Линейная алгебра, лекция

Салихов Тимур, группа М8О-112Б-22, telegram: dr_lightspeed

23.03.2023

Благодарность Александре Кайдаловой за предоставленные материалы лекции

Отображения

а)**Инъективное** отображение, если $x_1 + x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

б)**Сюръективное** отображение, если $\forall g \in Y, \ \exists x \in X \qquad (y = f(x))$

в)**Биективное** отображение(взаимно однозначное) если оно инъективно и сюръектвно одновременно

$f(X) = \bigcup\limits_{x \in X} f(x)$ - полный образ

$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid y = f(x)\}$ - полный прообраз y

$|f^{-1}(y)| \geqslant 1 \iff$ сюръективно, $\forall y \in Y$

$|f^{-1}(y)| \leqslant 1 \iff$ инъективно, $\forall y \in Y$

$|f^{-1}(y)| = 1 \iff$ биективно, $\forall y \in Y$

Композиция отображений

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Z$

$\mathcal{E} * X \to X$ - тождественное, если $\mathcal{E}(x) = x$.

Пусть $f : X \to Y, \quad f^{-1} : Y \to X$ обратное для $f : f \circ f^{-1} = \mathcal{E}g, \quad f^{-1} \circ f = \mathcal{E}x$

$(AA^{-1}, \ A^{-1}A = E)$

***Теорема*(О взаимно однозначном отображении):**

Отображение f обратимо $\iff \quad f$ - биективно

Доказательство:

$\Rightarrow$ Пусть $\exists f^{-1} : Y \to X$. f сюръективно, так как $\forall y \in Y, \ \exists x = f^{-1}(y) : y = f(x)$;

$f(x_1) \neq f(x_2), \ (f^{-1} \circ f)(x) \neq (f^{-1} \circ f)(x2), \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f$ - инъективно $\Rightarrow f$ - биективно

$\Leftarrow$ Пусть f - биективно, тогда f - сюръективно $\Rightarrow \forall y \in Y, \ \exists! x \in X : \ y = f(x)$

Из-за инъективности $f^{-1}(y) = x$, где x - единственный элемент из X. $f(x) = y$

$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \Rightarrow f \circ f^{-1} = \mathcal{E}y$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathcal{E}x$

Линейное отображение

Определение: Пусть V и W - векторные пространства над одним и тем же числовым полем.

Отображение $A : V \to W$ называется **линейным**, если выполняются условия:

1)$A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ (аддитивность)

2)$A(\lambda v) = \lambda A(v)$ (однородность), λ - число

Следствия:

1)$A(O_v) = O_w$

2)$A(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k) = \alpha_1 A(v_1) + ... + \alpha_k A(v_k)$

Примеры:

0)$O : V \to W,\ O(v) = O_w$

1)$\mathcal{E} : V \to V$

2)$V_2 : R_\phi$ - поворот, Z_0 - центральная симметрия, H_λ - гомотетия, $H_\lambda(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

3)$D : P_n \to P_{n-1},\ D(p(x) = p'(x))$

4)$V\ e_1, ..., e_n$ - базис; $v = v_1 e_1 + ... + v_n e_n \xrightarrow{x} v_{(e)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ V \xrightarrow{x} \mathbb{R}^n$

Пусть $V = L_1 \oplus L_2$, тогда $\Pi_{L_1} : V \to L_1$ - отображение проекция на L_1 параллельно L_2,

$\Pi_{L_1}(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$

$Z_{L_1} : V \to V$ - отображение в L_1 параллельно L_2, $Z_{L_1}(v_1 + v_2) = v_1 - v_2$

Свойства линейных отображений

1)Если $v_1, ..., v_k$ линейно зависимы, то $A(v_1), ..., A(v_k)$ - линейно зависимы

$\exists \lambda_1, ..., \lambda_k :\ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = O_v\ \Rightarrow A(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = A(O_v)$

$\lambda_1 A(v_1) + ... + \lambda_k A(v_k) = O_w \Rightarrow$ линейно зависимы

Следствие 1 $A : V \to W$ сюръективно

$\forall$ ЛНЗ $w_1, ..., w_k,\ \exists$ ЛНЗ $v_1, ..., v_k : w_i = A(v_i),\ i = 1, ..., k$

$\exists w: \ \exists v_i: \ w_i = A(v_i), \ i = 1, ..., k$. Если $v_1, ..., v_k$ линейно зависимы, то $w_1, ..., w_k)$ - линейно зависимы - противоречие

Следствие 2 Если $A : V \to W$ сюръективно, то $\dim V \geqslant \dim W$

$w_1, ..., w_m$ - базис $W, \ \dim W = m \Rightarrow \exists v_1, ..., v_m$ - ЛНЗ в $V \Rightarrow \dim V \geqslant m$.