Математический анализ, лекция

Салихов Тимур, группа М8О-112Б-22, telegram: @dr_lightspeed

20.04.2023

Продолжение

Теорема:

Пусть E F - конечномерные линейные нормированные пространства, $A : E \to F$ - линейная.

Тогда $\exists C > 0 \;:\; ||A_x||_F \leqslant C * ||x||_E, \; \forall x \in E$

Доказательство:(Сложно и долго, доказать почти невозможно)

Определение: Пусть $E, \; F$ - конечномерные линейные нормированные пространства, $U \subset E$ - открыто и $p \in U; \; f : U \to F$. Функция называется дифференцируемой в p, если существует линейное отображение $A : E \to F \;:\; f(p+h) - f(p) = Ah + \omega(h)$, где $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\omega(h)}{||h||_E} = 0$

Линейное отображение A называется дифференциалом функции f в точке p и обозн. $df(p)$

Теорема(Необходимое условие дифференцируемости):

Если f дифференцируемо в p, то f непрерывна в p

Доказательство:

По условию $f(p+h)-f(p) = Ah+\omega(h) \Rightarrow ||f(p+h)-f(p)||_F = ||Ah+\omega(h)||_F \leqslant ||Ah||_F+||\omega(h)||_F \leqslant$

$$\leqslant C||h||_F + ||\omega(h)||_F \xrightarrow{h \to 0} 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(p+h) = f(p) \Rightarrow f \text{ - непрерывно} \qquad \blacksquare$$

Теорема(Дифференциал сложной функции):

Пусть $E, \; F, \; G$ - конечномерные линейные нормированные пространства

$U \subset E$ открыто в $E, \; V \subset F$ октрыто в F

$f : U \to V$ дифференцируемо в $p \in U$ $g : V \to G$ дифференцируемо в $q = f(p) \in U$

Тогда $g \circ f : V \to G$ дифференцируемо в p и $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$

Доказательство:

Обозначим $A = df(p), \; B = dg(f(p))$

$$(g \circ f)(p+h) - (g \circ f)(p) = g(f(p+h)) - g(f(p)) = g(p+k) - g(q) = Bk + \omega_1(k), \; \lim_{k \to 0} \frac{\omega_1(k)}{||k||_F} = 0$$

$$k = f(p+h) - f(p) = Ah + \omega_2(h), \; \lim_{h \to 0} \frac{\omega_2(h)}{||h||_E} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(p+h)-(g\circ f)(p) = B(Ah+\omega_2(h))+\omega_1(k) = BAh + B\omega_2(h)+\omega_1(k)$$

Осталось доказать, что $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{B\omega_2(h)+\omega_1(h)}{||h||_E} = 0$

$$0 \leqslant \Big|\Big|\frac{B\omega_2(h)+\omega_1(h)}{||h||_E} = 0\Big|\Big|_G \leqslant \frac{||B\omega_2(h)||_G}{||h||_E} + \frac{||\omega_1(k)||_G}{||h||_E} \leqslant \frac{C_B||\omega_2(h)||_G}{||h||_E} + \frac{||\omega_1(k)||_G}{||k||_F}\ \frac{||k||_F}{||h||_E} \leqslant$$

$$\leqslant C_B\ \frac{||\omega_2(h)||_G}{||h||_E} + \frac{||\omega_1(k)||_G}{||k||_F}(C_A + \frac{||\omega_2(h)||_F}{||h||_E}) \xrightarrow{h\to 0} 0 \qquad \blacksquare$$

Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ открыто, $f: U\to\mathbb{R}^m$

$f(x1,...,x_n) = (f_1(x1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n))$

$u_1,...,u_n$ - базис в $\mathbb{R}^n$ $\quad u_i = (0,...,0,1,0,...,0)\in\mathbb{R}^n$ (1 на i-ом месте)

$v_1,...,v_n$ - базис в $\mathbb{R}^m$ $\quad v_j = (0,...,0,1,0,...,0)\in\mathbb{R}^m$ (1 на j-ом месте)

Матрица $df(p)$

Пусть f - дифференцируема в $p\in U$

$$f(p+h)-f(p) = df(p)h+\omega(h),\ \lim_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{||h||} = 0$$

$p=(p_1,...,p_n),\ h = u_it,\ t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(p+tu_i)-f(p) = t\ df(p)u_i+\omega(tu_i)$

Если $df(p)$ имеет вид матрицы (a_{ij})

$$df(p)u_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}v_j$$

$$\frac{f(p+tu_i)-f(p)}{t} = \sum_{j=1}^m a_{ji}v_j + \frac{\omega(tu_i)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\omega(tu_i)}{t} = 0 \Rightarrow \exists\lim_{t\to 0}\frac{f(p+tu_i)-f(p)}{t} = \sum_{j=1}^n a_{ji}v_j \Rightarrow a_{ji} = \lim_{t\to 0}\frac{f_j(p+tu_i)-f_j(p)}{t}$$

Определение: Пусть $f: U\to\mathbb{R},\ U$ - открыто в $\mathbb{R}^n$. Если существует предел:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(p_1,...,p_{i-1},p_i+t,p_{i+1},...,p_n)-f(p_1,...,p_i,...,p_n)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(p+tu_i)-f(p)}{t},$$

то он называется частной производной функции f по переменной с номером $i \quad (x_i)$ в точке p и обозначается $\dfrac{\delta f_j}{\delta x_i}(p)$

Итак, $a_{ji} = \dfrac{\delta f_j}{\delta x_i}(p) \Rightarrow$ матрица $df(p)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(p) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(p) & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(p) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(p) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(p) & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}(p) & \frac{\delta f_m}{\delta x_2}(p) & \cdots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n}(p) \end{pmatrix} \text{ - матрица Якоби}$$

Пусть $f : U \to V,\ U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m,\ g : V \to \mathbb{R}$

$p \in U,\ q = f(p) \in V;\ f$ - дифференцируемо в $p,\ g$ - дифференцируема в $q \Rightarrow$

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p) \Rightarrow (g \circ f)(x_1, ..., x_n) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

$$\Big(\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_1}, \cdots, \frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_n}\Big) = \Big(\frac{\delta g}{\delta y_1}(f(p)), \cdots, \frac{\delta g}{\delta y_m}(f(p))\Big) * \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(p) & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}(p) & \cdots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n}(p) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta g}{\delta y_j}(f(p)) * \frac{\delta f_j}{\delta x_i}(p)$$

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

$$g(y_1, ..., y_m) = \text{число}$$