线性代数（A 卷）参考答案与评分标准

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）。

D B B A A, D A D D B

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11. $(2,3)$ 12. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 13. -1 14. 3 15. 2

16. 3 17. 3 18. 4 19. $\frac{1}{3}(A-E)$ 20. 0

三、求解下列各题（本大题共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分）

21. $D=\begin{vmatrix} 14 & 3 & 3 & 3 \\ 14 & 5 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 5 & 3 \\ 14 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}=14\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ （4 分）

$=14\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=112$ （8 分）

22. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （4 分）

所以，基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （8 分）

23. $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （4 分）

向量组的秩为 3，最大线性无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$ （8 分）

24. $\left(A,B\right)=\begin{pmatrix}1&1&0&1&2\\0&-1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1&2\\0&-1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&1&-1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$ （4 分）

所以，$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\\1&0\end{pmatrix}$ （8 分）

25.特征矩阵为 $\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\7&11-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-10)$

特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=10$ （4 分）

当$\lambda_1=4,$解方程$(A-4E)x=0$。由 $A-4E=\begin{pmatrix}-1&-1\\7&7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

基础解系，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，所以，$k_1\xi_1(k_1=0)$是对应于$\lambda_1=4$的全部特征向量。

当$\lambda_2=10,$解方程$(A-10E)x=0$。由 $A-10E=\begin{pmatrix}-7&-1\\7&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}7&1\\0&0\end{pmatrix}$

基础解系，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$，所以，$k_2\xi_2(k_2=0)$是对应于$\lambda_2=10$的全部特征向量。 （8 分）

26. $f=(x_1^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2^2+9x_3^2+12x_2x_3)+(x_2^2-12x_2x_3+36x_3^2)-42x_3^2$

$=(x_1+2x_2+3x_3)^2+(x_2-6x_3)^2-42x_3^2$ （4 分）

令 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+3x_3\\y_2=\quad\ \ x_2-6x_3\\y_3=\qquad\quad\ x_3\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=y_1-2y_2-15y_3\\x_2=\quad\ \ y_2+6y_3\\x_3=\qquad\quad\ y_3\end{cases}$

就把 f 化成标准形 $f=y_1^2+y_2^2-42y_3^2$

二次形 f 是不定的。 （8 分）

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

27.证明：设 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_3,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2$，则

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&-1&0\end{pmatrix}$$ （2 分）

而 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&-1&0\end{vmatrix}=0$ ，所以矩阵 A 不可逆，

故 $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$ 。 （5 分）

所以，向量组 $\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2$ 线性相关 （6 分）

28. 证明：若 $|A|=0$，则 $A\cdot A^*=|A|E=0$，

假设 $|A^*|\neq 0$，那么伴随矩阵 A^* 是可逆的，

因此，在 $AA^*=0$ 的两边右乘 A^* 的逆，可得 $A=0$ 。

由 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的定义，知 $A^*=0$，故 $|A^*|=0$ 。与假设相假设矛盾。

所以 $|A^*|=0$