Математический анализ, лекция

Салихов Тимур, группа М8О-112Б-22, telegram: @dr_lightspeed

30.03.2023

Признак сравнения

Теорема (предельная форма признака сравнения):

Пусть $f, g[a, b) \to \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0,\ g(x) > 0$ и существует(возможно ∞) $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = K$

Тогда:

1)При $0 \leqslant k < +\infty$ из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$

2)При $0 < k \leqslant +\infty$ из расходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует расхождение $\int_a^b f(x)dx$

Если $f \sim g,\ x \to b$, то интегралы сходятся или расходятся одновременно

Доказательство:

1)$0 \leqslant k < +\infty\ \Rightarrow$ для $\epsilon = 1\ \exists \delta_k > 0$:

$$\forall x,\ x \in [a, b) \cap (b - \delta_\epsilon, b) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < 1 \Rightarrow f(x) < (k+1)g(x)\ (k + 1 - const) \Rightarrow$$

$$f = O(g),\ x \to b \Rightarrow \text{По признаку сравнения, если } \int_a^b g(x)dx \text{сходится, то } \int_a^b f(x)dx \text{ сходится}$$

2)Пусть $0 < k \leqslant +\infty$

а) $k < +\infty \Rightarrow$ для $\epsilon = \frac{k}{2}\ \exists \delta_\epsilon > 0$:

$$\forall x \in [a, b) \cap (b - \delta_\epsilon, b) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3k}{2} \Rightarrow g(x) < \frac{2}{k} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = O(f),\ x \to b \Rightarrow \text{ если } \int_a^b g(x)dx \text{ расходится } \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ расходится}$$

(То есть, если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то по признаку сравнения $\int_a^b g(x)dx$ сходится)

б)$k = +\infty,\ \epsilon = 1$ Д/з (:-( ) ■

Абсолютная и условная сходимость

Пусть $f:[a,b)\to\mathbb{R},\ f\in R[a,\eta],\ \forall\eta\in[a,b),\ \lim\limits_{x\to b-} f(x)=\infty$, если $b<+\infty$

Определение: $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$ и условно сходящимся, если $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится, а $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Теорема: Если $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится

Доказательство:

$$F(\eta)=\int_a^\eta f(x)dx \text{ сходится } \iff \exists\lim_{\eta\to b}F(\eta) \iff \text{ по критерию Коши } \iff$$

$$\iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists\eta_\varepsilon\in[a,b):\forall\eta',\ \eta''\in(\eta_\varepsilon,b)\Rightarrow|F(\eta')-F(\eta'')|<\varepsilon \iff$$

$$\iff \Big|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\Big|<\varepsilon \quad \Big(F(\eta')-F(\eta'')=\int_a^{\eta'} f(x)dx-\int_a^{\eta''} f(x)dx=\int_a^{\eta'} f(x)dx+\int_{\eta''}^a f(x)dx=$$

$$=\int_{\eta''}^{\eta'} f(x)dx=-\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\Big)$$

$\to$ Пусть $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится $\iff$ $\forall\varepsilon>0\exists\eta_\varepsilon\in[a,b):\forall\eta',\ \eta''\in(\eta_\varepsilon,b)\ \Big|\int_{\eta'}^{\eta''}|f(x)|dx\Big|<\varepsilon\Rightarrow$

$$\Big|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\Big|\leqslant\Big|\int_{\eta'}^{\eta''}|f(x)|dx\Big|<\varepsilon\Rightarrow\int_a^b f(x)dx \text{ сходится} \qquad \blacksquare$$

Теорема (признак Дирихле):

Пусть дан несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ и

1)$f(x)$ - непрерывна и имеет ограниченную на $[a,b)$ первообразную $F(x)$

2)$g(x)$ - непрерывна дифференцируема, монотонна и $\lim\limits_{x\to b} g(x)=0$

Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство:

Пусть $\eta\in[a,b)$. По формуле интегрирования по частям

$$\int_a^\eta f(x)g(x)dx=F(x)g(x)\Big|_a^\eta-\int_a^\eta F(x)g'(x)dx$$

$$\lim_{\eta\to b} F(\eta)g(\eta)=0$$

Так как $F(x)$ ограничено $\Rightarrow \exists M>0 : |F(x)| \leqslant M,\ \forall x\in[a,b)$

$g(x)$ - монотонна $\Rightarrow g'(x)\leqslant 0$ или $g'(x)\geqslant 0$ на $[a,b) \to \int_a^\eta |F(x)g'(x)|dx = \int_a^\eta |F(x)||g'(x)|dx \leqslant$

$$\leqslant \int_a^\eta M|g'(x)|dx = M\int_a^\eta g'(x)dx \text{ (Пусть } g'(x)\geqslant 0) \Rightarrow M(g(\eta)-g(a)) \leqslant\ M(-g(a)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^\eta |F(x)g'(x)|dx \text{ ограничено} \Rightarrow \int_a^b |F(x)g'(x)|dx \text{ сходится} \Rightarrow \int_a^b F(x)g'(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\eta\to b}\int_a^\eta F(x)g'(x)dx \Rightarrow \exists \lim_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)g(x)dx \qquad \blacksquare$$

Теорема (признак Абеля):

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ и:

1)$f(x)$ непрерывно на $[a,b)$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходится

2)$g(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b)$, монотонна и ограничена

Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится

Доказательство:

Рассмотрим $\int_a^\eta f(x)g(x)dx$. Так как $f)$ непрерывно $\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ - первообразная $f(x)$ и $\exists \lim_{x\to b} F(x)$ так как $\int_a^b f(x)dx)$ сходится

Следовательно, $F(x)$ ограничено на $[a,b)$, то есть $\exists M>0 :\ |F(x)|\leqslant M,\ \forall x\in[a,b)$

$$\int_a^\eta f(x)g(x)dx = g(x)F(x)\Big|_a^\eta - \int_a^\eta F(x)g'(x)dx$$

$\lim_{\eta\to b} g(\eta)F(\eta)$ существует т.к. $\exists \lim_{\eta\to b} F(\eta)$ и $\exists \lim_{\eta\to b} g(\eta)$ т.к. $g(x)$ - монотонна и ограничена на $[a,b)$

$\int_a^\eta |F(x)g'(x)|dx \leqslant M\int_a^\eta |g'(x)|dx$. Пусть $g'(x)\geqslant 0,\ g$ ограничено на $[a,b) \Rightarrow \exists C>0 : |g(x)|\leqslant C$

$$\Rightarrow M(g(\eta)-g(a)) \leqslant M*2C$$

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|dx \text{ сходится} \Rightarrow \int_a^b F(x)g'(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \exists \lim_{\eta\to b}\int_a^\eta F(x)g'(x)dx \qquad \blacksquare$$