

# Содержание

<b>1</b>	<b>Элементы теории меры и интеграла</b>	<b>1</b>
1.1	Пространства с мерой . . . . .	1
1.2	Интегрирование простых функций . . . . .	3
1.3	Интегрирование измеримых функций . . . . .	7
1.4	Пространства Лебега . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Ограниченные операторы</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Принцип равномерной ограниченности</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Ряды в банаховом пространстве</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Гильбертовы пространства</b>	<b>14</b>
5.1	Начальные сведения . . . . .	14
5.2	Теорема об ортогональном дополнении . . . . .	16
5.3	Базис в гильбертовом пространстве . . . . .	19
5.4	Теорема Рисса . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Теорема Хана-Банаха</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Элементы нелинейного анализа</b>	<b>26</b>
7.1	Производная отображения . . . . .	26
7.2	Задачи на экстремум . . . . .	31
<b>8</b>	<b>Элементы теории функции комплексной переменной</b>	<b>33</b>

## 1 Элементы теории меры и интеграла

### 1.1 Пространства с мерой

**Определение 1.1.** Пусть  $X$  — непустое множество. Семейство подмножеств  $\mathcal{F}$  из  $X$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если выполняются следующие условия:

1.  $X \in \mathcal{F}$ ;
2.  $X \setminus A \in \mathcal{F}$  для всех  $A$  из  $\mathcal{F}$ ;
3.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$  для всех  $A_i, i \in \mathbb{N}$  из  $\mathcal{F}$ .

Подмножества, принадлежащие этому семейству, называются *измеримыми*.

**Определение 1.2.** Отображение  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  называется *мерой*, если

1.  $\mu(A) \geq 0$  для всех измеримых подмножеств  $A$ ;
2.  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  для любой последовательности  $\{A_i\}$  взаимно непересекающихся измеримых подмножеств.

**Теорема 1.1.** *Справедливы следующие свойства:*

1. Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество;
2. Если  $E_1$  и  $E_2$  — измеримые множества и  $E_1 \subset E_2$ , то

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. методичку

□

**Определение 1.3.** Тройка  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , где  $X$  — непустое множество,  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых подмножеств из  $X$ , а  $\mu$  — мера, называется *пространством с мерой*.

**Пример 1.1.** Пусть  $X$  — некоторое непустое множество. В качестве  $\mathcal{F}$  возьмем всевозможные подмножества из  $X$ . Очевидно, что они образуют  $\sigma$ -алгебру. Мету  $\mu_a: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $a$  — некоторый элемент из  $X$ , определим следующим образом:

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство того, что определенная таким образом функция в самом деле является мерой, элементарно (см. методичку).

Построенная мера называется *мерой Дирака, сосредоточенной в точке  $a$* . ◇

**Пример 1.2.** В качестве  $X$  возьмем вещественную прямую  $\mathbb{R}$ . Определим длину интервала  $(a, b)$  равенством  $\mu((a, b)) = b - a$ . Любое открытое множество на прямой представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся интервалов. Тогда определим меру открытого множеств по формуле  $\mu(G) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$ , где  $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ .

Пусть  $E \subset \mathbb{R}$  — ограниченное множество на прямой. Его можно покрыть некоторым открытым множеством  $G \supset E$ . Величина  $\mu^*(E) = \inf_{G \supset E} \mu(G)$ , где инфимум берется по всем открытым покрытиям  $E$ , называется *верхней мерой* множества  $E$ .

*Нижняя мера* множества  $E$  определяется по формуле  $\mu_*(E) = b - a - \mu([a, b] \setminus E)$ , где  $[a, b]$  — наименьший отрезок, содержащий множество  $E$ .

Назовём ограниченное множество  $E$  *измеримым по Лебегу*, если  $\mu_*(E) = \mu^*(E)$ . Тогда *мерой Лебега* множества  $E$  назовём общее значение верхней и нижней мер этого множества.

Мера Лебега также определяется и для неограниченных множеств. Для этого в качестве нижней меры множества  $E$  берется предел нижних мер множеств вида  $E_n = E \cap [-n, n]$  при  $n \rightarrow \infty$ . Этот предел существует или бесконечен, поскольку последовательность  $\mu_*(E_n)$ , как можно показать, монотонно неубывает.  $\diamond$

**Теорема 1.2.** *Тройка  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ , где  $\mathcal{F}$  — множество измеримых по Лебегу множеств на прямой, а  $\mu$  — мера Лебега, является пространством с мерой.*

**Пример 1.3.** Тройка  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , где  $\Omega$  — пространство элементарных исходов,  $\mathfrak{A}$  — алгебра событий,  $P$  — вероятностная мера, является пространством с мерой.  $\diamond$

## 1.2 Простые функции. Интегрирование простых функций

Пусть далее  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  — пространство с мерой,  $E \in \mathcal{F}$  — некоторое измеримое подмножество.

**Определение 1.4.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется *простой*, если  $E$  можно представить в виде счетного объединения взаимно непересекающихся измеримых подмножеств  $E_i$  так, что функция  $f$  принимает на этих подмножествах постоянное значение:  $f(x) = a_i$  для всех  $x$  из  $E_i$ .

Функция  $f$  называется *ступенчатой*, если такое объединение конечно.

**Пример 1.4.** Пусть  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$  — прямая с мерой Лебега,  $E = [0, 1]$ . Функция Дирихле, определенная на  $E$  и принимающая значение 1 для рациональных аргументов и 0 для иррациональных, является простой (и даже ступенчатой). В качестве  $E_1$  можно взять множество рациональных чисел из отрезка  $E$ , а в качестве  $E_2$  — множество иррациональных чисел из того же отрезка. Оба этих множества измеримы по Лебегу.  $\diamond$

**Лемма 1.1.** *Линейная комбинация простых функций, определенных на измеримом множестве  $E$  является простой функцией.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что  $\alpha f + \beta g$  также простая функция для простых функций  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  и чисел  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Пусть

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j,$$

причем

$$\begin{aligned} f(x) &= a_i, & x \in E_i, \\ g(x) &= b_j, & x \in F_j. \end{aligned}$$

Обозначим  $G_{ij} = E_i \cap F_j$ . Это также измеримые множества. Более того непосредственно проверяется, что

$$E = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} G_{ij}.$$

На множестве  $G_{ij}$  функция  $\alpha f + \beta g$  принимает значение

$$(\alpha f + \beta g) = \alpha a_i + \beta b_j.$$

Этим доказано, что функция  $\alpha f + \beta g$  простая, принимающая постоянные значения на множествах  $G_{ij}$ .  $\square$

Из этой леммы следует, что простые функции образуют линейное пространство.

Далее будем считать, что мера множества  $E$  конечна.

**Определение 1.5.** Простая функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется *абсолютно суммируемой*, если конечна величина

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \mu(E_i),$$

в обозначениях предыдущего определения.

**Определение 1.6.** *Интегралом* от абсолютно суммируемой функции  $f$  называется сумма вида

$$\int_E f(x) d\mu(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i).$$

Аргумент в записи интеграла часто опускают и пишут просто

$$\int_E f \, d\mu.$$

В следующей теореме доказываются основные свойства интеграла от абсолютно суммируемых функций.

**Теорема 1.3.** Пусть  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  — абсолютно суммируемые функции. Тогда справедливы следующие свойства:

1. *Линейность:* для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  функция  $\alpha f + \beta g$  абсолютно суммируема и справедливо равенство

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu + \beta \int_E g \, d\mu;$$

2. *Оценка модуля интеграла:*

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \mu(E) \sup_{x \in E} |f(x)|;$$

3. *Неотрицательность:* если  $f \geq 0$ , то

$$\int_E f \, d\mu \geq 0;$$

4. *Монотонность:* если  $f \geq g$ , то

$$\int_E f \, d\mu \geq \int_E g \, d\mu;$$

5. *Аддитивность:* если  $E$  представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся измеримых подмножеств  $A_k$ , то

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{A_k} f \, d\mu.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

1. Абсолютная суммируемость линейной комбинации следует из предыдущей леммы, свойств абсолютно сходящихся числовых рядов и из свойства монотонности меры.

Покажем, что справедливо указанное в утверждении теоремы

равенство. Будем пользоваться обозначениями из леммы.

$$\begin{aligned}
 \int_E (\alpha f + \beta g) d\mu &= \sum_{i,j=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_j) \mu(G_{ij}) = \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(G_{ij}) = \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}).
 \end{aligned}$$

Поскольку, как нетрудно видеть,  $E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{ij}$ ,  $F_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ij}$ , а множества  $G_{ij}$  взаимно не пересекаются, из свойства аддитивности меры получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(E_i); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(F_j).$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
 \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i) + \\
 &+ \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(F_j) = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.
 \end{aligned}$$

2. Тривиально (неравенство треугольника, аддитивность меры).
3. Тривиально.
4. Рассмотреть функцию  $f - g$  и применить линейность и предыдущее свойство.
5. Рассмотреть взаимно непересекающиеся множества вида  $H_{ik} = E_i \cap A_k$ , на которых функция принимает постоянные значения  $c_{ik}$ , и которые образуют разбиение  $E$ :

$$\int_E f d\mu = \sum_i \sum_k c_{ik} \mu(H_{ik}) = \sum_k \sum_i c_{ik} \mu(H_{ik}) = \sum_k \int_{A_k} f d\mu$$

□

### 1.3 Измеримые функции. Интегрирование измеримых функций

**Определение 1.7.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная на измеримом множестве  $E$ , называется *измеримой*, если она является равномерным пределом на  $E$  последовательности простых функций, т.е. существует такая последовательность  $\{f_n\}$ ,  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$\sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Определение 1.8.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  называется *измеримой*, если

$$f^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 1.4.** Вышеприведенные определения измеримой функции эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. в методичке на с. 51 (требуется только необходимость).  $\square$

**Определение 1.9.** Если существует последовательность простых интегрируемых функций, сходящаяся равномерно к измеримой функции  $f$ , то *интегралом* функции  $f$  назовем предел

$$\int_E f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Можно показать, что предел (быть может, бесконечный) всегда существует и не зависит от выбора последовательности  $f_n$ .

**Определение 1.10.** Неотрицательная функция  $f$  называется *интегрируемой* на множестве  $E$ , если предел из предыдущего определения конечен.

Всякая измеримая функция  $f$  представима в виде разности двух неотрицательных измеримых функций:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}.$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Тогда если хотя бы одна из функций  $f_+$  или  $f_-$  интегрируема, интегралом функции  $f$  назовём величину

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu.$$

**Определение 1.11.** В случае, когда  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу множеств на  $\mathbb{R}$ ,  $\mu$  — мера Лебега, интеграл, определённый по схеме, приведённой в данном разделе, называется *интегралом Лебега на прямой*.

**Теорема 1.5.** Если  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$  — прямая с мерой Лебега,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Риману, то тогда она интегрируема по Лебегу и значения интегралов Римана и Лебега совпадают.

## 1.4 Пространства Лебега

**Определение 1.12.** Функция  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая на измеримом множестве  $E$ , называется *суммируемой со степенью  $p$* ,  $p \geq 1$ , если величина

$$\int_E |f(x)|^p d\mu(x)$$

определена и конечна.

**Определение 1.13.** Будем говорить, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на измеримом множестве  $E$ , если оно выполнено на всём множестве  $E$ , за исключением, быть может, множества меры нуль.

**Определение 1.14.** Две функции  $f_1, f_2: E \rightarrow \mathbb{R}$  назовём *эквивалентными* на множестве  $E$ , если их значения совпадают почти всюду.

Отношение  $\sim$ , введённое в определении выше, является отношением эквивалентности.

Пусть  $\mathcal{L}^p(E, \mu)$ ,  $p \geq 1$  — линейное пространство суммируемых со степенью  $p$  функций, определенных на множестве  $E$ .

Рассмотрим фактормножество  $L^p(E, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mu) / \sim$ . Оно также будет являться линейным пространством. В нём можно ввести норму по формуле

$$\|\tilde{f}\|_p = \left( \int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Классы эквивалентности из  $L^p(E, \mu)$ , допуская неточность, часто отождествляют с функциями-представителями из этого класса.

Если  $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\mu$  — мера Лебега на прямой, то вместо  $L^p([a, b], \mu)$  обычно пишут просто  $L^p[a, b]$ .

**Теорема 1.6 (Лебега).**  $L^p(E, \mu)$  — банахово пространство.



## 2 Ограниченные операторы

Далее  $X$  и  $Y$  — нормированные пространства над полем  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**Определение 2.1.** Отображение  $A: X \rightarrow Y$  называется *линейным оператором*, действующим из пространства  $X$  в  $Y$ , если

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Если  $Y = \mathbb{K}$ , то вместо слова «оператор» говорят «функционал».

**Пример 2.1.** Отображение  $D: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , определённое по правилу  $Dx = x'$  называется *оператором дифференцирования*. Это линейный оператор.  $\diamond$

**Пример 2.2.** Отображение  $J: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , определённое по правилу

$$(Jx)(t) = \int_a^t x(s) \, ds, \quad t \in [a, b],$$

называется *оператором неопределённого интегрирования*.  $\diamond$

**Пример 2.3.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  — пространство с мерой,  $L^1(\Omega, \mu)$  — банахово пространство классов эквивалентности суммируемых функций на  $\Omega$ . Отображение  $J_0: L^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ , определённое по правилу

$$J_0 x = \int_{\Omega} x \, d\mu,$$

есть линейный функционал.  $\diamond$

**Пример 2.4.** Отображение  $A: \ell^1 \rightarrow \ell^\infty$ , определённое по правилу

$$(Ax)(n) = \sum_{k=1}^n x(k),$$

есть линейный оператор, который каждой последовательности из  $\ell^1$  ставит в соответствие её последовательность частичных сумм.  $\diamond$

**Пример 2.5.** Отображение  $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , определённое по правилу

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) \, ds, \quad t \in [a, b],$$

где  $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, называется *интегральным оператором*. При этом функция  $K$  называется *ядром* этого интегрального оператора.  $\diamond$

**Определение 2.2.** Оператор  $A: X \rightarrow Y$  между нормирован-

ными пространствами называется *ограниченным*, если величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

конечна. Эта величина, в таком случае, называется нормой оператора  $A$ .

Можно показать, что все следующие определения нормы совпадают с данным выше:

1.  $\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|$
2.  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$
3.  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ;
4.  $\|A\| = \inf \{C \geq 0 : \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq C \|x\|\}$

Нетрудно видеть, что  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$  для всех  $x \in X$ .

**Пример 2.6.** Рассмотрим оператор умножения  $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $Ax = ax$ , где  $a \in \mathbb{C}$ . Если  $\|x\| = |x| = 1$ , то

$$\|Ax\| = |ax| = |a|.$$

Таким образом  $\|A\| = |a|$ . ◇

Множество всех линейных ограниченных операторов между нормированными пространствами  $X$  и  $Y$  будем обозначать  $L(X, Y)$ .

**Теорема 2.1.**  $L(X, Y)$  — нормированное пространство.

**Доказательство.** Непосредственно доказывается, что сумма ограниченных операторов есть ограниченный оператор. Также легко показать, что норма оператора — в самом деле норма в  $L(X, Y)$ . Установим, например, справедливость неравенства треугольника. Пусть  $A, B \in L(X, Y)$  и  $\|x\| = 1$ . Тогда

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|.$$

Взяв верхнюю грань по всем  $x$  с нормой 1, получим, что

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

□

**Теорема 2.2.** Если  $Y$  — банахово пространство, то  $L(X, Y)$  — банахово пространство.

**Доказательство.** см. Антонец, Радыно, 1984, с. 180. □

**Определение 2.3.** Если  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  и  $f$  — линейный оператор, то  $f$  называют *линейным функционалом* на  $X$ .

Пространство ограниченных линейных функционалов  $L(X, \mathbb{K})$  называют *сопряженным пространством* к пространству  $X$  и обозначают символом  $X^*$ .

**Теорема 2.3.** Пусть  $A \in L(X, Y)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $A$  — непрерывное отображение;
2.  $A$  — непрерывное в точке 0 отображение;
3.  $A$  — ограниченный оператор;
4.  $A$  — липшицево отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации  $1 \Rightarrow 2$ , и  $4 \Rightarrow 1$  очевидны. Докажем, что  $2 \Rightarrow 3$ . Непрерывность  $A$  означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \|x\| < \delta \rightarrow \|Ax\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторый  $\varepsilon > 0$  и соответствующий ему  $\delta$ . Тогда для любого  $x \in X$ ,  $\|x\| \leq 1$ , справедливо

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta} \left\| A \left( \frac{\delta}{2} x \right) \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Переходя в неравенстве к верхней грани, получаем, что

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

что и означает ограниченность оператора  $A$ .

Импликация  $3 \Rightarrow 4$  проверяется непосредственно: если  $A$  — ограниченный оператор,  $x_1, x_2 \in X$ , то

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\| \|x_1 - x_2\|. \quad \square$$

### 3 Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза)

**Определение 3.1.** Множество из метрического пространства называется *множеством  $I$  категории* («тощим», «разреженным»),

если его можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств, каждое из которых не содержит шара.

**Определение 3.2.** Множество, не являющееся множеством I категории, называется *множеством II категории* («тучным»).

**Теорема 3.1 (Бэра).** *Полное метрическое пространство является множеством II категории.*

Пусть  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства,  $\Omega$  — множество индексов,  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  — семейство ограниченных операторов.

Будем называть семейство операторов *ограниченным поточечно*, если для каждого  $x \in X$  существует такая константа  $M(x) > 0$ , что

$$\|A_\alpha x\| \leq M(x)$$

для всех  $\alpha \in \Omega$ , то есть для каждого  $x \in X$  множество

$$\{A_\alpha x : \alpha \in \Omega\} \subset Y$$

ограничено в  $Y$ .

Семейство операторов назовём *ограниченным равномерно*, если существует такое число  $C > 0$ , что для всех  $\alpha \in \Omega$  выполнено неравенство

$$\|A_\alpha\| < C,$$

то есть числовое множество

$$\{\|A_\alpha\| : \alpha \in \Omega\}$$

ограничено.

**Теорема 3.2 (Банаха-Штейнгауза).** *Если семейство операторов  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ , действующих из банахова пространства  $X$  в нормированное пространство  $Y$ , ограничено поточечно, то оно ограничено и равномерно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим множества вида

$$X_n = \{x \in X : \forall \alpha \in \Omega \ \|A_\alpha x\| \leq n\}.$$

В силу поточечной ограниченности семейства,  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ .

Каждое из множеств  $X_n$  замкнуто. В самом деле: если  $\{x_k\}$  — сходящаяся к  $x_0 \in X$  последовательность элементов из  $X_n$ , то, в силу непрерывности операторов  $A_\alpha$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_\alpha x_k\| = \|A_\alpha x_0\|$ , а поскольку для всех  $x_k$  и всех  $\alpha \in \Omega$  выполняется неравенство  $\|A_\alpha x_k\| \leq n$ , то и  $\|A_\alpha x_0\| \leq n$ , а значит  $x_0 \in X_n$ , что и означает замкнутость  $X_n$ .

Поскольку пространство  $X$  полно, по теореме Бэра существует такой номер  $n_0$ , что  $X_{n_0}$  содержит в себе шар, который будем обозначать  $B(x', r)$ , где  $r$  — радиус этого шара, а  $x'$  — его центр.

Для всех элементов  $x$  из  $B(x', r)$  и для всех  $\alpha \in \Omega$  справедливо, что

$$\|A_\alpha x\| \leq n_0,$$

то есть значения  $\|A_\alpha x\|$  ограничены на этом шаре. Покажем, что они ограничены и на единичном шаре, что будет означать ограниченность норм  $A_\alpha$ .

Пусть  $x \in B(0, 1)$ . Тогда, как нетрудно проверить,  $z = rx + x' \in B(x', r)$ . В таком случае для всех  $\alpha \in \Omega$

$$\|A_\alpha x\| = \left\| A_\alpha \left( \frac{z - x'}{r} \right) \right\| \leq \frac{1}{r} (\|A_\alpha z\| + \|A_\alpha x'\|) \leq \frac{2n_0}{r},$$

откуда, взяв верхнюю грань по всем  $x \in B(0, 1)$ , получаем утверждение теоремы.  $\square$

## 4 Ряды в банаховом пространстве

**Определение 4.1.** *Рядом* элементов из нормированного пространства  $X$  называется пара последовательностей  $(x_n, s_n)$ , связанных соотношением

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

$x_n$  называют  *$n$ -ым членом* ряда, а  $s_n$  —  *$n$ -ой частичной суммой* ряда.

**Определение 4.2.** Говорят, что ряд  $(x_n, s_n)$  сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Тогда предел этой последовательности называют суммой ряда и обозначают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

**Определение 4.3.** Говорят, что ряд  $(x_n, s_n)$  *абсолютно сходится*, если сходится числовой ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

**Теорема 4.1.** Если ряд элементов из банахова пространства сходится абсолютно, то он сходится.

**Теорема 4.2.** Пусть задан ряд  $(x_n, s_n)$  элементов из банахова пространства  $X$  и существует числовой ряд  $a_n$  такой, что для всех  $n$  выполняется неравенство

$$\|x_n\| \leq a_n.$$

Тогда ряд  $(x_n, s_n)$  сходится абсолютно.

Эти теоремы доказываются аналогично знакомым теоремам из курса математического анализа.

## 5 Гильбертовы пространства

### 5.1 Начальные сведения

**Определение 5.1.** Линейное пространство  $H$  над полем  $\mathbb{K}$  называется *пространством со скалярным произведением*, если в нем задана функция  $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ , такая что для всех  $x, y, z \in H$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  справедливы следующие свойства:

1.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (невыврожденность);
2.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  (положительная определённость);
3.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$  (линейность по первому аргументу);
4.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  (эрмитова симметричность).

Такая функция называется *скалярным произведением*.

Далее будем рассматривать только комплексные пространства со скалярным произведением.

В пространстве со скалярным произведением можно ввести норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (5.1)$$

Неравенство треугольника следует из неравенства

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad (5.2)$$

которое называют *неравенством Коши-Буняковского-Шварца* или просто *неравенством Шварца*.

**Теорема 5.1.** Пусть  $\{x_n\}, \{y_n\}$  — последовательности из  $H$ , причем  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ . Тогда  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем неравенство Шварца:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \square \end{aligned}$$

**Определение 5.2.** Если пространство со скалярным произведением полно по норме, определённой равенством (5.1), то оно называется *гильбертовым пространством*.

**Пример 5.1.** Лебегово пространство  $L^2(E, \mu)$  является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определённым по формуле

$$\langle f, g \rangle = \int_E f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

Существование этого интеграла следует из неравенства

$$|f(x) \overline{g(x)}| \leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2}. \quad \diamond$$

**Пример 5.2.** В частности, гильбертовым пространством является пространство суммируемых с квадратом последовательностей  $\ell^2$ . Скалярное произведение задаётся формулой

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Сходимость ряда обеспечивается аналогичной оценкой.  $\diamond$

**Определение 5.3.** Векторы  $x, y \in H$  называются *ортгоналичными*, если  $\langle x, y \rangle = 0$ . При этом пишут  $x \perp y$ .

**Определение 5.4.** Пусть  $M \subset H$  — множество из  $H$ . Тогда говорят, что вектор  $x \in H$  *ортгонален*  $M$ , если  $x$  ортгонален любому вектору  $m \in M$  (в этом случае используется обозначение  $x \perp M$ ).

**Теорема 5.2.** Для всех векторов  $x, y \in H$  выполняется тождество параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывается элементарными преобразованиями.  $\square$

## 5.2 Теорема об ортогональном дополнении

**Определение 5.5.** Множество  $A \subset X$  называется *выпуклым*, если для любых векторов  $a, b \in A$  векторы вида  $(1-t)a + tb, t \in [0, 1]$  также лежат в  $A$ .

Очевидно, всякое подпространство в нормированном пространстве является выпуклым множеством.

**Теорема 5.3 (о наилучшем приближении).** Пусть  $A \subset H$  — непустое выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда для любого  $x \in H \setminus A$  найдётся единственный вектор  $a_0 \in A$  такой, что

$$\|x - a_0\| = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Иначе говоря, в  $A$  найдется вектор  $a_0$ , который находится от  $x$  на наименьшем возможном расстоянии. Такой вектор  $a_0$  называется элементом наилучшего приближения вектора  $x$  в множестве  $A$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По определению нижней грани, существует такая последовательность  $\{a_n\}$  элементов из  $A$ , что

$$d_n = \|x - a_n\| \rightarrow \inf_{a \in A} \|x - a\| = d.$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальна.

По тождеству параллелограмма получаем:

$$\begin{aligned} \|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2 &= \\ &= 2 \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right). \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть равенства стремится к  $4d^2$  при стремлении  $n$  и  $m$  к бесконечности. Разделим обе части равенства на 4:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left( \|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2 \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right). \end{aligned}$$

После преобразований получаем:

$$\left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 + \frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} = \frac{1}{2} \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right).$$



Поскольку множество  $A$  выпукло, вектор  $(a_n + a_m)/2$  принадлежит  $A$ , а значит, в силу определения нижней грани, справедлива оценка

$$\left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \geq d^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} &= \frac{1}{2} \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right) - \left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right) - d^2. \end{aligned}$$

Правая часть неравенства стремится к нулю, а это значит, что  $\|a_n - a_m\|$  также стремится к нулю, что и означает фундаментальность последовательности  $\{a_n\}$ .

Поскольку пространство полно, существует вектор  $a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . В силу замкнутости множества  $A$  этот вектор также лежит в  $A$ . При этом

$$\|x - a_0\| \leq \|x - a_n\| + \|a_n - a_0\| \rightarrow d, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть  $\|x - a_0\| = d$ , что и означает, что  $a_0$  является элементом наилучшего приближения  $x$  в  $A$ .

Покажем, что других векторов наилучшего приближения в  $A$  нет. Пусть  $a'_0 \in A$  и  $\|a'_0 - x\| = d$ . Тогда, снова используя тождество параллелограмма, получаем

$$4 \left\| x - \frac{a_0 - a'_0}{2} \right\|^2 + \|a_0 - a'_0\|^2 = 2 \|x - a_0\|^2 + 2 \|x - a'_0\|^2 = 4d^2.$$

Первый квадрат нормы не меньше  $4d^2$ , откуда следует, что второй не превосходит нуля, а значит

$$\|a_0 - a'_0\|^2 = 0,$$

то есть  $a_0 = a'_0$ . □

**Определение 5.6.** Пусть  $M \subset H$  — подпространство из  $H$ . Вектор  $a \in M$  называется *проекцией* вектора  $x \in H$  на  $M$  если  $x - a \perp M$ , то есть для всех  $t \in M$  выполняется равенство

$$\langle x - a, t \rangle = 0.$$

**Теорема 5.4.** Если  $M \subset H$  — замкнутое подпространство,  $x \in H \setminus M$ , то тогда вектор  $a \in M$  является проекцией  $x$  на  $M$  тогда и только тогда, когда  $a$  — элемент наилучшего приближения  $x$  в  $M$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

**Необходимость:**

Пусть  $x - a \perp M$ . Тогда по теореме Пифагора для любого  $m \in M$  справедливо равенство

$$\|x - m\|^2 = \|x - a\|^2 + \|a - m\|^2.$$

Значит,

$$\inf_{m \in M} \|x - m\| = \|x - a\|,$$

откуда и следует, что  $a$  — элемент наилучшего приближения  $x$  в  $M$ .

**Достаточность:**

Пусть  $a \in M$  — элемент наилучшего приближения  $x$  в  $M$ , то есть

$$\inf_{m \in M} \|x - m\| = \|x - a\| = d.$$

Покажем, что для любого  $m \in M$  выполнено равенство  $\langle x - a, m \rangle = 0$ .

Обозначим  $x - a = z$  и пусть  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|x - (a + tm)\|^2 &= \|z - tm\|^2 = \langle z - tm, z - tm \rangle = \\ &= \|z\|^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle + t^2 \|m\|^2 = d^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle + t^2 \|m\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $a + tm \in M$ ,  $\|x - (a + tm)\|^2 \geq d^2$ , откуда

$$d^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle + t^2 \|m\|^2 \geq d^2,$$

то есть при всех  $t \in \mathbb{R}$

$$t^2 \|m\|^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle \geq 0,$$

что возможно только в случае  $\Re \langle z, m \rangle = 0$ .

Взяв теперь вместо  $t$  величину  $it$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , можно аналогично показать, что  $\Im \langle z, m \rangle = 0$ , что в совокупности даёт

$$\langle z, m \rangle = 0,$$

то есть  $x - a \perp M$ . □

Таким образом мы доказали, что для всякого замкнутого подпространства  $M \in H$  и вектора  $x \in H \setminus M$  существует проекция  $x$  на  $M$ , причём она совпадает с элементом наилучшего приближения  $x$  в  $M$ .

**Определение 5.7.** *Ортогональным дополнением* множества  $A$  из гильбертова пространства  $H$  называется множество

$$A^\perp = \{x \in H : x \perp A\}.$$

Из свойств скалярного произведения и теоремы 5.1 нетрудно видеть, что  $A^\perp$  — замкнутое подпространство из  $H$  для любого подмножества  $A \subset H$ .

**Теорема 5.5 (об ортогональном дополнении).** *Если  $M$  — замкнутое подпространство из  $H$ , то  $H = M \oplus M^\perp$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что всякий вектор  $x \in H$  можно представить в виде суммы векторов из  $M$  и  $M^\perp$ . Пусть  $a$  — элемент наилучшего приближения  $x$  в  $M$ . Тогда по предыдущей теореме  $x - a \perp M$ , то есть  $x - a \in M^\perp$ , откуда получаем

$$x = a + (x - a),$$

где  $a \in M$ ,  $x - a \in M^\perp$ .

Единственность такого представления обеспечивается тем фактом, что

$$M \cap M^\perp = \{0\}. \quad \square$$

### 5.3 Базис в гильбертовом пространстве

**Определение 5.8.** Банахово пространство  $X$  называется *сепарабельным*, если существует такое счетное множество  $M \subset X$ , что  $\overline{M} = X$ , то есть, как еще говорят,  $M$  всюду плотно в  $X$ .

**Определение 5.9.** Множество  $M \subset H$  называется *ортонормированным*, если для всех  $x, y \in M$

1.  $\|x\| = 1$ ;
2.  $x \neq y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ .

**Лемма 5.1.** *В сепарабельном гильбертовом пространстве всякое ортонормированное множество не более чем счетно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $E$  — ортонормированное множество в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда для любых

векторов  $e_1, e_2$  из  $F$  справедливо (проверяется непосредственно):

$$\|e_1 - e_2\| = \sqrt{2}.$$

Поскольку  $H$  сепарабельно, существует счетное множество  $F = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ , такое что для любого  $e \in E$  найдется  $f \in F$ , что  $\|e - f\| < \sqrt{2}/2$ . Но тогда, если  $\|e_1 - f\| < \sqrt{2}/2$ , то (из неравенства треугольника)

$$\|e_2 - f\| \geq \|e_1 - e_2\| - \|e_1 - f\| > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то есть двум разным  $e_1$  и  $e_2$  не может соответствовать один и тот же  $f$  с вышеуказанным свойством, то есть существует инъективное отображение  $E$  в  $F$ . Из этого следует, что множество  $F$  имеет мощность, не меньшую чем множество  $E$ , то есть  $E$  — не более, чем счетно.  $\square$

**Лемма 5.2.** Пусть  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  — ортогональная последовательность векторов из  $H$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$  сходится;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2$  сходится

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Пифагора

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \|e_k\|^2.$$

Из этого равенства и полноты пространства утверждение теоремы следует немедленно.  $\square$

Далее  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство.

**Определение 5.10.** Последовательность  $\{e_n\}$  называется *ортонормированным базисом* (Шаудера) в  $H$ , если выполнены следующие условия:

1. Элементы последовательности  $\{e_n\}$  образуют ортонормированное множество;
2. Если  $a \perp e_k$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ , то  $a = 0$  (свойство полноты).

**Определение 5.11.** Пусть  $\{e_n\}$  — ортонормированный базис в  $H$ . Тогда *рядом Фурье* вектора  $x \in H$  называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

**Теорема 5.6.** Для любого вектора  $x \in H$  ряд Фурье сходится, причем сходится к вектору  $x$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.2 ряд Фурье сходится в точности тогда, когда сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ . По неравенству Бесселя (см. «Лекции по алгебре», параграф 17)

$$\left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

откуда получаем, что ряд Фурье сходится (последовательность частичных сумм ограничена). Обозначим через  $y$  сумму этого ряда.

Покажем, что  $x = y$ :

$$\begin{aligned} \langle x - y, e_j \rangle &= \langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, e_j \rangle = \\ &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

В силу свойства полноты базиса,  $x - y = 0$ . Дальнейшее очевидно.  $\square$

**Следствие 1 (равенство Парсеваля).** Для любого вектора  $x \in H$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

**Теорема 5.7.** Для всякого бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства существует ортонормированный базис Шаудера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\{y_n\} \subset H$  — счетное всюду плотное множество. Применяя процесс Грама-Шмидта (см. алгебру), получим не более чем счетное ортонормированное множество  $M = \{e_n\}$ . Линейная оболочка  $\text{span } M$ , как нетрудно видеть, плотна в  $H$  (в

силу процесса Грама-Шмидта, всякий вектор  $y_n$  выражается как конечная линейная комбинация векторов из  $M$ ).

Покажем, что  $M$  обладает свойством полноты. Пусть

$$\langle a, e_k \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Рассмотрим последовательность подпространств

$$E_n = \text{span} \{e_1, \dots, e_n\}.$$

В силу условия  $\overline{\text{span } M} = H$ ,

$$d(a, E_n) \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

где  $d(a, E_n) = \inf_{z \in E_n} \|a - z\|$ .

По теореме 5.4, проекция  $a_n = \sum_{k=1}^n \langle a, e_k \rangle e_k$  вектора  $a$  на  $E_n$  есть элемент наилучшего приближения, то есть

$$d(a, E_n) = \|a - a_n\|.$$

Но  $a_n = 0$  для всех  $n$  в силу условия (5.3). Поэтому

$$d(a, E_n) = \|a\|,$$

откуда получаем, что  $a = 0$  в силу (5.4).

Таким образом,  $\{e_n\}$  — базис в  $H$ . □

**Определение 5.12.** Два нормированных пространства  $X$  и  $Y$  называют *изометрически изоморфными*, если существует такой биективный оператор  $J \in L(X, Y)$ , что для всех  $x \in X$

$$\|Jx\| = \|x\|.$$

**Теорема 5.8.** Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство над полем  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  изометрически изоморфно пространству последовательностей  $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольный ортонормированный базис  $\{e_n\}$  в  $H$ , существующий в силу теоремы 5.7.

Определим оператор  $J: H \rightarrow l^2$  по правилу

$$Jx = (\langle x, e_n \rangle)_{n=1}^{\infty},$$

то есть  $J$  ставит  $x$  в соответствие последовательность его координат

$\langle x, e_n \rangle$ .

Инъективность следует из теоремы 5.6, сюръективность из леммы 5.2. Изометричность следует из равенства Парсеваля.  $\square$

**Следствие 1 (теорема Фишера-Рисса).** *Все сепарабельные гильбертовы пространства изометрически изоморфны между собой.*

## 5.4 Теорема Рисса об общем виде линейного функционала

**Теорема 5.9 (Рисса о представлении).** *Каждый линейный ограниченный функционал  $f \in H^*$  допускает единственное представление вида*

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \quad (5.5)$$

где  $a \in H$ , причем

$$\|f\| = \|a\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Если  $a \in H$  — фиксированный вектор, то (5.5), очевидно, задаёт линейный функционал. Определим его норму:

$$|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \|x\| \quad x \in H;$$

$$\|f\| \leq \|a\|;$$

$$\left| f\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \right| = \left\langle a, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle = \|a\|.$$

Таким образом

$$\|f\| = \|a\|$$

2. Пусть  $f \in H^*$ . Будем считать, что  $f \neq 0$ , потому что в противном случае достаточно взять  $a = 0$ . Тогда  $M = \text{Ker } f \neq H$ .

Возьмем ненулевой вектор  $b \in \text{Ker } f$ . Очевидно, что (проверяется непосредственно)

$$f(x)b - f(b)x \in \text{Ker } f.$$

Тогда  $f(x)b - f(b)x \perp b$ . В таком случае

$$\langle f(x)b - f(b)x, b \rangle = f(x)\langle b, b \rangle - f(b)\langle x, b \rangle = 0,$$

откуда получаем

$$f(x) = \frac{f(b)\langle x, b \rangle}{\|b\|^2} = \langle x, \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b \rangle = \langle x, a \rangle,$$

где  $a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b.$

□

## 6 Теорема Хана-Банаха

Далее  $X$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{K}$ .

**Определение 6.1.** Отображение  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *полунормой*, если для всех  $x, y \in X$  и  $\alpha \in \mathbb{K}$

1.  $p(x) \geq 0$ ;
2.  $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ ;
3.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

Очевидно, что всякая полунорма является нормой.

**Пример 6.1.** Отображение  $p: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x) = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ , где  $c < b$ , является полунормой, но не является нормой. ◇

**Определение 6.2.** *Носителем* функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется множество

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}},$$

где черта, как обычно, означает замыкание.

**Определение 6.3.** Функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *финитной*, если её носитель — компактное множество в  $\mathbb{R}$ .

**Пример 6.2.** Множество финитных бесконечно дифференцируемых функций  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  можно наделить семейством полунорм по формуле

$$p_{k,a,b} = \max_{t \in [a,b]} |x^{(k)}(t)|, \quad k \geq 0.$$

◇

**Определение 6.4.** Пусть  $M \subset X$  — линейное подпространство,  $f_0: M \rightarrow \mathbb{K}$  — линейный функционал. Будем говорить, что линейный функционал  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  является *продолжением*  $f_0$  на  $X$  если

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in M.$$



**Теорема 6.1 (Хана-Банаха).** Пусть  $X$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{K}$ ,  $p$  — полунорма на  $X$ ,  $M \subset X$  — подпространство из  $X$  и  $f_0: M \rightarrow \mathbb{K}$  — линейный функционал со свойством

$$|f_0(x)| \leq p(x), \quad x \in M.$$

Тогда существует такой линейный функционал  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ , что

1.  $f$  — продолжение  $f_0$  на  $X$ ;
2.  $|f(x)| \leq p(x)$ ,  $x \in X$ .

**Следствие 1.** Пусть  $X$  — линейное нормированное пространство. Тогда для всякого  $x_0 \neq 0$  из  $X$  существует такой линейный ограниченный функционал  $f \in X^*$ , что

1.  $|f(x_0)| = \|x_0\| \neq 0$ ;
2.  $\|f\| = 1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $M = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}$ .

Функционал  $f_0 \in M^*$  определим по правилу

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|,$$

а в качестве полунормы  $p$  возьмём норму:

$$p(x) = \|x\|, \quad x \in X.$$

По теореме Хана-Банаха существует продолжение  $f_0$  на  $X$ , причём

1.  $f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\| \neq 0$ ;
2.  $|f(x)| \leq \|x\|$ .

В таком случае получаем, что  $\|f\| = 1$ . □

Из этого следствия ясно видно, что если  $X \neq \{0\}$ , то и  $X^* \neq \{0\}$ .

Рассмотрим пространство  $(X^*)^*$ , которое далее будем обозначать  $X^{**}$ . Зафиксируем некоторый  $x_0 \in X$  и определим функционал  $\xi_{x_0} \in X^{**}$  по правилу

$$\xi_{x_0}(f) = f(x_0), \quad f \in X^*. \quad (6.1)$$

Из следствия 1 получаем, что

$$\|\xi_{x_0}\| = \|x_0\|.$$

Таким образом мы построили инъективное (проверьте!) отображение  $\xi_{\bullet}: X \rightarrow X^{**}$ . Такое отображение называется *каноническим вложением* пространства  $X$  в  $X^{**}$ . Заметим, что это линейный ограниченный оператор, сохраняющий норму.

**Определение 6.5.** Банахово пространство  $X$  называется *рефлексивным*, если каждый функционал из  $X^{**}$  представим в виде (6.1). Иначе говоря, каноническое вложение осуществляет изометрический изоморфизм между  $X$  и  $X^{**}$ .

Примерами рефлексивных пространств являются лебеговы пространства  $L^p[a, b]$ ,  $\ell^p$ , где  $p \in [1, \infty)$ . С другой стороны, пространства  $\ell^\infty$  и  $C[a, b]$  не рефлексивны.

## 7 Элементы нелинейного анализа

### 7.1 Производная отображения

Всюду далее  $X, Y$  — банаховы пространства над  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ , буквами  $U$  и  $V$  обозначаются открытые множества в  $X$  и  $Y$ .

**Определение 7.1.** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$ ,  $g: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in U$ . Говорят, что

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

если справедливо равенство

$$\|f(x)\| = \varepsilon(x)g(x),$$

где  $\varepsilon: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Определение 7.2.** Пусть  $f, g: U \subset X \rightarrow Y$  — отображения, определенные на открытом множестве  $U$  из пространства  $X$ . Отображение  $g$  называется *касательным* к  $f$  в точке  $x_0 \in U$ , если

$$f(x) = g(x) + o(\|x - x_0\|) \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

то есть

$$\frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

Легко видеть, что « $f$  касательно  $g$ » есть отношение эквивалентности.

**Определение 7.3.** Отображение  $f: U \subset X \rightarrow Y$  называется *дифференцируемым* в точке  $x_0$ , если существует такой оператор  $A \in$

$L(X, Y)$ , что  $f$  касательно  $g$  в точке  $x_0$ , где  $g$  определено по формуле

$$g(x) = f(x_0) + A(x - x_0), \quad x \in U.$$

Иначе говоря,  $f$  дифференцируемо в точке  $x_0$  если

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{при } x \rightarrow x_0.$$

Если  $f$  дифференцируемо в каждой точке  $U$ , то  $f$  называют *дифференцируемым*.

Оператор  $A$  называется *производной* отображения  $f$  в точке  $x_0$ . При этом используется привычное обозначение:

$$f'(x_0) = A.$$

Также пишут  $Df(x_0)$ ,  $D_{x_0}f$  и т. д.

**Теорема 7.1.** *Определение производной корректно, то есть оператор  $A$  определён однозначно для каждой точки  $x_0$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо в точке  $x_0$ . Тогда  $f$  касательно  $g$  в точке  $x_0$ , где  $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$ . Пусть теперь  $g_0(x) = f(x_0) + B(x - x_0)$ ,  $B \in L(X, Y)$ , также касательно  $f$  в точке  $x_0$ . Тогда  $g_0$  касательно  $g$  в точке  $x_0$ :

$$g(x) - g_0(x) = (A - B)(x - x_0),$$

причем

$$g(x) - g_0(x) = o(\|x - x_0\|).$$

Примем обозначение  $h = x - x_0$ . Тогда

$$(A - B)h = o(\|h\|).$$

Раскрывая определение символа « $o$ » получаем, что для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta$ , что если  $\|h\| < \delta$ , то

$$\left\| (A - B) \frac{h}{\|h\|} \right\| < \varepsilon, \quad \|h\| < \delta.$$

Тогда

$$\sup_{\|h\| < \delta} \left\| (A - B) \frac{h}{\|h\|} \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A - B)x\| = \|A - B\| < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности  $\varepsilon$  получаем, что  $A = B$ . □

**Теорема 7.2.** Пусть  $f, g: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемы в точке  $x_0$ . Тогда  $\alpha f + \beta g$  также дифференцируемо в точке  $x_0$ , причём

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Отображения  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , значит

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|). \end{aligned}$$

Домножая эти равенства на  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно и сложив, получаем, в силу свойств символа « $o$ »:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(x) &= (\alpha f + \beta g)(x_0) + \\ &\quad + (\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0))(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \end{aligned}$$

то есть, в силу корректности определения производной,

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \quad \square$$

Следующие две теоремы предлагаются в качестве упражнения.

**Теорема 7.3.** Если  $f: X \rightarrow Y$  — постоянное отображение, то  $f$  дифференцируемо в любой точке пространства  $X$ , причём  $f'(x) = \mathbf{0}$  в любой точке  $x \in X$ .

**Теорема 7.4.** Если  $A \in L(X, Y)$ , то отображение  $A$  дифференцируемо в любой точке  $x \in X$  и  $A'(x) = A$ .

**Теорема 7.5.** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо в точке  $x_0 \in U$ , а  $g: V \subset Y \rightarrow Z$  дифференцируемо в точке  $y_0 = f(x_0)$  и  $f(U) \subset V$ . Тогда отображение  $h = g \circ f: U \subset X \rightarrow Z$  дифференцируемо в точке  $x_0$  и

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \in L(X, Z).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим приращение отображения  $h$ :

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) = \\ &= g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ &= g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \\ &\quad + g'(f(x_0))o(\|x - x_0\|) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) \end{aligned}$$

Покажем, что

$$g'(f(x_0))o(\|x - x_0\|) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = o(\|x - x_0\|)$$

при  $x \rightarrow x_0$ . Введем для краткости замену  $h = x - x_0$ . Тогда, с учетом того, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} \leq f'(x_0),$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\|g'(f(x_0))o(\|h\|) + o(\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|)\|}{\|h\|} \leq \\ & \leq \frac{\|g'(f(x_0))\| \|o(\|h\|)\| + \|o(\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|)\|}{\|h\|} = \\ & = \frac{\|g'(f(x_0))\| \varepsilon_1(h) \|h\| + \varepsilon_2(h) \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} = \\ & = \|g'(f(x_0))\| \varepsilon_1(h) + \frac{\varepsilon_2(h) \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$h(x) - h(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

□

См. «Лекции по алгебре» для определения полилинейного (билинейного) оператора.

**Определение 7.4.** Билинейный оператор  $A: X \times X \rightarrow Y$  называется *ограниченным*, если

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1} \|A(x_1, x_2)\| < \infty.$$

Символом  $B_2(X, Y)$  будем обозначать нормированное пространство билинейных ограниченных операторов, действующих из  $X \times X$  в  $Y$ .

Аналогично определяется полилинейный ограниченный оператор. Пространство  $n$ -линейных ограниченных операторов обозначается  $B_n(X, Y)$ .

**Теорема 7.6.** Пространства  $L(X, L(X, Y))$  и  $B_2(X, Y)$  изометрически изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение

$$J: L(X, L(X, Y)) \rightarrow B_2(X, Y)$$

действует по правилу

$$(JA)(x_1, x_2) = (Ax_1)x_2.$$

Очевидно, это линейный оператор между  $L(X, L(X, Y))$  и  $B_2(X, Y)$ . Биективность проверяется непосредственно. Проверим изометричность:

$$\begin{aligned} \|JA\|_{B_2(X, Y)} &= \sup_{\|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y = \\ &= \sup_{\|x_1\| \leq 1} \left( \sup_{\|x_2\| \leq 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y \right) = \sup_{\|x_1\| \leq 1} (\|Ax_1\|_{L(X, Y)}) = \\ &= \|A\|_{L(X, L(X, Y))}. \quad \square \end{aligned}$$

Аналогичный результат справедлив для полилинейных операторов:

**Теорема 7.7.** Пространства  $L(\underbrace{X, L(X, \dots, L(X, Y))}_{n \text{ раз}})$  и

$B_n(X, Y)$  изометрически изоморфны.

Из этих теорем, в частности, следует, что  $B_n(X, Y)$  — банахово пространство, если  $Y$  банахово.

**Определение 7.5.** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow Y$  дифференцируемо в каждой точке  $U$  и отображение  $f': U \subset X \rightarrow L(X, Y)$  дифференцируемо в точке  $x_0$ . Тогда второй производной отображения  $f$  в точке  $x_0$  называется производная отображения  $f'$  в точке  $x_0$ .

Таким образом, вторая производная отображения  $f$  в точке  $x_0$  есть линейный оператор  $f''(x_0) \in L(X, L(X, Y))$ , или, в силу предыдущей теоремы, вторую производную можно считать билинейным оператором из  $B_2(X, Y)$ .

Аналогично определяется  $n$ -ая производная отображения  $f$  в точке  $x_0$ . Тогда  $f^{(n)}(x_0) \in B_n(X, Y)$ .

**Определение 7.6.** Отображение  $f: U \subset X \rightarrow Y$  называется  $n$  раз непрерывно дифференцируемым, если для каждого  $k = \overline{1, n}$  существует  $k$ -ая производная  $f^{(k)}(x)$ , определенная для всех  $x \in U$  и при этом  $f^{(n)}: U \subset X \rightarrow B_n(X, Y)$  — непрерывное отображение.

Пусть  $A \in B_n(X, Y)$ . Введём следующее обозначение:

$$Ah^n := A(h, \dots, h).$$

Договоримся также, что  $f^{(0)}(x) = f(x)$  для всех  $x \in U$ , и  $h^0 = 1 \in \mathbb{K}$ .

**Теорема 7.8 (Тейлора).** Пусть отображение  $f: U \subset X \rightarrow Y$   $n$  раз непрерывно дифференцируемо. Тогда для любой точки  $x_0 \in U$  и любого вектора  $h$  такого, что  $x_0 + h \in U$ , имеет место формула (Тейлора):

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + o(\|h\|^n) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

## 7.2 Задачи на экстремум

**Определение 7.7.** Точка  $x_0 \in U$  называется *точкой локального минимума (максимума)* функции  $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ , если существует шар  $B(x_0, \varepsilon) \subset U$  такой, что  $f(x_0) \leq f(x)$  ( $f(x_0) \geq f(x)$ ) для всех  $x \in B(x_0, \varepsilon)$ . Если же выполняется строгое неравенство, то точка  $x_0$  называется *точкой строгого локального минимума (максимума)*.

Точка, являющаяся точкой (строгого) локального минимума либо максимума, также называется *точкой (строгого) локального экстремума*.

**Теорема 7.9 (Ферма).** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая в точке  $x_0$  функция и  $x_0 \in U$  — точка локального экстремума. Тогда  $f'(x_0) = 0$ , то есть  $f'(x_0) \in X^*$  — нулевой функционал.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть, для определенности,  $x_0$  — точка локального минимума (случай локального максимума рассматривается аналогично), и для всех  $h \in X$  таких, что  $\|h\| < \varepsilon$  выполняется условие  $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ .

Предположим противное: пусть  $f'(x_0) \neq 0$ . Тогда найдется такой вектор  $h_0$ ,  $\|h_0\| < \varepsilon$ , что  $\alpha_0 = f'(x_0)h_0 > 0$ . Пусть  $t \in (-1, 0) \subset \mathbb{R}$ . Тогда, разумеется,  $\|th_0\| < \varepsilon$  и  $f'(x_0)(th_0) < 0$ . В силу дифференцируемости функции в точке  $x_0$  справедливо равенство

$$f(x_0 + th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t).$$

Тогда

$$0 \leq f(x_0 + th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t) = t \left( \alpha_0 + \frac{o(t)}{t} \right).$$

Но, поскольку  $\alpha_0 > 0$ , при достаточно малых  $t < 0$  справедливо

$$\alpha_0 + \frac{o(t)}{t} > 0,$$

откуда следует, что в правой части равенства стоит строго отрицательная величина. Получили противоречие.  $\square$

**Определение 7.8.** Билинейная форма  $\xi: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется равномерно положительной (равномерно отрицательной), если существует такая константа  $c > 0$ , что для всех  $h \in X$

$$\xi(h, h) \geq c \|h\|^2$$

$$(\xi(h, h) \leq -c \|h\|^2).$$

**Теорема 7.10 (достаточное условие экстремума).** Пусть  $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  — дважды дифференцируемая функция,  $f'(x_0) = 0$  и пусть  $f''(x_0)$  — равномерно отрицательная (равномерно положительная) билинейная форма. Тогда  $x_0$  — точка строгого локального максимума (минимума).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть, для определённости,  $f''(x_0)$  равномерно отрицательна, то есть существует такая константа  $\alpha > 0$ , что

$$f''(x_0)h^2 \leq -\alpha \|h\|^2.$$

Разложим функцию по формуле Тейлора в окрестности  $x_0$ :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\|h\|^2).$$

Поскольку  $f'(x_0) = 0$ ,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\|h\|^2) \leq -\frac{\alpha \|h\|^2}{2} + o(\|h\|^2).$$

Найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $\|h\| < \delta$  выполняется неравенство  $o(\|h\|^2) \leq \frac{\alpha}{4} \|h\|^2$ , поэтому

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq -\frac{\alpha \|h\|^2}{2} + o(\|h\|^2) \leq -\frac{\alpha \|h\|^2}{4} < 0$$

при  $\|h\| < \delta$ . А это в точности и означает, что  $x_0$  — точка строгого локального максимума. Аналогично рассматривается случай локального минимума.  $\square$



## 8 Элементы теории функции комплексной переменной

Более подробную информацию можно найти, например, в книге Шабата Б. В. «Введение в комплексный анализ».

Рассмотрим функцию  $F: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Её можно представить в виде

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

где  $P, Q: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Более того, эту функцию можно рассматривать как функцию  $F: E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$F(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Пусть теперь  $F$  дифференцируема в точке  $x_0 \in E$  как отображение из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ . Исследуем, при каких условиях эта функция будет дифференцируема как отображение из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$ . Заметим, что существуют функции, для которых это не выполняется. Примером может служить функция

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \Re z.$$

Если рассматривать эту функцию как отображение  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , то легко видеть, что это линейный оператор:

$$f(x_1, x_2) = x_1.$$

То есть  $f$  дифференцируемо в каждой точке из  $\mathbb{R}^2$ . Однако если мы рассмотрим предел

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re z}{z} \quad (8.1)$$

при стремлении  $z$  к нулю вдоль мнимой оси и вдоль действительной оси

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \Re z = 0}} \frac{\Re z}{z} &= 0; \\ \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \Im z = 0}} \frac{\Re z}{z} &= \frac{z}{z} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом предел (8.1) не существует, то есть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  не дифференцируема.

Как известно, если отображение  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  дифференцируемо в точке  $x_0 = (x, y)$ , то у него существуют частные производные первого порядка, и матрица Якоби в точке  $x_0$  есть матрица оператора

$f'(x_0)$  в стандартном базисе.

Пусть  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ .

$$f'(x_0) \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Следующее утверждение вытекает из представления комплексных чисел в виде матрицы и утверждения, что все линейные операторы в  $\mathbb{C}$  действуют по правилу  $x \mapsto \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Лемма 8.1.** Для того чтобы матрица  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с вещественными коэффициентами задавала линейный оператор в комплексном линейном пространстве  $\mathbb{C}$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Непосредственно из леммы получаем

**Теорема 8.1 (условия Коши-Римана).** Дифференцируемое в точке  $x_0 = (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$  отображение  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  дифференцируемо как отображение  $U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  в том и только в том случае, если выполняются следующие условия (условия Коши-Римана):

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

**Определение 8.1.** Функция  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  называется *аналитической* (чаще говорят *голоморфной*) на открытом множестве  $U$ , если она дифференцируема (как функция в комплексном пространстве) в каждой точке множества  $U$ .

**Определение 8.2.** Путём в  $U \subset \mathbb{C}$  называется непрерывное отображение  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ . Если это отображение является кусочно непрерывно дифференцируемым, то его называют *кусочно гладким путём*.

**Определение 8.3.** Интегралом от комплексной функции  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  вдоль кусочно гладкого пути  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  называется

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Если  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y)) d(x + iy) = \\ &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy,\end{aligned}$$

где в правой части стоят известные из курса анализа криволинейные интегралы второго рода.

**Теорема 8.2 (Коши).** *Если  $U$  — односвязная область, граница которой есть простая замкнутая кривая, задаваемая кусочно гладким путём (контуром)  $\gamma$ , то для любой аналитической функции  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  справедливо равенство*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вспомним известную из анализа формулу Грина:

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_U \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Тогда, применяя формулу Грина и условия Коши-Римана, получаем:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy = \\ &= \iint_U \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_U \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad \square\end{aligned}$$

**Теорема 8.3 (интегральная формула Коши).** *Пусть  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая функция, определенная в области  $U$ . Тогда для всех  $z \in U$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda,$$

где  $\gamma$  — контур, окружающий точку  $z$ , причем обход контура ведется против часовой стрелки.