Математический анализ, лекция

Салихов Тимур, группа М8О-212Б-22, telegram: @salikhovtr

26.09.23

Замена переменной в кратном итеграле.

Криволинейные интегралы 1 и 2 порядка

Теорема: Пусть $\phi : D \to G$, где $D \subset \mathbb{R}^n,\ G \subset \mathbb{R}^n$

$\phi(x_1, ..., x_n) = (\phi_1(x_1, ..., x_n), ..., \phi(x_1, ..., x_n))$, причем существуют (возможно $\emptyset$) множества $A_D \subset D,\ A_G \subset G,\ \mu(A_D) = \mu(A_G) = 0$, такие что

$\phi : D \backslash A_D \to G \backslash A_G$ - диффеоморфизм с ограниченной якобианом. Если $F : G \to \mathbb{R},\ F \in R(G)$, то $F \circ \phi \in R(D)$ и

$$\int ... \int_{G\backslash A_G} F(y_1, ..., y_n) dy_1 ... y_n = \int_{D\backslash A_D} ... \int F(\phi_1(x_1, ..., x_n), ..., \phi_n(x_1, ..., x_n)) \left| \frac{\partial(\phi_1 ... \phi_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} \right| dx_1 ... dx_n$$

$$\frac{\partial(\phi_1 ... \phi_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Виды координат:

① Обобщенные полярные координаты

$x = rcos\phi,\ y = rsin\phi$, где r - радиус вектора, ϕ - угол поворота вектора

② Обощенные циллиндрические координаты

$x = rcos\phi,\ y = rsin\phi,\ z = z$, где r - радиус вектора, ϕ - угол поворота вектора

③ Обобщенные сферические координаты

$x = rsin\theta cos\phi,\ y = rsin\theta sin\phi,\ z = rcos\theta$, где r - радиус вектора, ϕ - угол поворота проекции вектора на O_{xy}, θ - угол между вектором и осью z