II) Analyse de données d'échange

b) Les modèles à blocs stochastiques

UMR MIA-Paris, AgroParisTech, INRA

Formation Analyse de Réseaux

11-12 Juin 2018

Objectifs

- Quelques modèles de graphes aléatoires. Miment-ils les propriétés de réseaux observés ?
- Focus sur le modèle à blocs stochastique [SBM] qui suppose que les liens entre individus découlent de leur appartenance à un groupe. Comment l'exploiter ?
- Focus sur SBM lorsqu'on dispose également d'informations sur les individus. Les liens découlent alors de l'appartenance au groupe et aussi de ces informations.
- Quelques références et packages R sur les extensions du SBM.

Sommaire

Graphes aléatoires

Réseau d'interaction= Graphe aléatoire $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = \{1, \dots n\}, \mathcal{E})$

Données : $\mathbf{Y}$ la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in \mathcal{E} \text{ (}\textit{arête}\text{)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$Y_{ii} = 0$ pour tous les i et $Y_{ij} = Y_{ji}, \forall i \neq j$ *si liens non dirigés.*

Y_{ij} *sont des variables aléatoires, i.e. les relations s'établissent aléatoirement*

Modèle d'Erdös-Rényi

Modèle d'Erdös-Rényi (Erdös et Rényi, 1959)

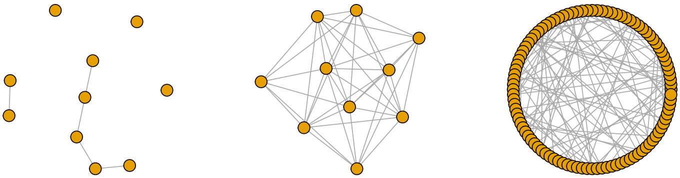
$$Y_{ij} \sim^{iid} \mathcal{B}(p)$$

Tous les noeuds ont même probabilité de connexion

Erdös-Rényi – Exemple (1)

```
G1 <- igraph::sample_gnp(10, 0.1)
G2 <- igraph::sample_gnp(10, 0.9)
G3 <- igraph::sample_gnp(100, .02)
```

```
par(mfrow=c(1,3))
plot(G1, vertex.label=NA)
plot(G2, vertex.label=NA)
plot(G3, vertex.label=NA, layout=layout.circle)
```



Erdös-Rény – Caractéristiques

```
> average.path.length(G3)
[1] 4.938823
> diameter(G3)
[1] 11
```

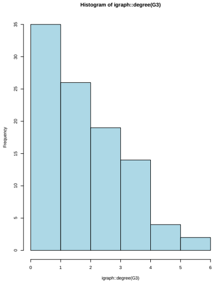
Les chemins le plus court et le plus long se constituent de relativement peu de nœuds

```
> transitivity(G3)
[1] 0.02955665
```

Le coefficient de clustering est assez faible

```
hist(degree(G3), col="lightblue")
```

La distribution des degrés est assez homogène



Modèle d'attachement préférentiel

Modèle d'attachement préférentiel (Barabàsi et Albert, 1999)

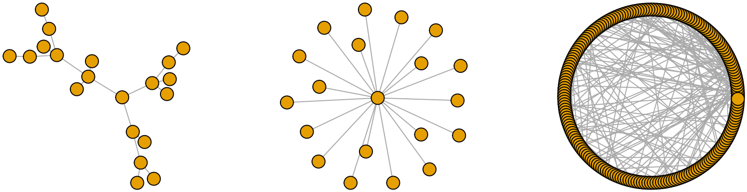
Le graphe se consruit ainsi à partir d'un graphe initial $\mathcal{G}_0 = (\mathcal{V}_0, \mathcal{E}_0)$:

1. au temps t, on ajoute un nouveau nœud V_t
2. V_t est connecté à $i \in V_{t-1}$ avec probabilité $D_i^\alpha + \text{constante}$, où $D_i = \sum_{j \neq i} Y_{ij}$ est le degré du nœud i

Les nœuds qui ont un fort degré ont de grandes chances d'être connectés : les riches s'enrichissent.

Modèle d'attachement préférentiel – Exemple

```
G1 <- igraph::sample_pa(20, 1, directed=FALSE)
G2 <- igraph::sample_pa(20, 5, directed=FALSE)
G3 <- igraph::sample_pa(200, directed=FALSE)
```



Modèle d'attachement préférentiel – Caractéristiques

```
> average.path.length(G3)
[1] 6.05397
> diameter(G3)
[1] 13
```

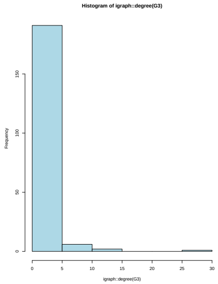
Les chemins le plus court et le plus long se constituent de relativement peu de nœuds

```
> transitivity(G3)
[1] 0
```

Le coefficient de clustering est nul

```
hist(degree(G3), col="lightblue")
```

La distribution des degrés est hétérogène et caractéristique d'une loi de puissance



Modèle exponentiel de graphe [ERGM]

Modèle exponentiel de graphe [ERGM] (review de Wasserman et Pattison, 1996)

$$\mathbb{P}_\theta(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{\kappa}\right) exp \left(\sum_H \theta_H g_H(\mathbf{y})\right)$$

avec

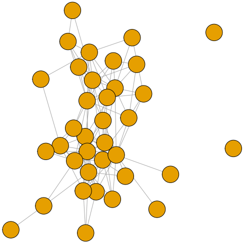
- $\mathbf{y}$ une réalisation de $\mathbf{Y}$
- H une configuration, e.g. arête, triangle, étoile, etc.
- $g_H(y)$ le nombre de fois où cette configuration apparaît dans $\mathbf{y}$
- θ_H le coefficient de dépendance
- κ la constant de normalisation

La distribution des arêtes est due à la présence de différents motifs dans le réseau observé

ERGM – Exemple

```
library(sand); data(lazega); A <- get.adjacency(lazega)
lazega.s <- network::as.network(as.matrix(A), directed=FALSE)
my.ergm <- formula(lazega.s ~ edges + kstar(2)
                              + kstar(3) + triangle)
```

```
> summary.statistics(my.ergm)
   edges    kstar2    kstar3 triangle
     115       926      2681      120
```



Limites

- Modèle d'Erdös-Rényi
  - modélisation d'une structure homogène donc inadaptée aux réseaux réels
- Modèle d'attachement préférentiel
  - modélisation d'une structure où la distribution des degrés est une loi de puissance, i.e. existence d'un petit groupe de nœuds fortement connectés
  - défini par un algorithme – cadre statistique non propice à l'estimation des paramètres
- Modèle ERGM
  - modélisation de structures très particulières et de petites tailles
  - justifications théoriques analogues à celle du glm non établies

Modèle à blocs stochastiques

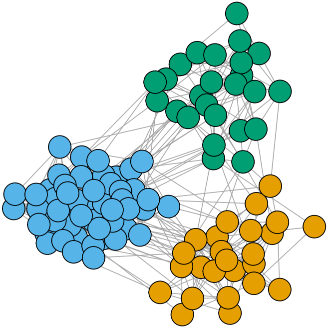
- modélisation d'une structure de groupes courante de réseaux réels
- cadre statistique propice à l'estimation des paramètres

Sommaire

SBM – Exemple de topologie (1)

Réseau de communauté

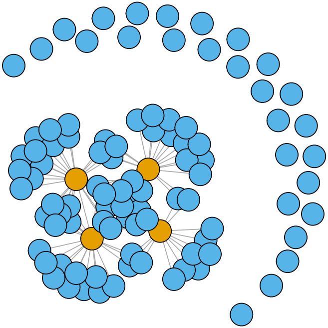
```
pi <- matrix(c(0.3,0.02,0.02,0.02,0.3,0.02,0.02,0.02,0.3),3,3)
communities <- igraph::sample_sbm(100, pi, c(25, 50, 25))
plot(communities, vertex.color = rep(1:3,c(25, 50, 25)))
```



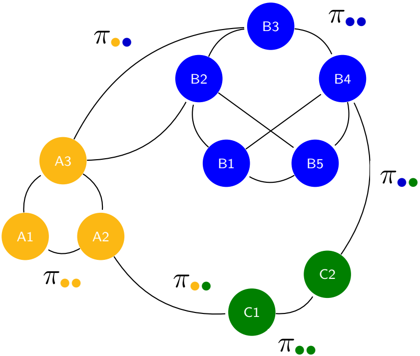
SBM – Exemple de topologie (2)

Réseau en étoile

```
pi <- matrix(c(0.05,0.3,0.3,0),2,2)
star <- igraph::sample_sbm(100, pi, c(4, 96))
plot(star, vertex.label=NA, vertex.color = rep(1:2,c(4,96)))
```



Modèle à blocs stochastiques [SBM] (1)



SBM (Nowicki et Snijders, 2001)

Soient n nœuds répartis ainsi :

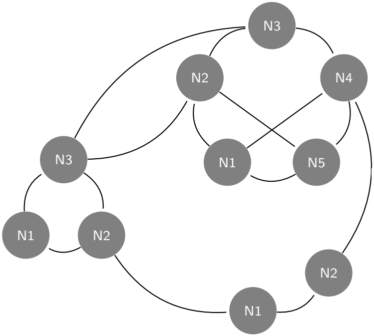
- $\mathcal{Q} = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$ classes
- $\alpha_\bullet = \mathbb{P}(i \in \bullet)\ \bullet \in \mathcal{Q}, i = 1, \dots, n$
- $\pi_{\bullet\bullet} = \mathbb{P}(i \leftrightarrow j | i \in \bullet, j \in \bullet)$

$$Z_i = \mathbf{1}_{\{i \in \bullet\}} \sim^{\text{iid}} \mathcal{M}(1, \alpha), \quad \forall \bullet \in \mathcal{Q}$$

$$Y_{ij} \mid \{i \in \bullet, j \in \bullet\} \sim^{\text{ind}} \mathcal{B}(\pi_{\bullet\bullet})$$

Toute paire de nœuds a une probabilité de connexion induite par un caractère spécifique à chacun des noeuds : le groupe d'appartenance

SBM (2)



SBM

Soient n nœuds répartis ainsi :

- $\mathcal{Q} = \{{\color{orange}\bullet}, {\color{blue}\bullet}, {\color{green}\bullet}\}$, $\mathrm{card}(\mathcal{Q})$ connu
- $\alpha_\bullet = ?$,
- $\pi_{{\color{orange}\bullet}{\color{blue}\bullet}} = ?$

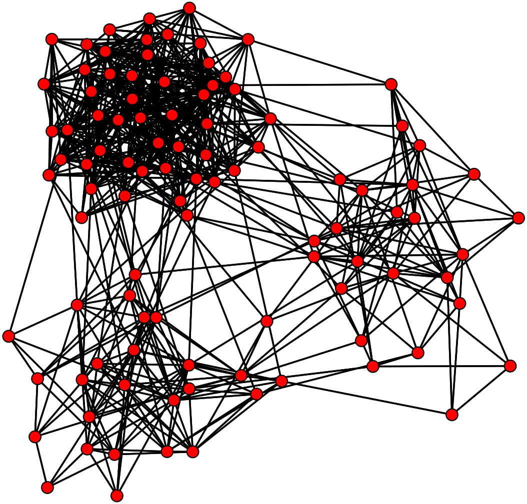
$$Z_i = \mathbf{1}_{\{i \in \bullet\}} \sim^{\text{iid}} \mathcal{M}(1, \alpha), \quad \forall \bullet \in \mathcal{Q},$$

$$Y_{ij} \mid \{i \in {\color{orange}\bullet}, j \in {\color{blue}\bullet}\} \sim^{\text{ind}} \mathcal{B}(\pi_{{\color{orange}\bullet}{\color{blue}\bullet}})$$

SBM – Estimation – Sélection de modèle

- Estimation de α le vecteur des probabilités d'appartenance aux Q groupes
  via un algorithme EM variationnel
- Estimation de π la matrice des probabilités de connexion au sein des groupes et entre les groupes
  via ce même vEM
- Estimation de Q le nombre de groupes
  via la maximisation du critère vICL

SBM – Réseau de communautés $n = 100$, $\rho = 0.12$



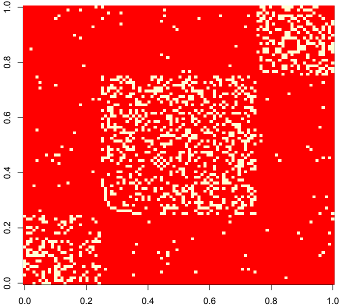
SBM – Communautés – Package **blockmodels** (1)

```
library(blockmodels)

# matrice d'adjacence du graphe de communautés
communities=as.matrix(get.adjacency(communities,type="both"))

my_model <- BM_bernoulli("SBM_sym",communities,verbosity=0,plotting='')
m=my_model$estimate()

# nombre de groupes sélectionné avec vICL
> which.max(my_model$ICL)
[1] 3
```

Le critère de sélection de modèle vICL retrouve le nombre de groupes égal à 3

SBM – Communautés – Package **blockmodels** (2)

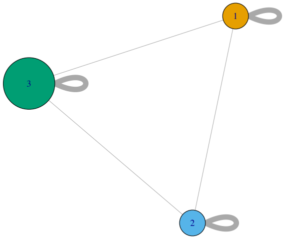
```
# probabilités a posteriori d'appartenance de chacun des noeuds aux groupes
head(my_model$memberships[[Q]]$Z)
             [,1]     [,2]        [,3]
[1,] 0.000999001 0.998002 0.000999001
[2,] 0.000999001 0.998002 0.000999001
```



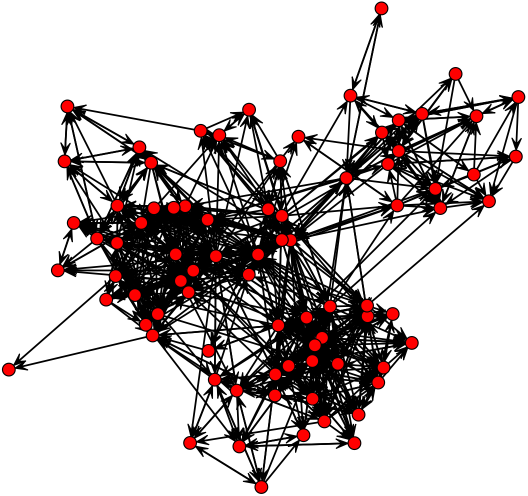
SBM – Communautés – Package **blockmodels** (3)

```
my_model$model_parameters[[Q]]$pi
           [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 0.33136563 0.01974406 0.01676524
[2,] 0.01974406 0.28168363 0.01833345
[3,] 0.01676524 0.01833345 0.32752832

> colSums(my_model$memberships[[Q]]$Z)/100
[1] 0.2502498 0.2502498 0.4995005
```

*On retrouve bien les probabilités de connexion entre groupes (*0.3 *et* 0.02*), ainsi que les probabilités d'appartenance des noeuds aux groupes (*0.25, 0.25 *et* 0.5*).*

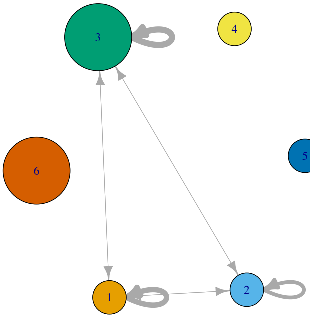


SBM – UKfaculty $n = 181$, $\rho = 0.13$



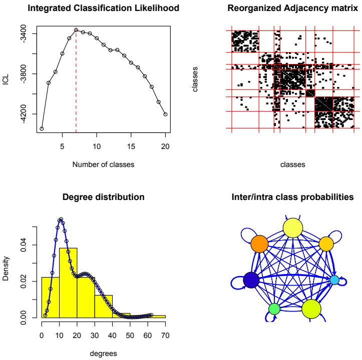
SBM – Réseau UKfaculty – Package **blockmodels**

```
# matrice d'adjacence
Net=as.matrix(UKfaculty_adj_cov$Net)

sbm.faculty <- BM_bernoulli("SBM", Net); sbm.faculty$estimate()

# nombre de groupes sélectionné
> which.max(sbm.faculty$ICL)
[1] 6
```



SBM – UKfaculty – Package **mixer**

```
library(mixer)

> mix.sbm.faculty<- mixer(x=Net,qmin=2,qmax=20)
Mixer: the adjacency matrix has been transformed in a directed edge list

plot(mix.sbm.faculty); faculty.output <- getModel(mix.sbm.faculty)

> faculty.output$q
[1] 7
```



SBM et covariables

SBM avec covariables (Mariadassou et al., 2010)

$$Z_i = \mathbf{1}_{\{i \in \bullet\}} \sim^{\text{iid}} \mathcal{M}(1, \alpha), \quad \forall \bullet \in \mathcal{Q}$$

$$Y_{ij} \mid \{i \in \color{orange}{\bullet}, j \in \color{blue}{\bullet}\} \sim^{\text{ind}} \mathcal{B}\left(g(\pi_{\color{orange}{\bullet}\color{blue}{\bullet}} + x_{ij}^T \beta)\right)$$

avec g la fonction logistique et x_{ij} le vecteur de covariables sur la dyade (i ; j).

Pour p covariables, $\mathbb{P}(i \sim j)$ est une fonction croissante de $\pi_{\color{orange}{\bullet}\color{blue}{\bullet}} + x_{ij}^1 \beta_1 + \ldots + x_{ij}^p \beta_p$.

La présence d'une arête dépend de l'appartenance de chaque nœud à un groupe ainsi que des covariables qui portent sur la dyade correspondante. La structure de groupe dépend alors d'informations autres à ces covariables.

Construction des covariables sur les dyades – UKfaculty

Covariable **école d'affiliation** (qualitative-4 niveaux)

$\hookrightarrow$ version quantitative : valeur absolue de la différence

$\hookrightarrow$ version binaire pour chaque niveau ℓ du facteur

$$x_{ij}^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ de même niveau } \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour chaque école, la covariable vaut 1 si 2 individus sont affiliés à la même école et 0 sinon

$\hookrightarrow$ version ternaire: pour chaque niveau ℓ du facteur

$$x_{ij1}^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ de même niveau } \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

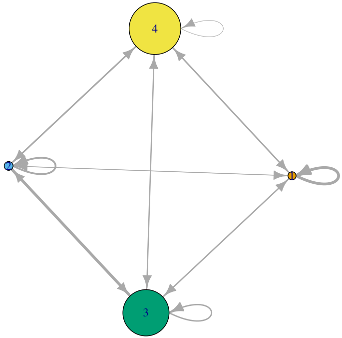
et

$$x_{ij2}^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ ou } j \text{ est de niveau } \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

SBM et covariables (version binaire) – UKfaculty

```
listVar=list(EdgeCovar[,,1],...,EdgeCovar[,,4])
sbm.cov.faculty <- BM_bernoulli_covariates_fast("SBM",Net,listVar)
sbm.cov.faculty$estimate() ; Q=which.max(sbm.cov.faculty$ICL)
> Q
[1] 4
```

4 groupes au lieu de 6 : prise en compte des covariables mais il reste d'autres facteurs non identifiés qui engendrent une structure



Autour du SBM – packages R

- SBM valué avec covariables : lois gaussienne et de Poisson
  package blockmodels
- SBM tenant compte des données manquantes
  missSBM
- Overlapping SBM : possibilité d'appartenir à plusieurs groupes
  package OSBM
- Modèles à blocs latents [LBM] : SBM pour graphes bipartites
  package blockmodels
- SBM multiplex
  package blockmodels (binaire) et codes R
- Tests d'ajustement à ER, HER, W-graphe, SBM, EDD
  codes R
- Test pour savoir si les covariables collectées sont suffisantes pour expliquer le réseau
  package gofnetwork

Références ER, PA, ERGM, SBM, SBM covariables

- Barabási, A-L et Albert, R., (1999). Emergence of Scaling in Random Networks,*American Association for the Advancement of Science*, **286**, 509–512.
- Erdös, P. et Rényi, A, (1959). On random graphs, *I Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **6**, 290–297.
- Mariadassou, M., Robin, S. et Vacher, C, (2010). Uncovering latent structure in valued graphs: a variational approach, *Ann. Appl. Stat.*, **4**, 715–42.
- Nowicki, K. et Snijders, T.A.B., (2001). Estimation and prediction for stochastic block-structures, *JASA*, **96**, 1077–87.
- Wasserman, S. et Pattison, P. (1996)., Logit models and logistic regressions for social networks: I. An introduction to Markov graphs andp",*Psychometrika*, **61**, 401–425.