\colon H \to l^2$ по правилу

$$Jx = (\langle x, e_n \rangle)_{n=1}^{\infty},$$

то есть $J$ ставит $x$ в соответствие последовательность его координат

$\langle x, e_n \rangle$.

Инъективность следует из теоремы 5.6, сюръективность из леммы 5.2. Изометричность следует из равенства Парсеваля. □

**Следствие 1 (теорема Фишера-Рисса).** *Все сепарабельные гильбертовы пространства изометрически изоморфны между собой.*

## 5.4 Теорема Рисса об общем виде линейного функционала

**Теорема 5.9 (Рисса о представлении).** *Каждый линейный ограниченный функционал $f \in H^*$ допускает единственное представление вида*

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \tag{5.5}$$

*где $a \in H$, причем*

$$\|f\| = \|a\|.$$

Доказательство.

1. Если $a \in H$ — фиксированный вектор, то (5.5), очевидно, задаёт линейный функционал. Определим его норму:

$$|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leqslant \|a\| \, \|x\| \quad x \in H;$$

$$\|f\| \leqslant \|a\|;$$

$$\left| f(\frac{a}{\|a\|}) \right| = \langle a, \frac{a}{\|a\|} \rangle = \|a\|.$$

   Таким образом

$$\|f\| = \|a\|$$

2. Пусть $f \in H^*$. Будем считать, что $f \neq 0$, потому что в противном случае достаточно взять $a = 0$. Тогда $M = \operatorname{Ker} f \neq H$.

   Возьмем ненулевой вектор $b \in \operatorname{Ker} f$. Очевидно, что (проверяется непосредственно)

$$f(x)b - f(b)x \in \operatorname{Ker} f.$$

   Тогда $f(x)b - f(b)x \perp b$. В таком случае

$$\langle f(x)b - f(b)x, b \rangle = f(x)\langle b, b \rangle - f(b)\langle x, b \rangle = 0,$$

откуда получаем

$$f(x) = \frac{f(b)\langle x, b\rangle}{\|b\|^2} = \langle x, \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b\rangle = \langle x, a\rangle,$$

где $a = \dfrac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b$. □

# 6 Теорема Хана-Банаха

Далее $X$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

**Определение 6.1.** Отображение $p\colon X \to \mathbb{R}$ называется *полунормой*, если для всех $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{K}$

1. $p(x) \geqslant 0$;
2. $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$;
3. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Очевидно, что всякая полунорма является нормой.

**Пример 6.1.** Отображение $p\colon C[a, b] \to \mathbb{R}$, $p(x) = \max\limits_{t\in[a,c]} |x(t)|$, где $c < b$, является полунормой, но не является нормой. ♢

**Определение 6.2.** *Носителем* функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется множество

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}},$$

где черта, как обычно, означает замыкание.

**Определение 6.3.** Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если её носитель — компактное множество в $\mathbb{R}$.

**Пример 6.2.** Множество финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(\mathbb{R})$ можно наделить семейством полунорм по формуле

$$p_{k,a,b} = \max_{t\in[a,b]} \left| x^{(k)}(t) \right|, \quad k \geqslant 0.$$

♢

**Определение 6.4.** Пусть $M \subset X$ — линейное подпространство, $f_0\colon M \to \mathbb{K}$ — линейный функционал. Будем говорить, что линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{K}$ является *продолжением* $f_0$ на $X$ если

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in M.$$

**Теорема 6.1 (Хана-Банаха).** *Пусть $X$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $p$ — полунорма на $X$, $M \subset X$ — подпространство из $X$ и $f_0 \colon M \to \mathbb{K}$ — линейный функционал со свойством*

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \quad x \in M.$$

*Тогда существует такой линейный функционал $f \colon X \to \mathbb{K}$, что*

1. *$f$ — продолжение $f_0$ на $X$;*

2. *$|f(x)| \leqslant p(x)$, $x \in X$.*

**Следствие 1.** *Пусть $X$ — линейное нормированное пространство. Тогда для всякого $x_0 \neq 0$ из $X$ существует такой линейный ограниченный функционал $f \in X^*$, что*

1. *$|f(x_0)| = \|x_0\| \neq 0$;*

2. *$\|f\| = 1$.*

Доказательство. Пусть $M = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}$.
Функционал $f_0 \in M^*$ определим по правилу

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|,$$

а в качестве полунормы $p$ возьмём норму:

$$p(x) = \|x\|, \quad x \in X.$$

По теореме Хана-Банаха существует продолжение $f_0$ на $X$, причем

1. $f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\| \neq 0$;

2. $|f(x)| \leqslant \|x\|$.

В таком случае получаем, что $\|f\| = 1$. □

Из этого следствия ясно видно, что если $X \neq \{0\}$, то и $X^* \neq \{0\}$.
Рассмотрим пространство $(X^*)^*$, которое далее будем обозначать $X^{**}$. Зафиксируем некоторый $x_0 \in X$ и определим функционал $\xi_{x_0} \in X^{**}$ по правилу

$$\xi_{x_0}(f) = f(x_0), \quad f \in X^*. \tag{6.1}$$

Из следствия 1 получаем, что

$$\|\xi_{x_0}\| = \|x_0\|.$$

Таким образом мы построили инъективное (проверьте!) отображение $\xi_\bullet \colon X \to X^{**}$. Такое отображение называется *каноническим вложением* пространства $X$ в $X^{**}$. Заметим, что это линейный ограниченный оператор, сохраняющий норму.

**Определение 6.5.** Банахово пространство $X$ называется *рефлексивным*, если каждый функционал из $X^{**}$ представим в виде (6.1). Иначе говоря, каноническое вложение осуществляет изометрический изоморфизм между $X$ и $X^{**}$.

Примерами рефлексивных пространств являются лебеговы пространства $L^p[a,b]$, $\ell^p$, где $p \in [1,\infty)$. С другой стороны, пространства $\ell^\infty$ и $C[a,b]$ не рефлексивны.

# 7 Элементы нелинейного анализа

## 7.1 Производная отображения

Всюду далее $X, Y$ — банаховы пространства над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, буквами $U$ и $V$ обозначаются открытые множества в $X$ и $Y$.

**Определение 7.1.** Пусть $f \colon U \subset X \to Y$, $g \colon U \subset X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$. Говорят, что

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to x_0,$$

если справедливо равенство

$$\|f(x)\| = \varepsilon(x) g(x),$$

где $\varepsilon \colon U \subset X \to \mathbb{R}$, $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

**Определение 7.2.** Пусть $f, g \colon U \subset X \to Y$ — отображения, определенные на открытом множестве $U$ из пространства $X$. Отображение $g$ называется *касательным* к $f$ в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = g(x) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{при } x \to x_0,$$

то есть

$$\frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} \to 0 \quad \text{при } x \to x_0,$$

Легко видеть, что «$f$ касательно $g$» есть отношение эквивалентности.

**Определение 7.3.** Отображение $f \colon U \subset X \to Y$ называется *дифференцируемым* в точке $x_0$, если существует такой оператор $A \in$

$L(X,Y)$, что $f$ касательно $g$ в точке $x_0$, где $g$ определено по формуле

$$g(x) = f(x_0) + A(x - x_0), \quad x \in U.$$

Иначе говоря, $f$ дифференцируемо в точке $x_0$ если

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{при } x \to x_0.$$

Если $f$ дифференцируемо в каждой точке $U$, то $f$ называют *дифференцируемым.*

Оператор $A$ называется *производной* отображения $f$ в точке $x_0$. При этом используется привычное обозначение:

$$f'(x_0) = A.$$

Также пишут $Df(x_0), D_{x_0}f$ и т. д.

**Теорема 7.1.** *Определение производной корректно, то есть оператор $A$ определён однозначно для каждой точки $x_0$.*

Доказательство. Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо в точке $x_0$. Тогда $f$ касательно $g$ в точке $x_0$, где $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$. Пусть теперь $g_0(x) = f(x_0) + B(x - x_0)$, $B \in L(X,Y)$, также касательно к $f$ в точке $x_0$. Тогда $g_0$ касательно $g$ в точке $x_0$:

$$g(x) - g_0(x) = (A - B)(x - x_0),$$

причем

$$g(x) - g_0(x) = o(\|x - x_0\|).$$

Примем обозначение $h = x - x_0$. Тогда

$$(A - B)h = o(\|h\|).$$

Раскрывая определение символа «$o$» получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta$, что если $\|h\| < \delta$, то

$$\left\|(A - B)\frac{h}{\|h\|}\right\| < \varepsilon, \quad \|h\| < \delta.$$

Тогда

$$\sup_{\|h\|<\delta}\left\|(A - B)\frac{h}{\|h\|}\right\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|(A - B)x\| = \|A - B\| < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon$ получаем, что $A = B$. $\square$

**Теорема 7.2.** *Пусть* $f, g\colon U \subset X \to Y$ *дифференцируемы в точке* $x_0$. *Тогда* $\alpha f + \beta g$ *также дифференцируемо в точке* $x_0$, *причем*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

Доказательство. Отображения $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x_0$, значит

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|),$$
$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

Домножая эти равенства на $\alpha$ и $\beta$ соответственно и сложив, получаем, в силу свойств символа «$o$»:

$$(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(x_0) + \\ + (\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0))(x - x_0) + o(\|x - x_0\|),$$

то есть, в силу корректности определения производной,

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \qquad \square$$

Следующие две теоремы предлагаются в качестве упражнения.

**Теорема 7.3.** *Если* $f\colon X \to Y$ *— постоянное отображение, то* $f$ *дифференцируемо в любой точке пространства* $X$, *причем* $f'(x) = \mathbf{0}$ *в любой точке* $x \in X$.

**Теорема 7.4.** *Если* $A \in L(X, Y)$, *то отображение* $A$ *дифференцируемо в любой точке* $x \in X$ *и* $A'(x) = A$.

**Теорема 7.5.** *Пусть* $f\colon U \subset X \to Y$ *дифференцируемо в точке* $x_0 \in U$, *а* $g\colon V \subset Y \to Z$ *дифференцируемо в точке* $y_0 = f(x_0)$ *и* $f(U) \subset V$. *Тогда отображение* $h = g \circ f\colon U \subset X \to Z$ *дифференцируемо в точке* $x_0$ *и*

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \in L(X, Z).$$

Доказательство. Рассмотрим приращение отображения $h$:

$$h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = \\ = g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ = g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ = g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \\ + g'(f(x_0))o(\|x - x_0\|) + o(\|f(x) - f(x_0)\|)$$

Покажем, что

$$g'(f(x_0))o(\|x - x_0\|) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = o(\|x - x_0\|)$$

при $x \to x_0$. Введем для краткости замену $h = x - x_0$. Тогда, с учетом того, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} \leqslant f'(x_0),$$

получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\|g'(f(x_0))o(\|h\|) + o(\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|)\|}{\|h\|} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{\|g'(f(x_0))\| \, \|o(\|h\|)\| + \|o(\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|)\|}{\|h\|} = \\
&\qquad = \frac{\|g'(f(x_0))\| \, \varepsilon_1(h) \, \|h\| + \varepsilon_2(h) \, \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} = \\
&= \|g'(f(x_0))\| \, \varepsilon_1(h) + \frac{\varepsilon_2(h) \, \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ при } h \to 0.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$h(x) - h(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \text{ при } x \to x_0.$$

□

См. «Лекции по алгебре» для определения полилинейного (билинейного) оператора.

**Определение 7.4.** Билинейный оператор $A\colon X \times X \to Y$ называется *ограниченным*, если

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\|\leqslant 1, \ \|x_2\|\leqslant 1} \|A(x_1, x_2)\| < \infty.$$

Символом $B_2(X, Y)$ будем обозначать нормированное пространство билинейных ограниченных операторов, действующих из $X \times X$ в $Y$.

Аналогично определяется полилинейный ограниченный оператор. Пространство $n$-линейных ограниченных операторов обозначается $B_n(X, Y)$.

**Теорема 7.6.** *Пространства $L(X, L(X, Y))$ и $B_2(X, Y)$ изометрически изоморфны.*

Доказательство. Пусть отображение

$$J\colon L(X, L(X, Y)) \to B_2(X, Y)$$

действует по правилу

$$(JA)(x_1, x_2) = (Ax_1)x_2.$$

Очевидно, это линейный оператор между $L(X, L(X, Y))$ и $B_2(X, Y)$. Биективность проверяется непосредственно. Проверим изометричность:

$$\begin{aligned} \|JA\|_{B_2(X,Y)} &= \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ \|x_2\|\leqslant 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y = \\ &= \sup_{\|x_1\|\leqslant 1} \Big( \sup_{\|x_2\|\leqslant 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y \Big) = \sup_{\|x_1\|\leqslant 1} \big( \|Ax_1\|_{L(X,Y)} \big) = \\ &= \|A\|_{L(X,L(X,Y))}. \end{aligned}$$ □

Аналогичный результат справедлив для полилинейных операторов:

**Теорема 7.7.** *Пространства* $L(\underbrace{X, L(X, \ldots, L(X}_{n\ \text{раз}}, Y)))$ *и* $B_n(X, Y)$ *изометрически изоморфны.*

Из этих теорем, в частности, следует, что $B_n(X, Y)$ — банахово пространство, если $Y$ банахово.

**Определение 7.5.** Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ дифференцируемо в каждой точке $U$ и отображение $f'\colon U \subset X \to L(X, Y)$ дифференцируемо в точке $x_0$. Тогда *второй производной* отображения $f$ в точке $x_0$ называется производная отображения $f'$ в точке $x_0$.

Таким образом, вторая производная отображения $f$ в точке $x_0$ есть линейный оператор $f''(x_0) \in L(X, L(X, Y))$, или, в силу предыдущей теоремы, вторую производную можно считать билинейным оператором из $B_2(X, Y)$.

Аналогично определяется $n$-ая производная отображения $f$ в точке $x_0$. Тогда $f^{(n)}(x_0) \in B_n(X, Y)$.

**Определение 7.6.** Отображение $f\colon U \subset X \to Y$ называется *$n$ раз непрерывно дифференцируемым*, если для каждого $k = \overline{1, n}$ существует $k$-ая производная $f^{(k)}(x)$, определенная для всех $x \in U$ и при этом $f^{(n)}\colon U \subset X \to B_n(X, Y)$ — непрерывное отображение.

Пусть $A \in B_n(X, Y)$. Введём следующее обозначение:

$$Ah^n := A(h, \ldots, h).$$

Договоримся также, что $f^{(0)}(x) = f(x)$ для всех $x \in U$, и $h^0 = 1 \in \mathbb{K}$.

**Теорема 7.8 (Тейлора).** *Пусть отображение $f\colon U \subset X \to Y$ $n$ раз непрерывно дифференцируемо. Тогда для любой точки $x_0 \in U$ и любого вектора $h$ такого, что $x_0 + h \in U$, имеет место формула (Тейлора):*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + o(\|h\|^n) \text{ при } h \to 0.$$

## 7.2 Задачи на экстремум

**Определение 7.7.** Точка $x_0 \in U$ называется *точкой локального минимума (максимума)* функции $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$, если существует шар $B(x_0, \varepsilon) \subset U$ такой, что $f(x_0) \leqslant f(x)$ $(f(x_0) \geqslant f(x))$ для всех $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Если же выполняется строгое неравенство, то точка $x_0$ называется *точкой строгого локального минимума (максимума)*.

Точка, являющаяся точкой (строгого) локального минимума либо максимума, также называется *точкой (строгого) локального экстремума*.

**Теорема 7.9 (Ферма).** *Пусть $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке $x_0$ функция и $x_0 \in U$ — точка локального экстремума. Тогда $f'(x_0) = 0$, то есть $f'(x_0) \in X^*$ — нулевой функционал.*

Доказательство. Пусть, для определенности, $x_0$ — точка локального минимума (случай локального максимума рассматривается аналогично), и для всех $h \in X$ таких, что $\|h\| < \varepsilon$ выполняется условие $f(x_0 + h) \geqslant f(x_0)$.

Предположим противное: пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда найдется такой вектор $h_0$, $\|h_0\| < \varepsilon$, что $\alpha_0 = f'(x_0)h_0 > 0$. Пусть $t \in (-1, 0) \subset \mathbb{R}$. Тогда, разумеется, $\|th_0\| < \varepsilon$ и $f'(x_0)(th_0) < 0$. В силу дифференцируемости функции в точке $x_0$ справедливо равенство

$$f(x_0 + th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t).$$

Тогда

$$0 \leqslant f(x_0 + th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t) = t\left(\alpha_0 + \frac{o(t)}{t}\right).$$

Но, поскольку $\alpha_0 > 0$, при достаточно малых $t < 0$ справедливо

$$\alpha_0 + \frac{o(t)}{t} > 0,$$

откуда следует, что в правой части равенства стоит строго отрицательная величина. Получили противоречие. $\square$

**Определение 7.8.** Билинейная форма $\xi\colon X^2 \to \mathbb{R}$ называется равномерно положительной (равномерно отрицательной), если существует такая константа $c > 0$, что для всех $h \in X$

$$\xi(h,h) \geqslant c\,\|h\|^2$$

$$(\xi(h,h) \leqslant -c\,\|h\|^2).$$

**Теорема 7.10 (достаточное условие экстремума).** *Пусть $f\colon U \subset X \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция, $f'(x_0) = 0$ и пусть $f''(x_0)$ — равномерно отрицательная (равномерно положительная) билинейная форма. Тогда $x_0$ — точка строгого локального максимума (минимума).*

Доказательство. Пусть, для определённости, $f''(x_0)$ равномерно отрицательна, то есть существует такая константа $\alpha > 0$, что

$$f''(x_0)h^2 \leqslant -\alpha\left\|h^2\right\|.$$

Разложим функцию по формуле Тейлора в окрестности $x_0$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\|h\|^2).$$

Поскольку $f'(x_0) = 0$,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\|h\|^2) \leqslant -\frac{\alpha\,\|h\|^2}{2} + o(\|h\|^2).$$

Найдется такое $\delta > 0$, что при $\|h\| < \delta$ выполняется неравенство $o(\|h\|^2) \leqslant \frac{\alpha}{4}\,\|h\|^2$, поэтому

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leqslant -\frac{\alpha\,\|h\|^2}{2} + o(\|h\|^2) \leqslant -\frac{\alpha\,\|h\|^2}{4} < 0$$

при $\|h\| < \delta$. А это в точности и означает, что $x_0$ — точка строгого локального максимума. Аналогично рассматривается случай локального минимума. $\square$