Математический анализ, лекция

Салихов Тимур, группа М8О-112Б-22, telegram: @dr_lightspeed

06.04.2023

Метрические пространства компакты

Определение: Пара (X, ρ), где X - произвольное множество, $\rho : X * X \to \mathbb{R}$ $(X * X = \{(x, y) : x, y \in X\})$, удовлетворяет условиям(аксиомы метрики):

1)$\rho(x, y) \geqslant 0, \quad \forall x, y \in X;\ \rho(x, y) = 0 \iff x = y$

2)$\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in X$

3)$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad \forall x, y, z, \in X$ (аксиома треугольника)

называется метрическим пространством. Функция ρ называется метрикой, элементы X называются точками, $\rho(x, y)$ называется расстоянием между точками x и y

Важный пример метрического пространства:

$X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \{(x_1,\ ...,\ x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

Если $x = (x_1,\ ...\ , x_n), \quad y = (y_1,\ ...\ , y_n)$, то

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Докажем, что ρ - метрика

1)$\rho(x, y) \geqslant 0,\ \forall x, y$. Если $\rho(x, y) = 0 \iff x_i = y_i$, для $\forall i \iff x = y$

2)$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ очевидно

Леммочка(орфография автора сохрвнена):

Пусть $\quad a_1,\ ...\ , a_n, \quad b_1,\ ...\ , b_n \ \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \ * \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Доказательство:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t - b_i)^2 \geqslant 0$$

$$F(t) = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$\text{Так как } F(t) \geqslant 0,\ \forall t \iff \frac{D}{4} = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ *\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \qquad \blacksquare$$

Рассмотрим

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ +\ 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\ +\ \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant \Big(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\Big)^2\ + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\ +\ \Big(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\Big)^2 =$$

$$= \Big(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ +\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\Big)^2 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ +\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \qquad (*)$$

Пусть $x = (x_1,\ \dots x_n),\ y = (y_1,\ \dots\ , y_n) \in \mathbb{R}^n,\ z = (z_1,\ \dots\ , z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}((x_i - z_i) + (z_i - y_i))^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\ +\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_1)^2} =$$

$$= \rho(x,z) + \rho(z,y) \Rightarrow \rho \text{ метрика, а } (\mathbb{R},\rho) \text{ - метрическое пространство}$$

Примеры других метрик:

$\rho_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$\rho_3(x,y) = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$

Определение: Пусть (X,ρ) - метрическое пространство. Множество $U_\varepsilon(a) = \{x \in X : \rho(x,a) < \varepsilon\}$ называется открытым шаром радиуса ε с центром в a (ε - окрестность точки a).

Пример: $X = \mathbb{R}^2,\ U_\varepsilon(a)$ - круг с центром в точке a.

Определение: Пусть (X,ρ) - метрическое пространство. Множество $G \subset X$ называется открытым, если $\forall x \in G\ \exists U_\varepsilon(x) \subset G$

Определение: Пусть (X,ρ) - метрическое пространство и $Y \subset X$. Тогда y называется предельной точкой Y, если $\forall \varepsilon > 0$ множество $U_\varepsilon(y) \cap Y$ - бесконечное

Определение: Объединение множества Y и всех его предельных точек называется замыканием множества Y и обозначается $\overline{Y}$

Теорема: Множество замкнуто $\iff$ оно совпадает со своим замыканием

Доказательство:

Пусть Y замкнуто $\Rightarrow X \setminus Y$ открыто. По определению $Y \subset \overline{Y}$. Пусть y - предельная точка Y и допустим, что $y \notin Y$, то есть $y \in \overline{Y} \setminus Y \Rightarrow y \in X \setminus Y \Rightarrow \exists U_\varepsilon(y) \subset X \setminus Y \Rightarrow U_\varepsilon(y) \cap Y = \varnothing \Rightarrow y$ - не предельная точка Y - противоречие $\Rightarrow \overline{Y} = Y$.

Теперь пусть $Y = \overline{Y}$. Докажем, что Y замкнуто. Возьмем $y \in X \setminus Y \Rightarrow y \notin \overline{Y} \Rightarrow y$ - не предельная точка $Y \Rightarrow \exists U_\varepsilon(y) : U_\varepsilon(y) \cap Y$ - конечное или пустое. Пусть $U_\varepsilon(y) \cap Y = \{y_k\}_{k=1}^N$

$\delta = \underset{1 \leqslant k \leqslant N}{min} \rho(y, y_k) \Rightarrow U_\delta(y) \cap Y = \varnothing \Rightarrow U_delta(y) \subset X \setminus Y \Rightarrow X \setminus Y$ открыто $\Rightarrow Y$ замкнуто ■

Определение: Последовательность точек в (X, ρ) - это функция $f : \mathbb{N} \to X$.

Обозначим $x_n = f(n) \in X$, а саму последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Определение: Точка $a \in X$ называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, a) = 0$$

То есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \rho(x_n, a) < \varepsilon \iff x_n \in U_\varepsilon(a)$

Обозначение: $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Определение: Множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченым, если $\exists \varepsilon > 0 : Y \subset U_\varepsilon(o)$, где $o = (0, ..., 0)$

Теорема(Больцано - Вейерштрасса):

Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Доказательство:

Пусть $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ - последовательность, $x_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}) \in \mathbb{R}^n$

Допустим, что $a = (a_1, ..., a_n) = \lim_{m\to\infty} x_m \iff$

$$0 \leqslant |a_s - x_{ms}| \leqslant \rho(a, x_m) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - x_{mk})^2} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \Rightarrow a_s = \lim_{m\to\infty} x_{ms}$$

Верно и обратное, если $a_s = \lim\limits_{m\to\infty} x_{ms},\ \forall s$, то

$$\rho(a, x_{ms}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - x_{mk})^2} \leqslant \sqrt{\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k - x_{ms}|\Big)^2} = \sum_{k=1}^{n}|a_k - x_{mk}| \xrightarrow{m\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\rho(a, x_m) = 0$$

Итак, в $\mathbb{R}^n$ сходимость покоординатная, то есть $a = \lim\limits_{m\to\infty} x_m \iff a_k = \lim\limits_{m\to\infty} x_m k$

Пусть $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ограничено, то есть $\exists M > 0:$

$$|x_{mk}| \leqslant \rho(x_m, o) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_{mk}^2} \leqslant M \Rightarrow \{x_{mk}\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ ограничено } \forall k = 1, ..., n$$

$x_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn})$

$\{x_{m_1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ - числовая последовательность (огранич) $\xrightarrow{\text{по т. Б.В.}} \{x_{m_{k_1},1}\}_{k_1\in\mathbb{N}}$ сходится к a_1

$\{x_{m_{k_2},2}\}_{m\in\mathbb{N}}$ огранич $\xrightarrow{\text{по т. Б.В.}} \{x_{m_{k_2},2}\}_{k_2\in\mathbb{N}}$ сходится к a_2

$\{x_{m_{k_2},1}\}_{k_2\in\mathbb{N}}$ - подпоследовательность сходящейся последовательности $\Rightarrow$ сходится к a_2

Теперь $\lim\limits_{k_2\to\infty} x_{m_{k_2},1} = a_1;\ \lim\limits_{k_2\to\infty} x_{m_{k_2},2} = a_2$

$\{x_{m,3}\}_{m\in\mathbb{N}} \longrightarrow \{x_{m_{k_2},3}\}_{m\in\mathbb{N}}$ - ограничено $\xrightarrow{\text{по т. Б.В.}} \{x_{m_{k_3},3}\}$ сходится к a_3

$\{x_{m_{k_2},1}\}_{k_2\in\mathbb{N}} \longrightarrow \{x_{m_{k_3},1}\}_{k_3\in\mathbb{N}}$ - сходится к a_1

$\{x_{m_{k_2},2}\}_{k_2\in\mathbb{N}} \longrightarrow \{x_{m_{k_3},2}\}_{k_3\in\mathbb{N}}$ - сходится к a_2

и.т.д до $\{(x_{m_{k_n},1}, x_{m_{k_n},2}, ..., x_{m_{k_n},n})\}_{k_n\in\mathbb{N}}$ сходится к $(a_1, a_2, ..., a_n)$ $\blacksquare$