Математический анализ, лекция

Салихов Тимур, группа М8О-112Б-22, telegram: dr_lightspeed

23.03.2023

Несобственный интеграл

Определние: Пусть $f : (a, b] \to \mathbb{R}, \quad -\infty \leqslant a < b < +\infty$

$f \in R[\eta, b], \quad \forall \eta \in (a, b]$ *and* $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty, \quad a > -\infty$

Несобственным интегралом от f по (a, b] называется $\lim_{\eta\to a} \int_\eta^b f(x)dx$. Если предел конечен, то интеграл называется сходящимся. В противном случае расходящимся.

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx$.

Определние: Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R},\ -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и $f \in R[\xi, \eta],\ \forall [\xi, \eta] \subset (a, b)$;

Если $a > -\infty$, то $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$

Если $b > +\infty$, то $\lim_{x\to b-} f(x) = \infty$

Несобственный интеграл от f по (a, b) определяется равенством:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ c \in (a, b)$$

Свойства несобственного интеграла

Пусть $f : [a, b) \to \mathbb{R},\ f \in R[a, \eta],\ \forall [a, \eta] \subset [a, b)$ и $\lim_{x\to b-} f(x) = \infty$, если $b < +\infty$

Теорема 1:(Необходимое условие сходимости)

Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то $\lim_{\eta\to b} \int_\eta^b f(x)dx = 0$

Доказательство:

$$\int_a^\eta f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\eta f(x)dx, \quad a < c < \eta$$

При $\eta \to b$, так как $\exists \lim_{\eta\to b} \int_a^\eta f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, то

$$\exists \lim_{\eta\to b} \int_c^\eta f(x)dx \ \Rightarrow \ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ \Rightarrow \ c \to b \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lim_{c\to b} \int_c^b f(x)dx \ \Rightarrow \ \lim_{c\to b} \int_c^b f(x)dx = 0 \quad \blacksquare$$

Теорема 2:(Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть F(x) - первообразная f(x) на [a, b). Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to b} F(\eta) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Интеграл сходится $\iff$ существует предел

Доказательство:

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^\eta f(x)dx = F(x)\Big|_a^\eta = F(\eta) - F(a) \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)dx \iff \exists \lim_{\eta \to b} F(\eta).$$

В этом случае при $\eta \to b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to b} F(\eta) - F(a) \quad \blacksquare$$

Теорема 3:(Формула интегрирования по частям)

Пусть u,v - непрерывно дифференцируемы на [a, b). Тогда:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \qquad (*)$$

Причем, из существования любых двух выражений в (*) следует существование третьего

Доказательство:

По формуле интегрирования по частям

$$\int_a^\eta u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^\eta - \int_a^\eta u'(x)v(x)dx \qquad (**)$$

При $\eta \to b$ (по свойству пределов) из существования пределов любых двух выражений в (**) следует существование третьего и равенство (*) $\blacksquare$

Теорема 4:(Формула замены переменной)

Пусть $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывна, а $\phi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ непрерывно дифференцируема и

$\lim_{t\to\beta}\phi(t)=b; \phi(\alpha)=a$. Тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) * \phi'(t)dt = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Причем, из сходимости левого(правого) интеграла следует сходимость правого(левого).

Доказательство:

По формуле замены в определенном интеграле $\phi : [\alpha, \eta] \to [a, \phi(\eta)]$ и

$$\int_{\alpha}^{\eta} f(\phi(t)) * \phi'(t)dt = \int_{a}^{\phi(\eta)} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\text{при } \eta \to \beta \text{ т.к. } \phi(\eta) \to b \Rightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) * \phi'(t)dt = \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad \blacksquare$$

Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a, b),\ f \in R[a, \eta],\ \forall [a, \eta] \subset [a, b),\ \lim_{x\to b} f(x) = \infty$, если $b < +\infty$

Теорема 1:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \quad \text{сходится} \iff \exists M > 0 : \int_{a}^{eta} f(x)dx \leqslant M,\ \forall \eta \in [a, b)]$$

Доказательство:

$F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$. Сходимость интеграла - это $\lim_{\eta\to b} F(\eta)$. Пусть $\eta' < \eta'' \Rightarrow$

$$F(\eta'') = \int_{a}^{\eta''} f(x)dx = \int_{a}^{\eta'} f(x)dx + \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \ \geqslant \int_{a}^{\eta'} f(x)dx = F(\eta') \Rightarrow F\text{-неубывающая на } [a, b)$$

По теореме о существовании предела монотоннной функции, $\lim_{\eta\to b} F(\eta)$ существует $\iff$ F ограничено, то есть $\exists M > 0 : |F(\eta)| = F(\eta) \leqslant M,\ \forall \eta \qquad \blacksquare$