Proposition de TER L3

Preuves automatiques d'arithmétique en calcul des séquents

Sujet

La recherche de preuve en arithmétique est un sujet de recherche très prolifique et encore aujourd'hui très actif. Toutes les approches actuelles se cantonnent essentiellement au fragment décidable de l'arithmétique, à savoir l'arithmétique linéaire de Presburger (c'est-à-dire l'arithmétique de Peano sans la multiplication, comprenant zéro, successeur, l'opération d'addition et le schéma de récurrence). Même si elle est moins expressive que l'arithmétique de Peano, l'avantage de l'arithmétique de Presburger est qu'elle a été montrée cohérente, complète et décidable (elle admet l'élimination des quantificateurs). En revanche, le problème de décision a une complexité intrinsèque doublement exponentielle, ce qui devrait rendre tout algorithme inefficace, mais en pratique il existe des implémentations qui fonctionnent bien.

Le spectre des procédures de décision pour l'arithmétique linéaire est large et se divise en deux groupes selon que l'on considère le premier ordre ou non. Le premier groupe de procédures de décision concerne l'arithmétique linéaire sans quantificateurs (QFA, en abrégé, pour « Quantifier-Free Arithmetic »), et comprend des techniques comme l'élimination de Fourier-Motzkin [5] ou la méthode du Simplex [3]. Le second groupe de procédures de décision traite le premier ordre et se base sur des méthodes d'élimination des quantificateurs, comme la procédure de Hodes [7] pour l'arithmétique linéaire rationnelle (PRA, en abrégé, pour « Presburger Rational Arithmetic ») ou la procédure de Cooper [4] pour l'arithmétique linéaire entière (PIA, en abrégé, pour « Presburger Integer Arithmetic »).

L'objectif de ce TER est d'intégrer une procédure de décision pour l'arithmétique linéaire de Presburger à un outil de déduction automatique au premier ordre basé sur la méthode des tableaux et concurrent (c'est-à-dire capable d'exploiter la puissance de calcul des architectures multi-cœurs). Pour ce faire, on partira des travaux réalisés il y a quelques années [2] dans le cadre de l'outil de déduction automatique Zenon [1], qui est également un outil basé sur la méthode des tableaux. Ces travaux ont permis d'élaborer des règles de preuve pour l'arithmétique linéaire au premier ordre en utilisant la méthode du Simplex pour les problèmes rationnels et un algorithme de « branch and bound » pour les problèmes entiers. Elles ont été implémentées dans l'outil Zenon Modulo [6] (extension de Zenon à la déduction modulo théorie). Il s'agira de réutiliser ces règles de preuve et de voir comment l'aspect concurrent de l'outil de recherche de preuve peut être exploité.

Afin de tester l'intégration de l'arithmétique linéaire, on utilisera la bibliothèque de problèmes TPTP [8], et en particulier la catégorie arithmétique (TFA). Cette catégorie étant typée, elle nécessitera également d'étendre l'outil de déduction automatique au typage. Pour les besoins de ces tests, un langage avec types simples devrait suffire (en particulier, il ne sera pas nécessaire de considérer un typage avec polymorphisme, qui peut compliquer fortement l'implémentation de l'outil).

Travail à réaliser

- Intégration de l'arithmétique linéaire au premier ordre à un outil de déduction automatique basé sur la méthode des tableaux et concurrent ;
- Intégration du typage au développement précédemment réalisé afin de le tester avec la catégorie TFA de la bibliothèque de problèmes TPTP.

Remarques additionnelles

L'encadrement du TER sera réalisé par :

- David Delahaye (Université de Montpellier, LIRMM, David.Delahaye@lirmm.fr) ;
- Julie Cailler (Université de Montpellier, LIRMM, Julie.Cailler@lirmm.fr) ;
- Hinde Bouziane (Université de Montpellier, LIRMM, Hinde.Bouziane@lirmm.fr) ;
- Simon Robillard (Université de Montpellier, LIRMM, Simon.Robillard@lirmm.fr).

Références

[1] R. Bonichon, D. Delahaye, and D. Doligez. Zenon : An Extensible Automated Theorem Prover Producing Checkable Proofs. In *Logic for Programming Artificial Intelligence and Reasoning (LPAR)*, volume 4790 of *LNCS/LNAI*, pages 151–165, Yerevan (Armenia), Oct. 2007. Springer.

[2] G. Bury and D. Delahaye. Integrating Simplex with Tableaux. In *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods (TABLEAUX)*, volume 9323 of *LNCS*, pages 86–101, Wrocław (Poland), Sept. 2015. Springer.

[3] V. Chvátal. *Linear Programming*. Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Company, New York (USA), 1983. ISBN 0716715872.

[4] D. C. Cooper. Theorem Proving in Arithmetic without Multiplication. *Machine Intelligence*, 7 :91–99, 1972.

[5] G. B. Dantzig and B. C. Eaves. Fourier-Motzkin Elimination and its Dual. *Journal of Combinatorial Theory, Series A (JCTA)*, 14 :288–297, May 1973.

[6] D. Delahaye, D. Doligez, F. Gilbert, P. Halmagrand, and O. Hermant. Zenon Modulo : When Achilles Outruns the Tortoise using Deduction Modulo. In *Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning (LPAR)*, volume 8312 of *LNCS/ARCoSS*, pages 274–290, Stellenbosch (South Africa), Dec. 2013. Springer.

[7] L. Hodes. Solving Problems by Formula Manipulation in Logic and Linear Inequalities. *Artificial Intelligence (AIJ)*, 3(1-3) :165–174, Jan. 1972.

[8] G. Sutcliffe. The TPTP Problem Library and Associated Infrastructure : The FOF and CNF Parts, v3.5.0. *Journal of Automated Reasoning (JAR)*, 43(4) :337–362, Dec. 2009.