Математический анализ, лекция

Салихов Тимур, группа М8О-212Б-22, telegram: @salikhovtr

12.09.23

Кратные интегралы

Теорема: $\chi_E \in R(E) \iff \partial E$ - множество меры нуль

Определение: Ограниченное множество, граница которого - это множество меры нуль, называется измеримым по Жардану. Число $\mu(E) = \int_E dx$ называется мерой Жордана множества E

Свойства интеграла Римана

Теорема 1: $R(E)$ - линейное пространство (относительно сложения функции и умножения на число)

Теорема 2: Если $f \in R(E_1),\ f \in R(E_2)$, то $f \in R(E_1 \cup E_2)$
Если $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, то $\int_{E_1 \cup E_2} f(x)dx \ = \ \int_{E_1} f(x)dx \ + \ \int_{E_2} f(x)dx$

Теорема 3: Если $f \in R(E)$ и $\mu\{x : x \in E,\ f(x) \neq 0)\} = 0$, то $\int_E f(x)dx = 0$

Следствие: Если $\mu(E) = 0$ и $f \in R(E)$, то $\int_E f(x)dx = 0$

Следствие: Если $f, g \in R(E)$ и $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$, то $\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$

Теорема 4: Если $f \in R(E)$, то $|f| \in R(E)$ и $\left|\int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|dx$

Теорема 5: Если $f(x) \geqslant 0$ на E, $f \in R(E)$, то $\int_E f(x)dx \geqslant 0$

Теорема 6: Если $f, g \in R(E)$ и $f(x) \leqslant g(x),\ \forall x \in E$, то $\displaystyle\int_E f(x)dx \leqslant \int_E g(x)dx$

Теорема 7: (О среднем)

Пусть $f, g \in R(E),\ m \leqslant f(x) \leqslant M,\ \forall x \in E,\ g$ сохраняет знак на E. Тогда $\exists \lambda \in [m, M]:$

$$\int_E f(x)g(x)dx = \lambda \int_E g(x)dx$$

Следствие: Пусть E - линейно связный компакт, $f, g\ \in R(E),\ f$ непрерывно на E, g сохраняет знак на $E \Rightarrow \exists \xi \in E:\ \displaystyle\int_E f(x)g(x)dx = f(\xi) * \int_E g(x)dx$