线性代数A（理工类）试题参考答案及评分标准

2009~2010 第二学期

一、单项选择（本大题共 10 小题，每小题 **2** 分，共 **20** 分）

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
答案	B	A	A	A	C	D	D	B	D	C

二、填空题（本大题共 **10** 小题，每小题 **2** 分，共 **20** 分）

11、$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$。 12、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$。 13、$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$。

14、-1。 15、-1。 16、8。 17、3。 18、2。 19、1。 20、$\pm\sqrt{2}/2$。

三、解答题（本大题共 **6** 小题，每小题 **8** 分，共 **48** 分）

21．解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}\cdots\cdots 6分$$

$$=8\cdots\cdots 2分$$

22. 解： $B^3=(A+E)^3=A^3+3A^2+3A+E$ ……2 分 ，

$$而A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3=O\text{......}2分$$

$$故B^3=3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\cdots 4 分$$

23. 解：由已知 $|A|=1\neq 0$，故 A 可逆，由 $AX=B$，可得 $X=A^{-1}B$ ……3 分

而 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ……3 分 故 $X=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$……2 分

24. 解：对矩阵施行初等行变换：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$……3 分

故 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$……2 分，取其一个极大线性无关组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$……1 分，

则 $\alpha_4=-11\alpha_1+14\alpha_2+9\alpha_3$……2 分

25. 解：A 的特征多项式为：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-1)$，其特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_{2,3}=1$…2 分

当 $\lambda_1=-1$时，解方程组$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得对应的特征向量为$c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$（$c_1$为非零常数）…3 分

当 $\lambda_{2,3}=1$时，解方程组$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得对应的特征向量为$c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$（$c_1$ c_2 不同为零）…3 分

26. 解：$f=(x_1^2+2x_1x_3+x_3^2)-x_2^2+(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2)=(x_1+x_3)^2-x_2^2+(x_2-x_3)^2$…4 分

令$\begin{cases} y_1=x_1+x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_2-x_3 \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_2-y_3 \end{cases}$ 得到标准形：$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2$

变换矩阵为：$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$………4 分

四、证明题（**本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分**）

27. 证：由已知，$(A+E)(A-2E)=E$ ……3 分

故 $A+E$ 可逆，且 $(A+E)^{-1}=(A-2E)$……3 分

28. 证：由 $A_{mn}B=O$，并根据矩阵秩的性质，有：$R(A)+R(B)\le n$……2 分

而 $R(A)=n$，故 $R(B)\le 0$，即 $R(B)=0$……2 分

故 $B=O$……2 分