线性方程组的直接解法

代码见 lab4.cpp

代码说明：

LU 函数以系数矩阵和其阶数以及 y 向量为参数，用 LU 分解法求解线性方程组。

cholesky 函数采用改进的平方根法解线性方程组，参数与 LU 函数相同。

inverse 函数以非奇异矩阵及其阶数为参数，用 LU 分解法求矩阵的逆矩阵。

hilbert 函数用于生成指定阶数的 Hilbert 矩阵。

condition 函数用于求无穷阶范数下矩阵的条件数。

solve 函数在给定阶数和扰动的情况下求解以 Hilbert 矩阵为系数矩阵，1 向量为解向量生成的 y 向量，并输出残差和反解出的解向量与 1 向量的误差。

test_time 函数对 10 阶 Hilbert 矩阵为系数矩阵，1 向量为解向量生成的 y 向量分别采用 LU 法和 cholesky 法求解 1000000 次，并输出时间。

运行结果：

```
    solve(10, 0.0);

    test_time(10);

    solve(10, 1e-7);
    for (int i = 11; i < 20; i++) {
        printf("%d ", i);
```

```
748.00000000
28375.00000000
0.00000000 0.00006667
LU Running Time : 4.555
cholesky Running Time : 2.886
0.00000000 0.69944378
11 0.00000000 0.01927967
12 0.00000000 0.60973399
13 0.00000000 2.03516306
14 0.00000000 5.36976923
15 0.00000000 8.52098056
16 0.00000000 9.04935057
17 0.00000000 37.34632809
18 0.00000000 34.84829954
19 0.00000000 40.69668534
[Finished in 8.9s]
```

H3 矩阵在无穷范数下的条件数为 748.0

H4 矩阵在无穷范数下的条件数为 28375.0

可见 Hilbert 矩阵的条件数较大，且随阶数增长较大。

所有的方程的残差都为 0，但是解存在误差。

10 阶 Hilbert 矩阵没有扰动时误差为 0.00006667，在 y 向量各产生了 10^-7 的扰动后误差增长到了 0.69944378。可见此方程对于微小扰动十分敏感。

对 10 阶的 Hilbert 矩阵作为系数矩阵的方程组各求解 1000000 次，LU 法用了 4.555s 而 cholesky 法只用了 2.886s，可见改进的平方根法在效率上较优。

随着阶数的增加，解的误差越来越大，在 n=13 时解的误差就已经超过了 100%，且随着阶数的继续增大，误差也越来越大。

由结果来看，Hilbert 矩阵是一个典型的病态矩阵。在进行线性方程组求数值解时，对其病态还是良态的判定是十分重要的。在病态条件下，即使很小的扰动也会对解产生巨大的误差。