2013～ 2014 学年第二学期线性代数[经管]

A 卷参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
C	B	C	C	A	D	B	B	B	A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
-2	$\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -7 & 7\end{pmatrix}$	6	9	$f=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}-4x_1x_2+6x_2x_3$

三、求解下列各题（本大题共 10 小题，每小题 6 分，共 60 分）

(1) 解：$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$ （3 分）

$=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$ （6 分）

(2) 解 ：令 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}3&-2\\0&-1\end{pmatrix}$，则 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$ （2 分）

由 $|A_1|=-1$，$|A_2|=-3$， 有 $|A|=|A_1|\cdot|A_2|=3$ （3 分）

又 $A_1^{-1}=\dfrac{1}{|A_1|}A_1^*=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\dfrac{1}{|A_2|}A_2^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&-1\end{pmatrix}$

故 $A=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ （6 分）

(3) 解 ：由 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$，有 $A^T=\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ （2 分）

则 $\left|2AA^T\right|=\left|2\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\right|=4\begin{vmatrix} a^2+b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2+b^2 \end{vmatrix}=4(a^2-b^2)^2$ （6 分）

(4) 解 ：由于 $|A|=1$ ，则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$， （2 分）

故 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ （6 分）

(5) 解 ：由于 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & b \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$， （3 分）

而 β 可由向量组 α_1，α_2 α_3 线性表示，则 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

故 $b=0$ （6 分）

(6) 解 ：由 $2\alpha_1+3\alpha_3+2\beta=\alpha_2$，得 $\beta=\frac{1}{2}(\alpha_2-2\alpha_1-3\alpha_3)$， （2 分）

而 $\alpha_1=(1,-1,1)^T,\alpha_2=(-1,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,-1)^T$，

于是 $\beta=\frac{1}{2}(\alpha_2-2\alpha_1-3\alpha_3)=(-3,{}^T($ （6 分）

(7) 解 ：由于 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$， （3 分）

于是 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个最大无关组。 （6 分）

(8) 解 ：由于

$B=(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， （4 分）

于是方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$ （6 分）

(9) 解 ：由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\ -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda-6)(\lambda+1)$

得特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=-1$ （2 分）

当 $\lambda_1=6$ 时，由 $\left(A-\lambda E\right)=\begin{pmatrix}-4 & -4\\ -3 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，

得 $\lambda_1=6$ 时对应的特征向量为 $p_1=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(c_1\neq 0)$； （4 分）

当 $\lambda_2=-1$ 时，由 $\left(A-\lambda E\right)=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -3 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，

得 $\lambda_1=6$ 时对应的特征向量为 $p_2=c_2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}(c_2\neq 0)$。 （6 分）

(10) 解 ：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\,2}+2x_3^{\,2}+2x_1x_3+2x_2x_3=(x_1+x_3)^2-x_2^{\,2}+(x_2+x_3)^2$ （2 分）

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_3\\ y_2=x_2\\ y_3=x_2+x_3\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2-y\\ x_2=y_2\\ x_3=y_2-y_3\end{cases}$ （4 分）

于是标准形为 $f=y_1^{\,2}-y_2^{\,2}+y_3^{\,2}$，所用的可逆线性变换为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ （6 分）

四、证明题（5 分）

证： 由 $A^2-2A+3E=0$

有 $A(A-2E)=-3$

于是 $-\dfrac{A}{3}(A-2E)=I$， （3 分）

故 $A-2E$ 可逆，并且 $(A-2E)^{-1}=-\dfrac{A}{3}$ （5 分）