# Математический анализ, лекция

Салихов Тимур, группа М8О-112Б-22, telegram: @dr_lightspeed

13.04.2023

# ***Метрические пространства компакты (Продолжение)***

***Определение***: Пусть $(X, \rho)$ - метрихческое пространство и $F \subset X$. Множество $F$ называется компактом в $X$, если для любой последовательности $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset F$ существует подпоследовательность $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ последовательности $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, которая имеет предел
$a = \lim\limits_{k \to \infty} x_{m_k} \in F$, принадлежащий $F$

***Теорема***:

Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ является компактом $\iff$ $F$ ограничено и замкнуто.

***Доказательство***: Пусть $F$ компакт. Предположим, что $F$ не ограничено. Тогда, для $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists x_m \in F,\ \rho(O, x_m) > m \Rightarrow \lim\limits_{m \to \infty} \rho(O, x_m) = +\infty \Rightarrow$ для любой подпоследовательности $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ будет $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(O, x_m) = +\infty$.
Но $F$ - компакт $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \ : \ \exists \lim_{k \to \infty} x_{m_k} = a \in F \Rightarrow \rho(O, x_{m_k}) \leqslant \rho(O, a) + \rho(a, x_{m_k}) \longrightarrow \rho(O, a) \Rightarrow$$

$$\lim_{k \to \infty} \rho(O, x_{m_k}) \leqslant \rho(O, a) < +\infty \text{ - противоречие}$$

Значит, $F$ - ограничено

Замкнутость: $F = \bar{F}$? Рассмотрим любую предельную току $a$ множества $F \Rightarrow$

$$\forall U_{\frac{1}{m}}(a) \quad \exists x_m \in F \cap U_{\frac{1}{m}}(a) \text{ то есть}$$

$$\rho(x_m, a) < \frac{1}{m} \Rightarrow \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, a) = 0$$

Тогда $\forall$ подпоследовательности $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} x_{m_k} \in F \Rightarrow F = \bar{F}$ Обратно: Пусть $F$ - ограничено и закнуто.

Возьмем $\forall \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset F \Rightarrow$ последовательность ограничена $\Rightarrow$ по теореме Больцано-Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}},\ \lim\limits_{k \to \infty} x_{m_k} = a \Rightarrow a$ - предельная точка $\Rightarrow$ так как $F$ замкнуто $\Rightarrow a \in F$ $\blacksquare$

***Определение***: Пусть $(X, \rho_x),\ (Y, \rho_y)$ - метрические пространства. $F \subset X,\ f : F \to Y$ и $x_0$ - предельная точка $F$. Точка $A \in Y$ называется пределом функции $f$ при $x \to x_0$ по $F$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap F \Rightarrow \rho_y(f(x), A) < \varepsilon$.

Обозначение:$A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in F}} f(x)$

***Определение***: Пусть $(X, \rho_x),\ (Y, \rho_y)$ - метрические пространства. $F \subset X,\ f : F \to Y$ и $x_0$ - предельная точка $F$. Функция $f$ называется непрерывной в $x_0$, если $\forall U_\varepsilon(f(x_0))$

$$\exists U_{\delta_\varepsilon}(x_0)\ :\ f(U_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap F) \subset U_\varepsilon(f(x_0)) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ :\ \forall x \in F,\ \rho_x(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_x(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad (\Rightarrow f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in F}} f(x))$$

# ***Свойства функций непрерывных на компактах***

***Теорема(Вейерштрасса)***:

Пусть $f : E \to \mathbb{R},\ E \subset \mathbb{R}^n$ - компакт. Тогда, если $f$ непрерывна на $E$, то $f$ - ограничено на $E$ и достигает на $E$ своих наименьшего и наибольшего значений.

***Доказательство***:

Пусть $M = \sup\limits_{x \in E} f(x) \leqslant +\infty$. Пусть $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ - числовая последовательность $y_m < M,\ \forall m$ и $\lim\limits_{m \to \infty} y_m = M$.

Так как $y_m < M \Rightarrow$ по определению $\sup\limits_{x \in E} f(x) \quad \exists x_m \in E :\ f(x_m) > y_m$ и $f(x_m) \leqslant M \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_m\}_{m \in E}$ - последовательность точек $E$. Но $E$ компакт $\Rightarrow \exists \{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ - сходящаяся подпоследовательность и $\lim\limits_{k \to \infty} x_{m_k} = a \in E$

Следовательно, $M \xleftarrow{k \to \infty} y_m < f(x_{m_k}) \leqslant M \Rightarrow \exists \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{m_k}) = M$.

Но $f$ - непрерывна $\Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{m_k}) = f(a) \Rightarrow f(a) = M \Rightarrow M < +\infty$ и $M$ достигается в $a$ $\blacksquare$

***Определение***: Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество $E$ называется линейно связным, если $\forall a, b \in E \quad \exists \varphi : [0, 1] \to E$, непрерывная: $\varphi(0) = a,\ \varphi(1) = b$.

***Теорема(Больцано-Коши)***: Пусть $E \subset \mathbb{R}^n,\ f : E \to \mathbb{R}$ - непрерывна и $E$ - линейно связное множество. Тогда, если $a,\ b \in E,\ A = f(a),\ B = f(b)$ и $C$ - любое число, лежащее между $A$ и $B$, то $\exists c \in E : f(c) = C$.

***<u>Доказательство</u>***:

$E$ - линейно связное $\exists \varphi : [0,1] \to E,\ \varphi(0) = a,\ \varphi(1) = b,\ \varphi$ - непрерывно $\Rightarrow f \circ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ - непрерывна, как сложная функция из двух непрерывных.

$A = f \circ \varphi(0),\ B = f \circ \varphi(1)$ и - лежит между $A$ и $B \Rightarrow$ по теореме Болтцано-Коши для отрезка $\Rightarrow \exists t^* \in [0,1] : f \circ \varphi(t^*) = C \Rightarrow c = \varphi(t^*)$ ■

***<u>Определение</u>***: Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ и $f : E \to \mathbb{R}$. Функция $f$ называется равномерно непрерывной на $E$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0\ :\ \forall x', x'' \in E,\ \rho(x', x'') < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

***<u>Теорема</u>(Кантора)***:

Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.

***<u>Доказательство</u>***:

$f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна и $E$ - компакт. Допустим, что $f$ не является равномерно непрерывной $\Rightarrow$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x'_\delta, x''_\delta \in E,\ \rho(x'\delta,\ x''_\delta) < \delta \Rightarrow |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$$

$$\text{Пусть } \delta_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x'_n, x''_n,\ \rho(x'_n,\ x''_n) < \frac{1}{n} \text{ и } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon$$

$$\text{Но } E \text{ - компакт} \Rightarrow \exists \{x'_{n_k}\},\ a = \lim_{k \to \infty} x'_{n_k} \in E$$

$$0 \leqslant \rho(x''_{n_k},\ a) \leqslant \rho(x''_{n_k},\ x'_{n_k}) + \rho(x'_{n_k},\ a) < \frac{1}{n_k} + \rho(x'_{n_k},\ a) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \rho(x''_{n_k},\ a) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = a$$

Итог:

$$1)\ |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon_\delta \quad \forall k$$

$$2)\ \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(a) = \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}).\ \text{Из непрерывности } f \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = a = \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lim_{k\to\infty} |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| = |f(a) - f(a)| = 0 \text{ - это противоречит пункту 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ равномерно непрерывно на } E \qquad ■$$

# ***Дифференциал функции*** $f : E \to \mathbb{R}^m, \ E \subset \mathbb{R}^n$

## ***Частные производные***

***Определение***: Пусть $E$ - линейное (конечномерное) пространство над $\mathbb{R}$. Нормой на $E$ называется функция $||\bullet||_E : E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям (аксиомы нормы):

1) $||x||_E \geqslant 0, \ \forall x \in E$ и $||x||_E = 0 \iff x = 0$

2) $||\lambda x||_E = |\lambda| * ||x||_E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E$

3) $||x + y||_E \leqslant ||x||_E + ||y||_E$

$E$ - линейное, нормированное пространство $\Rightarrow E$ - метрическое:

$$\rho(x, \ y) = ||x - y||_E$$

***Теорема***:

Пусть $A : E \to F$ - линейное отображение, где $E, \ F$ - линейные (конечномерные) нормированные пространства с нормами $||\bullet||_E, \ ||\bullet||_F$

Тогда $\exists c > 0$ :

$$||Ax||_F \leqslant C * ||x||_E, \ \forall x \in E \qquad Ax = A(x)$$