# Interpolation von Punkten durch eine Spline-Funktion

Elkaam Hiba

13. Februar 2023

## Definition

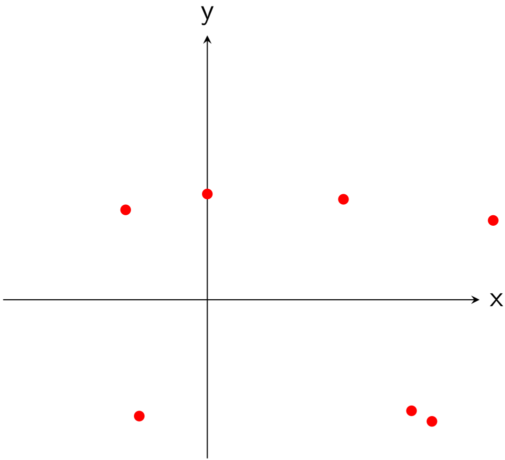
## Definition (Interpolation)

Eine Definition wäre zu sagen, dass die Interpolation eine mathematische Operation ist, bei der eine Funktion bestimmt wird, deren repräsentative Kurve durch die Anfangspunkte verläuft. Diese Funktion wird als Interpolationsfunktion oder Interpolationsfunktion bezeichnet.

# Zweck

Zweck der Interpolation ist es, einen Satz von Werten an vorgegebenen Positionen mit neuen plausiblen Werten im Einklang mit den bereits vorhandenen Werten zu ergänzen. Alle Positionen und Anfangswerte werden durch folgende Punkte dargestellt **??**:

## Interpolierenden Anfangspunkten




| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| -1 | -2.2 |
| 2 | 1.9 |
| 3 | -2.1 |
| 3.3 | -2.3 |
| -1.2 | 1.7 |
| 4.2 | 1.5 |

Eine Interpolation könnte hier darin bestehen, für eine

# Arten von Interpolationstechniken

Für die Interpolation stehen zahlreiche Techniken zur Verfügung. Diese Techniken sind nachstehend aufgeführt:

- Interpolation des Unterschieds von Newton.
- Interpolation der Differenz hinter Newton.
- Interpolation der geteilten Differenz von Newton.
- Technik der Interpolation Lagrange.
- Interpolation von Splines.

# Interpolation VS Approximation

- Approximation :

Im Falle der Annäherung ist es normalerweise nicht mehr notwendig, genau durch die ursprünglich spezifizierten Punkte zu gehen. Hier ist die Ordnung des angepassten Polynoms viel kleiner als die Anzahl der Datenpunkte. Die Koeffizienten des Polynoms werden durch Anwendung eines Prinzips wie der Minimierung der Summe der Fehlerquadrate bestimmt ( Least squares criteria ).

- Interpolation:

Es besteht in der Suche nach der Funktion, die einer bestimmten Funktion nach bestimmten Kriterien am nächsten kommt. Ein interpolierendes Polynom durchläuft alle Datenpunkte. Ein Polynom der Ordnung n durchläuft n Datenpunkte.

# Lineare interpolation

# Lineare interpolation



Lineare Interpolation ist die einfachste Methode, da Linien zwischen zwei benachbarten Punkten verwendet werden. Eine Reihe von numerischen Punkten und Funktionswerten an diesen Punkten werden angegeben. Die Aufgabe besteht darin, den angegebenen Betrag zu verwenden und den Wert der Funktion an verschiedenen Punkten anzunähern. Das heißt, gegeben $x_i$ wo $i = 1, \dots, n$,die Aufgabe ist es f(x) zu schätzen. Die lineare Spline $s_L(x)$, die f an diesen Punkten interpoliert, wird definiert durch:[Spä95]

$$S_L(x) = f(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

wobei $x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$

## Interpolationsfehler bei Lineare interpolierende Splines

# Kontinuität



Eine Funktion ist f auf $[a, b]$ **absolut kontinuierlich** ist, wenn ihre Ableitung fast unbegrenzt ist überall in $[a, b]$ ,ist integrierbar auf $[a, b]$ und erfüllt:

$$\int_x^a v'(s)dx = v(x) - v(a), a \leq x \leq b$$

- **Hinweis**: Jede kontinuierlich differenzierbare Funktion ist absolut kontinuierlich, aber das Gegenteil ist nicht unbedingt wahr.

# Sobolev-Räume



Der Raum $H_1[a, b]$ ist die Menge aller absolut kontinuierliche Funktionen auf $[a, b]$, deren Derivate zu $L^2(a, b)$ gehören. Dann, für $k \geq 1$ ,$H_k[a, b]$ ist die Teilmenge von $H_{k-1}[a, b]$ bestehend aus Funktionen, deren $(k-1)$te Ableitungen absolut kontinuierlich sind und deren k-te-Ableitungen zu $L^2(a, b)$ gehören.Wenn wir mit $C^k[a, b]$ die Menge der auf $[a, b]$ definierten Allfunktionen bezeichnen, die k-mal kontinuierlich differenzierbar sind, dann ist $C^k[a, b]$ eine richtige Teilmenge von $H^k[a, b]$. Zum Beispiel gehört jeder lineare Spline zu $H^1[a, b]$, gehört aber nicht generell zu $C^1[a, b]$.[Nau05] [1]

- **Beispiel**: Die Funktion $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ gehört zu $H^1(0, 1)$, weil $f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}}$ auf [0,1] integrierbar ist. Jedoch $f \notin C^1[a, b]$, weil $f'(x)$ singular bei $x = 0$ ist.

[1] Es wrde nach Sergei Lwowitsch Sobolew gennant, bei einer Transliteration und in englischer Transkription Sobolev

# Sobolev-Räume



**Lemma**

*Lassen Sie die Funktionswerte f1 und f2 Fehler haben* $|f_i| \leq \varepsilon$. *Wenn lineare Interpolation verwendet wird, ist die Fehlerschätzung:*

$$E \leq \varepsilon$$

# Sobolev-Räume



## Satz

*[Nau05] Lass p(x) das lineare Polynom sein, das f(x) bei x1 und x2 interpoliert. Dann:*

$$E_p = f(x) - p(x) = \frac{f''(\varepsilon)}{2}(x - x1)(x - x2)$$

*wobei* $x1 \leq \varepsilon \leq x2$ *und,*

$$|E_p| \leq Ch^2 \qquad , h = x2 - x1$$

Nun, wenn $f \in C^2(0,1)$, dann für $i = 1, 2, \ldots, n$ :

$$f(x) - S_L(x) = \frac{f''(\varepsilon)}{2}(x - x_i - 1)(x - x_i)$$

Wenn $h_i = x_i - x_i - 1$, dann erreicht die Funktion $(x - x_i)(x - x_i - 1)$ ihren maximalen absoluten Wert bei $\frac{x_i + x_i - 1}{2}$, mit einem Maximalwert von $\frac{h_i^2}{4}$. Sei $h = max_{1 \leq i \leq n} h_i$ definieren, dann:

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{S_L}\| \leq \frac{1}{8} h^2 \|\mathbf{f''}\| \implies \|\mathbf{E_p}\| \leq \frac{1}{8} h^2 \|\mathbf{f''}\|$$

# Anwendung der linearen Spline Interpolation

Basierend auf den folgenden Daten besteht die Aufgabe darin, die Werte von $y(62)$ mithilfe der linearen Interpolation von Spline zu finden.

Tabelle: x und y Daten

| x | 22 | 42 | 52 | 82 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 4181 | 4178 | 4186 | 4199 | 4217 |

Aus den Daten der Tabelle $62 \in [52, 82]$.Also $x_0 = 52$ ,$y_0 = f(x_0) = 4186$ und $x_1 = 82$ ,$y_1 = f(x_1) = 4199$. Unser linearer Spline in die Form kommt:

$$S_L(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_1}{x1 - x_0}$$

$$\implies S_L(x) = y_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y1\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}$$

# Anwendung der linearen Spline Interpolation



Für $x = 62$:

$$S_L(x) = 4186\frac{62-82}{52-82} + 4199\frac{62-82}{82-52}$$
$$= 4189,9$$

- **Bemerkung**:

Der y-Wert muss immer zwischen $y_0$ und $y_1$ liegen.

# Splinen von Hermite

# Splinen von Hermite

Hermite-Splines sind eine Familie von kubischen Splines, die zur Klasse $C^1$ im Intervall $[x_0; x_n]$ gehören. Entweder der Variablenwechsel nach $t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - xi}$. Auf diese Weise kann eine Funktion $s_i(t)$ im Bereich [0, 1] erhalten werden, die der Funktion $f_i(x)$ im vierten Teilintervall $[x_i; x_{i+1}]$ entspricht.[MS88] Der allgemeine Ausdruck eines Spline-Stücks und seiner ersten Ableitung, die hier ein Polynom des Grades 3 ist:

$$S_i(t) = a_{i,0} + a_{i,1} t_i + a_{i,2} t_i^2 + a_{i,3} t_i^3$$
$$S_i'(t) = a_{i,1} + 2a_{i,2} t_i + 3a_{i,3} t_i^2$$

Die Matrixdarstellung ist wie folgt:

$$S_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ m_i \\ m_{i+1} \end{pmatrix}$$

Dann gilt es:

$$S_i(t) = h_0(t)y_i + h_1(t)y_{i+1} + h_2(t)m_i + h_3(t)m_{i+1}$$

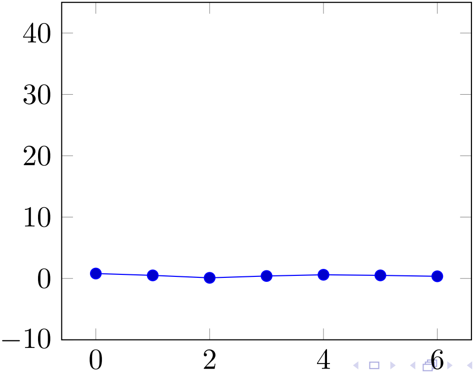
# Kardinale Spline

# Kardinale Spline



Ein kubischer Catmull-Rom-Spline definiert jede Tangente zu einem Knoten i als parallel zur Geraden durch die Knoten i-1 und i+1.[Sch73] Sie wird in folgender Form ausgedrückt:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$



Matrixform:

$$S_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ m_{i+2} \end{pmatrix}$$

# Kubische Splin

# Kubische Splin





## Definition (Cubic Spline)

Sei $f(t)$ eine Funktion,die auf einem Intervall $[a, b]$ definiert wird, und seien $x_0, x_, \ldots, x_{n+1}$ eindeutige Punkte in $[a, b]$, wobei : $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$.

# Konstruktion kubischer Splines



Aufgrund von n+1 Knoten muss der kubische Spline zweimal kontinuierlich über $[x_0, x_n]$ ableitbar sein. Folgende Eigenschaften müssen überprüft werden:

- P1. Für $i \in 0, [n-1]$ und $f_{n-1}(x_n) = y_n$ $f_i(x_i) = y_i$ .
- P2. Für $i \in [0, n-2]$ $f_i(x_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1})$
- P3. Für $i \in [0, n-2]$ $f_i'(x_{i+1}) = f_{i+1}'(x_{i+1})$ .
- P4. Für $i \in [0, n-2]$ $f_i''(x_{i+1}) = f_{i+1}'' = (x_{i+1})$

Jedes Stück $f_i(x_i)$ des Splines ist ein Polynom des Grades 3 und hat daher 4 unbekannte konstante Koeffizienten $a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}$. Es gibt also 4 Unbekannte zu bestimmen.

# Genauigkeit





## Satz (Genauigkeit)

*Wenn* $s_2(x)$ *der natürliche kubische Spline für* $f \in C[a, b]$ *ist auf* $[a, b]$ *mit Knoten* $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ *und* $v_i nH(a, b)$ *ist jede Interpolante von mit diesen Knoten, dann*

$$\|s_2''\|_2 \leq \|v''\|_2$$

# Erstellen einer kubischen Spline Interpolant





Ziel ist es, den natürlichen kubischen Spline zu finden, der die Punkte (1,1), (2,12), (3,13) und (4,14) interpoliert.

# Erstellen einer kubischen Spline Interpolant



Finale cubische Splin :

$$S(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3}{12} + \frac{19}{12} - \frac{7x}{12} & x \in [1,2] \\ \frac{(3-x)^3}{12} + \frac{7}{12} - \frac{x}{12} & x \in [2,3] \\ (4-x)\frac{1}{3} + (x-3)\frac{1}{4} & x \in [3,4] \end{cases}$$

# Zusammenfassung und Ausblick



Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Spline-Funktionen eine wertvolle Methode zur Interpolation von Daten darstellen. Sie können verwendet werden, um glatte Kurven durch eine Reihe von Datenpunkten zu zeichnen und so die Struktur der Daten besser zu verstehen. Im Vergleich zu anderen Interpolationsmethoden haben Spline-Funktionen den Vorteil, dass sie weniger anfällig für Oszillationen und Überfitten sind. Sie können auch leicht angepasst werden, um bestimmte Eigenschaften der Daten hervorzuheben oder zu unterdrücken. In vielen Anwendungen, in denen genaue Vorhersagen oder Schätzungen erforderlich sind, sind Spline-Funktionen eine wichtige Wahl.

# Implementierung der kubischen Spline-Interpolation von Hermite



```
def hermiteSpline(y0, y1, m0, m1, t):
        b0 = 1 - 3 * t2 + 2 * t * t * t
        b1 = 3 * t2 - 2 * t3
        b2 = t - 2 * t2 + t3
        b3 = - t2+ t3
        return b0 * y0 + b1 * y1 + b2 * m0 + b3
```

# Implementierung der kubischen Spline-Interpolation von Catmull-Rom

```
def catmullromSpline(y0, y1, y2, y3, t):
        b0 = -t + 2 * t2 - t2 * t * t
        b1 = 2 - 5 * t2 + 3 * t3
        b2 = t + 4 * t2 - 3 * t3
        b3 = -t2 + t3
        return (b0 * y0) + (b1 * y1) + (b2 * y2
```

# Literaturverzeichnis

[MS88] Gerhard Merz und Wilhelm Sippel. „Zur Konstruktion periodischer Hermite-interpolationssplines bei äquidistanter Knotenverteilung“. In: *Journal of approximation theory* 54.1 (1988), S. 92–106.

[Nau05] Joachim Naumann. *Sobolev-Räume*. 2005.

[Sch73] Isaac J Schoenberg. *Cardinal spline interpolation*. SIAM, 1973.

[Spä95] Helmuth Späth. *One dimensional spline interpolation algorithms*. AK Peters/CRC Press, 1995.