

## Содержание

1	Собственные значения и собственные векторы	2
2	Проекторы и прямые суммы подпространств	6
3	Инвариантные подпространства. Разложение операторов	8
4	Многочлены от операторов и матриц	12
5	Теорема Гамильтона-Кэли	15
6	Многочлены от операторов и разложение операторов	16
7	TODO: Жорданов базис для нильпотентных операторов	21
8	TODO: Жорданов базис и жорданова форма линейных операторов	21
9	Сопряжённые операторы	21

## §1. Собственные значения и собственные векторы

Далее  $X$  — конечномерное линейное пространство размерности  $n$ ,  $L(X)$  — алгебра операторов,  $I$  — тождественный оператор,  $O$  — нулевой оператор.

**Определение 1.1.** Оператор  $A$  называется *скалярным*, если он имеет вид  $A = \alpha I$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

**Определение 1.2.** Скажем, что оператор  $A \in L(X)$  имеет *простую структуру* (оператор простой структуры, ОПС, *диагонализируемый* оператор), если существует базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $X$  и такие числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , что имеют место равенства:

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad k = \overline{1, n}$$

Иначе говоря, для того чтобы  $A$  был оператором простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис, в котором матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Очевидно, что оператор простой структуры обратим тогда и только тогда, когда  $\forall k = \overline{1, n} \quad \lambda_k \neq 0$ , причем обратный оператор будет иметь вид

$$A^{-1}e_k = \frac{1}{\lambda_k}e_k, \quad k = \overline{1, n}$$

Всякий оператор скалярного типа является оператором простой структуры.

Существуют операторы, не являющиеся ОПС.

**Определение 1.3.** Ненулевой оператор  $Q \in L(X)$  называется *нильпотентным*, если  $\exists m \in \mathbb{N} \quad Q^m = O$ . Наименьшее из  $m$ , для которых выполняется данное равенство, называется *индексом nilьпотентности* оператора  $Q$ .

**Пример 1.1.**

$$\begin{aligned} D : \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \\ D\varphi &= \varphi' \\ D^{n+1} &= O \end{aligned}$$

$n + 1$  — индекс nilьпотентности

◇

**Теорема 1.1.** *Если оператор нильпотентный, то он не диагонализирован*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $Q \in L(X)$ ,  $Q \neq 0$ ,  $Q^m = 0$ .

Предположим противное: допустим, что  $Q$  — оператор простой структуры. Тогда существует базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $X$  и такие числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , что

$$Qe_k = \lambda_k e_k, \quad k = \overline{1, n}$$

$\lambda_k$  не равны одновременно нулю (в противном случае  $Q$  был бы нулевым).

$$\forall k = \overline{1, n} \quad 0 = Q^m e_k = \lambda_k^m e_k \Rightarrow \exists k = \overline{1, n} \quad e_k = 0$$

Получили противоречие (в базисе не может быть нулевых векторов).  $\square$

**Определение 1.4.**  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$  называется *собственным значением* оператора  $A \in L(X)$ , если существует **ненулевой** вектор  $x_0 \in X$  такой, что

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0$$

При этом  $x_0$  называется *собственным вектором* оператора  $A$ , соответствующим  $\lambda_0$ .

Непосредственно из определения 1.4 следует, что  $\lambda_k$  из определения 1.2 являются собственными значениями оператора  $A$ , а  $e_k$  — собственными векторами.

**Определение 1.5.** Совокупность всех собственных значений оператора  $A$  называется *спектром* оператора:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists x_0 \in X \quad x_0 \neq 0 \wedge Ax_0 = \lambda x_0\}$$

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} Ax_0 &= \lambda_0 x_0 \\ (A - \lambda_0 I)x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Если  $\text{Ker}(A - \lambda_0 I) \neq \{0\}$ , то  $\lambda_0$  — собственное значение  $A$ . Значит, можно сказать, что

*Спектр оператора — множество тех  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ , для которых оператор  $A - \lambda_0 I$  необратим.*

Оператор  $A - \lambda_0 I$  необратим тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda_0 I) = 0 \tag{1.1}$$

Пусть  $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \text{Matr}_n(\mathbb{K})$  — матрица оператора  $A$ . Исходя из условия (1.1),  $\lambda$  является собственным значением оператора  $A$  тогда и только тогда, когда матрица  $\mathcal{A} - \lambda E$  необратима, т. е. её определитель равен нулю:

$$\det(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$$

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots + \det \mathcal{A} \quad (1.3)$$

**Определение 1.6.** Выражение вида (1.2) называется *характеристическим многочленом* оператора  $A$  (матрицы  $\mathcal{A}$ ).

Из вышеприведённых рассуждений следует

**Теорема 1.2.** *Спектр оператора состоит из корней характеристического многочлена:*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : p_A(\lambda) = 0\}$$

Следовательно, спектр линейного оператора в конечномерном линейном пространстве всегда содержит не более  $n$  собственных значений.

**Пример 1.2.** Рассмотрим  $\mathbb{R}^2$  и оператор  $A \in L(\mathbb{R}^2)$  с матрицей  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Вещественных корней нет, значит

$$\sigma(A) = \emptyset$$

◇

**Теорема 1.3.** *Пусть  $X$  — комплексное ЛП,  $\dim X \geq 1$ . Тогда каждый  $A \in L(X)$  имеет непустой спектр, состоящий из конечного числа собственных значений, число которых не превышает  $n$ , и все они совпадают с корнями  $p_A(\lambda)$ .*

Доказательство теоремы следует из приведённых выше рассуждений и основной теоремы высшей алгебры.

**Определение 1.7.** След квадратной матрицы есть сумма элементов матрицы, стоящих на главной диагонали.

$$\operatorname{tr} \mathcal{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Аналогично определяется след оператора (можно показать, что подобные матрицы имеют одинаковый след).

Из формул Виета и выражения (1.3) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \operatorname{tr} A \\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n &= \det \mathcal{A} = \det A \end{aligned}$$

**Определение 1.8.** Ядро оператора  $A - \lambda_0 I$  называется *собственным подпространством* оператора  $A$  для собственного значения  $\lambda_0$ .

$$E(\lambda_0, A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)$$

**Определение 1.9.** Кратность корня  $\lambda_0$  характеристического многочлена оператора  $A$  называется *алгебраической кратностью* собственного значения  $\lambda_0$ .

**Определение 1.10.** Собственное значение линейного оператора называется *простым*, если его алгебраическая кратность равна единице.

**Определение 1.11.**  $\dim E(\lambda_0, A)$  называется *геометрической кратностью* собственного значения  $\lambda_0$ .

**Теорема 1.4.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  — различные собственные значения оператора  $A \in L(X)$ . Тогда соответствующие им собственные векторы  $e_1, \dots, e_m$  линейно независимы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство проведём индукцией по  $m$ . База индукции: при  $m = 1$  утверждение теоремы очевидно.

**Индукционный переход:** пусть утверждение верно для  $k$  векторов.  $e_1, \dots, e_k$  — линейно независимы. Добавим к ним вектор  $e_{k+1}$ .

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e_j = 0 \Rightarrow (A - \lambda_{k+1} I) \left( \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e_j \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^k (\lambda_j - \lambda_{k+1}) \alpha_j e_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0, \quad j = \overline{1, k}$$

$$\alpha_{k+1} e_{k+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0, \text{ т.к. } e_{k+1} \neq 0$$

□

Из определения 1.2 и теоремы 1.4 следует

**Теорема 1.5.** *Если характеристический многочлен оператора имеет  $n$  различных корней и размерность пространства равна  $n$ , то этот оператор диагонализуем.*

## §2. Проекторы и прямые суммы подпространств

Далее

$$\dim X = n$$

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_m$$

**Определение 2.1.** Оператор  $P \in L(X)$  называется *проектором*, если

$$P^2 = P$$

Матрица  $\mathcal{P} \in \text{Matr}_n(\mathbb{K})$  называется *идемпотентной*, если

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

**Определение 2.2.** Пусть  $P_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  — проекторы. Будем говорить, что они образуют *разложение единицы*, если

1.  $I = \sum_{k=1}^m P_k$
2.  $P_i P_j = O \quad \forall i \neq j$

Пусть далее  $m = 2$  (аналогично можно рассмотреть случай произвольного  $m$ ).

$$X = X_1 \oplus X_2$$

$$x = x_1 + x_2$$

Построим операторы  $P_1$  и  $P_2$  следующим образом:

$$P_1 x = x_1$$

$$P_2 x = x_2$$

Линейность очевидна. Ясно, что построенные операторы являются проекторами.

**Лемма 2.1.** *Построенные указанным выше образом проекторы образуют разложение единицы:*

1.  $P_1 + P_2 = I$
2.  $P_1 P_2 = P_2 P_1 = O$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$1. (P_1 + P_2)x = P_1x + P_2x = x_1 + x_2 = x = Ix$$

$$2. (P_1P_2)x = P_1(P_2x) = P_1x_2 = P_1(0 + x_2) = 0$$

□

**Лемма 2.2.** Пусть задано разложение единицы

$$\begin{cases} I = P_1 + P_2 \\ P_1P_2 = O \end{cases}$$

Тогда

$$X = X_1 \oplus X_2,$$

где

$$X_1 = \text{Im } P_1$$

$$X_2 = \text{Im } P_2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $x \in X$ . Ясно, что его можно представить как сумму  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1 \in X_1$  и  $x_2 \in X_2$ :

$$P_1x = x_1 \in \text{Im } P_1 = X_1$$

$$P_2x = x_2 \in \text{Im } P_2 = X_2$$

$$Ix = P_1x + P_2x = x_1 + x_2$$

Покажем, что такое представление единственно. Пусть

$$x = x'_1 + x'_2, \quad x'_i \in X_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

Можно показать, что  $P_1x'_1 = x'_1$ <sup>1</sup> и  $P_1x'_2 = 0$ <sup>2</sup>

Применим к обеим частям равенства (2.1) оператор  $P_1$ :

$$P_1x = P_1x'_1 + P_1x'_2 = x_1$$

Применим к обеим частям того же равенства (2.1) оператор  $P_2$ :

$$P_2x = P_2x'_1 + P_2x'_2 = x_2$$

Таким образом, объединяя полученные равенства, получаем:

$$P_1x = x_1 = x'_1$$

$$P_2x = x_2 = x'_2$$

□

---

1

$$\begin{aligned} x'_1 \in \text{Im } P_1 &\Rightarrow \exists x_0 \in X \quad P_1x_0 = x'_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_1^2x_0 = P_1x'_1 \Rightarrow P_1x_0 = P_1x'_1 \Rightarrow x'_1 = P_1x'_1 \end{aligned}$$

2

$$P_1x'_2 = P_1(P_2x_0) = 0$$

Пусть  $P \in L(X)$  — проектор. Рассмотрим оператор вида  $I - P$ . Покажем, что он является проектором:

$$(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P$$

Покажем, что проекторы  $I - P$  и  $P$  образуют разложение единицы:

$$(I - P)P = P - P^2 = O$$

$$(I - P) + P = I$$

Проектор  $I - P$  называется *дополнительным проектором к  $P$* . Из леммы 2.2 следует, что

$$X = \text{Im } P \oplus \text{Im}(I - P)$$

### §3. Инвариантные подпространства. Разложение операторов

Далее  $A \in L(X)$ .

**Определение 3.1.** Подпространство  $M \subset X$  называется *инвариантным* для  $A$ , если

$$A(M) \subset M$$

Иначе:

$$\forall x \in M \quad Ax \in M$$

Далее сужение оператора  $A$  на инвариантное подпространство  $M$  будем обозначать  $A_M$  или  $A|_M$ .

**Теорема 3.1.** Пусть  $X$  — комплексное пространство размерности больше единицы. Тогда для любого оператора  $A \in L(X)$  имеется инвариантное подпространство ненулевой размерности.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $A \in L(X)$ . Так как пространство комплексное, спектр оператора  $A$  непуст, т.е. имеется хотя бы одно собственное значение  $\lambda_1$ :

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1$$

Рассмотрим множество

$$M = \{\alpha e_1 : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Это инвариантное подпространство, т. к.

$$A(\alpha e_1) = \alpha \lambda_1 e_1 \in M$$

□



**Замечание.** В вещественном пространстве может и не быть инвариантных подпространств.

**Пример 3.1.**

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$Ae_1 = e_2$$

$$Ae_2 = -e_1$$

◇

TODO: свойства матриц

**Определение 3.2.** Пусть  $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$  — прямая сумма инвариантных относительно  $A$  подпространств  $X_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ . В этом случае говорят, что  $A$  приводится (разлагается) семейством подпространств  $X_k$  в прямую сумму операторов:

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m,$$

где  $A_k = A|X_k$ .

Такое обозначение обусловлено тем, что любой вектор  $Ax$  можно единственным образом представить в виде суммы:

$$Ax = A(x_1 + \cdots + x_m) = Ax_1 + \cdots + Ax_m = A_1x_1 + \cdots + A_mx_m$$

**Теорема 3.2.** Пусть  $A \in L(X)$  — оператор простой структуры,  $\sigma(A) = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$ ,  $m \leq n$ . Тогда  $X = \bigoplus_{k=1}^m X_k$ , где  $X_k = E(\lambda_k, A) = \text{Ker}(A - \lambda_k I)$  и оператор  $A$  допускает разложение

$$A = \lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_m I_m$$

**Доказательство.** Нетрудно показать, что любое собственное подпространство оператора является инвариантным относительно этого оператора.

Покажем, что  $X = \bigoplus_{k=1}^m X_k$ .

По определению оператора простой структуры существует базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $X$  такой, что  $Ae_k = \lambda_i e_k$ . Каждый из этих векторов принадлежит одному из подпространств  $X_i$ . Таким образом каждый вектор  $x \in X$  можно представить в виде суммы некоторых векторов из  $X_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , причем такое представление единственно в силу свойств базиса.

Ясно также, что сужение оператора  $A$  на инвариантное подпространство  $E(\lambda_k, A)$  будет иметь вид:

$$A_k = A|E(\lambda_k, A) = \lambda_k I_k$$

где  $I_k \in L(X_k)$  — тождественный оператор. □

**Теорема 3.3.** Пусть  $A \in L(X)$  допускает разложение  $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$  относительно прямой суммы инвариантных подпространств  $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$ . Тогда

$$1. \quad \text{Ker } A = \text{Ker } A_1 \oplus \cdots \oplus \text{Ker } A_m$$

$$\text{Im } A = \text{Im } A_1 \oplus \cdots \oplus \text{Im } A_m$$

$$2. \quad \text{Ker}(A - \lambda I) = \bigoplus_{k=1}^m \text{Ker}(A_k - \lambda I_k) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\text{Im}(A - \lambda I) = \bigoplus_{k=1}^m \text{Im}(A_k - \lambda I_k) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

3.  $A$  обратим тогда и только тогда, когда обратима каждая его часть  $A_k$ .

$$4. \quad \sigma(A) = \bigcup_{k=1}^m \sigma(A_k)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Пусть  $x \in \text{Ker } A$ ,  $x = x_1 + \cdots + x_m$ . Тогда

$$0 = Ax = A_1x_1 + \cdots + A_mx_m, \quad A_kx_k \in X_k, \quad k = \overline{1, m}$$

Из свойств прямой суммы (единственности представления нуля) получаем, что  $A_kx_k = 0$ ,  $k = \overline{1, m}$ , т.е.  $x_k \in \text{Ker } A_k$ . Отсюда и получаем первое равенство.

Пусть  $y \in \text{Im } A$ . Тогда существует  $x \in X$ ,  $x = x_1 + \cdots + x_m$  такой, что  $y = Ax$ .

$$\text{Im } A \ni y = Ax = A_1x_1 + \cdots + A_mx_m, \quad A_kx_k \in \text{Im } A_k, \quad k = \overline{1, m}$$

2. Рассмотрим скалярный оператор  $\lambda I$ :

$$\lambda I = \lambda I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda I_m$$

относительно  $X_1, \dots, X_m$ . Следовательно

$$A - \lambda I = (A_1 - \lambda I_1) \oplus \cdots \oplus (A_m - \lambda I_m)$$

Далее, применяя (1) для оператора  $A - \lambda I$  получаем равенства (2).

3. Оператор  $A$  обратим тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } A = \{0\}$ . Отсюда и из свойства (1), очевидно, следует утверждение (3) теоремы.

Пусть  $A$  обратим. Рассмотрим оператор  $B$  такой, что

$$B = A_1^{-1} \oplus \dots \oplus A_m^{-1}$$

$$Bx = A_1^{-1}x_1 + \dots + A_m^{-1}x_m$$

Покажем, что оператор  $B$  — обратный к оператору  $A$ :

$$A(Bx) = A(A_1^{-1}x_1 + \dots + A_m^{-1}x_m) = x_1 + \dots + x_m = x$$

т.к.  $A_k^{-1}x_k \in X_k$

Таким образом

$$A^{-1} = A_1^{-1} \oplus \dots \oplus A_m^{-1}$$

4. Рассмотрим сумму операторов

$$A - \lambda I = (A_1 - \lambda I_1) \oplus \dots \oplus (A_m - \lambda I_m)$$

$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow A - \lambda I$  необратим  $\Leftrightarrow$  необратим хотя бы один из  $A_k - \lambda I_k$ , т. е.

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \dots \cup \sigma(A_m) \quad \square$$

**Теорема 3.4.** Пусть  $A \in L(X)$ ,  $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_m$ , проекторы  $P_1, \dots, P_m$  образуют разложение единицы, причем  $\text{Im } P_k = X_k$ . Тогда для того чтобы каждое из подпространств  $X_k$  было инвариантным относительно  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы каждый из операторов  $P_k$  был перестановочен с  $A$ :

$$AP_k = P_k A, \quad k = \overline{1, m}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

**Необходимость:** Пусть  $A(X_k) \subset X_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

$$\begin{aligned} AP_k x &= IAP_k x = (P_1 + \dots + P_k + \dots + P_m)AP_k x = \\ &= P_k AP_k x = P_k AP_k (x_1 + \dots + x_k + \dots + x_m) = P_k AP_k x_k = \\ &= P_k Ax_k = \underbrace{P_k Ax_1}_{=0} + \dots + P_k Ax_k + \dots + \underbrace{P_k Ax_m}_{=0} = P_k Ax \end{aligned}$$

Необходимость доказана.

**Достаточность:** Пусть  $x \in X_k$ .

$$Ax = AP_k x = P_k Ax \in \text{Im } P_k = X_k \quad \square$$

**Теорема 3.5.** Пусть  $A \in L(X)$  — оператор простой структуры,  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Тогда

$$A = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k, \quad (3.1)$$

где  $P_k$  — проекторы, образующие разложение единицы,  $\text{Im } P_k = E(\lambda_k, A)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $x \in X$ . По теореме 3.2

$$X = X_1 \oplus \dots \oplus X_m, \quad X_k = E(\lambda_k, A), \quad k = \overline{1, m}$$

Тогда

$$x = x_1 + \dots + x_m = P_1 x + \dots + P_m x, \quad P_k x \in X_k$$

Применим к правой и левой частям равенства оператор  $A$ :

$$\begin{aligned} Ax &= AP_1 x + \dots + AP_m x = \\ &= \lambda_1 P_1 x + \dots + \lambda_m P_m x = \left( \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k \right) x \quad \square \end{aligned}$$

**Определение 3.3.** Представление (3.1) называется *спектральным разложением* оператора простой структуры.

**Следствие 1.** Если  $\mathcal{A} \in \text{Matr}_n(\mathbb{K})$  диагонализируема,  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ , то

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathcal{P}_k,$$

где  $\mathcal{P}_k^2 = \mathcal{P}_k$ ,  $E = \sum_{k=1}^m \mathcal{P}_k$ ,  $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = 0 \quad \forall i \neq j$

## §4. Многочлены от операторов и матриц

Далее будем рассматривать алгебры линейных операторов, матриц и многочленов.

Пусть  $A \in L(X)$ ,  $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ .

$$p(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m$$

Поставим  $p$  в соответствие такой оператор  $p(A)$ , что

$$p(A) = p_0 I + p_1 A + \dots + p_m A^m$$

**Определение 4.1.** Оператор  $p(A)$  называется *многочленом от оператора  $A$* .

Рассмотрим отображение  $\Phi_A : \mathcal{P}(\mathbb{K}) \rightarrow L(X)$  такое что

$$\Phi_A(p) = p(A) \quad (4.1)$$

**Лемма 4.1.** *Отображение (4.1) — гомоморфизм алгебр:*

1.  $\Phi_A(\mathbb{1}) = I$ , где  $\mathbb{1}(z) \equiv 1$
2.  $\Phi_A(\alpha f + \beta g) = \alpha \Phi_A(f) + \beta \Phi_A(g)$
3.  $\Phi_A(fg) = \Phi_A(f)\Phi_A(g)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Утверждения (1) и (2) очевидны. Докажем утверждение (3).

$$\begin{aligned}
 3. \quad & f(z) = f_0 + f_1 z + \cdots + f_m z^m \\
 & g(z) = g_0 + g_1 z + \cdots + g_k z^k \\
 & (fg)(z) = \sum_{i=0}^{m+k} c_i z^i, \quad c_i = \sum_{j+p=i} f_j g_p \\
 & \Phi_A(fg) = \sum_{i=0}^{m+k} c_i A^i \\
 & \Phi_A(f)\Phi_A(g) = f(A)g(A) = (f_0 I + f_1 A + \cdots + f_m A^m) \times \\
 & \quad \times (g_0 I + g_1 A + \cdots + g_k A^k) = \sum_{i=0}^{m+k} c_i A^i, \quad c_i = \sum_{j+p=i} f_j g_p \\
 & \Phi_A(fg) = \Phi_A(f)\Phi_A(g) \quad \square
 \end{aligned}$$

**Следствие 1.**  $f(A)g(A) = g(A)f(A)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\Phi_A(f)\Phi_A(g) = \Phi_A(fg) = \Phi_A(gf) = \Phi_A(g)\Phi_A(f) \quad \square$$

Аналогично можно рассмотреть многочлены от матриц (и вообще элементов любой унитарной алгебры).

Несложно заметить, что многочлен  $p(A)$  от матрицы  $A$  оператора  $A$  есть матрица многочлена  $p(A)$  от оператора  $A$ .

Рассмотрим оператор  $A \in L(X)$  такой, что

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 \oplus \cdots \oplus I_m \\
 A &= A_1 \oplus \cdots \oplus A_m
 \end{aligned}$$

относительно

$$X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$$

Очевидно, что если  $X_k$  инвариантно относительно  $A$ , то оно инвариантно также относительно  $A^j$ ,  $j \geq 0$ . Также ясно, что если  $A_k$  — сужение оператора  $A$  на инвариантное подпространство  $X_k$ , то  $A_k^j$  — сужение оператора  $A^j$  на то же подпространство. Отсюда получаем, что

$$A^j = A_1^j \oplus \cdots \oplus A_m^j$$

Пусть далее  $A$  — оператор простой структуры,  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ .

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j \\ A^k &= \sum_{j=1}^m \lambda_j^k P_j \\ f(A) &= \sum_{j=1}^m f(\lambda_j) P_j \end{aligned}$$

Последние два равенства доказываются простой проверкой.

Наша цель — получить из последнего равенства проекторы  $P_j$ . Этого можно добиться, если найти такие многочлены  $f_j$ , что

$$\begin{cases} f_j(\lambda_j) = 1 \\ f_j(\lambda_k) = 0, \quad k \neq j \end{cases}$$

Тогда  $f_j(A) = P_j$ .

Используем интерполяционную формулу Лагранжа:

$$\begin{aligned} f_j(\lambda) &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \\ A &= \sum_{j=1}^m \lambda_j P_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(A) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \frac{A - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Формула (4.2) называется *интерполяционной формулой Сильвестра*.

## §5. Теорема Гамильтона-Кэли

**Определение 5.1.** Ненулевой многочлен  $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$  называется *аннулирующим* оператор  $A \in L(X)$  (матрицу  $\mathcal{A} \in \text{Matr}_n(\mathbb{K})$ ), если  $p(A) = O$  ( $p(\mathcal{A}) = 0$ ).

**Определение 5.2.** Многочлен  $p$  наименьшей положительной степени со старшим коэффициентом 1 и аннулирующий оператор  $A$  называется *минимальным (аннулирующим) многочленом* оператора  $A$ .

Рассмотрим без доказательства следующую важную теорему.

**Теорема 5.1 (Гамильтона-Кэли).** Пусть  $X$  — линейное пространство над полем комплексных чисел. Тогда характеристический многочлен оператора  $A \in L(X)$  аннулирует оператор  $A$ .

$$p_A(A) = O$$

**Лемма 5.1.** Минимальный многочлен единственен.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим противное. Пусть  $f$  и  $g$  — минимальные многочлены оператора  $A$ :

$$f(A) = g(A) = O$$

Тогда

$$(f - g)(A) = O$$

То есть многочлен  $f - g$  также аннулирующий, причем его степень меньше степени  $f$  и  $g$ . Получили противоречие минимальности  $f$  и  $g$ .  $\square$

**Следствие 1 (из теоремы 5.1).** Пусть  $A \in L(X)$ ,  $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$ . Тогда

$$A = \lambda_0 I + Q,$$

где  $Q$  — нильпотентный либо нулевой оператор и  $Q^n = O$ ,  $n = \dim X$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Характеристический многочлен для оператора  $A$  имеет вид

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n$$

Тогда по теореме Гамильтона-Кэли получаем

$$O = p_A(A) = (A - \lambda_0 I)^n$$

Таким образом оператор  $A - \lambda_0 I = Q$  — нильпотентный и

$$A = \lambda_0 I + Q$$

$\square$

## §6. Многочлены от операторов и разложение операторов

**Лемма 6.1.** *Любой необратимый оператор  $A \in L(X)$  представим в виде прямой суммы нильпотентного (нулевого) и обратимого операторов относительно некоторого разложения в прямую сумму инвариантных подпространств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место включения:

$$\begin{aligned}\{0\} &\neq \operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 \subset \dots \\ X &\supset \operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im} A^2 \supset \dots\end{aligned}$$

В силу конечномерности пространства<sup>3</sup> существует такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^{k+1}$ .

Покажем, что  $\forall j \geq k+1 \operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^j$ .

Пусть  $k$  — наименьшее натуральное число, для которого выполнено условие  $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^{k+1}$ . Докажем, что  $\operatorname{Ker} A^{k+2} = \operatorname{Ker} A^k$ . Пусть  $x \in \operatorname{Ker} A^{k+2}$ .

$$\begin{aligned}x \in \operatorname{Ker} A^{k+2} &\Rightarrow A^{k+2}x = 0 \Rightarrow A^{k+1}(Ax) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow Ax \in \operatorname{Ker} A^{k+1} = \operatorname{Ker} A^k \Rightarrow A^k(Ax) = 0 \Rightarrow A^{k+1}x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} A^{k+1} = \operatorname{Ker} A^k\end{aligned}$$

В силу теоремы о ранге и дефекте оператора,

$$\dim X = \dim \operatorname{Ker} A^j + \dim \operatorname{Im} A^j$$

И тогда, если  $j \geq k$ , то не только  $\operatorname{Ker} A^j = \operatorname{Ker} A^k$ , но и  $\operatorname{Im} A^j = \operatorname{Im} A^k$ .

Пусть  $X_0 = \operatorname{Ker} A^k$ ,  $X_1 = \operatorname{Im} A^k$ . Нетрудно показать, что это инвариантные относительно  $A$  подпространства.

Докажем, что  $X = X_0 \oplus X_1$ . Из теоремы о ранге и дефекте

$$\dim X_0 + \dim X_1 = \dim X$$

Осталось показать, что  $X_0 \cap X_1 = \{0\}$ .

$$\begin{aligned}y \in X_0 \cap X_1 &\Rightarrow (A^k y = 0) \wedge (\exists x \in X y = A^k x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^k y = A^{2k} x \Rightarrow A^{2k} x = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} A^{2k} = \operatorname{Ker} A^k \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^k x = 0 \Rightarrow y = 0\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Если  $M, N$  — подпространства из  $X$ , то условия  $M \neq N$  и  $M \subset N$  влекут за собой, что  $\dim M < \dim N$



Таким образом  $A = A_0 \oplus A_1$  относительно  $X = X_0 \oplus X_1$ .

$\text{Ker } A_1 = \{0\}$ , т. к. все векторы из ядра  $A$  лежат в  $X_0$ , значит  $A_1$  обратим.

$\forall x \in X_0 \quad A_0^k x = A^k x = 0$  — то есть  $A$  нильпотентный либо нулевой.  $\square$

**Лемма 6.2.** *Многочлен  $g \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$  аннулирует  $A \in L(X)$  тогда и только тогда, когда  $g$  делится на минимальный многочлен  $p_0$  оператора  $A$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

**Необходимость.**

Пусть  $g(A) = O$ ,  $g = fp_0 + r$ ,  $\deg r < \deg p_0$ .

$$O = g(A) = f(A)p_0(A) + r(A) = r(A)$$

То есть  $r(A) = O$ , при этом степень  $r$  меньше степени минимального многочлена. Значит,  $r = 0$ .

**Достаточность.**

Если  $g = fp_0$ , то  $g(A) = f(A)p_0(A) = O$ .  $\square$

**Лемма 6.3.** *Если  $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$  — минимальный многочлен для оператора  $A$ , то  $\sigma(A)$  совпадает с множеством корней многочлена  $p$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Пусть  $\lambda_0 \in \sigma(A)$ ,  $p(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_k z^k$ . Тогда есть такой ненулевой вектор  $x_0$ , что  $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ .

$$p(A)x_0 = p_0 x_0 + p_1 \lambda_0 x_0 + p_2 \lambda_0^2 x_0 + \dots + p_k \lambda_0^k x_0 = p(\lambda_0)x_0$$

Таким образом

$$0 = p(A)x_0 = p(\lambda_0)x_0 \Rightarrow p(\lambda_0) = 0$$

2. Пусть  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  — корень  $p$ :

$$p(\mu_0) = 0$$

Предположим противное:  $\mu_0 \notin \sigma(A)$ . Это значит, что оператор  $A - \mu_0 I$  обратим.

Рассмотрим многочлен  $g(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{\lambda - \mu_0}$ .

$$p(\lambda) = g(\lambda)(\lambda - \mu_0)$$

$$p(A) = g(A)(A - \mu_0 I)$$

$$g(A) = p(A)(A - \mu_0 I)^{-1}$$

$$g(A) = O$$

Таким образом получили, что  $g$  — аннулирующий (ненулевой) многочлен,  $\deg g < \deg p$ , что противоречит минимальности  $p$ .  $\square$

**Следствие 1.**  $\sigma(A)$  содержится в множестве корней любого аннулирующего многочлена оператора  $A$ .

**Теорема 6.1 (о разложении оператора).** Пусть  $A \in L(X)$ ,  $X$  — комплексное линейное пространство,  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ,  $k_i$  — алгебраическая кратность собственного значения  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тогда оператор  $A$  допускает разложение в прямую сумму операторов

$$A = \bigoplus_{k=1}^m A_k \quad (6.1)$$

относительно инвариантных подпространств  $X_1, \dots, X_m$ :

$$X = \bigoplus_{k=1}^m X_k$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1.  $\sigma(A_j) = \{\lambda_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$
2.  $\dim X_j = k_j$ ,  $j = \overline{1, m}$
3.  $A_j = \lambda_j I_j + Q_j$ , где  $Q_j$  — нильпотентный (либо нулевой) оператор с индексом нильпотентности  $k_j^0 \leq k_j$ ,  $k_j^0$  — кратность корня  $\lambda_j$  в минимальном многочлене оператора  $A$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим оператор  $A - \lambda_j I$ ,  $\lambda_j \in \sigma(A)$ . Он необратим, значит к нему применима лемма 6.1, то есть существует такое разложение  $X = X_j \oplus X'_j$  ( $X_j$  и  $X'_j$  инвариантны относительно  $A - \lambda_j I$ ), что сужение этого оператора на  $X_j$  нильпотентно (индекс нильпотентности обозначим  $m_j$ ), а на  $X'_j$  — обратимо.

Несложно показать<sup>4</sup>, что  $X_j$  и  $X'_j$  являются инвариантными подпространствами и для оператора  $A$ . Тогда можно рассмотреть прямую сумму

$$A = A_j \oplus A'_j,$$

где  $A_j = A|_{X_j}$ ,  $A'_j = A|_{X'_j}$ .

Рассмотрим оператор  $A_j$ .  $\lambda_j \in \sigma(A_j)$ , поскольку  $A_j - \lambda_j I_j$  — сужение оператора  $A - \lambda_j I$  на  $X_j$ , которое нильпотентно, а значит необратимо.

---

<sup>4</sup> $x \in X_j \Rightarrow (A - \lambda_j I)x = Ax - \lambda_j x \in X_j \Rightarrow Ax \in X_j$

Покажем, что никаких других точек спектра оператор  $A_j$  не имеет. Пусть  $\lambda_0 \in \sigma(A_j)$ . Тогда существует ненулевой вектор  $x \in X_j$ , что

$$\begin{aligned} A_j x &= \lambda_0 x \\ A_j x - \lambda_j x &= \lambda_0 x - \lambda_j x \\ (A_j - \lambda_j I_j) x &= (\lambda_0 - \lambda_j) x \\ (A_j - \lambda_j I_j)^2 x &= (\lambda_0 - \lambda_j)^2 x \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= (A_j - \lambda_j I_j)^{m_j} x = (\lambda_0 - \lambda_j)^{m_j} x \\ (\lambda_0 - \lambda_j)^{m_j} x &= 0 \\ \lambda_0 &= \lambda_j \end{aligned}$$

где  $m_j$  — индекс нильпотентности  $A_j - \lambda_j I_j$ . Таким образом  $\sigma(A_j) = \{\lambda_j\}$ .

Ясно, что  $\lambda_j \notin \sigma(A'_j)$ , поскольку  $A'_j - \lambda_j I'_j$  — сужение  $A - \lambda_j I$  на  $X'_j$  — обратим.

По пункту (4) теоремы 3.3,  $\sigma(A) = \sigma(A_j) \cup \sigma(A'_j)$ , значит

$$\sigma(A'_j) = \sigma(A) \setminus \{\lambda_j\}$$

Значит, повторяя аналогичный процесс для подпространства  $X'_j$  и оператора  $A'_j$ , за конечное число шагов (а именно за  $m - 1$ ) мы сможем получить разложение (6.1), где каждый из операторов будет иметь одноточечный спектр.

Первое утверждение теоремы доказано.

Теперь докажем второе утверждение теоремы. Так как  $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$ , то  $p_A(\lambda) = p_{A_1}(\lambda) \dots p_{A_m}(\lambda)$ , где  $p_A$  — характеристический многочлен  $A$ ,  $p_{A_j}$  — характеристический многочлен  $A_j$ . Кроме того известно, что  $p_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$ , и  $\sigma(A_j) = \{\lambda_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Значит

$$p_{A_j}(\lambda) = (-1)^{k_j} (\lambda - \lambda_j)^{k_j}, \quad j = \overline{1, m}$$

Отсюда следует, что  $\dim X_j = k_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Второе утверждение теоремы доказано.

Как было показано в начале доказательства,  $A_j - \lambda_j I_j = Q_j$  является нильпотентным оператором. Найдём его индекс нильпотентности.

Рассмотрим минимальный многочлен  $p_0$  оператора  $A$ .

$$\begin{aligned} p_0(A) &= p_0(A_1) \oplus \cdots \oplus p_0(A_m) = O \\ p_0(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_1^0} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m^0} \\ p_0(A_j) &= \prod_{i=1}^m (A_j - \lambda_i I_j)^{k_i^0} \end{aligned}$$

Каждый из операторов  $A_j - \lambda_i I_j$ ,  $i \neq j$  обратим<sup>5</sup>, а значит и не нильпотентен. Так как  $p_0(A_j) = O$  и  $(A_j - \lambda_i I_j)^{k_i^0} \neq O$  при  $i \neq j$ , получаем, что  $(A_j - \lambda_j I_j)^{k_j^0} = Q_j^{k_j^0} = O$ .

В силу минимальности многочлена  $p_0$  получаем, что  $k_j^0$  — индекс нильпотентности  $Q_j$ . Теорема полностью доказана.  $\square$

**Теорема 6.2.** *Чтобы оператор  $A \in L(X)$  был оператором простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы все корни минимального многочлена оператора  $A$  имели кратность 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

**Необходимость**

Пусть  $A$  — оператор простой структуры со спектром  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . По теореме 3.2, оператор имеет вид

$$A = \lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_m I_m$$

Тогда для любого многочлена  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$  справедливо

$$f(A) = f(\lambda_1)I_1 \oplus \cdots \oplus f(\lambda_m)I_m$$

Тогда для того чтобы многочлен  $f$  был аннулирующим, достаточно условия  $\forall k \in \overline{1, n} \ f(\lambda_k) = 0$ , значит, минимальный многочлен будет иметь вид

$$p_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_1)$$

**Достаточность**

Пусть  $p_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m)$  — минимальный. По теореме 6.1 получаем, что оператор  $A$  имеет вид

$$A = \bigoplus_{j=1}^m (\lambda_j I_j + Q_j),$$

---

<sup>5</sup> $\sigma(A_j) = \{\lambda_j\}$

где  $Q_j$  — нильпотентный, причем его индекс нильпотентности равен кратности корня  $\lambda_j$  в минимальном многочлене, то есть единице:

$$Q_j = O$$

Значит, оператор  $A$  имеет вид

$$A = \bigoplus_{j=1}^m \lambda_j I_j,$$

откуда и следует, что  $A$  — оператор простой структуры.  $\square$

## §7. TODO: Жорданов базис для нильпотентных операторов

## §8. TODO: Жорданов базис и жорданова форма линейных операторов

## §9. Сопряжённые операторы

Далее будет рассматриваться конечномерное пространство со скалярным произведением (евклидово пространство)  $H$  над полем действительных либо комплексных чисел.

**Лемма 9.1.** *Любой линейный функционал  $\xi : H \rightarrow \mathbb{K}$  допускает единственное представление вида*

$$\xi(x) = \langle x, a \rangle, \quad a \in H$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выберем некоторый ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $H$ . Пусть  $\xi : H \rightarrow \mathbb{K}$  — линейный функционал. Определим  $a$  следующим образом:

$$a = \sum_{j=1}^n \overline{\xi(e_j)} e_j$$

Рассмотрим скалярное произведение  $\langle e_k, a \rangle$ ,  $k = \overline{1, n}$ :

$$\langle e_k, a \rangle = \langle e_k, \sum_{j=1}^n \overline{\xi(e_j)} e_j \rangle = \langle e_k, \overline{\xi(e_k)} e_k \rangle = \xi(e_k)$$

Тогда

$$\xi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \xi(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \langle e_j, a \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, a \right\rangle = \langle x, a \rangle$$

$\square$

**Определение 9.1.** Оператор  $B \in L(H)$  называется *сопряжённым* к  $A \in L(H)$ , если

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle \quad \forall x, y \in H$$

**Лемма 9.2.** Для любого линейного оператора в евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $y \in H$ .

Рассмотрим функционал  $\xi_y : H \rightarrow \mathbb{K}$  вида

$$\xi_y(x) = \langle Ax, y \rangle$$

По лемме 1 существует  $a \in H$ , что

$$\xi_y(x) = \langle x, a \rangle$$

Положим  $By = a$ . Докажем, что  $B$  — линейный оператор из  $L(H)$ .

Пусть  $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ .

$$\begin{aligned} \xi_{y_1}(x) &= \langle Ax, y_1 \rangle &= \langle x, By_1 \rangle \\ \xi_{y_2}(x) &= \langle Ax, y_2 \rangle &= \langle x, By_2 \rangle \\ \xi_y(x) &= \langle Ax, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \langle x, B(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle \\ \xi_y(x) &= \langle Ax, \alpha y_1 \rangle + \langle Ax, \beta y_2 \rangle = \bar{\alpha} \xi_{y_1}(x) + \bar{\beta} \xi_{y_2}(x) = \\ &= \langle x, \alpha By_1 + \beta By_2 \rangle \\ \langle x, B(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= \langle x, \alpha By_1 + \beta By_2 \rangle \\ B(\alpha y_1 + \beta y_2) &= \alpha By_1 + \beta By_2 \\ \langle Ax, y \rangle &= \langle x, By \rangle \end{aligned} \quad \square$$

Сопряженный оператор обозначается звёздочкой:

$$A^* = B$$

**Лемма 9.3 (свойства сопряженных операторов).** Для любых операторов  $A, B \in L(H)$  и любых чисел  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  справедливы следующие утверждения:

1.  $(\alpha I)^* = \bar{\alpha} I$
2.  $(AB)^* = B^* A^*$
3.  $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$

4. Если  $A$  обратим, то и  $A^*$  обратим, причём

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

5.  $(A^*)^* = A$

6. Если  $M$  — инвариантное подпространство  $A$  и  $A^*$ , то

$$(A|M)^* = A^*|M$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$1. \langle \alpha Ix, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \bar{\alpha}y \rangle = \langle x, \overline{\alpha I}y \rangle \\ = (\alpha I)^*$$

$$2. \langle ABx, y \rangle = \langle A(Bx), y \rangle = \langle Bx, A^*y \rangle = \langle x, B^*A^*y \rangle$$

3. Доказывается аналогично (используются свойства скалярного произведения)

$$4. \quad \begin{aligned} AA^{-1} &= A^{-1}A &&= I \\ (AA^{-1})^* &= (A^{-1}A)^* &&= I^* \\ (A^{-1})^*A^* &= A^*(A^{-1})^* &&= I \\ (A^{-1})^* &= (A^*)^{-1} \end{aligned}$$

5. Доказывается при помощи свойства эрмитовой симметричности скалярного произведения.

6. Очевидно. □

**Лемма 9.4.** Пусть  $A \in L(H)$ . Тогда  $H$  раскладывается в ортогональную прямую сумму подпространств  $H = \text{Im } A \oplus \text{Ker } A^*$  и  $H = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A^*$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно показать, что  $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker } A^*$ . Пусть  $y \in (\text{Im } A)^\perp$ . Тогда  $\langle Ax, y \rangle = 0$ , т. к.  $\forall x \in H \ y \perp Ax \in \text{Im } A$ . Значит  $\langle x, A^*y \rangle = 0$ . Тогда, в силу произвольности  $x$ , подставляя вместо него  $A^*y$  получаем

$$\langle A^*y, A^*y \rangle = 0 \Rightarrow A^*y = 0 \Rightarrow y \in \text{Ker } A^*$$

Теперь обратно: пусть  $y \in \text{Ker } A^*$ . Тогда  $\langle x, A^*y \rangle = 0$ , и  $\langle Ax, y \rangle = 0$ , значит  $y \perp \text{Im } A$  и тогда  $y \in (\text{Im } A)^\perp$ . □

Непосредственно из леммы 9.4 следует

**Теорема 9.1 (Фредгольма).** Уравнение вида

$$Ax = b, \quad b \in H$$

разрешимо тогда и только тогда, когда вектор  $b$  перпендикулярен всем решениям однородного уравнения

$$A^*y = 0$$

**Лемма 9.5.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис,  $A, B \in L(H)$ ,  $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \text{Matr}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{B} = (b_{ij}) \in \text{Matr}_n(\mathbb{K})$  — матрицы этих операторов в том же базисе. Тогда для того чтобы  $B = A^*$  необходимо и достаточно, чтобы  $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$Ae_j = x = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle Ae_j, e_i \rangle$$

Таким образом

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$$

Доказательство в обе стороны проводится аналогично:

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$$

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle = \langle e_j, A^*e_i \rangle = \overline{\langle A^*e_i, e_j \rangle} = \overline{b_{ji}} \quad \square$$

**Определение 9.2.** Оператор  $A \in L(H)$  называется *самосопряжённым*, если  $A^* = A$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

**Пример 9.1.** Пусть  $A \in L(H)$ . Тогда операторы

$$\Re A = \frac{A + A^*}{2}$$

$$\Im A = \frac{A - A^*}{2i}$$

являются самосопряжёнными. При этом  $A = \Re A + i \Im A$ . ◇

**Пример 9.2.** Самосопряжённым является оператор  $AA^*$ :

$$(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^* \quad \diamond$$



**Определение 9.3.** Матрица  $\mathcal{B} = (b_{ij}) \in \text{Matr}_n(\mathbb{K})$  называется сопряженной к  $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \text{Matr}_n(\mathbb{K})$ , если

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Непосредственно из леммы 9.5 следует, что оператор  $A \in L(H)$  является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в некотором ортонормированном базисе является самосопряженной.

**Определение 9.4.** Проектор  $P \in L(H)$  называется *ортго-нальным (ортoprojectором)*, если он осуществляет разложение  $H$  в ортогональную прямую сумму.

$$\begin{aligned} H &= \text{Im } P \oplus \text{Im}(I - P) \\ \text{Im } P &\perp \text{Im}(I - P) = \text{Ker } P \end{aligned}$$

**Лемма 9.6.** Проектор  $P \in L(H)$  является ортoprojectором тогда и только тогда, когда  $P^* = P$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

**Необходимость**

Пусть  $P$  — ортoprojectор, то есть

$$\text{Im } P \perp \text{Im}(I - P)$$

Пусть  $H \ni x = x_1 + x_2$ ,  $H \ni y = y_1 + y_2$ , где  $x_1, y_1 \in \text{Im } P$ ,  $x_2, y_2 \in \text{Im}(I - P)$ .

$$\begin{aligned} \langle Px, y \rangle &= \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y_2 \rangle = \\ &= \langle x_1, Py \rangle = \langle x_1 + x_2, Py \rangle = \langle x, Py \rangle \end{aligned}$$

**Достаточность**

Пусть проектор  $P$  самосопряжен. Тогда по лемме 9.4 получаем, что

$$H = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P = \text{Im } P \oplus \text{Im}(I - P)$$

где предполагается разложение в ортогональную прямую сумму.  $\square$

**Следствие 1.** Дополнительный проектор к ортoprojectору есть ортoprojectор.

$$(I - P)^* = I^* - P^* = I - P$$

**Определение 9.5.**  $B \in L(H)$  называется *антисамосопряженным (кососамосопряженным)*, если  $B^* = -B$ .

**Лемма 9.7.** Если  $B \in L(H)$  — антисамосопряженный оператор, то существует самосопряженный оператор  $A$  такой, что  $B = iA$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $B^* = -B$ ,  $A = -iB$ .

$$A^* = iB^* = -iB = A$$

то есть  $A$  — самосопряженный оператор и  $B = iA$ .  $\square$

**Определение 9.6.** Оператор  $U \in L(H)$  называется *унитарным*, если имеют место равенства:

$$U^*U = UU^* = I,$$

т. е.  $U$  — обратим и  $U^* = U^{-1}$ .

Пусть  $U$  — унитарный оператор.

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

То есть всякий унитарный оператор сохраняет длины векторов (является изометрией).

**Определение 9.7.** Оператор  $A \in L(H)$  называется *нормальным*, если

$$AA^* = A^*A$$

Непосредственно из определений следует, что самосопряженные, кососамосопряженные и унитарные операторы являются нормальными.

**Лемма 9.8.** Пусть  $A, B \in L(X)$  — операторы в произвольном линейном пространстве — перестановочны:

$$AB = BA$$

Тогда  $\text{Ker } B$  и  $\text{Im } B$  являются инвариантными подпространствами для  $A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $x \in \text{Ker } B$ , тогда  $Bx = 0$

$$B(Ax) = A(Bx) = A0 = 0 \Rightarrow Ax \in \text{Ker } B$$

Аналогично доказывается для образа.  $\square$

**Лемма 9.9.**

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$$(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda}I$$

Оператор  $A - \lambda I$  обратим тогда и только тогда, когда обратим  $A^* - \bar{\lambda}I$ , откуда и следует утверждение теоремы.  $\square$

**Теорема 9.2.** Пусть  $A \in L(H)$  — нормальный оператор, его спектр  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Тогда

1.  $E(\overline{\lambda_i}, A^*) = E(\lambda_i, A)$ ,  $i = \overline{1, m}$
2. Пространство  $H$  раскладывается в ортогональную прямую сумму
 
$$H = E(\lambda_1, A) \oplus \dots \oplus E(\lambda_m, A)$$
3.  $A$  и  $A^*$  — операторы простой структуры

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим собственное подпространство  $E(\lambda_k, A) = M$ . Поскольку  $A$  и  $A^*$  перестановочны, то по лемме 9.8 для оператора  $A^*$  подпространство  $M$  также будет инвариантным.

Покажем, что  $E(\lambda_k, A) \subset E(\overline{\lambda_k}, A^*)$ . Пусть  $x \in E(\lambda_k, A)$ . Рассмотрим сужение  $(A - \lambda_k I)_M = O_M$ .  $M$  инвариантно для  $A - \lambda_k I$  и для  $A^* - \overline{\lambda_k} I$  и по пункту (6) леммы 9.3 получаем, что

$$O_M = (A - \lambda_k I)_M = ((A - \lambda_k I)^*)_M = (A^* - \overline{\lambda_k} I)_M$$

Таким образом

$$(A^* - \overline{\lambda_k} I)_M = O_M$$

Значит  $A^*x = \overline{\lambda_k}x$ , а следовательно  $x \in E(\overline{\lambda_k}, A^*)$ .

Обратное включение доказывается аналогично.

Итак,  $E(\lambda_1, A) = E(\lambda_1, A^*)$ .

$$H = E(\lambda_1, A) \oplus H_1, \quad H_1 = (E(\lambda_1, A))^\perp$$

Докажем, что  $H_1$  инвариантно для  $A$  (аналогично показывается для  $A^*$ ).

Пусть  $x \in H_1$ ,  $e \in E(\lambda_1, A)$ .

$$\begin{aligned} \langle Ax, e \rangle &= \langle x, A^*e \rangle = \langle x, \overline{\lambda_1}e \rangle = \lambda_1 \langle x, e \rangle = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow Ax \perp E(\lambda_1, A) \Rightarrow Ax \in H_1 \end{aligned}$$

Таким образом операторы  $A$  и  $A^*$  раскладываются в прямую сумму операторов:

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 I_1 \oplus A_2 \\ A^* &= \overline{\lambda_1} I_1 \oplus A_2^* \end{aligned}$$

Из пункта (4) теоремы 3.3 получаем, что

$$\sigma(A) = \{\lambda_2, \dots, \lambda_m\}$$

Продолжая аналогичный процесс для операторов  $A_2$  и  $A_2^*$  до тех пор, пока не останется одна точка спектра, получаем разложение:

$$A = \lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_{m-1} I_{m-1} \oplus A_m$$

$$A^* = \overline{\lambda_1} I_1 \oplus \cdots \oplus \overline{\lambda_{m-1}} I_{m-1} \oplus A_m^*$$

относительно подпространств

$$H = E(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_{m-1}, A) \oplus H_m$$

$$H = E(\overline{\lambda_1}, A) \oplus \cdots \oplus E(\overline{\lambda_{m-1}}, A) \oplus H_m$$

где  $A_m$  и  $A_m^*$  — сопряженные операторы с одной точкой спектра.  $A_m$  можно представить в виде

$$A_m = \lambda_m I_m + Q,$$

где  $Q$  — нильпотентный либо нулевой.

Понятно, что если  $x \in E(\lambda_m, A)$ , то  $Qx = 0$ . Рассмотрим прямую сумму

$$H_m = E(\lambda_m, A) \oplus (E(\lambda_m, A))^\perp$$

Как уже было показано,  $(E(\lambda_m, A))^\perp$  — инвариантное подпространство. Пусть  $x \in (E(\lambda_m, A))^\perp$ . Тогда и  $Ax \in (E(\lambda_m, A))^\perp$ .

$$(E(\lambda_m, A))^\perp \ni Ax = \lambda_m x + Qx,$$

$$\lambda_m x \in E(\lambda_m, A), \quad Qx \in (E(\lambda_m, A))^\perp$$

По определению прямой суммы  $Ax$  единственным образом представимо в виде суммы

$$Ax = 0 + Qx$$

Таким образом  $\lambda_m x = 0$ , откуда следует, что  $x = 0$ , то есть  $H_m = E(\lambda_m, A)$ ,  $A_m = \lambda_m I_m$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Следствие 1.** *Каждый нормальный оператор допускает разложение*

$$A = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k,$$

где  $P_k^* = P_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ . При этом

$$A^* = \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} P_k$$

$\langle ++ \rangle$