Математический анализ, лекция

Салихов Тимур, группа М8О-212Б-22, telegram: @salikhovtr

19.09.23

Теорема Фубини

Пролог:

$A \subset \mathbb{R}^n,\ B \subset \mathbb{R}^m$ - промежутки

$A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$ - промежуток в $\mathbb{R}^{n+m}$

Пусть $f : A \times B \to \mathbb{R}$. Определим функции $g_x : B \to \mathbb{R}$ и $g_y : B \to \mathbb{R}$ для $x \in A,\ y \in B$ равенстами:

$$g_x(y) = f(x, y), \forall y \in B;\ g_y(x) = f(x, y), \forall x \in A$$

Пусть $P_A = I_A$ - разбиение A

Пусть $P_B = I_B$ - разбиение B

$P = \{I_A \times I_B :\ I_A \in P_A,\ I_B \in P_B\}$ - разбиение $A \times B$

$J_*(x) = \lim\limits_{\lambda(P_B)\to 0} s(g_x, P_B)$ - нижний интеграл Дарбу функции g_x

$J^*(x) = \lim\limits_{\lambda(P_B)\to 0} S(g_x, P_B)$ - верхний интеграл Дарбу функции g_x

$J_*(y) = \lim\limits_{\lambda(P_A)\to 0} s(g_y, P_A)$ - нижний интеграл Дарбу функции g_y

$J^*(y) = \lim\limits_{\lambda(P_A)\to 0} S(g_y, P_A)$ - верхний интеграл Дарбу функции g_y

Теорема(Фубини): Если $f \in R(A \times B)$, то $J_*(x),\ J^*(x)$ интегрируемы на A и

$$\int_{A\times B} f(x, y)dxdy = \int_A J_*(x)dx = \int_A J^*(x)dx$$

аналогично для $J_*(y)$ и $J^*(y)$

Выводы из Фубини:

1

Пусть $\exists \int_B g_x(y)dy = \int_B f(x, y)dy \Rightarrow$ по критерию Дарбу $J_*(x) = \int_B g_x(y)dy \Rightarrow \int_{A\times B} f(x, y)dxdy = \int_A J_*(x)dx = \int_A \Big(\int_B g_x(y)dy\Big)dx = \int_A dx \int_B f(x, y)dy$

Аналогично, если $\exists \int_A g_y(x)dx = \int_A f(x, y)dx \Rightarrow \int_B dy \int_A f(x, y)dx$

2

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, где $E = \{(x, y) : x \in [a, b],\ \phi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$

Пусть $E \subset I^2 \Rightarrow$ если $I^2 = [a,b] \times [c,d]$

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{I^2} f(x,y)\chi_E(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\chi_E(x,y)dy =$$

$$\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

Если $E = \{(x,y) : y \in [c,d],\ \phi(y) \leqslant x \leqslant \psi(x)\}$, то

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$$

Если $E = \bigcup\limits_{j=1}^{m} E_j$, где E_j и $\mu(E_i \bigcap E_j) = 0,\ i \neq j$, то

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \sum_{j=1}^{m} \iint_{E_j} f(x,y)$$

3

$$f : E \to \mathbb{R}, E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \phi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{I^3} f(x,y,z)\chi_E(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iint_{I^2} dxdy \int_I f(x,y,z)\chi_E(x,y,z)dz = \iint_D dxdy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$$