

实验5 线性方程组的直接解法

1 题目内容

考虑 n 阶的希尔伯特 (Hilbert) 矩阵 H_n , 其元素为 $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, 也即是

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

- (1) 按 ∞ -范数计算 H_3 和 H_4 的条件数;
- (2) 令 $n = 10$, 生成 Hilbert 矩阵, 并构造向量 $b = H_n x$, 其中 x 是所有分量都是 1 的列向量, 用矩阵三角分解 (LU 分解) 的方法求解以 H_n 作为系数矩阵的线性方程组 $H_n x = b$, 得到近似解 \hat{x} , 计算残差 $r = b - H_n \hat{x}$ 的 ∞ -范数 $\|r\|_\infty$, 以及误差 $\Delta x = \hat{x} - x$ 的 ∞ -范数 $\|\Delta x\|_\infty$;
- (3) (选做) 由于上述矩阵为对称矩阵, 采用平方根法 (Cholesky 分解) 重新求解上述方程, 并比较其与 LU 分解方法的运行效率;
- (4) 让上述线性方程组的右端项 b 产生 10^{-7} 的扰动, 然后重新求解上述方程组, 观察得到的解产生的误差的变化情况;
- (5) 减小或增大 n 的值, 观察 $\|\Delta x\|_\infty$ 的变化情况, n 取大约多少值时, 误差达到 100%?

2 实验报告

请完成实验并提交实验报告, 内容包括:

- 实习要求 (题目及初始数据);
- 算法描述 (伪码或框图);
- 程序清单 (以附件形式给出, 和实验报告一起打包);
- 体会与问题 (对算法、程序或计算问题的心得)。

3 参考文献

- [1] Timothy A. Davis. Direct methods for sparse linear systems. SIAM, 2006.
- [2] William H. Press. Numerical recipes: The art of scientific computing, 3rd edition. Cambridge University Press, 2007.

这两本参考书已上传至网络学堂的课程文件中