Содержание

1 Собственные значения и собственные векторы 2

2 Проекторы и прямые суммы подпространств 6

3 Инвариантные подпространства. Разложение операторов 8

4 Многочлены от операторов и матриц 12

5 Теорема Гамильтона-Кэли 15

6 Многочлены от операторов и разложение операторов 16

7 TODO: Жорданов базис для нильпотентных операторов 21

8 TODO: Жорданов базис и жорданова форма линейных операторов 21

9 Сопряжённые операторы 21

10 Самосопряженные операторы в вещественных пространствах 31

11 Спектральный радиус и норма операторов 32

12 Билинейные и квадратичные формы 35

§1. Собственные значения и собственные векторы

Далее X — конечномерное линейное пространство размерности n, $L(X)$ — алгебра операторов, I — тождественный оператор, O — нулевой оператор.

Определение 1.1. Оператор A называется *скалярным*, если он имеет вид $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Определение 1.2. Скажем, что оператор $A \in L(X)$ имеет *простую структуру* (оператор простой структуры, ОПС, *диагонализируемый* оператор), если существует базис $e_1, \ldots, e_n$ в X и такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, что имеют место равенства:

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad k = \overline{1, n}$$

Иначе говоря, для того чтобы A был оператором простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис, в котором матрица оператора имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Очевидно, что оператор простой структуры обратим тогда и только тогда, когда $\forall k = \overline{1, n} \quad \lambda_k \neq 0$, причем обратный оператор будет иметь вид

$$A^{-1} e_k = \frac{1}{\lambda_k} e_k, \quad k = \overline{1, n}$$

Всякий оператор скалярного типа является оператором простой структуры.

Существуют операторы, не являющиеся ОПС.

Определение 1.3. Ненулевой оператор $Q \in L(X)$ называется *нильпотентным*, если $\exists m \in \mathbb{N} \quad Q^m = O$. Наименьшее из m, для которых выполняется данное равенство, называется *индексом нильпотентности* оператора Q.

Пример 1.1.

$$D : \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$$
$$D\varphi = \varphi'$$
$$D^{n+1} = O$$

$n + 1$ — индекс нильпотентности ♢

Теорема 1.1. *Если оператор нильпотентный, то он не диагонализируем*

Доказательство. Пусть $Q \in L(X)$, $Q \neq 0$, $Q^m = O$.

Предположим противное: допустим, что Q — оператор простой структуры. Тогда существует базис $e_1, \dots, e_n$ в X и такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, что

$$Qe_k = \lambda_k e_k, \quad k = \overline{1, n}$$

λ_k не равны одновременно нулю (в противном случае Q был бы нулевым).

$$\forall k = \overline{1, n} \quad 0 = Q^m e_k = \lambda_k^m e_k \Rightarrow \exists k = \overline{1, n} \quad e_k = 0$$

Получили противоречие (в базисе не может быть нулевых векторов). □

Определение 1.4. $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ называется *собственным значением* оператора $A \in L(X)$, если существует **ненулевой** вектор $x_0 \in X$ такой, что

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0$$

При этом x_0 называется *собственным вектором* оператора A, соответствующим λ_0.

Непосредственно из определения 1.4 следует, что λ_k из определения 1.2 являются собственными значениями оператора A, а e_k — собственными векторами.

Определение 1.5. Совокупность всех собственных значений оператора A называется *спектром* оператора:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists x_0 \in X \quad x_0 \neq 0 \wedge Ax_0 = \lambda x_0\}$$

Рассмотрим равенство

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0$$
$$(A - \lambda_0 I)x_0 = 0$$

Если $\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) \neq \{0\}$, то λ_0 — собственное значение A. Значит, можно сказать, что

Спектр оператора — множество тех $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, для которых оператор $A - \lambda_0 I$ необратим.

Оператор $A - \lambda_0 I$ необратим тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda_0 I) = 0 \tag{1.1}$$

Пусть $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \operatorname{Matr}_n(\mathbb{K})$ — матрица оператора A. Исходя из условия (1.1), λ является собственным значением оператора A

тогда и только тогда, когда матрица $\mathcal{A} - \lambda E$ необратима, т. е. её определитель равен нулю:

$$\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$$

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

$$p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + \det\mathcal{A} \tag{1.3}$$

Определение 1.6. Выражение вида (1.2) называется *характеристическим многочленом* оператора A (матрицы $\mathcal{A}$).

Из вышеприведённых рассуждений следует

Теорема 1.2. *Спектр оператора состоит из корней характеристического многочлена:*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : p_A(\lambda) = 0\}$$

Следовательно, спектр линейного оператора в конечномерном линейном пространстве всегда содержит не более n собственных значений.

Пример 1.2. Рассмотрим $\mathbb{R}^2$ и оператор $A \in L(\mathbb{R}^2)$ с матрицей $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Вещественных корней нет, значит

$$\sigma(A) = \varnothing \qquad \diamondsuit$$

Теорема 1.3. *Пусть X — комплексное ЛП,* $\dim X \geqslant 1$. *Тогда каждый $A \in L(X)$ имеет непустой спектр, состоящий из конечного числа собственных значений, число которых не превышает n, и все они совпадают с корнями $p_A(\lambda)$.*

Доказательство теоремы следует из приведённых выше рассуждений и основной теоремы высшей алгебры.

Определение 1.7. *След* квадратной матрицы есть сумма элементов матрицы, стоящих на главной диагонали.

$$\operatorname{tr}\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Аналогично определяется след оператора (можно показать, что подобные матрицы имеют одинаковый след).

Из формул Виета и выражения (1.3) получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \operatorname{tr} A$$
$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det \mathcal{A} = \det A$$

Определение 1.8. Ядро оператора $A - \lambda_0 I$ называется *собственным подпространством* оператора A для собственного значения λ_0.

$$E(\lambda_0, A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)$$

Определение 1.9. Кратность корня λ_0 характеристического многочлена оператора A называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_0.

Определение 1.10. Собственное значение линейного оператора называется *простым*, если его алгебраическая кратность равна единице.

Определение 1.11. $\dim E(\lambda_0, A)$ называется *геометрической кратностью* собственного значения λ_0.

Теорема 1.4. *Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ — различные собственные значения оператора $A \in L(X)$. Тогда соответствующие им собственные векторы $e_1, \dots, e_m$ линейно независимы.*

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по m.

База индукции: при $m = 1$ утверждение теоремы очевидно.

Индукционный переход: пусть утверждение верно для k векторов. $e_1, \dots, e_k$ — линейно независимы. Добавим к ним вектор e_{k+1}.

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e_j = 0 \Rightarrow (A - \lambda_{k+1} I)\left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e_j\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_{k+1}) \alpha_j e_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0, \quad j = \overline{1,k}$$

$$\alpha_{k+1} e_{k+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0, \text{т.к. } e_{k+1} \neq 0$$ □

Из определения 1.2 и теоремы 1.4 следует

Теорема 1.5. *Если характеристический многочлен оператора* *имеет n различных корней и размерность пространства равна n, то этот оператор диагонализируем.*

§2. Проекторы и прямые суммы подпространств

Далее

$$\dim X = n$$

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m$$

Определение 2.1. Оператор $P \in L(X)$ называется *проектором*, если

$$P^2 = P$$

Матрица $\mathcal{P} \in \mathrm{Matr}_n(\mathbb{K})$ называется *идемпотентной*, если

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

Определение 2.2. Пусть $P_k, \quad k = \overline{1, m}$ — проекторы. Будем говорить, что они образуют *разложение единицы*, если

1. $I = \sum\limits_{k=1}^{m} P_k$

2. $P_i P_j = O \quad \forall i \neq j$

Пусть далее $m = 2$ (аналогично можно рассмотреть случай произвольного m).

$$X = X_1 \oplus X_2$$

$$x = x_1 + x_2$$

Построим операторы P_1 и P_2 следующим образом:

$$P_1 x = x_1$$

$$P_2 x = x_2$$

Линейность очевидна. Ясно, что построенные операторы являются проекторами.

Лемма 2.1. *Построенные указанным выше образом проекторы образуют разложение единицы:*

1. $P_1 + P_2 = I$

2. $P_1 P_2 = P_2 P_1 = O$

Доказательство.

1. $(P_1 + P_2)x = P_1 x + P_2 x = x_1 + x_2 = x = Ix$

2. $(P_1P_2)x = P_1(P_2x) = P_1x_2 = P_1(0 + x_2) = 0$ $\square$

Лемма 2.2. *Пусть задано разложение единицы*

$$\begin{cases} I = P_1 + P_2 \\ P_1P_2 = O \end{cases}$$

Тогда

$$X = X_1 \oplus X_2,$$

где

$$X_1 = \operatorname{Im} P_1$$
$$X_2 = \operatorname{Im} P_2$$

Доказательство. Пусть $x \in X$. Ясно, что его можно представить как сумму $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$:

$$P_1x = x_1 \in \operatorname{Im} P_1 = X_1$$
$$P_2x = x_2 \in \operatorname{Im} P_2 = X_2$$
$$Ix = P_1x + P_2x = x_1 + x_2$$

Покажем, что такое представление единственно. Пусть

$$x = x_1' + x_2', \quad x_i' \in X_i, \quad i = 1, 2 \tag{2.1}$$

Можно показать, что $P_1x_1' = x_1'$ [1] и $P_1x_2' = 0$ [2]
Применим к обеим частям равенства (2.1) оператор P_1:

$$P_1x = P_1x_1' + P_1x_2' = x_1$$

Применим к обеим частям того же равенства (2.1) оператор P_2:

$$P_2x = P_2x_1' + P_2x_2' = x_2$$

Таким образом, объединяя полученные равенства, получаем:

$$P_1x = x_1 = x_1'$$
$$P_2x = x_2 = x_2'$$

$\square$

1

$$x_1' \in \operatorname{Im} P_1 \Rightarrow \exists x_0 \in X \quad P_1x_0 = x_1' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_1^2x_0 = P_1x_1' \Rightarrow P_1x_0 = P_1x_1' \Rightarrow x_1' = P_1x_1'$$

2

$$P_1x_2' = P_1(P_2x_0) = 0$$

Пусть $P \in L(X)$ — проектор. Рассмотрим оператор вида $I - P$. Покажем, что он является проектором:

$$(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P$$

Покажем, что проекторы $I - P$ и P образуют разложение единицы:

$$(I - P)P = P - P^2 = O$$
$$(I - P) + P = I$$

Проектор $I - P$ называется *дополнительным проектором к* P. Из леммы 2.2 следует, что

$$X = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(I - P)$$

§3. Инвариантные подпространства. Разложение операторов

Далее $A \in L(X)$.

Определение 3.1. Подпространство $M \subset X$ называется *инвариантным* для A, если

$$A(M) \subset M$$

Иначе:

$$\forall x \in M \quad Ax \in M$$

Далее сужение оператора A на инвариантное подпространство M будем обозначать A_M или $A|M$.

Теорема 3.1. *Пусть X — комплексное пространство размерности больше единицы. Тогда для любого оператора $A \in L(X)$ имеется инвариантное подпространство ненулевой размерности.*

Доказательство. Пусть $A \in L(X)$. Так как пространство комплексное, спектр оператора A непуст, т.е. имеется хотя бы одно собственное значение λ_1:

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1$$

Рассмотрим множество

$$M = \{\alpha e_1 : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Это инвариантное подпространство, т. к.

$$A(\alpha e_1) = \alpha \lambda_1 e_1 \in M$$

□

Замечание 3.1. В вещественном пространстве может и не быть инвариантных подпространств.

Пример 3.1.

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$Ae_1 = e_2 \qquad \diamondsuit$$
$$Ae_2 = -e_1$$

TODO: свойства матриц

Определение 3.2. Пусть $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$ — прямая сумма инвариантных относительно A подпространств $X_k,\ k = \overline{1, m}$. В этом случае говорят, что A приводится (разлагается) семейством подпространств X_k в прямую сумму операторов:

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m,$$

где $A_k = A|X_k$.

Такое обозначение обусловлено тем, что любой вектор Ax можно единственным образом представить в виде суммы:

$$Ax = A(x_1 + \cdots + x_m) = Ax_1 + \cdots + Ax_m = A_1x_1 + \cdots + A_mx_m$$

Теорема 3.2. *Пусть $A \in L(X)$ — оператор простой структуры, $\sigma(A) = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$, $m \le n$. Тогда $X = \bigoplus\limits_{k=1}^{m} X_k$, где $X_k = E(\lambda_k, A) =$ $\mathrm{Ker}(A - \lambda_k I)$ и оператор A допускает разложение*

$$A = \lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_m I_m$$

Доказательство. Нетрудно показать, что любое собственное подпространство оператора является инвариантным относительно этого оператора.

Покажем, что $X = \bigoplus\limits_{k=1}^{m} X_k$.

По определению оператора простой структуры существует базис $e_1, \ldots, e_n$ в X такой, что $Ae_k = \lambda_i e_k$. Каждый из этих векторов принадлежит одному из подпространств X_i. Таким образом каждый вектор $x \in X$ можно представить в виде суммы некоторых векторов из $X_k,\ k = \overline{1, m}$, причем такое представление единственно в силу свойств базиса.

Ясно также, что сужение оператора A на инвариантное подпространство $E(\lambda_k, A)$ будет иметь вид:

$$A_k = A|E(\lambda_k, A) = \lambda_k I_k$$

где $I_k \in L(X_k)$ — тождественный оператор. □

Теорема 3.3. *Пусть* $A \in L(X)$ *допускает разложение* $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$ *относительно прямой суммы инвариантных подпространств* $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_m$. *Тогда*

1. $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A_1 \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} A_m$

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A_1 \oplus \dots \oplus \operatorname{Im} A_m$

2. $$\operatorname{Ker}(A-\lambda I) = \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}(A_k - \lambda I_k) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Im}(A-\lambda I) = \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{Im}(A_k - \lambda I_k) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

3. A *обратим тогда и только тогда, когда обратима каждая его часть* A_k.

4. $\sigma(A) = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \sigma(A_k)$

Доказательство.

1. Пусть $x \in \operatorname{Ker} A$, $x = x_1 + \dots + x_m$. Тогда

$$0 = Ax = A_1x_1 + \dots + A_mx_m, \quad A_kx_k \in X_k,\ k = \overline{1,m}$$

Из свойств прямой суммы (единственности представления нуля) получаем, что $A_kx_k = 0,\ k = \overline{1,m}$, т.е. $x_k \in \operatorname{Ker} A_k$. Отсюда и получаем первое равенство.

Пусть $y \in \operatorname{Im} A$. Тогда существует $x \in X$, $x = x_1 + \dots + x_m$ такой, что $y = Ax$.

$$\operatorname{Im} A \ni y = Ax = A_1x_1 + \dots + A_mx_m, \quad A_kx_k \in \operatorname{Im} A_k,\ k = \overline{1,m}$$

2. Рассмотрим скалярный оператор λI:

$$\lambda I = \lambda I_1 \oplus \dots \oplus \lambda I_m$$

относительно $X_1, \dots, X_m$. Следовательно

$$A - \lambda I = (A_1 - \lambda I_1) \oplus \dots \oplus (A_m - \lambda I_m)$$

Далее, применяя (1) для оператора $A - \lambda I$ получаем равенства (2).

3. Оператор A обратим тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Отсюда и из свойства (1), очевидно, следует утверждение (3) теоремы.

   Пусть A обратим. Рассмотрим оператор B такой, что

$$B = A_1^{-1} \quad \oplus \ldots \oplus A_m^{-1}$$
$$Bx = A_1^{-1} x_1 + \ldots + A_m^{-1} x_m$$

   Покажем, что оператор B — обратный к оператору A:

$$A(Bx) = A(A_1^{-1}x_1 + \cdots + A_m^{-1}x_m) = x_1 + \cdots + x_m = x$$

   т.к. $A_k^{-1} x_k \in X_k$

   Таким образом

$$A^{-1} = A_1^{-1} \oplus \cdots \oplus A_m^{-1}$$

4. Рассмотрим прямую сумму операторов

$$A - \lambda I = (A_1 - \lambda I_1) \oplus \cdots \oplus (A_m - \lambda I_m)$$

   $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow A - \lambda I$ необратим $\Leftrightarrow$ необратим хотя бы один из $A_k - \lambda I_k$, т. е.

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \cdots \cup \sigma(A_m) \qquad \square$$

Теорема 3.4. *Пусть $A \in L(X)$, $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$, проекторы $P_1, \ldots, P_m$ образуют разложение единицы, причем $\operatorname{Im} P_k = X_k$. Тогда для того чтобы каждое из подпространств X_k было инвариантным относительно A, необходимо и достаточно, чтобы каждый из операторов P_k был перестановочен с A:*

$$AP_k = P_k A, \quad k = \overline{1, m}$$

Доказательство.
Необходимость: Пусть $A(X_k) \subset X_k, \quad k = \overline{1, m}$.

$$\begin{aligned} AP_k x = IAP_k x = (P_1 + \cdots + P_k + \cdots + P_m)AP_k x = \\ = P_k AP_k x = P_k AP_k(x_1 + \cdots + x_k + \cdots + x_m) = P_k AP_k x_k = \\ = P_k A x_k = \underbrace{P_k A x_1}_{=0} + \cdots + P_k A x_k + \cdots + \underbrace{P_k A x_m}_{=0} = P_k A x \end{aligned}$$

Необходимость доказана.

Достаточность: Пусть $x \in X_k$.

$$Ax = AP_kx = P_kAx \in \operatorname{Im} P_k = X_k \qquad \square$$

Теорема 3.5. *Пусть $A \in L(X)$ — оператор простой структуры, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Тогда*

$$A = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k, \tag{3.1}$$

где P_k — проекторы, образующие разложение единицы, $\operatorname{Im} P_k = E(\lambda_k, A)$.

Доказательство. Пусть $x \in X$. По теореме 3.2

$$X = X_1 \oplus \dots \oplus X_m, \quad X_k = E(\lambda_k, A),\ k = \overline{1, m}$$

Тогда

$$x = x_1 + \dots + x_m = P_1x + \dots + P_mx, \quad P_kx \in X_k$$

Применим к правой и левой частям равенства оператор A:

$$Ax = AP_1x + \dots + AP_mx = \\ = \lambda_1P_1x + \dots + \lambda_mP_mx = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k\right)x \qquad \square$$

Определение 3.3. Представление (3.1) называется *спектральным разложением* оператора простой структуры.

Следствие 1. *Если $\mathcal{A} \in \operatorname{Matr}_n(\mathbb{K})$ диагонализируема, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, то*

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathcal{P}_k,$$

где $\mathcal{P}_k^2 = \mathcal{P}_k$, $E = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathcal{P}_k$, $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = 0 \quad \forall i \neq j$

§4. Многочлены от операторов и матриц

Далее будем рассматривать алгебры линейных операторов, матриц и многочленов.

Пусть $A \in L(X)$, $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$.

$$p(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m$$

Поставим p в соответствие такой оператор $p(A)$, что

$$p(A) = p_0 I + p_1 A + \dots + p_m A^m$$

Определение 4.1. Оператор $p(A)$ называется *многочленом от оператора* A.

Рассмотрим отображение $\Phi_A : \mathcal{P}(\mathbb{K}) \to L(X)$ такое что

$$\Phi_A(p) = p(A) \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. *Отображение* (4.1) *— гомоморфизм алгебр:*

1. $\Phi_A(\mathbb{1}) = I$, *где* $\mathbb{1}(z) \equiv 1$

2. $\Phi_A(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi_A(f) + \beta\Phi_A(g)$

3. $\Phi_A(fg) = \Phi_A(f)\Phi_A(g)$

Доказательство.
Утверждения (1) и (2) очевидны. Докажем утверждение (3).

3.
$$\begin{aligned}
f(z) &= f_0 + f_1 z + \dots + f_m z^m \\
g(z) &= g_0 + g_1 z + \dots + g_k z^k \\
(fg)(z) &= \sum_{i=0}^{m+k} c_i z^i, \qquad c_i = \sum_{j+p=i} f_j g_p \\
\Phi_A(fg) &= \sum_{i=0}^{m+k} c_i A^i
\end{aligned}$$

$$\Phi_A(f)\Phi_A(g) = f(A)g(A) = (f_0 I + f_1 A + \dots + f_m A^m)\times$$
$$\times\, (g_0 I + g_1 A + \dots + g_k A^k) = \sum_{i=0}^{m+k} c_i A^i, \quad c_i = \sum_{j+p=i} f_j g_p$$
$$\Phi_A(fg) = \Phi_A(f)\Phi_A(g) \qquad \square$$

Следствие 1. $f(A)g(A) = g(A)f(A)$
Доказательство.

$$\Phi_A(f)\Phi_A(g) = \Phi_A(fg) = \Phi_A(gf) = \Phi_A(g)\Phi_A(f) \qquad \square$$

Аналогично можно рассмотреть многочлены от матриц (и вообще элементов любой унитарной алгебры).

Несложно заметить, что многочлен $p(\mathcal{A})$ от матрицы $\mathcal{A}$ оператора A есть матрица многочлена $p(A)$ от оператора A.

Рассмотрим оператор $A \in L(X)$ такой, что

$$I = I_1 \oplus \cdots \oplus I_m$$
$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$$

относительно

$$X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$$

Очевидно, что если X_k инвариантно относительно A, то оно инвариантно также относительно A^j, $j \geqslant 0$. Также ясно, что если A_k — сужение оператора A на инвариантное подпространство X_k, то A_k^j — сужение оператора A^j на то же подпространство. Отсюда получаем, что

$$A^j = A_1^j \oplus \cdots \oplus A_m^j$$

Пусть далее A — оператор простой структуры, $f \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$.

$$A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j$$

$$A^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k P_j$$

$$f(A) = \sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j) P_j$$

Последние два равенства доказываются простой проверкой.

Наша цель — получить из последнего равенства проекторы P_j. Этого можно добиться, если найти такие многочлены f_j, что

$$\begin{cases} f_j(\lambda_j) = 1 \\ f_j(\lambda_k) = 0, \quad k \neq j \end{cases}$$

Тогда $f_j(A) = P_j$.

Используем интерполяционную формулу Лагранжа:

$$f_j(\lambda) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

$$A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(A) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{A - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \tag{4.2}$$

Формула (4.2) называется *интерполяционной формулой Сильвестра.*

§5. Теорема Гамильтона-Кэли

Определение 5.1. Ненулевой многочлен $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ называется *аннулирующим* оператор $A \in L(X)$ (матрицу $\mathcal{A} \in \mathrm{Matr}_n(\mathbb{K})$), если $p(A) = O$ $(p(\mathcal{A}) = 0)$.

Определение 5.2. Многочлен p наименьшей положительной степени со старшим коэффициентом 1 и аннулирующий оператор A называется *минимальным (аннулирующим) многочленом* оператора A.

Рассмотрим без доказательства следующую важную теорему.

Теорема 5.1 (Гамильтона-Кэли). *Пусть X — линейное пространство над полем комплексных чисел. Тогда характеристический многочлен оператора $A \in L(X)$ аннулирует оператор A.*

$$p_A(A) = O$$

Лемма 5.1. *Минимальный многочлен единственен.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть f и g — минимальные многочлены оператора A:

$$f(A) = g(A) = O$$

Тогда

$$(f - g)(A) = O$$

То есть многочлен $f - g$ также аннулирующий, причем его степень меньше степени f и g. Получили противоречие минимальности f и g. □

Следствие 1 (из теоремы 5.1). *Пусть $A \in L(X)$, $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$. Тогда*

$$A = \lambda_0 I + Q,$$

где Q — нильпотентный либо нулевой оператор и $Q^n = O$, $n =$ $\dim X$

Доказательство. Характеристический многочлен для оператора A имеет вид

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n$$

Тогда по теореме Гамильтона-Кэли получаем

$$O = p_A(A) = (A - \lambda_0 I)^n$$

Таким образом оператор $A - \lambda_0 I = Q$ — нильпотентный и

$$A = \lambda_0 I + Q \qquad \square$$

§6. Многочлены от операторов и разложение операторов

Лемма 6.1. *Любой необратимый оператор $A \in L(X)$ представим в виде прямой суммы нильпотентного (нулевого) и обратимого операторов относительно некоторого разложения в прямую сумму инвариантных подпространств.*

Доказательство. Имеют место включения:

$$\begin{aligned} \{0\} \neq \operatorname{Ker} A &\subset \operatorname{Ker} A^2 \subset \dots \\ X \supset \operatorname{Im} A &\supset \operatorname{Im} A^2 \supset \dots \end{aligned}$$

В силу конечномерности пространства[3] существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^{k+1}$.

Покажем, что $\forall j \geqslant k+1 \ \operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^j$.

Пусть k — наименьшее натуральное число, для которого выполнено условие $\operatorname{Ker} A^k = \operatorname{Ker} A^{k+1}$. Докажем, что $\operatorname{Ker} A^{k+2} = \operatorname{Ker} A^k$. Пусть $x \in \operatorname{Ker} A^{k+2}$.

$$\begin{aligned} &x \in \operatorname{Ker} A^{k+2} \Rightarrow A^{k+2}x = 0 \Rightarrow A^{k+1}(Ax) = 0 \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow Ax \in \operatorname{Ker} A^{k+1} = \operatorname{Ker} A^k \Rightarrow A^k(Ax) = 0 \Rightarrow A^{k+1}x = 0 \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} A^{k+1} = \operatorname{Ker} A^k \end{aligned}$$

В силу теоремы о ранге и дефекте оператора,

$$\dim X = \dim \operatorname{Ker} A^j + \dim \operatorname{Im} A^j$$

И тогда, если $j \geqslant k$, то не только $\operatorname{Ker} A^j = \operatorname{Ker} A^k$, но и $\operatorname{Im} A^j = \operatorname{Im} A^k$.

Пусть $X_0 = \operatorname{Ker} A^k$, $X_1 = \operatorname{Im} A^k$. Нетрудно показать, что это инвариантные относительно A подпространства.

[3]Если M, N — подпространства из X, то условия $M \neq N$ и $M \subset N$ влекут за собой, что $\dim M < \dim N$

Докажем, что $X = X_0 \oplus X_1$. Из теоремы о ранге и дефекте

$$\dim X_0 + \dim X_1 = \dim X$$

Осталось показать, что $X_0 \cap X_1 = \{0\}$.

$$y \in X_0 \cap X_1 \Rightarrow (A^k y = 0) \wedge (\exists x \in X \ y = A^k x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^k y = A^{2k} x \Rightarrow A^{2k} x = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} A^{2k} = \operatorname{Ker} A^k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^k x = 0 \Rightarrow y = 0$$

Таким образом $A = A_0 \oplus A_1$ относительно $X = X_0 \oplus X_1$.

$\operatorname{Ker} A_1 = \{0\}$, т. к. все векторы из ядра A лежат в X_0, значит A_1 обратим.

$\forall x \in X_0 \ A_0^k x = A^k x = 0$ — то есть A нильпотентный либо нулевой. □

Лемма 6.2. *Многочлен $g \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ аннулирует $A \in L(X)$ тогда и только тогда, когда g делится на минимальный многочлен p_0 оператора A.*

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $g(A) = O$, $g = fp_0 + r$, $\operatorname{degr} r < \operatorname{degr} p_0$.

$$O = g(A) = f(A)p_0(A) + r(A) = r(A)$$

То есть $r(A) = O$, при этом степень r меньше степени минимального многочлена. Значит, $r = 0$.

Достаточность.

Если $g = fp_0$, то $g(A) = f(A)p_0(A) = O$. □

Лемма 6.3. *Если $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ — минимальный многочлен для оператора A, то $\sigma(A)$ совпадает с множеством корней многочлена p.*

Доказательство.

1. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(A)$, $p(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_k z^k$. Тогда есть такой ненулевой вектор x_0, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

$$p(A)x_0 = p_0 x_0 + p_1 \lambda_0 x_0 + p_2 \lambda_0^2 x_0 + \dots + p_k \lambda_0^k x_0 = p(\lambda_0) x_0$$

Таким образом

$$0 = p(A)x_0 = p(\lambda_0)x_0 \Rightarrow p(\lambda_0) = 0$$

2. Пусть $\mu_0 \in \mathbb{C}$ — корень p:

$$p(\mu_0) = 0$$

Предположим противное: $\mu_0 \notin \sigma(A)$. Это значит, что оператор $A - \mu_0 I$ обратим.

Рассмотрим многочлен $g(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{\lambda - \mu_0}$.

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= g(\lambda)(\lambda - \mu_0)\\
p(A) &= g(A)(A - \mu_0 I)\\
g(A) &= p(A)(A - \mu_0 I)^{-1}\\
g(A) &= O
\end{aligned}$$

Таким образом получили, что g — аннулирующий (ненулевой) многочлен, $\operatorname{degr} g < \operatorname{degr} p$, что противоречит минимальности p. □

Следствие 1. *$\sigma(A)$ содержится в множестве корней любого аннулирующего многочлена оператора A.*

Теорема 6.1 (о разложении оператора). *Пусть $A \in L(X)$, X — комплексное линейное пространство, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, k_i — алгебраическая кратность собственного значения λ_i, $i = \overline{1, m}$. Тогда оператор A допускает разложение в прямую сумму операторов*

$$A = \bigoplus_{k=1}^{m} A_k \tag{6.1}$$

относительно инвариантных подпространств $X_1, \ldots, X_m$:

$$X = \bigoplus_{k=1}^{m} X_k$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1. $\sigma(A_j) = \{\lambda_j\}, \quad j = \overline{1, m}$
2. $\dim X_j = k_j, \quad j = \overline{1, m}$
3. *$A_j = \lambda_j I_j + Q_j$, где Q_j — нильпотентный (либо нулевой) оператор с индексом нильпотентности $k_j^0 \leqslant k_j$, k_j^0 — кратность корня λ_j в минимальном многочлене оператора A.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $A - \lambda_j I$, $\lambda_j \in \sigma(A)$. Он необратим, значит к нему применима лемма 6.1, то есть существует такое разложение $X = X_j \oplus X'_j$ (X_j и X'_j инвариантны относительно $A - \lambda_j I$), что сужение этого оператора на X_j нильпотентно (индекс нильпотентности обозначим m_j), а на X'_j — обратимо.

Несложно показать[4], что X_j и X'_j являются инвариантными подпространствами и для оператора A. Тогда можно рассмотреть прямую сумму

$$A = A_j \oplus A'_j,$$

где $A_j = A|X_j$, $A'_j = A|X'_j$.

Рассмотрим оператор A_j. $\lambda_j \in \sigma(A_j)$, поскольку $A_j - \lambda_j I_j$ — сужение оператора $A - \lambda_j I$ на X_j, которое нильпотентно, а значит необратимо.

Покажем, что никаких других точек спектра оператор A_j не имеет. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(A_j)$. Тогда существует ненулевой вектор $x \in X_j$, что

$$\begin{aligned}
A_j x &= \lambda_0 x \\
A_j x - \lambda_j x &= \lambda_0 x - \lambda_j x \\
(A_j - \lambda_j I_j)x &= (\lambda_0 - \lambda_j)x \\
(A_j - \lambda_j I_j)^2 x &= (\lambda_0 - \lambda_j)^2 x \\
\dots\dots\dots\dots\dots& \\
0 = (A_j - \lambda_j I_j)^{m_j} &= (\lambda_0 - \lambda_j)^{m_j} x \\
(\lambda_0 - \lambda_j)^{m_j} x &= 0 \\
\lambda_0 &= \lambda_j
\end{aligned}$$

где m_j — индекс нильпотентности $A_j - \lambda_j I_j$. Таким образом $\sigma(A_j) = \{\lambda_j\}$.

Ясно, что $\lambda_j \notin \sigma(A'_j)$, поскольку $A'_j - \lambda_j I'_j$ — сужение $A - \lambda_j I$ на X'_j — обратим.

По пункту (4) теоремы 3.3, $\sigma(A) = \sigma(A_j) \cup \sigma(A'_j)$, значит

$$\sigma(A'_j) = \sigma(A) \setminus \{\lambda_j\}$$

Значит, повторяя аналогичный процесс для подпространства X'_j и оператора A'_j, за конечное число шагов (а именно за $m-1$) мы сможем получить разложение (6.1), где каждый из операторов будет иметь одноточечный спектр.

Первое утверждение теоремы доказано.

[4] $x \in X_j \Rightarrow (A - \lambda_j I)x = Ax - \lambda_j x \in X_j \Rightarrow Ax \in X_j$

Теперь докажем второе утверждение теоремы. Так как $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, то $p_A(\lambda) = p_{A_1}(\lambda) \dots p_{A_m}(\lambda)$, где p_A — характеристический многочлен A, p_{A_j} — характеристический многочлен A_j. Кроме того известно, что $p_A(\lambda) = (-1)^n \prod\limits_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$, и $\sigma(A_j) = \{\lambda_j\}$, $j = \overline{1,m}$. Значит

$$p_{A_j}(\lambda) = (-1)^{k_j}(\lambda - \lambda_j)^{k_j}, \quad j = \overline{1,m}$$

Отсюда следует, что $\dim X_j = k_j$, $j = \overline{1,m}$.

Второе утверждение теоремы доказано.

Как было показано в начале доказательства, $A_j - \lambda_j I_j = Q_j$ является нильпотентным оператором. Найдём его индекс нильпотентности.

Рассмотрим минимальный многочлен p_0 оператора A.

$$p_0(A) = p_0(A_1) \oplus \dots \oplus p_0(A_m) = O$$
$$p_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1^0} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m^0}$$
$$p_0(A_j) = \prod_{i=1}^{m} (A_j - \lambda_i I_j)^{k_i^0}$$

Каждый из операторов $A_j - \lambda_i I_j$, $i \neq j$ обратим[5], а значит и не нильпотентен. Так как $p_0(A_j) = O$ и $(A_j - \lambda_i I_j)^{k_i^0}. \neq O$ при $i \neq j$, получаем, что $(A_j - \lambda_j I_j)^{k_j^0} = Q^{k_j^0} = O$.

В силу минимальности многочлена p_0 получаем, что k_j^0 — индекс нильпотентности Q_j. Теорема полностью доказана. □

Теорема 6.2. *Чтобы оператор $A \in L(X)$ был оператором простой струкутуры, необходимо и достаточно, чтобы все корни минимального многочлена оператора A имели кратность 1.*

Доказательство.

Необходимость

Пусть A — оператор простой структуры со спектром $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. По теореме 3.2, оператор имеет вид

$$A = \lambda_1 I_1 \oplus \dots \oplus \lambda_m I_m$$

Тогда для любого многочлена $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ справедливо

$$f(A) = f(\lambda_1) I_1 \oplus \dots \oplus f(\lambda_m) I_m$$

Тогда для того чтобы многочлен f был аннулирующим, достаточно условия $\forall k \in \overline{1,n}$ $f(\lambda_k) = 0$, значит, минимальный многочлен

[5] $\sigma(A_j) = \{\lambda_j\}$

будет иметь вид

$$p_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_1)$$

Достаточность

Пусть $p_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_m)$ — минимальный. По теореме 6.1 получаем, что оператор A имеет вид

$$A = \bigoplus_{j=1}^{m} (\lambda_j I_j + Q_j),$$

где Q_j — нильпотентный, причем его индекс нильпотентности равен кратности корня λ_j в минимальном многочлене, то есть единице:

$$Q_j = O$$

Значит, оператор A имеет вид

$$A = \bigoplus_{j=1}^{m} \lambda_j I_j,$$

откуда и следует, что A — оператор простой структуры. □

§7. TODO: Жорданов базис для нильпотентных операторов

§8. TODO: Жорданов базис и жорданова форма линейных операторов

§9. Сопряжённые операторы

Далее будет рассматриваться конечномерное пространство со скалярным произведением (евклидово пространство) H над полем действительных либо комплексных чисел.

Лемма 9.1. *Любой линейный функционал $\xi : H \to \mathbb{K}$ допускает единственное представление вида*

$$\xi(x) = \langle x, a \rangle, \quad a \in H$$

Доказательство. Выберем некоторый ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ в H. Пусть $\xi : H \to \mathbb{K}$ — линейный функционал.

Определим a следующим образом:

$$a = \sum_{j=1}^{n} \overline{\xi(e_j)} e_j$$

Рассмотрим скалярное произведение $\langle e_k, a \rangle$, $k = \overline{1, n}$:

$$\langle e_k, a \rangle = \left\langle e_k, \sum_{j=1}^{n} \overline{\xi(e_j)} e_j \right\rangle = \left\langle e_k, \overline{\xi(e_k)} e_k \right\rangle = \xi(e_k)$$

Тогда

$$\xi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, a \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m} x_j e_j, a \right\rangle = \langle x, a \rangle \qquad \square$$

Определение 9.1. Оператор $B \in L(H)$ называется *сопряжённым к* $A \in L(H)$, если

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle \quad \forall x, y \in H$$

Лемма 9.2. *Для любого линейного оператора в евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор.*

Доказательство. Пусть $y \in H$.

Рассмотрим функционал $\xi_y : H \to \mathbb{K}$ вида

$$\xi_y(x) = \langle Ax, y \rangle$$

По лемме 1 существует $a \in H$, что

$$\xi_y(x) = \langle x, a \rangle$$

Положим $By = a$. Докажем, что B — линейный оператор из $L(H)$.

Пусть $y = \alpha y_1 + \beta y_2$.

$$\begin{aligned}
\xi_{y_1}(x) &= \langle Ax, y_1 \rangle &&= \langle x, By_1 \rangle \\
\xi_{y_2}(x) &= \langle Ax, y_2 \rangle &&= \langle x, By_2 \rangle \\
\xi_{y}(x) &= \langle Ax, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle &&= \langle x, B(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_y(x) = \langle Ax, \alpha y_1 \rangle + \langle Ax, \beta y_2 \rangle = \overline{\alpha} \xi_{y_1}(x) + \overline{\beta} \xi_{y_2}(x) = \\
= \langle x, \alpha By_1 + \beta By_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\langle x, B(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle = \langle x, \alpha By_1 + \beta By_2 \rangle$$

$$B(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B y_1 + \beta B y_2$$
$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \qquad \square$$

Сопряженный оператор обозначается звёздочкой:

$$A^* = B$$

Лемма 9.3 (свойства сопряженных операторов). *Для любых операторов $A, B \in L(H)$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ справедливы следующие утверждения:*

1. $(\alpha I)^* = \overline{\alpha} I$
2. $(AB)^* = B^* A^*$
3. $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$
4. *Если A обратим, то и A^* обратим, причём*
$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$
5. $(A^*)^* = A$
6. *Если M — инвариантное подпространство A и A^*, то*
$$(A|M)^* = A^*|M$$

Доказательство.
1. $\langle \alpha I x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle = \langle x, \overline{\alpha} y\rangle = \left\langle x, \underbrace{\overline{\alpha} I}_{=(\alpha I)^*} y \right\rangle$

2. $\langle ABx, y\rangle = \langle A(Bx), y\rangle = \langle Bx, A^* y\rangle = \langle x, B^* A^* y\rangle$

3. Доказывается аналогично (используются свойства скалярного произведения)

4. $$\begin{aligned} AA^{-1} = A^{-1}A &= I \\ (AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* &= I^* \\ (A^{-1})^* A^* = A^*(A^{-1})^* &= I \\ (A^{-1})^* &= (A^*)^{-1} \end{aligned}$$

5. Доказывается при помощи свойства эрмитовой симметричности скалярного произведения.

6. Очевидно. $\square$

Лемма 9.4. *Пусть* $A \in L(H)$*. Тогда* H *раскладывается в ортогональную прямую сумму подпространств* $H = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^*$ *и* $H = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^*$*.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*$. Пусть $y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$. Тогда $\langle Ax, y\rangle = 0$, т. к. $\forall x \in H$ $y \perp Ax \in \operatorname{Im} A$. Значит $\langle x, A^*y\rangle = 0$. Тогда, в силу произвольности x, подставляя вместо него A^*y получаем

$$\langle A^*y, A^*y\rangle = 0 \Rightarrow A^*y = 0 \Rightarrow y \in \operatorname{Ker} A^*$$

Теперь обратно: пусть $y \in \operatorname{Ker} A^*$. Тогда $\langle x, A^*y\rangle = 0$, и $\langle Ax, y\rangle = 0$, значит $y \perp \operatorname{Im} A$ и тогда $y \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$. □

Непосредственно из леммы 9.4 следует

Теорема 9.1 (Фредгольма). *Уравнение вида*

$$Ax = b, \quad b \in H$$

разрешимо тогда и только тогда, когда вектор b *перпендикулярен всем решениям однородного уравнения*

$$A^*y = 0$$

Лемма 9.5. *Пусть* $e_1, \ldots, e_n$ *— ортонормированный базис,* $A, B \in L(H)$*,* $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \operatorname{Matr}_n(\mathbb{K})$*,* $\mathcal{B} = (b_{ij}) \in \operatorname{Matr}_n(\mathbb{K})$ *— матрицы этих операторов в том же базисе. Тогда для того чтобы* $B = A^*$ *необходимо и достаточно, чтобы* $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$*.*

Доказательство.

$$Ae_j = x = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_j, e_i\rangle$$

Таким образом

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle$$

Доказательство в обе стороны проводится аналогично:

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle = \langle e_j, A^*e_i\rangle = \overline{\langle A^*e_i, e_j\rangle} = \overline{b_{ji}}$$ □

Определение 9.2. Оператор $A \in L(H)$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

Пример 9.1. Пусть $A \in L(H)$. Тогда операторы

$$\mathfrak{Re}\, A = \frac{A + A^*}{2}$$
$$\mathfrak{Im}\, A = \frac{A - A^*}{2i}$$

являются самосопряженными. При этом $A = \mathfrak{Re}\, A + i\,\mathfrak{Im}\, A$. ♢

Пример 9.2. Самосопряженным является оператор AA^*:

$$(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^* \qquad \diamondsuit$$

Определение 9.3. Матрица $\mathcal{B} = (b_{ij}) \in \mathrm{Matr}_n(\mathbb{K})$ называется сопряженной к $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Matr}_n(\mathbb{K})$, если

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Непосредственно из леммы 9.5 следует, что оператор $A \in L(H)$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в некотором ортонормированном базисе является самосопряженной.

Определение 9.4. Проектор $P \in L(H)$ называется *ортогональным (ортопроектором)*, если он осуществляет разложение H в ортогональную прямую сумму.

$$H = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(I - P)$$
$$\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P$$

Лемма 9.6. *Проектор $P \in L(H)$ является ортопроектором тогда и только тогда, когда $P^* = P$.*

Доказательство.

Необходимость

Пусть P — ортопроектор, то есть

$$\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Im}(I - P)$$

Пусть $H \ni x = x_1 + x_2$, $H \ni y = y_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in \operatorname{Im} P$, $x_2, y2 \in \operatorname{Im}(I - P$.

$$\langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_1, y_2\rangle = \\ = \langle x_1, Py\rangle = \langle x_1 + x_2, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$$

Достаточность

Пусть проектор P самосопряжен. Тогда по лемме 9.4 получаем, что

$$H = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(I - P)$$

где предполагается разложение в ортогональную прямую сумму. □

Следствие 1. *Дополнительный проектор к ортопроектору есть ортопроектор.*

$$(I - P)^* = I^* - P^* = I - P$$

Определение 9.5. $B \in L(H)$ называется *антисамосопряженным (кососамосопряженным)*, если $B^* = -B$.

Лемма 9.7. *Если $B \in L(H)$ — антисамосопряженный оператор, то существует самосопряженный оператор A такой, что $B = iA$.*

Доказательство. Пусть $B^* = -B$, $A = -iB$.

$$A^* = iB^* = -iB = A$$

то есть A — самосопряженный оператор и $B = iA$. □

Определение 9.6. Оператор $U \in L(H)$ называется *унитарным*, если имеют место равенства:

$$U^*U = UU^* = I,$$

т. е. U — обратим и $U^* = U^{-1}$.

Пусть U — унитарный оператор.

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

То есть *всякий унитарный оператор сохраняет длины векторов (является изометрией)* (можно показать, что верно и обратное: всякий изометрический изоморфизм есть унитарный оператор).

Определение 9.7. Оператор $A \in L(H)$ называется *нормальным*, если

$$AA^* = A^*A$$

Непосредственно из определений следует, что самосопряженные, кососамосопряженные и унитарные операторы являются нормальными.

Лемма 9.8. *Пусть $A, B \in L(X)$ — операторы в произвольном линейном пространстве — перестановочны:*

$$AB = BA$$

Тогда $\operatorname{Ker} B$ *и* $\operatorname{Im} B$ *являются инвариантными подпростран-*

ствами для A

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Ker} B$, тогда $Bx = 0$

$$B(Ax) = A(Bx) = A0 = 0 \Rightarrow Ax \in \operatorname{Ker} B$$

Аналогично доказывается для образа. □

Лемма 9.9.

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$$

Оператор $A - \lambda I$ обратим тогда и только тогда, когда обратим $A^* - \overline{\lambda} I$, откуда и следует утверждение теоремы. □

Теорема 9.2. *Пусть $A \in L(H)$ — нормальный оператор, его спектр $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тогда*

1. $E(\overline{\lambda_i}, A^*) = E(\lambda_i, A),\ i = \overline{1, m}$
2. *Пространство H раскладывается в ортогональную прямую сумму*
$$H = E(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, A)$$
3. *A и A^* — операторы простой структуры*

Доказательство.

Рассмотрим собственное подпространство $E(\lambda_k, A) = M$. Поскольку A и A^* перестановочны, то по лемме 9.8 для оператора A^* подпространство M также будет инвариантным.

Покажем, что $E(\lambda_k, A) \subset E(\overline{\lambda_k}, A^*)$. Пусть $x \in E(\lambda_k, A)$. Рассмотрим сужение $(A - \lambda_k I)_M = O_M$. M инвариантно для $A - \lambda_k I$ и для $A^* - \overline{\lambda_k} I$ и по пункту (6) леммы 9.3 получаем, что

$$O_M = (A - \lambda_k I)_M = ((A - \lambda_k)^*)_M = (A^* - \overline{\lambda_k} I)_M$$

Таким образом

$$(A^* - \overline{\lambda_k} I)_M = O_M$$

Значит $A^* x = \overline{\lambda_k} x$, а следовательно $x \in E(\overline{\lambda_k}, A^*)$.

Обратное включение доказывается аналогично.

Итак, $E(\lambda_1, A) = E(\lambda_1, A^*)$.

$$H = E(\lambda_1, A) \oplus H_1, \quad H_1 = (E(\lambda_1, A))^\perp$$

Докажем, что H_1 инвариантно для A (аналогично показывается для A^*).

Пусть $x \in H_1,\ e \in E(\lambda_1, A)$.

$$\langle Ax, e\rangle = \langle x, A^*e\rangle = \left\langle x, \overline{\lambda_1}e\right\rangle = \lambda_1 \langle x, e\rangle = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ax \perp E(\lambda_1, A) \Rightarrow Ax \in H_1$$

Таким образом операторы A и A^* раскладываются в прямую сумму операторов:
$$A = \lambda_1 I_1 \oplus A_2$$
$$A^* = \overline{\lambda_1} I_1 \oplus A_2^*$$

Из пункта (4) теоремы 3.3 получаем, что

$$\sigma(A) = \{\lambda_2, \dots, \lambda_m\}$$

Продолжая аналогичный процесс для операторов A_2 и A_2^* до тех пор, пока не останется одна точка спектра, получаем разложения:

$$A = \lambda_1 I_1 \oplus \dots \oplus \lambda_{m-1} I_{m-1} \oplus A_m$$
$$A^* = \overline{\lambda_1} I_1 \oplus \dots \oplus \overline{\lambda_{m-1}} I_{m-1} \oplus A_m^*$$

относительно подпространств

$$H = E(\lambda_1, A) \oplus \dots \oplus E(\lambda_{m-1}, A) \oplus H_m$$
$$H = E(\overline{\lambda_1}, A) \oplus \dots \oplus E(\overline{\lambda_{m-1}}, A) \oplus H_m$$

где A_m и A_m^* — сопряженные операторы с одной точкой спектра. A_m можно представить в виде

$$A_m = \lambda_m I_m + Q,$$

где Q — нильпотентный либо нулевой.

Понятно, что если $x \in E(\lambda_m, A)$, то $Qx = 0$. Рассмотрим прямую сумму
$$H_m = E(\lambda_m, A) \oplus (E(\lambda_m, A))^\perp$$

Как уже было показано, $(E(\lambda_m, A))^\perp$ — инвариантное подпространство. Пусть $x \in (E(\lambda_m, A))^\perp$. Тогда и $Ax \in (E(\lambda_m, A))^\perp$.

$$(E(\lambda_m, A))^\perp \ni Ax = \lambda_m x + Qx,$$
$$\lambda_m x \in E(\lambda_m, A),\ Qx \in (E(\lambda_m, A))^\perp$$

По определению прямой суммы Ax единственным образом представимо в виде суммы

$$Ax = 0 + Qx$$

Таким образом $\lambda_m x = 0$, откуда следует, что $x = 0$, то есть $H_m = E(\lambda_m, A)$, $A_m = \lambda_m I_m$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 1. *Каждый нормальный оператор допускает разложение*

$$A = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k,$$

где $P_k^* = P_k,\ k = \overline{1,m}$. *При этом*

$$A^* = \sum_{k=1}^{m} \overline{\lambda_k} P_k$$

(следует из свойств сопряженных операторов)

Теорема 9.3. *Пусть* $A \in L(H)$ *— самосопряженный оператор в комплексном евклидовом пространстве. Тогда его спектр состоит из вещественных собственных значений и существует ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора* A.

Доказательство. По следствию из теоремы 9.2 оператор A имеет допускает разложение

$$A = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$$

При этом

$$A^* = \sum_{k=1}^{m} \overline{\lambda_k} P_k$$

Так как $A = A^*$ получаем

$$\sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \overline{\lambda_k}) P_k = O$$

Применим к обеим частям равенства оператор $P_j,\ j = \overline{1,m}$:

$$P_j \left(\sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \overline{\lambda_k}) P_k \right) = O$$

Отсюда получаем

$$(\lambda_j - \overline{\lambda_j})P_j = O \Rightarrow \lambda_j = \overline{\lambda_j}$$

То есть $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Теперь, чтобы получить ортонормированный базис, рассмотрим разложение H в ортогональную прямую сумму

$$H = E(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, A)$$

и выберем в каждом собственном подпространстве ортонормированный базис. Их объединение и будет ортонормированным базисом в H. □

Теорема 9.4. *Пусть $U \in L(H)$ — унитарный оператор. Тогда его спектр лежит на единичной окружности, т. е.*

$$|\lambda_j| = 1,\ \forall \lambda_j \in \sigma(U),$$

и существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора U.

Доказательство. Пусть $U \in L(H)$ — унитарный, то есть $U^* = U^{-1}$. Тогда

$$U = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$$

и

$$U^{-1} = \sum_{k=1} \frac{1}{\lambda_k} P_k = U^*$$

Аналогично случаю самосопряженного оператора можно показать, что

$$\frac{1}{\lambda_k} = \overline{\lambda_k}$$

а это значит, что

$$\lambda_k \overline{\lambda_k} = 1 \Rightarrow |\lambda_k| = 1$$

Утверждение о базисе доказывается аналогично предыдущей теореме. □

Определение 9.8. Матрица $\mathcal{A}$ называется *нормальной*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

Определение 9.9. Матрица $\mathcal{A}$ называется *ортогональной*, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = E$$

§10. Самосопряженные операторы в вещественных пространствах

Пусть H — вещественное евклидово пространство. Расширение пространства H осуществим по схеме, близкой к расширению поля $\mathbb{R}$ до поля $\mathbb{C}$. А именно, рассмотрим (вещественное) линейное пространство $\overline{H} = H^2$. Введём операцию умножения пары $(x, y) \in H^2$ на комплексное число $\alpha + \beta i$ следующим образом:

$$(\alpha + \beta i)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$$

Несложно проверить, что эта операция удовлетворяет требуемым аксиомам умножения на число в линейном пространстве, а значит пространство $\overline{H}$ с таким внешним законом композиции является комплексным.

Каждую пару $(x, y) \in \overline{H}$, по аналогии с комплексными числами, будем обозначать $x + iy$.

Определим скалярное произведение в $\overline{H}$ следующим образом:

$$\langle x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle + i \langle x_2, y_1 \rangle - i \langle x_1, y_2 \rangle$$

Теперь $\overline{H}$ имеет структуру комплексного евклидова пространства.

Определение 10.1. Построенное пространство $\overline{H}$ называется *комплексификацией* вещественного евклидова пространства H.

Определение 10.2. Пусть $A \in L(H)$. Линейный оператор $\overline{A} \in L(\overline{H})$, определённый формулой

$$\overline{A}(x, y) = (Ax, Ay),\ (x, y) \in \overline{H},$$

или иначе

$$\overline{A}(x + iy) = Ax + iAy,\ x + iy \in \overline{H},$$

называется *расширением* оператора A на H.

Замечание 10.1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в H. Тогда векторы $(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0)$ образуют базис в $\overline{H}$ (докажите!)

Замечание 10.2. Из предыдущего замечания следует, что матрицы операторов A и $\overline{A}$ в одном и том же базисе совпадают.

Замечание 10.3. Пусть $A \in L(H)$.

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{A}(x_1 + iy_1), x_2 + iy_2 \right\rangle &= \langle Ax_1 + iAy_1, x_2 + iy_2 \rangle = \\ &= \langle Ax_1, x_2 \rangle + \langle Ay_1, y_2 \rangle + i \langle Ay_1, x_2 \rangle - i \langle Ax_1, y_2 \rangle = \\ &= \langle x_1, A^* x_2 \rangle + \langle y_1, A^* y_2 \rangle + i \langle y_1, A^* x_2 \rangle - i \langle x_1, A^* y_2 \rangle =\end{aligned}$$

$$= \langle x_1 + iy_1, A^* x_2 + iA^* y_2 \rangle = \left\langle x_1 + iy_1, \overline{A^*}(x_2 + iy_2) \right\rangle$$

Это означает, что оператор, сопряженный к расширению оператора A есть расширение A^*. Отсюда следует, что если $A = A^*$, то $\overline{A} = \overline{A}^*$.

Пусть $A \in L(H)$ — самосопряженный оператор, $\overline{A}$ — его расширение на $\overline{H}$ (также самосопряженный). Их матрицы совпадают, поэтому совпадают характеристические многочлены, а следовательно и спектры. По теореме 9.3 спектр оператора $\overline{A}$ состоит только из вещественных собственных значений. Таким образом спектр самосопряженного оператора в вещественном евклидовом пространстве непуст.

Теорема 10.1. *Пусть $A \in L(H)$ — самосопряженный оператор. Тогда $\sigma(A) \neq \varnothing$ и существует ортонормированный базис, составленный из собственных векторов этого оператора.*

§11. Спектральный радиус и норма операторов

Продолжим изучать линейные операторы в евклидовом пространстве.

Определение 11.1. Спектральным радиусом оператора $A \in L(H)$ называется число $r(A)$, определённое равенством

$$r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Напомним определение нормы оператора:

$$\|A\| = \max_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$$

Лемма 11.1. *Для любого оператора $A \in L(X)$ (X — конечномерное нормированное пространство) имеет место оценка*

$$r(A) \leqslant \|A\|$$

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(A)$ — минимальное по модулю собственное значение оператора A, x_0 — отвечающий ему собственный вектор, такой что $\|x_0\| = 1$. Тогда

$$r(A) = |\lambda_0| = |\lambda_0| \, \|x_0\| = \|Ax_0\| \leqslant \max_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \|A\|$$

□

Теорема 11.1. *Пусть $A \in L(H)$ — нормальный оператор. Тогда*

$$r(A) = \|A\|$$

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис из собственных векторов:

$$Ae_k = \lambda_k e_k,\ k = \overline{1, n}$$

Разложим произвольный вектор x по этому базису:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle\, e_k$$
$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle\, e_k$$

Оценим величину $\|Ax\|^2$:

$$\|Ax\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle\, e_k \right\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \, |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant$$
$$\leqslant r(A)^2 \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = r(A)^2 \, \|x\|^2 .$$

Таким образом
$$\|Ax\|^2 \leqslant r(A)^2 \, \|x\|^2$$

Пусть $\|x\| \leqslant 1$. Тогда $\forall x \in H \ \ \|x\| \leqslant 1 \Rightarrow \|Ax\|^2 \leqslant r(A)^2$.

$$\|A\|^2 = \max_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|^2 \leqslant r(A)^2$$

То есть $\|A\| \leqslant r(A)$ и при этом из леммы 11.1 получаем, что $\|A\| \geqslant r(A)$. Значит
$$\|A\| = r(A)$$ □

Следствие 1. *Если $A \in L(H)$ — нормальный оператор и*

$$\langle Ax, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H,$$

то $A = O$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(A)$, x_0 — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\langle Ax_0, x_0 \rangle = \lambda_0 \, \|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$$

Так как A — нормальный, $0 = r(A) = \|A\|$, то $A = O$. □

Определение 11.2. Самосопряженный оператор $A \in L(H)$ называется *положительно определённым* (*положительно полуопределённым*), если

$$\langle Ax, x\rangle > 0 \quad (\langle Ax, x\rangle \geqslant 0)$$

для всех ненулевых $x \in H$.

Самосопряженный оператор $A \in L(H)$ называется *отрицательно определённым* (*отрицательно полуопределённым*), если

$$\langle Ax, x\rangle < 0 \quad (\langle Ax, x\rangle \leqslant 0)$$

для всех ненулевых $x \in H$.

Определение 11.3. Самосопряженная матрица называется *положительно определённой* (*положительно полуопределённой*), если соответствующий ей оператор положительно определён (положительно полуопределён).

Самосопряженная матрица называется *отрицательно определённой* (*отрицательно полуопределённой*), если соответствующий ей оператор отрицательно определён (отрицательно полуопределён).

Теорема 11.2. *Самосопряженный оператор $A \in L(H)$ положительно определён (полуопределён) тогда и только тогда когда все его собственные значения положительны (неотрицательны).*

Доказательство.

Необходимость

Пусть A положительно определён. Возьмём некоторый собственный вектор x_0 и соответствующее ему собственное значение λ_0:

$$0 < \langle Ax_0, x_0\rangle = \lambda_0 \left\|x_0\right\|^2 \Rightarrow \lambda_0 > 0$$

Достаточность

Пусть все собственные значения $\lambda_i,\ i = \overline{1, n}$ положительны и $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис из собственных векторов. Тогда если $x \neq 0$:

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left|\langle x, e_k\rangle\right|^2 > 0$$

Аналогично в случае полуопределённости оператора и неотрицательности собственных значений. $\square$

Теорема 11.3. *Пусть H — комплексное евклидово пространство. Оператор $A \in L(H)$ самосопряжен тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in H \quad \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$$

Доказательство.
Необходимость

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} \Rightarrow \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$$

Достаточность
Пусть для всех $x \in H$ выполняется условие

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$$

Тогда

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{\langle x, A^*x\rangle} = \langle A^*x, x\rangle$$

Следовательно

$$\langle (A - A^*)x, x\rangle = 0 \quad \forall x \in H$$

Оператор $A - A^*$ — антисамосопряженный, а значит нормальный, поэтому согласно следствию 1 из теоремы 11.1 получаем, что

$$A - A^* = O \Rightarrow A = A^*$$ □

Теорема 11.4 (критерий Сильвестра). *Пусть $A \in L(H)$ — самосопряженный оператор, $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Matr}_m(\mathbb{K})$ — его матрица в некотором ортонормированном базисе из H. Тогда для того чтобы оператор A был положительно определённым, необходимо и достаточно чтобы выполнялись неравенства:*

$$a_{11} = \det \mathcal{A}_1 > 0,\ \det \mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \det \mathcal{A}_m = \det \mathcal{A} > 0$$

для главных миноров $\mathcal{A}_k,\ k = \overline{1, m}$ матрицы $\mathcal{A}$.

§12. Билинейные и квадратичные формы

Далее рассматриваются билинейные и квадратичные формы на вещественном евклидовом пространстве H.

Определение 12.1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в H, φ — билинейная форма. Матрица $(a_{ij}) \in \mathrm{Matr}(\mathbb{K})$, где $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j),\ i, j = \overline{1, n}$ называется *матрицей билинейной формы.*

Теорема 12.1. *Для каждой билинейной формы φ найдётся такой оператор $A \in L(H)$, что*

$$\forall x, y \in H \ \ \varphi(x, y) = \langle Ax, y\rangle \tag{12.1}$$

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в H, $\mathcal{A} = (a_{ij}) = (\varphi(e_i, e_j))$ — матрица билинейной формы.

Рассмотрим оператор, задаваемый матрицей $\mathcal{A}^\top = (a_{ji})$. Он задаёт некоторую билинейную форму $f : H^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

Покажем, что $\varphi = f$.

$$f(e_i, e_j) = \langle Ae_i, e_j \rangle = a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$$

$\big(\langle Ae_i, e_j \rangle\big)$ — транспонированная матрица оператора A $\square$

Следствие 1. *Каждая билинейная форма в $\mathbb{R}^n$ имеет вид*

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Следствие 2. *Билинейная форма* (12.1) *симметрична тогда и только тогда, когда A самосопряжен.*

Определение 12.2. Функция $f : H \to \mathbb{R}$ называется *квадратичной формой*, если она может быть представлена в виде

$$f(x) = \varphi(x, x),$$

где φ — билинейная форма.

Заданной квадратичной форме f может соответствовать бесконечно много билинейных форм $\varphi : H^2 \to \mathbb{R}$ со свойством

$$f(x) = \varphi(x, x) \quad \forall x \in H$$

Однако если φ — симметрическая билинейная форма, то из равенства

$$\varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y)$$

следует, что

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(f(x + y) - f(x) - f(y))$$

Таким образом для данной квадратичной формы f существует единственная симметрическая билинейная форма φ, для которой $f(x) = \varphi(x, x)$. Такая билинейная форма φ называется *полярной* к квадратичной форме f.

Определение 12.3. *Матрицей квадратичной формы* называется матрица соответствующей ей полярной билинейной формы.

Из определения полярной билинейной формы и теоремы 12.1 следует

Теорема 12.2. *Каждая квадратичная форма f может быть единственным образом представлена в виде*

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle ,$$

где A — самосопряженный оператор из $L(H)$.

Определение 12.4. Квадратичная форма $f : H \to \mathbb{R}$ называется *положительно определённой* (*положительно полуопределённой*), если для любого ненулевого $x \in H$

$$f(x) > 0 \quad (f(x) \geqslant 0)$$

Из определений вытекает, что *квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда соответствующий ей оператор A положительно определён.*

Определение 12.5. Базис $e_1, \ldots, e_n$ в H называется *каноническим* для квадратичной формы $f : H \to \mathbb{R}$, если в этом базисе она имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \quad x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

Коэффициенты λ_k называются *каноническими коэффициентами* квадратичной формы.

Теорема 12.3. *Для каждой квадратичной формы существует канонический базис.*

Доказательство. Квадратичная форма $f : H \to \mathbb{R}$ представима в виде

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle ,$$

где $A^* = A$. Согласно теореме 9.3, в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad k = \overline{1, n}$$

Раскладывая вектор $x \in H$ по этому базису получаем:

$$f(x) = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k e_k, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \qquad \square$$

Замечание 12.1. Пусть $f : H \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма. Используя обозначения из доказательства предыдущей теоремы, рассмотрим базис $e'_1, \ldots, e'_k$ такой, что

$$e'_k = \begin{cases} e_k, & \lambda_k = 0 \\ \dfrac{e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}, & \lambda_k \neq 0 \end{cases} \qquad k = \overline{1, n}$$

Тогда

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \left\| e_i \right\|^2$$

Получаем, что

$$\lambda_i \left\| e_i \right\|^2 = \begin{cases} 0, & \lambda_i = 0 \\ \operatorname{sgn} \lambda_i, & \lambda_i \neq 0 \end{cases}$$

Переставляя элементы базиса, без ограничения общности, можно считать, что $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_m < 0$. Тогда в выбранном базисе квадратичная форма будет иметь вид

$$f(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_m^2$$

Такое представление называется *нормальным видом* квадратичной формы.