2007~2008 学年第二学期

《线性代数》A 卷参考答案及评分标准

一、单项选择（每小题 2 分，共 20 分）请将正确选项前的字母填入下表中

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
答案	D	**B**	A	D	A	B	D	C	B	C

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1、$\underline{-2}$。 2、$\underline{\begin{pmatrix} 15 & 9 & -20 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}}$。 3、$\underline{4}$。 4、$\underline{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$。5、$\underline{3}$。

6、$\underline{3}$。 7、$\underline{0}$。 8、$\underline{2}$。 9、$\underline{1/\lambda}$。 10、$\underline{x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3}$

三、计算题（1、2 每小题 6 分，其余每小题 6 分，共 40 分）

1、解：$2A_{21}+3A_{22}+2A_{23}+2A_{24}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ……3 分

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$ ……6 分

2、解：由 $AX=A+X$ 有 $(A-E)X=A$

$$\because (A-E|A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$ ……4 分

$$\therefore X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ ……6 分

3、解：由 $A^2-2A-5E=O$ 有

$(A-3E)(A+E)=2E$ ……3 分

$|A-3E||A+E|=2\neq 0$

有 $|A-3E|\neq 0$ 所以 $A-3E$ 可逆 ……6 分

且 $(A-3E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)$ ……7 分

4、解：$\begin{pmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T & \alpha_4^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ……3 分

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 是它的一个极大无关组，……4 分

且 $\alpha_3=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{7}{2}\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$. ……7 分

5、解：矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$$

得特征值 $\lambda_1=-2$ $\lambda_2=\lambda_3=1$ ……3 分

当 $\lambda_1=-2$ 时有

$$\begin{cases}-6x_1-6x_2=0\\ 3x_1+3x_2=0\\ 3x_1+6x_2-3x_3=0\end{cases}，\text{即}\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$$

它的基础解系是 $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以对应于 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量是 $c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$ ……5 分

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时有

$$\begin{cases}-3x_1-6x_2=0\\ 3x_1+6x_2=0\\ 3x_1+6x_2=0\end{cases}，\text{即}\,x_1+2x_2=0$$

它的基础解系是向量 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，所以对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量是

$c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ （c_1,c_2 不全为零） ……7 分

6、解： $\because \begin{pmatrix} A \\ \hline E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ……3 分

$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ……6 分

$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2} + 4y_3^2$ ……7 分

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1、证明：由 $AB = O$ 有 $A(X_1, X_2, \cdots, X_s) = O$

即 $(AX_1, AX_2, \cdots, AX_s) = O$

得 $AX_i = O \quad (i = 1, 2, \cdots s)$

即 X_i 为 $AX = O$ 的 s 个解 ……2 分

显然 $R(B) = R(X_1, X_2, \cdots, X_s) \le n - R(A)$

即 $R(A) + R(B) \le n$ ……3 分

2、证明：$\because$ $R(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) = 3$，$R(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4) = 3$

$\because$ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 线性无关　　$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ 线性相关

则有 $\alpha_4 = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$ 成立 ……2 分

设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0$

有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_5 - k_4(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3) = 0$

$(k_1 - k_4m_1)\alpha_1 + (k_2 - k_4m_2)\alpha_2 + (k_3 - k_4m_3)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0$ ……3 分

$\because$ $R(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_5) = 4$　　$\because$ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \alpha$ 线性无关

则有 $\begin{cases} k_1 - k_4m_1 = 0 \\ k_2 - k_4m_2 = 0 \\ k_3 - k_4m_3 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases}$　　解之有 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ ……4 分

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关　即 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$ ……5 分