

Содержание

1	Элементы теории меры и интеграла	1
1.1	Пространства с мерой	1
1.2	Интегрирование простых функций	3
1.3	Интегрирование измеримых функций	7
1.4	Пространства Лебега	8
2	Ограниченные операторы	9
3	Принцип равномерной ограниченности	12
4	Ряды в банаховом пространстве	14
5	Гильбертовы пространства	14
5.1	Начальные сведения	14
5.2	Теорема об ортогональном дополнении	16
5.3	Базис в гильбертовом пространстве	20
5.4	Теорема Рисса	23
6	Теорема Хана-Банаха	24
7	Элементы нелинейного анализа	26
7.1	Производная отображения	26
7.2	Задачи на экстремум	31
8	Элементы теории функции комплексной переменной	33
9	Спектральная теория линейных операторов	37
9.1	Обратные операторы и их свойства	38
9.2	Спектр оператора	40

1 Элементы теории меры и интеграла

1.1 Пространства с мерой

Определение 1.1. Пусть X — непустое множество. Семейство подмножеств \mathcal{F} из X называется σ -алгеброй, если выполняются следующие условия:

1. $X \in \mathcal{F}$;
2. $X \setminus A \in \mathcal{F}$ для всех A из \mathcal{F} ;

3. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ для всех $A_i, i \in \mathbb{N}$ из \mathcal{F} .

Подмножества, принадлежащие этому семейству, называются *измеримыми*.

Определение 1.2. Отображение $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется *мерой*, если

1. $\mu(A) \geq 0$ для всех измеримых подмножеств A ;
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ для любой последовательности $\{A_i\}$ *взаимно непересекающихся* измеримых подмножеств.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие свойства:*

1. *Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество;*
2. *Если E_1 и E_2 — измеримые множества и $E_1 \subset E_2$, то*

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2).$$

Доказательство. См. методичку

□

Определение 1.3. Тройка (X, \mathcal{F}, μ) , где X — непустое множество, \mathcal{F} — σ -алгебра измеримых подмножеств из X , а μ — мера, называется *пространством с мерой*.

Пример 1.1. Пусть X — некоторое непустое множество. В качестве \mathcal{F} возьмем всевозможные подмножества из X . Очевидно, что они образуют σ -алгебру. Меру $\mu_a: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, где a — некоторый элемент из X , определим следующим образом:

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство того, что определенная таким образом функция в самом деле является мерой, элементарно (см. методичку).

Построенная мера называется *мерой Дирака, сосредоточенной в точке a* . ◇

Пример 1.2. В качестве X возьмем вещественную прямую \mathbb{R} . Определим длину интервала (a, b) равенством $\mu((a, b)) = b - a$. Любое открытое множество на прямой представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся ин-

тервалов. Тогда определим меру открытого множеств по формуле $\mu(G) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$, где $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество на прямой. Его можно покрыть некоторым открытым множеством $G \supset E$. Величина $\mu^*(E) = \inf_{G \supset E} \mu(G)$, где инфимум берется по всем открытым покрытиям E , называется *верхней мерой* множества E .

Нижняя мера множества E определяется по формуле $\mu_*(E) = b - a - \mu([a, b] \setminus E)$, где $[a, b]$ — наименьший отрезок, содержащий множество E .

Назовём ограниченное множество E *измеримым по Лебегу*, если $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. Тогда *мерой Лебега* множества E назовём общее значение верхней и нижней мер этого множества.

Мера Лебега также определяется и для неограниченных множеств. Для этого в качестве нижней меры множества E берется предел нижних мер множеств вида $E_n = E \cap [-n, n]$ при $n \rightarrow \infty$. Этот предел существует или бесконечен, поскольку последовательность $\mu_*(E_n)$, как можно показать, монотонно неубывает. \diamond

Теорема 1.2. *Тройка $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$, где \mathcal{F} — множество измеримых по Лебегу множеств на прямой, а μ — мера Лебега, является пространством с мерой.*

Пример 1.3. Тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где Ω — пространство элементарных исходов, \mathfrak{A} — алгебра событий, P — вероятностная мера, является пространством с мерой. \diamond

1.2 Простые функции. Интегрирование простых функций

Пусть далее (X, \mathcal{F}, μ) — пространство с мерой, $E \in \mathcal{F}$ — некоторое измеримое подмножество.

Определение 1.4. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *простой*, если E можно представить в виде счетного объединения взаимно непересекающихся измеримых подмножеств E_i так, что функция f принимает на этих подмножествах постоянное значение: $f(x) = a_i$ для всех x из E_i .

Функция f называется *ступенчатой*, если такое объединение конечно.

Пример 1.4. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ — прямая с мерой Лебега, $E = [0, 1]$. Функция Дирихле, определенная на E и принимающая значение 1 для рациональных аргументов и 0 для иррациональных, является простой (и даже ступенчатой). В качестве E_1 можно взять множество рациональных чисел из отрезка E , а в качестве E_2 —

множество иррациональных чисел из того же отрезка. Оба этих множества измеримы по Лебегу. \diamond

Лемма 1.1. *Линейная комбинация простых функций, определенных на измеримом множестве E является простой функцией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\alpha f + \beta g$ также простая функция для простых функций $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Пусть

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j,$$

причем

$$\begin{aligned} f(x) &= a_i, & x \in E_i, \\ g(x) &= b_j, & x \in F_j. \end{aligned}$$

Обозначим $G_{ij} = E_i \cap F_j$. Это также измеримые множества. Более того непосредственно проверяется, что

$$E = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} G_{ij}.$$

На множестве G_{ij} функция $\alpha f + \beta g$ принимает значение

$$(\alpha f + \beta g) = \alpha a_i + \beta b_j.$$

Этим доказано, что функция $\alpha f + \beta g$ простая, принимающая постоянные значения на множествах G_{ij} . \square

Из этой леммы следует, что простые функции образуют линейное пространство.

Далее будем считать, что мера множества E конечна.

Определение 1.5. Простая функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *абсолютно суммируемой*, если конечна величина

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \mu(E_i),$$

в обозначениях предыдущего определения.

Определение 1.6. *Интегралом* от абсолютно суммируемой функции f называется сумма вида

$$\int_E f(x) d\mu(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i).$$

Аргумент в записи интеграла часто опускают и пишут просто

$$\int_E f \, d\mu.$$

В следующей теореме доказываются основные свойства интеграла от абсолютно суммируемых функций.

Теорема 1.3. Пусть $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно суммируемые функции. Тогда справедливы следующие свойства:

1. *Линейность:* для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ абсолютно суммируема и справедливо равенство

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu + \beta \int_E g \, d\mu;$$

2. *Оценка модуля интеграла:*

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \mu(E) \sup_{x \in E} |f(x)|;$$

3. *Неотрицательность:* если $f \geq 0$, то

$$\int_E f \, d\mu \geq 0;$$

4. *Монотонность:* если $f \geq g$, то

$$\int_E f \, d\mu \geq \int_E g \, d\mu;$$

5. *Аддитивность:* если E представимо в виде объединения не более чем счетного числа взаимно непересекающихся измеримых подмножеств A_k , то

$$\int_E f \, d\mu = \sum_k \int_{A_k} f \, d\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Абсолютная суммируемость линейной комбинации следует из предыдущей леммы, свойств абсолютно сходящихся числовых рядов и из свойства монотонности меры.

Покажем, что справедливо указанное в утверждении теоремы

равенство. Будем пользоваться обозначениями из леммы.

$$\begin{aligned}
 \int_E (\alpha f + \beta g) d\mu &= \sum_{i,j=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_j) \mu(G_{ij}) = \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(G_{ij}) = \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}).
 \end{aligned}$$

Поскольку, как нетрудно видеть, $E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{ij}$, $F_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ij}$, а множества G_{ij} взаимно не пересекаются, из свойства аддитивности меры получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(E_i); \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) = \mu(F_j).$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
 \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_{ij}) &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i) + \\
 &+ \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j \mu(F_j) = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.
 \end{aligned}$$

2. Тривиально (неравенство треугольника, аддитивность меры).
3. Тривиально.
4. Рассмотреть функцию $f - g$ и применить линейность и предыдущее свойство.
5. Рассмотреть взаимно непересекающиеся множества вида $H_{ik} = E_i \cap A_k$, на которых функция принимает постоянные значения c_{ik} , и которые образуют разбиение E :

$$\int_E f d\mu = \sum_i \sum_k c_{ik} \mu(H_{ik}) = \sum_k \sum_i c_{ik} \mu(H_{ik}) = \sum_k \int_{A_k} f d\mu$$

□

1.3 Измеримые функции. Интегрирование измеримых функций

Определение 1.7. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, определенная на измеримом множестве E , называется *измеримой*, если она является равномерным пределом на E последовательности простых функций, т.е. существует такая последовательность $\{f_n\}$, $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Определение 1.8. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если

$$f^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1.4. Вышеприведенные определения измеримой функции эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. в методичке на с. 51 (требуется только необходимость). \square

Определение 1.9. Если существует последовательность простых интегрируемых функций, сходящаяся равномерно к измеримой функции f , то *интегралом* функции f назовем предел

$$\int_E f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Можно показать, что предел (быть может, бесконечный) всегда существует и не зависит от выбора последовательности f_n .

Определение 1.10. Неотрицательная функция f называется *интегрируемой* на множестве E , если предел из предыдущего определения конечен.

Всякая измеримая функция f представима в виде разности двух неотрицательных измеримых функций:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}.$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Тогда если хотя бы одна из функций f_+ или f_- интегрируема, интегралом функции f назовём величину

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu.$$

Определение 1.11. В случае, когда $X = \mathbb{R}$, \mathcal{F} — σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств на \mathbb{R} , μ — мера Лебега, интеграл, определённый по схеме, приведённой в данном разделе, называется *интегралом Лебега на прямой*.

Теорема 1.5. Если $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ — прямая с мерой Лебега, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то тогда она интегрируема по Лебегу и значения интегралов Римана и Лебега совпадают.

1.4 Пространства Лебега

Определение 1.12. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, определенная на измеримом множестве E , называется *суммируемой со степенью p* , $p \geq 1$, если величина

$$\int_E |f(x)|^p d\mu(x)$$

определена и конечна.

Определение 1.13. Будем говорить, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на измеримом множестве E , если оно выполнено на всём множестве E , за исключением, быть может, множества меры нуль.

Определение 1.14. Две функции $f_1, f_2: E \rightarrow \mathbb{R}$ назовём *эквивалентными* на множестве E , если их значения совпадают почти всюду.

Отношение \sim , введённое в определении выше, является отношением эквивалентности.

Пусть $\mathcal{L}^p(E, \mu)$, $p \geq 1$ — линейное пространство суммируемых со степенью p функций, определенных на множестве E .

Рассмотрим фактормножество $L^p(E, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mu) / \sim$. Оно также будет являться линейным пространством. В нём можно ввести норму по формуле

$$\|\tilde{f}\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Классы эквивалентности из $L^p(E, \mu)$, допуская неточность, часто отождествляют с функциями-представителями из этого класса.

Если $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$, μ — мера Лебега на прямой, то вместо $L^p([a, b], \mu)$ обычно пишут просто $L^p[a, b]$.

Теорема 1.6 (Лебега). $L^p(E, \mu)$ — банахово пространство.

2 Ограниченные операторы

Далее X и Y — нормированные пространства над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Определение 2.1. Отображение $A: X \rightarrow Y$ называется *линейным оператором*, действующим из пространства X в Y , если

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Если $Y = \mathbb{K}$, то вместо слова «оператор» говорят «функционал».

Пример 2.1. Отображение $D: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$, определённое по правилу $Dx = x'$ называется *оператором дифференцирования*. Это линейный оператор. \diamond

Пример 2.2. Отображение $J: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, определённое по правилу

$$(Jx)(t) = \int_a^t x(s) \, ds, \quad t \in [a, b],$$

называется *оператором неопределённого интегрирования*. \diamond

Пример 2.3. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой, $L^1(\Omega, \mu)$ — банахово пространство классов эквивалентности суммируемых функций на Ω . Отображение $J_0: L^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$, определённое по правилу

$$J_0 x = \int_{\Omega} x \, d\mu,$$

есть линейный функционал. \diamond

Пример 2.4. Отображение $A: \ell^1 \rightarrow \ell^\infty$, определённое по правилу

$$(Ax)(n) = \sum_{k=1}^n x(k),$$

есть линейный оператор, который каждой последовательности из ℓ^1 ставит в соответствие её последовательность частичных сумм. \diamond

Пример 2.5. Отображение $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, определённое по правилу

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) \, ds, \quad t \in [a, b],$$

где $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, называется *интегральным оператором*. При этом функция K называется *ядром* этого интегрального оператора. \diamond

Определение 2.2. Оператор $A: X \rightarrow Y$ между нормирован-

ными пространствами называется *ограниченным*, если величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

конечна. Эта величина, в таком случае, называется нормой оператора A .

Можно показать, что все следующие определения нормы совпадают с данным выше:

1. $\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|$
2. $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$
3. $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$;
4. $\|A\| = \inf \{C \geq 0 : \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq C \|x\|\}$

Нетрудно видеть, что $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ для всех $x \in X$.

Пример 2.6. Рассмотрим оператор умножения $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $Ax = ax$, где $a \in \mathbb{C}$. Если $\|x\| = |x| = 1$, то

$$\|Ax\| = |ax| = |a|.$$

Таким образом $\|A\| = |a|$. ◇

Множество всех линейных ограниченных операторов между нормированными пространствами X и Y будем обозначать $L(X, Y)$.

Теорема 2.1. $L(X, Y)$ — нормированное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно доказывается, что сумма ограниченных операторов есть ограниченный оператор. Также легко показать, что норма оператора — в самом деле норма в $L(X, Y)$. Установим, например, справедливость неравенства треугольника. Пусть $A, B \in L(X, Y)$ и $\|x\| = 1$. Тогда

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|.$$

Взяв верхнюю грань по всем x с нормой 1, получим, что

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

□

Определение 2.3. Алгебру \mathcal{B} называют *банаховой алгеброй*, если она как линейное пространство является банаховым пространством.

ством, причем для всех $a, b \in \mathcal{B}$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Если \mathcal{B} при этом является алгеброй с единицей e , то требуют также, чтобы выполнялось свойство

$$\|e\| = 1.$$

Теорема 2.2. *Если Y — банахово пространство, то $L(X, Y)$ — банахово пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. Антонец, Радыно, 1984, с. 180. \square

Следствие 1. *Если X — банахово пространство, то $L(X)$ — банахова алгебра с единицей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из алгебры известно, что $L(X)$ образует алгебру с единицей I . Покажем, что выполняется мультипликативное свойство для нормы операторов. Пусть $\|x\| \leq 1$:

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Взяв в этом неравенстве верхнюю грань по $\|x\| \leq 1$, получим

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Норма тождественного оператора, очевидно, равна единице. \square

Определение 2.4. Если $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ и f — линейный оператор, то f называют *линейным функционалом* на X .

Пространство ограниченных линейных функционалов $L(X, \mathbb{K})$ называют *сопряженным пространством* к пространству X и обозначают символом X^* .

Теорема 2.3. *Пусть $A \in L(X, Y)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. A — непрерывное отображение;
2. A — непрерывное в точке 0 отображение;
3. A — ограниченный оператор;
4. A — липшицево отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $1 \Rightarrow 2$, и $4 \Rightarrow 1$ очевидны. Докажем, что $2 \Rightarrow 3$. Непрерывность A означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \|x\| < \delta \rightarrow \|Ax\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторый $\varepsilon > 0$ и соответствующий ему δ . Тогда для любого $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, справедливо

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta} \left\| A \left(\frac{\delta}{2} x \right) \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Переходя в неравенстве к верхней грани, получаем, что

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

что и означает ограниченность оператора A .

Импликация $3 \Rightarrow 4$ проверяется непосредственно: если A — ограниченный оператор, $x_1, x_2 \in X$, то

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\| \|x_1 - x_2\|. \quad \square$$

3 Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза)

Определение 3.1. Множество из метрического пространства называется *множеством I категории* («тощим», *разреженным*), если его можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств, каждое из которых не содержит шара.

Определение 3.2. Множество, не являющееся множеством I категории, называется *множеством II категории* («тучным»).

Теорема 3.1 (Бэра). *Полное метрическое пространство является множеством II категории.*

Пусть X и Y — банаховы пространства, Ω — множество индексов, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ — семейство ограниченных операторов.

Будем называть семейство операторов *ограниченным поточечно*, если для каждого $x \in X$ существует такая константа $M(x) > 0$, что

$$\|A_\alpha x\| \leq M(x)$$

для всех $\alpha \in \Omega$, то есть для каждого $x \in X$ множество

$$\{A_\alpha x : \alpha \in \Omega\} \subset Y$$

ограничено в Y .

Семейство операторов назовём *ограниченным равномерно*, если существует такое число $C > 0$, что для всех $\alpha \in \Omega$ выполнено

неравенство

$$\|A_\alpha\| < C,$$

то есть числовое множество

$$\{\|A_\alpha\| : \alpha \in \Omega\}$$

ограничено.

Теорема 3.2 (Банаха-Штейнгауза). *Если семейство операторов $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, действующих из банахова пространства X в нормированное пространство Y , ограничено поточечно, то оно ограничено и равномерно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества вида

$$X_n = \{x \in X : \forall \alpha \in \Omega \ \|A_\alpha x\| \leq n\}.$$

В силу поточечной ограниченности семейства, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Каждое из множеств X_n замкнуто. В самом деле: если $\{x_k\}$ — сходящаяся к $x_0 \in X$ последовательность элементов из X_n , то, в силу непрерывности операторов A_α , $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_\alpha x_k\| = \|A_\alpha x_0\|$, а поскольку для всех x_k и всех $\alpha \in \Omega$ выполняется неравенство $\|A_\alpha x_k\| \leq n$, то и $\|A_\alpha x_0\| \leq n$, а значит $x_0 \in X_n$, что и означает замкнутость X_n .

Поскольку пространство X полно, по теореме Бэра существует такой номер n_0 , что X_{n_0} содержит в себе шар, который будем обозначать $B(x', r)$, где r — радиус этого шара, а x' — его центр.

Для всех элементов x из $B(x', r)$ и для всех $\alpha \in \Omega$ справедливо, что

$$\|A_\alpha x\| \leq n_0,$$

то есть значения $\|A_\alpha x\|$ ограничены на этом шаре. Покажем, что они ограничены и на единичном шаре, что будет означать ограниченность норм A_α .

Пусть $x \in B(0, 1)$. Тогда, как нетрудно проверить, $z = rx + x' \in B(x', r)$. В таком случае для всех $\alpha \in \Omega$

$$\|A_\alpha x\| = \left\| A_\alpha \left(\frac{z - x'}{r} \right) \right\| \leq \frac{1}{r} (\|A_\alpha z\| + \|A_\alpha x'\|) \leq \frac{2n_0}{r},$$

откуда, взяв верхнюю грань по всем $x \in B(0, 1)$, получаем утверждение теоремы. \square

4 Ряды в банаховом пространстве

Определение 4.1. *Рядом* элементов из нормированного пространства X называется пара последовательностей (x_n, s_n) , связанных соотношением

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

x_n называют n -ым членом ряда, а s_n — n -ой частичной суммой ряда.

Определение 4.2. Говорят, что ряд (x_n, s_n) сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Тогда предел этой последовательности называют суммой ряда и обозначают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Определение 4.3. Говорят, что ряд (x_n, s_n) абсолютно сходится, если сходится числовой ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Теорема 4.1. *Если ряд элементов из банахова пространства сходится абсолютно, то он сходится.*

Теорема 4.2. *Пусть задан ряд (x_n, s_n) элементов из банахова пространства X и существует числовой ряд a_n такой, что для всех n выполняется неравенство*

$$\|x_n\| \leq a_n.$$

Тогда ряд (x_n, s_n) сходится абсолютно.

Эти теоремы доказываются аналогично знакомым теоремам из курса математического анализа.

5 Гильбертовы пространства

5.1 Начальные сведения

Определение 5.1. Линейное пространство H над полем \mathbb{K} называется пространством со скалярным произведением, если в нем задана функция $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$, такая что для всех $x, y, z \in H$ и

$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ справедливы следующие свойства:

1. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (невырожденность);
2. $\langle x, x \rangle \geq 0$ (положительная определённость);
3. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (линейность по первому аргументу);
4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (эрмитова симметричность).

Такая функция называется *скалярным произведением*.

Далее будем рассматривать только комплексные пространства со скалярным произведением.

В пространстве со скалярным произведением можно ввести норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (5.1)$$

Неравенство треугольника следует из неравенства

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad (5.2)$$

которое называют *неравенством Коши-Буняковского-Шварца* или просто неравенством Шварца.

Теорема 5.1. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — последовательности из H , причем $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем неравенство Шварца:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \square \end{aligned}$$

Определение 5.2. Если пространство со скалярным произведением полно по норме, определённой равенством (5.1), то оно называется *гильбертовым пространством*.

Пример 5.1. Лебегово пространство $L^2(E, \mu)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определённым по формуле

$$\langle f, g \rangle = \int_E f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

Существование этого интеграла следует из неравенства

$$|f(x) \overline{g(x)}| \leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2}.$$

◇

Пример 5.2. В частности, гильбертовым пространством является пространство суммируемых с квадратом последовательностей ℓ^2 . Скалярное произведение задаётся формулой

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Сходимость ряда обеспечивается аналогичной оценкой. \diamond

Определение 5.3. Векторы $x, y \in H$ называются *ортогональными*, если $\langle x, y \rangle = 0$. При этом пишут $x \perp y$.

Определение 5.4. Пусть $M \subset H$ — множество из H . Тогда говорят, что вектор $x \in H$ *ортогонален* M , если x ортогонален любому вектору $m \in M$ (в этом случае используется обозначение $x \perp M$).

Теорема 5.2. Для всех векторов $x, y \in H$ выполняется тождество параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывается элементарными преобразованиями. \square

5.2 Теорема об ортогональном дополнении

Определение 5.5. Множество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если для любых векторов $a, b \in A$ векторы вида $(1-t)a + tb, t \in [0, 1]$ также лежат в A .

Очевидно, всякое подпространство в нормированном пространстве является выпуклым множеством.

Теорема 5.3 (о наилучшем приближении). Пусть $A \subset H$ — непустое выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве H . Тогда для любого $x \in H \setminus A$ найдётся единственный вектор $a_0 \in A$ такой, что

$$\|x - a_0\| = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Иначе говоря, в A найдется вектор a_0 , который находится от x на наименьшем возможном расстоянии. Такой вектор a_0 называется элементом наилучшего приближения вектора x в множестве A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению нижней грани, существует

такая последовательность $\{a_n\}$ элементов из A , что

$$d_n = \|x - a_n\| \rightarrow \inf_{a \in A} \|x - a\| = d.$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальна.

По тождеству параллелограмма получаем:

$$\begin{aligned} \|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2 &= \\ &= 2 \left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right). \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть равенства стремится к $4d^2$ при стремлении n и m к бесконечности. Разделим обе части равенства на 4:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\|(a_n - x) + (a_m - x)\|^2 + \|(a_n - x) - (a_m - x)\|^2 \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right). \end{aligned}$$

После преобразований получаем:

$$\left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 + \frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} = \frac{1}{2} \left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right).$$

Поскольку множество A выпукло, вектор $(a_n + a_m)/2$ принадлежит A , а значит, в силу определения нижней грани, справедлива оценка

$$\left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \geq d^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\|a_n - a_m\|^2}{4} &= \frac{1}{2} \left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right) - \left\| \frac{a_n + a_m}{2} - x \right\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|a_n - x\|^2 + \|a_m - x\|^2 \right) - d^2. \end{aligned}$$

Правая часть неравенства стремится к нулю, а это значит, что $\|a_n - a_m\|$ также стремится к нулю, что и означает фундаментальность последовательности $\{a_n\}$.

Поскольку пространство полно, существует вектор $a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. В силу замкнутости множества A этот вектор также лежит в A . При

этом

$$\|x - a_0\| \leq \|x - a_n\| + \|a_n - a_0\| \rightarrow d, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть $\|x - a_0\| = d$, что и означает, что a_0 является элементом наилучшего приближения x в A .

Покажем, что других векторов наилучшего приближения в A нет. Пусть $a'_0 \in A$ и $\|a'_0 - x\| = d$. Тогда, снова используя тождество параллелограмма, получаем

$$4 \left\| x - \frac{a_0 + a'_0}{2} \right\|^2 + \|a_0 - a'_0\|^2 = 2 \|x - a_0\|^2 + 2 \|x - a'_0\|^2 = 4d^2.$$

Первый квадрат нормы не меньше $4d^2$, откуда следует, что второй не превосходит нуля, а значит

$$\|a_0 - a'_0\|^2 = 0,$$

то есть $a_0 = a'_0$. □

Определение 5.6. Пусть $M \subset H$ — подпространство из H . Вектор $a \in M$ называется *проекцией* вектора $x \in H$ на M если $x - a \perp M$, то есть для всех $m \in M$ выполняется равенство

$$\langle x - a, m \rangle = 0.$$

Теорема 5.4. Если $M \subset H$ — замкнутое подпространство, $x \in H \setminus M$, то тогда вектор $a \in M$ является проекцией x на M тогда и только тогда, когда a — элемент наилучшего приближения x в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость:

Пусть $x - a \perp M$. Тогда по теореме Пифагора для любого $m \in M$ справедливо равенство

$$\|x - m\|^2 = \|x - a\|^2 + \|a - m\|^2.$$

Значит,

$$\inf_{m \in M} \|x - m\| = \|x - a\|,$$

откуда и следует, что a — элемент наилучшего приближения x в M .

Достаточность:

Пусть $a \in M$ — элемент наилучшего приближения x в M , то

есть

$$\inf_{m \in M} \|x - m\| = \|x - a\| = d.$$

Покажем, что для любого $m \in M$ выполнено равенство $\langle x - a, m \rangle = 0$.

Обозначим $x - a = z$ и пусть $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|x - (a + tm)\|^2 &= \|z - tm\|^2 = \langle z - tm, z - tm \rangle = \\ &= \|z\|^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle + t^2 \|m\|^2 = d^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle + t^2 \|m\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку $a + tm \in M$, $\|x - (a + tm)\|^2 \geq d^2$, откуда

$$d^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle + t^2 \|m\|^2 \geq d^2,$$

то есть при всех $t \in \mathbb{R}$

$$t^2 \|m\|^2 - 2t \Re \langle z, m \rangle \geq 0,$$

что возможно только в случае $\Re \langle z, m \rangle = 0$.

Взяв теперь вместо t величину it , $t \in \mathbb{R}$, можно аналогично показать, что $\Im \langle z, m \rangle = 0$, что в совокупности даёт

$$\langle z, m \rangle = 0,$$

то есть $x - a \perp M$. □

Таким образом мы доказали, что для всякого замкнутого подпространства $M \in H$ и вектора $x \in H \setminus M$ существует проекция x на M , причём она совпадает с элементом наилучшего приближения x в M .

Определение 5.7. *Ортогональным дополнением множества A из гильбертова пространства H называется множество*

$$A^\perp = \{x \in H : x \perp A\}.$$

Из свойств скалярного произведения и теоремы 5.1 нетрудно видеть, что A^\perp — замкнутое подпространство из H для любого подмножества $A \subset H$.

Теорема 5.5 (об ортогональном дополнении). *Если M — замкнутое подпространство из H , то $H = M \oplus M^\perp$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что всякий вектор $x \in H$ можно представить в виде суммы векторов из M и M^\perp . Пусть a — элемент наилучшего приближения x в M . Тогда по предыдущей теореме

$x - a \perp M$, то есть $x - a \in M^\perp$, откуда получаем

$$x = a + (x - a),$$

где $a \in M$, $x - a \in M^\perp$.

Единственность такого представления обеспечивается тем фактом, что

$$M \cap M^\perp = \{0\}. \quad \square$$

5.3 Базис в гильбертовом пространстве

Определение 5.8. Банахово пространство X называется *сепарабельным*, если существует такое счетное множество $M \subset X$, что $\overline{M} = X$, то есть, как еще говорят, M всюду плотно в X .

Определение 5.9. Множество $M \subset H$ называется *ортонормированным*, если для всех $x, y \in M$

1. $\|x\| = 1$;
2. $x \neq y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

Лемма 5.1. В сепарабельном гильбертовом пространстве всякое ортонормированное множество не более чем счетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E — ортонормированное множество в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Тогда для любых векторов e_1, e_2 из E справедливо (проверяется непосредственно):

$$\|e_1 - e_2\| = \sqrt{2}.$$

Поскольку H сепарабельно, существует счетное множество $F = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$, такое что для любого $e \in E$ найдется $f \in F$, что $\|e - f\| < \sqrt{2}/2$. Но тогда, если $\|e_1 - f\| < \sqrt{2}/2$, то (из неравенства треугольника)

$$\|e_2 - f\| \geq \|e_1 - e_2\| - \|e_1 - f\| > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то есть двум разным e_1 и e_2 не может соответствовать один и тот же f с вышеуказанным свойством, то есть существует инъективное отображение E в F . Из этого следует, что множество F имеет мощность, не меньшую чем множество E , то есть E — не более, чем счетно. \square

Лемма 5.2. Пусть $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ — ортогональная последовательность векторов из H . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ сходится;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2$ сходится

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Пифагора

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \|e_k\|^2.$$

Из этого равенства и полноты пространства утверждение теоремы следует немедленно. \square

Далее H — сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 5.10. Последовательность $\{e_n\}$ называется ортонормированным базисом (Шаудера) в H , если выполнены следующие условия:

1. Элементы последовательности $\{e_n\}$ образуют ортонормированное множество;
2. Если $a \perp e_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $a = 0$ (свойство полноты).

Определение 5.11. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H . Тогда рядом Фурье вектора $x \in H$ называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Теорема 5.6. Для любого вектора $x \in H$ ряд Фурье сходится, причем сходится к вектору x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.2 ряд Фурье сходится в точности тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$. По неравенству Бесселя (см. «Лекции по алгебре», параграф 17)

$$\left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

откуда получаем, что ряд Фурье сходится (последовательность частичных сумм ограничена). Обозначим через y сумму этого ряда.

Покажем, что $x = y$:

$$\begin{aligned}\langle x - y, e_j \rangle &= \langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, e_j \rangle = \\ &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.\end{aligned}$$

В силу свойства полноты базиса, $x - y = 0$. Дальнейшее очевидно. \square

Следствие 1 (равенство Парсеваля). *Для любого вектора $x \in H$*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Теорема 5.7. *Для всякого бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства существует ортонормированный базис Шаудера.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{y_n\} \subset H$ — счетное всюду плотное множество. Применяя процесс Грама-Шмидта (см. алгебру), получим не более чем счетное ортонормированное множество $M = \{e_n\}$. Линейная оболочка $\text{span } M$, как нетрудно видеть, плотна в H (в силу процесса Грама-Шмидта, всякий вектор y_n выражается как конечная линейная комбинация векторов из M).

Покажем, что M обладает свойством полноты. Пусть

$$\langle a, e_k \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Рассмотрим последовательность подпространств

$$E_n = \text{span} \{e_1, \dots, e_n\}.$$

В силу условия $\overline{\text{span } M} = H$,

$$d(a, E_n) \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

где $d(a, E_n) = \inf_{z \in E_n} \|a - z\|$.

По теореме 5.4, проекция $a_n = \sum_{k=1}^n \langle a, e_k \rangle e_k$ вектора a на E_n есть

элемент наилучшего приближения, то есть

$$d(a, E_n) = \|a - a_n\|.$$

Но $a_n = 0$ для всех n в силу условия (5.3). Поэтому

$$d(a, E_n) = \|a\|,$$

откуда получаем, что $a = 0$ в силу (5.4).

Таким образом, $\{e_n\}$ — базис в H . □

Определение 5.12. Два нормированных пространства X и Y называют *изометрически изоморфными*, если существует такой биективный оператор $J \in L(X, Y)$, что для всех $x \in X$

$$\|Jx\| = \|x\|.$$

Теорема 5.8. Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ изометрически изоморфно пространству последовательностей $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}$ в H , существующий в силу теоремы 5.7.

Определим оператор $J: H \rightarrow l^2$ по правилу

$$Jx = (\langle x, e_n \rangle)_{n=1}^{\infty},$$

то есть J ставит x в соответствие последовательность его координат $\langle x, e_n \rangle$.

Инъективность следует из теоремы 5.6, сюръективность из леммы 5.2. Изометричность следует из равенства Парсеваля. □

Следствие 1 (теорема Фишера-Рисса). Все сепарабельные гильбертовы пространства изометрически изоморфны между собой.

5.4 Теорема Рисса об общем виде линейного функционала

Теорема 5.9 (Рисса о представлении). Каждый линейный ограниченный функционал $f \in H^*$ допускает единственное представление вида

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \tag{5.5}$$

где $a \in H$, причем

$$\|f\| = \|a\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Если $a \in H$ — фиксированный вектор, то (5.5), очевидно, задаёт линейный функционал. Определим его норму:

$$|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \|x\| \quad x \in H;$$

$$\|f\| \leq \|a\|;$$

$$\left| f\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \right| = \left\langle a, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle = \|a\|.$$

Таким образом

$$\|f\| = \|a\|$$

2. Пусть $f \in H^*$. Будем считать, что $f \neq 0$, потому что в противном случае достаточно взять $a = 0$. Тогда $M = \text{Ker } f \neq H$. Возьмем ненулевой вектор $b \in \text{Ker } f$. Очевидно, что (проверяется непосредственно)

$$f(x)b - f(b)x \in \text{Ker } f.$$

Тогда $f(x)b - f(b)x \perp b$. В таком случае

$$\langle f(x)b - f(b)x, b \rangle = f(x)\langle b, b \rangle - f(b)\langle x, b \rangle = 0,$$

откуда получаем

$$f(x) = \frac{f(b)\langle x, b \rangle}{\|b\|^2} = \langle x, \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b \rangle = \langle x, a \rangle,$$

$$\text{где } a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b.$$

□

6 Теорема Хана-Банаха

Далее X — линейное пространство над полем \mathbb{K} .

Определение 6.1. Отображение $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *полу-нормой*, если для всех $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{K}$

1. $p(x) \geq 0$;
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$;

$$3. p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Очевидно, что всякая полунорма является нормой.

Пример 6.1. Отображение $p: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \max_{t \in [a, c]} |x(t)|$,

где $c < b$, является полунормой, но не является нормой. \diamond

Определение 6.2. Носителем функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется множество

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}},$$

где черта, как обычно, означает замыкание.

Определение 6.3. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *финитной*, если её носитель — компактное множество в \mathbb{R} .

Пример 6.2. Множество финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(\mathbb{R})$ можно наделить семейством полунорм по формуле

$$p_{k,a,b} = \max_{t \in [a,b]} |x^{(k)}(t)|, \quad k \geq 0. \quad \diamond$$

Определение 6.4. Пусть $M \subset X$ — линейное подпространство, $f_0: M \rightarrow \mathbb{K}$ — линейный функционал. Будем говорить, что линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ является *продолжением* f_0 на X если

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in M.$$

Теорема 6.1 (Хана-Банаха). Пусть X — линейное пространство над полем \mathbb{K} , p — полунорма на X , $M \subset X$ — подпространство из X и $f_0: M \rightarrow \mathbb{K}$ — линейный функционал со свойством

$$|f_0(x)| \leq p(x), \quad x \in M.$$

Тогда существует такой линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{K}$, что

1. f — продолжение f_0 на X ;

2. $|f(x)| \leq p(x)$, $x \in X$.

Следствие 1. Пусть X — линейное нормированное пространство. Тогда для всякого $x_0 \neq 0$ из X существует такой линейный ограниченный функционал $f \in X^*$, что

1. $|f(x_0)| = \|x_0\| \neq 0$;

2. $\|f\| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{K}\}$.

Функционал $f_0 \in M^*$ определим по правилу

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|,$$

а в качестве полунормы p возьмём норму:

$$p(x) = \|x\|, \quad x \in X.$$

По теореме Хана-Банаха существует продолжение f_0 на X , причем

1. $f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\| \neq 0$;
2. $|f(x)| \leq \|x\|$.

В таком случае получаем, что $\|f\| = 1$. □

Из этого следствия ясно видно, что если $X \neq \{0\}$, то и $X^* \neq \{0\}$.

Рассмотрим пространство $(X^*)^*$, которое далее будем обозначать X^{**} . Зафиксируем некоторый $x_0 \in X$ и определим функционал $\xi_{x_0} \in X^{**}$ по правилу

$$\xi_{x_0}(f) = f(x_0), \quad f \in X^*. \quad (6.1)$$

Из следствия 1 получаем, что

$$\|\xi_{x_0}\| = \|x_0\|.$$

Таким образом мы построили инъективное (проверьте!) отображение $\xi_\bullet: X \rightarrow X^{**}$. Такое отображение называется *каноническим вложением* пространства X в X^{**} . Заметим, что это линейный ограниченный оператор, сохраняющий норму.

Определение 6.5. Банахово пространство X называется *рефлексивным*, если каждый функционал из X^{**} представим в виде (6.1). Иначе говоря, каноническое вложение осуществляет изометрический изоморфизм между X и X^{**} .

Примерами рефлексивных пространств являются лебеговы пространства $L^p[a, b]$, ℓ^p , где $p \in [1, \infty)$. С другой стороны, пространства ℓ^∞ и $C[a, b]$ не рефлексивны.

7 Элементы нелинейного анализа

7.1 Производная отображения

Всюду далее X, Y — банаховы пространства над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, буквами U и V обозначаются открытые множества в X и Y .

Определение 7.1. Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$, $g: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in U$. Говорят, что

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

если справедливо равенство

$$\|f(x)\| = \varepsilon(x)g(x),$$

где $\varepsilon: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

Определение 7.2. Пусть $f, g: U \subset X \rightarrow Y$ — отображения, определенные на открытом множестве U из пространства X . Отображение g называется *касательным* к f в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = g(x) + o(\|x - x_0\|) \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

то есть

$$\frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

Легко видеть, что « f касательно g » есть отношение эквивалентности.

Определение 7.3. Отображение $f: U \subset X \rightarrow Y$ называется *дифференцируемым* в точке x_0 , если существует такой оператор $A \in L(X, Y)$, что f касательно g в точке x_0 , где g определено по формуле

$$g(x) = f(x_0) + A(x - x_0), \quad x \in U.$$

Иначе говоря, f дифференцируемо в точке x_0 если

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Если f дифференцируемо в каждой точке U , то f называют *дифференцируемым*.

Оператор A называется *производной* отображения f в точке x_0 . При этом используется привычное обозначение:

$$f'(x_0) = A.$$

Также пишут $Df(x_0)$, $D_{x_0}f$ и т. д.

Теорема 7.1. *Определение производной корректно, то есть оператор A определён однозначно для каждой точки x_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$ дифференцируемо в точке x_0 . Тогда f касательно g в точке x_0 , где $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$. Пусть теперь $g_0(x) = f(x_0) + B(x - x_0)$, $B \in L(X, Y)$, также

касательно к f в точке x_0 . Тогда g_0 касательно g в точке x_0 :

$$g(x) - g_0(x) = (A - B)(x - x_0),$$

причем

$$g(x) - g_0(x) = o(\|x - x_0\|).$$

Примем обозначение $h = x - x_0$. Тогда

$$(A - B)h = o(\|h\|).$$

Раскрывая определение символа « o » получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое δ , что если $\|h\| < \delta$, то

$$\left\| (A - B) \frac{h}{\|h\|} \right\| < \varepsilon, \quad \|h\| < \delta.$$

Тогда

$$\sup_{\|h\| < \delta} \left\| (A - B) \frac{h}{\|h\|} \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A - B)x\| = \|A - B\| < \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε получаем, что $A = B$. \square

Теорема 7.2. Пусть $f, g: U \subset X \rightarrow Y$ дифференцируемы в точке x_0 . Тогда $\alpha f + \beta g$ также дифференцируемо в точке x_0 , причем

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображения f и g дифференцируемы в точке x_0 , значит

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|). \end{aligned}$$

Домножая эти равенства на α и β соответственно и сложив, получаем, в силу свойств символа « o »:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(x) &= (\alpha f + \beta g)(x_0) + \\ &\quad + (\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0))(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \end{aligned}$$

то есть, в силу корректности определения производной,

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \quad \square$$

Следующие две теоремы предлагаются в качестве упражнения.

Теорема 7.3. Если $f: X \rightarrow Y$ — постоянное отображение, то f дифференцируемо в любой точке пространства X , причем $f'(x) = \mathbf{0}$ в любой точке $x \in X$.

Теорема 7.4. Если $A \in L(X, Y)$, то отображение A дифференцируемо в любой точке $x \in X$ и $A'(x) = A$.

Теорема 7.5. Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$ дифференцируемо в точке $x_0 \in U$, а $g: V \subset Y \rightarrow Z$ дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$ и $f(U) \subset V$. Тогда отображение $h = g \circ f: U \subset X \rightarrow Z$ дифференцируемо в точке x_0 и

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \in L(X, Z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим приращение отображения h :

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) = \\ &= g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ &= g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \\ &\quad + g'(f(x_0))o(\|x - x_0\|) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) \end{aligned}$$

Покажем, что

$$g'(f(x_0))o(\|x - x_0\|) + o(\|f(x) - f(x_0)\|) = o(\|x - x_0\|)$$

при $x \rightarrow x_0$. Введем для краткости замену $h = x - x_0$. Тогда, с учетом того, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} \leq f'(x_0),$$

получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\|g'(f(x_0))o(\|h\|) + o(\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|)\|}{\|h\|} \leq \\ &\leq \frac{\|g'(f(x_0))\| \|o(\|h\|)\| + \|o(\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|)\|}{\|h\|} = \\ &= \frac{\|g'(f(x_0))\| \varepsilon_1(h) \|h\| + \varepsilon_2(h) \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} = \\ &= \|g'(f(x_0))\| \varepsilon_1(h) + \frac{\varepsilon_2(h) \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$h(x) - h(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

□

См. «Лекции по алгебре» для определения полилинейного (билинейного) оператора.

Определение 7.4. Билинейный оператор $A: X \times X \rightarrow Y$ называется *ограниченным*, если

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1} \|A(x_1, x_2)\| < \infty.$$

Символом $B_2(X, Y)$ будем обозначать нормированное пространство билинейных ограниченных операторов, действующих из $X \times X$ в Y .

Аналогично определяется полилинейный ограниченный оператор. Пространство n -линейных ограниченных операторов обозначается $B_n(X, Y)$.

Теорема 7.6. Пространства $L(X, L(X, Y))$ и $B_2(X, Y)$ изометрически изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение

$$J: L(X, L(X, Y)) \rightarrow B_2(X, Y)$$

действует по правилу

$$(JA)(x_1, x_2) = (Ax_1)x_2.$$

Очевидно, это линейный оператор между $L(X, L(X, Y))$ и $B_2(X, Y)$. Биективность проверяется непосредственно. Проверим изометричность:

$$\begin{aligned} \|JA\|_{B_2(X, Y)} &= \sup_{\|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y = \\ &= \sup_{\|x_1\| \leq 1} \left(\sup_{\|x_2\| \leq 1} \|(Ax_1)x_2\|_Y \right) = \sup_{\|x_1\| \leq 1} (\|Ax_1\|_{L(X, Y)}) = \\ &= \|A\|_{L(X, L(X, Y))}. \quad \square \end{aligned}$$

Аналогичный результат справедлив для полилинейных операторов:

Теорема 7.7. Пространства $L(\underbrace{X, L(X, \dots, L(X, Y))}_{n \text{ раз}})$ и

$B_n(X, Y)$ изометрически изоморфны.

Из этих теорем, в частности, следует, что $B_n(X, Y)$ — банахово пространство, если Y банахово.

Определение 7.5. Пусть $f: U \subset X \rightarrow Y$ дифференцируемо в каждой точке U и отображение $f': U \subset X \rightarrow L(X, Y)$ дифференцируемо в точке x_0 . Тогда *второй производной* отображения f в точке x_0 называется производная отображения f' в точке x_0 .

Таким образом, вторая производная отображения f в точке x_0 есть линейный оператор $f''(x_0) \in L(X, L(X, Y))$, или, в силу предыдущей теоремы, вторую производную можно считать билинейным оператором из $B_2(X, Y)$.

Аналогично определяется n -ая производная отображения f в точке x_0 . Тогда $f^{(n)}(x_0) \in B_n(X, Y)$.

Определение 7.6. Отображение $f: U \subset X \rightarrow Y$ называется n раз непрерывно дифференцируемым, если для каждого $k = \overline{1, n}$ существует k -ая производная $f^{(k)}(x)$, определенная для всех $x \in U$ и при этом $f^{(n)}: U \subset X \rightarrow B_n(X, Y)$ — непрерывное отображение.

Пусть $A \in B_n(X, Y)$. Введём следующее обозначение:

$$Ah^n := A(h, \dots, h).$$

Договоримся также, что $f^{(0)}(x) = f(x)$ для всех $x \in U$, и $h^0 = 1 \in \mathbb{K}$.

Теорема 7.8 (Тейлора). Пусть отображение $f: U \subset X \rightarrow Y$ n раз непрерывно дифференцируемо. Тогда для любой точки $x_0 \in U$ и любого вектора h такого, что $x_0 + h \in U$, имеет место формула (Тейлора):

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + o(\|h\|^n) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

7.2 Задачи на экстремум

Определение 7.7. Точка $x_0 \in U$ называется *точкой локального минимума (максимума)* функции $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, если существует шар $B(x_0, \varepsilon) \subset U$ такой, что $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) \geq f(x)$) для всех $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Если же выполняется строгое неравенство, то точка x_0 называется *точкой строгого локального минимума (максимума)*.

Точка, являющаяся точкой (строгого) локального минимума либо максимума, также называется *точкой (строгого) локального экстремума*.

Теорема 7.9 (Ферма). Пусть $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке x_0 функция и $x_0 \in U$ — точка локального экстре-

му. Тогда $f'(x_0) = 0$, то есть $f'(x_0) \in X^*$ — нулевой функцио-
нал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, для определенности, x_0 — точка локального минимума (случай локального максимума рассматривается аналогично), и для всех $h \in X$ таких, что $\|h\| < \varepsilon$ выполняется условие $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$.

Предположим противное: пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда найдется такой вектор h_0 , $\|h_0\| < \varepsilon$, что $\alpha_0 = f'(x_0)h_0 > 0$. Пусть $t \in (-1, 0) \subset \mathbb{R}$. Тогда, разумеется, $\|th_0\| < \varepsilon$ и $f'(x_0)(th_0) < 0$. В силу дифференцируемости функции в точке x_0 справедливо равенство

$$f(x_0 + th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t).$$

Тогда

$$0 \leq f(x_0 + th_0) - f(x_0) = f'(x_0)(th_0) + o(t) = t \left(\alpha_0 + \frac{o(t)}{t} \right).$$

Но, поскольку $\alpha_0 > 0$, при достаточно малых $t < 0$ справедливо

$$\alpha_0 + \frac{o(t)}{t} > 0,$$

откуда следует, что в правой части равенства стоит строго отрицательная величина. Получили противоречие. \square

Определение 7.8. Билинейная форма $\xi: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется равномерно положительной (равномерно отрицательной), если существует такая константа $c > 0$, что для всех $h \in X$

$$\xi(h, h) \geq c \|h\|^2$$

$$(\xi(h, h) \leq -c \|h\|^2).$$

Теорема 7.10 (достаточное условие экстремума). Пусть $f: U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция, $f'(x_0) = 0$ и пусть $f''(x_0)$ — равномерно отрицательная (равномерно положительная) билинейная форма. Тогда x_0 — точка строгого локального максимума (минимума).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, для определённости, $f''(x_0)$ равномерно отрицательна, то есть существует такая константа $\alpha > 0$, что

$$f''(x_0)h^2 \leq -\alpha \|h\|^2.$$

Разложим функцию по формуле Тейлора в окрестности x_0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\|h\|^2).$$

Поскольку $f'(x_0) = 0$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)h^2}{2} + o(\|h\|^2) \leq -\frac{\alpha \|h\|^2}{2} + o(\|h\|^2).$$

Найдется такое $\delta > 0$, что при $\|h\| < \delta$ выполняется неравенство $o(\|h\|^2) \leq \frac{\alpha}{4} \|h\|^2$, поэтому

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq -\frac{\alpha \|h\|^2}{2} + o(\|h\|^2) \leq -\frac{\alpha \|h\|^2}{4} < 0$$

при $\|h\| < \delta$. А это в точности и означает, что x_0 — точка строгого локального максимума. Аналогично рассматривается случай локального минимума. \square

8 Элементы теории функции комплексной переменной

Более подробную информацию можно найти, например, в книге Шабата Б. В. «Введение в комплексный анализ».

Рассмотрим функцию $F: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Её можно представить в виде

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

где $P, Q: E \rightarrow \mathbb{R}$. Более того, эту функцию можно рассматривать как функцию $F: E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$F(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Пусть теперь F дифференцируема в точке $x_0 \in E$ как отображение из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^2 . Исследуем, при каких условиях эта функция будет дифференцируема как отображение из \mathbb{C} в \mathbb{C} . Заметим, что существуют функции, для которых это не выполняется. Примером может служить функция

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \Re z.$$

Если рассматривать эту функцию как отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, то

легко видеть, что это линейный оператор:

$$f(x_1, x_2) = x_1.$$

То есть f дифференцируемо в каждой точке из \mathbb{R}^2 . Однако если мы рассмотрим предел

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re z}{z} \quad (8.1)$$

при стремлении z к нулю вдоль мнимой оси и вдоль действительной оси

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \Re z = 0}} \frac{\Re z}{z} &= 0; \\ \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \Im z = 0}} \frac{\Re z}{z} &= \frac{z}{z} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом предел (8.1) не существует, то есть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ не дифференцируема.

Как известно, если отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке $x_0 = (x, y)$, то у него существуют частные производные первого порядка, и матрица Якоби в точке x_0 есть матрица оператора $f'(x_0)$ в стандартном базисе.

Пусть $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

$$f'(x_0) \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Следующее утверждение вытекает из представления комплексных чисел в виде матрицы и утверждения, что все линейные операторы в \mathbb{C} действуют по правилу $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Лемма 8.1. *Для того чтобы матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с вещественными коэффициентами задавала линейный оператор в комплексном линейном пространстве \mathbb{C} , необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Непосредственно из леммы получаем

Теорема 8.1 (условия Коши-Римана). *Дифференцируемое в точке $x_0 = (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ отображение $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,*

$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ дифференцируемо как отображение $U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ в том и только в том случае, если выполняются следующие условия (условия Коши-Римана):

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Определение 8.1. Функция $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *аналитической* (чаще говорят *голоморфной*) на открытом множестве U , если она дифференцируема (как функция в комплексном пространстве) в каждой точке множества U .

Определение 8.2. Путём в $U \subset \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow U$. Если это отображение является кусочно непрерывно дифференцируемым, то его называют *кусочно гладким путём*.

Определение 8.3. Интегралом от комплексной функции $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ вдоль кусочно гладкого пути $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ называется

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Если $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, то интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y)) d(x + iy) = \\ &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy, \end{aligned}$$

где в правой части стоят известные из курса анализа криволинейные интегралы второго рода.

Теорема 8.2 (Коши). Если функция f является аналитической в односвязной области $U \subset \mathbb{C}$, то ее интеграл вдоль любого кусочно гладкого замкнутого пути $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ равен нулю:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Доказательство. Вспомним известную из анализа формулу

Грина:

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где D — область, ограниченная путем γ . Тогда, применяя формулу Грина и условия Коши-Римана, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy = \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 8.3 (интегральная формула Коши). Пусть $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция, определенная в односвязной области U . Тогда для всех $z \in U$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda,$$

где γ — граница области U , причем направление обхода контура положительно.

Из формулы Коши вытекает следующая теорема.

Теорема 8.4. Если $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция и $z_0 \in U$, то в любом круге $D = \{|z - z_0| < R\} \subset U$ эту функцию можно представить в виде сходящегося степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z_0)^{n+1}} d\lambda, \quad n = 0, 1, \dots,$$

а контур $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ есть круг радиуса $r < R$ с центром в точке z_0 .

Эта теорема влечет за собой, что всякая дифференцируемая функция комплексной переменной дифференцируема бесконечное число раз, причем, поскольку из теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов следует, что

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

получаем

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Справедлива также и обратная теорема.

Теорема 8.5. Если $z_0 \in \mathbb{C}$ и ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

сходится при $|z - z_0| < R$, то функция f является аналитической в круге $|z - z_0| < R$.

Теорема 8.6 (единственности). Если $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична на U и

$$f(z_n) = 0,$$

где $\{z_n\}$ — сходящаяся последовательность, то для всех $z \in U$

$$f(z) = 0.$$

Определение 8.4. Функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *целой*, если она является аналитической на всей комплексной плоскости.

Всякую целую функцию можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Теорема 8.7 (Лиувилля). Если f — целая ограниченная функция, то она постоянна, т.е. $f(z) = c \in \mathbb{C}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Результаты данного параграфа легко обобщаются на функции комплексной переменной, принимающие значение в некоторой банаховой алгебре.

9 Спектральная теория линейных операторов

Определение обратного оператора и другие алгебраические аспекты теории можно найти в «Лекциях по алгебре».

Далее всюду X — комплексное банахово пространство.

9.1 Обратные операторы и их свойства

Лемма 9.1. Если $A \in L(X)$ и $\|A\| < 1$, то оператор $I - A$ обратим, а обратный задается формулой

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

причем ряд сходится абсолютно и

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что ряд сходится абсолютно. Используем формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Итак, ряд сходится абсолютно, значит он сходится. Отсюда же следует и оценка нормы. Обозначим сумму ряда через $B \in L(X)$. Покажем, что B — обратный к $I - A$.

$$\begin{aligned} (I - A)B &= (I - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - A) \sum_{n=0}^m A^n = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m (A^n - A^{n+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - A^{m+1}) = I, \end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо в силу условия $\|A\| < 1$.

Аналогично доказывается, что $B(I - A) = I$. \square

Теорема 9.1. Пусть $A, B \in L(X)$, A обратим, $\|B\| \|A^{-1}\| < 1$. Тогда $A - B$ обратим и

$$(A - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}B)^n A^{-1},$$

и справедлива оценка

$$\|(A - B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B\| \|A^{-1}\|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим оператор $A - B$ в виде $A - B = A(I - A^{-1}B)$. Оператор A обратим, оператор $I - A^{-1}B$ обратим в силу леммы. Значит и $A - B$ обратим. Остальное прямо следует из леммы, если её применить к оператору $I - A^{-1}B$. \square

Далее $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ — линейный оператор, определенный на некотором подпространстве $D(A)$ пространства X .

Определение 9.1. Оператор $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ называется *замкнутым*, если его график

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$$

является замкнутым подмножеством в пространстве $X \times X$, наделённом нормой

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}.$$

Иначе говоря, оператор замкнут, если для всякой сходящейся последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$ такой, что $Ax_n \rightarrow y \in X$, предел x лежит в $D(A)$ и $y = Ax$.

Пример 9.1. Оператор $A: D(A) \subset C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $D(A) = C^1[a, b]$, действующий по правилу $Ax = x'$, является замкнутым. Это следует из теоремы о почленном дифференцировании функциональных последовательностей, известной из курса математического анализа. \diamond

Теорема 9.2. *Всякий ограниченный оператор $A \in L(X)$ замкнут.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in L(X)$, $x_n \rightarrow x_0$, $Ax_n \rightarrow y_0$. В силу непрерывности A , $Ax_n \rightarrow Ax_0$, значит, в силу единственности предела последовательности, $Ax_0 = y_0$. \square

Теорема 9.3 (Банаха о замкнутом графике).

Пусть $A: X \rightarrow X$ — замкнутый линейный оператор, определенный на всем банаховом пространстве X . Тогда оператор A ограничен.

Пусть $A \in L(X)$. Рассмотрим два условия:

1. $\text{Ker } A = \{0\}$ — оператор A инъективен.
2. $\text{Im } A = X$ — оператор A сюръективен.

В случае, когда X — конечномерное пространство, как известно

из алгебры, эти два условия эквивалентны. Однако в случае бесконечномерных пространств это не так.

Если для оператора из $A \in L(X)$ выполняются условия (1, 2), он является биективным, а значит существует обратное отображение A^{-1} , которое, как известно из алгебры, также является линейным оператором. Будет ли этот оператор ограниченным? Оказывается, если пространство X банахово, это всегда так.

Теорема 9.4 (Банаха об обратном операторе). *Пусть линейный оператор $A \in L(X)$, действующий в банаховом пространстве X , биективен, т.е. выполнены условия (1) и (2). Тогда A^{-1} ограничен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку A ограничен, он замкнут. Покажем, что A^{-1} также замкнут.

$$\Gamma(A^{-1}) = \{(x, A^{-1}x) : x \in X\} = \{(Ax, x) : x \in X\}.$$

Пусть $Ax_n \rightarrow y_0$, а $x_n \rightarrow x_0$. Поскольку A замкнут, $y_0 = Ax_0$, и $(y_0, x_0) = (Ax_0, x_0) \in \Gamma(A^{-1})$, то есть множество $\Gamma(A^{-1})$ замкнуто. Значит, оператор A^{-1} замкнут, а по теореме о замкнутом графике он и ограничен. \square

Если $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ определен не на всем пространстве, то для него также можно рассматривать условия (1, 2). Тогда будем называть обратным к оператору A оператор $A^{-1}: X \rightarrow X$, который удовлетворяет естественным условиям

$$AA^{-1} = I_X$$

и

$$A^{-1}Ax = x$$

для всех $x \in D(A)$. Обратим внимание, что мы считаем A^{-1} действующим из X во всё пространство X , а не в $D(A)$.

Теорема 9.5 (Банаха об обратном операторе).

Пусть $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ — замкнутый биективный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X . Тогда $A^{-1}: X \rightarrow X$ — ограниченный оператор.

Доказательство аналогично предыдущему.

9.2 Спектр оператора

Лемма 9.2. *Если $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ замкнут, то и $A - \lambda I$ замкнут, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $I: D(A) \subset X \rightarrow X$ — тождественный оператор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A замкнут, $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \rightarrow x$, $(A - \lambda I)x_n \rightarrow y$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n - \lambda x_n + \lambda x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)x_n + \\ &\quad + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y + \lambda x. \end{aligned}$$

Тогда, в силу замкнутости A ,

$$Ax = \lambda x + y \Rightarrow (A - \lambda I)x = y,$$

то есть $A - \lambda I$ также замкнут. \square

Определение 9.2. Пусть $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ — замкнутый оператор. Будем называть число $\lambda \in \mathbb{C}$ *точкой спектра* оператора A , если оператор $A - \lambda I: D(A) \subset X \rightarrow X$ необратим, то есть выполнено хотя бы одно из условий

1. $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ — оператор не инъективен.
2. $\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$ — оператор не сюръективен.

Если же число $\lambda \in \mathbb{C}$ не является точкой спектра, то его называют *регулярной точкой* оператора A .

Заметим, что по теореме Банаха об обратном операторе, если число λ — регулярная точка A , то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен.

Определение 9.3. Множество $\sigma(A)$ точек спектра оператора A называется *спектром* оператора A .

Определение 9.4. Множество $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A .

Спектр оператора принято разбивать на три взаимно непересекающиеся части:

1. Дискретный спектр $\sigma_d(A)$ — множество собственных значений оператора A , то есть такие $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$.
2. Непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ — множество таких $\lambda \in \mathbb{C}$, не являющихся собственными значениями, что $\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$, но $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = X$.
3. Остаточный спектр $\sigma_r(A)$ — множество точек спектра, не вошедших ни в дискретный спектр, ни в непрерывный спектр.

Ясно, что $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

Определение 9.5. Отображение $R(\bullet, A): \rho(A) \rightarrow L(X)$, действующее по правилу

$$R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

называется *резольвентой* оператора A .

Теорема 9.6. Для всякого замкнутого оператора A множество $\rho(A)$ открыто. Резольвента $R(\bullet, A): \rho(A) \rightarrow L(X)$ — аналитическая функция на $\rho(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ таково, что

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}.$$

Тогда представим оператор $A - \lambda I$ в следующем виде:

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I + \lambda_0 I - \lambda I = (A - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)).$$

Оператор $I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)$ обратим, поскольку (см. лемму 9.1)

$$\|(\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A)\| < 1.$$

Так как $A - \lambda_0 I$ также обратим, то и $A - \lambda I$ обратим как произведение обратимых операторов. Отсюда следует, что резольвентное множество открыто: вместе с каждой точкой λ_0 в $\rho(A)$ входит открытый круг радиусом меньше $\|R(\lambda_0, A)\|^{-1}$ с центром в точке λ_0 .

Оператор, обратный к $(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))$ представляется в виде

$$(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= (A - \lambda I)^{-1} = (I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, A))^{-1} (A - \lambda_0 I)^{-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом мы получили, что $R(\lambda, A)$ в некоторой окрестности каждой точки $\lambda_0 \in \rho(A)$ представляется в виде суммы степенного ряда с коэффициентами $c_n = R(\lambda_0, A)^{n+1}$. Значит, по теореме 8.5, функция $R(\lambda, A)$ аналитична на $\rho(A)$. \square

Следствие 1. *Для всякого замкнутого оператора A множество $\sigma(A)$ замкнуто.*

Теорема 9.7 (тождество Гильберта). *Для любого линейного замкнутого оператора A и любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к правой и левой частям равенства $A - \lambda I$ справа и $A - \mu I$ слева, получим одинаковые выражения:

$$(A - \lambda I)(R(\lambda, A) - R(\mu, A))(A - \mu I) = A - \mu I - A + \lambda I = (\lambda - \mu)I;$$

$$(\lambda - \mu)(A - \lambda I) R(\lambda, A) R(\mu, A)(A - \mu I) = (\lambda - \mu)I,$$

то есть

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)(R(\lambda, A) - R(\mu, A))(A - \mu I) &= \\ &= (\lambda - \mu)(A - \lambda I) R(\lambda, A) R(\mu, A)(A - \mu I). \end{aligned}$$

Из биективности $A - \lambda I$ и $A - \mu I$ следует, что на них можно «сократить» справа и слева. Тогда получаем требуемое равенство. \square

Следствие 1. *Операторы $R(\lambda, A)$ и $R(\mu, A)$ перестановочны.*

Теорема 9.8 (о спектре ограниченного оператора).

Пусть $A \in L(X)$ — ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X . Тогда его спектр $\sigma(A)$ есть непустое компактное множество в \mathbb{C} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $\sigma(A)$ — компактное множество. Как известно из анализа, множество в евклидовом пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Замкнутость спектра следует из предыдущей теоремы. Докажем ограниченность.

Пусть $|\lambda| > \|A\| \geq 0$. Тогда

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A).$$

Оператор $(I - \lambda^{-1}A)$ обратим, поскольку

$$\|\lambda^{-1}A\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1.$$

Тогда и $A - \lambda I$ обратим. Отсюда получаем, что спектр оператора A лежит внутри круга радиуса $\|A\|$ и с центром в нуле, то есть $\sigma(A)$ — ограниченное множество и, в силу замкнутости, компактное.

Покажем, что $\sigma(A)$ непустое множество. Предположим противное: пусть $\rho(A) = \mathbb{C}$ и $|\lambda| > \|A\|$. Тогда при таких λ резольвента представляется в виде

$$R(\lambda, A) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

При этом для нормы резольвенты справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \\ &= \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

То есть при $\lambda \rightarrow \infty$ норма $\|R(\lambda, A)\|$ стремится к нулю.

При этом, по теореме 9.6, резольвента является аналитической функцией на $\rho(A) = \mathbb{C}$, то есть в нашем случае резольвента оказывается целой ограниченной функцией (ограниченность следует из стремления к нулю на бесконечности и непрерывности). Поэтому, по теореме Лиувилля, $R(\lambda, A) = \mathbf{0} \in L(X)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, что невозможно. Получили противоречие. Значит спектр оператора A непуст. \square

Определение 9.6. *Спектральным радиусом* линейного ограниченного оператора $A \in L(X)$ называется величина

$$r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Спектральный радиус корректно определен в виду компактности и непустоты спектра A . Из доказательства теоремы 9.8 видно, что

$$r(A) \leq \|A\|,$$

поскольку, если $|\lambda| > \|A\|$, то оператор $A - \lambda I$ обратим.

Теорема 9.9 (формула Бёрлинга-Гельфанда). *Пусть $A \in L(X)$. Тогда для спектрального радиуса оператора A справедлива формула*

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$