Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана» (национальный исследовательский университет)

Дисциплина: «Анализ алгоритмов» Отчет по лабораторной работе №6

> Тема работы: «Задача коммивояжера. Муравьиный алгоритм»

> > Студент: Васюков А. В.

Группа: ИУ7-52Б

Преподаватели: Волкова Л. Л.,

Строганов Ю. В.

Содержание

B	веде	ние	3
1	Ана	алитический раздел	4
	1.1	Описание алгоритмов	4
		1.1.1 Муравьиный алгоритм	4
	Выв	воды	5
2	Koi	нструкторский раздел	6
	2.1	Разработка алгоритмов	6
	Выв	воды	6
3	Tex	нологический раздел	8
	3.1	Требования к программному обеспечению	8
	3.2	Средства реализации	8
	3.3	Листинг программы	9
	3.4	Тестовые данные	12
	Выв	воды	14
4	Исс	следовательский раздел	15
	4.1	Примеры работы	15
	4.2	Постановка эксперимента	16
	4.3	Сравнительный анализ на основе эксперимента	16
		4.3.1 Сравнение времени работы	16
		4.3.2 Параметризация в муравьином алгоритме	16
	Выв	воды	20
За	аклю	эчение	24
\mathbf{C}_{1}	писо	к литературы	25

Введение

Задача коммивояжера занимает особое место в комбинаторной оптимизации и исследовании операций. Она формулируется как задача поиска минимального по стоимости замкнутого маршрута по всем вершинам без повторений на полном взвешенном графе. Содержательно вершины графа являются городами, которые должен посетить коммивояжер, а веса ребер отражают расстояния (длины) или стоимости проезда. Эта задача является NP-трудной, и точный переборный алгоритм её решения имеет факториальную сложность. [4]

Решение данной задачи важно в первую очередь для крупных транспортных компаний, которые стремятся оптимизировать перевозки и минимизировать расходы. [5]

Особый интерес представляет муравьиный алгоритм, способный эффективно находить приближенное решение задачи коммивояжера.

Цель лабораторной работы: изучение подходов к решению задачи коммивояжера на материале алгоритма полного перебора и муравьиного алгоритма.

Задачи работы:

- 1) изучить муравьиный алгоритм;
- 2) применить метод динамического программирования для реализации муравьиного алгоритма и полного перебора;
- 3) экспериментально подтвердить различия во временной эффективности алгоритмов при помощи разработанного программного обеспечения на материале замеров процессорного времени;
- 4) провести параметризацию муравьиного алгоритма;
- 5) описать и обосновать полученные результаты в отчете о лабораторной работе, выполненного как расчётно-пояснительная записка.

1 Аналитический раздел

В данном разделе будет рассмотрен муравьиный алгоритм.

1.1 Описание алгоритмов

1.1.1 Муравьиный алгоритм

Идея муравьиного алгоритма — моделирование поведения муравьёв, связанного с их способностью быстро находить кратчайший путь от муравейника к источнику пищи и адаптироваться к изменяющимся условиям, находя новый кратчайший путь. При своём движении муравей метит путь феромоном, и эта информация используется другими муравьями для выбора пути. Это элементарное правило поведения и определяет способность муравьёв находить новый путь, если старый оказывается недоступным. [1]

У муравья есть 3 чувства:

- 1. Обоняние муравей чует феромон и его концентрацию на ребре.
- 2. Зрение муравей оценивает длину ребра.
- 3. Память муравей запоминает посещенные города.

При старте матрица феромонов au инициализируется равномерно некоторой константой.

Если муравей k находится в городе i и выбирает куда пойти, то делает это по вероятностному правилу:

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}(t)^{\alpha} \eta_{ij}^{\beta}}{\sum_{q=1}^{m} \tau_{iq}(t)^{\alpha} \eta_{iq}^{\beta}}, & \text{если j не посещен,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$
(1)

где

 α,β — весовые коэффициенты, которые задают важность феромона и привлекательность ребра, $\alpha+\beta=const,$

 $\eta_{iq} = \frac{1}{d_{ij}}$ – привлекательность ребра (города), d_{ij} – длина ребра.

Кроме того, надо учитывать изменение феромона по формуле 2:

$$\tau(t+1) = \tau_{ij}(t) \cdot (1-\rho) + \sum_{k=1}^{n} \Delta \tau_{k,ij}(t),$$
 (2)

$$\Delta au_{k,ij}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k}, & \text{если ребро } ij \text{ в маршруте,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$
 (3)

где

 L_k – длина маршрута k-ого муравья,

ho – коэффициент испарения феромона,

Q – нормировочная константа порядка длины наилучшего маршрута.

Выводы

Рассмотрен муравьиный алгоритм, выделены ключевые моменты его работы.

2 Конструкторский раздел

В разделе приводится псевдокод муравьиного алгоритма.

2.1 Разработка алгоритмов

Псевдокод муравьиного алгоритма для решения задачи коммивряжера:

- 1. Ввод матрицы расстояний D
- 2. Инициализация рёбер присвоение видимости η_{ij} и начальной концентрации феромона
- 3. Размещение муравьёв в случайно выбранные города без совпадений
- 4. Выбор начального кратчайшего маршрута и определение L^st
- 5. Цикл по времени жизни колонии t=1,tmax
- 6. Цикл по всем муравьям k=1, m
- 7. Построить маршрут $T_k(t)$ по правилу (1)
- 8. Рассчитать длину $L_k(t)$
- 9. Конец цикла по муравьям
- 10. Проверка всех $L_k(t)$ на лучшее решение по сравнению с L*
- 11. В случае если решение $L_k(t)$ лучше, обновить L st и T st
- 12. Цикл по всем рёбрам графа
- 13. Обновить следы феромона на ребре согласно (2), (3)
- 14. Конец цикла по рёбрам
- 15. Конец цикла по времени
- 16. Вывести кратчайший маршрут Tst и его длину Lst

На рис. 1-2 приведена функциональная схема муравьиного алгоритма.

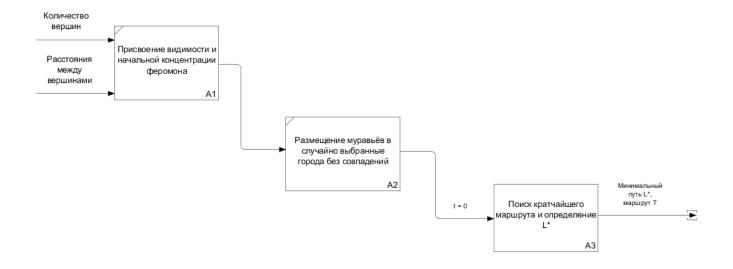


Рис. 1: Муравьиный алгоритм для решения задачи коммивояжера

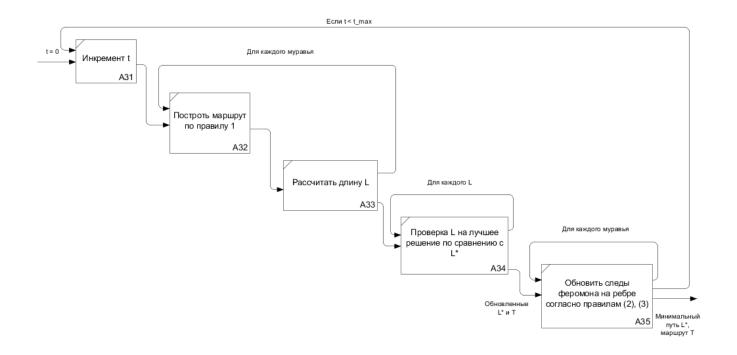


Рис. 2: Главный цикл муравьиного алгоритма

Выводы

В разделе представлен пошаговый разбор муравьиного алгоритма для решения задачи коммивояжера.

3 Технологический раздел

Здесь описываются требования к программному обеспечению и средства реализации, приводятся листинги программы и тестовые данные.

3.1 Требования к программному обеспечению

Входные данные:

- количество вершин (целое число, большее 2),
- расстояния между вершинами (положительные вещественные числа).

Выходные данные: длины кратчайшего пути, маршруты, найденные полным перебором и муравьиным алгоритмом.

Примечания:

- программа должна обрабатывать некорректный ввод, выводить сообщение об ошибке.
- заданы параметры $\alpha = 0.5, \rho = 0.5, t = 300, q = 100.$

На рис. 3 приведена функциональная схема программы решения задачи коммивояжера.

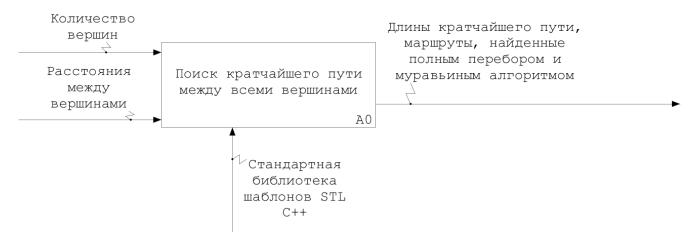


Рис. 3: Функциональная схема программы решения задачи коммивояжера

3.2 Средства реализации

Программа написана на языке C++ (стандарт C++17), который предоставляет программисту мощные инструменты для реализации различных алгоритмов и является достаточно надежным и эффективным. Для написания

использовался редактор исходного кода $Visual\ Studio\ Code$, для сборки проекта применена система автоматизации $CMake\$ (флаги компиляции -std=c++17-Wall-Werror-pedantic).

Для хранения массива применяется контейнерный класс std::vector из стандартной библиотеки шаблонов STL.

Замер времени выполнения программы производится с помощью библиотеки *chrono*, функционал которой позволяет подсчитывать процессорное время в тиках, а затем конвертировать полученный результат в реальное время.

3.3 Листинг программы

Реализованная программа представлена в листингах 1-2.

Листинг 1: Реализация полного перебора для решения задачи коммивояжера

```
double total search(Matrix matrix, std::vector<int> &way) {
      int n = matrix size();
2
      double min len = -1;
3
      std :: vector < int > p(n); // permutation
      for (int i = 0; i < n; ++i) {
7
           p[i] = i;
      }
9
      do {
10
           int len = 0;
11
12
           for (int i = 0; i < n - 1; ++i) {
13
               len += matrix[p[i]][p[i + 1]];
14
15
16
           len += matrix[p[n - 1]][p[0]];
17
           if (len < min len || min len < 0) {
18
               min len = len;
19
               for (int i = 0; i < n; ++i) {
                    way[i] = p[i];
21
22
23
      } while(std::next permutation(p.begin(), p.end()));
24
25
      return min len;
^{26}
27
```

Листинг 2: Реализация муравьиного алгоритма для решения задачи коммивояжера

```
for (int i = 0; i < size; ++i) {
8
           if (to == ant[i]) {
9
                return 0;
10
           }
11
      }
12
13
       double sum = 0.0;
14
       int from = ant[size - 1];
15
16
       for (int j = 0; j < n; ++j) {
17
           bool flag = true;
18
19
           for (int i = 0; i < size; ++i) {
20
                if (j == ant[i]) {
21
                    flag = false;
22
23
           }
^{24}
^{25}
           if (flag) {
26
               sum +=
27
                    pow(pheromone[from][j], alpha) * pow(dist[from][j], betta);
28
           }
29
      }
30
31
^{32}
       return
           pow(pheromone[from][to], alpha) * pow(dist[from][to], betta) / sum;
33
34
35
  double aco(Matrix matrix, std::vector<int> &way,
       double alpha, double rho, int t max) {
37
       double betta = 1 - alpha;
38
       int n = matrix.size();
39
       int m = n;
40
       double min len = -1;
41
42
       Matrix dist(n, std::vector<double>(n));
43
       Matrix pheromone(n, std::vector<double>(n, 1.0 / n));
44
45
       for (int i = 0; i < n; ++i) {
^{46}
           for (int j = 0; j < n; ++j) {
47
                if (i != j) {
^{48}
                    dist[i][j] = 1.0 / matrix[i][j];
49
                }
50
           }
51
      }
52
53
       std::vector<std::vector<int>> ants(m, std::vector<math><int>(n, -1));
54
       std::vector<int> starts(n);
55
       for (int i = 0; i < n; ++i) {
56
           starts[i] = i;
57
      }
58
      for (int i = 0; i < m; ++i) {
60
           if (0 == i \% n) {
61
                std::shuffle(starts.begin(), starts.end(), g);
62
```

```
}
63
64
            ants[i][0] = starts[i \% n];
65
       }
66
       std::vector<double> len(m, 0);
68
69
       for (int t = 0; t < t_max; ++t) {
70
            for (int k = 0; k < m; ++k) {
71
                for (int i = 1; i < n; ++i) {
72
                     int j max = -1;
73
                     double p max = 0.0;
74
75
                     for (int j = 0; j < n; ++j) {
76
                         if (ants[k][i-1] != j) {
77
                              double p = probability(
78
                                  j, i, n, ants[k], pheromone, dist, alpha, betta
79
                              );
80
                              if (p \&\& p >= p_max) {
81
82
                                  p max = p;
                                  j max = j;
83
                              }
84
                         }
85
                     }
86
87
                     len[k] += matrix[ants[k][i - 1]][j_max];
88
                     if (i == n - 1) {
89
                         len[k] += matrix[j max][ants[k][0]];
90
91
92
                     ants[k][i] = j max;
93
                }
94
95
                for (int i = 0; i < n; ++i) {
                     int from = ants[k][i \% n];
97
                     int to = ants[k][(i + 1) % n];
98
99
                     pheromone[from][to] += Q / len[k];
100
                     pheromone[to][from] = pheromone[from][to];
101
                }
102
103
                if (len[k] < min len || min len < 0) {
104
                     min_len = len[k];
105
                     for (int i = 0; i < n; ++i) {
106
                         way[i] = ants[k][i];
107
108
                }
109
110
                len[k] = 0;
111
           }
112
113
            for (int i = 0; i < n; ++i) {
114
                for (int j = 0; j < n; ++j) {
115
                     if (i != j) {
116
117
                         pheromone[i][j] *= (1 - rho);
```

3.4 Тестовые данные

Тестирование полного перебора производится на следующих матрицах размерностью $10\ (i$ – номер строки, j – номер столбца):

1. Путь: $(1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10)$ Минимальная длина: 10

Таблица 1: Матрица 1

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	0	1	3	4	5	6	7	8	9
3	3	2	0	1	4	5	6	7	8	9
4	2	3	4	0	1	5	6	7	8	9
5	5	2	3	4	0	1	6	7	8	9
6	6	2	3	4	5	0	1	7	8	9
7	7	2	3	4	5	6	0	1	8	9
8	8	2	3	4	5	6	7	0	1	9
9	9	2	3	4	5	6	7	8	0	1
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

2. Путь: $(1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8 \to 10 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9)$ Минимальная длина: 13

Таблица 2: Матрица 2

j i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	2	1	3	4	5	6	7	8	9
2	2	0	3	1	4	5	6	7	8	9
3	3	2	0	4	1	5	6	7	8	9
4	2	3	4	0	5	1	6	7	8	9
5	5	2	3	4	0	6	1	7	8	9
6	6	2	3	4	5	0	7	1	8	9
7	7	7	3	4	5	6	0	8	1	9
8	8	2	3	4	5	6	7	0	9	1
9	1	2	3	4	5	6	7	8	0	9
10	9	2	3	4	5	6	7	8	1	0

3. Путь: $(1 \to 10 \to 2 \to 9 \to 3 \to 8 \to 4 \to 7 \to 5 \to 6)$ Минимальная длина: 10

Таблица 3: Матрица 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	9	2	3	4	5	6	7	8	1
2	2	0	9	3	4	5	6	7	1	9
3	3	2	0	9	4	5	6	1	8	9
4	2	3	4	0	9	5	1	7	8	9
5	5	2	3	4	0	1	6	7	8	9
6	1	2	3	4	5	0	9	7	8	9
7	7	2	3	4	1	6	0	9	8	9
8	8	2	3	1	5	6	7	0	9	9
9	9	2	1	4	5	6	7	8	0	9
10	9	1	3	4	5	6	7	8	9	0

4. Путь: $(1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 10 \to 9 \to 8 \to 7 \to 6)$ Минимальная длина: 10

Таблица 4: Матрица 4

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	0	1	3	4	5	6	7	8	9
3	3	2	0	1	4	5	6	7	8	9
4	2	3	4	0	1	5	6	7	8	9
5	5	2	3	4	0	9	6	7	8	1
6	1	2	3	4	5	0	9	7	8	9
7	7	2	3	4	5	1	0	9	8	9
8	8	2	3	4	5	6	1	0	9	9
9	9	2	3	4	5	6	7	1	0	9
10	9	2	3	4	5	6	7	8	1	0

5. Путь:
$$(1 \to 10 \to 9 \to 8 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2)$$

Минимальная длина: 10

Таблица 5: Матрица 5

i j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	9	2	3	4	5	6	7	8	1
2	1	0	9	3	4	5	6	7	8	9
3	3	1	0	9	4	5	6	7	8	9
4	2	3	1	0	9	5	6	7	8	9
5	5	2	3	1	0	9	6	7	8	9
6	6	2	3	4	1	0	9	7	8	9
7	7	2	3	4	5	1	0	9	8	9
8	8	2	3	4	5	6	1	0	9	9
9	9	2	3	4	5	6	7	1	0	9
10	9	2	3	4	5	6	7	8	1	0

Выводы

В данном разделе были рассмотрены требования к программному обеспечению, обоснован выбор средств реализации, приведены листинги программы и тестовые данные. Все заявленные тесты успешно пройдены полным перебором.

4 Исследовательский раздел

В разделе представлены примеры выполнения программы, результаты сравнения алгоритмов решения задачи коммивояжера, а также исследование эффективности поиска муравьиным алгоритмом при различных параметрах.

4.1 Примеры работы

На рис. 4-5 приведены примеры работы программы.

```
Input number of vertices : -1
Incorrect input!
Input number of vertices : abc
Incorrect input!
Input number of vertices : 2
Incorrect input!
Input number of vertices : 3
Input distances :
(1 -> 2) : -100
Incorrect input!
```

Рис. 4: Обработка некорректного ввода

```
Input number of vertices : 3
Input distances :
(1 \rightarrow 2) : 1
 1 -> 3 ) : 5
 2 -> 1 ) : 5
 2 -> 3 ) : 1
 3 \to 1): 1
 3 -> 2 ) : 5
   -----
TOTAL SEARCH
Way length : 3
Way: (1 -> 2 -> 3)
_____
ACO
Way length : 3
Way: (3 -> 1 -> 2)
```

Рис. 5: Пример корректной работы

4.2 Постановка эксперимента

- 1. Сравнить время работы полного перебора и муравьиного алгоритма на 5 матрицах размерностью 10, для получения более точного результата про- извести вычисления над каждой матрицей 10 раз. Параметры: $\alpha=0.5, \rho=0.5, t=300, q=100.$
- 2. Выяснить при каких параметрах $\alpha \in [0;1]$, $\rho \in (0;1]$, $t \in [10;200]$, где $\alpha, \rho \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{N}$ муравьиный алгоритм будет работать лучше. При этом значения α и ρ меняются с шагом 0.1, t-c шагом 10.

4.3 Сравнительный анализ на основе эксперимента

4.3.1 Сравнение времени работы

Замеры произведены на 4-ядерном процессоре $Intel\ Core\ i5-8250\ U$ с тактовой частотой 1,8 $\Gamma\Gamma$ ц, оперативная память — 8 Γ Б.

Экспериментально получена таблица сравнения времени (табл. 6, время в секундах (с)):

Таблица 6: Сравнение времени выполнения алгоритмов решения задачи коммивояжера

Матрица	Перебор, с	Муравьи, с
1	1,39128	0,404246
2	1,37277	0,538537
3	1,36178	0,673532
4	1,36118	0,80861
5	1,35346	0,942806

Видно, что как и ожидалось, муравьиный алгоритм быстрее решает поставленную задачу— на экспериментальных данных в среднем затрачено в 2 раза меньше времени, чем при полном переборе.

4.3.2 Параметризация в муравьином алгоритме

Для проведения параметризации в процессе случайной генерации получены 5 матриц размерностью 10, элементы матрицы находятся в диапазоне от 0 до 100 и кратны 10.

1. Путь:
$$(1 \to 8 \to 3 \to 10 \to 2 \to 5 \to 6 \to 4 \to 7 \to 9)$$

Минимальная длина: 130

2. Путь: $(1 \to 7 \to 3 \to 5 \to 9 \to 10 \to 8 \to 4 \to 6 \to 2)$ Минимальная длина: 170

3. Путь: $(1 \to 7 \to 3 \to 4 \to 6 \to 5 \to 9 \to 2 \to 8 \to 10)$ Минимальная длина: 180

4. Путь: $(1 \to 3 \to 2 \to 8 \to 5 \to 6 \to 10 \to 4 \to 9 \to 7)$ Минимальная длина: 110

5. Путь:
$$(1 \to 3 \to 4 \to 10 \to 7 \to 8 \to 2 \to 6 \to 9 \to 5)$$

Минимальная длина: 160

В таблице 7 приведен пример соответствия параметров с полученными результатами для матрицы 1.

Для остальных матриц получены соответствующие таблицы. Тем не менее, гораздо удобнее анализировать результаты в графическом виде. На рис. 6-10 приводятся графики соответствия ответов при различных параметрах α , ρ , t.

Таблица 7: Параметризация на матрице 1

№	α	ρ	t	Ответ	Муравьи
0	0.0	0.1	10	130	190
1	0.0	0.1	20	130	190
2	0.0	0.1	30	130	190
3	0.0	0.1	40	130	190
4	0.0	0.1	50	130	190
5	0.0	0.1	60	130	190
360	0.1	0.9	10	130	170
361	0.1	0.9	20	130	170
362	0.1	0.9	30	130	160
363	0.1	0.9	40	130	160
364	0.1	0.9	50	130	160
365	0.1	0.9	60	130	170
806	0.4	0.1	70	130	160
807	0.4	0.1	80	130	150
808	0.4	0.1	90	130	150
809	0.4	0.1	100	130	170
810	0.4	0.1	110	130	150
1517	0.7	0.6	180	130	190
1518	0.7	0.6	190	130	190
1519	0.7	0.6	200	130	190
1520	0.7	0.7	10	130	190
1521	0.7	0.7	20	130	190
1522	0.7	0.7	30	130	190
2195	1.0	1.0	160	130	270
2196	1.0	1.0	170	130	300
2197	1.0	1.0	180	130	270
2198	1.0	1.0	190	130	280
2199	1.0	1.0	200	130	280

Значения α , ρ , t, на которых муравьиный алгоритм показал приемлемый результат для всех 5 выбранных матриц, представлены в таблице 8.

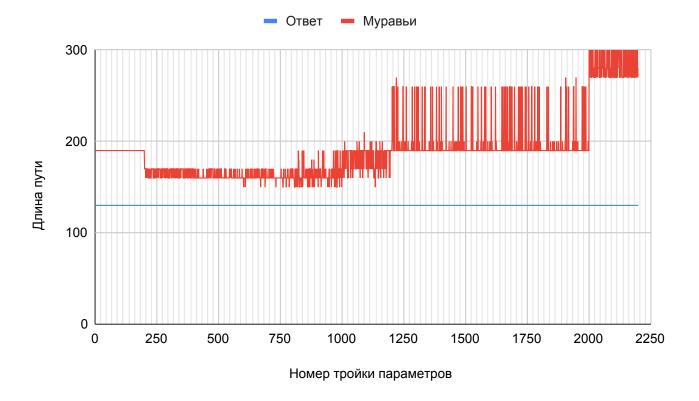


Рис. 6: Параметризация на матрице 1

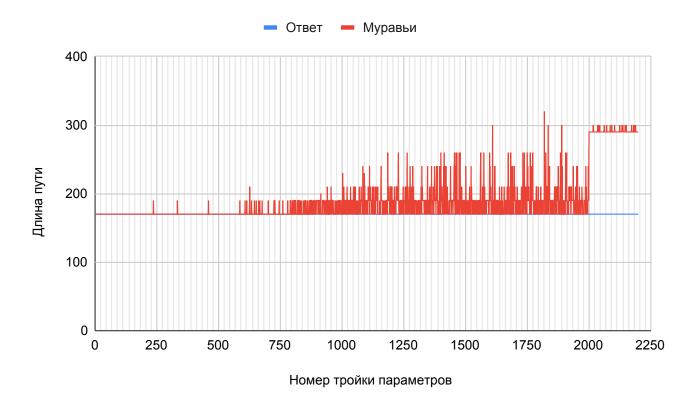


Рис. 7: Параметризация на матрице 2

Выводы

Можно заметить, что хорошие результаты получены при $\alpha \in [0,1;0,4]$ в сочетании с $\rho \in (0;1]$ и $t \in \{50;150;200\}$. Однако, стоит учесть, что для других

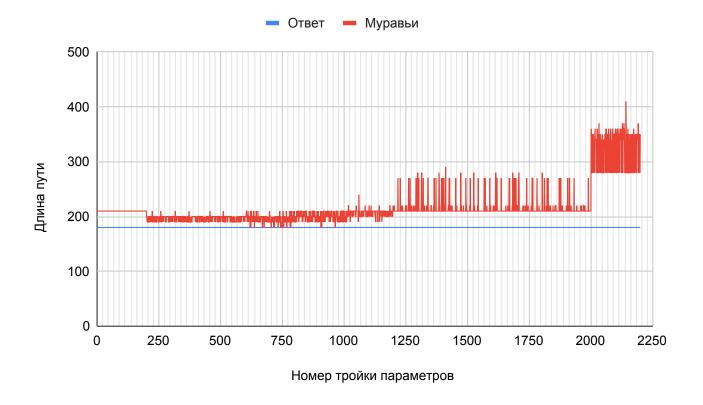


Рис. 8: Параметризация на матрице 3

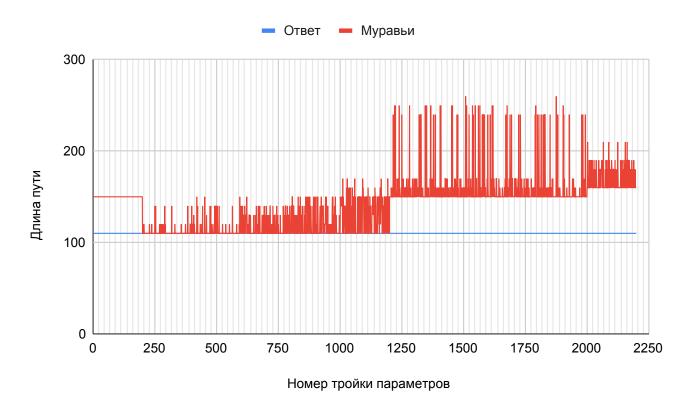


Рис. 9: Параметризация на матрице 4

классов задач параметры могут иметь совсем не такие значения. Для каждого отдельного случая необходимо проводить параметризацию.



Рис. 10: Параметризация на матрице 5

Таблица 8: Результаты параметризации

α	ρ	t
0.1	0.1	60
0.1	0.2	50
0.1	0.2	180
0.1	0.3	170
0.1	0.9	50
0.1	0.9	150
0.1	0.9	190
0.2	0.2	80
0.2	0.2	200
0.2	0.3	60
0.2	0.3	140
0.2	0.4	190
0.2	0.5	90
0.2	0.5	100
0.2	0.6	90
0.2	0.6	140
0.2	0.6	200
0.2	0.7	10
0.2	0.7	190
0.2	0.8	60
0.2	0.8	180
0.2	0.9	190
0.2	0.9	200
0.3	0.1	140
0.3	0.3	10
0.3	0.9	160
0.3	1.0	110
0.4	0.1	60
0.4	0.1	160
0.4	0.3	110
0.4	0.5	40
0.4	0.6	160
0.4	0.8	60
0.4	1.0	70

Заключение

В работе экспериментально подтверждена эффективность муравьиного алгоритма в сравнении с точным перебором всех маршрутов (на матрицах размерностью 10 быстрее в 2 раза). Также проведена параметризация вероятностного алгоритма муравья. Результаты свидетельствуют, что при $\alpha \in [0,1;0,4]$ в сочетании с $\rho \in (0;1]$ и $t \in \{50;150;200\}$ получаются приемлемые результаты на случайных матрицах размерностью 10. Тем не менее, стоит учесть, что для других классов задач параметры могут иметь совсем не такие значения. Для каждого отдельного случая необходимо проводить новую параметризацию.

Список литературы

- [1] Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы // Exponenta Pro. Математика в приложениях, 2003, №4, с.70-75
- [2] Дж. Макконнелл. Анализ алгоритмов. Активный обучающий подход.- М.:Техносфера, 2009.
- [3] Д. Кнут. Искусство программирования, М., Мир, 1978
- [4] Задача коммивояжера [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/OR-MMF/TSPr.pdf, свободный – (02.12.2019)
- [5] Практическое применение алгоритма решения задачи коммивояжера [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/prakticheskoe-primenenie-algoritma-resheniya-zadachi-kommivoyazhera/, свободный (01.12.2019)
- [6] Алгоритмы муравья [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.berkut.mk.ua/download/pdfsmyk/algorMurav.pdf, свободный (24.11.2019)
- [7] Оптимизация методом колонии муравьев [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://habr.com/ru/post/163887/, свободный (28.11.2019)