

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE II

Iztok Humar
Edi Bulić
Anton Rafael Sinigoj

Ljubljana, 2018

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

621.3(075.8)

HUMAR, Iztok, 1977-

Osnove elektrotehnike I / Iztok Humar, Edi Bulić, Anton Rafael Sinigoj. - 1. izd.
- Ljubljana : Založba FE, 2018

ISBN 978-961-243-333-8

1. Bulić, Edi 2. Sinigoj, Anton R.
291560192

Copyright © 2018 Založba FE. All rights reserved.
Razmnoževanje (tudi fotokopiranje) dela v celoti ali po delih
brez predhodnega dovoljenja Založbe FE prepovedano.

Založnik: Založba FE, Ljubljana
Izdajatelj: Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana
Urednik: prof. dr. Sašo Tomažič

Recenzenta: prof. dr. Tomaž Slivnik, prof. dr. Damijan Miljavec

Natisnil: SINET d.o.o., Hrastnik
Naklada: 200 izvodov
1. izdaja

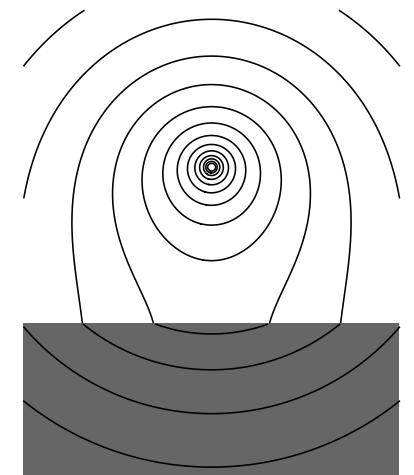
Predgovor

Učbenik je namenjen študentom elektrotehnike in pokriva snov predmeta Osnove elektrotehnike II. Vsebina učbenika je razdeljena v dve poglavji oziroma dvajset razdelkov in predstavlja z učbenikom Osnove elektrotehnike I (istih avtorjev) zaključeno celoto.

Pri izbiri tem in načinu obravnave smo se ozirali na učna gradiva, ki so za ta predmet na voljo študentom že sedaj, in se poskušali izogniti nepotrebnemu podvajanju. Snov predmeta podajamo v strnjeni obliki in – kjer je to možno – ubiramo druge poti, ki vodijo k istemu cilju; za razumevanje zahtevne snovi je to vsekakor koristno in dobrodošlo. V ta namen smo dodali tudi nekaj tehnično zanimivih primerov, ki jih redkeje srečamo. K temu bodo svoje pripomogle tudi slike tokovnih in magnetnih polj ter kožnega in bližinskega učinka. Te izhajajo iz analitičnih ali numeričnih rešitev, ki po teoretični in matematični plati pogosto presegajo zahtevan nivo znanja. Zelo bo koristno, če bodo študenti uporabili programerska znanja in poskušli nekatera preprostejša polja izračunati in jih grafično tudi upodobiti. Napake in nerodnosti, ki jih bodo pri tem spremljale, bodo neprecenljiva dota pri strokovni rasti. Velja rek: »na napakah se učimo«.

Učbenik vključuje tudi teme, ki presegajo obseg osnov elektrotehnike, sodijo pa v strokovno obzorje bodočega inženirja in magistra elektrotehnike; mislimo na razdelek o elektromagnetnem polju, ki obravnava valovanje, difuzijo, Poyntingov vektor in električno linijo, česar mnogi študenti v nadaljevanju (žal) ne bodo imeli prilike poslušati.

Da je učbenik tak, kot je, smo hvaležni recenzentoma, zaslužnemu profesorju dr. Tomažu Slivniku in prof. dr. Damijanu Miljavcu, ki sta nam po pregledu osnutka učbenika posredovala pripombe in dala koristne nasvete.



Vsebina

Magnetno polje

§1. Amperov zakon (tokovni element, vrste tokovnih elementov, Amperov zakon, definicija enote amper)

§2. Gostota magnetnega pretoka (Biot-Savartov zakon, magnetna polja tokovnega elementa, daljice, premice, snopa premic, tokovodnikov tračnega, valjnega, cevnega in krožnega preseka, polja krožne tokovne zanke, ravne tuljave; magnetno polje v koaksialnem kablu in statična polja v njem)

§3. Magnetni pretok (neizvornost magnetnega polja, magnetni pretok skozi zanko)

§4. Vrtinčnost magnetnega polja (vrtinčnost polja v dinamičnih in statičnih razmerah; magnetna polja toka v toroidnem navitju, ravninsko radialnega toka, prostorsko radialnega toka, magnetna polja ob razelektritvah)

§5. Sile in delo v magnetnem polju (naelektron delec v polju, Hallov pojav; delo za premik tokovne zanke, delo in magnetno polje, navor na tokovno zanko, navor na ravninsko tokovno zanko v homogenem polju, magnetni dipol)

§6. Magnetik in magnetno polje (vektor magnetizacije, vektor magnetne poljske jakosti, magnetna susceptibilnost in permeabilnost, diamagnetiki in paramagnetiki, feromagnetiki, magnetilne krivulje, remanentna gostota, koercitivna jakost, histerezna zanka, antiferomagnetiki, ferimagnetiki, anizotropnost)

§7. Mejna pogoja magnetnega polja (mejna pogoja gostote in jakosti magnetnega polja, meja linearnih magnetikov; zrcaljenje v magnetiki)

§8. Magnetna vezja (magnetna napetost in skalarni magnetni potencial, magnetna dipolska ploskev; magnetni tok, magnetni upor, vir magnetne napetosti, trajni magnet)

Dinamično polje

§9. Faradayev zakon (reakcijsko električno polje, električne napetosti, linearni in Faradayev generator; Faradayev zakon, inducirana napetost, vrtinčnost električnega polja, vrtinčni toki, magnetni sklep, napetost odprte zanke)

§10. Induktivnosti (magnetni pretok in sklep, lastne in medsebojne induktivnosti, faktor sklopa; kožni in bližinski pojav; tuljava kot strnjen element električnih vezij, magnetni sklop dveh navitij in dogovor o pikah, sklop več navitij)

§11. Magnetna energija (magneteno linearnega sistema, magneteno nelinearnega sistema, gostota magnetne energije)

§12. Gibalni procesi v magnetnem polju (ploskovne sile, magnetne sile v globokem utoru)

§13. Maxwellove enačbe (Maxwellove enačbe v inercialnih sistemih, mejni pogoji, Poyntingova moč)

§14. Elektromagnetno polje (ravninski val v praznem prostoru, valovanje TEM v koaksialnem kablu, krogelni TEM val, ravninski val v izgubni snovi, izgubni izolant, kompleksna valovna funkcija, telegrafska enačba)

§15. Električna vezja v dinamičnih razmerah (tok veje in valovna dolžina, Kirchhoffova zakona, moči v električnem vezju, o analizi električnih vezij)

§16. Prehodni pojavi v električnih vezjih (začetni pogoji, RC, RL in RLC vezja)

§17. Kompleksni račun (periodična funkcija, kompleksor, kazalčni diagram; Kirchhoffova zakona, kazalci in pasivni elementi RLC vezij; impedanca, admitanca, imitanca večvhodnega vezja, transformirana impedanca; kompleksna moč, kompenzacija jalove moči; kompleksni dielektričnost in permeabilnost)

§18. Analiza izmeničnih električnih vezij (postopki reševanja RLC vezij; transformator, linija, resonanca)

§19. Teoremi o izmeničnih električnih vezjih (superpozicija, nadomestitev, Tellegen, Thevenin, Norton, prilagoditev)

§20. Trifazni sistem (amplitudni in efektivni kazalci, trifazni sistem napetosti; načini priključevanja bremen, vezava bremen v zvezdo z ali brez povratnega vodnika, v trikot; vrtilno polje, pretok energije, učinkovitost in varčnost)

Magnetno polje in magnetna vezja

§1. Amperov zakon (7)

§2. Gostota magnetnega pretoka (14)

§3. Magnetni pretok (6)

§4. Vrtinčnost magnetnega polja (12)

§5. Sile in delo v magnetnem polju (10)

§6. Magnetik in magnetno polje (14)

§7. Mejna pogoja magnetnega polja (4)

§8. Magnetna vezja (7)

Magnetno polje in magnetna vezja

§1. Amperov zakon



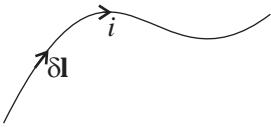
Uvod v magnetno polje. Do sedaj smo magnetno polje omenili dvakrat: prvič na samem začetku, pri Lorentzovi sili, in drugič pri razširjeni obliki Ohmovega zakona. Obakrat je to polje predstavljal vektor gostote magnetnega pretoka \mathbf{B} , ki v produktu $Q\mathbf{w} \times \mathbf{B}$ govori o magnetnem delu elektromagnetne sile. Pri proučevanju elektrostatičnega polja te sile nismo niti omenjali, saj so naboji takrat v mirovanju ($\mathbf{w} = \mathbf{0}$), pri Ohmovem zakonu pa je kratek številski primer pokazal, da je v prevodniku prevladujoč električni del sile (QE), medtem ko je magnetni del ($Q\mathbf{w} \times \mathbf{B}$) zelo pogosto zanemarljiv.

Zaznavanji električne sile med naelektronimi telesi in magnetne sile med kosi magnetita (Fe_3O_4) segata že v antični čas. Začetek znanstvenega proučevanja magnetne sile predstavlja odkritje danskega fizika Hansa Christiana Oersteda (1820). Opazil je, da se igla kompasa v bližini tokovne zanke odkloni. Interakcija med tokovno zanko in kompasovo iglo oziroma magnetom je opozorila na to, da imata magnet in tokovna zanka sorodne lastnosti. V interakciji sta torej lahko magneta ali magnet in tokovna zanka ali tokovni zanki. Istega leta je francoski fizik Andre Marie Ampere opravil vrsto zahtevnih eksperimentov. Proučeval je magnetni sili med kratkima ravnima odsekoma tokovnih zank in zanju našel tudi ustrezna matematična zapisa.

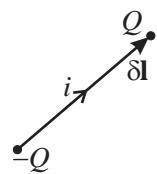
Pojav magnetne sile med tokovodniki »k sreči« ne spreminja tokovno-napetostnih odnosov v enosmernih strukturah iz preteklega poglavja, zato ga razumimo kot zamolčano temo. Tokrat bomo magnetni sili posvetili osrednjo mesto, hkrati pa pripravili podlage za inducirano električno silo, ki jo je proučeval Faraday. Izsledke Coulomba, Ampera in Faradaya je zaokrožil Maxwell z izborom glavnih enačb elektromagnetizma.

Tokovni element. Če je osnovni gradnik elektrinske strukture točkast naboј, katerega množino naelektritve označujejo zapisi δQ ali $q\delta l$ ali $\sigma\delta a$ ali $\rho\delta v$, pri uporabi infinitezimalnega računa pa tudi dQ ali ndl ali σda ali ρdv , potem je osnovni

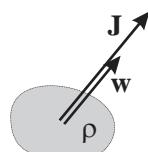




gradnik tokovne strukture t. i. tokovni element. Ta je bil prvotno mišljen kot kratek odsek tokovodnika oziroma tokovne zanke. Tokovnemu elementu priredimo tudi jakost, ki jo določa produkt $i\delta\mathbf{l}$. Vektor $\delta\mathbf{l}$ pomeni usmerjeno daljico vzdolž tokovnega elementa v smeri označenega toka i .

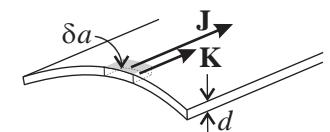


Dvojna narava tokovnega elementa. Če iz tokovne strukture, tokovodnika oziroma tokovne zanke virtualno izločimo kratek kos žice, tokovni element, nam kontinuitetna enačba govori, da se na njegovem koncu kopiji naboj Q , na začetku pa naboj $-Q$, da velja: $i = Q' = -(-Q)'$. Resnično: jakost toka ustreza intenzivnosti naraščanja naboja na koncu elementa in intenzivnosti usihanja naboja na začetku elementa. Naboja oblikujejo točkasti dipol z dipolnim momentom $\delta\mathbf{p} = Q\delta\mathbf{l}$. Potemtakem je tokovni element tudi električni dipol. In v tem je ta dvojnost njegove narave. Jakost tokovnega elementa moremo zapisati tudi takole: $i\delta\mathbf{l} = Q'\delta\mathbf{l} = \delta\mathbf{p}'$. Če je tok časovno stalen, do kopiranja nabojev na krajiščih tokovnega elementa ne more priti, saj se enaka kopiranja dogajajo tudi sosednjim elementom; kopiranja nabojev na stikih tokovnih elementov se izničijo. Pri tokih $i(t)$, ki imajo visoko časovno dinamiko, so razmere drugačne. Naboji na stičiščih tokovnih elementov se pri njih povsem ne izničijo. Takšne razmere so stalnica struktur, kot so električne linije, valovodi in antene.



Vrste tokovnih elementov. Žična tokovna struktura seveda ni edina; možne so še druge. Izhajajmo iz žičnega elementa. Pri toku i preleti v času δt element $\delta\mathbf{l}$ naboj $\delta Q = i\delta t$ s hitrostjo \mathbf{w} , zato je $i\delta\mathbf{l} = (\delta Q/\delta t)\delta\mathbf{l} = \delta Q(\delta\mathbf{l}/\delta t) = \delta Q\mathbf{w}$. Ponuja se spoznanje, da je tudi gibajoč nabit delec tokovni element in da so v katerikoli tokovni strukturi pomembni zgolj naboji in njihove hitrosti. Takšno dojemanje tokovnega elementa podkrepjuje tudi Lorentzova sila. Za njen električni del (δQE) sta odgovorna naboj in električna jakost, za njen magnetni del ($\delta Q\mathbf{w} \times \mathbf{B}$) pa jakost elementa in magnetna gostota. Srečujemo še dve obliki tokovnega elementa. Tokrat začnimo z gibajočim nabojem. Predočimo si ga kot oblak nabojev z gostoto ρ v neznatni prostornini $\delta\nu$. Jakost tega tokovnega elementa je $\delta Q\mathbf{w} = \rho\delta\nu\mathbf{w} = \mathbf{J}\delta\nu$; v produktu $\rho\mathbf{w}$ prepoznamo vektor gostote električnega toka \mathbf{J} . Pri tokih v snoveh je kot gradnik strukture razumeljena prostorninica $\delta\nu$, v kateri je gostota \mathbf{J} . V tiskanih strukturah so vodniki ploski, tračni, folijski. Pri foliji debeline d je $\delta\nu = d\delta a$; δa je površina krpice na

folji, $\mathbf{J}\delta v = \mathbf{J}d\delta a = \mathbf{K}\delta a$ je jakost tokovnega elementa na njej in vektor \mathbf{K} je gostota tokovne obloge. Pri folji debeline d , širine b in toku i je vzdolž nje gostota toka enaka $J = i/bd$. Gostota tokovne obloge $K = Jd = i/b$ govori o širinski gostoti toka. Pri toku $i = 10 \text{ mA}$ in širini folje $b = 2 \text{ mm}$ je gostota tokovne obloge $K = 5 \text{ A/m}$.



Razmišljanje o tokovnem elementu zakjučimo z besedami z začetka: če je osnovni gradnik elektrinske strukture točkast naboj, katerega množino naelektritve označujejo zapisi δQ ali $q\delta l$ ali $\sigma\delta a$ ali $\rho\delta v$, pri uporabi infinitezimalnega računa pa tudi dQ ali ndl ali σda ali ρdv , potem je osnovni gradnik tokovne strukture tokovni element, ki ga označujejo zapisi δQw ali $i\delta l$ ali $\mathbf{K}\delta a$ ali $\mathbf{J}\delta v$, pri uporabi infinitezimalnega računa pa tudi dQw ali idl ali $\mathbf{K}da$ ali $\mathbf{J}dv$. Katerega od teh uporabimo, je stvar konkretnе strukture.

Amperov zakon oziroma zakon magnetne sile govori o interakciji med dvema tokovnima elementoma. Če je bil Coulomb pred nalogo, izdelati merilnik, ki bo meril sorazmerno majhni električni sili med nanelektrennima kroglicama, je bila težava Amperovih merjenj magnetnih sil med kratkima žičnima tokovnima elementoma drugje. Žični tokovni element kot samostojni objekt v enosmernih razmerah ne obstaja, zato je bilo potrebno pri merjenju magnetnih sil med tokovnima elementoma izvzeti učinke množice njima sosednjih tokovnih elementov.

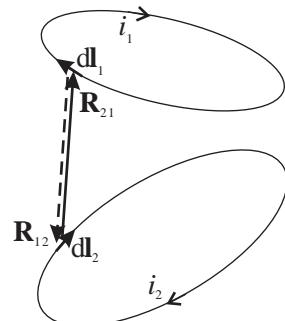
Imejmo zanki s tokoma i_1 in i_2 . V njiju izberimo tokovna elementa, ki ju opredeljujeta diferencialna vektorja dl_1 in dl_2 v točkah $T_1(x_1, y_1, z_1)$ in $T_2(x_2, y_2, z_2)$; njuno medsebojno lego določata še vektorja \mathbf{R}_{12} in \mathbf{R}_{21} ,

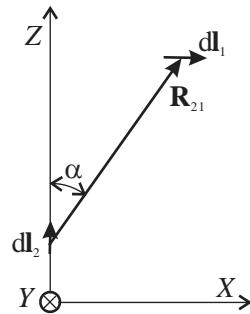
$$\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \Rightarrow R_{12} = R_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

V merskem sistemu SI zapišemo magnetni sili med tokovnima elementoma s sledečima izrazoma:

$$d\mathbf{F}_{m1}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{21}^3} i_1 dl_1 \times (i_2 dl_2 \times \mathbf{R}_{21}) \quad \text{in} \quad d\mathbf{F}_{m2}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{12}^3} i_2 dl_2 \times (i_1 dl_1 \times \mathbf{R}_{12}),$$

μ_0 je magnetna konstanta oziroma permeabilnost (permitivnost) pravnega prostora (vakuma). Zapisa magnetnih sil na





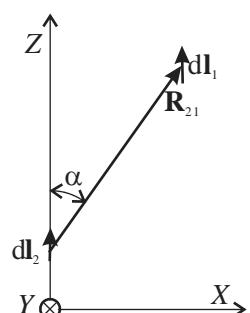
tokovna elementa sta neprimerno zahtevnejša od zapisov električnih sil na naboja. Zapis »otežujejo« trije vektorji in dve vektorski množenji, zato bomo razčlenitvi sil namenili ustrezno več pozornosti. Prvi zapis govori o sili na prvi tokovni element zaradi drugega in podobno drugi. Iz definicije vektorskoga produkta sledi, da je sila $d\mathbf{F}_{m1}^{(2)}$ pravokotna na dl_1 , in podobno tudi sila $d\mathbf{F}_{m2}^{(1)}$ na dl_2 . Prav zato sta si sili v splošnem tuji; iz ene ne moremo sklepati na drugo. Za Coulombovi električni sili na naboja velja, da sta si nasprotni, za magnetni sili na tokovna elementa pa to ne velja. Da bi izvedeli kaj več o zakonitosti magnetne sile, si za začetek izberimo nekaj postavitev tokovnih elementov, ki ležita na isti ravnini.

PRAVOKRTNA SI TOKOVNA ELEMENTA. Tokovna elementa naj ležita v ravnini XZ . Prvi naj je usmerjen vzdolž osi X , drugi vzdolž osi Z , vektor \mathbf{R}_{21} pa naj z osjo Z oklepa kot α . Po dvojnih vektorskih množenjih dobimo za sili sledeče:

$$d\mathbf{F}_{m1}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{21}^3} i_1 dl_1 \mathbf{e}_x \times (i_2 dl_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{R}_{21}) = \frac{\mu_0}{4\pi R_{21}^3} i_1 dl_1 \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y i_2 dl_2 R_{21} \sin \alpha = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 i_1 i_2 dl_1 dl_2}{4\pi R_{21}^2} \sin \alpha \text{ in}$$

$$d\mathbf{F}_{m2}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{12}^3} i_2 dl_2 \mathbf{e}_z \times (i_1 dl_1 \mathbf{e}_x \times \mathbf{R}_{12}) = \frac{\mu_0}{4\pi R_{12}^3} i_2 dl_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y i_1 dl_1 R_{12} \sin(\alpha + \pi/2) = -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2 dl_1 dl_2}{4\pi R_{12}^2} \cos \alpha.$$

Sili se razlikujeta tako po smereh kot po absolutnih vrednostih obe pa usihata s kvadratom medsebojne oddaljenosti (podobno kot pri Coulombovi sili). Pri kotu $\alpha = \pi/2$ je sila na drugi tokovni element enaka nič, pri $\alpha = 0$ pa je sila na prvi tokovni element enaka nič. Metaforično bi rekli: pri teh konstelacijah »čuti« en tokovni element prisotnost drugega, obratno pa ne. Ugotovitev je vsekakor zanimiva.



VZPOREDNA SI TOKOVNA ELEMENTA. Tokovna elementa naj ležita v ravnini XZ in naj sta usmerjena vzdolž osi Z . Vektor \mathbf{R}_{21} oklepa z osjo Z kot α . Sili

$$d\mathbf{F}_{m1}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{21}^3} i_1 dl_1 \mathbf{e}_z \times (i_2 dl_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{R}_{21}) = \frac{\mu_0}{4\pi R_{21}^3} i_1 dl_1 \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y i_2 dl_2 R_{21} \sin \alpha = -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2 dl_1 dl_2}{4\pi R_{21}^2} \sin \alpha \text{ in}$$

$$d\mathbf{F}_{m2}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{12}^3} i_2 dl_2 \mathbf{e}_z \times (i_1 dl_1 \mathbf{e}_z \times \mathbf{R}_{12}) = \frac{\mu_0}{4\pi R_{12}^3} i_2 dl_2 \mathbf{e}_z \times -\mathbf{e}_y i_1 dl_1 R_{12} \sin(\pi - \alpha) = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2 dl_1 dl_2}{4\pi R_{12}^2} \sin \alpha$$

sta tokrat nasprotnih smeri in enakih absolutnih vrednosti.

VZPOREDNA TOKOVODNIKA. Naj sta prejšnja tokovna elementa reprezentanta tokovnih elementov z dveh tankih vzporednih vodnikov, ki vodita toka i_1 in i_2 vdolž osi Z in ležita vsaksebi na oddaljenosti d . Naj nas zanima magnetna sila na tokovni element z jakostjo $i_2 dl_2$, ki jo povzročajo vsi tokovni elementi prvega tokovodnika. Iz geometrije razberemo, da je

$$\frac{dl_1}{R_{12}^2} \sin \alpha = \frac{R_{12} d\alpha / \sin \alpha}{R_{12}^2} \sin \alpha = \frac{d\alpha}{R_{12}} = \frac{\sin \alpha}{d} d\alpha \Rightarrow d\mathbf{F}_{m2}^{(1)} = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2 dl_1 dl_2}{4\pi R_{12}^2} \sin \alpha = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2 dl_2}{4\pi d} \sin \alpha d\alpha.$$

Da bi seštel sile vseh tokovnih elementov prvega vodnika, ki delujejo na tokovni element z jakostjo $i_2 dl_2$, bo moral kot α preteči vrednosti od 0 do π :

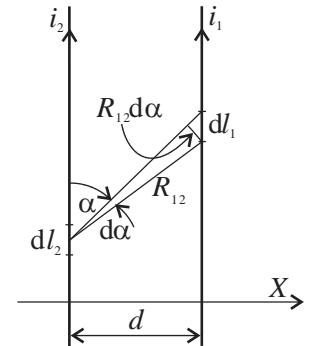
$$d\mathbf{F}_{m2} = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2 dl_2}{4\pi d} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2 dl_2}{2\pi d} \Rightarrow \frac{d\mathbf{F}_{m2}}{dl_2} = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} \quad \text{in} \quad \frac{d\mathbf{F}_{m1}}{dl_1} = -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}.$$

Rezultata sta enostavna in zanimiva: prvi govori o magnetni sili na katerikoli tokovni element drugega vodnika, drugi pa o magnetni sili na dolžinsko enoto drugega vodnika. Z identičnim postopkom dobimo še silo na dolžinsko enoto prvega vodnika. Na odseka vodnikov dolžine l delujeta magnetni sili, ki imata sledečo absolutno vrednost:

$$|\mathbf{F}_{ml}| = F_{ml} = \frac{\mu_0 |i_1 i_2| l}{2\pi d}.$$

Pri $i_1 i_2 > 0$ se vodnika privlačita, pri $i_1 i_2 < 0$ pa se odbijata. Pri trifaznem prenosu električne energije so fazni vodniki 400 kV daljnovodov v Sloveniji izvedeni s parom vodnikov. Če sta v nekem trenutku vrednosti tokov v vodnikih 500 A, vodnika pa vsaksebi 40 cm, potem sta privlačni magnetni sili med njima na raztežaju 400 m (med stebroma) enaki 50 N. Drug primer je dvovod vodnikov s tokoma $i_1 = -i_2 = i$. Magnetni sili na vodnika sta odbojni. Pri toku 1 A in medosni razdalji 2 mm sta magnetni sili na vodnika dvovoda dolžine 5 m enaki 250 μ N.

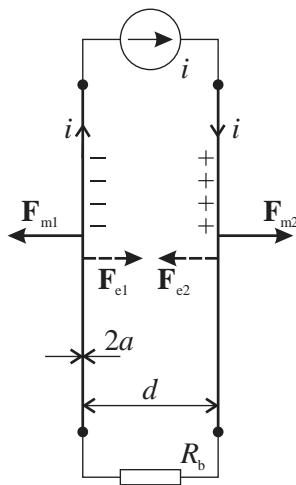
DEFINICIJA ENOTE AMPER. Primer magnetne sile med vzporednima tokovodnikoma najdemo v definiciji ampera. »Amper je enota za električni tok. Amper je stalni električni tok, ki pri prehajanju skozi dva premočrta, vzporedna, neskončno





dolga vodnika zanemarljivega krožnega prereza, postavljena v vakuum v medsebojni razdalji 1 m, povzroča med njima silo $2 \cdot 10^{-7}$ njutna na meter.« Resnično. Če v zgornjo formulo vstavimo podatke: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am, $i_1 = \pm i_2 = 1$ A in $d = 1$ m, dobimo za magnetno silo med njima ravno

$$\frac{F_{ml}}{l} = \frac{\mu_0 |i_1 i_2|}{2\pi d} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m.}$$



Definicija skriva »past«. Na tokovodnika ne deluje zgolj magnetni, ampak vedno tudi električni sili. (Ne uspemo najti strukture, pri kateri bi tokovodnika ne bila tudi naelektrena.) Definicije ampera očitno terja okoliščine, pri katerih bo moteča električna sila čim manjša. Delno je to v definiciji že zajeto: da sta vodnika »zanemarljivega krožnega prereza«. Res: čim manjši je prerez vodnikov, manjša sta naboja na njiju in posledično tudi električni sili. Lep primer je simetrični dvovod, ki povezuje vir in breme. Če je polmer vodnikov a veliko manjši od medosne razdalje d , je kapacitivnost dvovoda na tekoči meter $c \cong 2\pi\epsilon_0/\ln(d/a)$. Pri zanemarljivi upornosti vodnikov je med njima napetost $u \cong R_b i$; vzdolžni gostoti nabojev na vodnikih sta $\pm q = \pm cu$. Magnetni sili vodnika odbijata, električni pa ju privlačita. Izrazimo razmerje teh sil:

$$\frac{F_{ml}}{F_{el}} = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi d} : \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{(cR_b)^2} = \left(\frac{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \ln(d/a)}{2\pi R_b} \right)^2 = \left(\frac{60 \ln(d/a) \Omega}{R_b} \right)^2 = \left(\frac{R_k}{R_b} \right)^2.$$

Koren kvocienta magnetne in električne konstante je t. i. valovna upornost. Ob približku svetlobne hitrosti $3 \cdot 10^8$ m/s je $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi \Omega \cong 377 \Omega$; števec zadnjega ulomka je karakteristična upornost R_k dvovoda, ki ima pomembno vlogo pri analizi valovnih pojavov na liniji. Pri $d/a = 400$ je razmerje $F_{ml}/F_{el} \cong (360 \Omega / R_b)^2$. Pri upornosti $R_b = 360 \Omega$ sta si sili F_{el} in F_{ml} v ravnotesju. Pri manjši upornosti bremena se vodnika odbijata, pri večji pa privlačita.

Zanimiv je še en vidik razmerja sil. Za magnetno silo je odgovorna mobilna, za električno pa presežna struktura nabojev. Če z dQ_i označimo množino naboja, ki se pri toku i v času dt pomakne vzdolž vodnika za dl s hitrostjo $w = dl/dt$, potem je $i = dQ_i/dt = (dQ_i/dl)(dl/dt) = q_i w$. Za razmerje sil dobimo sledeče:

$$\frac{F_{ml}}{F_{el}} = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi d} : \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 d} = \left(\frac{q_i}{q} \right)^2 \left(\frac{w}{c_0} \right)^2.$$

Poprečna hitrost prostih elektronov v vodniku je okoli 10^{12} krat manjša od svetlobne hitrosti. Fenomen magnetne sile očitno ni prepoznaven zaradi hitrosti nabojev, ampak zaradi premoči mobilnih nabojev nad presežnimi. Če bi vodnika zamenjali z dvema vzporednima curkoma nabojev, bi bila za obe sili odgovorna ista struktura ($q_i = q$). V razmerah, ko je $w \ll c_0$, je očitno $F_{ml} \ll F_{el}$. S pomočjo teorije relativnosti se da pokazati, da sta magnetni sili med gibajočima nabojem v resnici relativistična popravka Coulombovih sil med njima.

§2. Gostota magnetnega pretoka

Vektor gostote magnetnega pretoka je količina magnetnega polja, ki se neposredno navezuje na magnetno silo, podobno kot to velja za vektor električne poljske jakosti in električno silo. Oba vektorja smo omenili že v uvodu, pri Lorentzovi sili. V nadaljevanju smo spoznali Coulombovo silo in vektor električne poljske jakosti, v preteklem razdelku pa še magnetno silo. Čas je, da povemo nekaj več o magnetnem polju kot ozadju magnetne sile.

Vektor gostote magnetnega pretoka. Izhajamo iz izrazov za magnetni sili na tokovna elementa:

$$d\mathbf{F}_{m1}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{21}^3} i_1 d\mathbf{l}_1 \times (i_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_{21}) \quad \text{in} \quad d\mathbf{F}_{m2}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{12}^3} i_2 d\mathbf{l}_2 \times (i_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{12}).$$

Zapišimo ju nekoliko drugače,

$$d\mathbf{F}_{m1}^{(2)} = i_1 d\mathbf{l}_1 \times \left(\frac{\mu_0 i_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi R_{21}^3} \times \mathbf{R}_{21} \right) \quad \text{in} \quad d\mathbf{F}_{m2}^{(1)} = i_2 d\mathbf{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0 i_1 d\mathbf{l}_1}{4\pi R_{12}^3} \times \mathbf{R}_{12} \right),$$

skladno z Lorentzovim zapisom elektromagnetne sile, v katerem je njen magnetni del določen z vektorskim produktom jakosti tokovnega elementa in količine v oklepaju, ki jo imenujemo vektor gostote magnetnega pretoka. Spet je aktualno Faradayev razumevanje sil v elektromagnetiki: tokrat nista v interakciji tokovna elementa, ampak tokovni element in polje drugega tokovnega elementa na njegovem mestu,

$$d\mathbf{F}_{m1}^{(2)} = i_1 d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{B}^{(2)}(T_1) \quad \text{in} \quad d\mathbf{F}_{m2}^{(1)} = i_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}^{(1)}(T_2),$$

pri čemer magnetni polji $d\mathbf{B}^{(2)}(T_1)$ in $d\mathbf{B}^{(1)}(T_2)$ sosednjih si tokovnih elementov posebljata sledeča vektorska izraza:

$$d\mathbf{B}^{(2)}(T_1) = \frac{\mu_0 i_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi R_{21}^3} \times \mathbf{R}_{21} \quad \text{in} \quad d\mathbf{B}^{(1)}(T_2) = \frac{\mu_0 i_1 d\mathbf{l}_1}{4\pi R_{12}^3} \times \mathbf{R}_{12}.$$

Zapis govorita o vektorju gostote magnetnega pretoka oziroma o količini, ki je lastna jakosti tokovnega elementa in se naslavlja na točko v njegovi soseščini. Če je v njej kak tokovni element, govorimo o magnetni sili nanj, sicer pa le o polju

kot takšnem. Trenutno se vektor gostote magnetnega pretoka navezuje le na magnetno silo, kasneje pa bomo spoznali še njegove druge vsebine (magnetni pretok, inducirano električno polje, energija magnetnega polja, ...).

Biot-Savartov zakon je matematični predpis, ki splošni tokovni strukturi priredi vektor gostote magnetnega pretoka. Za tokovni element, kot osnovni gradnik neke tokovne strukture, smo ta predpis pravzaprav že spoznali,

$$d\mathbf{B}^{(2)}(T_1) = \frac{\mu_0 i_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi R_{21}^3} \times \mathbf{R}_{21} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 i d\mathbf{l}'}{4\pi R^3} \times \mathbf{R},$$

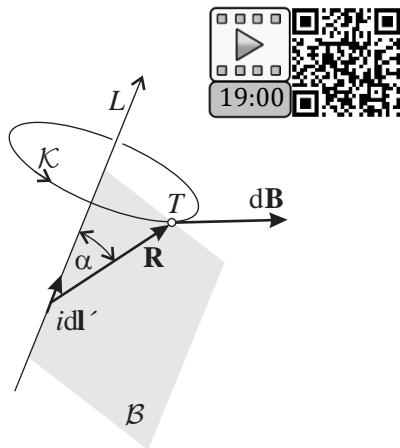


s tem, da v njega tokrat vpletamo oznake, ki smo jih uporabljali pri zapisovanju Coulombovega polja: element $d\mathbf{l}'$ s tokom i (kot vir) je v točki T' , \mathbf{R} pa je vektor razdalje, ki sega od vira (T') do splošne točke (T) v prostoru. Povedali smo tudi, da žični tokovni element »ni sam«, ampak je skupaj z drugimi, ki oblikujejo širšo tokovno strukturo. Da bi dobili rezultančni vektor gostote magnetnega pretoka \mathbf{B} v točki T , torej $\mathbf{B}(T)$, moramo seštetiti oziroma integrirati diferencialne prispevke $d\mathbf{B}(T)$ diferencialnih tokovnih elementov z jakostmi $id\mathbf{l}'$:

$$d\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 i d\mathbf{l}'}{4\pi R^3} \times \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}(T) = \int d\mathbf{B}(T) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{id\mathbf{l}'}{R^3} \times \mathbf{R}.$$

Integracija se v primeru žične strukture vrši po krivulji \mathcal{L} , v primeru tokovne obloge \mathbf{K} po ploskvi \mathcal{A} in v primeru gostote \mathbf{J} po prostoru \mathcal{V} . Zgornje zapise vektorja gostote magnetnega pretoka imenujemo Biot-Savartov zakon (Biot in Savart sta bila Amperova sodobnika, ob njem pa naletimo tudi na imeni Ampera in celo Laplacea). Če se v točki T nahaja kak gibajoč nabit delec, deluje nanj magnetna sila $Q\mathbf{w} \times \mathbf{B}$. Več o tem pri kinematiki nabitega delca v magnetnem polju.

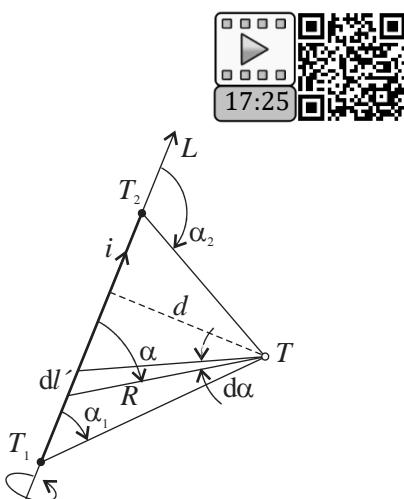
Merska enota gostote magnetnega pretoka je tesla, $T = Vs/m^2 = Wb/m^2$; $Wb (= Vs)$ je veber ali weber. V CGS (cm, g, s) merskem sistemu se za gostoto magnetnega pretoka uporablja enota gauss = Vs/cm^2 ; na to enoto še vedno kje naletimo. V Sloveniji je absolutna vrednost gostote geomagnetenega polja okoli 0,45 gaussa oziroma $45 \mu T$.



Magnetno polje tokovnega elementa. Določa ga Biot-Savartov zakon. Vzdolž tokovnega elementa položimo os L , da je $dl' = \mathbf{e}_l dl'$. Vektor $\mathbf{R} = \mathbf{e}_R R$ je usmerjen iz točke vira T' k splošni točki T . Os L in točka T določata polravnino \mathcal{B} , na kateri sta vektorja \mathbf{e}_l in \mathbf{e}_R ravninska in oklepata v splošnem nek kot α . Za polje $d\mathbf{B}(T)$ pišemo:

$$d\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 i dl'}{4\pi R^3} \times \mathbf{R} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} \mathbf{e}_l dl' \times \mathbf{e}_R R = \mathbf{e}_\beta \frac{\mu_0 i dl'}{4\pi R^2} \sin \alpha = \mathbf{e}_\beta dB_\beta(T),$$

saj je (po pravilu vektorskega množenja) $\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_\beta \sin \alpha$, kjer je \mathbf{e}_β vektor, ki je pravokoten na polravnino \mathcal{B} . Če točko T zavrtimo okoli osi L , dobimo krožnico \mathcal{K} . Zgornji rezultat za $dB_\beta(T)$ je očitno veljaven tudi za vse točke na tej krožnici. Vektor gostota magnetnega pretoka $d\mathbf{B}$ je tangenčen na \mathcal{K} in usmerjen v desno okoli L ; določa ga komponenta $dB_\beta(T)$. Skica vektorjev $d\mathbf{B}$ na krožnici \mathcal{K} daje vtis krožnega vrtinca. Podobna ugotovitev velja tudi za celotno okolico tokovnega elementa. Njegovo magnetno polje je vrtinčno (krožno, cirkularno); ponazarjajo ga krožne gostotnice, ki jim je skupna os L . V ekvatorialni ravnini tokovnega elementa ($\alpha = \pi/2$) upada gostota dB_β kvadratično ($1/R^2$), drugje pa še dodatno s kotno zakonitostjo $\sin \alpha$. Zanimiva je os L ($\alpha = 0$ ali π); v njej je magnetno polje tokovnega elementa enako nič.



Kvadratična odvisnost oddaljenosti ne preseneča, preseneča pa kotna odvisnost. Coulombovo električno polje naboja je izotropno, enakomerno v vse smeri ($1/R^2$), Biot-Savartovo magnetno polje tokovnega elementa (gibanega naboja) pa je očitno anizotropno ($\sin \alpha/R^2$), neenakomerno glede na odklon zveznice (R) od osi elementa. In še dalje: električno polje naboja je izvorno, magnetno polje tokovnega elementa pa vrtinčno. Izvornost polja naboja se odraža tudi v polju splošne elektrinske strukture; pričakujemo, da se bo tudi vrtinčnost polja tokovnega elementa odrazila v polju splošne tokovne strukture. Čas je, da spoznamo magnetna polja nekaterih osnovnih tokovnih struktur.



Polje tokovne daljice. Do magnetnega polja tokovne daljice, ki ponazarja raven kos tanke žice s tokom i , je le še korak. Naj sta T_1 in T_2 točki na premici L , med katerima leži tokovna daljica. Polja tokovnih elementov s te daljice že poznamo,

$$dB_\beta(T) = \frac{\mu_0 i dl'}{4\pi R^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \sin \alpha d\alpha \quad \text{saj je} \quad \frac{dl'}{R^2} \sin \alpha = \frac{R d\alpha / \sin \alpha}{R^2} \sin \alpha = \frac{d\alpha}{R} = \frac{\sin \alpha}{d} d\alpha.$$

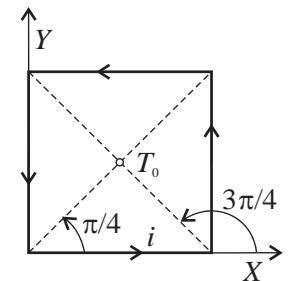
pri čemer je d oddaljenost točke T od osi daljice. Do končnega rezultata vodi integracija,

$$B_\beta(T) = \int d\beta(T) \Rightarrow B_\beta(T) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Uporabimo preprosto formulo v primeru kvadratne tokovne zanke s stranico a , ki leži v ravnini XY . Naj nas zanima polje \mathbf{B} v središču ovoja, v T_0 . Polja tokovnih daljic so tam enaka in po desnem pravilu usmerjena iz lista papirja, vzdolž osi Z ; vsakokrat sta $\alpha_1 = \pi/4$ in $\alpha_2 = 3\pi/4$:

$$B_z(T_0) = 4 \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = 4 \frac{\mu_0 i}{4\pi(a/2)} (\cos(\pi/4) - \cos(3\pi/4)) = 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 i}{\pi a}.$$

Pri toku $i = 100$ A in stranici $a = 10$ cm je gostota magnetnega pretoka $B_z(T_0) \cong 1,13$ mT.



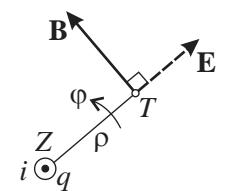
Polje tokovne premice. Tokovna premica je model za zelo dolg in tanek tokovodnik. Vzdolž vodnika položimo os Z , da kaže tok i v smer priraščanja koordinate z . To os izbiramo zato, ker je polje tokovnih elementov, ki sestavljajo tokovno premico, krožno v desno okoli osi elementa, kar v valjnem koordinatnem sistemu ustreza priraščanju kota φ . Magnetno polje tokovne premice dobimo iz izraza za polje tokovne daljice, ko gresta $\alpha_1 \rightarrow 0$ in $\alpha_2 \rightarrow \pi$, oddaljenost d pa prevzame koordinata ρ :

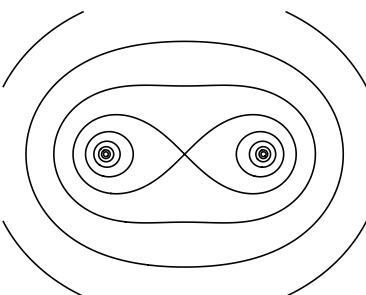
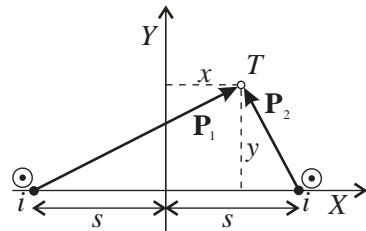
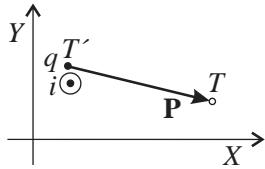
$$B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 i}{4\pi\rho} \underbrace{(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}_{\rightarrow 2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \Rightarrow \mathbf{B}(\rho) = B_\varphi(\rho) \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi.$$

Zadnji zapis določa gostoto pretoka kot vektorsko funkcijo, ki ustreza produktu komponente in smernika. Izraz je zelo preprost in spominja na zapis poljske jakosti v okolini nanelektrene premice:

$$\mathbf{B}(\rho) = B_\varphi(\rho) \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi \quad \text{in} \quad \mathbf{E}(\rho) = E_\rho(\rho) \mathbf{e}_\rho = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho.$$

Vektorja polj ležita v XY ravnini oziroma v prerezni ravnini $z = \text{konst.}$, ki je pri sistemu vzporednih vodnikov pogosto kar list papirja (ali ekran). Linijski vir označuje točka in pripis naboja in/ali toka; za tok iz lista uporabljam znak \odot , za





gostotnice magnetnega polja tokov v isto smer



tok v list pa znak \otimes . S pomočjo njiju in desnega pravila enostavno skiciramo referenčno usmerjenost vektorja gostote magnetnega pretoka. Ponuja se prilika za primerjavo obeh polj. Polji stran od linijskega vira usihata ($1/\rho$), po smeri pa sta si pravokotni ($\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$). Polje \mathbf{E} je radialno, polje \mathbf{B} pa v desno krožno okoli toka.

Če tokovno premico z nabojem izmagnemo iz osi Z , sta polji \mathbf{E} in \mathbf{B} sledeči:

$$\mathbf{E}(T) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}}{P^2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(P_x, P_y)}{P^2} \quad \text{in podobno}$$

$$\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}}{P^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_x P_x + \mathbf{e}_y P_y)}{P^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{(-\mathbf{e}_x P_y + \mathbf{e}_y P_x)}{P^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{(-P_y, P_x)}{P^2}.$$

Vektor \mathbf{P} leži v XY ravnini in sega od nanelektrene oziroma tokovne premice (točke T') do točke T . Vrnili smo se nazaj in uporabili vektorsko množenje, ki ga vsebuje Biot-Savartov zakon: smernik \mathbf{e}_z pripada izbrani usmeritvi toka v premici, vektorsko množenje pa določa desno krožno smer polja \mathbf{B} . Vektorja $(-P_y, P_x)$ in (P_x, P_y) sta si očitno pravokotna.

Polje para tokovnih premic. Zanimiva sta primera dveh vzporednih tokovnih premic: premici s tokoma v isto smer in premici s tokoma v nasprotnih smereh. Prvi primer je model dveh vrvi, ki oblikujeta linijski vodnik 400 kV daljnovoda, drugi primer pa je model dvovoda oziroma vodnikov, ki povezujeta vir in breme.

TOKA V ISTO SMER. Med vzporedni tokovni premici položimo os Y . Točki $(-s, 0)$ in $(s, 0)$ določata njuni legi, s točko $T(x, y)$ pa določata tudi oba vektorja razdalj,

$$\mathbf{P}_1 = (P_{1x}, P_{1y}) = (x + s, y) \quad \text{in} \quad \mathbf{P}_2 = (P_{2x}, P_{2y}) = (x - s, y) \quad \Rightarrow \quad P_1 = \sqrt{(x + s)^2 + y^2} \quad \text{in} \quad P_2 = \sqrt{(x - s)^2 + y^2}.$$

Magnetno polje vzporednega para linijskih tokov je vektorska vsota dveh polj,

$$\mathbf{B}(T) = \mathbf{B}^{(1)}(T) + \mathbf{B}^{(2)}(T) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{(-P_{1y}, P_{1x})}{P_1^2} + \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{(-P_{2y}, P_{2x})}{P_2^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{(-y, x + s)}{(x + s)^2 + y^2} + \frac{(-y, x - s)}{(x - s)^2 + y^2} \right),$$

s komponentama

$$B_x(x, y) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{y}{(x+s)^2 + y^2} + \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} \right) \text{ in } B_y(x, y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{x+s}{(x+s)^2 + y^2} + \frac{x-s}{(x-s)^2 + y^2} \right),$$

električno polje enako naelektrennih vzporednih premic pa je

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}^{(1)}(T) + \mathbf{E}^{(2)}(T) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{(P_{1x}, P_{1y})}{P_1^2} + \frac{(P_{2x}, P_{2y})}{P_2^2} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x+s, y)}{(x+s)^2 + y^2} + \frac{(x-s, y)}{(x-s)^2 + y^2} \right).$$

Ker velja pravokotnost in sorazmernost med $\mathbf{E}^{(1)}$ in $\mathbf{B}^{(1)}$ in enako med $\mathbf{E}^{(2)}$ in $\mathbf{B}^{(2)}$, velja pravokotnost in sorazmernost tudi med \mathbf{E} in \mathbf{B} . Če je tako, potem je slika ekvipotencialk električnega polja hkrati tudi slika gostotnic magnetnega polja, saj so silnice električnega polja vedno pravokotne na ekvipotencialke. Gostotnice polja \mathbf{B} obkrožijo toka ločeno, nekoliko vstran od njiju pa oba hkrati s krivuljami ledvičnih oblik (gostotnice so t. i. Cassinijeve krivulje).

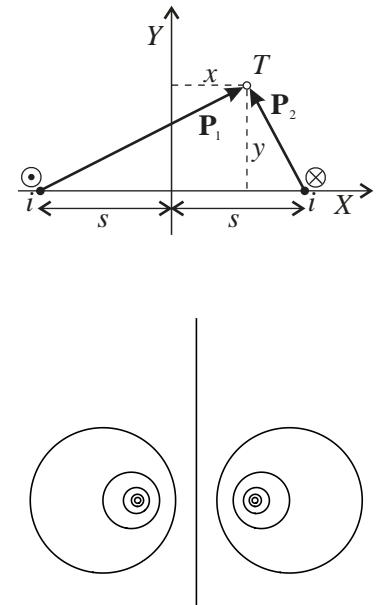
TOKA V NASPROTNIH SMEРЕH. Pri linijskih virih tokov v nasprotnih smereh in pri nasprotnih nabojih na njih se rezultati od prej ločijo le v notranjih predznakih:

$$\mathbf{B}(T) = \mathbf{B}^{(1)}(T) + \mathbf{B}^{(2)}(T) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{(-P_{1y}, P_{1x})}{P_1^2} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{(-P_{2y}, P_{2x})}{P_2^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{(-y, x+s)}{(x+s)^2 + y^2} - \frac{(-y, x-s)}{(x-s)^2 + y^2} \right),$$

$$B_x(x, y) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{y}{(x+s)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} \right) \text{ in } B_y(x, y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{x+s}{(x+s)^2 + y^2} - \frac{x-s}{(x-s)^2 + y^2} \right),$$

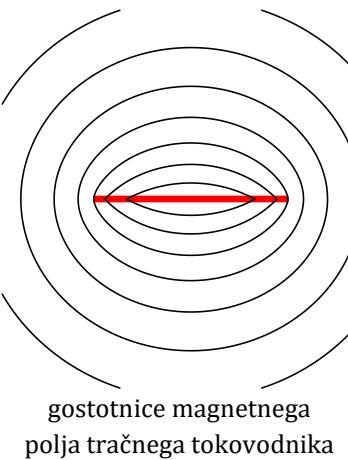
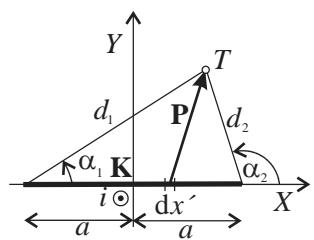
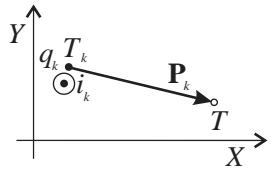
$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}^{(1)}(T) + \mathbf{E}^{(2)}(T) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{(P_{1x}, P_{1y})}{P_1^2} - \frac{(P_{2x}, P_{2y})}{P_2^2} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x+s, y)}{(x+s)^2 + y^2} - \frac{(x-s, y)}{(x-s)^2 + y^2} \right).$$

Če smo pri paru nasprotno naelektrennih premic ugotovili, da so ekvipotencialke v XY ravnini krožnice, ki obkrožajo oba naboja, so te iste krivulje v primeru tokovnih premic gostotnice magnetnega polja. Usmeritev gostotnic polja \mathbf{B} je takšna, da obkrožijo tok v desno.



gostotnice magnetnega polja tokov v nasprotnih smereh





Polji E in B snopa linijskih virov. Nazoren primer je snop daljnovodnih vrvi; naj je teh n , s tokovi i_1, i_2 do i_n in z naboji q_1, q_2 do q_n . Polji **E** in **B** zapišemo kot vektorsko vsoto prispevkov posameznih nabojev oziroma tokov na tale način:

$$\mathbf{E}(T) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{P}_k}{P_k^2} q_k \quad \text{in} \quad \mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}_k}{P_k^2} i_k.$$

Če so toki in naboji časovne funkcije, postanejo takšna tudi njihova polja. V področju nizkih frekvenc, kamor vsekakor sodi omrežna frekvanca 50 Hz, sta zapisa obeh polj sledeča:

$$\mathbf{E}(T, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{P}_k}{P_k^2} q_k(t) \quad \text{in} \quad \mathbf{B}(T, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}_k}{P_k^2} i_k(t).$$

Izkaže se, da drsita konici obeh vektorjev po elipsah, kar smo omenili tudi že v razpravi o električnem polju.

Polje B tračnega tokovodnika. Tok v vodniku modeliramo s tokovno oblogo **K**. Trak širine $2a$, ki vodi tok i vzdolž osi Z, naj leži v ravnini $y = 0$. Robova traku določata točki $(-a, 0)$ in $(a, 0)$. Obloga **K** ima širinsko gostoto $K_z = i/2a$. Tok i sestavlja niz tokovnih premic s tokom $di = K_z dx'$. Vektor od premice v $T'(x', 0)$ do točke $T(x, y)$ je

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y) = (x - x', y) \Rightarrow P = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}.$$

Polje $d\mathbf{B}$ v točki T od tokovne premice v $T'(x', 0)$ je

$$d\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 di}{2\pi} \frac{(-P_y, P_x)}{P^2} \Rightarrow dB_x(T) = -\frac{\mu_0 K_z}{2\pi} \frac{y}{(x - x')^2 + y^2} dx' \quad \text{in} \quad dB_y(T) = \frac{\mu_0 K_z}{2\pi} \frac{x - x'}{(x - x')^2 + y^2} dx'.$$

Do končnega rezultata vodita spodnji integraciji:

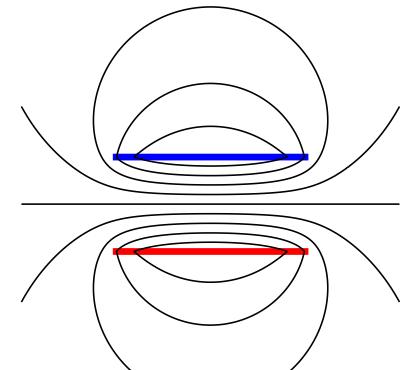
$$B_x(T) = -\frac{\mu_0 K_z}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{y}{(x - x')^2 + y^2} dx' = \frac{\mu_0 K_z}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{x - a}{y} - \tan^{-1} \frac{x + a}{y} \right) = \frac{\mu_0 K_z}{2\pi} (\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$B_y(T) = \frac{\mu_0 K_z}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{x - x'}{(x - x')^2 + y^2} dx' = \frac{\mu_0 K_z}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 K_z}{2\pi} \ln \frac{d_1}{d_2}.$$

Rezultat je nazoren: kota α_1 in α_2 ter razdalji d_1 in d_2 določajo točka $T(x, y)$ ter robni točki $(-a, 0)$ in $(a, 0)$ traku. Tuk nad in tik pod trakom v točkah $T_+(\alpha_1 = 0 \text{ in } \alpha_2 = \pi)$ in $T_-(\alpha_1 = 2\pi \text{ in } \alpha_2 = \pi)$ sta

$$B_x(T_+) = -\frac{\mu_0 K_z}{2} \quad \text{in} \quad B_x(T_-) = \frac{\mu_0 K_z}{2} \Rightarrow B_x(T_+) - B_x(T_-) = -\mu_0 K_z.$$

Tangentni komponenti polja imata z obeh strani traku stalni vrednosti, njuna razlika pa je sorazmerna gostoti obloge K_z . Lastnost neveznosti (skoka) tangentne komponente magnetnega polja ob tokovni oblogi je lastnost, ki jo bomo v širšem kontekstu obravnavali pri mejnih pogojih. V točkah, ki ležijo ob sredini traku, sta razdalji d_1 in d_2 praktično enaki, zato je tam $B_y \cong 0$. Zanimiv je primer tračnega dvovoda, da zgornji in spodnji trak vodita toka v nasprotnih smereh. Rezultančno magnetno polje med trakoma je takrat dokaj homogeno.



gostotnice magnetnega polja tračnega dvovoda

Polje valjnega tokovodnika. Valjni tokovodnik je model za tankostenski cevni tokovodnik. Os Z naj sovpada z osjo valja. Tok i vzdolž valja polmera a oblikuje niz tokov $di = (i/2\pi)d\varphi'$ na lokacijah $(x', y') = (a \cos \varphi', a \sin \varphi')$. Naj nas zanima polje \mathbf{B} v točki $T(x, 0)$. Vektor \mathbf{P} med točkama T' in T je

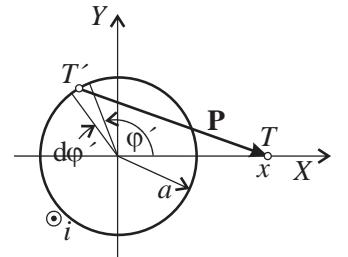
$$\mathbf{P} = (P_x, P_y) = (x - x', -y') \Rightarrow P = \sqrt{(x - x')^2 + y'^2}.$$

Difencial $d\mathbf{B}$ in njegovi komponenti so:

$$d\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 di}{2\pi} \frac{(-P_y, P_x)}{P^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi^2} \frac{(y', x - x')}{(x - x')^2 + y'^2} d\varphi' = (dB_x(x), dB_y(x)).$$

$$dB_x(x) = \frac{\mu_0 i}{4\pi^2} \frac{a \sin \varphi' d\varphi'}{(x - a \cos \varphi')^2 + (a \sin \varphi')^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi^2} \frac{a \sin \varphi' d\varphi'}{x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi'} \quad \text{in}$$

$$dB_y(x) = \frac{\mu_0 i}{4\pi^2} \frac{(x - a \cos \varphi') d\varphi'}{(x - a \cos \varphi')^2 + (a \sin \varphi')^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi^2} \frac{(x - a \cos \varphi') d\varphi'}{x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi'}.$$



Komponenti $B_x(T)$ in $B_y(T)$ dobimo z integracijo:

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 i a}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \varphi' d\varphi'}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi')} = 0,$$

$$B_y(x) = \frac{\mu_0 i}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x - a \cos \varphi') d\varphi'}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi')} = \frac{\mu_0 i}{4\pi x} \left(1 + \frac{x^2 - a^2}{|x^2 - a^2|} \right) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi x} & x > a. \end{cases}$$

Prva integracija da vrednost nič, $B_x = 0$, druga pa ima dva rezultata: v notranjosti valja je polje enako nič, v zunajosti pa tolikšno, kot da bi bil tok z valja združen v tokovni premici v njegovi osi. Polje \mathbf{B} je očitno rotacijsko simetrično, zato je smiselno, da prestopimo v valjni koordinatni sistem:

$$B_\varphi(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} & \rho > a. \end{cases}$$

Sporočilo rezultata bomo v nadaljevanju uporabili pri rotacijsko simetričnih strukturah, ki imajo vodnike iz nemagnetnih materialov (baker, aluminij, srebro, ...). Izkaže se, da so slednji, za razliko od značilnih magnetikov (železo, nikelj, kobalt), praktično neodzivni na magnetno polje.

Polje cevnega tokovodnika. Cevni vodniki niso redki; pri napajanju močnih bremen se luknjo koristi za pretok tekočine (npr. olja), ki odvaja joulsko toploto iz cevi. Cevni vodnik krožnega preseka naj ima notranji radij a_0 , zunanji pa a ; presek ima površino $\pi(a^2 - a_0^2)$, tok i pa gostoto $J_z = i/\pi(a^2 - a_0^2)$. Cevni tokovodnik sestavlja niz soosnih tokovnih valjev. Iz polja tokovnega valja sledi, da je polje \mathbf{B} v luknji ($\rho < a_0$) enako nič, izven cevi ($\rho > a$) pa je takšno, kot da bi bil ves tok cevnega vodnika združen v tokovni premici v njegovi osi. Ovrednotimo še polje \mathbf{B} v cevini steni. Za polje na oddaljenosti ρ od osi vodnika je odgovorna količina toka do tega radija, torej tok $\pi(\rho^2 - a_0^2)J_z = i(\rho^2 - a_0^2)/(a^2 - a_0^2)$. Ko združimo vse tri rezultate, dobimo:

$$B_\varphi(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho \leq a_0 \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \frac{(\rho^2 - a_0^2)}{(a^2 - a_0^2)} & a_0 < \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} & \rho > a \end{cases} \Rightarrow B_\varphi(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho \leq a_0 \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - a_0^2)} \left(\rho - \frac{a_0^2}{\rho} \right) & a_0 < \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} & \rho > a. \end{cases}$$

V luknji vodnika ni magnetnega polja, v steni cevi narašča do največje vrednosti, $\mu_0 i / 2\pi a$, zatem pa z oddaljevanjem od površine cevi usiha k nič.

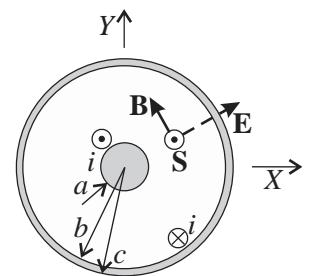
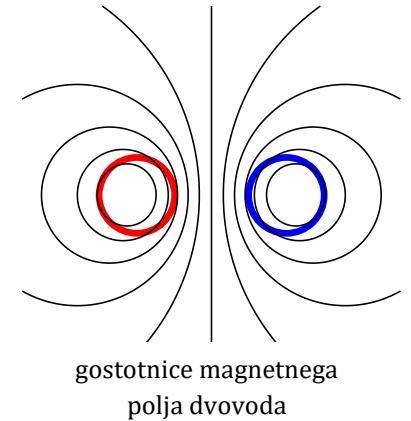
Polje tokovodnika krožnega preseka. Tokovodnik krožnega preseka je najpogosteji. Izhajamo iz prejšnjega primera; izberemo, da je $a_0 = 0$, in že imamo rezultat,

$$B_\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi a^2} & \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} & \rho > a. \end{cases}$$

Gostota magnetnega pretoka od vrednosti nič v osi linearno narašča do največje vrednosti $\mu_0 i / 2\pi a$, zatem pa usiha k nič. Rezultat je pomemben. Uporabimo ga lahko tudi v primeru večvodniškega sistema. Polje v okolici tokovodnikov krožnih presekov določa vektorska vsota polj tokovnih premic, polje v notranjosti posameznega vodnika pa vektorska vsota polj sosednjih tokovnih premic in lastnega polja po formuli za notranjost tokovodnika.

Polje \mathbf{B} v koaksialnem kablu. Žila polmera a naj vodi tok i vzdolž osi Z : povratni tok je v plašču polmerov b in c . Polje povratnega toka je od osi do polmera b enako nič; v tem področju je za \mathbf{B} odgovoren tok žile in je takšen, kot ga določa prejšnji primer. Za polje \mathbf{B} v plašču do radija ρ je odgovoren tok $i - i(\rho^2 - b^2)/(c^2 - b^2) = i(c^2 - \rho^2)/(c^2 - b^2)$ do tega radija. Če vse to upoštevamo, dobimo

$$B_\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi a^2} & \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} & a < \rho \leq b \\ \frac{\mu_0 i (c^2 - \rho^2)}{2\pi \rho (c^2 - b^2)} & b < \rho \leq c \\ 0 & \rho > c \end{cases} \Rightarrow B_\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi a^2} & \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} & a < \rho \leq b \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi(c^2 - b^2)} \left(\frac{c^2}{\rho} - \rho \right) & b < \rho \leq c \\ 0 & \rho > c. \end{cases}$$



Od osi do površine žile polje linearno narašča, od tam do notranje stene plašča upada, v sami steni plašča pa še strmeje; izven kabla ni magnetnega polja.

Enosmerne razmere v koaksialnem kablu. Za razumevanje kabla ali katerekoli druge izvedbe dvovoda, ki povezuje breme z generatorjem, sta pomembni polji \mathbf{E} in \mathbf{B} . Pri napetosti u in toku i sta polji med žilo in plaščem kabla sledeči:

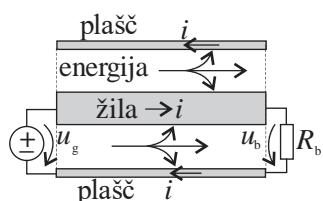
$$E_\rho(\rho) = \frac{u/\ln(b/a)}{\rho} \quad \text{in} \quad B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}.$$

Električno polje je radialno, magnetno pa krožno, v desno okoli toka v žili. Vektora električne poljske jakosti in gostote magnetnega pretoka določata Poyntigov vektor \mathbf{S} , ki ga v nemagnetni snovi podaja zapis $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$; vektor se izraža v W/m^2 in govori o gostoti moči oziroma o gostoti energijskega toka,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{e}_\rho E_\rho(\rho) \times \mathbf{e}_\varphi B_\varphi(\rho)/\mu_0 = \mathbf{e}_z \frac{ui/\ln(b/a)}{\rho^2} = \mathbf{e}_z S_z(\rho) \quad \Rightarrow \quad S_z(\rho) = \frac{ui/\ln(b/a)}{\rho^2}.$$

Vektor \mathbf{S} je usmerjen vzdolž osi kabla. Presek kabla med žilo in plaščem je kolobar z radijema a in b ; energijski tok skozi površino kolobara je enak integralu gostote moči,

$$\int_a^b S_z(\rho) 2\pi\rho d\rho = \frac{ui}{\ln(b/a)} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = ui.$$



Vstopna moč v kabel (pri generatorju, kjer je $u = u_g$) je $u_g i$, izstopna moč iz kabla (pri bremenu, kjer je $u = u_b$) pa je $u_b i$. Razlika moči $(u_g - u_b)i$ so joulske izgube v žili in plašču. Tudi to moč moremo pojasniti z vektorjem \mathbf{S} . Padec napetosti $(u_g - u_b)$ je posledica tangentne komponente poljske jakosti E_z ob žili in ob plašču; produkt $\mathbf{e}_z E_z \times \mathbf{e}_\varphi B_\varphi/\mu_0$ je ob žili usmerjen v žilo, ob plašču, kjer je tok nasprotne smeri, pa v plašč. Rezultat bilance energijskega toka je sledeč: energijski tok generatorja vstopa v kabel, potuje skozi prostor med žilo in plaščem, delno pronica v žilo in plašč kabla, preostali tok pa iz kabla izstopi in doseže breme.

Polje B krožne tokovne zanke. Tokovna krožnica je model za krožno zanko (ovojsko) iz žice zanemarljive debeline. Ovoj je pomemben samostojni element, je pa tudi gradnik različnih tuljav. Krožnica polmera a naj ima center v izhodišču, leži naj v ravnini XY , tok i v njej pa naj je usmerjen v desno okoli osi Z . Splošen tokovni element se nahaja v točki s koordinatami $(x', y', 0) = (a \cos \varphi', a \sin \varphi', 0)$; ustreza mu vektor $d\mathbf{l}' = (-\mathbf{e}_x \sin \varphi' + \mathbf{e}_y \cos \varphi')ad\varphi'$. Polje $d\mathbf{B}$ tokovnega elementa z jakostjo $id\mathbf{l}'$ je v točki $T(x, y, z)$ slediče:

$$d\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 i ad\mathbf{l}'}{4\pi R^3} \times \mathbf{R} = \frac{\mu_0 i ad\varphi'}{4\pi} (-\mathbf{e}_x \sin \varphi' + \mathbf{e}_y \cos \varphi') \times \frac{\mathbf{e}_x(x - a \cos \varphi') + \mathbf{e}_y(y - a \sin \varphi') + \mathbf{e}_z z}{((x - a \cos \varphi')^2 + (y - a \sin \varphi')^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Tokovna struktura je na videz preprosta, določitev njenega magnetnega polja pa nikakor. Integracija komponent dB_x , dB_y in dB_z privede do popolnih eliptičnih integralov, ki se jih v sklepnom koraku izračuna numerično. Izjema so točke v osi ovoja, $T(0, 0, z)$. Takrat se zgornji izraz zelo poenostavi:

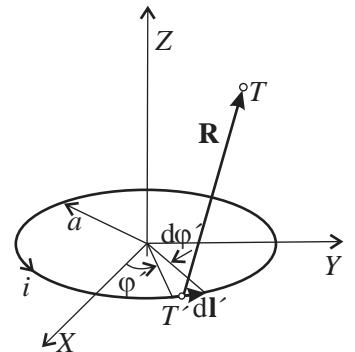
$$d\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 i ad\varphi'}{4\pi} (-\mathbf{e}_x \sin \varphi' + \mathbf{e}_y \cos \varphi') \times \frac{-\mathbf{e}_x a \cos \varphi' - \mathbf{e}_y a \sin \varphi' + \mathbf{e}_z z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \frac{(\mathbf{e}_x z \cos \varphi' + \mathbf{e}_y z \sin \varphi' + \mathbf{e}_z a)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi'.$$

Integracija po kotu φ' od 0 do 2π da preprost rezultat:

$$B_x(z) = \frac{\mu_0 i a z}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = 0, \quad B_y(z) = \frac{\mu_0 i a z}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' = 0$$

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 i a^2}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

V središču krožnice ($z = 0$) je polje najmočnejše ($\mu_0 i / 2a$), z oddaljevanjem od središča, $|z| > 0$, pa slabi. Vrnimo se k točkam izven osi. Zanje obstaja zelo preprosta alternativa, in sicer, da obod krožnice aproksimiramo z mnogokotnikom, katerega stranice predstavljajo niz kratkih tokovnih elementov. Izraziti je potrebno vektorje $\delta\mathbf{l}_k$ stranic mnogokotnika, katerih krajišča ležijo na krožnici, in vektorje \mathbf{R}_k , ki so usmerjeni iz središč T_k posameznih stranic k točki T . Vektorska vsota polj $\delta\mathbf{B}^{(k)}$ posameznih tokovnih elementov ustreza približku rezultančnega polja \mathbf{B} ,



30:29

$$\mathbf{B}(T) \cong \sum_{k=1}^n \delta \mathbf{B}^{(k)}(T) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\delta \mathbf{l}_k \times \mathbf{R}_k}{R_k^3}.$$

Če je delitveno število n primerno veliko, je tako dobljen rezultat lahko zelo soliden. Gostotnice magnetnega polja so sklenjene krivulje, ki objemajo tok v zanki. Zanimiv je primer, ko je radij krožnice majhen glede na oddaljenost točke T od centra krožnice: gostotnice magnetnega polja so podobne silnicam električnega polja električnega dipola. Polje \mathbf{B} ene ali več soosnih krožnih tokovnih zank lahko služi tudi kot model geomagnetnega polja.

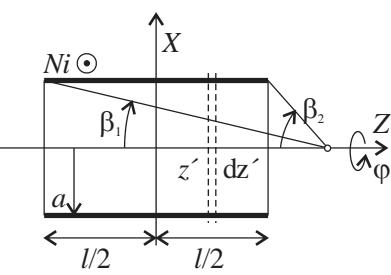
Polje \mathbf{B} ravne tuljave. Enakomerno gosto spiralno navito žico na nemagnetenem tulcu oziroma tuljavniku imenujemo ravna tuljava ali solenoid. V tuljavnik lahko po potrebi vstavljeni tudi feromagnetno jedro. Tokrat imejmo v mislih t. i. zračno tuljava. Če je korak h spirale dosti manjši od radija a tuljavnika, moremo vsak zavoj žice razumeti kot krožni ovoj, spiralno navitje pa kot niz krožnih zank. Zanimalo nas bo polje \mathbf{B} v osi tuljave. Če ima navitje N zavojev, je dolžina tuljave $l = Nh$. Tok Ni okoli osi tuljavnika predstavimo z nizom obročev širine dz' s toki $di = (Ni/l)dz'$. Polje dB_z tokovnega obroča izhaja iz izraza za polje B_z tokovne krožnice, pri tem pa prejšnje oznake ustrezno spremenimo,

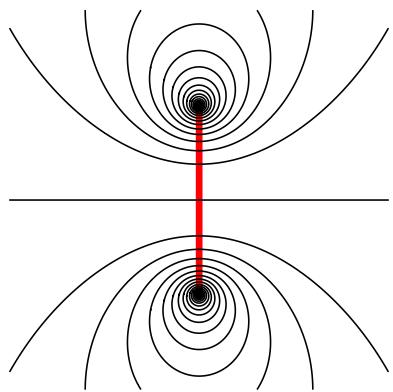
$$dB_z(z) = \frac{\mu_0 di}{2} \frac{a^2}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 a^2 Ni}{2l} \frac{dz'}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}}.$$

Sledi še integracija prispevkov od začetka do konca tuljave,

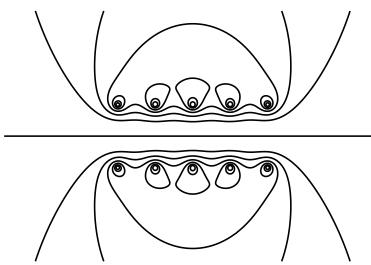
$$B_z(z) = \frac{\mu_0 a^2 Ni}{2l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 Ni}{2l} \left(\frac{z + l/2}{\sqrt{a^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{a^2 + (z - l/2)^2}} \right) = \frac{\mu_0 Ni}{2l} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

Kosinusa kotov β_1 in β_2 določa lega točke $T(z)$ glede na obe »grli« ravne tuljave. Zanimiv je primer dolge ravne tuljave, ko je $l \gg a$. V točkah v osrednjem delu tuljave, $\beta_1 \cong \pi$ in $\beta_2 \cong 0$, ima gostota magnetnega pretoka približno konstantno vrednost, $B_z \cong \mu_0 Ni/l$, ki velja (kot se izkaže) tudi za celotno osrednje področje tuljave; osrednji del notranjosti tuljave je področje dokaj homogenega polja.

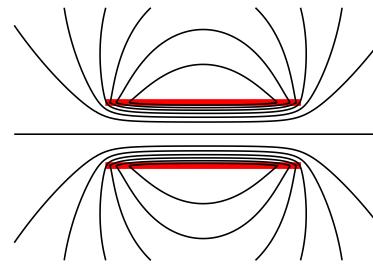




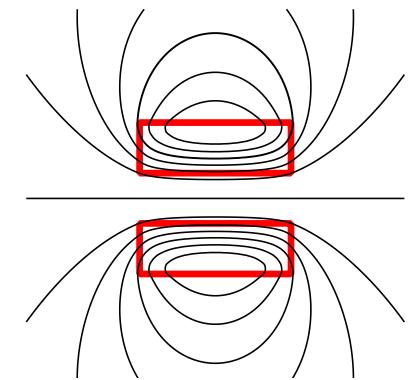
gostotnice magnetnega polja
krožne tokovne zanke



gostotnice magnetnega
polja tuljave s petimi ovoji



gostotnice magnetnega polja
tuljave z gostim navitjem



gostotnice magnetnega polja
tuljave z večslojnim navitjem

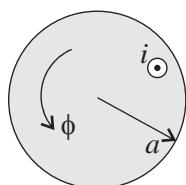


§3. Magnetni pretok

Po vzoru električnega pretoka ϕ_e in vektorja gostote električnega pretoka \mathbf{D} vpeljemo v magnetiki pojem magnetnega pretoka $\phi_m = \phi$; magnetni pretok ϕ skozi ploskev \mathcal{A} določa ploskovni integral vektorja gostote magnetnega pretoka \mathbf{B} ,

$$\phi_e = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \quad \phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}} B_n da = \int_{\mathcal{A}} d\phi,$$

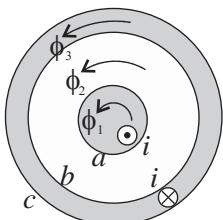
in se izraža v $Vs = Wb$. Prvi hip še ne vemo, čemu bo pretok ϕ služil, se bo pa v nadaljevanju izkazalo, da ima pomembno vlogo pri delu magnetne sile, elektromagnetni indukciji, induktivnostih in pri magnetni energiji. Najprej si oglejmo nekaj primerov pretokov, ki so aktualni pri ravnih tokovodnikov.



PRETOK V TOKOVODNIKU KROŽNEGA PRESEKA. Gostota magnetnega pretoka v tokovodniku polmera a je $B_\varphi(\rho) = \mu_0 i \rho / 2\pi a^2$. Gostotnice polja \mathbf{B} so krožnice okoli osi vodnika. Zanima nas množina magnetnega pretoka od osi do površine vodnika. Za ploskev \mathcal{A} izberemo pravokotnik dolžine l in širine a , ki leži med osjo in površino vodnika. Normalna pravokotnika naj je vzporedna z vektorjem \mathbf{B} , da je $B_n = B_\varphi$. Kot diferencial ploskve izberemo trak dolžine l in širine $d\rho$. Diferencial $d\phi$ magnetnega pretoka skozi trak je $B_\varphi(\rho) l d\rho$. Pretok skozi pravokotnik oziroma pretok v tokovodniku okoli osi je:

$$\phi = \int_{\mathcal{A}} d\phi = \int_0^a B_\varphi(\rho) l d\rho = \int_0^a \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi a^2} l d\rho = \frac{\mu_0 i l}{4\pi}.$$

Presenetljivo: pretok je neodvisen od radija vodnika. Pri toku 1000 A in dolžini 100 m je pretok okoli osi 10 mVs. Če bi bil vodnik iz magnetne snovi (npr. jeklen), bi bil pretok lahko celo nekaj tisočkrat večji, vendar o tem kasneje.



PRETOKI V KOAKSIALNEM KABLU. Izrazili bomo pretoke okoli osi kabla: v žili (od 0 do a), med žilama (od a do b) in v plašču (od b do c). Če uporabimo izraze za gostoto magnetnega pretoka v teh treh prostorih iz prejšnjega razdelka, dobimo:

$$\phi_1 = \int_0^a \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi a^2} l d\rho = \frac{\mu_0 i l}{4\pi}, \quad \phi_2 = \int_a^b \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} l d\rho = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{in} \quad \phi_3 = \int_b^c \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \frac{(c^2 - \rho^2)}{(c^2 - b^2)} l d\rho = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \left(\frac{c^2}{(c^2 - b^2)} \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{2} \right).$$



Celoten pretok $\phi_{1,2,3}$ med osjo in površino kabla je

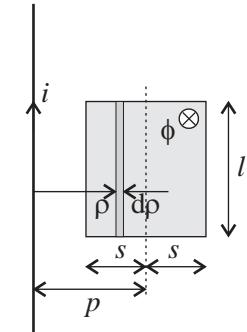
$$\phi_{1,2,3} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{c^2}{(c^2 - b^2)} \ln \frac{c}{b} \right).$$



PRETOK SKOZI PRAVOKOTNO PLOSKOV OB RAVNEM TOKOVODNIKU. Imejmo pravokotnik širine $2s$ in dolžine l vzdolž tokovodnika, katerega središče je za p oddaljeno od osi vodnika. Razmere so podobne kot pri pretoku ϕ_2 iz prejšnjega primera,

$$\phi = \int_{p-s}^{p+s} \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} l d\rho = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{p+s}{p-s} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Razdalji $p_1 = p - s$ in $p_2 = p + s$ sta oddaljenosti stranic dolžine l od osi vodnika. Ta preprost izraz bomo kasneje še večkrat uporabili; enako velja tudi za naslednji primer.



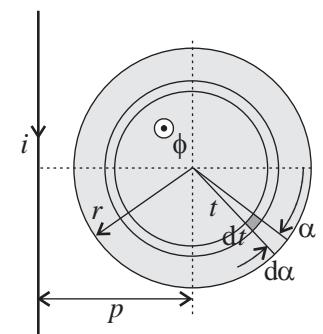
PRETOK SKOZI KROŽNO PLOSKOV OB RAVNEM TOKOVODNIKU. Tokrat imejmo krožno ploskev polmera r , ki leži z vodnikom v isti ravnini; njeno središče je iz osi tokovodnika izmagnjeno za p . Za diferencial ploskve izberemo izsek kolobarja; njegovo ploščino določa produkt $(td\alpha)dt$, oddaljenost od osi tokovodnika pa razdalja $\rho = p + t \cos \alpha$. Diferencial pretoka je

$$d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} (td\alpha)dt = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{da dt}{(p + t \cos \alpha)}.$$

Pretok skozi krožno ploskev izračunamo v dveh korakih. Najprej izrazimo pretok $d\phi_{\text{kol.}}$ skozi kolobar širine dt ,

$$d\phi_{\text{kol.}} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{da dt}{(p + t \cos \alpha)} = 2 \frac{\mu_0 i}{2\pi} t dt \int_0^\pi \frac{da}{p + t \cos \alpha} = \mu_0 i \frac{t dt}{\sqrt{p^2 - t^2}},$$

zatem pa še pretok skozi krožno ploskev kot integral pretokov skozi vse kolobarje med 0 in r ,



$$\phi = \int_0^r \mu_0 i \frac{tdt}{\sqrt{p^2 - t^2}} = \mu_0 i \int_0^r \frac{tdt}{\sqrt{p^2 - t^2}} = \mu_0 i \left(p - \sqrt{p^2 - r^2} \right).$$



Vprašanje izvornosti magnetnega polja. Pojem izvornosti vektorskega polja že poznamo. Srečali smo ga pri tokovni gostoti \mathbf{J} (kontinuitetna enačba), pri jakosti \mathbf{E} (Gaussov zakon), pri polarizaciji \mathbf{P} (izvornost vektorja polarizacije) in na koncu še pri gostoti \mathbf{D} (električni pretok):

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dQ_{\text{not.}}}{dt} \quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{not.}}}{\epsilon_0} \quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = -Q_{\text{not. pol.}} \quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{not. pro.}}$$

Te izvornosti se izražajo z množino naboja, ki ga sklenjena ploskev \mathcal{A} objame. Vprašanje je tokrat sledeče:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = ?$$

Da bi bili pri iskanju odgovora dovolj splošni, moramo izhajali iz magnetnega polja $d\mathbf{B}$ tokovnega elementa. Zanj smo v prejšnjem razdelku ugotovili, da se krožno vrtinči okoli osi tokovnega elementa. Na krožnicah \mathcal{K} okoli osi je vektor $d\mathbf{B}$ tangenten. Pretočne cevke magnetnega polja so soosni toroidi okoli osi tokovnega elementa. Če v prostor pretočnih cevk postavimo sklenjeno ploskev \mathcal{A} , potem določene cevke to ploskev prebadajo, vendar izključno parnokrat. Zaradi tega so njihovi vstopni pretoki enaki izstopnim. Magnetni pretok gostote $d\mathbf{B}$ skozi sklenjeno ploskev je enak nič, $\oint_{\mathcal{A}} d\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$.

Ker velja neizvornost za polje vsakega tokovnega elementa, velja tudi za rezultančno polje katerekoli tokovne strukture,

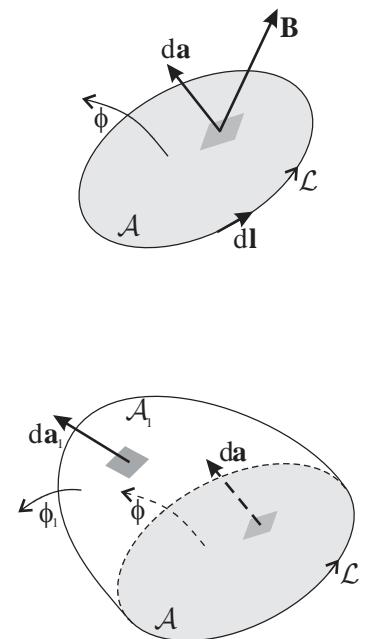
$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} B_n \cdot da = 0.$$

Ta lastnost polja \mathbf{B} je pomembna: imenujemo jo Gaussov zakon vektorja gostote magnetnega pretoka. Če so se izvornosti polj \mathbf{J} , \mathbf{E} , \mathbf{P} in \mathbf{D} navezovale na elektrine, potem ob tej enačbi radi rečemo: »magnetin« ni. Čeravno jih ni, še ne pomeni, da so »odpisane«; pri matematičnem modeliranju elektromagnetnih struktur so aktualni tako magnetine kot magnetni toki.

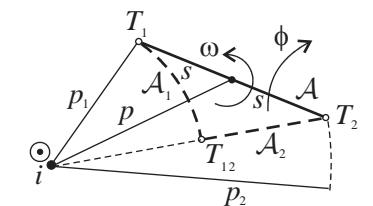
»**Magnetni pretok skozi sklenjeno krivuljo**«. Naslov je v navednicah zato, ker je ϕ definiran kot pretok skozi ploskev. Rob ploskve \mathcal{A} je sklenjena krivulja \mathcal{L} . Usmerjenost ploskvic da na ploskvi \mathcal{A} in smer obhoda vzdolž krivulje \mathcal{L} ureja tale dogovor: če se po krivulji \mathcal{L} pomikamo v izbrani smeri, nam usmerjenost ploskvic da na \mathcal{A} določa desno pravilo.

Izberimo sklenjeno krivuljo \mathcal{L} in smer obhoda, nanjo pa napnimo ploskvi \mathcal{A} in \mathcal{A}_1 tako, da se njuni usmeritvi skladata z desnim pravilom. Ploskvi oblikujeta sklenjeno ploskev, ki ograuje vmesni prostor \mathcal{V} . Tako kot je narisano, vstopa pretok ϕ skozi \mathcal{A} v \mathcal{V} , pretok ϕ_1 pa iz \mathcal{V} izstopa skozi \mathcal{A}_1 . Zaradi neizvornosti $\phi_1 + (-\phi) = 0$, sta si pretoka enaka, $\phi_1 = \phi$. Kaj ugotavljamo: magnetne pretoke skozi ploskve \mathcal{A} , \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 ... z robom \mathcal{L} ne določajo ploskve, ampak sklenjena krivulja \mathcal{L} . Naslov »magnetni pretok skozi sklenjeno krivuljo« sedaj verjetno razumemo. Pretoku ϕ skozi ploskev \mathcal{A} lahko povsem enakovredno rečemo tudi pretok $\phi_{\mathcal{L}}$ skozi sklenjeno krivuljo \mathcal{L} . Pretok $\phi_{\mathcal{L}}$ predstavlja pretok, ki ga usmerjena krivulja \mathcal{L} obkroži v desno oziroma v pozitivni smeri. Objeti pretok bo pomemben pri obravnavi elektromagnetne indukcije, kjer bodo vlogo krivulje \mathcal{L} prevzeli ovoji, zanke in navitja.

V teoriji elektromagnetizma je poznan vektorski magnetni potencial \mathbf{A} , katerega krivuljni integral, $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, določa pretok $\phi_{\mathcal{L}}$ skozi zanko \mathcal{L} . Zveza med magnetnim potencialom in gostoto magnetnega pretoka je matematično zahtevnejša, zato se potenciala \mathbf{A} pri osnovah elektrotehnike praviloma izogibamo.



PRETOK SKOZI VRTEČ PRAVOKOTNI OVOJ OB RAVNEM TOKOVODNIKU. Naloga spominja na vprašanje pretoka skozi pravokotno ploskev ob ravnem tokovodniku iz začetka razdelka. Rob te ploskve je pravokotna zanka, ki jo pogosto poseblja žični ovoj. Nova okoliščina je, da se ovoj vrti, npr. s kotno hitrostjo ω okoli osi, ki je vzporedna s tokovodnikom. V trenutku $t = 0$ naj ležita ovoj in tokovodnik v isti ravnini, do kasnejšega časa t pa se ovoj zasuče za kot ωt . Izrazimo pretok skozi ovoj ob tem času. Lego ovoja rišemo v prerezu, v ravnini XY. Oznake obdržimo takšne, kot so bile v izhodiščnem zgledu: 2s je



širina zanke, l njena dolžina vzdolž tokovodnika, p oddaljenost osi vrtenja od tokovodnika, p_1 in p_2 pa oddaljenosti stranic ovoja dolžine l do vodnika ob času t .

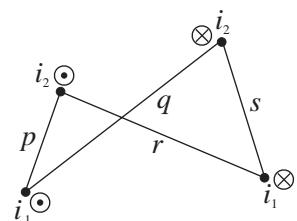
Če bi želeli določiti pretok ϕ skozi poševno pravokotno ploskev, bi imeli določene težave. Lahko pa se jim izognemo, če se opremo na lastnost neizvornosti in izberemo ploskev, ki je prav tako napeta na pravokotno zanko. Skicirajmo si dela krožnic s polmeroma p_1 in p_2 in označimo tri značilne točke, T_1, T_{12} in T_2 . Če vzamemo v obzir dolžino zanke (iz papirja), moremo med točki T_1 in T_{12} napeti ukrivljen trak \mathcal{A}_1 dolžine l , ki je izsek žlebu polmera p_1 , med točki T_{12} in T_2 pa raven trak \mathcal{A}_2 enake dolžine. Unija trakov je spet ploskev, ki je napeta med točki T_1 in T_2 . Pretok ϕ_1 skozi ukrivljen trak je enak nič, saj je (zaradi pravokotnosti) na njem $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$, rezultat za pretok ϕ_2 skozi raven trak pa poznamo že od prej, zato je

$$\phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \phi_1 + \phi_2 = \underbrace{\int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}}_{\perp} + \underbrace{\int_{\mathcal{A}_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}}_{\parallel} = 0 + \frac{\mu_0 il}{2\pi} \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Za pretok skozi pravokoten ovoj sta odgovorni oddaljenosti p_1 in p_2 , ki ju določata kosinusni stavek in kot ωt :

$$\phi = \frac{\mu_0 il}{2\pi} \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu_0 il}{4\pi} \ln \frac{p_2^2}{p_1^2} = \frac{\mu_0 il}{4\pi} \ln \frac{p^2 + s^2 + 2ps \cos \omega t}{p^2 + s^2 - 2ps \cos \omega t} = \phi(t).$$

Dobili smo časovno funkcijo pretoka skozi pravokotni ovoj. Pretok $\phi(t)$ med vrtenjem periodično niha med vrednostma $\pm(\mu_0 il / 2\pi) \ln((p+s)/(p-s))$ s frekvenco $f = \omega / 2\pi$. V žičnem ovoju bi se v tem primeru pojavil inducirani električni tok kot posledica inducirane napetosti v ovoju.



PRETOKA MED VZPOREDNIMA DVOVODOMA. V praksi se večkrat zgodi, da imamo več vzporednih dvovodov. Vsak dvovod je v splošnem element svojega tokokroga. Izrazimo pretok enega dvovoda zaradi toka v sosednjem dvovodu na dolžini l . Iz prejšnjega zgleda spoznavamo, da so za zapis pretokov pomembne razdalje med osemi vodnikov (p, q, r in s). Izraziti želimo pretok skozi prvi dvovod zaradi toka v drugem, $\phi_1^{(2)}$, in pretok skozi drugi dvovod zaradi toka v prvem, $\phi_2^{(1)}$. Vsak od pretokov je vsota pretokov zaradi tokov v levi in desni žici:



$$\phi_1^{(2)} = \frac{\mu_0 i_2 l}{2\pi} \ln \frac{r}{p} + \frac{\mu_0 i_2 l}{2\pi} \ln \frac{q}{s} = \frac{\mu_0 i_2 l}{2\pi} \ln \frac{rq}{ps},$$

$$\phi_2^{(1)} = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{q}{p} + \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{r}{s} = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{rq}{ps}.$$

Pri vseh štirih sumandih je pomembno, da jih znamo zapisati glede na smer toka, označeno smer pretoka in vsakokratne oznake, temu pa sledi še ureditev izrazov.



§4. Vrtinčnost magnetnega polja

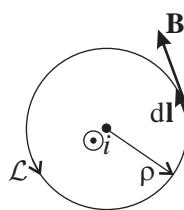
Vprašanje vrtinčnosti magnetnega polja je ena težjih vsebin. Težavo delata pojem vrtinčnosti, ki je nekaj novega, pa tudi dolga pot, ki vodi do splošnega zaključka. Besedo vrtinčnost smo v elektrostatiki zgolj omenili, pri tokovnem elementu pa smo z vrtinčnostjo označili naravo njegovega magnetnega polja – gostotnice polja dajejo vtis vrtinčenja. Iz fizike poznano vrtinčenje zraka, tornado (vrtinčast nevihtni oblak), vrtinčenje vode nad izlivom, turbulenco itn. Pričakujemo sledeče: če je magnetno polje tokovnega elementa vrtinčno, je takšno tudi vsakršno drugo magnetno polje. Pri tem pa ne gre zgolj za kvalitativni opis oblikovanosti gostotnic magnetnega polja, ampak tudi za kvantitativno vrednotenje jakosti vrtinca, kar bo naš cilj.



V elektrostatiki smo definirali napetost zanke ($u_L = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$) in ugotovili, da je (zaradi $u_L = 0$) polje \mathbf{E} nevrtinčno; res: če izrišemo silnice kateregakoli elektrostaticnega polja, spominjajo te na tokovnice laminarnega toka, pretoka brez vrtincev oziroma turbulenc. Magnetno polje je čisto nasprotje: njegove gostotnice opredajo tokovodnike, delajo vrtince. Očitno je vrtinčnost magnetnega polja v tesni zvezi s toki. In kako nameravamo vrtinčnost kvantitativno ovrednotiti? Možnost ponuja zgornji podobna integracija – tokrat vektorja \mathbf{B} po sklenjeni krivulji ali pentli \mathcal{L} . Postavimo si tole vprašanje:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = ?$$

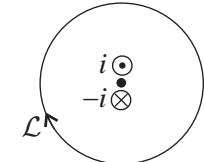
Začnimo kar pri poljih, ki jih že poznamo, in poskušajmo prepoznavati možno vsebino desne strani, ki je zaenkrat »?«. Najbolj nazorna so polja ravnih tokovodnikov. Tudi pentla \mathcal{L} naj bo v začetku preprosta, kasneje pa bolj zapletena.



RAVEN TOKOVODNIK IN KROŽNA PENTLJA. Pot \mathcal{L} naj je krožnica polmera ρ okoli osi vodnika. Na njej je $\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi B_\varphi$ tangenten, element krožne konture pa je $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_\varphi \rho d\varphi$; sledi:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \rho d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\varphi \Rightarrow \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\varphi = \mu_0 i.$$

Rezultat je zanimiv: jakost vrtinca je na vseh krožnicah okoli tokovodnika enaka in sorazmerna toku, ki ga te objamejo. Če krožnico opremimo še z opno \mathcal{A} , potem sledi zaključek: jakost vrtinca na krožnici je sorazmerna toku skozi opno \mathcal{A} , ki ga usmerjena krožnica objame v pozitivni smeri. Lahko pa pot \mathcal{L} usmerimo nasprotno, v smeri poti urinega kazalca. Jakost vrtinca je (zaradi $\mathbf{e}_\varphi \rho d\varphi \rightarrow -\mathbf{e}_\varphi \rho d\varphi$) tokrat $-\mu_0 i = \mu_0(-i)$. Res, nova usmerjena krožnica obkroži v desno tok $-i$, ki pa je usmerjen v list papirja (saj je i usmerjen iz njega).

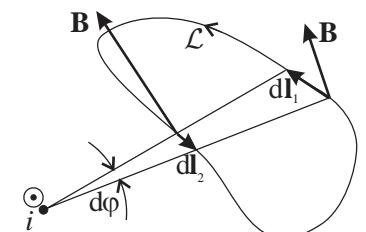
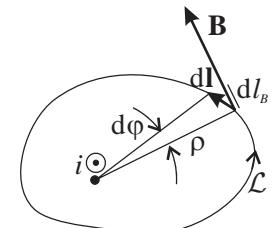


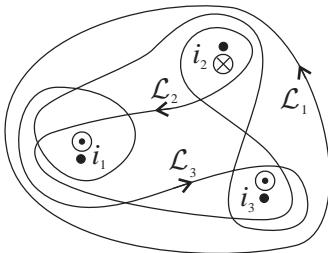
RAVEN TOKOVODNIK IN POLJUBNA PENTLJA. Pot \mathcal{L} naj je sedaj katerakoli. Možnosti sta dve, ali je takšna, ki obkroži vodnik, ali pač ne. Začnimo s prvo možnostjo. Produkt $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl_B$. Projekcija dl_B ustreza dolžini krožnega loka $\rho d\varphi$, kjer je ρ oddaljenost elementa $d\mathbf{l}$ od vodnika; sledi:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \rho d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\varphi \Rightarrow \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\varphi = \mu_0 i.$$

Oblika pentlje očitno ni pomembna, ampak le dejstvo, da pentlja tok objame – tokrat ga objame enkrat v pozitivni smeri. Če bi polžasto zavijačena pentlja obkrožila tokovodnik k -krat, bi bila jakost vrtinca enaka $k\mu_0 i$.

Druga možnost je, da pentlja vodnika ne obkroži, da leži nekje ob strani. Narišimo diferencialni klin s kotom $d\varphi$, ki seže do konturnih elementov $d\mathbf{l}_1$ in $d\mathbf{l}_2$. Projekciji dl_{1B} in dl_{2B} sta nasprotnih predznakov in sorazmerni, vrednosti poja B na teh mestih pa obratnosorazmerni z oddaljenostjo od vodnika; produkta $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_1$ in $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_2$ imata zato nasprotni vrednosti. Pri intergraciji po pentlji se takšni pari odštejejo in končnen iznos jakosti vrtinca na pentlji je enak nič. Sporočilo je: če pentlja toka ne obkroži, je jakost vrtinca na njej enaka nič.





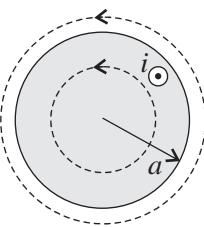
VEČ TOKOVODNIKOV IN VEČ PENTELJ. V tem primeru bomo smiselno uporabili pridobljena spoznanja. Imejmo tri vzporedne vodnike s toki i_1, i_2 in i_3 in pentlje, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ in \mathcal{L}_3 . Magnetno polje je vsota: $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)} + \mathbf{B}^{(3)}$. Jakost vrtinca na vsaki pentlji izrazimo z vsoto treh integralov,

$$\oint_{\mathcal{L}_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}_k} \mathbf{B}^{(1)} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{L}_k} \mathbf{B}^{(2)} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{L}_k} \mathbf{B}^{(3)} \cdot d\mathbf{l},$$

vsakega od njih pa ovrednotimo glede na kратnost obkrožitve posameznega toka v pozitivni smeri; dobimo:



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} \mu_0(i_1 - i_2 + i_3) & \text{na } \mathcal{L}_1 \\ \mu_0(i_1 + i_2 + i_3) & \text{na } \mathcal{L}_2 \\ \mu_0(2i_1 - i_2 - i_3) & \text{na } \mathcal{L}_3. \end{cases}$$



UPORABA VRTINČNOSTI PRI TOKOVODNIKU KROŽNEGA PREREZA. Dosedanja spoznanja moremo tudi preveriti. Izbiramo raven tokovodnik krožnega prereza. Obdelali smo ga s pomočjo Biot-Savartovega zakona, vendar »se delajmo«, kot da rezultata ne poznamo. Skozi os vodnika položimo ravnilo in na njej izberimo točko T . V vodniku izberimo dve tokovni premici s tokoma di , ki sta si zrcalni prek ravnine. Skiciramo vektorja njunih magnetnih polj; ugotavljamo, da je rezultančni vektor pravokoten na ravnilo. Potemtakem je tudi magnetno polje celotnega toka v vodniku pravokotno na to ravnilo oziroma krožno okoli osi vodnika: $\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi B_\varphi$. Izrazimo jakost vrtinca na krožnici polmera ρ in pišimo:



$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} B_\varphi dl = B_\varphi \overbrace{\oint_{\mathcal{L}} dl}^{2\pi\rho} = 2\pi\rho B_\varphi = \begin{cases} \mu_0 \left(i \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} \right) & \rho \leq a \\ \mu_0 i & \rho > a. \end{cases}$$



Upoštevali smo, da krožnica znotraj vodnika objame manjši del toka. Če zgornje delimo še z $2\pi\rho$, dobimo znan rezultat:

$$B_\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi a^2} & \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} & \rho > a. \end{cases}$$

Podobno bi lahko postopali tudi pri cevnem vodniku in koaksialnem kablu. Daljši uvod v vrtinčnost smo opravili na primeru ravih tokovodnikov. V nadaljevanju se želimo z vprašanjem vrtinčnosti oziroma z integralom $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ približati najbolj splošni tokovni strukturi. V mislih imejmo zavite vodnike, zanke, navitja ali objekte, v katerih so električni toki.

Vrtinčnost magnetnega polja tokovne niti. Lotevamo se osnovne teme tega razdelka. Tokovno nit naj predstavlja niz tokovnih elementov s tokom i vzdolž krivulje \mathcal{K} . Če je nit kratka, je to tokovni element, če pa je niti več, more biti to že veja, zanka, vezje, navitje ali objekt s tokovnim poljem. Z magnetnim poljem tokovne niti bomo izvedli nekaj izpeljav in razmislekov, ki bodo vodili k jakosti vrtinca splošnega magnetnega polja. Izhajamo iz Biot-Savartovega zakona,

$$\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} \frac{i ds}{R^3} \times \mathbf{R}.$$

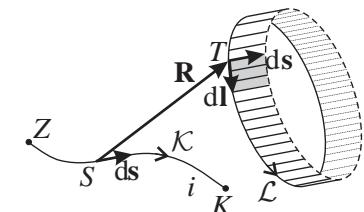
Krivulja \mathcal{K} upodablja tokovno nit od začetne točke Z do končne točke K . Vrtinčnost njenega polja bomo ugotovljali na sklenjeni pentli \mathcal{L} , ki leži v njeni bližini. Zgornji $\mathbf{B}(T)$ vstavimo v jakost vrtinca:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} \frac{i ds}{R^3} \times \mathbf{R} \right) \cdot d\mathbf{l}.$$

Konturni element ds leži na krivulji \mathcal{K} , konturni element $d\mathbf{l}$ na pentli \mathcal{L} , \mathbf{R} pa je vektor razdalje med njima (usmerjen je od ds v točki S na \mathcal{K} k $d\mathbf{l}$ v točki T na \mathcal{L}). Zgornji zapis preoblikujmo: izpostavimo konstantni del, zamenjamo vrstni red integracij in upoštevamo lastnost mešanega produkta: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{K}} \frac{(ds \times \mathbf{R}/R) \cdot d\mathbf{l}}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} \oint_{\mathcal{L}} \frac{(d\mathbf{l} \times ds) \cdot \mathbf{R}/R}{R^2}.$$

Če ds translatorno prenesemo k točki T na \mathcal{L} , lahko skiciramo trak ob tej pentji. V produktu $d\mathbf{l} \times ds$ prepoznamo vektor ploskvice $d\mathbf{a}_{pl}$ na traku. Skalarni produkt vektorja ploskvice in enotskega vektorja (\mathbf{R}/R) da površino $d\mathbf{a}_{pl}$ vidnega dela

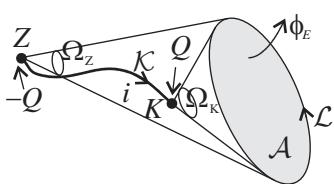


te ploskvice iz točke S , kvocient vidnega dela ploskvice in kvadrata oddaljenosti (R^2) pa določa prostorski kot $d\Omega_{pl}$, pod katerim je iz točke S videti to ploskvico,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} \oint_{\mathcal{L}} \frac{(dl \times ds) \cdot \mathbf{R}/R}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} \oint_{\mathcal{L}} \frac{da_{pl} \cdot \mathbf{R}/R}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} \oint_{\mathcal{L}} \frac{da_{pl}}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} \oint_{\mathcal{L}} d\Omega_{pl}.$$

Integral prostorskih kotov ploskvic na traku da prostorski kot $d\Omega_{traku}$, pod katerim je videti trak iz točke S ,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} \oint_{\mathcal{L}} d\Omega_{pl} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} d\Omega_{traku}.$$



Za integracijo po krivulji \mathcal{K} si pomagajmo z naslednjo prostorsko predstavo. Če se (kot opazovalci) navidezno pomikamo iz točke Z po \mathcal{K} k točki K (tako kot gre integracija) in opazujemo pentljko \mathcal{L} , nam je ta vse bliže. Pri vsakem pomiku za ds na \mathcal{K} se prostorski kot lijaka, pod katerim zremo pentljko \mathcal{L} iz točke S , poveča ravno za $d\Omega_{traku}$. Integral teh kotov pa je v končnem enak ravno razliki prostorskih kotov lijakov, pod katerima vidimo pentljko \mathcal{L} iz točk K in Z (kota Ω_K in Ω_Z),

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} d\Omega_{traku} = \mu_0 i \frac{(\Omega_K - \Omega_Z)}{4\pi}.$$

Rezultat je sorazmerno preprost, vendar preveč geometrijski. Poiščimo njegovo električno vsebino. Narava tokovne niti je podobna naravi tokovnega elementa: po kontinuitetni enačbi ji pripadata še naboja $\pm Q$, naboj Q v točki Z in naboj $-Q$ v točki K , da velja $i = Q'$. Naboja $\pm Q$ ustvarjata v prostoru Coulombovo polje \mathbf{E} . V elektrostatiki smo v okviru Gaussovega zakona definirali pretok ϕ_E . Privzemimo, da je na pentljko \mathcal{L} napeta opna \mathcal{A} . Izrazimo pretok ϕ_E polja \mathbf{E} skozi opno \mathcal{A} . Ta je sestavljen iz dveh pretokov, pretoka polja $\mathbf{E}^{(+)}$ zaradi naboja Q , ki ga pentljka \mathcal{L} objame v pozitivni smeri, in pretoka polja $\mathbf{E}^{(-)}$ zaradi naboja $-Q$, ki ga pentljka \mathcal{L} objame v negativni smeri,

$$\phi_E = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E}^{(+)} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E}^{(-)} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_K - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_Z = \frac{Q (\Omega_K - \Omega_Z)}{4\pi\epsilon_0}.$$

Če celoten pretok ϕ_E odvajamo po času, sledi

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \phi'_E = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \frac{(\Omega_K - \Omega_Z)}{4\pi} = \frac{i}{\varepsilon_0} \frac{(\Omega_K - \Omega_Z)}{4\pi} \Rightarrow \mu_0 i \frac{(\Omega_K - \Omega_Z)}{4\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \phi'_E \Rightarrow \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \phi'_E.$$

Jakost vrtinca smo uspeli izraziti s časovnim odvodom pretoka ϕ_E skozi opno \mathcal{A} oziroma pretoka, ki ga pentlja \mathcal{L} objame v pozitivni smeri.

Zanimiva je še konstelacija, ki jo dobimo, ko pentljo \mathcal{L} pomaknemo nekoliko v levo, da ta obkroži nit \mathcal{K} . Pri tem premiku se oba prostorska kota povečata, pri tem pa kot Ω_K preseže 2π oziroma polovico polnega kota (4π). Izrazimo slednjega s komplementarnim kotom $\Omega_K^{\text{kom.}} = 4\pi - \Omega_K$, ki je zato ustrezno manjši od 2π ; jakost vrtinca je tokrat:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \frac{(\Omega_K - \Omega_Z)}{4\pi} = \mu_0 i \frac{(4\pi - \Omega_K^{\text{kom.}} - \Omega_Z)}{4\pi} = \mu_0 i - \mu_0 i \frac{(\Omega_K^{\text{kom.}} + \Omega_Z)}{4\pi}.$$

In kako bi sedaj interpretirali desno stran? Pojavi se člen $\mu_0 i$, ki ga v prejšnjem primeru ni bilo. Ta je sorazmeren toku (i), ki ga pentlja \mathcal{L} objame v pozitivni smeri. Ostaja še drugi člen. Ponovno se sklicujemo na naboja $\pm Q$ in na polji $\mathbf{E}^{(+)}$ in $\mathbf{E}^{(-)}$. Izrazimo pretok ϕ_E skozi opno \mathcal{A} oziroma pretok, ki ga pentlja \mathcal{L} objame v pozitivni smeri. Pretok je spet sestavljen iz dveh delov, pretoka polja $\mathbf{E}^{(+)}$ zaradi naboja Q , ki ga pentlja \mathcal{L} objame v negativni smeri, in pretoka polja $\mathbf{E}^{(-)}$ zaradi naboja $-Q$, ki ga pentlja \mathcal{L} ponovno objame v negativni smeri,

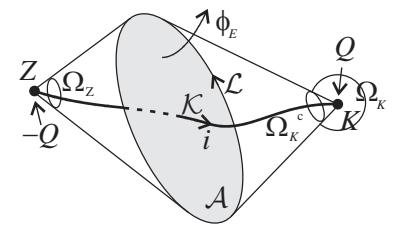
$$\phi_E = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E}^{(+)} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E}^{(-)} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \Omega_K^{\text{kom.}} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \Omega_Z = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{(\Omega_K^{\text{kom.}} + \Omega_Z)}{4\pi}.$$

Ko celoten pretok odvajamo po času, sledi

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \phi'_E = -\frac{Q'}{\varepsilon_0} \frac{(\Omega_K^{\text{kom.}} + \Omega_Z)}{4\pi} = -\frac{i}{\varepsilon_0} \frac{(\Omega_K^{\text{kom.}} + \Omega_Z)}{4\pi} \Rightarrow -\mu_0 i \frac{(\Omega_K^{\text{kom.}} + \Omega_Z)}{4\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \phi'_E.$$

Z združitvijo obojega sledi:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i + \varepsilon_0 \phi'_E).$$



Jakost vrtinca magnetnega polja je tokrat sorazmerna množini $(i + \varepsilon_0 \phi'_E)$, ki jo pentlja \mathcal{L} objame v pozitivni smeri.

Povzemimo rezultata, ki ju dobimo za jakost vrtinca magnetnega polja pri obeh konstelacijah tokovne niti \mathcal{K} in pentlje \mathcal{L} :

$$\oint_{\substack{\mathcal{L} \\ \mathcal{K} \text{ ne prebada opne } \mathcal{A} \text{ na } \mathcal{L}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \phi'_E \quad \text{in} \quad \oint_{\substack{\mathcal{L} \\ \mathcal{K} \text{ prebada opno } \mathcal{A} \text{ na } \mathcal{L}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i + \varepsilon_0 \phi'_E).$$

Pri prvi \mathcal{K} ne prebada opne \mathcal{A} na \mathcal{L} , pri drugi pa jo. Ko je niti z različnimi toki več, da oblikujejo povsem splošno tokovno strukturo (vodnik, vejo, vezje, zanko, navitje ali objekt s tokovnim poljem), velja za polja enih niti levi, za polja drugih desni zapis jakosti vrtinca, za magnetno polje vseh tokovnih niti pa velja

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i_{\text{skozi } \mathcal{A}} + \varepsilon_0 \phi'_{E \text{ skozi } \mathcal{A}}) = \mu_0 \left(\int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right) = \mu_0 \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a},$$

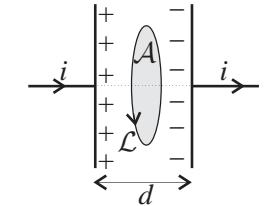
kjer smo na koncu časovni odvod prenesli pod integral in integrala združili. Dobili smo splošen zapis jakosti vrtinca na pentlji \mathcal{L} . Vektor $\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t = \mathbf{J}_{\text{tot}}$ smo srečali pri Gaussovem zakonu in ugotovili, da je neizvoren. Če je tak, je po vzoru neizvornosti magnetnega polja \mathbf{B} tudi ploskev \mathcal{A} v zgornjih integralih katerakoli, ki je napeta na pentljo \mathcal{L} .

Vrtinčnost magnetnega polja v dinamičnih razmerah. Dinamičnih razmer smo se delno dotaknili že v elektrostatiki, pri elekrenju kondenzatorja (polnilni tok) in gradnji električnega polja (električna energija). To priliko izkoriščamo tudi tu, da vsaj delno pojasnimo člen $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, ki nastopa v izrazu za jakost vrtinca magnetnega polja. Nazoren primer je spet kondenzator v procesu polnjenja ali praznjenja. Tok skozi priključni žici in elektrodi kondenzatorja ustvarja magnetno polje. Z vidika vrtinčnosti je zanimivo magnetno polje med elektrodama. Če privzamemo, da je med elektrodama idealen izolant (vakuum), $J = 0$, potem velja na pentljih, ki leži nekje med elektrodama, sledeče:

$$\oint_{\mathcal{L}} B_t dl = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} E_n da.$$

Naj sta plošči kondenzatorja vzporedna diska polmera r ; razmak med njima je d , priključni žici pa ležita v osi diskov. Če je $d \ll r$, je električno polje med diskoma skoraj homogeno: $E_n \cong u/d$. Za pentljko \mathcal{L} izberimo krožnico polmera ρ okoli osi diskov. Tangentna komponenta $B_t = B_\varphi$ gostote \mathbf{B} ima (zaradi rotacijske simetrije) na krožnici konstantno vrednost. Če vpletemo še kapacitivnost $C = \epsilon_0 \pi r^2/d$ in polnilni tok $i = Cu'$, dobimo sledeče:

$$\oint_{\mathcal{L}} B_t dl = 2\pi\rho B_t = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} E_n da = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\pi \rho^2 \frac{u}{d} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\pi \rho^2}{d} u' \Rightarrow B_t = B_\varphi = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\rho}{d} u' = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\rho}{d} \frac{i}{C} = \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi r^2}.$$



Rezultat je zanimiv: magnetno polje med diskoma je identično polju v tokovodniku krožnega preseka. Od osi k robovoma diskov enakomerno narašča do vrednosti $\mu_0 i / 2\pi r$. Če bi priključni žici premaknili iz osi diskov, bi se magnetno polje \mathbf{B} med njima spremenilo, ne bi bilo več rotacijsko simetrično, ohranila pa bi se jakost vrtinca $\oint_{\mathcal{L}} B_t dl$.

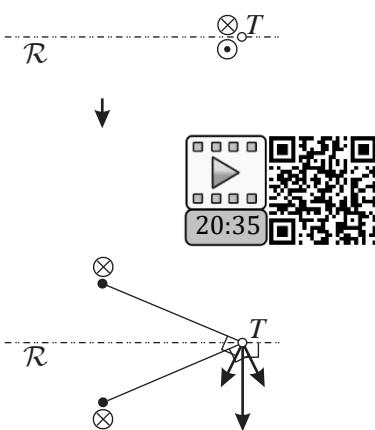
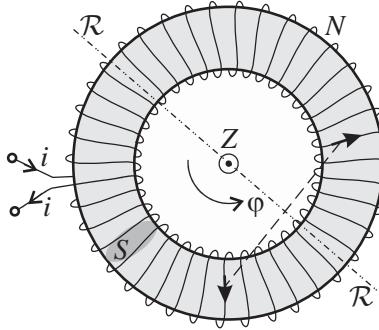
Kondenzator je nazoren primer kopičenja/kopnenja naboja, ne pa edini. V dinamičnih pogojih se kopičenje in kopnenje naboja dogaja na površinah prevodnih objektov, v katerih je neminovalno tudi električni tok. Jakost vrtinca magnetnega polja $\oint_{\mathcal{L}} B_t dl$ je v in ob objektih sestavljenka s pentljko \mathcal{L} objetega toka in odvoda pretoka $(i + \epsilon_0 \phi'_E)$.

Vrtinčnost magnetnega polja v časovno stalnih razmerah. Te razmere so značilne za enosmerna vezja in strukture, v katerih so toki časovno stalni. V njih ni področij, v katerih bi se nabolj kopičil ali kopnel. To pomeni, da je gostota naboja le krajevna funkcija, $\rho = \rho(T)$, in enako tudi njegovo električno polje $\mathbf{E} = \mathbf{E}(T)$, zato je $\partial \mathbf{E} / \partial t = \mathbf{0}$. Jakost vrtinca se takrat poenostavi: preide v obliko, ki smo jo pisali v primeru ravnih tokovodnikov in takrat verjetno še nismo slutili, da ima tudi že bolj splošno vrednost,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 i_{\text{skozi } \mathcal{A}}.$$



Jakost vrtinca je (do konstante μ_0) sorazmerna množini objetega toka v pozitivni smeri. To in neizvornost magnetnega polja sta lastnosti, ki določata magnetostatično polje, in sta tista osnova, ki bo značilno zaznamovala še ostale teme tega poglavja. Čas je, da z uporabo vrtinčnosti spoznamo tudi še kakšno novo magnetno polje.



Magnetno polje toka v toroidnem navitju. Toroid je geometrijsko telo, ki ga dobimo pri zavrtitvi ploskve okoli izbrane osi. Če ploskev, ki leži v polravnini φ , zavrtimo okoli osi Z, dobimo toroid (rotacijsko telo z luknjo). Primeri toroidov so prstan, obroč, rešilni pas in drugi. Toroid določata oblika in oddaljenost težišča zavrtene ploskve od osi. Pri površini S in oddaljenosti p težišča ploskve od osi Z je prostornina toroida ravno $2\pi p S$.

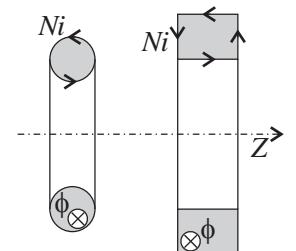
Če po obodu toroida skozi luknjo spiralno navijemo žico, delamo zavoje in jih enakomirno zamikamo okoli osi, pridemo po določenem številu obhodov do začetka: dobimo toroidno navitje oziroma toroidno tuljavo. V praksi so toroidi oziroma jedra tuljav iz nemagnetne, še večkrat pa iz magnetne snovi. Za začetek se omejimo na nemagnetna jedra, kot so karton, les, keramika in druge, ki se na magnetno polje ne odzivajo. V takšnem primeru smatramo jedro kot »prazen« prostor; navitju kot takšnemu rečemo takrat »zračna« tuljava.

Osnovni podatek toroidnega navitja je število zavojev N ; privzemimo, da so zavoji žice enakomerno gosto razmeščeni po obodu v enem ali v več slojih. Pri toku i skozi navitje nadaljujmo takole. Skozi os Z položimo ravnino \mathcal{R} , ki navitje razdeli na dve enaki polovici. Poljuben tokovni element (\nearrow) na eni strani ravnine ima sebi zrcalni tokovni element (\searrow) na drugi strani te ravnine. Vprašajmo se po smeri magnetnega polja teh dveh tokovnih elementov v splošni točki T na ravnini \mathcal{R} . Vsota magnetnih polj navpičnih delov, (\uparrow) in (\downarrow), tokovih elementov je v točki T enaka nič; polji se v celoti odštejeta. Vsota magnetnih polj vodoravnih delov, (\rightarrow) in (\leftarrow), tokovnih elementov ima v točki T smer, ki je pravokotna na \mathcal{R} ; tangentna dela se izničita, normalna pa se štejeta. Sklepamo: vsota magnetnih polj zrcalnih tokovnih elementov, (\nearrow) in (\searrow), je v T pravokotna na ravnino \mathcal{R} in hkrati pravokotna na polravnino φ . Od tod sledi, da je takšno tudi rezultančno polje \mathbf{B} vseh

tokovnih elementov toroidnega navitja: $\mathbf{B} = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$. Ugotovitev je pomembna in omogoča uporabo vrtinčnosti. Izberimo krožnico polmera ρ okoli osi Z . Krožnica je lahko takšna, da leži znotraj ali zunaj toroida. Če leži znotraj toroida, objame tok Ni , če je zunaj, pa je vsota objetega toka enaka nič,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B_\varphi = \mu_0 i_{\text{skozi } \mathcal{A}} = \begin{cases} \mu_0 Ni & T \text{ v toroidu} \\ 0 & T \text{ izven toroida} \end{cases} \Rightarrow B_\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 Ni}{2\pi\rho} & T \text{ v toroidu} \\ 0 & T \text{ izven toroida.} \end{cases}$$

Rezultat je zanimiv: magnetno polje v toroidu je identično polju tokovne premice s tokom Ni v osi toroida, izven toroida pa magnetnega polja ni. Slednje ni povsem točno. Tokovna gostota v spiralnem navitju ima tudi neznatno φ -komponento, katere magnetno polje ustreza toku i po površini toroida okoli osi Z oziroma toku v krožnem ovoju. Sklepamo torej, da je polje zunaj toroida najmanj N -krat šibkejše od polja znotraj njega. To polje se da izničiti če navijemo žico v dveh plasteh, da je $N/2$ ovojev v spirali v desno, $N/2$ ovojev pa v spirali v levo okoli osi Z . Zanimivo je tudi to, da rezultat ni odvisen od oblike preseka toroidnega jedra.



Preseki toroidov so različni: pravokotni, trapezni, krožni itn. Bodite presek toroidne tuljave krožen s polmerom r , katerega središče je od osi Z oddaljeno za p . Izrazimo magnetni pretok v toroidu. Rezultat že poznamo iz primera krožne ploskve ob ravnem tokovodniku, le da namesto takratnega i pišemo sedaj Ni :

$$\phi = \mu_0 Ni \left(p - \sqrt{p^2 - r^2} \right).$$

Magnetni pretok ϕ objamejo ovoji navitja N -krat. Spiralno toroidno navitje objame v resnici magnetni pretok $\psi = N\phi$. Če tvorimo kvocient spiralno objetega pretoka (t. i. magnetnega sklepa ψ) in toka, dobimo induktivnost tuljave,

$$\frac{N\phi}{i} = \mu_0 N^2 \left(p - \sqrt{p^2 - r^2} \right),$$

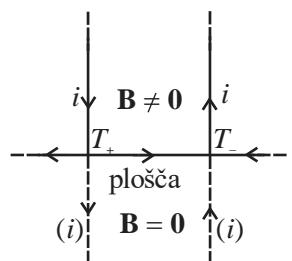
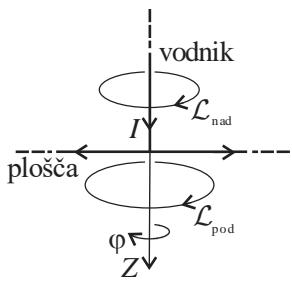
ki je merilo za magnetno energijo, v dinamičnih razmerah pa tudi za inducirano napetost vzdolž navitja (vendar o tem kasneje). Ostanimo še pri pretoku ϕ in si oglejmo primer tankega jedra, da je npr. r nekajkrat manjši od p :

$$\phi = \mu_0 N i p \left(1 - \sqrt{1 - (r/p)^2} \right) \cong \mu_0 N i p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}(r/p)^2 \right) \right) = \frac{\mu_0 N i r^2}{2p} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi p} S = B_\varphi(p) S \Rightarrow \phi \cong B_\varphi(p) S.$$

Približno vrednost pretoka v toroidu da že produkt gostote magnetnega pretoka na srednji gostotnici in ploščine preseka toroida. – Približno formulo smemo smiselno uporabiti tudi pri toroidnih tuljavah drugačnih presekov.

Magnetno polje ravninsko-radialnega toka. S takim tokom se srečamo, če tokovodnik priključimo na razsežno ploščo. Vstopni tok v ploščo se v njej radialno nadaljuje stran od priključnega mesta. Vprašajmo se po magnetnem polju takega, ravninsko-radialnega toka. Vstopni tokovodnik (tokovna polpremica) s tokom i naj leži v osi Z . Skozi to os položimo ravnino \mathcal{R} . Ta razdeli ploščo na dva dela. Vsak tokovni element z enega dela plošče ima na drugem delu plošče sebi zrcalni tokovni element. Vemo, da je njuno magnetno polje pravokotno na ravnino \mathcal{R} , torej v φ smeri. Magnetno polje radialnega toka v plošči je očitno krožno okoli osi Z – enako kot magnetno polje vstopnega tokovodnika. Izberimo krožnico polmera ρ okoli osi Z in zapišimo jakost vrtinca na njej,

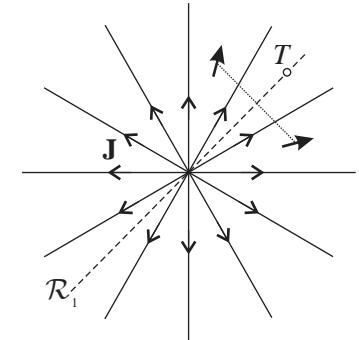
$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B_\varphi = \mu_0 i_{\text{skozi } \mathcal{A}} = \begin{cases} \mu_0 i & \mathcal{L}_{\text{nad ploščo}} \\ 0 & \mathcal{L}_{\text{pod ploščo}} \end{cases} \Rightarrow B_\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} & \mathcal{L}_{\text{nad ploščo}} \\ 0 & \mathcal{L}_{\text{pod ploščo}} \end{cases}$$



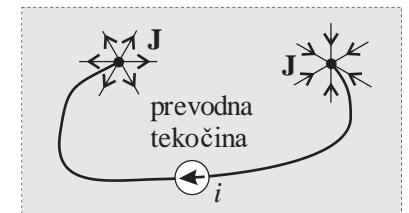
Magnetno polje nad ploščo (kjer je tokovodnik) je takšno, kot da bi se tok ne razširil po plošči, ampak bi se »navidezno« nadaljeval vzdolž osi Z . Magnetno polje ravninsko-radialnega toka je torej prav takšno kot od tokovne polpremice. To isto potruje tudi rezultat, ki ga dobimo za točke pod ploščo: da ustvarja ravninsko-radialni tok takšno magnetno polje pod ploščo, kot »navidezna« tokovna polpremica v osi zgornjega vodnika s tokom v naprotni smeri. Uporabimo dobljen rezultat v primeru vzporednih tokovodnikov, ki sta v stiku s prevodno ploščo. Tok i skozi levi vodnik vstopa v ploščo v točki T_+ , iz nje pa iz točke T_- izstopa skozi desni vodnik. V plošči se razvije tokovno polje, ki je vektorska vsota dveh ravninsko-radialnih tokov, katerega tokovnice spominjajo na silnice električnega polja v okolini dvovoda. Magnetno polje nad ploščo ustreza magnetnemu polju dvovoda, pod ploščo pa je magnetno polje enako nič.



Magnetno polje prostorsko-radialnega toka. Na takšen tok naletimo, če žici z virom izoliramo in potopimo globoko v prevodno tekočino, pri tem pa imata konca žic stik s tekočino. Izstopni tok iz žice se radialno širi v tekočino ter radialno iz vseh smeri zbira v žico na drugem koncu. V tekočini se razvije tokovno polje, katerega tokovnice spominjajo na silnice polja dveh točkastih nabojev $\pm Q$. Vprašajmo se po magnetnem polju enega prostorsko-radialnega toka. Skozi središčno točko tega toka položimo ravnino \mathcal{R}_1 . Ta ravnina razdeli tokovno polje na dva dela. Za vsak tokovni element iz prvega dela najdemo njemu zrcalni tokovni element v drugem delu. Njuno magnetno polje je v točki T na \mathcal{R}_1 pravokotno na \mathcal{R}_1 . Zatem zavrtimo ravnino \mathcal{R}_1 okoli premice, ki gre skozi T in središčno točko prostorsko-radialnega toka; dobimo ravnino \mathcal{R}_2 . Z enakim sklepanjem ugotovimo, da je magnetno polje v T pravokotno na ravnino \mathcal{R}_2 . Vektor, ki je pravokoten na obe ravnini, je lahko le vektor **0**. Zaključek je očiten: prostorsko-radialni tok nima magnetnega polja, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Rezultat je presenetljiv: tok je povsod, magnetnega polja pa nikjer. Če se vrnemo k izoliranim žicama in viru, ki so potopljeni v prevodno tekočino: magnetno polje v tekočini je določeno le s tokom v tokovni niti med točkama stika žic s tekočino.



Magnetna polja ob razelektritvah naelektrnih teles. Naelektrena krogle se sčasoma razelektri. Naboј odteka iz nje z izolacijskim tokom prostorsko-radialne oblike, ki pa nima »odtisa« v magnetnem polju. Krogl lahko zamenja poljubno nanelekreno telo. Izolacijski tok s telesa je neskončna vsota radialnih tokov, kar pomeni, da samo razelektritev telesa ne spremlja magnetno polje. Lahko sta nanelektreni elektrodi kondenzatorja ali pa je nanelektrnih več teles; zaključek je spet enak. Prvotno akumulirana električna energija v prostoru se prek izolacijskega toka pretvorji v toploto, kot smo to v elektrostatiki že povedali, samega procesa pa ne spremlja magnetno polje. Povedali smo še, da je temu tako le, če je izolant med telesi homogen. Brž ko temu ni tako, da je izolantov med prevodnimi telesi več, tokovno polje v njih ni več vsota čistih prostorsko-radialnih tokov. Takrat se v izolantih pojavi tudi magnetno polje in z njim povezana selitev prvotne električne energije iz enih podprostorov v druge. Tu se zgolj spomnimo vektorja $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$, ki smo ga takrat omenili, in z njim ta razdelek tudi zaključimo.



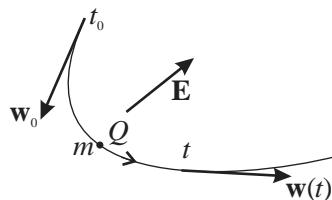
§5. Sile in delo v magnetnem polju

Poglavlje o magnetiki smo začeli z magnetno silo, spoznali osrednji vektor magnetnega polja in obe lastnosti, neizvornost in vrtinčnost. Obravnavali smo vrsto tokovnih struktur in ob njih pridobili občutek za oblikovanost magnetnega polja v prostoru. S pridobljenimi orodji in izkušnjami se vračamo k magnetni sili, o kateri želimo izvedeti še kaj več in se s tem pripraviti na teme, ki sledijo.



44:51

Naelektron delec v elektromagnetnem polju. Vračamo se k Lorentzovi sili, $\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B})$. Električni del (QE) smo spoznali v okviru Coulombovega polja. Na delo te sile se navezujejo količine, kot so napetost, potencialna energija in potencial. Precej manj pozornosti smo namenili magnetnemu delu sile ($Q\mathbf{w} \times \mathbf{B}$). Produkt $Q\mathbf{w}$ smo prepoznali kot jakost tokovnega elementa, o sili pa rekli le to, da je pravokotna na tokovni element. Tudi o gibanju delca v polju se nismo dosti spraševali. Morda je čas, da povemo nekaj tudi o kinematiki naelekturenega delca v elektromagnetnem polju. Za začetek razdelimo nalogo v dve lažji: delec v homogenem in časovno stalnem električnem polju in delec v homogenem in časovno stalnem magnetnem polju.



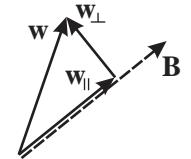
DELEC V HOMOGENEM ELEKTRIČNEM POLJU. Sila na delec je QE . Zaradi nje se delec z maso m giblje s pospeškom QE/m . Če ima delec ob času t_0 hitrost \mathbf{w}_0 in se nahaja v točki s krajevnim vektorjem \mathbf{r}_0 , potem sta ob kasnejšem času t njegova hitrost $\mathbf{w}(t)$ in krajevni vektor $\mathbf{r}(t)$ sledeča:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0 + (QE/m)(t - t_0) \quad \text{in} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{w}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(QE/m)(t - t_0)^2.$$

Zapis poznamo iz gibanja masne točke v homogenem polju težnosti, pri čemer vlogo QE/m prevzame gravitacijski pospešek \mathbf{g} . Tirnica gibanja naelekturenega delca je parabola, katere simetrala ustreza silnici polja \mathbf{E} . Kvadratu absolutne vrednosti hitrosti sledi tudi kinetična energija delca.

DELEC V HOMOGENEM MAGNETNEM POLJU. Sila na delec je $Q\mathbf{w} \times \mathbf{B}$. Če miruje, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, ga magnetna sila ne premakne, če pa se giblje vzdolž gostotnice, $\mathbf{w} \parallel \mathbf{B}$, se zaradi $\mathbf{w} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, nemoteno giba še naprej. To navaja na možnost, da \mathbf{w} razcepimo na dva dela, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\parallel} + \mathbf{w}_{\perp}$, na hitrost \mathbf{w}_{\parallel} vzdolž polja \mathbf{B} , na katero to polje ne vpliva, in hitrost \mathbf{w}_{\perp} , ki je prečna na \mathbf{B} . Prečni pospešek $d\mathbf{w}_{\perp}/dt$ delca z maso m določa potem takem le sila $Q(\mathbf{w}_{\perp} \times \mathbf{B})$ zaradi njegove prečne hitrosti,

$$\frac{d\mathbf{w}_{\perp}}{dt} = \frac{Q}{m}(\mathbf{w}_{\perp} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \frac{d\mathbf{w}_{\perp}}{dt} \perp \mathbf{w}_{\perp} \Rightarrow 2\mathbf{w}_{\perp} \cdot \frac{d\mathbf{w}_{\perp}}{dt} = \frac{d(\mathbf{w}_{\perp} \cdot \mathbf{w}_{\perp})}{dt} = \frac{d(w_{\perp}^2)}{dt} = 0.$$



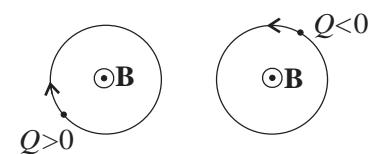
Pospešek in hitrost sta si očitno pravokotna; absolutna vrednost prečne hitrosti se ohranja. Tekšnemu gibanju ustreza enakomerno kroženje z radialnim pospeškom $w_{\perp}^2/r = \omega^2 r$. Iščemo radij r , kotno hitrost ω , frekvenco f in obhodni čas T :

$$\frac{w_{\perp}^2}{r} = \left| \frac{d\mathbf{w}_{\perp}}{dt} \right| = \left| \frac{Q}{m}(\mathbf{w}_{\perp} \times \mathbf{B}) \right| = \frac{|Q|w_{\perp}B}{m} \Rightarrow r = \frac{mw_{\perp}}{|Q|B} \quad \text{in} \quad \omega = \frac{w_{\perp}}{r} = \frac{|Q|B}{m} \quad \text{in} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|Q|B}{2\pi m} = \frac{1}{T}.$$

Za enakomerno kroženje poskrbi magnetna sila, ki je usmerjena k središču. Negativni delec kroži v desno, pozitivni pa v levo okoli vektorja \mathbf{B} . Smer kroženja delca v levo ali desno in predznak naboja poveže zveza med vektorjem gostote \mathbf{B} in vektorjem kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$, katerega usmerjenost določa desno pravilo,

$$\boldsymbol{\omega} = -(Q/m)\mathbf{B}.$$

Med kroženjem se delec pomika s hitrostjo \mathbf{w}_{\parallel} vzdolž polja \mathbf{B} ; tirnica sestavljenega gibanja je spirala ali heliks. Magnetno polje vzdržuje zatečeno stanje: delec ohranja absolutno vrednost hitrosti, magnetno polje delcu ne spremeni niti gibalne niti vrtilne količine.



DELEC V NEHOMOGENEM POLJU. V nehomogenem polju si s posebnima primeroma tirnic (parabola, heliks) ne moremo kaj prida pomagati, še posebej, če upoštevamo, da se polji v splošnem tudi časovno spremojata. Pa vendar! Ob času t_k , ko je delec z nabojem Q in maso m v točki T_k , je njegov pospešek sledeč:

$$\mathbf{a}(t_k) = \frac{\mathbf{F}_L(T_k, t_k)}{m} = \frac{Q}{m}(\mathbf{E}(T_k, t_k) + \mathbf{w}(t_k) \times \mathbf{B}(T_k, t_k)).$$

Če je kasnejši trenutek t_{k+1} »hip« za časom t_k , potem sta nova hitrost in nov krajevni vektor določena s približkoma:

$$\mathbf{w}(t_{k+1}) \cong \mathbf{w}(t_k) + \mathbf{a}(t_k)(t_{k+1} - t_k) \quad \text{in} \quad \mathbf{r}(t_{k+1}) \cong \mathbf{r}(t_k) + \mathbf{w}(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t_k)(t_{k+1} - t_k)^2,$$

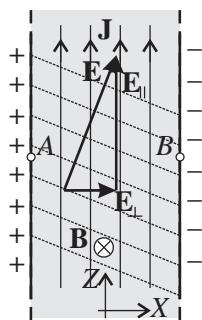
pri čemer naj je »hip« $(t_{k+1} - t_k)$ dovolj kratek in usklajen s prostorsko in časovno dinamiko polj $\mathbf{E}(T, t)$ in $\mathbf{B}(T, t)$. Na ta način moremo korakoma slediti delcu iz začetne točke T_0 in začetnega časa t_0 dalje.

Uporaba električne oziroma magnetne sile za usmerjanje naelektrennih delcev je široka: katodna cev (odklanjanje curka elektronov), elektrofilter (izločanje dimnih delcev), masni spektograf (ločevanje delcev po kriteriju mase ali naboja), ciklotron in betatron (pospeševalniki osnovnih delcev) itn.

Hallov pojav. Omenili smo ga pri Ohmovem zakonu v razširjeni obliki: $\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B} + \mathcal{E}_g) = \gamma(\mathbf{E} + (\mathbf{J}/\rho) \times \mathbf{B} + \mathcal{E}_g)$. V odsotnosti generatorskega polja ($\mathcal{E}_g = \mathbf{0}$) je v relacijo med tokovno gostoto in električno poljsko jakost vpletен še člen, ki izvira iz magnetnega dela Lorentzove sile,

$$\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + (\mathbf{J}/\rho) \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{J}/\gamma) - (\mathbf{J}/\rho) \times \mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

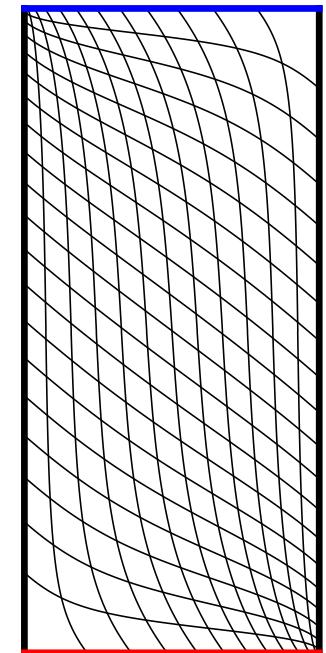
S kratko številsko oceno za baker smo takrat magnetni člen prepoznali kot neznaten, $|(\mathbf{J}/\rho) \times \mathbf{B}| \ll |\mathbf{J}/\gamma|$, in ga opustili, takrat pa nas zanima prav on.



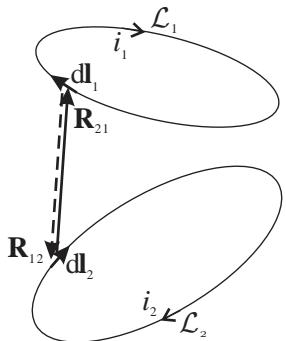
Imejmo ploščat vodnik širine s (po osi X) in debeline d (po osi Y), v katerem je električni tok i z gostoto \mathbf{J} vzdolž osi Z , $J_z = i/sd$. Vodnik naj je izpostavljen magnetnemu polju \mathbf{B} v smeri osi Y , B_y . Vektor električne poljske jakosti \mathbf{E} ima dva dela: $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{J}/\gamma$ v smeri osi Z , $E_z = J_z/\gamma$, in $\mathbf{E}_{\perp} = -(\mathbf{J}/\rho) \times \mathbf{B}$ v smeri osi X , $E_x = J_z B_y / \rho$. Novost je, da vektorja tokovne gostote in poljske jakosti nista vzporedna; med njima je kot α , $\tan \alpha = \gamma B_y / \rho$, ki določa odgon ekvipotencialik od osi X . Zaradi prečne komponente poljske jakosti E_x se na stenah vodnika pri $x = \mp s/2$ pojavit presežka nabojev z gostotama $\sigma(\mp s/2) = \pm \epsilon_0 E_x$, med točkama A in B pa t. i. Hallova napetost $u_H = u_{AB} = E_x s = J_z B_y s / \rho = i B_y / \rho d$. Razlaga pojava je sledeča. V bakrenem vodniku so nosilci toka prosti elektroni, ki se pri gostoti $J_z > 0$ pomikajo v negativni smeri osi Z . Na elektrone deluje magnetna sila v negativni smeri osi X in jih potiska proti levemu robu vodnika; tam se krepi presežek

elektronov, na desnem robu pa njihov primanjkljaj oziroma presežek pozitivnih nabojev. Razdvojeni naboji ustvarjajo v vodniku električno polje v nasprotni smeri osi X , $E_x = iB_y/\rho sd < 0$, ki dotok elektronov na levi rob v končnem zaustavi. Vzpostavita se ravnovesje sil in napetost $u_H = u_{AB} = iB_y/\rho d < 0$. Na prejšnji sliki bi to pomenilo, da sta bočna (\pm) sloja pri bakrenem vodniku ($\rho < 0$) ravno zamenjana. Slučaj, ko je $\rho > 0$, pojasnjuje nadaljevanje.

Iz ravnovesja antagonističnih sil (električne in magnetne) oziroma predznaka napetosti med robovoma je želel ameriški fizik Edwin Hall ugotoviti predznak nosilcev električnega toka, ki jih fizika v njegovem času še ni poznala. Pričakoval je: če bo napetost $u_{AB} > 0$, so nosilci toka pozitivno nabiti delci, če bo pa $u_{AB} < 0$, so nosilci toka negativno nabiti delci. Pri oznakah, kot jih navajamo, so za večino kovinskih vodnikov Hallove napetosti negativne, so pa tudi izjeme, ko je Hallova napetost pozitivna. Tega »obrata« s klasičnim pojmovanjem, da so nosilci toka v kovinah le prosti elektroni, ne zmoremo pojasniti. Razlago ponudi šele kvantna fizika, ki obravnava energijska stanja elektronov v snoveh s kristalno strukturo. V kovinah, v katerih se valenčni in prevodni energijski pas prekrivata, se lahko zgodi, da je Hallova napetost tudi pozitivna. V valenčnem pasu so nosilci naboja pozitivne vrzeli, v prevodnem pasu pa negativni elektroni. Če je vrzelno prevajanje večinsko, elektronsko pa manjšinsko – da glavnino toka prevzemajo vrzeli –, se zgodi, da je Hallova napetost pozitivna. Uvodni model nam je služil le za razlago samega pojava, sicer pa se Hallova napetost navaja v obliki: $u_H = R_H i B_y / d$, kjer je R_H t. i. Hallova konstanta. Podajamo nekaj orientacijskih vrednosti te konstante v $(\text{m}^3/\text{C}) \cdot 10^{-11}$: $-5,4$ (baker), $-8,5$ (srebro), $-3,9$ (aluminij), -5000 (bizmut), -100 (silicij), $-0,1$ (germanij), $+3,3$ (cink), $+6$ (kadmij), $+2,5$ (železo). Hallov pojav se koristi za merjenje gostote magnetnega pretoka. T. i. Hallova sonda je zelo tanka ploščica polprevodnika tipa n ali p , ki je vključena v zanko s tokom i , med robova ploščice pa je priključen voltmeter visoke notranje upornosti. Iz detektirane napetosti sledi komponenta gostote magnetnega pretoka ($B_y = u_H d / R_H i$) skozi lice ploščice. 3D Hallova sonda vključuje tri pravokotne si sonde, ki služijo merjenju absolutne vrednosti vektorja gostote magnetnega pretoka.



poševne ekvipotencialke in
navpične tokovnice v
Hallovih sondah



Magnetni sili med dvema tokovnima zankama. Magnetiko smo začeli s tokovnima zankama (navitnjema) in se v okviru Amperove sile osredotočili na zapisa sil na reprezentančna tokovna elementa z obih zank v luči medsebojne interakcije. Ugotovili smo, da sta sili različni in da ju zaznamujeta dvojni vektorski množenji:

$$d\mathbf{F}_{m1}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{21}^3} i_1 d\mathbf{l}_1 \times (i_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_{21}) \quad \text{in} \quad d\mathbf{F}_{m2}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{12}^3} i_2 d\mathbf{l}_2 \times (i_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{12}).$$

Tokrat bomo z njima nadaljevali in se vprašali po sili ene zanke na drugo. Če želimo določiti silo na prvo zanko $\mathbf{F}_{m1}^{(2)}$, je potrebno sešteeti vplive vseh tokovnih elementov iz druge zanke na tokovni element $i_1 d\mathbf{l}_1$, zatem pa sešteeti še vse sile na prvi zanki. To dosežemo z dvojno integracijo vzdolž zank \mathcal{L}_2 in \mathcal{L}_1 in podobno tudi pri sili $\mathbf{F}_{m2}^{(1)}$:

$$\mathbf{F}_{m1}^{(2)} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}_1} \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_{21})}{R_{21}^3} \quad \text{in} \quad \mathbf{F}_{m2}^{(1)} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}_2} \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3}.$$

V smislu identitete $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ sta

$$\frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_{21})}{R_{21}^3} = \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{R}_{21})d\mathbf{l}_2 - (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} \quad \text{in} \quad \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3} = \frac{(d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{R}_{12})d\mathbf{l}_1 - (d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1)\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}.$$

Tvorimo vsoto obej sil in upoštevajmo, da vrstni red integracij ni pomemben; zaradi $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}$ je

$$\mathbf{F}_{m1}^{(2)} + \mathbf{F}_{m2}^{(1)} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \left(\oint_{\mathcal{L}_2} d\mathbf{l}_2 \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} - \oint_{\mathcal{L}_1} d\mathbf{l}_1 \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{R}_{12}}{R_{21}^3} \right).$$

V notranjih integracijah prepoznamo zakonitost električne poljske jakosti točkastega naboja, npr.:

$$\oint_{\mathcal{L}_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} = \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} \cdot d\mathbf{l}_1 = 0,$$

za katero velja lastnost nevrtničnosti. Zaradi tega je

$$\mathbf{F}_{m1}^{(2)} + \mathbf{F}_{m2}^{(1)} = \mathbf{0}.$$

Ugotavljamo: magnetni sili med tokovnima zankama sta vzajemni, zanki se privlačita ali odbijata, brž ko poznamo eno silo, poznamo tudi drugo. Vzajemnost med zankama bomo kasneje srečali tudi pri njunih medsebojnih induktivnostih.



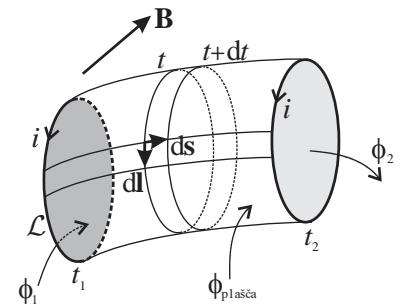
Delo za premik tokovne zanke. Imejmo dve ali več tokovnih zank. Razen ene, ki ji dopuščamo premik zaradi magnetne sile, naj mirujejo. Magnetno polje slednjih označimo z \mathbf{B} ; tok i in konturni element $d\mathbf{l}$ naj pripadata zanki, ki ji dopuščamo premik. Premik more biti usmerjen z vodili, vendar to za samo razmišljanje ni pomembno. Zasledujmo premik zanke iz začetne lege (1) ob času t_1 v končno lego (2) ob času t_2 . Ko zanka zdrsi skozi prostor, zariše namišljen plašč, ki je razpet med njeno začetno in njeno končno lego. Pentlja \mathcal{L} tokovne zanke zariše v času dt na plašču ozek trak; konturni element $d\mathbf{l}$ z zanke doživi premik $d\mathbf{s}$. Delo za ta premik ovrednoti produkt $i(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = i(d\mathbf{s} \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} = i\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_{\text{plos.}} = id\phi_{\text{plos.}}$. Vektor $d\mathbf{a}_{\text{plos.}}$ je vektor ploskvice na plašču, ki jo oblikujeta elementa $d\mathbf{s}$ in $d\mathbf{l}$ in je usmerjen v notranjost namišljene cevi. Delo dA_m za premik zanke v času dt določa krivuljni integral, delo A_m od začetne do končne lege pa ploskovni integral

$$dA_m = \oint_{\mathcal{L}} id\phi_{\text{plos.}} = i \oint_{\mathcal{L}} d\phi_{\text{plos.}} = id\phi_{\text{traku}} \Rightarrow A_m = \int_{\mathcal{A}_{\text{plašča}}} id\phi_{\text{traku}} = i \int_{\mathcal{A}_{\text{plašča}}} d\phi_{\text{traku}} = i\phi_{\text{plašča}}.$$

Vpeljimo pretoka ϕ_1 in ϕ_2 ; pomenita naj pretoka polja \mathbf{B} skozi zanko v začetni oziroma končni legi, ki ga pentlja \mathcal{L} oziroma tok i objame v pozitivni smeri. Iz neizvornosti polja \mathbf{B} sledita pretok $\phi_{\text{plašča}} = \phi_2 - \phi_1$ in delo

$$A_m = i\phi_{\text{plašča}} = i(\phi_2 - \phi_1).$$

Ker je bil premik zanke neoviran, ima delo neko pozitivno vrednost; pri $i > 0$ je tudi $\phi_2 - \phi_1 > 0$. Težnja sil na zanko gre v smeri povečanja pretoka skozi zanko v pozitivni smeri. Brž ko se v premik zanke vplete zunanja sila \mathbf{F}_z , ki tej težnji oponira, je delo zunanje sile določeno z obrnjeno formulo $A_z = i(\phi_1 - \phi_2)$. Poseben primer je zanka v homogenem polju. Translatorni premik zaradi magnetne sile ni možen, saj bi bil $\phi_2 = \phi_1$, zunanja sila pa za premik ne bi opravila nobenega dela. Edini aktivni premik zanke v homogenem polju ostaja zasuk, vendar o njem nekoliko kasneje.



Delo in magnetno polje. Delo za premik tokovne zanke se odrazi v njeni kinetični energiji, nekaj pa se je verjetno med tem dogajalo tudi v širši strukturi, ki smo jo prvi hip prezrli. V zanko s tokom i je vpet vir, ki ta tok omogoča, in podobno velja tudi za zanke, ki zagotavljajo polje \mathbf{B} . Zaradi tokov v zankah je tu še termični učinek. Sistem je očitno energijsko zelo prepleten, zato si z rezultatom $i(\phi_2 - \phi_1)$ ne moremo kaj dosti pomagati. Nekaj podobnega smo imeli v elektrostatičnem

polju: ugotovili smo, da je delo za premik naboja v polju enako $Q(V_1 - V_2)$ in nam le to ni kaj prida pomagalo pri gibalnih procesih, ko so bili v igri še deli vira in zunanjih sil ter energija električnega polja. Tokrat želimo vidik dela $i(\phi_2 - \phi_1)$ še nekoliko razširiti; sledili bomo premisleku nobelovca Igorja E. Tamma.

»Vstopimo« v zanko s tokom i ! Osredotočimo se na naboj dQ , ki se v času dt pomakne vzdolž konturnega elementa dl s hitrostjo \mathbf{u} , s premikom tokovne zanke pa še za ds s hitrostjo $ds/dt = \mathbf{v}$. Hitrost naboja dQ je vsota: $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. V polju \mathbf{B} deluje nanj magnetna sila $dQ\mathbf{w} \times \mathbf{B} = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B} + dQ\mathbf{u} \times \mathbf{B} = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B} + idt\mathbf{u} \times \mathbf{B} = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B} + idl \times \mathbf{B}$. Na kaj merimo? Pri delu A_m za premik zanke smo jemali le člen $idl \times \mathbf{B}$, kar pomeni, da je delo A_m rezultat zgolj enega dela magnetne sile. Če bi upoštevali oba dela magnetne sile in še celoten premik naboja, to je $\mathbf{w}dt$, bi za delo celotne magnetne sile dobili:

$$dA_m^{cel.} = dQ(\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{w}dt = dQ(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{B}dt = 0.$$

Resnično: delo celotne magnetne sile je enako nič, kar smo opazili tudi pri gibajočem nanelektrinem delcu v magnetnem polju. Razčlenimo celotno delo:

$$\begin{aligned} dA_m^{cel.} &= dQ(\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{w}dt = dQ((\mathbf{v} + \mathbf{u}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt + dQ((\mathbf{v} + \mathbf{u}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}dt = \\ &= dQ(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt + dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}dt = i(dl \times \mathbf{B}) \cdot ds + idt(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot dl = 0. \end{aligned}$$

Če izvedemo integracijo zadnje identitete (v času dt) po krivulji \mathcal{L} , dobimo:

$$dA_m^{cel.} = i \underbrace{\oint_{\mathcal{L}} (dl \times \mathbf{B}) \cdot ds}_{dA_m} + idt \underbrace{\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot dl}_{dA} = dA_m + dA^* = 0 \quad \Rightarrow \quad dA^* = -dA_m.$$

Premik zanke v času dt očitno ni osamljen dogodek: je gibalni proces, ki se je zgodil znotraj širšega sistema. Pričakujemo, da dA^* odslikuje tisto, kar ni zgolj premik. Morda pa se v enačbi $dA_m + dA^* = 0$ skriva še kaj:

$$i \oint_{\mathcal{L}} (dl \times \mathbf{B}) \cdot ds + idt \oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot dl = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\oint_{\mathcal{L}} (dl \times \mathbf{B}) \cdot ds}_{d\phi_{traku}} + dt \underbrace{\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot dl}_{d\phi_{traku}} = 0.$$

Prvi integral že poznamo; enačbo delimo z dt in dobimo:

$$\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_{\text{traku}}}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} = -\phi'$$

V zanki je prisotna dodatna sila $dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, ki je posledica gibanja zanke. Krivuljni integral vektorja $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ je v odnosu s pretokom skozi zanko, saj je $d\phi_{\text{traku}} = \phi(t + dt) - \phi(t) = d\phi = \phi' dt$.

Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ je nekaj povsem novega! Z vidika mirujočega opazovalca, ki gibanje zanke spremi s strani, je to vektor, ki določa magnetno silo $dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ na naboj dQ vsled premikanja zanke, opazovalec na zanki pa te sile ne prepozna kot magnetne, kot magnetno priznava le silo $dQ(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, saj je \mathbf{u} zanj edina hitrost, ki jo naboj dQ ima. Opazovalec na zanki bo v duhu Lotentzove sile izjavil: če omenjena sila ni magnetna, je zagotovo električna – je neka dodatna električna sila –, rečemo ji inducirana električna sila in jo zapišemo takole: $dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = dQE_{\text{ind}}$. Polju \mathbf{E}_{ind} rečemo inducirana električna poljska jakost, napetosti u_{ind} . pa inducirana napetost vzdolž zanke, za katero velja:

$$u_{\text{ind.}} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\phi'.$$

Prišli smo do t. i. gibalne inducirane napetosti v premikajoči zanki; kot takšna v nadaljevanju vstopa v napetostno enačbo te zanke. Narava inducirane sile je drugačna od Coulombove: integral inducirane električne poljske jakosti je v splošnem različen od nič. Inducirano električno polje je vrtinčno: jakost vrtinca na sklenjeni pentljji \mathcal{L} določa zgornji integral. Več o tem v poglavju o elektrodinamiki.

Navor na tokovno zanko v magnetnem polju. Premik zanke v magnetnem polju je lahko omejen, vendar to rezultata $i(\phi_2 - \phi_1)$ ne spremeni. Ena od možnosti je vpetje zanke na os, kar ji omogoča zasuk. Če poznamo magnetni pretok $\phi(\alpha)$ kot funkcijo zasuka α okoli osi P , dobimo navor vzdolž te osi z odvodom; sklicujemo se na enačbo za delo, pretoka ϕ_1 in ϕ_2 pa razumemo kot pretoka polja \mathbf{B} v legah, ki ju določata kota α in $\alpha + d\alpha$:

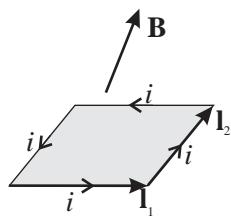
$$A = i(\phi_2 - \phi_1) \Rightarrow dA = i(\phi(\alpha + d\alpha) - \phi(\alpha)) = id\phi \Rightarrow M_p = \frac{dA}{d\alpha} = i \frac{d\phi}{d\alpha}.$$



Vprašanja navora se lotimo še drugače. Privzemimo, da je zanka vpeta v vrtišče in se more okoli njega poljubno obračati. Navor določata ročica in sila, ker pa je magnetna sila porazdeljena vzdolž zanke oziroma krivulje \mathcal{L} , je rezultančni navor na zanko enak vsoti navorov na posamezne tokovne elemente. Sila $d\mathbf{F}_m = idl \times \mathbf{B}$ na element dl tvori na ročici \mathbf{r} , ki sega od vrtišča do dl , navor $d\mathbf{M}_m = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_m$, integral teh pa navor na zanko,

$$\mathbf{M}_m = (M_{mx}, M_{my}, M_{mz}) = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_m = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{r} \times (idl \times \mathbf{B}) \cong \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times (i\delta l_k \times \mathbf{B}(T_k)).$$

Integral zadovoljivo nadomesti vsota: zanko razdelimo na kratke, privzeto ravne odseke δl_k z ročicami \mathbf{r}_k do točk T_k , kjer ima polje vrednost $\mathbf{B}(T_k)$. V primeru osnega vpetja je aktualna le ena od komponent navora. Navor na tokovno zanko okoli osi X določa komponenta M_{mx} , in podobno tudi ostali dve komponenti.



Navor na ravninsko tokovno zanko v homogenem magnetnem polju. Če je zanka pravokotna, polje pa homogeno, je pot do navora kratka. Naj sta \mathbf{l}_1 in \mathbf{l}_2 vektorja zankinih pravokotnih stranic. Zanko določajo tokovni elementi z jakostmi $\pm i\mathbf{l}_1$ in $\pm i\mathbf{l}_2$. Vrtišče naj je v središču zanke. Navore določajo sredinske ročice $\pm \frac{1}{2}\mathbf{l}_1$ in $\pm \frac{1}{2}\mathbf{l}_2$ sil in sile $\pm i\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}$ in $\pm i\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}$, celoten navor na zanko pa njihova vsota:

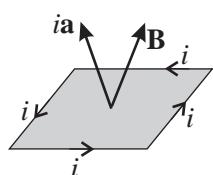
$$\mathbf{M}_m = -\frac{1}{2}\mathbf{l}_2 \times (i\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}) + \frac{1}{2}\mathbf{l}_1 \times (i\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}) + \frac{1}{2}\mathbf{l}_2 \times (-i\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2}\mathbf{l}_1 \times (-i\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}) = \mathbf{l}_1 \times (i\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}) - \mathbf{l}_2 \times (i\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}).$$

S pomočjo identitetete $\mathbf{e} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{g})\mathbf{f} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{f})\mathbf{g}$ razstavimo dvojna vektorska produkta,

$$\mathbf{M}_m = i(\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}) - \mathbf{l}_2 \times (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B})) = i((\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{B})\mathbf{l}_2 - (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2)\mathbf{B} - (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{B})\mathbf{l}_1 + (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_1)\mathbf{B}) = i((\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{B})\mathbf{l}_2 - (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{B})\mathbf{l}_1),$$

dva sumanda se okrajšata, zatem pa z isto identiteteto preostala spet združimo in uredimo:

$$\mathbf{M}_m = i((\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{B})\mathbf{l}_2 - (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{B})\mathbf{l}_1) = i(\mathbf{B} \times (\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_1)) = i(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \times \mathbf{B} = i\mathbf{a} \times \mathbf{B}.$$



Vektor \mathbf{a} je vektor ploskve zanke, ki ga tok i obkroži v pozitivni smeri. Pri tem je zanimivo, da velja izpeljan izraz tudi za vse druge ravninske tokovne zanke, trikotno, krožno, ..., le da je pri njih izpeljava neprimerno doljsa. Če je zanka prosto vrtljiva, je težnja navora, zasukati ploskev (ozziroma vektor \mathbf{a}) v smer polja \mathbf{B} . V tej legi zajame zanka v pozitivni smeri največji magnetni pretok, kar je v skladu s težnjo magnetne sile. Če je zanka vpeta v os, je smiselno, da je ta pravokotna

na polje \mathbf{B} , kajti to zagotavlja največji možen navor. Absolutna vrednost navora je največja, ko sta si vektorja ploskve in polja pravokotna, in nič, ko sta si vzporedna. Zanka je v stabilni legi, ko imata vektorja enako usmerjenost, v labilni pa, ko imata nasprotni usmerjenosti. Absolutno vrednost navora določa tudi kot (α) med vektorjema \mathbf{a} in \mathbf{B} : $M_m = |i|aB \sin \alpha$.

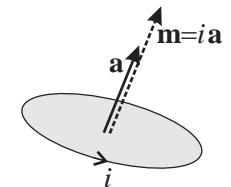
Magnetni dipol. Zadnji opis spominja na električni dipol v homogenem električnem polju. Kadar sta točkasta naboja $\pm Q$ medsebojno povezana, sta dipolni par z električnim momentom $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$, kjer je \mathbf{d} vektor razdalje od $-Q$ k $+Q$. Če je tak dipol v homogenem električnem polju \mathbf{E} , deluje nanj navor $\mathbf{M}_e = Q\mathbf{d} \times \mathbf{E}$. Izpeljan navor $\mathbf{M}_m = i\mathbf{a} \times \mathbf{B}$ magnetnih sil na tokovno zanko ponuja priložnost, da ravninsko tokovno zanko sprejmemo kot namišljen »magnetni dipol«, produkt $i\mathbf{a}$ pa kot njegov magnetni dipolni moment \mathbf{m} , in pišemo:

$$\mathbf{m} = i\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{M}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Magnetni dipol oblikuje tudi krožeci naboja; srečali smo ga pri analizi gibanja delca v homogenem magnetnem polju. Če delec z nabojem Q kroži na radiju r s frekvenco f , oblikuje tok $i = Qf = Q\omega/2\pi$ v zanki s površino $a = \pi r^2$ in ustvarja magnetni dipol z momentom $\mathbf{m} = i\mathbf{a} = (Qr^2/2)\boldsymbol{\omega}$; kjer je $\boldsymbol{\omega}$ že omenjeni vektor kotne hitrosti. Brž ko je površina zanke zelo majhna, jo moremo razumeti kot točkast objekt. Za magnetni dipol lahko smiselno uporabimo relacije, ki veljajo za električni dipol; v mislih imamo magnetno potencialno energijo W_{mp} dipola in silo \mathbf{F}_m na magnetni dipol,

$$W_{mp} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad \text{in} \quad \mathbf{F}_m = m_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + m_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + m_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}.$$

Ob neizvornosti magnetnega polja smo omenili, da magnetin ni, tu pa nizamo zapise, ki se jih dotikajo. Seveda magnetin v smislu elektrin kot monopolov ni, so pa tokovne zanke v različnih pojavnih oblikah, ki se odzivajo tako, kot da bi bili tam pari magnetin, magnetni dipoli. In tudi obratno bomo spoznali: da je magnetno polje majhne tokovne zanke matematično identično polju namišljenega magnetnega dipola. Govorimo torej o modelu. V elektrostatiki smo srečali zrcalne naboje, ki niso naboji, ampak modelni naboji, pri vezjih smo srečali vira Thevenina in Nortona, ki nista fizična vira, ampak modelna vira. Tudi nepopolno zrcaljenje je stvar modeliranja. Zrcaljenja vseh vrst so nasploh aktualna v celotni elektromagnetiki.



§6. Magnetik in magnetno polje

Magnetiki so, poleg dielektrikov in prevodnikov, tretja skupina elektrotehniško pomembnih snovi. Snov ni nikoli povsem enoznačna: kovine, voda in druge snovi so odzivne tako na tokovno kot na električno ali magnetno polje. Kadar odzivnost snovi na eno od polj dominira, dobi snov oznako prevodnik, dielektrik ali magnetik. Dielektrični odziv snovi pojasnjuje model električnih dipolov, prevodniški odziv model trkov, magnetni odziv snovi pa model magnetnih dipolov. Naloga modelov je, pojasniti interakcijo med strukturo snovi in poljem; pri tem so modeli le delno uspešni. Pogosto se moramo zadovoljiti s kvalitativnim, precej manj pa s kvantitativnim odgovorom.

V snovi so magnetni dipoli permanentni ali s poljem povzročeni oziroma inducirani; takšno delitev smo omenjali tudi pri električnih dipolih. Magnetni dipoli so v atomu, lahko pa se oblikujejo tudi širše v snovi. Elektronu z nabojem $-e$ in maso m_e , ki »kroži« okoli jedra, pripadata tirna vrtilna količina $\Gamma = m_e \omega r^2$ in magnetni dipolni moment $\mathbf{m} = -e \omega r^2 / 2$; ta je очitno v odnosu z vrtilno količino, $\mathbf{m} = (-e/2m_e) \Gamma$. To še ni vse. Elektron ima tudi lastno vrtilno količino oziroma spin. Spin je kvantno-mehanska lastnost, ki je ni moč pojasniti s klasično mehaniko; pogosta primerjava elektrona z vrtavko je le prisподоба. Lastna vrtilna količina pripada tudi protonu in celo (nevtralnemu) nevronu; oba tvorijo kvarki z lastnimi naboji in spini. Absolutne vrednosti spinov atomskih delcev so kvantizirani in določeni s tirnimi in spinskimi kvantnimi števili. Spinom osnovnih delcev pritičejo tudi lastni magnetni dipolni momenti, ki ne sledijo povsem zgornji zvezi, ampak se za naštete delce v njo vpletejo še določeni faktorji. Če atomskim delcem pripadajo magnetni dipolni momenti, potem je smiselno govoriti o rezultančnem dipolnem momentu atoma, ki je vektorska vsota posameznih. Tu pa se magnetne snovi že ločujejo med seboj: prve, diamagnetne, kot so Cu, Au, Hg, ..., imajo rezultančne magnetne dipolne momente enake nič, druge, paramagnetne, kot so Al, Mn, W, ..., imajo zelo šibke dipolne momente, in tretje, feromagnetne, kot so Fe, Co, Ni, ..., imajo magnetne dipolne momente atomov tako močne, da izzovejo grupiranje sosednjih atomov v skupine mikronskih dimenzijs, v katerih so dipolni momenti atomov usmerjeni v isto smer. Vsi omenjeni so primeri permanentnih

dipolov. Tu so še inducirani, s poljem izvani dipoli. Spomnimo se: magnetno polje \mathbf{B} »sili« giban nabit delec v kroženje. Krožični naboj predstavlja zanko oziroma dipol z momentom $\mathbf{m} = (Qr^2/2)\boldsymbol{\omega}$. Upoštevajoč zvezo $\boldsymbol{\omega} = -(Q/m)\mathbf{B}$, je

$$\mathbf{m} = -(Q^2r^2/2m)\mathbf{B}.$$

Induciran magnetni dipol ima moment, ki je usmerjen proti vzročnemu polju. Neglede na snov se ta pojav dogaja vsem elektronom; zaradi zunanjega polja pridobijo ti še dodaten magnetni dipolni moment $-(e^2r^2/2m_e)\mathbf{B}$, ki se prišteva k momentoma zaradi tirne in lastne vrtilne količine. V diamagnetni snovi je to edini odziv, ki na nivoju atoma kaj šteje.

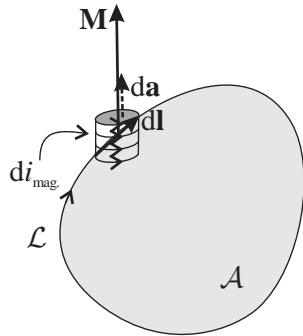


Vektor magnetizacije. Če vnesemo snov v polje z gostoto \mathbf{B}_0 , se ta magnetizira. Mehanizma sta dva: i) na permanentne dipole deluje navor, ki jih delno zasuka v smer polja in ii) magnetno polje izzove indukcijo dipolov, katerih momenti so usmerjeni proti smeri polja. Zgodita se obratna dogodka (dve obratni usmeritvi dipolov) in dva nasprotujoča si učinka: lastno magnetno polje \mathbf{B}_i permanentnih dipolov je v smeri polja \mathbf{B}_0 , lastno magnetno polje \mathbf{B}_{ii} induciranih dipolov pa je v nasprotni smeri polja \mathbf{B}_0 . V prvem primeru govorimo o ojačitvi, v drugem pa o oslabitvi magnetnega polja. Pri para- in feromagnetikih prevladuje prvi, pri diamagnetikih pa drugi način. Stopnje usmerjenosti dipolov in jakosti momentov so odvisne od rezultančne gostote magnetnega polja.

Načinoma magnetiziranja snovi so skupni dipoli. Količina, ki označuje stopnjo magnetiziranja, je vektor magnetizacije \mathbf{M} . Definiran je s prostorninsko gostoto magnetnega dipolnega momenta oziroma s kvocientom vsote dipolnih momentov gruče dipolov v vzorcu snovi in prostornine vzorca,

$$\mathbf{M} = \lim_{\delta\nu \rightarrow 0} \frac{1}{\delta\nu} \sum_k \delta\mathbf{m}_k = \mathbf{M}(T, t),$$

ki je primerno majhen. Merska enota magnetizacije \mathbf{M} je A/m. Magnetizacija je v splošnem krajevno-časovna funkcija. Pričakovati je, da bo dinamičnemu magnetnemu polju sledila tudi magnetizacija. Ponuja se primerjava s polarizacijo \mathbf{P} v dielektrikih – kar ne preseneča, saj obravnavi prvih in drugih snovi slonita na modelu dipolov.



Vrtinčnost vektorja magnetizacije. Magnetizacija \mathbf{M} se tesno navezuje na notranje toke v atomu. Te toke je v povezavi z magnetnim poljem trajnih magnetov omenjal že Amper, čeravno njihove narave takrat ni mogel poznati. Kljub temu se je notranjih tokov v atomu prijelo ime Amperovi toki. Vsebinsko so to magnetizacijski toki, ki imajo nekaj skupnega tudi s polarizacijskimi toki. Oboji se namreč dotikajo gibanja vezanih nabojev; za razliko od prostih nabojev, ki so nosilci toka v bolj ali manj prevodnih snoveh.

Vrtinčnost vektorskega polja se navezuje na integral polja po sklenjeni krivulji. To integracijo smo srečali pri vektorju \mathbf{B} , omenili pa tudi pri inducirani električni poljski jakosti. Vprašanje si že lahko postavimo:

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = ?$$

Pentlja \mathcal{L} je katerakoli. Naj bo takšna, da gre tudi skozi magnetizirano snov. Da bi ovrednotili krivuljni integral, moramo prepozнатi vsebino produkta $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$. Oprimo se na definicijo vektorja \mathbf{M} in si na mestu konturnega elementa $d\mathbf{l}$ omislimo valj s prostornino $d\nu$, na obodu katerega so Amperove zanke (v podobi majhne tuljave) s celotnim tokom $di_{mag.}$. Vektor \mathbf{M} in produkt $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$ zapišemo takole:

$$\mathbf{M} = \frac{di_{mag.} da}{d\nu} \quad \text{in} \quad \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{di_{mag.} da \cdot d\mathbf{l}}{d\nu} = di_{mag.}.$$

Skalarni produkt vektorja osnovnice valja da in diagonalnega vektorja valja $d\mathbf{l}$ je prostornina valja $d\nu$. Če na krivuljo \mathcal{L} napnemo ploskev \mathcal{A} , potem je $di_{mag.}$ magnetizacijski tok, ki na tistem mestu to ploskev prestopi. Če integriramo produkt $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$ po \mathcal{L} , zajame integral vse Amperove toke ob krivulji, ki prečkajo \mathcal{A} oziroma vse magnetizacijske toke, ki jih krivulja \mathcal{L} objame v pozitivni smeri,

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = i_{mag. \text{ skozi } \mathcal{A}} = i_{mag.} \quad \text{ali tudi} \quad i_{mag.} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{mag.} \cdot da.$$

Ploskev prestopajo še mnogi drugi Amperovi toki, vendar tako, da jo kot zanke prečkajo dvakrat, v nasprotnih smereh.

V teoriji elektromagnetike zapišemo magnetizacijski tok skozi ploskev tudi z integralom magnetizacijske gostote \mathbf{J}_{mag} po ploskvi \mathcal{A} , ki je v relaciji z vektorjem \mathbf{M} ; ustrezna matematična zveza (rotor) žal presega nivo osnov elektrotehnike.

Vektor magnetne poljske jakosti. Vrniti se moramo k vrtinčnosti magnetnega polja oziroma k enačbi

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i_{\text{skozi } \mathcal{A}} + \epsilon_0 \phi'_{E \text{ skozi } \mathcal{A}}) = \mu_0 \left(\int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right).$$



Pri njeni izpeljavi smo se oprli na magnetno polje tokovne niti kot elementa splošne strukture. V mislih smo seveda imeli tok prostih elektronov. Niso pa elektroni edini, ki v urejenem gibanju oblikujejo električni tok. V tekočinah so to anioni in kationi, v polprevodnikih elektroni in vrzeli, v plinih elektroni in ioni in v vakuumu vsi možni nosilci naboja. Tu so še vezani naboji v atomih in molekulah, ki oblikujejo polarizacijski in magnetizacijski tok. Tako kot je nabojem lastno električno polje, jim je, ko so v gibanju, lastno tudi magnetno polje. Ker je tako, je potrebno v zgornji enačbi tok $i_{\text{skozi } \mathcal{A}}$ razumeti v najširšem pomenu: kot električne toke katerihkoli nabitih delcev kjer koli v prostoru. Tok skozi ploskev \mathcal{A} razčlenjuje sledeči zapis:

$$i_{\text{skozi } \mathcal{A}} = \underbrace{i_{\text{kond.}}_{i_{\text{pro.}}} + i_{\text{kony.}}_{i_{\text{vez.}}}}_{i_{\text{pro.}}} + \underbrace{i_{\text{pol.}} + i_{\text{mag.}}}_{i_{\text{vez.}}} = \underbrace{\int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{pro.}} \cdot d\mathbf{a}}_{i_{\text{pro.}}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}}_{i_{\text{pol.}}} + \underbrace{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}_{i_{\text{mag.}}}.$$

Katerega od tokov bomo upoštevali ali opustili, je odvisno od okoliščin dane naloge. Pri analizi razmer v prevodniku brez toka $i_{\text{pro.}}$, ki je tam praviloma konduktivni, ne gre, podobno ne gre brez $i_{\text{pol.}}$ v dielektriku in brez toka $i_{\text{mag.}}$ v magnetiku. Tako razčlenjen tok skozi ploskev vnesimo v zgornjo enačbo,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{pro.}} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} + \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right),$$

jo delimo z magnetno konstanto μ_0 in krivuljni integral z desne prenesemo na levo stran:

$$\oint_{\mathcal{L}} \underbrace{\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right)}_{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{pro.}} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \underbrace{(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}_{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{in} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Vektor na desni strani že poznamo, to je vektor gostote električnega pretoka \mathbf{D} , vektor na levi strani pa je novi vektor, vektor magnetne poljske jakosti \mathbf{H} , katerega jakost vrtinca na pentli \mathcal{L} določa enačba

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{pro.}} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = (i_{\text{pro.}} + \phi'_e) \text{ skozi } \mathcal{A}.$$

Merska enota magnetne poljske jakosti je A/m. Vektor \mathbf{D} se navezuje na proste naboje, enako gostota $\mathbf{J}_{\text{pro.}}$; to pomeni, da je nanje vezana tudi poljska jakost \mathbf{H} . Zmotno je misliti, da so si vektorji \mathbf{H} , \mathbf{D} in $\mathbf{J}_{\text{pro.}}$ samozadostni, k elektromagnetnemu polju namreč prispevajo vsi naboji in vsi toki. Če v določenih relacijah kateri od virov izostanejo, je to le posledica delitve virov na proste in vezane. Ko vrstni red odvoda in integrala zamenjamo, je jakost vrtinca tudi

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J}_{\text{pro.}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\mathcal{L}} H_t dl = \int_{\mathcal{A}} \left(J_{\text{pro.}n} + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) da.$$

V enosmernih razmerah se enačba poenostavi; takšna velja tudi v dinamičnih razmerah, če je in kjer je $|\phi'_e| \ll |i_{\text{pro.}}|$,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{pro.}} \cdot d\mathbf{a} = i_{\text{pro.}} \text{ skozi } \mathcal{A}.$$

Magnetna susceptibilnost in permeabilnost snovi. Relacijo med vektorji magnetnega polja zapisujemo takole:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{ali} \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad \text{ali} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{I}.$$

Vektor $\mathbf{I} = \mu_0 \mathbf{M}$ je magnetna polarizacija. Zapis $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{I}$ spominja na enačbo $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, od katere prihaja tudi ime: vektor magnetne polarizacije \mathbf{I} . Kadar je v snovi magnetizacija \mathbf{M} sorazmerna gostoti \mathbf{B} , so si vektorji sorazmerni,

$$!!! \quad \mathbf{M} \propto \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} !!!$$

Uveljavljeno je, da vpeljemo sorazmernost konstanto, magnetno susceptibilnost χ_m , med vektorjema magnetizacije in jakosti (po analogiji z električnim poljem), μ_r je relativna permeabilnost in μ je permeabilnost snovi. Klicaji opozarjajo na izjeme. Relacije so povsem ustrezne pri diamagnetikih in paramagnetikih, mnogo manj pa pri feromagnetikih.



Diamagnetiki in paramagnetiki. Atomi diamagnetnih snovi imajo rezultančni magnetni dipolni moment enak nič. Če je takšna snov v magnetnem polju \mathbf{B} , pridobijo elektroni inducirani magnetni dipolni moment $\mathbf{m} = -(e^2 r^2 / 2m_e) \mathbf{B}$, atom pa dipolni moment $-Z(e^2 \langle r^2 \rangle / 2m_e) \mathbf{B}$; Z pomeni število elektronov, $\langle r^2 \rangle$ pa povprečje kvadratov radijev elektronov v atomu. Če je n število atomov/m³, je magnetizacija $\mathbf{M} = -(Zn e^2 \langle r^2 \rangle / 2m_e) \mathbf{B}$. Iz splošne zveze med vektorji sledi:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0\mathbf{H} - \mu_0(Zn e^2 \langle r^2 \rangle / 2m_e)\mathbf{B}.$$

Okvirna vrednost za $\mu_0(Zn e^2 \langle r^2 \rangle / 2m_e)$ je okoli 10^{-5} , zato je

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{H}}{1 + \mu_0(Zn e^2 \langle r^2 \rangle / 2m_e)} \cong \underbrace{(1 - \mu_0(Zn e^2 \langle r^2 \rangle / 2m_e))}_{\mu_r = 1 + \chi_m} \mu_0 \mathbf{H} \Rightarrow \chi_m \cong -Zn\mu_0 e^2 \langle r^2 \rangle / 2m_e.$$

Za susceptibilnost χ_m diamagnetikov se navajajo sledeče izmerjene vrednosti: $-9,4 \cdot 10^{-6}$ (baker), $-3,6 \cdot 10^{-5}$ (zlato), $-2,5 \cdot 10^{-5}$ (srebro), $-8,8 \cdot 10^{-5}$ (voda), ... Permeabilnosti diamagnetnih snovi so malenkostno manjše od μ_0 .

Atomi paramagnetnih snovi imajo šibak rezultančni dipolni moment, zato so interakcije med njimi zanemarljive. Težnja magnetnih sil je, dipole zavrteti v smer polja. Stopnja usmerjenosti dipolov narašča z gostoto zunanjega magnetnega polja, pada pa s temperaturo, saj se notranja energija snovi upira kakršnikoli urejenosti. Z uporabo statistične mehanike se pri pogoju $mB/kT \ll 1$, ki je v običajnih razmerah izpolnjen, dobi zvezo $\mathbf{M} \cong (nm^2/3kT)\mathbf{B}$; n je število atomov/m³, m magnetni moment atoma, k Boltzmannova konstanta in T temperatura. V jeziku kvantne mehanike pa še $\mathbf{M} \cong nm_B^2 \mathbf{B}/kT$, kjer je $m_B \cong 9,27 \cdot 10^{-24}$ Am² t. i. Bohrov magneton. Slednjo vstavimo v relacijo med magnetnimi vektorji,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \cong \mu_0\mathbf{H} + \mu_0(nm_B^2/kT)\mathbf{B}.$$

Okvirna vrednost za $\mu_0(nm_B^2/kT)$ je spet majhna, okoli 10^{-5} , zato je

$$\mathbf{B} \cong \frac{\mu_0 \mathbf{H}}{1 - \mu_0(nm_B^2/kT)} \cong \underbrace{\left(1 + \mu_0(nm_B^2/kT)\right) \mu_0 \mathbf{H}}_{\mu_r = 1 + \chi_m} \Rightarrow \chi_m \cong \mu_0(nm_B^2/kT).$$

Za susceptibilnost χ_m paramagnetikov najdemo sledeče izmerjene vrednosti: $2,2 \cdot 10^{-5}$ (aluminij), $27 \cdot 10^{-5}$ (platina), $98 \cdot 10^{-5}$ (mangan), $3,6 \cdot 10^{-7}$ (zrak), ... Permeabilnosti paramagnetnih snovi so neznatno višje od μ_0 . Paramagnetizem pozna tudi nasičenje, stanje popolne usmerjenosti dipolov, vendar bi se to zgodilo pri nerealno visoki gostoti polja; to se pri feromagnetikih zgodi že pri gostoti okoli 1 tesla. Vzporednica k paramagnetizmu je dipolska polarizacija polarnih molekul v električnem polju.

Podatki za magnetno susceptibilnost bakera, aluminija, srebra, zlata, platine in vrste drugih elektrotehniških materialov prinašajo dobrodošlo spoznanje: te snovi se z vidika magnetnega polja obnašajo kot »prazen prostor« s permeabilnostjo $\approx \mu_0$. Izpeljave in sklepanja, ki smo jih do sedaj opravili za magnetna polja tokovodnikov, ostajajo v veljavi tudi še naprej, če so le vodniki in objekti okoli njih iz t. i. »nemagnetnih« snovi.

Eksperiment, ki kaže na dia- ali paramagnetnost snovi, je preprost. Magnetno polje naj ima vodoravno smer. Na vrvico obesimo vodoravno ležeč kos ravne žičke. Če je žička iz diamagnetnega bakra, se bo postavila prečno na polje, če pa je iz paramagnetnega aluminija, se bo postavila vzdolž polja. Za žički sta to legi, v katerih je navor magnetnih sil okoli vrtišča (vrvice) enak nič. »Dia« in »para« sta predponi, ki izhajata iz grščine in pomenita poprek oziroma vzdolž.



Feromagnetiki. Ferrum je latinsko ime za železo. Poleg železa sta feromagnetika tudi kobalt in nikelj. Njihov potenciran odziv na magnetno polje se pripisuje temu, da imajo železo štiri, kobalt tri in nikelj dve z elektroni nepopolnjeni mesti na podlupini 3d, medtem ko imajo na podlupini 4s že dva elektrona. Omenjene praznine se odražajo v neravnovesju spinov v atomu, v velikih magnetnih momentih atomov in v močnih interakcijah med atomi. Še več: sosednji atomi se grupirajo

v domene (območja), v katerih so njihovi magnetni momenti vzporedni, usmerjenost teh pa je od domene do domene drugačna. Domene niso posledica magnetnih sil, te bi stremele dipole postaviti antiparalelno, ampak t. i. izmenjalnih sil, ki so posledica Paulijevega izključitvenega načela. Na domene je že leta 1907 opozoril nemški fizik P. Weiss in se po njem tudi imenujejo. Velikost Weissovih domen je od 1 do 1000 μm . Pod mikroskopom se jih da tudi opaziti: če se na spolirano površino feromagnetika potrosi železovega prahu, se prah razporedi po mejah domen. Magnetizacijo \mathbf{M} ponovno določa prostorninska gostota magnetnega momenta, le da mora tokrat vzorec feromagnetne snovi zajeti veliko domen.

Teorije, ki bi obnašanje feromagnetikov v magnetnem polju kvantitativno vrednotila, ni, zato je analiza feromagnetizma pretežno empirična. Enako velja tudi za iskanja zlitin, ki bi izpolnile pričakovanja po boljših magnetnih lastnostih. Ker so feromagnetiki za prakso pomembni, se bomo določenim njihovim posebnostim še posebej posvetili. Nekaj jih morda kar omenimo: magnetilne krivulje, nelinearnost, nasičenje, irreverzibilnost, zadržana magnetizacija, Curiejeva temperatura in energijske izgube.

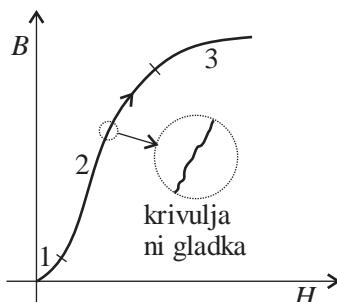
MAGNETENJE FEROMAGNETNE SNOVI. Lastnosti magnetenja feromagnetikov podajamo v diagramu H - B z odvisnostjo $B(H)$. Da bi do te odvisnosti prišli, sta pomembni izbira oblike feromagnetika in možnost vrednotenja gostote in jakosti polja v objektu. Za ta namen je zelo primeren feromagnetik v obliki toroida, na katerem je enakomerno gosto toroidno navitje. O magnetnem polju zračne toroidne tuljave smo že govorili. Polje je »ujeto« v toroidni prostor med ovoji, gostota polja pa je takšna, kot da bi v osi toroidnega navitja ležala tokovna premica s tokom Ni . Če je v toroidnem prostoru sedaj jedro, je magnetno polje v njem spremenjeno; koliko in do katere mere, o tem kasneje. Spremenjeno pač zato, ker so se magnetni dipoli v domenah zaradi navorov magnetnih sil bolj ali manj obrnili. Jedro se je magnetiziralo, k magnetnemu polju pa so svoj delež dodali tudi delno obrnjeni dipoli. V jedru je vzpostavljeno novo magnetno polje; določajo ga komponente B_φ , M_φ in H_φ , povezuje pa jih zveza $B_\varphi = \mu_0(H_\varphi + M_\varphi)$. V cilju preglednosti bomo slednje zapisovali kraje, $B = \mu_0(H + M)$,

pri tem pa B , M in H ne bodo označevali absolutnih vrednosti vektorjev, ampak njihove komponente vzdolž gostotnice magnetnega polja v dani točki prostora.

Iz vrtinčnosti vektorja \mathbf{H} določimo $H_\varphi = H$. Krožnica \mathcal{L} s polmerom ρ , ki leži v jedru in obkroža os toroida,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H_\varphi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{pro.}} \cdot d\mathbf{a} = i_{\text{pro.}} = Ni \quad \Rightarrow \quad H = H_\varphi = \frac{Ni}{2\pi\rho} \cong \frac{Ni}{2\pi p},$$

objema tok Ni . Pri danem toku v navitju je jakost polja v jedru znana. Če je srednji radij jedra p , njegov presek pa krožen, s polmerom r , $r \ll p$, potem je $Ni/2\pi p$ ocena srednje vrednosti poljske jakosti v jedru.



Gostote magnetnega pretoka v jedru ne moremo meriti neposredno, lahko pa jo posredno. Odločimo se za toroidno jedro s prekinivjo oziroma jedro z zračno režo dolžine Δ , v kateri s Hallovo sondijo merimo gostoto pretoka. Zaradi zračne reže je poljska jakost v jedru manjša. Če je B izmerjena gostota v reži, potem je B/μ_0 poljska jakost v njej, saj je v reži $M = 0$. Vrnimo se k prejšnjemu integralu in ga »popravimo«,

$$Ni = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong H(2\pi p - \Delta) + (B/\mu_0)\Delta \quad \Rightarrow \quad H \cong \frac{Ni - (B/\mu_0)\Delta}{2\pi p - \Delta} \cong \frac{Ni - (B/\mu_0)\Delta}{2\pi p} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{B}{\mu_0} - H.$$

Polje H v jedru je s tem določeno. Gostota B v reži je hkrati tudi gostota v jedru, saj je magnetno polje neizvorno in ujeto v toroidni prostor med ovoji. Ponovimo: gostoto B merimo, jakost H in magnetizacijo M pa izračunamo.



DEVIŠKA KRIVULJA. Deviška ali začetna krivulja magnetenja se nanaša na stanje razmagnetenega feromagnetika, v katerem imajo domene naključne usmeritve magnetnih momentov, $M = 0$. Postopek določanja deviške krivulje je naslednji: tok i v navitju postopoma večamo, merimo B , računamo H , rezultate tabeliramo, jih vnašamo v diagram H - B in dobimo $B(H)$.

Deviška krivulja ima tri področja: 1) progresivni začetek, 2) strmo naraščanje in 3) degresivni zaključek. V 1. področju pride do utapljanja manjših domen v večje. Proces je v tem delu reverzibilen. Če bi magnetilni tok i zmanjšali na nič, bi se

vzpostavilo prvotno stanje domen. V 2. področju prihaja do obračanja magnetnih momentov domen. Obračanje dipolov ni zvezno, ampak sunkovito. Induktivni senzor zmore te dogodke zaznati. Če so posredovani na zvočnik, se sliši pokanje in prasketanje. Proses je tokrat ireverzibilen. Za te in še druge (tudi termične) dogodke je bil očitno potreben ustrezен nepovrnljiv energijski vložek. Če bi tok i zmanjšali na nič, se začetno stanje domen ne bi restavriral, ampak bi večji del domen zadržal doseženo usmeritev svojih momentov. V 3. področju prihaja do stavljanja domen in izginevanja mej med njimi. Magnetni momenti domen so usmerjeni v isto smer; magnetizacija in magnetna polarizacija dosežeta nasičenje, $I_{\text{nas.}} = \mu_0 M_{\text{nas.}}$. Za to področje je spet značilna reverzibilnost. Če bi tok i zmanjšali na nič, bi se v jedru zadržala določena magnetizacija, ki ustreza približno tisti ob prehodu iz 2. v 3. področje. Deviško krivuljo označujejo tri premice; sprejeti jih moremo kot približek oziroma aproksimacijo deviške krivulje,

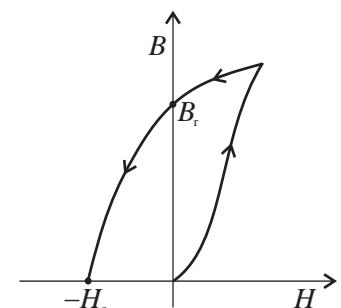
$$B(H) \approx \begin{cases} \mu_{r,\text{zač.}} \mu_0 H & 1. \text{ področje} \\ \mu_{r,\text{maks.}} \mu_0 H & 2. \text{ področje} \\ \mu_0 H + I_{\text{nas.}} & 3. \text{ področje.} \end{cases}$$

Relativna permeabilnost $\mu_{r,\text{zač.}}$ določa naklon magnetilne krivulje na začetku, okvirne vrednosti te permeabilnosti so od 10^1 do 10^5 , relativna permeabilnost $\mu_{r,\text{maks.}}$ določa maksimum razmerja B/H , okvirne vrednosti te permeabilnosti so od 10^2 do 10^6 , magnetna polarizacija nasičenja $I_{\text{nas.}}$ pa določa prispevek Amperovih tokov h gostoti B v nasičenju; vrednosti polarizacije nasičenja so od 0,5 do 2,5 T.

REMANENTNA GOSTOTA IN KOERCITIVNA JAKOST sta dve značilni točki v diagramu H - B . Če bi v nadaljevanju začeli magnetilni tok i manjšati ter nadaljevali z beleženjem vrednosti B in H , bi prej ko slej dosegli točko $(0, B_r)$, remanentne gostota B_r na ordinatni osi, v kateri je (zaradi $H_r = 0$) magnetizacija $M_r = B_r/\mu_0$. Tok v navitju ima takrat vrednost i_r ,

$$H_r \cong \frac{Ni_r - (B_r/\mu_0)\Delta}{2\pi p} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_r \cong \frac{B_r \Delta}{\mu_0 N} = \frac{M_r \Delta}{N}.$$

Vira gostote B_r sta magnetizacija M_r oziroma notranji Amperovi tokи v feromagnetnem jedru, v manjši meri pa tudi tok i_r v navitju. Če od tu dalje tok i še manjšamo prek nič k vse bolj negativnim vrednostim in beležimo B in H , dosežemo točko

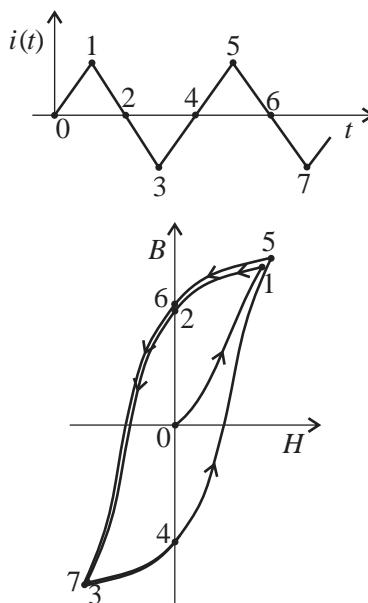


$(-H_c, 0)$, v kateri je gostota magnetnega pretoka v jedru enaka nič: $B_c = -\mu_0 H_c + \mu_0 M_c = 0$ ali $H_c = M_c$. V tej točki sta si antagonista preostala magnetizacija M_c od začetnega magnetenja in tok v navitju, ki jedro magnetiti v nasprotni smeri.

TRAJNI MAGNET. Med točkama $(0, B_r)$ in $(-H_c, 0)$ je točka trajnega magneta $(H_{t.m.}, B_{t.m.})$, ki jo jedro doseže, ko je tok skozi navitje enak nič. Če od tu dalje toka ne bi spreminali, navitje niti ni več potrebno – lahko ga kar odstranimo. Dobili smo trajni magnet, ki ima v reži in jedru gostoto $B_{t.m.}$, ta pa je zelo blizu vrednosti B_r . Jakost $H_{t.m.}$ je negativna, kar pomeni, da ima v jedru vektor magnetne poljske jakosti nasprotno smer kot vektorja gostote magnetnega pretoka in magnetizacije,

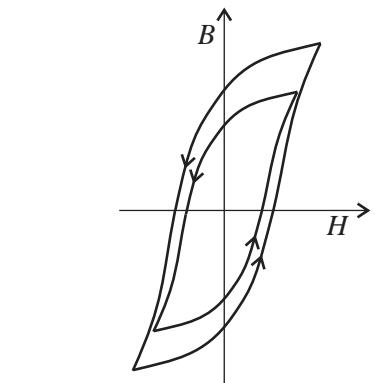
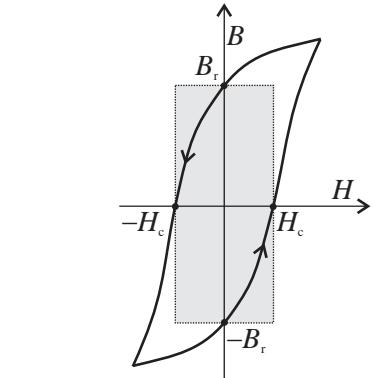
$$H_{t.m.} \cong \frac{-(B_{t.m.}/\mu_0)\Delta}{2\pi p} = -\frac{B_{t.m.}\Delta}{2\pi p\mu_0} \quad \Rightarrow \quad M_{t.m.} = \frac{B_{t.m.}}{\mu_0} - H_{t.m.} \cong \frac{B_{t.m.}}{\mu_0} \left(1 + \frac{\Delta}{2\pi p}\right) \cong \frac{B_{t.m.}}{\mu_0}.$$

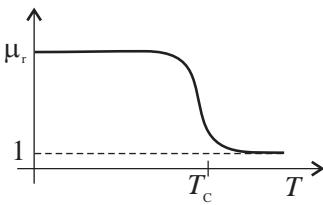
Trajni magneti so seveda različnih oblik, vendar je način, kako jih namagnetimo, enak. Magnetilni tok oblikujemo npr. kot trikotni impulz. Ob naraščanju toka se feromagnetni kos magneti, po koncu upadanja toka pa se malenkostno razmagneti in doseže točko $(H_{t.m.}, B_{t.m.})$. Po odstranitvi trajnega magneta iz magnetilne naprave se ti vrednosti nekoliko spremenita, vendar tako, da leži magnetova nova točka $(H_{t.m.}^{nova}, B_{t.m.}^{nova})$ na magnetilni krivulji med točkama $(0, B_r)$ in $(-H_c, 0)$. Trajni magneti imajo remanentno gostoto od 0,5 do 1 T, koercitivno jakost pa od 5 do 500 kA/m.



HISTEREZNA ZANKA ali pentlja je magnetilna krivulja, ki je značilna za izmenično magnetenje. Izberimo tok žagaste oblike. Če je T perioda in je bilo feromagnetno jedro ob $t = 0$ razmagneteno, potem se v prvi četrtini periode vrši magnetenje po deviški krivulji od točke 0 do točke 1, v drugi četrtini doseže točko 2, v tretji doseže točko 3, v četrti doseže točko 4, v peti točko 5, ki je zelo blizu točke 1, v šesti točko 6, ki je zelo blizu točke 2, v sedmi točko 7, ki je zelo blizu točke 3, itn. V nekaj periodah se proces magnetenja ustali v t. i. histerezni pentlji. Postopno se ustalijo tudi točke remanentne gostote ($\pm B_r$) in koercitivne jakosti ($\pm H_c$). Zanko sestavljata dve identični krivulji: če zgornjo zrcalimo prek osi B , zatem pa še prek osi H , dobimo spodnjo. Histerezni zanki lahko rečemo tudi kasnilka: jakost H sledi toku i , medtem ko gostota B kasni, zaostaja; zaostaja pač zato, ker je za obrat magnetizacije potrebno magnetno polje toka i v nasprotno smer, da premaga magnetno polje magnetnih dipolov v domenah.

Kasneje bomo spoznali, da magnetenje feromagnetika ni »zastonj«. Omenili smo irreverzibilnost, ki je posledica tega, da se ob magnetenju dogajajo v feromagnetiku še drugi procesi, ki zahtevajo energijski vložek. Izkazalo se bo, da je površina lika znotraj pentlje sorazmerna energiji, ki je potrebna, da se opravi en cikel magnetenja. Feromagnetiki se izrazito ločijo med seboj po širini, ki jo v grobem označuje vrednost $2H_c$. Če je $H_c \approx 10 \text{ A/m}$, govorimo o mehkomagnetni snovi, če pa je $H_c \approx 10^4 \text{ A/m}$ in več, govorimo o trdomagnetni snovi. Mehkomagnetiki so za izmenično magnetenje energijsko manj potratni in zato dobrodošli v električnih motorjih in transformatorjih, trdomagnetiki pa so zaradi magnetne trdoživosti primerni za trajne magnete. Naredimo grobo oceno »površine« lika: pri zanki višine 2 T in širine 20 A/m je ta 40 J/m^3 . Pri železu z gostoto okoli 8000 kg/m^3 in omrežni frekvenci 50 Hz je izgubna moč okoli 0,25 W/kg.





Histerezni pojav lahko izkoritimo za razmagnetenje. Če je feromagnetni objekt primerne oblike, da ga je mogoče v celoti izpostaviti dovolj močnemu magnetnemu polju, potem za si magnetrni izberemo npr. sinusni tok primerne amplitude, zatem pa to zmanjšujemo. Vsak delček feromagnetika drsi v diagramu H - B po magnetilni krivulji, ki je podobna vijačnici, in se z usihanjem amplitude bliža točki $(0, 0)$, feromagnetik pa stanju $M = 0$. Brž ko tak način razmagnetenja ni možen, je na voljo »dobrodošla« anomalija, ki se navezuje na t. i. Curiejevo temperaturo. Toplotno nihanje kristalne mreže slabí vezi med atomi v domenah. Pri Curiejevi temperaturi se zgodi »razpad« Weissovih domen in feromagnetna snov postane paramagnetna. Curiejeve temperature za železo, kobalt in nikelj so $770\text{ }^{\circ}\text{C}$, $1127\text{ }^{\circ}\text{C}$ in $354\text{ }^{\circ}\text{C}$. Če bi trajni magnet segreli prek te temperature, bi izgubil lastno magnetno polje, po ohladitvi pod njom pa bi se v njem ponovno naključno oblikovale Weissove domene; prejšnji trajni magnet bi prešel v stanje $M = 0$.

ANTIFEROMAGNETIKI IN FERIMAGNETIKI. To sta dve podskupini feromagnetikov. V antimagnetikih so izmenjalne sile takšne, da povzročijo antiparalelno usmerjenost spinov v sosednjih atomih, zato je takšna snov nemagnetna, magnetizacija v njih pa je enaka nič. Pri prekoračitvi Neelove temperature se antiparalelnost poruši; topotno nihanje kristelne mreže oslabi izmenjalne sile in snov postane paramagnetna. Antiferomagnetiki so krom, železov in manganov oksid in drugi. Podobno antiparalelno usmeritev dipolov imajo tudi ferimagnetiki, le da so momenti antiparalelno usmerjenih dipolov različnih jakosti. Ferimagnetiki se v magnetnem polju vedejo podobno kot feromagnetiki, le da je pri njih magnetna polarizacija v nasičenju nekajkrat manjša. Posebna skupina teh so feriti, npr. Fe_3O_4 (magnetit) in kompoziti dvovalentne kovine (cinka, kobalta, aluminija, niklja, mangana, barija, ...) z železovim trioksidom (Fe_2O_3). Ferite odlikuje velika specifična električna upornost, zaradi česar so primerni v visokofrekvenčni tehniki.

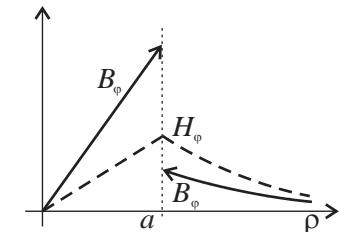
ANIZOTROPNOST. To lastnost snovi smo omenili pri dielektričnih in prevodnikih: da sta lahko polarizabilnost dielektrika ali prevodnost prevodnika v različnih smereh različni. To srečamo tudi pri feromagnetikih. Hladno valjana pločevina, ki jo uporabljamo v motorjih in transformatorjih, je vzdolž valjanja za magnetenje dovetnejša. V tem primeru govorimo o

vzdolžni (μ_{\parallel}) in prečni (μ_{\perp}) permeabilnosti. V taki snovi vektorji magnetnega polja niso sosmerni, ampak oblikujejo trikotnik vektorjev \mathbf{H} , \mathbf{M} in \mathbf{B}/μ_0 .

Magnetno polje v feromagnetnem vodniku. Večkrat se srečujemo s feromagnetnimi vodniki; daljnovodna vrv Al/Fe ima v sredini jeklen stržen, ki ga obdaja pletenica iz aluminija. Železna cev lahko služi kot električni oklop ali pa kot zaščita kablov pred mehanskimi poškodbami. Feromagnetiki kratkomalo nastopajo v vlogi tokovodnika. Zanimalo nas bo, kaj lahko rečemo o magnetnem polju v in ob takšnem vodniku. Izberimo jeklen vodnik krožnega preseka polmera a , ki vodi enosmerni tok i . Magnetno polje ravnega nemagnetnega vodnika je krožno okoli osi; od osi do površine vodnika polje narašča, od tam dalje pa z oddaljenostjo usiha. Če je vodnik feromagneten, je magnetno polje spet krožno. Vektorje polja določajo komponente B_{ϕ} , M_{ϕ} in H_{ϕ} . Uporabimo vrtinčni zakon polja \mathbf{H} na krožnici polmera ρ okoli osi vodnika:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H_{\phi} = \begin{cases} i & \rho \leq a \\ \frac{\rho^2}{a^2} i & \rho > a \end{cases} \Rightarrow H_{\phi} = \begin{cases} \frac{i}{\pi a^2} \rho & \rho \leq a \\ \frac{i}{2\pi\rho} & \rho > a. \end{cases}$$

Naraščanju toka i od nič do končne vrednosti so sledili tudi jakost $H_{\phi} = H$, gostota $B_{\phi} = B$ in magnetizacija $M_{\phi} = M$. Polje B določa zveza $B \cong \mu_r \mu_0 H$, kjer za relativno permeabilnost μ_r velja ocena: $\mu_{r,\text{zač.}} \leq \mu_r \leq \mu_{r,\text{maks.}}$. V tabelah najdemo zelo grobe ocene za μ_r . Za jeklo z 0,9 % ogljika so: $\mu_{r,\text{zač.}} = 50$, $\mu_{r,\text{maks.}} = 100$, $H_c = 5,6 \text{ kA/m}$ in $B_r = 1$. Pri toku 100 A in polmeru 0,5 cm je največja jakost v vodniku 3,2 kA/m. Največja gostota v vodniku je 0,4 T; še pod nasičenjem. Drugače je izven vodnika. Nad površino, v zraku (μ_0), je gostota 4 mT, jakost pa ostaja pri vrednosti 3,2 kA/m. Opazimo nezveznost tangentne komponente gostote \mathbf{B} . Pri oceni razmer v jeklenem vodniku se nismo dotaknili nekaterih drugih reči. Če je tok izmeničen, se vodniku zgodijo histerezne izgube, njim pa se pridružijo še izgube, ki so posledica vrtinčnih tokov.



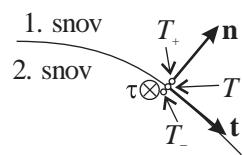


21:55

§7. Mejna pogoja magnetnega polja

Že tretjič razmišljamo o polju ob meji dveh snovi, tokrat o magnetnem polju. Izhajamo iz lastnosti polj \mathbf{B} in \mathbf{H} oziroma iz njunih integralnih zapisov, iz neizvornosti in vrtinčnosti,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{in} \quad \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_{\text{pro.}} + \phi'_e.$$



Imejmo mejo dveh snovi. Normalo \mathbf{n} mejne ploskve v točki T usmerimo v prostor z indeksom ena, zrcalno prek meje pa ležita sosednji točki T_+ in T_- . V splošnem je v meji prisotna tudi tokovna obloga; določata jo komponenti $K_{\text{pro.}t}$ in $K_{\text{pro.}\tau}$ oziroma projekciji vektorja $\mathbf{K}_{\text{pro.}}$ na enotska tangentna vektorja \mathbf{t} in $\mathbf{\tau}$; zanju naj velja zveza $\mathbf{t} \times \mathbf{\tau} = \mathbf{n}$. Na primer: če je na železni palici gosto navitje iz tanke žice, potem oblikuje tok v navitju tokovno oblogo, ki leži v meji med palico in zrakom.

Gostota \mathbf{B} . Neizvornost polja \mathbf{B} spominja na neizvornost tokovne gostote \mathbf{J} v enosmernih razmerah. Ob meji dveh snovi je normalna komponenta tokovne gostote zvezna; zveznost očitno velja tudi za normalno komponento gostote \mathbf{B} , zato je

$$B_n(T_+) - B_n(T_-) = 0 \quad \text{ali} \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}(T_+) - \mathbf{B}(T_-)) = 0.$$

To lastnost smo »nevede« uporabili pri toroidnem jedru z režo, ko smo s sklicevanjem na ujetost magnetnega polja med ovoje toroidnega navitja sklepali, da je gostota, ki jo izmerimo v reži, hkrati tudi gostota v jedru, saj magnetno polje režo prečka pravokotno (v normalni smeri).

Jakost \mathbf{H} . Pri jakosti \mathbf{H} postopamo takole. Majhna pravokotna zanka $\delta\mathcal{L}$ naj seže v obe snovi. Daljši stranici pravokotnika dolžine δl naj ležita ob meji tako, da sta na njiju tudi točki T_+ in T_- . Zanka objame del tokovne oblage oziroma tok $\delta i_{\text{pro.}}$. Ker ima pravokotnik neznatno površino, sta zanemarljiva tako električni pretok $\delta\phi'_e$ kot tudi njegov odvod $\delta\phi''_e$, zato je

$$\oint_{\delta\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \delta i_{\text{pro.}} + \underbrace{\delta\phi'_e}_{\approx 0}.$$

Ko lice pravokotnika obrnemo prvič v smer vektorja τ in drugič v smer vektorja t ter upoštevamo, da pri integraciji polja \mathbf{H} po zanki prispevata glavnino integraciji tega polja vzdolž stranic dolžine δl , pri oceni objete oblage pa je pomembno še desno pravilo, dobimo:

$$\oint_{\delta L_\tau} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong H_t(T_+) \delta l - H_t(T_-) \delta l \cong K_{\text{pro},\tau}(T) \delta l \quad \text{in} \quad \oint_{\delta L_t} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong H_\tau(T_+) \delta l - H_\tau(T_-) \delta l \cong -K_{\text{pro},t}(T) \delta l.$$

Pri krčenju » $\delta l \rightarrow 0$ « preideta oceni v enačbi, ki ju moremo združiti v vektorsko:

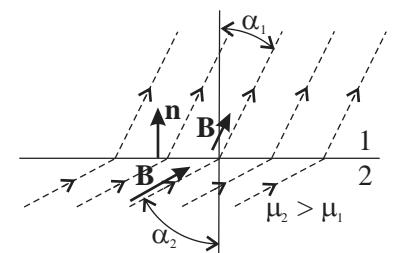
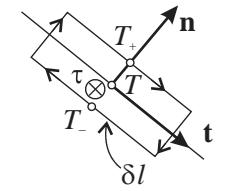
$$H_t(T_+) - H_t(T_-) = K_{\text{pro},\tau}(T) \quad \text{in} \quad H_\tau(T_+) - H_\tau(T_-) = -K_{\text{pro},t}(T) \quad \text{ali} \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}(T_+) - \mathbf{H}(T_-)) = \mathbf{K}_{\text{pro}}(T).$$

Ob meji s tokovno oblogo je tangentni del magnetne poljske jakosti nezvezen; razliko komponent poljske jakosti v eni tangentni smeri določa (\pm) tangentna komponenta tokovne oblage v drugi (njej pravokotni) smeri. Nezveznost polja \mathbf{H} smo srečali pri toroidni tuljavi z jedrom. V jedru ob navitju je magnetna jakost tangentna, izza navitja je enaka nič, razlika obeh vrednosti pa ustrezava ravno oblogi, ki jo oblikuje tok v gostem navitju. Nezveznost tangentne komponente gostote \mathbf{B} smo opazili pri tračnem vodniku, $B_x(T_+) - B_x(T_-) = -\mu_0 K_z$. Če upoštevamo, da je bil prostor okoli traku takrat prazen, s permeabilnostjo μ_0 , potem moremo prejšnje prevesti v $H_x(T_+) - H_x(T_-) = -K_z$, kar ustrezava mejnemu pogoju polja \mathbf{H} . Sorodna primera sta valjasti vodnik in ravna tuljava; obakrat sta vira magnetnega polja tokovni oblogi. V nasprotnem, ko je $K_{\text{pro},\tau} = 0$, sta tangentna dela magnetne poljske jakosti zvezna: $H_t(T_+) - H_t(T_-) = 0$ in $H_\tau(T_+) - H_\tau(T_-) = 0$.

Stik dveh linearnih magnetikov brez tokovne oblage. V nadaljevanju se omejujemo na stik dveh magnetnih snovi, ki ju ustrezeno ali zadovoljivo določata permeabilnosti μ_1 in μ_2 . Če tangentni smernik \mathbf{t} izbremo tako, da je $H_\tau = 0$, potem sta mejna pogoja sledeča: $B_n(T_+) = B_n(T_-)$ in $H_t(T_+) = H_t(T_-)$. Upoštevamo še obe permeabilnosti in dobimo:

$$\mu_1 H_n(T_+) = \mu_2 H_n(T_-) \quad \text{in} \quad H_t(T_+) = H_t(T_-) \quad \Rightarrow \quad \frac{H_t(T_+)}{\mu_1 H_n(T_+)} = \frac{H_t(T_-)}{\mu_2 H_n(T_-)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Sorodne relacije smo srečali pri električnem polju ob meji dielektrikov (razmerje dielektričnosti) in pri tokovnem polju ob meji prevodnikov (razmerje specifičnih električnih prevodnosti). Sporočilo zadnjega razmerja je identično: na meji



linearnih magnetikov se smer magnetnega polja lomi (spremeni); α_1 in α_2 sta kota, ki ju gostotnica z obeh strani meje oklepa z normalo \mathbf{n} . Razmerje absolutnih vrednosti gostote magnetnega pretoka z obeh strani meje je sledeče:

$$\frac{B(T_+)}{B(T_-)} = \sqrt{\frac{B_t^2(T_+) + B_n^2(T_+)}{B_t^2(T_-) + B_n^2(T_-)}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_2 + 1}} \in [1, \mu_1/\mu_2].$$

Naj je 1. snov nemagnetna, 2. snov pa dober magnetik z relativno permeabilnostjo $\mu_r \gg 1$. Glede na zgornji interval lahko pričakujemo, da je gostota polja v dobrem magnetiku tudi do μ_r -krat večja od one izven njega. Dobre magnetike srečamo v elektromagnetnih napravah, kot so transformatorji, dušilke, elektromagneti ali motorji, v vlogi magnetnih jeder, vdolž katerih je pričakovati glavni del magnetnega pretoka, manjši del pretoka pa najde svoje mesto v nemagnetnem delu prostora. Opažanje spominja na mejo prevodnik – izolant v tokovnem polju. Glavni del električnega toka je v prevodniku, manjši del toka pa najde svoje mesto v okoliškem izolantu. Povzemimo sklep: če prevodni objekti (vodniki) kanalizirajo električne toke, potem upravičeno pričakujemo, da magnetni objekti (jedra) kanalizirajo magnetne pretoke.

$i \uparrow\uparrow i_2$

$$\frac{T_+}{T_-} \frac{\mu_r}{\mu_r} = 1$$

$\downarrow i_1$

$i \otimes \otimes i_2$

$$\frac{T_+}{T_-} \frac{\mu_r}{\mu_r} > 1$$

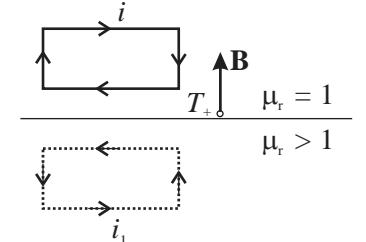
$\otimes i_1$

Zrcaljenje v magnetiki. Pogosti so primeri, da je tokovna struktura v bližini magnetika, npr. tokovodnik pred magnetno steno, tokovna zanka nad magnetno podlago itn. Izberimo sledečo nalogu. Tokovni element naj se nahaja nad magnetno podlago z relativno permeabilnostjo μ_r ; kakšno je magnetno polje v prostoru? Naloga spominja na nepopolno zrcaljenje oziroma na nalogu, ko je naboj nad dielektrično podlago. Takrat smo zadevo rešili s tremi naboji, takrat bomo to opravili s tremi tokovnimi elementi, originalnim, namišljenim v zrcalni legi in namišljenim na mestu originala, njihove jakosti pa morajo biti usklajene tako, da je zadoščeno mejnim pogojem. Točka T_+ je v zraku, tik nad podlago, točka T_- pa v podlagi tik pod njo. Glede na podlago je smer tokovnega elementa ali navpična (\uparrow) ali vodoravna (\rightarrow) ali poševna (\nearrow). Začnimo z navpičnim (\uparrow), ki ima tok i , namišljenim (\downarrow) v zrcalni legi, ki ima tok i_1 , in namišljenim (\uparrow) na mestu originala, ki ima tok i_2 . Prvi in drugi sta odgovorna za polje nad podlago, tretji pa za polje pod podlago. Gostote polj vseh treh so v točkah T_+ ali T_- tangentne, jakosti pa sledijo permeabilnostim, iz česar sledi: $i - i_1 = i_2/\mu_r$. Nadalujmo z vodoravnim (\rightarrow), ki ima tok i , namišljenim (\rightarrow) v zrcalni legi, ki ima tok i_1 , in namišljenim (\rightarrow) na mestu originala, ki ima tok i_2 . Gostote polj vseh

treh so v točkah T_+ ali T_- poševne na mejo. Normalna komponenta gostote bo zvezna, če bo $i + i_1 = i_2$, tangentna jakost pa zvezna, če bo $i - i_1 = i_2/\mu_r$, kar ponovi enačbo navpično postavljenih elementov. Če zadnji dve združimo, sledita toka

$$i_1 = \beta i \quad \text{in} \quad i_2 = (1 + \beta)i \quad \text{pri} \quad \beta = (\mu_r - 1)/(\mu_r + 1).$$

Poševni (\nearrow) tokovni element je vektorska vsota vodoravnega (\rightarrow) in navpičnega (\uparrow), zato tudi zanj veljajo zgornje enačbe, s tem, da je potreben navidezni poševni (\searrow) element v zrcalni legi, ki je z originalnim (\nearrow) odgovoren za polje nad podlago, in navidezni poševni (\nearrow) element na mestu originala, ki je odgovoren za polje v podlagi. Kar velja za te tokovne elemente, velja tudi za poljubno tokovno strukturo. Za določitev magnetnega polja v prostoru so odgovorne originalna in navidezni v zrcalni legi in na mestu originalne strukture. Glede na to, da je relativna permeabilnost magnetikov visoka, je $\beta \cong 1$. Za magnetno polje nad podlago sta odgovorna originalna in zrcalna struktura s praktično enakim tokom, $i_1 \cong i$. Zaradi tega je gostota polja tik nad ravno podlago skoraj pravokotna nanjo, $\mathbf{n} \times \mathbf{B}(T_+) \cong \mathbf{0}$ ozziroma $\mathbf{B}(T_+) \cong \mathbf{n}B_n(T_+)$.



§8. Magnetna vezja

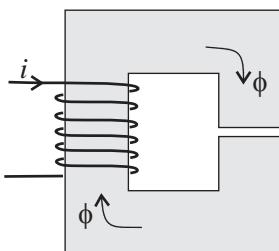


19:05

Lastnosti magnetnega polja ob meji dobrega in slabega magnetika so zelo podobne lastnostim tokovnega polja ob meji dobrega in slabega prevodnika. Iz njih izhaja ugotovitev: kakor je dober prevodnik kanal za električni tok, tako je dober magnetik kanal za magnetni pretok. Vzporednic med tokovnim in magnetnim poljem je še več in so takšne, da odpirajo možnost modeliranja določenih magnetnih struktur s t. i. »magnetnimi vezji«. Elementi teh vezij so magnetni upori in magnetni napetostni ter tokovni viri. Analiza magnetnih vezij sloni na dveh magnetnih Kirchhoffovih zakonih. Med magnetnim in tokovnim poljem so tudi očitne razlike, ki magnetnim vezjem postavljajo meje uporabnosti. Magnetne napetosti in magnetnega potenciala ne podpira delo magnetne sile, zato v magnetnih vezjih tudi ne moremo govoriti o moči in vsebinah, ki se nanjo navezujejo. In nenazadnje: modelno magnetno vezje v pretežni meri odpove v področju nasičenja feromagnetnega kanala.



20:16



Eno elektromagnetno strukturo, ki se jo da predstaviti kot magnetno vezje, že poznamo: to je toroidno jedro z navitjem in zračno režo. Izkazalo se bo, da sta feromagnetno jedro in zračna reža nelinearni oziroma linearni magnetni upor, navitje s tokom pa vir magnetne napetosti. Pripadajoče modelno magnetno vezje je zanka z napetostnim virom in dvema uporoma, v katerem ima magnetni tok vlogo magnetnega pretoka vzdolž jedra in reže. Pri tem je pomembno, da navitje ni več nujno enakomerno razporejeno po celiem obodu jedra, ampak zgolj na delu jedra, saj je dober magnetik garant, da se magnetni pretok ujame v jedru in se vzdolž njega ohranja, pa tudi jedru ni nujno zgolj toroid, ampak more biti iz istega razloga tudi kako drugače oblikovan (enako kot prevodnik v električnem tokokrogu).



5:53

Magnetna napetost in skalarni magnetni potencial. Ideja za novi magnetni količini prihaja iz elektrostatičnega polja. Osnova za vpeljavo električnega potenciala je lastnost $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, da je delo Coulombove sile po sklenjeni poti enako nič. Podobne lastnosti v magnetiki »žal« ni. V splošnem namreč velja, da je magnetno polje vrtinčno,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_{\text{pro.}} + \phi'_e.$$

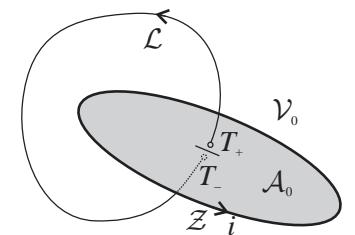
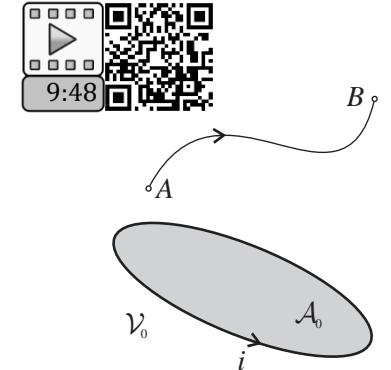
Vprašanje je: ali obstajajo okoliščine, ki zagotavljajo, da je magnetno polje vsaj pogojno nevrtinčno, $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$? Takšno je le v podprostoru \mathcal{V}_0 , v katerem za katerokoli sklenjeno zanko velja $i_{\text{pro.}} + \phi'_e = 0$. Poskušajmo poiskati ta podprostor. Izhajajmo iz enosmernih razmer, ko je $\phi'_e = 0$. Notranjost vodnikov očitno ne sodi v podprostor \mathcal{V}_0 , saj je tam $i_{\text{pro.}} \neq 0$. V \mathcal{V}_0 pa tudi ne sodi vsa zunanjost vodnikov; v njej je lahko zanka, ki vodnik objame in je zato $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. Da to možnost izvzamemo, vpeljemo opno \mathcal{A}_0 , ki naj »onemogoči«, da bi sklenjena pentlja \mathcal{L} obkrožila vodnik. V dinamičnih razmerah je $\phi'_e \neq 0$, vendar se izkaže, da je pri nizkih frekvencah, pri katerih se uporablajo modelna magnetna vezja, praktično zanemarljiv, $\phi'_e \approx 0$, zato lahko tudi takrat ravnamo tako kot v enosmernih razmerah, da je \mathcal{V}_0 podprostor, ki zaobjema zunanjost vodnikov, iz katere je opna \mathcal{A}_0 izvzeta. V tako opredeljenem podprostoru \mathcal{V}_0 je magnetno polje nevrtinčno,

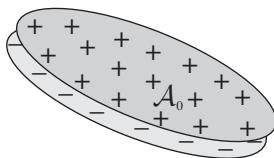
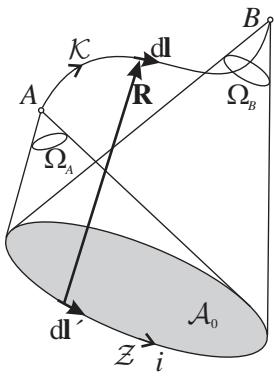
$$!!! \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 !!! \Rightarrow \mathbf{H} = -\mathbf{n} \frac{\partial \eta}{\partial n} = -\mathbf{grad} \eta \quad \text{in} \quad \theta_{AB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \eta(A) - \eta(B),$$

zato moremo v njem, po vzoru elektrostatike, vpeljati magnetno napetost θ in magnetni potencial η , ki sta v odnosu z magnetno poljsko jakostjo \mathbf{H} tako, kot sta električni potencial V in električna napetost u z električno poljsko jakostjo \mathbf{E} . Enota magnetne napetosti in potenciala je amper. V nadaljevanju se spoznajmo z novima magnetnima količinama.

Magnetna dipolska ploskev. Izberimo tokovno zanko Z s tokom i ; na njen obod napnimo opno \mathcal{A}_0 . Podprostor \mathcal{V}_0 , v katerem je magnetno polje nevrtinčno, je prostor izven zanke in opne. Nad in pod opno izberimo obmejni točki T_+ in T_- . Če tvorimo krivuljni integral jakosti \mathbf{H} od T_+ po poti \mathcal{L} do T_- , je razlika potencialov enaka ravno toku i , saj sta si točki T_+ in T_- povsem blizu, da je torej pot \mathcal{L} takrat že »skoraj« sklenjena,

$$\theta_{T_+ T_-} = \int_{T_+}^{T_-} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \eta(T_+) - \eta(T_-) = i.$$





In smo že pri prvi ugotovitvi: opna \mathcal{A}_0 je mesto nezveznosti potenciala η . Točka nad opno ima za i višji potencial kot njej sosednja pod opno. In kakšen je potencial v okolici zanke oziroma v podprostoru \mathcal{V}_0 ? Izrazimo magnetno napetost med točkama A in B vzdolž krivulje \mathcal{K} . Poljsko jakost zapišimo z Biot-Savartovim zakonom in upoštevamo, da je $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$:

$$\theta_{AB} = \eta(A) - \eta(B) = \int_{\mathcal{K}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{K}} \left(\frac{1}{4\pi} \oint \frac{i d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \right) \cdot d\mathbf{l} = \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{K}} \oint \frac{(d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}/R) \cdot d\mathbf{l}}{R^2}.$$

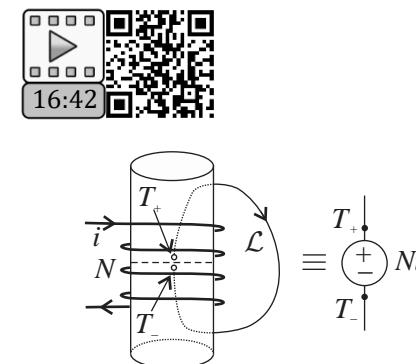
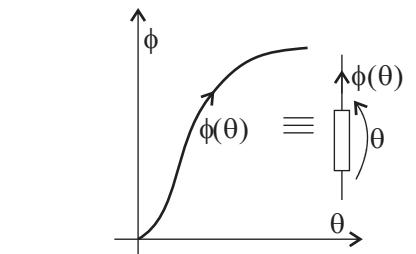
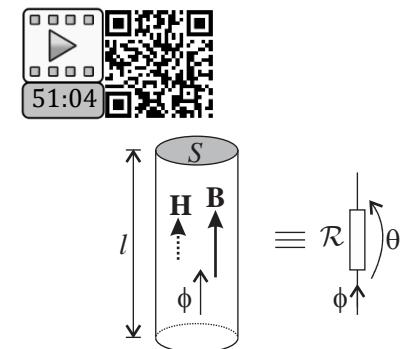
Dvojna integracija je na moč podobna tisti pri jakosti vrtinca magnetnega polja \mathbf{B} tokovne niti. Če smiselno upoštevamo zamenjave oznak, je tudi rezultat na koncu identičen,

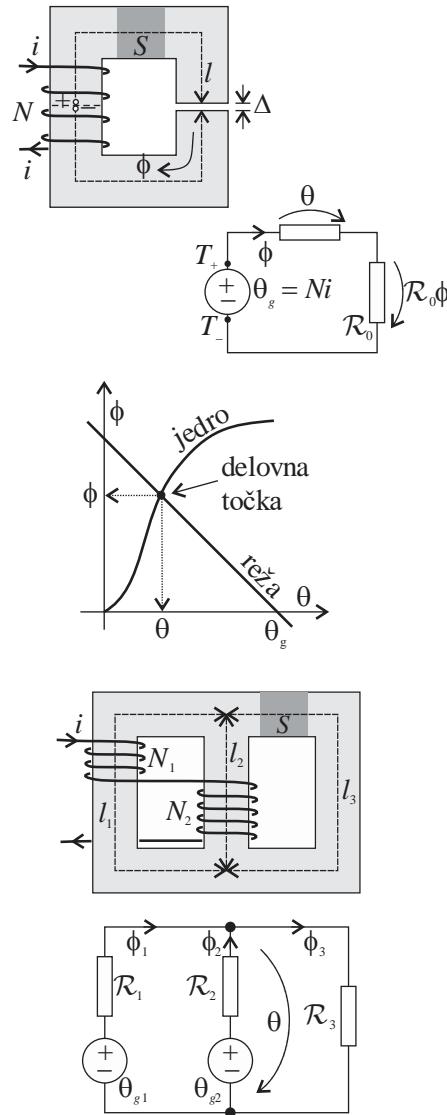
$$\theta_{AB} = \eta(A) - \eta(B) = i \frac{(\Omega_A - \Omega_B)}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad \eta(T) = i \frac{\Omega_T}{4\pi} + K \quad \Rightarrow \quad \eta(T) = i \frac{\Omega_T}{4\pi}.$$

Kota Ω_A in Ω_B sta prostorska kota, pod katerima se iz točk A in B vidi opno \mathcal{A}_0 . Če izhodišče magnetnega potenciala η izberemo v neskončnosti, je $K = 0$, potencial pa se izraža s kotom, pod katerim je iz točke T videti opno \mathcal{A}_0 . Ta rezultat je povsem identičen rezultatu za električni potencial električne dipolske ploskve, ki jo oblikujeta sloja \pm elektrin. Če s to analogijo nadaljujemo, moremo tokovno zanko nadomestiti s slojema » \pm magnetin«, ki sta razmeščena ob opni, samo opno \mathcal{A}_0 pa sprejeti kot magnetno dipolno ploskev. Kadar je zanka majhna, govorimo o magnetnem dipolu, tega pa formalno razumemo kot par nasprotnih točkastih magnetin. Iz omenjenih analogij nadalje izhaja, da je magnetno polje magnetnega dipola identično električnemu polju električnega dipola. Podobnost polj \mathbf{B} in \mathbf{E} tokovne zankice oziroma para elektrin je tudi tisto, kar – poleg navora – opravičuje poimenovanje tokovne zankice z magnetnim dipolom.

Magnetni tok. Vlogo magnetnega toka v feromagnetskem kanalu ima magnetni pretok $\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$; podobna količina v električnem kanalu je $i = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$. Podobnost je tudi v neizvornostih: $\phi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$ in $\phi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$. Iz prve izhaja tokovni Kirchhoffov zakon električnega spojišča, iz druge Kirchhoffov zakon magnetnega spojišča. Če ima magnetno jedro več krakov, ki imajo skupno razvejišče, velja v njem: $\sum (\pm) \phi_k = 0$. Polji \mathbf{B} in \mathbf{J} sta si podobni tudi v mejnih pogojih: da sta njuni normalni komponenti ob stiku snovi zvezni.

Magnetni upor. Tako kot priredimo kosu žice električni upor, tako tudi kosu feromagnetnega jedra priredimo magnetni upor. Naj ima magnetni kanal presek S in srednjo dolžino l . Gostota pretoka in poljska jakost se po preseku in tudi vzdolž kanala nekoliko spreminja, vendar se zadovoljimo z njunima srednjima vrednostma: da je vzdolž magnetnega kanala magnetna napetost $\theta = Hl$, da je v kanalu magnetni pretok $\phi = BS$, pri tem pa sta H in B komponenti polj \mathbf{H} in \mathbf{B} vzdolž kanala. Kadar je kanal linearen, da ima permeabilnost μ , priredimo kvocientu magnetne napetosti in pretoka magnetno upornost $\mathcal{R} = \theta/\phi = Hl/BS = l/\mu S$ oziroma magnetno prevodnost $\mathcal{G} = 1/\mathcal{R} = \mu S/l$. Opažamo podobnost z izrazom za električno upornost (prevodnost) električnega kanala. Vlogo specifične električne prevodnosti prevzema permeabilnost. Linearen kanal je tudi zračna reža. Magnetna upornost zračne špranje dolžine Δ , skozi katero prehaja magnetni pretok, je $\mathcal{R}_0 = \Delta/\mu_0 S$. Reža je običajno mnogo krašja od magnetne poti vzdolž feromagnetnega kanala, je pa μ_0 nekajtisočkrat manjša od permeabilnosti dobrega magnetika. Zračna reža je očitno zelo pomemben dejavnik pri analizi neke magnetne strukture. Zračna špranja se pojavlja v različnih svojstvih: lahko je nujna (med statorjem in rotorjem), lahko je željena, da dosežemo določene lastnosti elektromagnetne naprave (tuljava s spremenljivo induktivnostjo, kotva elektromagneta), je pa tudi neizbežna – pojavi se pri zlaganju delov magnetnih jader v celoto (npr. jarmov in stebrov transformatorja). Kadar je magnetni kanal nelinearen, nadomesti odnos med ϕ in θ karakteristika $\phi(\theta)$, ki je identična magnetilni krivulji $B(H)$, na kateri je potrebno vrednosti na obeh oseh preskalirati sorazmerno z dolžino oziroma s presekom kanala; odnos $\phi(\theta)$ spominja na karakteristiko $i(u)$ v električnih vezjih.





PRVI PRIMER. Izhajamo iz jedra z režo in navitjem, ki smo ga predstavili pri določanju magnetilne krivulje $B(H)$. Jedro naj ima tokrat štirikotno obliko, srednjo dolžino l in presek S . Navite z N ovoji in tokom i je nameščeno na levem stebru, desni pa ima režo dolžine Δ . Reža predstavlja magnetni upor z upornostjo $\mathcal{R}_0 = \Delta/\mu_0 S$. Jedro določa magnetilna krivulja $B(H)$. Za integral magnetne poljske jakosti \mathbf{H} od T_+ po sredini jedra, skozi režo in naprej po jedru do T_- dobimo

$$\int_{T_+}^{T_-} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \underbrace{Hl}_{\theta} + \underbrace{(B/\mu_0)\Delta}_{\phi/S\mu_0} = Ni = \theta_g \quad \Rightarrow \quad \theta + \mathcal{R}_0\phi - \theta_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi(\theta) = \frac{\theta_g - \theta}{\mathcal{R}_0}.$$

Pri tem smo upoštevali, da so: B gostota v jedru in reži, θ magnetna napetost vzdolž jedra, $\mathcal{R}_0\phi$ napetost prek reže in Ni amper-ovoji oziroma napetost θ_g magnetnega vira. Količini ϕ in θ povezuje karakteristika $\phi(\theta)$, ki izhaja iz preskalirane magnetilne krivulje $B(H)$, kjer sta $\theta = Hl$ in $\phi = BS$. Če se pri znani odvisnosti $\phi(\theta)$ sprašujemo po pretoku ϕ oziroma gostoti B , postopamo tako, da v (ϕ, θ) diagram vrišemo še premico $(\theta_g - \theta)/\mathcal{R}_0$. Presečišče karakteristik da delovno točko oziroma magnetno napetost vzdolž jedra in magnetni pretok v jedru. Enačba $\theta + \mathcal{R}_0\phi - \theta_g = 0$ je drugi magnetni Kirchhoffov zakon, kar simbolično zapišemo kot $\sum(\pm)\theta_s = 0$.

DRUGI PRIMER. Imejmo linearno trikanalno jedro z dvodelnim navitjem. Jedro ima permeabilnost μ , presek S in srednje dolžine krakov l_1 , l_2 ter l_3 . Navite naredi okoli levega stebra N_1 in okoli srednjega N_2 zavojev. Magnetno vezje tvorijo vira z magnetnima napetostma $\theta_{g1} = N_1 i$ in $\theta_{g2} = N_2 i$ in magnetni upori z upornostmi $\mathcal{R}_k = l_k/\mu S$. Izrazimo pretoke ϕ_1 , ϕ_2 in ϕ_3 . Oprimo se na izkušnje iz enosmernih električnih vezij. Naj je θ napetost med zgornjim in spodnjim spojiščem. Izrazimo vse tri pretoke in jih vnesemo v spojiščno enačbo,

$$\phi_1 = \frac{\theta_{g1} - \theta}{\mathcal{R}_1} \quad \text{in} \quad \phi_2 = \frac{\theta_{g2} - \theta}{\mathcal{R}_2} \quad \text{in} \quad \phi_3 = \frac{\theta}{\mathcal{R}_3} \quad \text{in} \quad -\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta - \theta_{g1}}{\mathcal{R}_1} + \frac{\theta - \theta_{g2}}{\mathcal{R}_2} + \frac{\theta}{\mathcal{R}_3} = 0.$$

Po ureditvi dobimo napetost in iskane pretoke, lahko pa tudi gostote in jakosti v kanalih,

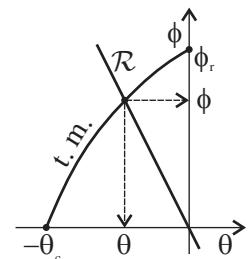
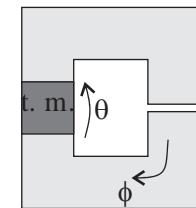
$$\theta = \left(\frac{\theta_{g1}}{\mathcal{R}_1} + \frac{\theta_{g2}}{\mathcal{R}_2} \right) : \left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} \right) \quad \Rightarrow \quad \phi_1 \text{ in } \phi_2 \text{ in } \phi_3.$$



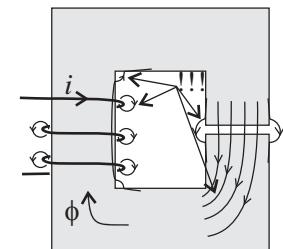
Trajni magnet. Zadržana magnetizacija M v njem je rezultat predhodnega magnetenja v ustreznici magnetilni napravi. Karakteristiko trajnega magneta povzema magnetilna krivulja $B(H)$ med točko remanentne gostote $(0, B_r)$ in točko koercitivne jakosti $(-H_c, 0)$ oziroma odvisnost $\phi(\theta)$ v drugem kvadrantu, ki pomeni tokovno-napetostno karakteristiko trajnega magneta kot magnetnega vira. Ob njej se velja spomniti karakteristike $i(u)$ osvetljene diode, ko ta predstavlja električni vir. Če v (u, i) diagram osvetljene diode vrišemo karakteristiko bremena, dobimo presečišče (delovno točko), ki določa napetost (na diodi, bremenu) in tok (skozi diodo, breme). Podobno je s trajnem magnetom. Če trajni magnet vključimo v magnetno zanko, ki jo tvorita še jedro in reža s skupno magnetno upornostjo \mathcal{R} , je enačba zanke sledeča:

$$\theta + \mathcal{R}\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi(\theta) = -\theta/\mathcal{R},$$

vsota magnetne napetosti θ vzdolž trajnega magneta in magnetne napetosti $\mathcal{R}\phi$ vzdolž jedra in reže je enaka nič. Če v (ϕ, θ) diagram poleg karakteristike $\phi(\theta)$ trajnega magneta vrišemo še premico $-\theta/\mathcal{R}$, ki predstavlja preostali del zanke, dobimo presečišče, ki določa magnetni pretok v zanki in magnetno napetost vzdolž trajnega magneta; slednja je očitno negativna, kar pomeni, da sta poljska jakost in gostota pretoka v trajnem magnetu nasprotnih smeri.

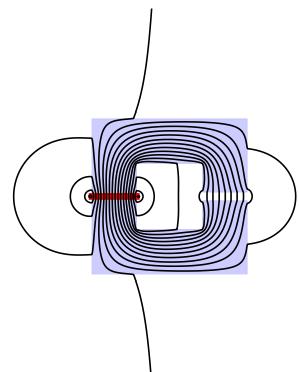


Šibka mesta magnetnih vezij. Prvo je gotovo magnetilna krivulja $B(H)$, saj se moramo pri izmerjeni vrednosti gostote pretoka in izračunani vrednosti poljske jakosti zadovoljiti z njunima srednjima vrednostma po preseku in vzdolž kanala. Na to se navezeju nuja, da govorimo o srednji dolžini magnetnega kanala; pri tem seveda ne pozabljamo dejstva, da je na kraji gostotnici v jedru polje močnejše, na daljši pa šibkejše. Težavo povzroča tudi zračna reža, saj se magnetni pretok prek nje ne zgodi po preseku, ki bi bil enak preseku jedra. Analitične ocene in numerični izračuni magnetnega polja okoli reže kažejo, da je presek kanala prek reže za okoli Δ širši; zaradi tega je magnetna upornost zračne reže nekoliko manjša od $\mathcal{R}_0 = \Delta/\mu_0 S$. Navitje na jedru je pogosto večslojno, zato so ovoji v višjih slojih bolj odmaknjeni od jedra. Zaradi tega se manjši del magnetnega pretoka sklene že okoli samih ovojev; jadro očitno ne povleče vase vsega magnetnega pretoka. Jedra imajo tudi ostre vogale; zgodi se, da manjši del pretoka pred vogalom iz jedra izstopi in se za njim spet vrne v jedro. Množina magnetnega polja izven jedra se še dodatno poveča v bližini nasičenja. V takem primeru postaja magnetna vezja vse manj verodostojen model; potrebni so numerični modeli, ki slonijo na diskretizaciji jedra in njegove okolice. Težavo

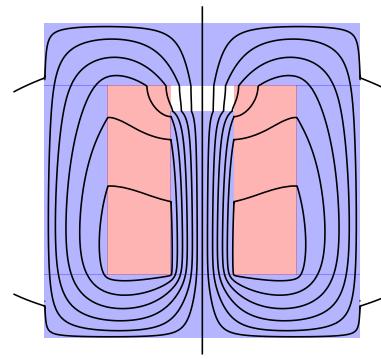


predstavlja tudi trajni magnet. Kadar je vključen v magnetno strukturo, ki jo magneti tudi tok v navitju, se trajni magnet lahko delno ali izdatno razmagneti. V izogib temu je potrebno tok v navitju omejiti do tiste mere, ki še ne poruši zadržane magnetizacije v magnetu.

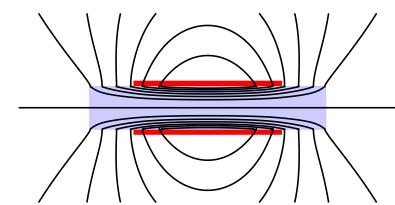
Kljud Šibkostim je koncept magnetnih vezij vseeno uporaben, le zavedati se moramo pasti, ki lahko izračunom zmanjšajo verodostojnost. Magnetna vezja pridejo do ustrezne veljave tudi v dinamičnih razmerah. Takrat se v analizo magnetnega vezja oziroma magnetne strukture vpletejo še elektromagnetna indukcija, magnetna energija in različni gibalni procesi; več o tem pa v novem poglavju.



gostotnice magnetnega polja v in ob jedru z režo



gostotnice magnetnega polja v feritnem lončku z režo



gostotnice magnetnega polja ravne tuljave z jedrom

Dinamično polje in izmenična vezja

§9. Faradayev zakon (13)

§10. Induktivnosti (11)

§11. Magnetna energija (6)

§12. Gibalni procesi v magnetnem polju (4)

§13. Maxwellove enačbe (4)

§14. Elektromagnetno polje (16)

§15. Električna vezja v dinamičnih razmerah (3)

§16. Prehodni pojavi v električnih vezjih (12)

§17. Kompleksni račun (12)

§18. Analiza izmeničnih električnih vezij (12)

§19. Teoremi o izmeničnih električnih vezjih (3)

§20. Trifazni sistem (8)

Dinamično polje in izmenična vezja

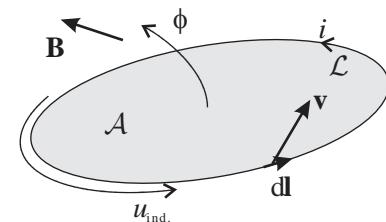
§9. Faradayev zakon

Vstopamo v osrednje poglavje elektromagnetike, v elektrodinamiko. Ključen zanjo je Faradayev zakon elektromagnetne indukcije, ki zakone elektrostatike, tokovnih polj in magnetike poveže v konsistentno celoto. V dosedanjih vsebinah smo osrednjo pozornost namenili krajevno odvisnim električnim, tokovnim in magnetnim poljem, zelo malo pa sami časovni dimenziji. Bilo je tudi nekaj izjem. Pri Lorentzovi sili smo izpostavili, da so količine elektromagnetnega polja v splošnem krajevno-časovne funkcije. Zakon o ohranitvi naboja in električni tok sta se spojila v kontinuitetno enačbo. Elektritve so spremljali časovno spremenljivi toki, napetosti, moči in energije. Sledili smo trajektorijam nabitega delca v električnem in magnetnem polju. V jakost vrtinca magnetnega polja se je vpletel časovni odvod električnega pretoka. Magnetiziranje snovi sledi dinamiki električnega toka. Brez vpletanja časa bi bila obravnava omenjenih polj gotovo zelo siromašna.

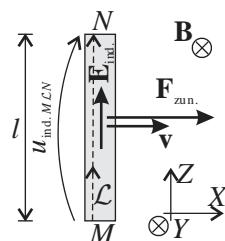
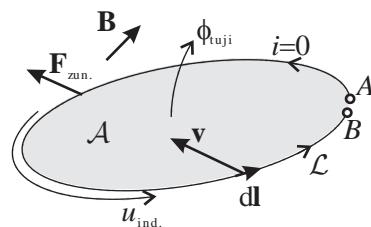
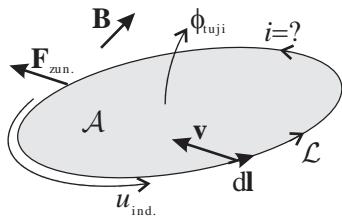
Izpostaviti moramo še temo, ki je kot naročena za uvod v to poglavje: to je razmišljanje o delu za premik tokovne zanke v magnetnem polju. Ugotovili smo, da deluje na naboju dQ , ki ima vzdolž elementa $d\mathbf{l}$ zanke \mathcal{L} hitrost \mathbf{u} , tudi sila $dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, ki je posledica hitrosti \mathbf{v} elementa $d\mathbf{l}$. Razmišljanje o tej sili velja ponoviti: "Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ je nekaj povsem novega! Z vidika mirujočega opazovalca, ki gibanje zanke spreminja s strani, je to vektor, ki določa magnetno silo $dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ na naboju dQ zaradi premikanja zanke, opazovalec na zanki pa te sile ne prepozna kot magnetne, kot magnetno priznava le silo $dQ(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, saj je \mathbf{u} zanj edina hitrost, ki jo naboju dQ ima. Opazovalec na zanki bo v duhu Lotentzove sile izjavil: če omenjena sila ni magnetna, je zagotovo električna – je neka dodatna električna sila –, rečemo ji inducirana električna sila in jo zapišemo kot $dQ\mathbf{E}_{\text{ind}}$. Polju \mathbf{E}_{ind} pravimo inducirana električna poljska jakost, napetosti u_{ind} pa inducirana napetost vzdolž zanke, za katero velja:

$$u_{\text{ind.}} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\phi'.$$

Prišli smo do t. i. gibalne inducirane napetosti v premikajoči zanki; kot takšna v nadaljevanju vstopa v napetostno enačbo



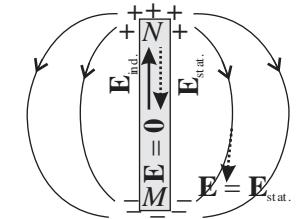
te zanke. Narava inducirane sile je drugačna od Coulombove: integral inducirane električne poljske jakosti je v splošnem različen od nič. Inducirano električno polje je vrtinčno: jakost vrtinca na sklenjeni pentlji \mathcal{L} določa prejšnji integral. Več o tem v poglavju o elektrodinamiki." – Zapis inducirane napetosti terja osvežitev spomina in nekaj pojasnil.



Pri delovanju sil $i \mathbf{dl} \times \mathbf{B}$ na zanko smo privzeli, da je magnetno polje \mathbf{B} statično, $\mathbf{B}(T)$, tok i v zanki pa enosmeren. Pretok ϕ , ki je posledica magnetnega polja drugih struktur, bomo v nadaljevanju pisali kot ϕ_{tuji} , v njej inducirano napetost, ki je posledica premikanja zanke, pa kot $u_{ind.} = -\phi'_{tuji}$. Tok i povzroča skozi zanko tudi lasten pretok, ϕ_{lastni} , vendar se ta pri premikanju (toge) zanke ne spreminja, $\phi'_{lastni} = 0$.

Polje $\mathbf{E}_{ind.} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ je odvisno od magnetnega polja in hitrosti, nič pa od toka v zanki. Če zanka nima toka, potem ni niti sile niti premika. More pa premik izvvati neka zunanjia sila $\mathbf{F}_{zun.}$, ki zanko potiska skozi polje. V zanki se inducira polje $\mathbf{E}_{ind.}$, vzdolž zanke pa napetost $u_{ind.} = -\phi'_{tuji}$ in posledično tudi tok, vendar o njem ne moremo reči nič dokončnega – to vprašanje prelagamo na kasneje. Da bi se tok ne pojabil, si v zanki omislimo prekinitev. Če zunanjia sila tak odprt zavoj premika, se v njem spet inducira polje $\mathbf{E}_{ind.}$, med koncema A in B pa napetost $u_{ind.ALB} = \int_{ALB} \mathbf{E}_{ind.} \cdot d\mathbf{l}$. Zavoj more očitno zamenjati tudi kos poljubno oblikovane žice. Imejmo raven vodnik dolžine l , ki leži vzporedno z osjo Z . Naj ga zunanjia sila vleče s hitrostjo v_x (vzdolž osi X) skozi polje gostote B_y (vzdolž osi Y). Inducirana jakost v vodniku je $E_{ind.z} = v_x B_y$ in inducirana napetost med krajiščema vodnika je $u_{ind.MLN} = v_x B_y l$. Pri enakomerni hitrosti in homogenem magnetnem polju je napetost enosmerna; pri dolžini 1 m, hitrosti 10 m/s in gostoti 0,5 T znese ta 5 voltov. Če je hitrost npr. sinusna, $v_x(t) = v_0 \sin \omega t$, je sinusna tudi napetost, $u_{ind.MLN}(t) = v_0 B_y l \sin \omega t$, in podobno tudi, če se spreminja polje. V splošnem se lahko časovno in krajevno spremnjata tako hitrost v kot polje \mathbf{B} . Takšne okoliščine srečamo v električnih strojih, v katerih so vodniki med seboj povezani v navitje. Inducirane poljske jakosti in napetosti vzdolž posameznih vodnikov so v splošnem različne, gibalno inducirano napetost vzdolž celotnega navitja pa določa integral, $\int_{\mathcal{L}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$.

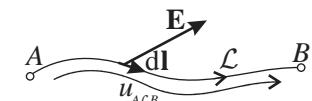
Reakcijsko električno polje. Vrnilo se k vodniku. Pod vplivom induciranega polja $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ se prosti elektroni pomaknejo h krajišču M ; ob njem se pojavi presežek elektronov, ob krajišču N pa primanjkljaj elektronov. Zgodi se ločitev nabojev, ki smo jo srečali že pri električni influenci, ko prevodno telo vstavimo v primarno električno polje \mathbf{E}_0 , ali pri električnem viru, v katerem deluje ločevalno polje \mathcal{E}_g neelektrične sile. Kot odziv na ločitev nabojev se pojavi Coulombovo reakcijsko polje; določa ga statična jakost $\mathbf{E}_{\text{stat.}}$. V vodniku se vzpostavi ravnoesje sil oziroma jakosti: $\mathbf{E}_{\text{ind.}} + \mathbf{E}_{\text{stat.}} = \mathbf{0}$. Polji $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ in $\mathbf{E}_{\text{stat.}}$ oblikujeta rezultančno poljsko jakost $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ind.}} + \mathbf{E}_{\text{stat.}}$. Induciranemu polju $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$, ki spominja na polje \mathcal{E}_g , rečemo tudi generatorska električna poljska jakost. Krajišči vodnika sta mesti največje koncentracije nabojev, sicer pa se manjši presežek pojavi tudi na preostali površini vodnika. Po površini vodnika je naboj razporejen tako, da je v vodniku $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Izven vodnika je $\mathbf{E}_{\text{ind.}} = \mathbf{0}$, zato je rezultančno polje $\mathbf{E} = \mathbf{0} + \mathbf{E}_{\text{stat.}} = \mathbf{E}_{\text{stat.}}$ tam takšno, kot ga določajo influirani naboji na površini vodnika.



Električne napetosti. Poduk zgornjih razmišljajn je novo spoznanje: inducirano električno polje ni samo, praviloma ga spremlja ločitev nabojev in njihovo Coulombovo polje. Podobno moremo reči za napetosti. Govorimo o treh napetostih, inducirani, ki je stvar krivulje, statični, za katero sta pomembni točki na konceh krivulje in rezultančni napetosti oziroma vsoti obeh, ki je, zaradi inducirane napetosti, spet stvar krivulje:

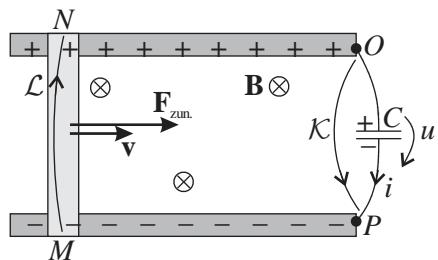
$$u_{\text{ind.}ALB} = \int_{ALB} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{in} \quad u_{\text{stat.}AB} = \int_{ALB} \mathbf{E}_{\text{stat.}} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}_{\text{stat.}} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{in} \quad u_{ALB} = \int_{ALB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = u_{\text{ind.}ALB} + u_{\text{stat.}AB}.$$

Ob teh zapisih se moramo vrniti v elektrostatiko. Napetost smo definirali na podlagi dela električne sile na poti. Ker smo za Coulombovo polje ugotovili, da sta pomembna začetek in konec, ne pa sama pot (podobno kot pri težnostni sili), se je odprla možnost vpeljave potencialne energije in potenciala ter prilika, da zapišemo napetost kot razliko potencialov, kar nam je opravila v mnogočem olajšalo. Tokrat se moramo vrniti nazaj in v luči indukcije ponoviti, da je delo električne sile na poti izhodišče za definicijo električne napetosti: krivulji \mathcal{L} (od točke A do točke B) pripada napetost u_{ALB} , ki jo določa krivuljni integral električne poljske jakosti,

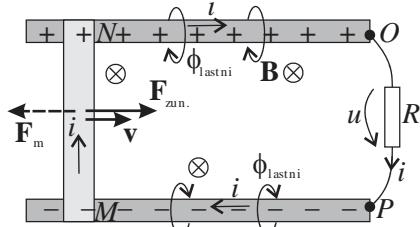


$$u_{ALB} = \int_{ALB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Poudarek je na sami krivulji. V zapisu ALB sta točki A in B izključno v vlogi začetka in konca integracije; moremo ju tudi opuščati in to nadomestiti s usmeritvijo krivulje \mathcal{L} . Povejmo še drugače: v dinamičnih razmerah je električni potencial le sopotna količina, ki kot takšna še ne določi napetosti.



Linearni generator. Ostanimo pri vodniku; tokrat naj drsi po prevodnih vodilih vzdolž osi X . Influiran naboju na površini vodnika se delno preseli tudi na vodili. Med njima je električna napetost $u_{OKP} = \int_{OKP} \mathbf{E}_{\text{stat.}} \cdot d\mathbf{l} = u_{\text{stat.}OP}$, ki ustreza statični napetosti od točke N skozi vodnik do M , $u_{\text{stat.}OP} = \int_{NLM} \mathbf{E}_{\text{stat.}} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{NLM} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l} = -(-v_x B_y l) = v_x B_y l = u$. Če med sponki O in P priključimo kondenzator kapacitivnosti C , bo ta nanelektron z nabojem $\pm Cu$. Če bo gibanje palice sinusno, bo takšna tudi napetost na kondenzatorju; ta se bo izmenično polnil in praznil s tokom $i = Cu'$ ter sprejemal in oddajal električno energijo z močjo $p_e = iu = Cuu'$, energija v njem pa bo vsak trenutek enaka $W_e = \frac{1}{2}Cu^2$. Sedaj pa kondenzator zamenjajmo z uporom upornosti R . Prvi hip bi rekli, da bo tok i skozi upor preprosto u/R , vendar temu ni tako. Le če je upornost R sorazmerno visoka, se temu pričakovanju približa; takrat je $i \cong u/R$. Težava vrednotenja induciranega toka se skriva v dodatnem magnetnem polju, ki ga ta (tok) povzroča, saj spremeni prvotno polje \mathbf{B} in posledično tudi prvotno napetost u . Potrebne popravke bomo kasneje znali ovrednotiti in upoštevati, takrat pa se zadovoljimo z oceno $i \cong u/R$, ki pri visoki upornosti zagotavlja, da je popačitev prvotnega polja \mathbf{B} zanemarljiva. Vzpostavljena zanka toka i skozi upor, spodnje vodilo, vodnik in zgornje vodilo ustvarja skozi zanko lasten pretok ϕ_{lastni} , ki podpre pretok ϕ_{tuji} polja \mathbf{B} skozi to zanko, ko se ta – zaradi pomikanja vodnika v desno – zmanjšuje. Na to se navezuje t. i. Lenzovo pravilo (ta sega v začetke proučevanja indukcije), in sporoča: v zanki se inducira napetost, katere posledični magnetni pretok stremi ohranjati skupno množino pretoka skozi zanko. Skladnost predhodne ugotovite in Lenzovega pravila je očitna.



46:10

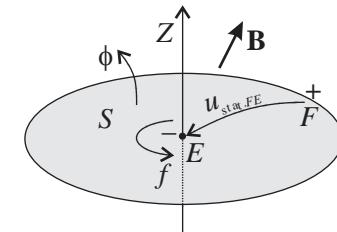
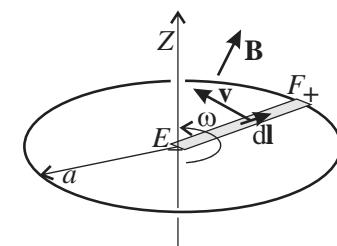


Pomenljivo je sledeče. Na uporu se sprošča topota z močjo $p_j = u^2/R$. Na drseči tokovodnik deluje zaviralna magnetna sila $ilB_y \cong (u/R)lB_y = (u^2/v_x R)$ v levo, nasproti zunanje sile. Očitno mora ta sila premagovati zaviralo magnetno silo, če naj se krogotok ohranja »pri življenju«. Za moč zunanje sile velja: $p_{zun.} = ilB_y v_x \cong u^2/R = p_j$. Kaj ugotavljam? Na eni strani je moč zunanje sile, na drugi je moč sproščanja toplotne v uporu, vmes pa je elektromagnetni sistem, ki je sposoben eno neelektrično energijo pretvarjati v drugo neelektrično energijo.

Faradayev generator se od linearnega razlikuje po izvedbi; premo gibanje zamenja kroženje. Imejmo homogeno polje \mathbf{B} in kovinsko palico dolžine a , ki ima eno krajišče vpeto v os Z . Palica naj enakomerno kroži v ravnini $z = 0$ okoli osi Z s kotno hitrostjo ω . Hitrost elementa $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_\rho d\rho$, ki je od vrtišča oddaljen za ρ , je $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\phi \omega \rho$; inducirana napetost je

$$du_{\text{ind.}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{e}_z \omega \rho d\rho \cdot \mathbf{B} = \omega B_z \rho d\rho \quad \Rightarrow \quad u_{\text{ind.}EF} = \int_0^a du_{\text{ind.}} = \frac{\omega a^2 B_z}{2}.$$

Zanimivo: za inducirano napetost je pomembna le komponenta B_z ; le ta je odgovorna za inducirano poljsko jakost vzdolž palice. Če drsi krajišče F po kovinskem obroču polmera a , krajišče E pa je pritrjeno na kovinsko os (os Z), se na obroču pojavi presežek pozitivnega, na osi presežek negativnega naboja, od obroča k osi pa napetost $u_{\text{stat.}FE} = \omega a^2 B_z / 2$. Palico z obročem lahko zamenja kolo bicikla ali kar disk. Kot da bi vzporedno vezali več baterij; $u_{\text{stat.}FE} = \omega a^2 B_z / 2 = f \phi_S$, kjer sta f frekvence kroženja in ϕ_S magnetni pretok polja \mathbf{B} skozi površino S diska. Dobijeno je Faradejev generator: tvori ga bakren disk, ki enakomerno kroži v polju trajnega magneta. Če se obrne smer vrtenja ali smer vpadnega polja na disk, se predznak napetosti med obodom in osjo diska zamenja. Disk lahko nadomesti valjast magnet, ki je vzdolžno namagneten. Ob vrtenju magneta okoli osi se med obodom valja in osjo inducira napetost. Faradayev generator je tudi planet Zemlja. Zaradi vrtenja v magnetnem polju se med polom in vzporednikom inducira napetost, ki ustreza produktu frekvence in magnetnega pretoka, ki ga vzporednik objema. Koliko elektromagnetike je okoli nas? Zemlja z ionosfero je kondenzator, atmosferske razelektritve ga polnijo, gibanje vročega jedra je vir Zemljinega magnetnega polja, polarni sij nastane, ko se



kozmični delci ujamejo v Zemljino magnetno polje, Zemlja je Faradayev generator in prostor okoli Zemlje je medij, skozi katerega potuje elektromagnetna energija.



39:04

Faradayev zakon. Začetki Faradayeve indukcije segajo v leto 1831, v leto rojstva Maxwella, ki je tri desetletja kasneje ta zakon matematično tudi formuliral. Res dolgo obdobje spominja na predcoulombov čas, ki je že poznal glavne lastnosti električne sile, ni pa uspel zadovoljivo meriti; Amperovo obdobje proučevanja magnetne sile je bilo neprimerno krajše. Faraday je vpeljal pojma električno in magnetno polje. Polje kot termin je danes uveljavljen v fiziki, matematiki in vrsti drugih področij. Elektromagnetne pojave je razumel kot delovanje polj na nabite delce. Prostor s poljem je dobil ključno veljavo: čeravno prazen, zmore hraniti in prenašati energijo. Faraday se je ukvarjal tudi z elektrokemijo; poimenovanja, kot so elektroda, elektrolit, elektroliza, ..., so njegova.

Faradayevega zakona smo se že dotknili. Izhajali smo iz razprave o delu sile za premik tokovne zanke, to pa nadgradili z sklepanjem o stanju polj v/ob vodniku, ko ga zunanjia sila potiska skozi magnetno polje. Precej vprašanj je ostalo odprtih, vendar se bodo z razmišljjanji in formulacijo induksijskega zakona tudi razčistila.

Faradaya je okupiralo sledeče vprašanje: če je magnetno polje posledica toka in vzročne električne sile, ali je lahko tudi obratno, da sta električna sila in tok posledica magnetnega polja. Faraday je pri iskanju rešitve tega vsebinskega obrata gotovo opravil veliko poskusov, vendar se danes izpostavljajo le nekateri. Imel je zanko, ki je vključevala instrument. Pri premiku zanke v polju trajnega magneta je zaznal odklon kazalca instrumenta, pri hitrejšem premiku pa ustrezno večji odklon. In obratno: tudi pri premiku trajnega magneta je zaznaval odklon; bil je večji, če je bil premik hitrejši. Podobno je bilo, ko je vlogo trajnega magneta prevzela druga tokovna zanka. Pomenljivo pri tem je, da imajo vsa opažanja enak izid: inducirana napetost v zanki je sorazmerna intenzivosti spremenjanja ozioroma odvodu tujega magnetnega pretoka skozi zanko, $u_{\text{ind.}} \propto \phi'_{\text{tuj.}}$, pri tem pa ni pomemben način, s katerim se doseže spremenjanje tega pretoka.

O indukciji, ko se zanka premika skozi magnetno polje, smo že veliko povedali; pri t. i. gibalni inducirani napetosti smo spoznali še več, da je $u_{\text{ind.}} = -\phi'_{\text{tiji}}$. Da se napetost inducira tudi v mirujoči zanki, ko se vir magnetnega polja premika, pa je pomembna novost. Če smo pri gibalni inducirani napetosti še imeli možnost interpretiranja dodatne sile kot magnetne ali inducirane električne sile (odvisno od opazovalca), te možnosti tu ni več; ostaja edinole razlaga, da je za indukcijo v mirujoči zanki odgovorna inducirana električna sila oziroma inducirana električna poljska jakost $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$. Ta je sicer lahko v matematični zvezi s hitrostjo premikanja trajnega magneta ali druge tokovne zanke, vendar pa ne more biti v povezavi z magnetno silo, saj zanka, v kateri se napetost inducira, miruje. Vzrok inducirane napetosti očitno ni v gibanju trajnega magneta ali druge tokovne zanke, ampak v časovni dinamiki njunih magnetnih polj na mestu mirujoče zanke. Da bi na njenem mestu bilo magnetno polje časovno spremenljivo, pa sploh ni nujno, da se druga tokovna zanka premika, dovolj je že, če se tok v njej časovno spreminja. Od tu izhaja tudi termin transformatorska inducirana napetost, ki je kot takšna značilna za indukcijo v navitjih transformatorja oziroma v strukturah, ki mirujejo. Obe napetosti, tako transformatorska kot gibalna, sta enakovredni; skupna jima je inducirana električna poljska jakost $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$, način generiranja tega polja pa je spet v duhu Faradayevih eksperimentov: da je za indukcijo pomembno spreminjanje magnetnega pretoka skozi zanko, pri tem pa ni pomemben način, s katerim se doseže spreminjanje tega pretoka.

Zaključku $u_{\text{ind.}} \propto \phi'_{\text{tiji}}$ je sledilo odkritje samoindukcije; leta 1832 je pojav zaznal Henry v Ameriki, neodvisno od njega pa leta 1834 tudi Faraday. Ugotavlja, da je za indukcijo v zanki soodgovoren tudi lastni magnetni pretok ϕ_{lastni} . Še več, indukcija ne loči lastni pretok od tujega: inducirana napetost je sorazmerna hitrosti spreminjanja celotnega magnetnega pretoka skozi zanko, $u_{\text{ind.}} \propto (\phi_{\text{tiji}} + \phi_{\text{lastni}})' = \phi'$. Njiju dopolnjuje še Lenz iz Rusije, ki doda pravilo: v zanki se inducira napetost, katere posledični magnetni pretok stremi ohraniti množino pretoka skozi zanko. Kadar se pretok v zanki veča, gre reakcija inducirane napetosti v smeri manjšanja tega pretoka, in obratno. Leta 1845 je Neumann zgornje združil v predpis, ki upošteva ugotovitve Faradaya, Henryja in Lenza. Kasneje se je izkazalo, da ne gre za sorazmernost, $u_{\text{ind.}} \propto \phi'$, ampak za enakost njunih absolutnih vrednosti, $|u_{\text{ind.}}| = |\phi'|$, oziroma za alternativi $u_{\text{ind.}} = \pm \phi'$. Če se označitvi pretoka

skozi zanko in inducirane napetosti vzdolž zanke skladata z desnim pravilom, potem ustreza Lenzovemu pravilu le zapis $u_{\text{ind.}} = -\phi'$; temu pritrjuje tudi relacija na začetku razdelka, ki povzema razmišljanja o delu za premik tokovne zanke.



Transformatorska in gibalna inducirana napetost. Poznamo okoliščine generiranja inducirane napetosti in osrednjo enačbo, $u_{\text{ind.}} = -\phi'$: inducirano napetost vzdolž zanke \mathcal{L} določa magnetni pretok opno \mathcal{A} te zanke. Pretok zapišimo z integralom gostote,

$$u_{\text{ind.}} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}.$$

Časovni odvod se naslavlja na gostoto magnetnega pretoka, v primeru gibanja pa tudi na zanko oziroma njeno opno. Če zanka miruje, je odvod pretoka zgolj posledica časovne dinamike gostote magnetnega pretoka,

$$-\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad - \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = (u_{\text{ind.}})_{\text{trans.}}$$

Odvod integrala preide v integral delnega odvoda gostote \mathbf{B} po času; govorimo o transformatorski inducirani napetosti. Ko se zanka tudi giblje, se tej pridruži še gibalna inducirana napetost, katere zapis že poznamo, $\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$. Združitev obeh da končni zapis inducirane napetosti,

$$u_{\text{ind.}} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = - \underbrace{\int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}}_{(u_{\text{ind.}})_{\text{trans.}}} + \underbrace{\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}}_{(u_{\text{ind.}})_{\text{gib.}}}$$

Kadar je polje \mathbf{B} le krajevna funkcija, se inducira le gibalna napetost. Napetosti se izražata z različnima integracijama. V teoriji elektromagnetizma je uveljavljen vektorski magnetni potencial \mathbf{A} , katerega integral po sklenjeni krivulji ustreza pretoku skozi njo, $\phi_{\mathcal{L}} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$. Če to upoštevamo, je $(u_{\text{ind.}})_{\text{trans.}} = \oint_{\mathcal{L}} (-\partial \mathbf{A} / \partial t) \cdot d\mathbf{l}$; funkcija $-\partial \mathbf{A} / \partial t$ je inducirana električna poljska jakost. Inducirano napetost vzdolž katerekoli krivulje določa integral $u_{\text{ind.}} = \int_{\mathcal{L}} (-\partial \mathbf{A} / \partial t + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$. Zapis je koristen pri vrednotenju obeh deležev v celotni inducirani napetosti (npr. v električnih strojih).

Vrtinčnost električne poljske jakosti. Relacijo $u_{\text{ind.}} = -\phi'$ zapišimo z vektorjema polj:

$$u_{\text{ind.}} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\phi'.$$

Nedavno smo ugotovili, da inducirano polje $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ izzove površinsko naelektritev prevodnikov. Poleg influiranih nabojev so lahko v prostoru še drugi naboji in vsem je lastno nevrtinčno Coulombovo polje $\mathbf{E}_{\text{stat.}}$. Če upoštevamo to in dvodelnost poljske jakosti, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{stat.}} + \mathbf{E}_{\text{ind.}}$, ter dogovor, da je ϕ pretok $\phi_{\mathcal{L}}$, ki ga usmerjena zanka \mathcal{L} objame v pozitivni smeri,

$$u_{\text{ind.}} = \oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{stat.}}) \cdot d\mathbf{l} = \underbrace{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{u_{\mathcal{L}}} - \underbrace{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{stat.}} \cdot d\mathbf{l}}_0 = u_{\mathcal{L}} \quad \Rightarrow \quad u_{\mathcal{L}} = -\phi'_{\mathcal{L}},$$

dobimo jakost vrtinca električne poljske jakosti \mathbf{E} oziroma posplošen Faradayev zakon elektromagnetne indukcije,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\mathcal{L}} E_t dl = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} B_n da.$$

V električnih vezjih ga določa enačba $u_{\mathcal{L}} = -\phi'_{\mathcal{L}}$, ki pravi: napetost vzdolž sklenjene zanke je enaka negativnemu odvodu magnetnega pretoka skozi njo. Enačba je napetostni Kirchhoffov zakon v razširjeni obliki. Pomeni pomembno dopolnitev Kirchhoffove enačbe $u_{\mathcal{L}} = 0$, ki je očitno ustrezna le v statičnih, časovno nespremenljivih poljih ($\phi'_{\mathcal{L}} = 0$).

Rezultančna električna poljska jakost. Faradayev zakon uvaja pomembno novost: električna poljska jakost \mathbf{E} je vsota dveh jakosti, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{stat.}} + \mathbf{E}_{\text{ind.}}$, Coulombove in Faradayeve, in je kot takšna ključna tudi za dve od prej poznani enačbi,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d\nu \quad \text{in} \quad \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}.$$

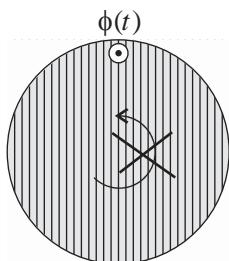
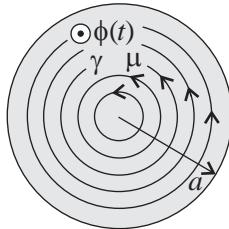
Šele dojemanje polja \mathbf{E} kot vsote dveh polj uspe ustrezno podpreti Hertzov eksperiment, ki potrjuje Maxwellovo hipotezo o obstoju elektromagnetnega valovanja. Inducirana poljska jakost $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ je namreč tisti člen v polju \mathbf{E} v zgornjih enačbah, ki ob Faradayevi indukciji in neizvornosri gostote \mathbf{B} privede do valovnih enačb. – Več o valovanju kasneje.



23:54



12:49



Mejni pogoj polja \mathbf{E} izhaja neposredno iz zadnje enačbe. Ob meji dveh snovi imejmo pravokotno zanko $\delta\mathcal{L}$, ki seže v obe. Daljši stranici pravokotnika dolžine δl , na katerih sta obmejni točki T_+ in T_- , naj ležita tangentno z mejo. Stisnjena zanka objame povsem neznaten magnetni pretok $\delta\phi$, zato sta takšna tudi $\delta\phi' \rightarrow 0$ in $\oint_{\delta\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow 0$. Faradayeva indukcija očitno ne spremeni že poznanih razmer ob meji, zato ostaja nespremenjen tudi mejni pogoj,

$$E_t(T_+) - E_t(T_-) = 0 \quad \text{in} \quad E_t(T_+) - E_t(T_-) = 0 \quad \text{ali} \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}(T_+) - \mathbf{E}(T_-)) = \mathbf{0}.$$

Tangentna komponenta rezultančne električne poljske jakosti je na meji dveh snovi zvezna.

Vrtinčni toki v magnetnem stebru. Imejmo Fe valj polmera a in permeabilnosti μ , v katerem je vzdolž njega izmeničen magnetni pretok $\phi(t) = \phi_0 \cos \omega t$. Privzamemo enakomerno gostoto magnetnega pretoka v valju. Izberimo krožnico \mathcal{L} polmera ρ okoli osi valja in zapišimo induksijski zakon,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\phi'_L \Rightarrow 2\pi\rho E_\varphi = -\frac{d}{dt} \begin{cases} \frac{\phi_0 \rho^2}{a^2} \cos \omega t & \rho \leq a, \\ \phi_0 \cos \omega t & \rho > a. \end{cases} \Rightarrow E_\varphi(\rho, t) = \begin{cases} \frac{\omega \phi_0}{2\pi a^2} \rho \sin \omega t & \rho \leq a, \\ \frac{\omega \phi_0}{2\pi \rho} \sin \omega t & \rho > a. \end{cases}$$

Rezultat spominja na magnetno polje v vodniku krožnega preseka. Amplituda polja E_φ od osi proti površini linearno narašča, izven valja pa z oddaljenostjo upada. Krajevni se pridružuje še časovna odvisnost s funkcijo $\sin \omega t$.

To tu ni težav, ampak! Valj je prevoden, s specifično prevodnostjo γ . V njem se vzpostavi tok z gostoto $J_\varphi = \gamma E_\varphi$. Zaradi vrtinčenja okoli pretoka, dobi ime vrtinčni tok. Pri $a = 10$ cm, $\gamma = 10$ MS/m, gostoti 1 T in krožni frekvenci 400 rad/s sta pod površjem valja jakost in gostota 20 V/m in 200 MA/m²; pri tolikšni gostoti bi se valj pregrel in izgubil feromagnetne lastnosti. Ni pa to edina težava. Vrtinčne toke spremlja samoindukcija, ki botruje kožnemu pojavu. Pojav se kaže v tem, da magnetni pretok ni enakomeren po preseku, kot smo uvodoma privzeli, ampak je izrinjen k steni valja. Izraženost tega pojava vrednoti vdorna globina $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\gamma}$. Pri podatkih in $\mu = 0,01$ Vs/Am je $\delta = 0,22$ mm $\ll a$. To bi pomenilo, da je magnetni pretok potisnjen k steni valja, kjer tiči nova sitnost, nasičenje železa. Težave sporočajo, da monolitno železo ne

more služiti kot kanal za izmenično magnetno polje. Rešitev so tanki pločevinasti trakovi oziroma lamele, ki so zložene v paket. Lamele so prevlečene z lakom, ki preprečuje tvorbo vrtinčnih tokov iz lamele v lamelo in zagotavlja enakomerno porazdelitev magnetnega pretoka po preseku valja. Vrtinčni tok s tem ukrepom ne izostanejo, se pa izdatno zmanjšajo.



Imejmo pločevino debeline d in širine $a \gg d$ in v njej pretok z gostoto $B_z(t) = B_m \cos \omega t$. Vrtinčni toki se oblikujejo tako, da gredo v desni polovici lamele v eno, v levi polovici pa v drugo smer (na koncih pločevine se v ostrem loku obrnejo). V osrednjem delu pločevine so tokovnice vzporedne (vzdolž osi Y). Pentlja \mathcal{L} naj je rob pravokotnika s stranicama $2x$ in h . Zanjo zapišimo indukcijski zakon:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\phi'_{\mathcal{L}} \quad \Rightarrow \quad 2hE_y = -\frac{d}{dt}(2xhB_m \cos \omega t) = 2\omega B_m x h \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad E_y(x, t) = \omega B_m x \sin \omega t.$$



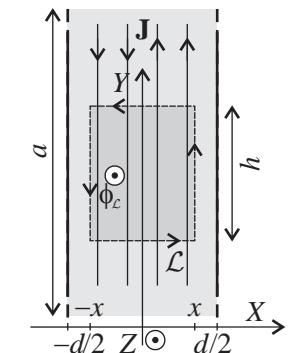
Od tod sledi gostota vrtinčnih tokov $J_y(x, t) = \gamma E_y(x, t) = \omega \gamma B_m x \sin \omega t$. Pri $\pm d/2$ je gostote toka največja, $\omega \gamma B_m d/2$. Pri podatkih $B_m = 1 \text{ T}$, $\omega = 400 \text{ rad/s}$, $\gamma = 10 \text{ MS/m}$ in $d = 0,4 \text{ mm}$ znese $0,8 \text{ MA/m}^2$, kar je 250 krat manj kot prej. Gostota moči je $\gamma E_y^2(x, t) = \gamma(\omega B_m x \sin \omega t)^2$. Moč p_j v pločevini dolžine l in poprečna moč sta

$$p_j(t) = 2la \int_0^{d/2} \gamma(\omega B_m x \sin \omega t)^2 dx = \frac{\omega^2 \gamma B_m^2 l a d^3}{12} (\sin \omega t)^2 \quad \text{in} \quad P_{\text{vrt.}} = \overline{p_j(t)} = lad \frac{\omega^2 \gamma B_m^2 d^2}{24}.$$

Za pločevine se podaja poprečna joulska moč oziroma moč vrtinčnih izgub na kilogram, $P_{\text{vrt.}}/\text{kg}$:

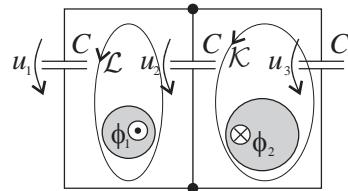
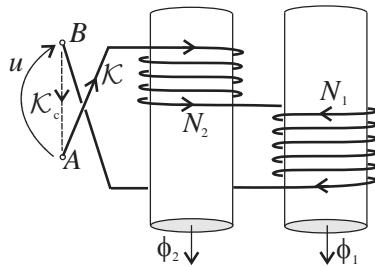
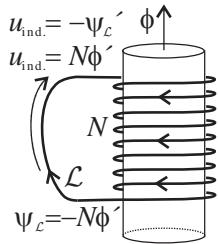
$$P_{\text{vrt.}}/\text{kg} = \frac{\omega^2 \gamma B_m^2 l a d^3}{24 l a d \rho_{\text{Fe}}} = \frac{\omega^2 \gamma B_m^2 d^2}{24 \rho_{\text{Fe}}}.$$

Pri specifični gostoti železa $\rho_{\text{Fe}} = 7800 \text{ kg/m}^3$ je $P_{\text{vrt.}}/\text{kg} = 1,37 \text{ W/kg}$. Ta vrednost je še nekoliko nižja; omrežna krožna frekvenca je 314 rad/s (50 Hz) in tudi pločevine so nekoliko tanjše. Okvirni podatek zanje se giblje okoli $0,5 \text{ W/kg}$.



Magnetni sklep je v neposredni zvezi s pretokom, z zanko in v njej inducirano napetostjo. Za pretok $\phi_{\mathcal{A}}$ skozi ploskev smo ugotovili, da je hkrati tudi pretok $\phi_{\mathcal{L}}$, ki ga rob \mathcal{L} ploskve \mathcal{A} objame oziroma obkroži v pozitivni smeri. Zanka je tudi





navitje. Njeni zavoji obkrožijo enake, lahko pa tudi zelo različne pretoke. Množini pretoka, ki ga navitje oziroma pentlja \mathcal{L} objame, rečemo magnetni sklep $\psi_{\mathcal{L}}$. Ploskev si je tokrat nekoliko težje predstavljati. Če so zavoji drug ob drugem, kot pri ravni tuljavi, je ploskev navitja videti kot vijačna klančina. Navitje z N zavoji na feromagnetnem jedru je trivialno. Pretok ϕ , ki je zbran v jedru, ga zavoji objamejo N -krat. Magnetni sklep je multipliciran pretok, $\pm N\phi$; predznak je odvisen od smeri obkrožitve in označitve pretoka. Velja tak dogovor kot pri enem ovoju: ko sledimo usmerjeni krivulji \mathcal{L} , je sklep $\psi_{\mathcal{L}}$ množina pretoka, ki ga navitje obkroži v pozitivni smeri. Kadar je navitje večdelno, obkroži vsak od njih svoj pretok, od katerega je vsak označen tako kot je, zato pazljivost ni odveč. Inducirana napetost vzdolž navitja je takrat $u_{ind.} = -\psi'_{\mathcal{L}}$.

Napetost odprte zanke. V mislih imamo navitje s priključkoma, ki bo postalo v nadaljevanju element električnih vezij. Nekaj tega smo srečali pri linearinem generatorju; govorili smo o inducirani in statični napetosti, ki pritičeta inducirani in statični poljski jakosti. Imejmo jedri s pretokoma ϕ_1 in ϕ_2 ; navitje obkroži prvega z N_1 , drugega pa z N_2 zavoji. Krivuljo \mathcal{K} usmerimo od sponke A skozi navitje do B in jo s \mathcal{K}_c nadalujemo do točke A . Integral poljske jakosti po sklenjeni krivulji je

$$\oint_{\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \underbrace{\int_{AKB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_0 + \underbrace{\int_{B\mathcal{K}_c A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{u_{B\mathcal{K}_c A} = -u} = -\psi'_{\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_c} \Rightarrow u = \psi'_{\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_c}.$$

Upoštevali smo, da v navitju (na krivulji \mathcal{K}) ni toka, $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \mathbf{0}$, in da je integral \mathbf{E} od B po \mathcal{K}_c do A enak napetosti $-u$. Če se vrnemo k pretokoma ϕ_1 in ϕ_2 , sta $\psi_{\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_c} = N_1\phi_1 - N_2\phi_2$ in napetost $u = \psi'_{\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_c} = N_1\phi'_1 - N_2\phi'_2$.

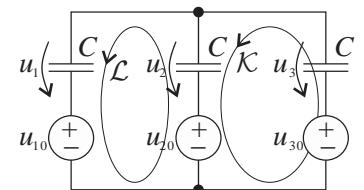
Razdelek zaključimo z vezjem treh enakih kondenzatorjev s kapacitivnostjo C in dveh stebrov, v katerih se magnetna pretoka spreminja po sinusni funkciji: $\phi_1(t) = \phi_0 \sin \omega t$ in $\phi_2(t) = 2\phi_0 \sin \omega t$. Stebra objemata ovoja, ki imata po dve prekinivti, ki jih predstavljajo špranje med ploščami posameznih kondenzatorjev. Napetosti kondenzatorjev naj so u_1 , u_2 in u_3 , njihovi polnilni toki pa i_1 , i_2 in i_3 . Zapišimo tokovno enačbo in dve napetostni enačbi ter smatrajmo, da je pojav samoindukcije zanemarljiv:

$$i_1 + i_2 + i_3 = C(u'_1 + u'_2 + u'_3) = 0 \Rightarrow u'_1 + u'_2 + u'_3 = 0,$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = u_1 - u_2 = -\phi'_{\mathcal{L}} = -\phi'_1 \Rightarrow u_1 - u_2 = -\phi_0 \cos \omega t \Rightarrow u'_1 - u'_2 = \omega \phi_0 \sin \omega t,$$

$$\oint_{\mathcal{K}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = u_2 - u_3 = -\phi'_{\mathcal{K}} = -(-\phi'_2) \Rightarrow u_2 - u_3 = 2\phi_0 \cos \omega t \Rightarrow u'_2 - u'_3 = -2\omega \phi_0 \sin \omega t.$$

Odvodi napetosti so $u'_1 = 0$, $u'_2 = -u'_3 = -\omega \phi_0 \sin \omega t$, napetosti so $u_1 = K$, $u_2 = K + \phi_0 \cos \omega t$ ter $u_3 = K - \phi_0 \cos \omega t$ in toki so $i_1 = 0$, $i_2 = -i_3 = -C\phi_0 \sin \omega t$. Konstanta K predstavlja enosmerno komponento napetosti. Ker vemo, da se nabij realen kondenzator zaradi izolacijske prevodnosti sčasoma izprazni, je izbera $K = 0$ povsem smiselna. Pomenljivo je, da napetosti na vzporedno vezanih kondenzatorjih niso enake. V luči indukcije ugotavljamo sledeče: elementi, ki so vezani vzporedno, imajo enake napetosti le in samo takrat, kadar so odvodi magnetnih pretokov med vejami enaki nič. Z vidika vezij strnjениh elementov moremo stebra z magnetnima pretokoma v obeh zankah modelirati s tremi viri z napetostmi u_{10} , u_{20} in u_{30} , ki zadoščajo enačbama $u_{10} - u_{20} = \phi'_1$ in $u_{20} - u_{30} = -\phi'_2$.



§10. Induktivnosti



Induktivnost je v neposredni zvezi z inducirano napetostjo in magnetno energijo. Pripisujemo jo navitju ali drugi žični strukturi. Kadar je navitij več, govorimo o lastnih in medsebojnih induktivnostih. Vpeljava induktivnosti je pogojena z linearnostjo prostora. Vemo, da so s feromagnetiki težave, saj so linearni le pogojno, pri ostalih snoveh pa te ovire ni. Če je navitje eno samo, prostor pa linearen, je njegov magnetni sklep ψ sorazmeren toku i v njem, ko pa je navitij več, $n > 1$, je magnetni sklep ψ_k enak vsoti delnih sklepor $\psi_k^{(j)}$, ki so sorazmerni vzročnim tokom i_j , $j = 1, 2, \dots, n$, kar zapišemo na tale način:

$$\psi \propto i \Rightarrow \psi = Li \quad \text{ali} \quad \psi_k^{(j)} \propto i_j \Rightarrow \psi_k = \sum_{j=1}^n \psi_k^{(j)} = \sum_{j=1}^n \frac{\psi_k^{(j)}}{i_j} i_j = \sum_{j=1}^n L_{kj} i_j, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Privzetek $\psi_k^{(j)} \propto i_j$ bomo v nadaljevanju problematizirali in ga še dodatno osvetlili. Koeficiente $\psi_k^{(j)}/i_j = L_{kj}$ imenujemo induktivnosti; enota zanje je Vs/A = H (henry). Induktivnosti enakih indeksov so lastne, neenakih pa medsebojne. Če so magnetni sklepi ψ_k označeni v pozitivni smeri glede na toke i_k , so lastne induktivnosti pozitivne, medsebojne pa kakor kdaj. Pozitivna medsebojna induktivnost pomeni, da se lastni in tuji del magnetnega sklepa podpirata oziroma se števata, negativna pa, da si delna sklepa nasprotujeta oziroma odštevata. Inducirana napetost v k -ti zanki je

$$u_{\text{ind},k} = -\psi'_k = -\sum_{j=1}^n L_{kj} i'_j = \overbrace{-L_{kk} i'_k}^{\text{lastna indukcija}} - \overbrace{\sum_{j=1, j \neq k}^n L_{kj} i'_j}^{\text{tuja indukcija}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Lastna induktivnost je merilo za inducirano napetost zaradi odvoda lastnega toka (samoindukcija), medsebojne pa so merilo za inducirano napetost zaradi odvodov drugih tokov. Medsebojne induktivnosti so paroma enake, $L_{kj} = L_{jk}$. Po dokaz pojdimo k delu za premik tokovne zanke v enosmernih razmerah. Naj sta od nič različna le toka v j -tem in k -tem navitju. Delo zunanje sile za premik k -tega navitja v polju j -tega ali delo za premik j -tega v polju k -tega navitja sta

$$i_k (\psi_{k1}^{(j)} - \psi_{k2}^{(j)}) \quad \text{ali} \quad i_j (\psi_{j1}^{(k)} - \psi_{j2}^{(k)}).$$

Indeksa 1 in 2 pomenita začetno in končno lego. Takratna magnetna pretoka skozi zanko smo tu smiselno nadomestili z magnetnimi sklepi navitij. Ko j -to navitje miruje in zunanja sila k -to navitje odvleče daleč stran, $\psi_{k2}^{(j)} \rightarrow 0$, opravi pri tem delo $i_k \psi_{k1}^{(j)}$, ko pa k -to navitje miruje in zunanja sila j -to odvleče daleč stran, $\psi_{j2}^{(k)} \rightarrow 0$, opravi pri tem delo $i_j \psi_{j1}^{(k)}$. Zaradi vzajemnosti magnetnih sil, $\mathbf{F}_{mj}^{(k)} + \mathbf{F}_{mk}^{(j)} = \mathbf{0}$, je delo zunanje sile obakrat enako: $i_k \psi_{k1}^{(j)} = i_j \psi_{j1}^{(k)}$. Indeks 1 moremo opustiti, saj je začetna lega navitij katerakoli. Iz enakosti opravljenih del sledi $\psi_k^{(j)}/i_j = \psi_j^{(k)}/i_k$, kar da vzajemnost medsebojnih induktivnosti: $L_{kj} = L_{jk}$. Zaradi te lastnosti so medsebojna učinkovanja navitij prek sile, navora ali indukcije recipročna. Zgodi se tudi, da je določitev ene induktivnosti matematično zahtevna, določitev druge pa ne; v takem primeru ubremo lažjo pot. Primer: če ležita dvovod in krožna zanka v ravnini, je določitev pretoka polja dvovoda skozi zanko še preprosta (primer pretoka polja ravnega tokovodnika skozi krožno ploskev), obratno pa sploh ne.



Faktor sklopa. Sklopni faktor govori o medsebojni magnetni povezanosti parov navitij; sklope definirajo razmerja

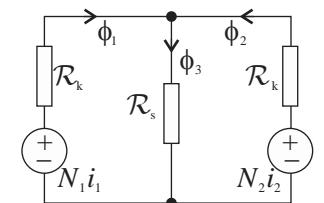
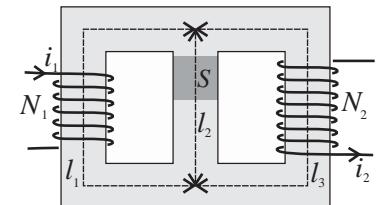
$$0 \leq K_{kj}^2 = \frac{\psi_k^{(j)} \psi_j^{(k)}}{\psi_k^{(k)} \psi_j^{(j)}} = \frac{L_{kj} L_{jk}}{L_{kk} L_{jj}} = \frac{L_{kj}^2}{L_{kk} L_{jj}} \leq 1.$$

Leva skrajnost pomeni, da sta zanki magnetno nepovezani, desna pa, da sta zanki popolnoma sklopljeni; obe sta v praksi pomembni. Pri transformatorju mora biti sklopni faktor med primarnim in sekundarnim navitjem čim večji, da je takšen tudi prenos moči, pri telefonskih paricah, ki so v snopu, pa čim manjši, da ni mesebojnega motenja signalov v paricah.

Imejmo tristebrno jedro z navitjema z N_1 in N_2 ovoji in tokoma i_1 in i_2 . Magnetne upornost levega in desnega kraka ter srednjega stebra so \mathcal{R}_k , \mathcal{R}_k in \mathcal{R}_s . Izrazimo induktivnosti. Pretok $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$. Enačbi leve in desne zanke sta:

$$-N_1 i_1 + \mathcal{R}_k \phi_1 + \mathcal{R}_s (\phi_1 + \phi_2) = 0 \quad \text{in} \quad -N_2 i_2 + \mathcal{R}_k \phi_2 + \mathcal{R}_s (\phi_1 + \phi_2) = 0.$$

Pretoka sta,



$$\phi_1 = \frac{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)N_1 i_1 - \mathcal{R}_s N_2 i_2}{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)^2 - \mathcal{R}_s^2} \quad \text{in} \quad \phi_2 = \frac{-\mathcal{R}_s N_1 i_1 + (\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)N_2 i_2}{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)^2 - \mathcal{R}_s^2},$$

magnetna sklepa pa

$$\psi_1 = N_1 \phi_1 = \frac{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)N_1^2 i_1 - \mathcal{R}_s N_1 N_2 i_2}{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)^2 - \mathcal{R}_s^2} = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \quad \text{in} \quad \psi_2 = N_2 \phi_2 = \frac{\mathcal{R}_s N_1 N_2 i_1 + (\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)N_2^2 i_2}{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)^2 - \mathcal{R}_s^2} = L_{21} i_1 + L_{22} i_2.$$

Iz primerjave koeficientov sledijo induktivnosti:

$$L_{11} = \frac{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)N_1^2}{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)^2 - \mathcal{R}_s^2} \quad \text{in} \quad L_{22} = \frac{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)N_2^2}{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)^2 - \mathcal{R}_s^2} \quad \text{in} \quad L_{12} = L_{21} = -\frac{\mathcal{R}_s N_1 N_2}{(\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k)^2 - \mathcal{R}_s^2}.$$

Lastni sta sorazmerni kvadratu števila ovojev posameznih navitij, medsebojni pa produktu števila ovojev obeh navitij. Za vse induktivnosti sta značilni vlogi števil N_1 in N_2 . Negativni predznak medsebojnih induktivnosti sporoča, da si lastni in tuji del magnetnega sklepa – pri tako označenih tokih – nasprotujeta. Sklopni faktor je

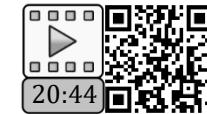
$$K_{12} = \sqrt{\frac{L_{12} L_{21}}{L_{11} L_{22}}} = \frac{\mathcal{R}_s}{\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_k}.$$

Tega očitno ne določajo ovoji, ampak upornosti magnetnih kanalov. Če dana magnetna struktura ne bi imela srednjega stebra, $\mathcal{R}_s \rightarrow \infty$, bi bil to transformator s primarnim in sekundarnim navitjem na jedru z magnetno upornostjo $\mathcal{R} = 2\mathcal{R}_k$:

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad \text{in} \quad L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} \quad \text{in} \quad L_{12} = L_{21} = (\pm) \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \quad \text{in} \quad K_{12} = 1.$$

Predznaka (\pm) predstavlja obe možnosti. Rezultati so pregledni, vendar jih sprejemamo s pridržkom: magnetna jedra so pogojno linearne (magnetilne krivulje) in tudi model magnetnih vezij ima svoje omejitve; o tem smo obširnejše govorili v okviru magnetnih vezij. Pri določanju induktivnosti se srečujemo še z dvema težavama; navezujeta se na sklepe $\psi_k^{(j)}$ in na kvociente $\psi_k^{(j)} / i_j$. V uvodu smo izpostavili: če je prostor linearen in če so tudi magnetni sklepi $\psi_k^{(j)}$ sorazmerni tokom i_j , $\psi_k^{(j)} \propto i_j$, moremo vpeljati induktivnosti. Slednje, sorazmernost $\psi_k^{(j)} \propto i_j$, je v enosmernih razmerah očitno izpolnjena, v dinamičnih pa z ustreznim pridržkom. Zaradi indukcije so sklepi $\psi_k^{(j)}(t)$ in toki $i_j(t)$ dinamični, časovno spremenljivi,

in ni zagotovila, da so kvocienti $\psi_k^{(j)}/i_j$ konstante. V okviru tega se bomo dotaknili kožnega pojava v vodnikih, kadar ti vodijo časovno spremenljiv električni tok. Na učinek tega pojava smo opozorili že pri monolitnem magnetnem stebru.



Kožni pojav. Vzrok kožnega pojava so vrtinčni toki v vodniku, ki so posledica časovno spremenljivega magnetnega polja oziroma časovno spremenljivega toka v vodniku. Analiza pojava je zahtevnejša in presega nivo osnov elektrotehnike. Da bi ta pojav le ne ostal brez ustrezne razlage, si oglejmo primer vodnika krožnega preseka polmera a , dolžine l , specifične prevodnosti γ in permeabilnosti μ . Privzemimo, da je tok i enakomerno razporejen po prerezu. Padec napetosti vzdolž vodnika in pretok med osjo in površino vodnika sta: $u = (l/\gamma\pi a^2)i$, $\phi = \mu il/4\pi$. Če je tok sinusen, sta takšna tudi pretok in napetost: $\phi(t) = (\mu I_m l/4\pi) \sin \omega t$, $u(t) = (I_m l/\gamma\pi a^2) \sin \omega t$; I_m je amplituda toka in ω je krožna frekvenca. Največja možna amplituda inducirane napetosti v vodniku se pojavi v pravokotni zanki dolžine l in širine a , ki leži med površino in osjo vodnika. Inducirana napetost v njej je

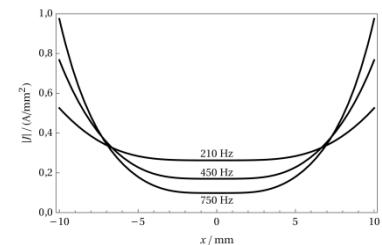
$$u_{\text{ind.}}(t) = -\phi'(t) = -(\omega \mu I_m l/4\pi) \cos \omega t = (\omega \mu I_m l/4\pi) \sin(\omega t + \pi/2).$$

Če tvorimo kvocient amplitude inducirane napetosti in amplitudo privzetega padca napetosti,

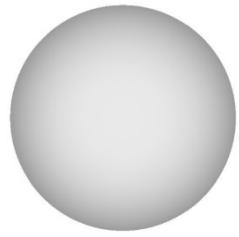
$$\frac{\omega \mu I_m l / 4\pi}{I_m l / \gamma \pi a^2} = \frac{\omega \mu \gamma a^2}{4} = \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 \quad \text{pri } \delta = \sqrt{2/\omega \mu \gamma},$$

lahko ugotovimo, da je razmerje a/δ nekakšno merilo primerljivosti vrtinčnih tokov in toka i . Pri bakrenem vodniku in frekvenci 50 Hz je $\delta \cong 9,5$ mm. V žici polmera 1 mm je razmerje amplitud napetosti približno 0,01 (1%), kar pomeni, da vrtinčni toki praktično ne spremeno porazdelitve toka i po prerezu. Pri frekvenci 5 kHz se zadeva že krepko spremeni; razmerje amplitud doseže vrednost ena. Iz induciranih napetosti seveda ne moremo sklepati na prerazporeditev toka i po prerezu, kajti vrtinčni toki imajo tudi svoje magnetno polje, to polje spet nove vrtinčne toke, itn.

Korektno opravljena analiza porazdelitve toka i po prerezu vodnika pokaže, da amplituda gostote toka od osi k površju vodnika progresivno narašča, trenutna vrednost gostote toka pa pri visokem razmerju a/δ lahko enkrat ali celo večkrat



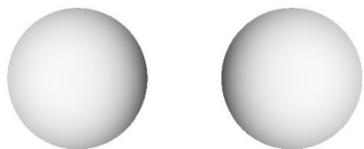
amplituda gostote toka v bakrenem vodniku krožnega preseka pri treh frekvencah



povečana gostota toka v podpovršju vodnika



povečana gostota toka ob vogalih vodnika pravokotnega preseka



povečana gostota toka na notranji (trebušni) strani vodnikov dvovoda

zamenja predznak: da se v istem trenutku na različnih delih preseka vodnika naboji gibajo v nasprotnih smereh. Premik glavnine toka k površju oziroma h 'koži' vodnika daje indukcijskemu učinku ime kožni pojav. Kazalnik neenakomernosti gostote toka je ravno razmerje a/δ ; višje vrednosti kažejo na večjo neenakomernost porazdelitve toka. Skrajne razmere nastopijo pri visokih frekvencah, ko je $a/\delta \gg 1$. Izkaže se, da se amplituda gostote toka od največje vrednosti ob površini v globino x rapidno manjša, približno s funkcijo $\exp(-x/\delta)$. V globini $x = \delta$ je gostota 37% gostote ob površini, v globini $x = 3\delta$ pa je le še 5%. Pri 5 GHz je $\delta \cong 0,95 \mu\text{m}$, kar pomeni, da je glavnina toka zbrana v njegovi povrhnici debeline okoli 5 μm . Koncentriranju toka v podpovršje vodnika sledi tudi koncentriranje elektromagnetnega polja. Ker prihaja energija v vodnik iz zunanjosti, je mera δ dobila ime vdorna globina. Učinek kožnega pojava se kaže v večjih joulskih izgubah. Pri $a/\delta = 1/\sqrt{2}$ so joulske izgube večje za 0,5%, pri $a/\delta = 1$ večje za 2,1% in pri $a/\delta = \sqrt{2}$ so večje že za 7,8%. V pletenici, v kateri so žice v spiralno zavitem prepletu med seboj enakovredne, je kožni učinek praktično zanemarljiv; izvedba je sicer zahtevna, pridobi pa prevodni kanal željeno mehansko gibkost.

Bližinski pojav. Kožni pojav je posledica magnetnega polja toka v vodniku, bližinski pojav pa je posledica magnetnega polja tokov v sosednjih vodnikih. Značilen primer je dvovod. Če imata vodnika radij a in je medosna razdalja $d > 10a$, je vpliv magnetnega polja sosednjega vodnika zanemarljiv; toka v vodnikih sta krožno simetrično izrinjena k površinama. Če je $d < 10a$, se kožnemu pridruži bližinski pojav: na trebušnih straneh vodnikov se gostota toka še dodatno poveča, na hrbtnih pa nekoliko zmanjša. Ima pa bližinski pojav ravno nasproten učinek pri dvojčku oziroma paru vodnikov, ki vodi tok v isto smer. V tem primeru je gostota toka ob trebušnih straneh manjša od one ob hrbtnih straneh vodnikov. Bližinski pojav pa ni le stvar vodnikov, ampak splošnih prevodnih struktur. Bližina ene strukture prek indukcije vpliva na razmere v drugi. Pri »sobivanju« različnih elektromagnetnih naprav je potrebno zato poskrbeti za njihovo čim manjšo odvisnost.

Vrnimo se k induktivnostim. V linearinem prostoru in v enosmernih razmerah je sorazmernost $\psi_k^{(j)} \propto i_j$ zagotovljena; da bi praktično takšna ostala tudi v dinamičnih razmerah, mora biti kožni pojav v navitju neizrazit. Zakaj? K magnetnemu sklepu navitja prispeva svoj delež tudi magnetni polje v navitju, to polje pa je toku sorazmerno le, če je kožni pojav šibak;

sme biti tudi izrazitejši, vendar mora biti takrat delež magnetnega sklepa v navitju glede na delež izven njega v celotnem magnetnem sklepu zanemarljiv. Sliši se preprosto, težje pa je to opraviti. Primer dvovoda je že tak, da se da do neke mere oceniti deleža v celotnem sklepu, ki pripadata zunanjosti in notranjosti vodnikov.

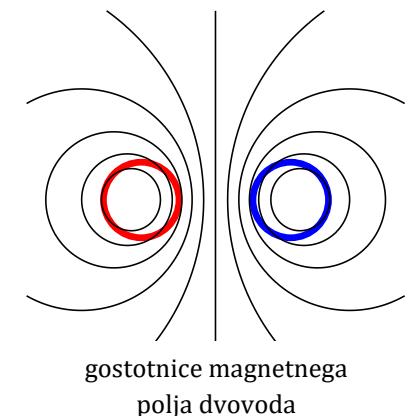
Magnetni pretok in magnetni sklep. Ostaja še določanje magnetnega sklepa, ki smo ga omenili kot težavo pri določanju induktivnosti. Katera težava je mišljena, najlepše ilustrira dvovod vodnikov polmera a in medosne razdalje d . Gostotnice polja tokov poznamo. Nekatere obkrožajo vodnika, nekatere so znotraj vodnikov, so pa tudi takšne, ki so delno znotraj in delno zunaj vodnikov. Postavlja se vprašanje: kolikšen je pretok tega dvovoda pri toku i in dolžini l ? Na najkrajši razdalji med vodnikoma, med osema vodnikov ali izza vodnikov so ti pretoki sledeči:

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 i l}{\pi} \left(\ln \frac{d-a}{a} \right) \quad \text{in} \quad \phi_2 = \frac{\mu_0 i l}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{d}{a} \right) \quad \text{in} \quad \phi_3 = \frac{\mu_0 i l}{\pi} \left(\ln \frac{d+a}{a} \right).$$

So različni in to je moteče. Kaj torej vzeti za induktivnost: ϕ_1/i , ϕ_2/i ali ϕ_3/i ? Nobena ni prava, tolažilno je le to, da so kvocienci pri $d \gg a$ približno enaki. Poleg teh pretokov najdemo še vrsto drugih, in vsi so različni; pri $d \gg a$ so ti skoraj enaki, kar približno ustrezata pretoku magnetnega polja izven vodnikov. Zakaj vstrajamo pri podobnih in iščemo pravega? V nadaljevanju bomo spoznali, da je induktivnost tudi merilo za magnetno energijo v prostoru, ta pa je ena in ena sama, ne pa neskončno približno enakih. Izkaže se, da je tisti pravi pretok oziroma sklep dvovoda poprečje pretokov skozi vse možne pravokotnike, katerih stranice dolžine l ležijo znotraj obeh vodnikov. Potrditev daje teorija elektromagnetizma, ki je pri osnovah elektrotehnike žal ne moremo uporabiti. Po daljših integracijah sledita poprečni pretok, pišimo ga s $\langle \phi \rangle$, in induktivnost dvovoda:

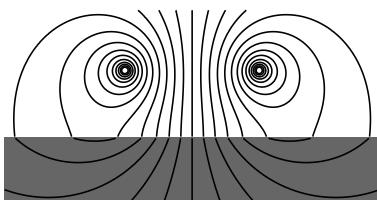
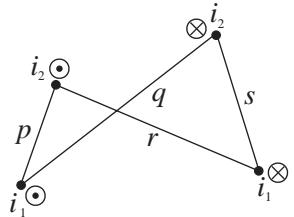
$$\langle \phi \rangle = \frac{\mu_0 i l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\langle \phi \rangle}{i} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right).$$

Na podobno težavo naletimo pri dveh dvovodih in njuni medsebojni induktivnosti $L_{12} = L_{21}$. Izkaže se, da sta tudi tokrat pomembna poprečna pretoka, ki ustrezata kar pretokoma enega dvovoda med osema drugega dvovoda. Ta dva pretoka smo v razdelku o magnetnem pretoku že določili, zato ju tu le prepisujemo v smislu poprečnih pretokov:

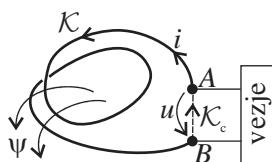


$$\langle \phi_1^{(2)} \rangle = \frac{\mu_0 i_2 l}{2\pi} \ln \frac{rq}{ps} \quad \Rightarrow \quad L_{12} = \frac{\langle \phi_1^{(2)} \rangle}{i_2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{rq}{ps} \quad \text{in} \quad \langle \phi_2^{(1)} \rangle = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{rq}{ps} \quad \Rightarrow \quad L_{21} = \frac{\langle \phi_2^{(1)} \rangle}{i_1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{rq}{ps}.$$

Pri zapisu magnetne energije v prostoru bosta svojo vlogo odigrali tudi medsebojni induktivnosti.



gostotnice magnetnega polja
dvovoda nad magnetno podlago



Vzemimo še primer dvovoda nad magnetno podlago visoke permeabilnosti in določimo njegovo induktivnost. Spomnimo se zrcaljenja tokov, ki se nahajajo nad magnetno podlago. Pri visoki permeabilnosti podlage je za določitev magnetnega polja nad podlago potrebno upošteviti še zgornjim enake navidezne toke v podlagi v zrcalnih legah. V primeru dvovoda je poprečni magnetni pretok enak vsoti poprečnega pretoka originalnih tokov v obeh tokovodnikih in poprečnega pretoka zaradi polja dveh navideznih tokovnih premic v magnetiku, ki ležita v zrcalnih legah. Če je h višina dvovoda nad podlago, potem sta poprečni pretok in induktivnost sledeča:

$$\langle \phi \rangle = \underbrace{\frac{\mu_0 il}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right)}_{\text{od originalnih tokov}} + \underbrace{\frac{\mu_0 il}{\pi} \ln \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{2h}}_{\text{od zrcalnih tokov}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d\sqrt{d^2 + 4h^2}}{2ah} \right).$$

Tuljava, strnjen element električnih vezij. Tuljava je zadnji strnjen element klasičnih osnov elektrotehnike, pridružuje se viru, kondenzatorju in uporu. Delno smo se tega dotaknili pri zapisu napetosti med priključkoma navitja in povezavi te z induksijskim zakonom; navitje je objemalo tuji pretok, njegovi sponki pa sta bili odprtji (brez lastnega toka). Tokrat bo drugače: tok skozi navitje naj zagotavlja aktivno vezje, priključeno med njegovi sponki, za indukcijo pa bo odgovoren le lasten magnetni sklep (samoindukcija). Krivuljo \mathcal{K} usmerimo vzdolž toka i od sponke A skozi navitje do sponke B in jo s krivuljo \mathcal{K}_c nadalujemo do točke A . Magnetni sklep ψ navitja je množina pretoka magnetnega polja toka i , ki ga sklenjena krivulja $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_c$ objame v pozitivni smeri. Integral električne poljske jakosti vzdolž sklenjene krivulje je

$$\oint_{\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A \mathcal{K} B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \underbrace{\int_{B \mathcal{K}_c A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{u_{B \mathcal{K}_c A} = -u} = \int_{A \mathcal{K} B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - u = -\psi'.$$



Integral poljske jakosti po krivulji \mathcal{K}_c je do predznaka enak referenčno označeni napetosti u med sponkama. Pri prvem integralu upoštevajmo, da je v navitju tok i , ki ima gostoto $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$:

$$\int_{A\mathcal{K}B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A\mathcal{K}B} \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}}{\gamma} = \int_{A\mathcal{K}B} \frac{(i/S)dl}{\gamma} = \frac{i}{\gamma S} \int_{A\mathcal{K}B} dl = \frac{l}{\gamma S} i = Ri.$$

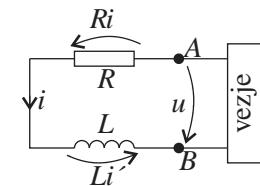
Tokovna gostota \mathbf{J} je na mestu elementa $d\mathbf{l}$ njemu vzporedna, zato je $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = Jdl$. Če navitje oblikuje tanka žica prereza S in kožni pojav ni izražen, da je gostota toka po prerezu konstantna, je $Jdl = (i/S)dl$. Integral elementov dl od začetka do konca je dolžina l žice v navitju, ki skupaj s rezom in specifično prevodnostjo določa električno upornost R navitja. Če zgornja integrala združimo, dobimo napetostno enačbo zanke $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_c$,

$$\oint_{\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A\mathcal{K}B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - u = Ri - u = -\psi' \quad \Rightarrow \quad \psi' + Ri - u = 0 \quad \Rightarrow \quad Li' + Ri - u = 0,$$

ki jo izrazimo tudi s pomočjo induktivnosti L danega navitja. Induktivnost in upornost sta lastnosti navitja, tako kot sta kapacitivnost in izolacijska prevodnost lastnosti kondenzatorja:

$$u = Li' + Ri \quad \text{in} \quad i = Cu' + Gu.$$

Modelno vezje kondenzatorja z izolacijsko prevodnostjo poznamo (vzporedno vezje upora in kondenzatorja), modelno vezje navitja pa je zaporedno vezje upora, ki predstavlja upornost žice, in tuljave, kot strnjenega elementa, ki predstavlja induktivnost navitja. Simbol tuljave stilizirajo štirje polvali s priključkom. K simbolu sodijo še označbe toka in napetosti ter induktivnost. Pri kondenzatorju smo govorili o polnilnem toku Cu' , ki elektri kondenzator, in izolacijskem toku Gu , ki prehaja prostor med elektrodama. Pri navitju govorimo o napetosti Li' , ki je posledica samoindukcije, in padcu napetosti Ri zaradi upornosti žice. Enačbi se poenostavita, če je žica supraprevodna, $R = 0$, $u = Li'$, in če je izolant vakuum, $G = 0$, $i = Cu'$. Obe poenostavitevi si včasih privoščimo in rečemo: privzemimo da sta kondenzator ali navitje idealna. Relaciji se skrčita tudi v enosmernih razmerah, pri navitju, $i' = 0$, $u = Ri$, in pri kondenzatorju, $u' = 0$, $i = Gu$. V splošnem sta člena Cu' in Gu neločljivo povezana in je delitev na dva toka le simbolična, enako neločljiva sta tudi člena Li' in Ri in je delitev na dve ločeni napetosti spet le simbolična; indukcija in padec napetosti se dogajata na vsakem konturnem elementu $d\mathbf{l}$.



Imejmo primer navitja na nemagnetnem toroidnem tuljavniku krožnega prereza. Magnetni pretok ϕ v prostoru med N ovoji smo določili v okviru vrtinčnega zakona,

$$\phi = \mu_0 Ni \left(p - \sqrt{p^2 - r^2} \right) \quad \text{in} \quad L = \mu_0 N^2 \left(p - \sqrt{p^2 - r^2} \right) \quad \text{in} \quad R = 2Nr/\gamma a^2,$$

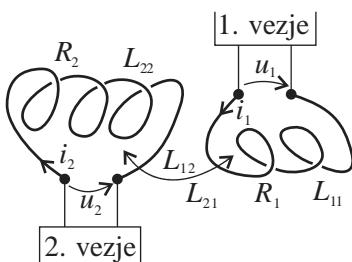
p in r sta srednji radij tuljavnika in radij prereza tuljavnika, na katerem so enakomerno gosti zavoji tanke žice polmera a in specifične prevodnosti γ ; dodajamo še induktivnost $L = \psi/i = N\phi/i$ in upornost R žice. Če je navitje priključeno na sinusni vir s tokom $i(t) = I_m \sin \omega t$, potem je med sponkama navitja napetost:

$$u(t) = Li'(t) + Ri(t) = \omega LI_m \cos \omega t + RI_m \sin \omega t = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} I_m \sin(\omega t + \arctg(\omega L/R)).$$

Tuljava je kvalitetna, če je amplituda inducirane napetosti veliko večja od amplitudo parazitnega padca napetosti, kar pove razmerje $\omega LI_m / RI_m = \omega L/R$; pri podatkih toroidnega navitja je to razmerje sledeče:

$$\frac{\omega L}{R} = \frac{\omega \mu_0 \gamma N a^2 \left(p - \sqrt{p^2 - r^2} \right)}{2r}.$$

Izberimo podatke $f = 2$ kHz, $N = 500$, $\gamma = 56$ MS/m, $p = 4$ cm, $r = 1$ cm in $a = 1$ mm. Vdorna globina $\delta = 1,5$ mm $> a$; kožni učinek v žici očitno ni izrazit, kvaliteta tuljave je $\omega L/R = 70,2$.



Sklop dveh navitij. Magnetni sklop dveh navitij je zelo pogost, zato mu bomo namenili nekoliko več pozornosti. Možnih električnih priključitev navitij je več. Lahko sta obe vključeni v isto ali pa je vsaka v svoje vezje. Toka navitij naj sta i_1 in i_2 . Izpeljava napetostnih enačb obeh navitij tu ni več potrebna; dovolj je, da enačbo enega samega navitja, $\psi' + Ri - u = 0$, smiselno razširimo na dve navitji in pri tem sledimo načinu označevanja napetosti med priključkoma:

$$\psi'_1 + R_1 i_1 - u_1 = 0 \quad \text{in} \quad \psi'_2 + R_2 i_2 - u_2 = 0 \quad \text{ter} \quad \psi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \quad \text{in} \quad \psi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2.$$

Govorimo o dveh napetostih in dveh padcih napetosti zaradi upornosti navitij ter dveh magnetnih sklepih, od katerih je vsak sestavljen iz delnih magnetnih sklepov, ki jih določajo lastni in medsebojni induktivnosti. Napetostni enačbi sta:

$$L_{11}i'_1 + L_{12}i'_2 + R_1 i_1 - u_1 = 0 \quad \text{in} \quad L_{21}i'_1 + L_{22}i'_2 + R_2 i_2 - u_2 = 0.$$



Novost je v tem, da sta zaradi medsebojnih induktivnosti enačbi sklopljeni, da je v prvo enačbo vključen odvod drugega toka in v drugo odvod prvega toka. Modelno vezje navitij ni enoznačno; predstavili bomo dve možnosti. Da členoma $L_{11}i'_1$ in $L_{22}i'_2$ priredimo tuljavi z induktivnostma L_{11} in L_{22} , členoma R_1i_1 in R_2i_2 upora z upornostma R_1 in R_2 , členoma $L_{12}i'_2$ in $L_{21}i'_1$ pa t. i. odvisna, vodena ali krmiljena vira. Simbol za odvisni vir je prevrnjen kvadrat, v katerega sodita polariteti, ob simbol pa pripisemo funkcionalno odvisnost napetosti vira. Druga možnost se od prve razlikuje le v tem, da ne vpletamo odvisnih virov, ampak k tuljavama z induktivnostma L_{11} in L_{22} pripisemo napetosti u_1^L in u_2^L , ki sta $u_1^L = L_{11}i'_1 + L_{12}i'_2$ in $u_2^L = L_{21}i'_1 + L_{22}i'_2$, z lokom med tuljavama in pripisom medsebojne induktivnosti pa nakažemo, da sta si magnetno povezani. V nadaljevanju bomo uporabljali drugo možnost.

Dogovor o pikah. Za medsebojni induktivnosti smo ugotovili, da sta pozitivni ali negativni in tudi zakaj (podpiranje ali nepodpiranje). Na nivoju fizične strukture je to še razvidno, na nivoju strnjениh elementov pa ne več. Ker vejne toke v vezjih označimo poljubno, bi pri medsebojnih členih prihajalo do zadrege glede predznakov; to odpravi dogovor o pikah. Pri podajanju modelnega vezja sklopljenih navitij sta tuljavama, ki predstavljata lastni induktivnosti, pri enem priključku vsake tuljave dodani piki. Dogovor pravi: če sta toka i_1 in i_2 skozi tuljavi usmerjena v priključka s pikama, se magnetna sklepa tuljav podpirata. V tem primeru spremenimo tudi označevanje induktivnosti, in sicer:

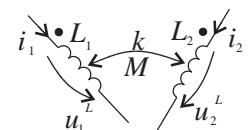
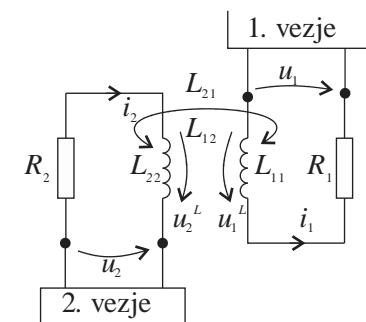
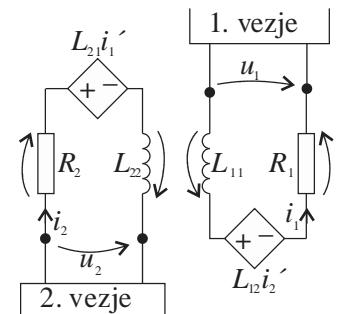
$$L_{11} = L_1 \quad \text{in} \quad L_{22} = L_2 \quad \text{in} \quad |L_{12}| = |L_{21}| = M \quad \text{in} \quad M = K\sqrt{L_1 L_2}.$$

Zadostujeta enojna indeksa pri lastnih, pri medsebojni induktivnosti pa indeks ni potreben. Induktivnosti so pozitivne, namesto medsebojne induktivnosti M pa včasih podajamo kar sklopni faktor K . Modelno vezje sklopljenih navitij, ki se tiče le magnetnega dela (brez uporov), rišemo s tuljavama in oznakami, ki sodijo zraven; enačbi sta:

$$u_1^L = L_1 i'_1 + M i'_2 \quad \text{in} \quad u_2^L = M i'_1 + L_2 i'_2.$$

Sklop več navitij. Kadar je magnetno sklopljenih več navitij, je napetost med priključkoma splošnega, k -tega navitja

$$u_k = \psi'_k + R_k i_k = \sum_{j=1}^n L_{kj} i'_j + R_k i_k = u_k^L + R_k i_k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$





Modelno vezje splošnega navitja oblikujeta upor upornosti R_k z napetostjo $R_k i_k$ in lastna induktivnost L_{kk} z napetostjo

$$u_k^L = \sum_{j=1}^n L_{kj} i'_j,$$

način označitve tokov in napetosti pa ostaja nespremenjen.



§11. Magnetna energija

Pri temah o magnetnem polju smo magnetno energijo že omenjali, vendar nismo o njej povedali še nič določnega. Nanjo se navezujejo pretekle vsebine, npr. magnetna sila, delo, indukcija, induktivnosti, magnetilne krivulje in še kaj. Ločnico pri vprašanjih o energiji določa prostor, ki je nosilec magnetnega polja. Če je linearen, je proces magnetenja reverzibilen, v nasprotnem ni. Irverzibilnost je značilnost feromagnetikov. Mehkomagnetne snovi sprejemamo kot pogojno linearne; vpeljemo okvirno permeabilnost, pri tem pa zamolčimo histerezo, vendar jo pri vrednotenju termičnih izgub naknadno upoštevamo. Začnimo z linearnim magnetenjem.

Magnetenje linearnega sistema. Navežimo se kar na primere navitij z ali brez jeder, ob katerih smo govorili o njihovih induktivnostih in modelnih vezjih. Naj je navitje z induktivnostjo L in upornostjo R priključeno na vir z napetostjo $u_g(t)$. Napetostna enačba zanke je $Li' + Ri - u_g = 0$. Dinamiki napetosti $u_g(t)$ sledi s svojo dinamiko tudi tok $i(t)$. Kakšni sta, ta hip ni važno, se pa bomo tem in podobnim vprašanjem posvetili v okviru analize električnih vezij. Napetostno enačbo množimo s tokom in integriramo med poljubnima zaporednima časoma t_1 in t_2 :

$$A_g(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{u_g}_p i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{L i i'}_p \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{R i^2}_p \, dt = \underbrace{\frac{1}{2} L i^2(t_2) - \frac{1}{2} L i^2(t_1)}_{W_{\text{mag.}}(t_1, t_2)} + W_j(t_1, t_2) = W_{\text{mag.}}(t_1, t_2) + W_j(t_1, t_2).$$

Moč p_g in delo vira $A_g(t_1, t_2)$ med zaporednima trenutkoma že poznamo, enako tudi joulsko moč p_j in sproščeno toploto $W_j(t_1, t_2)$. Novosti sta moč $p_m = L i i'$ in energijski vložek $W_{\text{mag.}}(t_1, t_2)$ med t_1 in t_2 . Količini se očitno dotikata magnetenja ozziroma gradnje magnetnega polja. Spominjata na moč elekturenja $p_e = C u u'$ in energijski vložek $W_{\text{elek.}}(t_1, t_2)$ za gradnjo električnega polja. Ponuja se vzporednica: ko je moč $p_m > 0$, se magnetno polje gradi, v nasprotnem se ruši, ali ohranja, ko se tok časovno ne spreminja. Sposobnost gradnje ali rušenja polja govori o tem, da prostor ni le hranitelj električne, pač pa tudi magnetne energije. Če povlečemo še energijsko vzporednico,

$$W_{\text{elek.}}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}Cu^2(t_2) - \frac{1}{2}Cu^2(t_1) = W_e(t_2) - W_e(t_1) \quad \text{in} \quad W_{\text{mag.}}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}Li^2(t_2) - \frac{1}{2}Li^2(t_1) = W_m(t_2) - W_m(t_1),$$

ugotavljamo, da množino magnetne energije v sistemu vrednotijo tok, magnetni sklep in induktivnost,

$$W_m(t) = \frac{Li^2(t)}{2} = \frac{\psi(t)i(t)}{2} = \frac{\psi^2(t)}{2L} \quad \text{in} \quad p_m = W'_m = Lii' = \psi i' = \psi'i.$$

Po izkušnji iz električne energije je tudi magnetna tam, kjer je polje, kje je te več in kje manj, pa je stvar gostote magnetne energije, o kateri bomo spregovorili kasneje. Tuljava je akumulabilen element, ki je v bremenskem režimu, ko magnetno energijo sprejema, v generatorskem pa, ko jo oddaja (preostalim elementom v sistemu). Glede na to, da tuljava ne zmore oddati več, kot je sprejela, jo smatramo za pasivni element električnih vezij (podobno kot kondenzator).

V nadaljevanju se osredotočimo le še na magnetno energijo. Pri dveh tuljavah je moč magnetenja sistema enaka vsoti,

$$p_m = p_{m1} + p_{m2} = \psi'_1 i_1 + \psi'_2 i_2 = (L_{11}i'_1 + L_{12}i'_2)i_1 + (L_{21}i'_1 + L_{22}i'_2)i_2.$$

Če sta bila v začetku, ob izbranem času 0 s, oba toka enaka nič, je ob času t v sistemu magnetna energija integral moči,

$$\begin{aligned} W_m(t) &= \int_0^t p_m(t^*) dt^* = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_{12}i_1(t)i_2(t) + \frac{1}{2}L_{21}i_2(t)i_1(t) + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2(t) = \frac{1}{2}(\psi_1(t)i_1(t) + \psi_2(t)i_2(t)) \Rightarrow \\ W_m(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \psi_k(t)i_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{jk}i_j(t)i_k(t). \end{aligned}$$

Brž ko je tuljav več, npr. n , je v sistemu akumulirana magnetna energija

$$W_m(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \psi_k(t)i_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{jk}i_j(t)i_k(t).$$

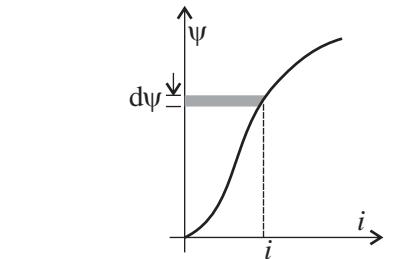
Vsak sumand zase ne govori o neki delni energiji (nekateri sumandi imajo lahko tudi negativne vrednosti), ampak ima fizikalni pomen le vsota. Nekaj podobnega smo srečali v sistemu naelektrnih teles. Električna energija sistema je enaka polovici vsote produktov nabojev in potencialov teles, magnetna energija pa je enaka polovici vsote produktov sklepov in tokov navitij.

Magnetenje nelinearnega sistema. Imejmo navitje z nelinearnim jedrom, ki je priključeno na vir napetosti u_g . Navitje ima upornost R , nima pa induktivnosti, saj si sklep ψ in tok i zaradi nelinearnosti $\psi(i)$ nista sorazmerna. Enačba zanke v izvorni obliki je $\psi' + Ri - u_g = 0$; množimo jo s tokom in integriramo med časoma t_1 in t_2 :

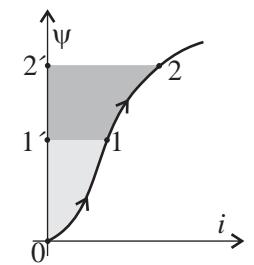
$$A_g(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{u_g}_p i dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\psi' i}_p dt + \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{R i^2}_p dt = W_{\text{mag.}}(t_1, t_2) + W_j(t_1, t_2) \Rightarrow A_g(t_1, t_2) = W_{\text{mag.}}(t_1, t_2) + W_j(t_1, t_2).$$

Vsebini količin $A_g(t_1, t_2)$ in $W_j(t_1, t_2)$ že poznamo, novosti pa sta moč magnetenja $p_m = \psi' i$ in energijski vložek

$$W_{\text{mag.}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p_m dt = \int_{t_1}^{t_2} \psi' i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\psi}{dt} i dt = \int_{t_1}^{t_2} i d\psi,$$



ki dobi povsem drugo vsebino; tok i in prirastek sklepa $d\psi$ razbremo iz (i, ψ) diagrama, zato je tudi sporočilo integrala najlažje razbrati kar tam. Produkt $i d\psi$ geometrijsko pooseblja ploščina traku dolžine i in diferencialne višine $d\psi$ med ordinato in krivuljo $\psi(i)$; izraža se v joulih ($AVs = J$). Ločeno si glejmo integraciji za deviško in histerezno krivuljo.



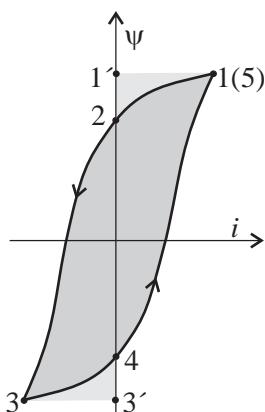
DEVIŠKA KRIVULJA. Čas t_0 naj pomeni začetek magnetenja oziroma stanje, ko je jedro razmagneteno ($M = 0$); temu ustreza točka 0. Od t_0 dalje tok narašča. Ob času t_1 dosežeta tok in sklep vrednosti i_1 in ψ_1 , točka 1, ob času času t_2 pa vrednosti i_2 in ψ_2 , točka 2; točki 1' in 2' na sta njuni sliki na ordinati. Ploščine likov med ordinato in deviško krivuljo, ki jih določajo točke $(0, 1, 1')$, $(1', 1, 2, 2')$ in $(0, 2, 2')$, ustrezajo vložkom $W_{\text{mag.}}(t_0, t_1)$, $W_{\text{mag.}}(t_1, t_2)$ in $W_{\text{mag.}}(t_0, t_2)$; sledi:

$$W_{\text{mag.}}(t_1, t_2) = W_{\text{mag.}}(t_0, t_2) - W_{\text{mag.}}(t_0, t_1).$$

HISTEREZNA ZANKA. Pri izmeničnem toku drsi delovna točka po spodnjem delu zanke v desno, po zgornjem delu pa v levo. Pentjo opremimo z značilnimi točkami 1, 1', 2, 3, 3', 4 in 5, ki sovpada z 1. V časovnem intervalu (t_1, t_2) je $i d\psi$ negativen, saj sklep upada, $d\psi < 0$, tok pa je pozitiven; podobno je v intervalu (t_3, t_4) , sklep narašča, $d\psi > 0$, tok pa je negativen. V drugih dveh intervalih je $i d\psi$ pozitiven. Iz povedanega sledi, da sta dva energijska vložka znotraj ene periode pozitivna,

dva pa negativna. V dveh podintervalih periode $T = t_5 - t_1$ jedro energijo sprejema, v dveh pa nekaj prejete tudi oddaja. Vložke $W_{\text{mag.}}(t_1, t_2)$ do $W_{\text{mag.}}(t_4, t_5)$ določajo ploščine likov $(1, 1', 2)$, $(2, 3, 3')$, $(3, 3', 4)$, in $(4, 1, 1')$. Če pa upoštevamo še predzname, je nepovrnljivi energijski vložek $W_{\text{mag.}}(t_1, t_1 + T)$ v magnetenje jedra v času ene periode enak vsoti delnih vložkov; ustreza mu ploščina lika $(1, 2, 3, 4, 5)$, ki ga ograuje histerezna pentlja \mathcal{P} ,

$$W_{\text{mag.}}(t_1, t_1 + T) = \int_{t_1}^{t_1+T} i d\psi = \oint_{\mathcal{P}} i d\psi \quad \Rightarrow \quad P_h = \frac{W_{\text{mag.}}(t_1, t_1 + T)}{T} = f \oint_{\mathcal{P}} i d\psi.$$



Moč histereznih izgub izmeničnega magnetenja določa poprečna moč P_h in se jo za feromagnetno snov običajno podaja v W/kg; vrednotenje teh izgub je v domeni numerične integracije. Histereza vnaša določeno težavo. Pri sinusnem toku i se v sklepu ψ , zaradi nelinearnega magnetenja, pojavijo poleg osnovne še višji lihi harmoniki,

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} \cos(2k-1)\omega t + b_{2k-1} \sin(2k-1)\omega t),$$

ki povečajo vrtinčne izgube v feromagnetnem jedru. Zaključimo lahko, da nelinearnosti v sistemih praviloma vnašajo bolj ali manj nadležne elektromagnetne učinke. Oglejmo si še možnost analitične aproksimacije, ki sloni na poševni elipsi \mathcal{P}_e kot približku histerezne pentlje. Pri sinusnem toku je tokrat sinusen tudi sklep, vendar z določenim faznim zamikom α :

$$i(t) = I_m \sin \omega t, \quad \psi(t) = \psi_m \sin(\omega t - \alpha) \text{ in } d\psi(t) = \omega \psi_m \cos(\omega t - \alpha) dt.$$

Moč histereznih izgub je

$$P_{h,e} = f \oint_{\mathcal{P}_e} i d\psi = f \int_{t_1}^{t_1+T} i d\psi = I_m \psi_m f \int_{\beta}^{\beta+2\pi} \sin \omega t \cos(\omega t - \alpha) d(\omega t) = \pi I_m \psi_m f \sin \alpha.$$



Gostota energije. Začnimo pri navitju z linearnim jedrom. Tok i v navitju določa magnetno polje v prostoru. Polje lahko predstavimo z družino n pretočnih cevk. Vzdolž vsake od njih si zamislimo sklenjeno krivuljo; v k -ti cevki je to \mathcal{L}_k . Vsaka ima tudi svoj pretok $\delta\phi_k$. Na izbranem mestu v k -ti cevki ga približno ovrednoti produkt $\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{a}_k$. Pretok vsake od cevk prispeva svoj delež k magnetnemu sklepu. Ako sklenjena krivulja \mathcal{L}_k objame N_k ovojev, je magnetna energija v sistemu

$$W_m = \frac{1}{2}i\psi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i \overbrace{N_k \delta\phi_k}^{iN_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{\mathcal{L}_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_k \overbrace{\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{a}_k}^{\delta\phi_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{\mathcal{L}_k} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_k)(\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{a}_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{\mathcal{L}_k} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})(d\mathbf{l}_k \cdot \delta\mathbf{a}_k)$$

Če zapis pretoka $\delta\phi_k = \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{a}_k$ prilagajamo integraciji oziroma elementu $d\mathbf{l}_k$ tako, da sta si $\delta\mathbf{a}_k$ in $d\mathbf{l}_k$ v katerikoli točki na \mathcal{L}_k vzporedna, njima pa je vzporedna tudi gostota \mathbf{B} , saj je \mathcal{L}_k v vlogi srdinske gostotnice v k -ti cevki, potem moremo produkt $(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_k)(\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{a}_k)$ najmanj treh vzporednih vektorjev zapisati tudi kot $(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})(d\mathbf{l}_k \cdot \delta\mathbf{a}_k)$, kar združi oba poljska in oba geometrijska vektorja; produkt $d\mathbf{l}_k \cdot \delta\mathbf{a}_k$ je diferencial prostornine k -te cevke. Če opravimo še limito vsote, ko gre $n \rightarrow \infty$, preide vsota, vred z integracijo, v prostorninski integral funkcije $(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})/2$,

$$W_m = \int_V \frac{1}{2}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV = \int_V w_m dV \quad \Rightarrow \quad w_m = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}),$$

ki jo imenujemo gostota magnetne energije. Magnetna energija je v prostorih, kjer je polje. To sporočilo velja seveda tudi za linearen sistem z več navitji; eno samo navitje smo izbrali le zaradi krajše izpeljave. Če je snov izotropna, zapišemo gostoto energije še v dveh sorodnih oblikah,

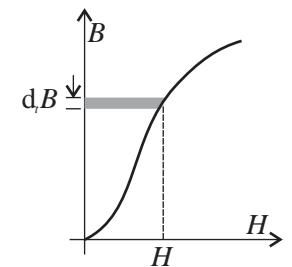
$$w_m = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \mu H^2 / 2 = B^2 / 2\mu.$$

Pri gostoti 1 T je gostota energije v nemagnetni snovi približno 400 kJ/m³; tolikšno srečamo npr. v zračni reži motorja. Mnogo manjša je v magnetiku. Pri enaki gostoti in $\mu_r = 10^4$ znese le še 40 J/m³. Zapišimo gostoto še drugače,

$$w_m = B^2 / 2\mu = B^2 / 2\mu_0 - \chi_m B^2 / 2\mu \quad \Rightarrow \quad B^2 / 2\mu_0 = w_m + \chi_m B^2 / 2\mu.$$

Lahko bi tudi rekli, da je gostota magnetne energije $B^2 / 2\mu_0$, h kateri prispeva zunanji vir delež w_m , ostalo pa usmerjene Weissove domene oziroma magnetizacija.

V primeru navitja z nelinearnim jedrom izhajamo iz energije za magnetenje; sklicujemo se na pretočne cevke in celoten postopek ponovimo. Izpeljavo spremišljajo integral med zaporednima časoma t_1 in t_2 , diferencial $d\psi$, v smislu časovnega prirastka, pa preide v časovni prirastek $d_t \mathbf{B}$,



$$W_{\text{mag.}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} i d\psi = \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\left(\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{H} \cdot d_t \mathbf{B} \right)}_{w_{\text{mag.}}(t_1, t_2)} dv, \quad \text{pri } \mathbf{B} \parallel \mathbf{H} \quad \text{je} \quad w_{\text{mag.}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} H d_t B.$$

Identičen zapis smo srečali pri elekturenju nelinearnega dielektrika. Diferencial $d_t \mathbf{B} = (\partial \mathbf{B} / \partial t) dt$ je časovni diferencial polja \mathbf{B} , produkt $\mathbf{H} \cdot d_t \mathbf{B} = p_{\text{mag.}}$ pa gostota moči magnetenja. V izotropnem magnetiku ($\mathbf{B} \parallel \mathbf{H}$) je gostota $w_{\text{mag.}}(t_1, t_2)$ oziroma integral $H d_t B$ sorazmeren ploščini lika med ordinato in krivuljo $B(H)$ v (H, B) diagramu; podobno kot je to pri energijskem vložku $W_{\text{mag.}}(t_1, t_2)$ in integralu $i d\psi$ v (i, ψ) diagramu.

§12. Gibalni procesi v magnetnem polju



Tematika razdelka je pričakovana. Glede na izkušnje iz gibalnih procesov v električnem polju nas bo tu zanimal odnos med magnetno silo na objekt (vodnik, zanko, navitje, kotvo, magnetik), ki ima možnost premika ali zasuka, in magnetno energijo, vse to pa v povezavi z delom virov, joulskimi izgubami in navitjih in zunanjo silo. Premika (ali zasuka) tokovne zanke smo se dotaknili pri delu magnetne sile. V razmislek postavimo dve navitji (zanki) z induktivnostmi L_{11} , L_{12} , L_{21} in L_{22} , upornostma R_1 in R_2 in s tokoma i_1 in i_2 . Prvo navitje naj miruje, drugemu navitju pa dopuščamo možnost premika. Ob njegovem diferencialnem premiku v času dt opravi magnetna sila delo $dA_m = i_2 d\psi_2^{(1)} > 0$, kar ustrezata tudi produktu $i_1 d\psi_1^{(2)}$, saj velja $L_{12} = d\psi_1^{(2)}/i_2 = d\psi_2^{(1)}/i_1 = L_{21}$. Med premikom se lastna magnetna sklepa nista spremenila, saj navitji nista spremenili oblike, $d\psi_1^{(1)} = d\psi_2^{(2)} = 0$, ampak le medsebojno lego. Diferencialni prirast magnetne energije v sistemu zaradi diferencialnega premika drugega navitja je

$$dW_m = \underbrace{\frac{1}{2}i_1 d\psi_1^{(1)} + \frac{1}{2}i_2 d\psi_2^{(2)}}_0 + \underbrace{\frac{1}{2}\overbrace{i_1 d\psi_1^{(2)}}_{i_1 i_2 dL_{12}} + \frac{1}{2}\overbrace{i_2 d\psi_2^{(1)}}_{i_2 i_1 dL_{21}}}_{i_2 i_1 dL_{21}} = i_2 i_1 dL_{21} = i_1 i_2 dL_{12} = dA_m \quad \Rightarrow \quad dA_m = dW_m.$$

Ugotovitev je pomembna: ob diferencialnem premiku se opravi delo in za enako mero se poveča tudi magnetna energija v sistemu. To pomeni, da sta vira v tokokrogih obeh navitij v času dt opravila delo

$$dA_g = dA_{g1} + dA_{g2} = dW_m + dA_m + R_1 i_1^2 dt + R_2 i_2^2 dt,$$

pri tem pa ne vemo, kolikšen je delež katerega v dA_m in dW_m . Če v premik vpletemo zunanjo silo, ki oponira magnetni, bo njeno delo dA_z prevzelo vlogo $-dA_m$, magnetna energija pa se bo zmanjšala ($dW_m < 0$)

$$dA_g = dW_m - dA_z + R_1 i_1^2 dt + R_2 i_2^2 dt \quad \Rightarrow \quad dA_z - dW_m = -dA_g + R_1 i_1^2 dt + R_2 i_2^2 dt > 0.$$

Delo zunanje sile in upad magnetne energije se bosta odrazila v toploti, del energije pa bosta prejela tudi vira. Po vzoru iz električnega polja sledi, da je pri translatornem premiku vektor magnetne sile enak gradientu magnetne energije,

$$dA_m = \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l} = dW_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_m = (F_{mx}, F_{my}, F_{mz}) = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}, \frac{\partial W_m}{\partial y}, \frac{\partial W_m}{\partial z} \right).$$

Vzemimo primer dveh enakih dvovodov, ki sta eden vrh drugega. Medseboja induktivnost je

$$L_{12} = \pm \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{h};$$

d je medosna razdalja in h je razmik med njima. Če je spodni (2) mirujoč, zgornji (1) pa se more vertikalno premikati, da se razmik h zaradi sile lahko spremeni, potem je

$$F_{mh} = \frac{dW_m}{dh} = i_1 i_2 \frac{dL_{12}(h)}{dh} = \pm \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{\pi} \left(\overbrace{\frac{h}{d^2 + h^2}}^{<0} - \frac{1}{h} \right).$$

Če se magnetna pretoka podpirata, potem magnetna sila dvovoda privlači (h se manjša), v nasprotnem ju odbija. Kadar je odbojna sila dovolj velika, dosežemo v polju težnosti lebdenje (magnetna blazina).

S pomočjo magnetne energije izrazimo še magnetno silo med vodnikoma dvovoda. Dopustimo možnost premika desnega vodnika. Energija je funkcija medosne razdalje vodnikov, sila na desni vodnik pa je

$$F_{md} = \frac{dW_m(d)}{dd} = \frac{d}{dd} \left(\frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right) \right) = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi d} > 0.$$

Sila stremi vodnika razmakniti (poznano že iz začetka magnetike) in s tem povečati magnetni sklep dvovoda. Če bi zanko iz mehke žice položili na podlago, bi se pri primerni jakosti toka zanka oblikovala v krožno, ki zagotavlja največji možen pretok skozi njo.



Ploskovne sile. O njih govorimo v primeru magnetnega sistema, v katerem je eno ali več navitij mirujočih, dopušča pa se možnost premika linearnega magnetika. Takšne primere srečamo pri različnih elektromagnetskih sistemih (ravna tuljava z gibljivim jedrom, kotva elektromagneta, motor, ...). O ploskovnih silah oziroma tlaku smo govorili tudi pri dielektričnih objektih v električnem polju. Vzporednic med električnim in magnetnim poljem je več, posebej pomembne pa so tiste, ki se tičejo gostot energij in polj na mejah linearnih snovi,

$$w_m = \mu H^2 / 2 = B^2 / 2\mu \quad \text{in} \quad w_e = \varepsilon E^2 / 2 = D^2 / 2\varepsilon,$$

$$B_n(T_+) = B_n(T_-) \quad \text{in} \quad H_t(T_+) = H_t(T_-) \quad \text{ter} \quad D_n(T_+) = D_n(T_-) \quad \text{in} \quad E_t(T_+) = E_t(T_-),$$

ki so ključne za ploskovne sile, zato moremo iz električnih v magnetne razmere smiselno prenesti še tlak magnetne sile, v primeru stikov nemagnetik – magnetik ali magnetik – magnetik,

$$\begin{aligned} f_{en} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \varepsilon_r - \varepsilon_0) \left(E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_0 \varepsilon_r)} \right) \Rightarrow f_{mn} = \frac{1}{2}(\mu_0 \mu_r - \mu_0) \left(H_t^2 + \frac{B_n^2}{\mu_0 (\mu_0 \mu_r)} \right), \\ f_{en} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \Rightarrow f_{mn} = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) \left(H_t^2 + \frac{B_n^2}{\mu_1 \mu_2} \right), \end{aligned}$$

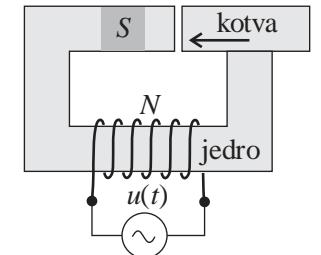
ko je normala stične ploskve usmerjena prvič, v nemagnetik, ali drugič, iz drugega v prvi magnetik.

Elektromagnet sestavlja jedro in navitje z N ovoji, ki je priključeno na vir z napetostjo $u(t) = U_m \cos \omega t$, ter kotva, ki je gibljivi del strukture. Na stiku zrak – kotva s ploščino S deluje tlak, ki vleče kotvo v levo, v režo,

$$f_{mn} = \frac{1}{2}(\mu_0 \mu_r - \mu_0) \left(\underbrace{H_t^2}_{\cong 0} + \frac{B_n^2}{\mu_0 (\mu_0 \mu_r)} \right) \cong \frac{B_n^2}{2\mu_0} \Rightarrow F_{mn} \cong \frac{B_n^2}{2\mu_0} S.$$

Privzeli smo dober magnetik, $\mu_r \gg 1$, in zanemarili tangentno magnetno jakost na steni. Pri gostoti 1 T je tlak magnetne sile okoli $4 \cdot 10^5$ Pa, kar je štirikratnik zračnega tlaka. Ta tlak je 10^5 -krat večji od električnega na površini prevodnika pri jakosti 1 MV/m. Če zanemarimo upornost navitja, je $u = \psi' = N\phi'$. Pretok, sila in njeno časovno poprečje so:

$$\phi(t) = \frac{U_m}{\omega N} \sin \omega t = B_n(t)S \quad \text{in} \quad F_{mn}(t) \cong \frac{1}{2\mu_0 S} \left(\frac{U_m}{\omega N} \sin \omega t \right)^2 \quad \text{ter} \quad \overline{F_{mn}(t)} \cong \frac{U_m^2}{2\mu_0 \omega^2 N^2 S} \overline{\sin^2 \omega t}_{1/2} = \frac{U_m^2}{4\mu_0 \omega^2 N^2 S}.$$



Magnetne sile v globokem utoru. V mislih imejmo motor. Osnovno magnetno polje v stroju generira tok v statorjevem navitju. Magnetni pretok obkroža navitje; glavnina tega pretoka vstopa skozi režo v rotor in se iz njega na drugem mestu skozi režo sklene vase. Navitje je tudi na rotorju. Sliko izostrimo v ploščat nemagneten vodnik s tokom i v utoru dolžine l in višine a z bližnjo okolico. Pri osnovah elektrotehnike nimamo na voljo postopkov za analizo magnetnega polja, zato bo

račun precej poenostavljen. Izven utora (v rotorju in statorju s permeabilnostjo $\mu_0\mu_r$ ter reži) ima osnovno polje gostoto B_{0y} , v utoru pa gostoto B_{0y}/μ_r (zveznost H_t na stenah utora). Temu se pridružuje polje toka i v ploščatem vodniku. Zanj uporabimo kar izraze za polje tračnega vodnika. Na bokih utora je tangentna jakost $H_{1y} = \pm i/2a$, normalna gostota pa je $B_{1x} = (\mu_0\mu_r i/4\pi a) \ln(d_1/d_2)$; d_1 in d_2 sta oddaljenosti točk na steni utora do vrha in dna vodnika. Tangentna jakost in normalna gostota na bokih utora sta:

$$H_y = H_{0y} + H_{1y} = \begin{cases} B_{0y}/\mu_0\mu_r - i/2a & \text{levi bok,} \\ B_{0y}/\mu_0\mu_r + i/2a & \text{desni bok.} \end{cases}$$

$$B_x = \underbrace{B_{0x}}_0 + B_{1x} = \begin{cases} (\mu_0\mu_r i/4\pi a) \ln(d_1/d_2) & \text{levi bok,} \\ (\mu_0\mu_r i/4\pi a) \ln(d_1/d_2) & \text{desni bok.} \end{cases}$$

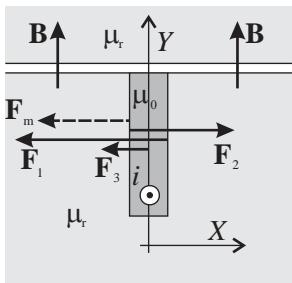
Tlaka zaradi komponente B_x sta enaka in vlečeta steni utora drugo k drugi z enakima silama. Tlaka zaradi komponente H_y sta različna,

$$\frac{1}{2}\mu_0(\mu_r - 1)H_y^2 = \frac{1}{2}\mu_0(\mu_r - 1) \begin{cases} (B_{0y}/\mu_0\mu_r - i/2a)^2 & \text{levi bok,} \\ (B_{0y}/\mu_0\mu_r + i/2a)^2 & \text{desni bok.} \end{cases}$$

Na levem boku je tlak očitno manjši. Sila, ki vleče utor v levo, je

$$F_{mx}^{(\text{utor})} = F_{1x} + F_{2x} = -\frac{1}{2}\mu_0(\mu_r - 1) \left((B_{0y}/\mu_0\mu_r + i/2a)^2 - (B_{0y}/\mu_0\mu_r - i/2a)^2 \right) al = -(\mu_r - 1) i B_{0y} l / \mu_r.$$

Na levo steno utora pritiska še tokovodnik, ki je v polju gostote B_{0y}/μ_r , $F_{mx}^{(\text{vodnik})} = -i B_{0y} l / \mu_r$. Rezultančna sila na utor z vodnikom je $F_{mx} = F_{mx}^{(\text{utor})} + F_{mx}^{(\text{vodnik})} = -i B_{0y} l$. Rezultat je preprost, vsebina pa poučna. Rotor poganjajo ploskovne sile; sile na tokovodnike so od njih kar μ_r -krat manjše. Izraz $F_{mx} = -i B_{0y} l$ je tisti, ki zavaja, čeravno z rezultatom kot takim ni nič narobe. Podobno je z inducirano napetostjo v palici. Gibalna napetost je $w_x B_{0y} l / \mu_r$, celotna je $w_x B_{0y} l$, razlika obeh pa je transformatorska napetost.





§13. Maxwellove enačbe

S tem razdelkom zaokrožujemo pretekle vsebine makroskopske teorije elektromagnetizma in usmerjamo pogled v teme, ki še sledijo: razdelek o valovanju, difuziji in sevanju ter razdelki o dinamičnih električnih vezjih.

Uvod. Elektromagnetika 'se vrati' okoli naboja, ki je po naravi stvari kvantiziran, vendar ga makroskopska teorija jemlje kot kontinuirno razporejenega po prostoru, ploskvi ali krivulji. Zakon o ohranitvi naboja je postulat elektromagnetizma; povzema ga kontinuitetna enačba. Lorentzova sila definira električno poljsko jakost in gostoto magnetnega pretoka in je vez med elektromagnetnim in ostalim svetom. V nadaljevanju smo sledili zakonom in empiričnim odnosom električnega in magnetnega polja v snoveh. Pri vrtinčnosti gostote magnetnega pretoka in delu magnetne sile za premik zanke smo izstopili iz običajnega konteksta in se dotaknli zaslove Maxwellovih enačb.

Maxwellove enačbe, prvič. Angleški fizik James Clerk Maxwell je od leta 1855 dalje dotedanja znanja o električnem in magnetnem polju dopolnjeval in jih končno postavil v matematični okvir. V temeljnem delu *A treatise on electricity and magnetism* (1873) je izpostavil dvanaest enačb elektromagnetizma. Štirim od njih rečemo danes Maxwellove enačbe; R. P. Feynman zapiše v učbeniku *The Feynman lectures on physics* (1963) te enačbe za mirujoče strukture takole:

$$(1) \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho dv \quad (2) \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot dl = - \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (3) \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (4) \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot dl = \mu_0 \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}.$$

Vse te že poznamo: izhajajo iz zakonov Coulomba, Ampera in Faradaya ter zakona o ohranitvi naboja; določajo lastnosti osrednjih količin elektromagnetizma in odnose med njimi. Maxwellov zapis enačb je bil na izled drugačen, po vsebini pa je sporočal to, kar je pomembno. Maxwellu gre zasluga za matematični zapis Faradayeve indukcije in za člen $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ v zadnji enačbi, ki ga do takrat v njej ni bilo. Mnenja, zakaj je Maxwell ta člen dodal, so deljena. Členu bi utegnila botrovati valovna enačba, ki jo je Maxwell s pomočjo njega izpeljal. Rešitev enačbe je sporočala, da elektromagnetno polje potuje

skozi prostor s hitrostjo svetlobe. Verjetno ga je to navedlo na znamenito hipotezo, da je svetloba elektromagnetni pojav. Maxwell je zapise enačb elektromagnetizma kar dve desetletji dopolnjeval. Njegovo delo so nadaljevali O. Heaviside, H. R. Hertz, A. Einstein in H. A. Lorentz; Heaviside je enačbe matematično dovršil, Hertz je zaznal elektromagnetno valovanje, Einstein je dokazal invariantnost Maxwellovih enačb in Lorentzova zasluga je končni zapis elektromagnetne sile.

Maxwellove enačbe v inercialnih sistemih. Naj so \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{J} in ρ količine v mirujočem sistemu, \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{J}' , ρ' pa količine v sistemu, ki se giblje glede na mirujočega s hitrostjo \mathbf{v} . Če uporabimo Lorentzove transformacije krajevnih koordinat in časa, ugotovimo, da sta sistema Maxwellovih enačb, ki povezujeta med seboj količine posamezmega sistema, identična, med količinami sistemov pa veljajo sledeče relacije:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} &= \kappa(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) & \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \kappa(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}/c_0^2) \\ \mathbf{J}'_{\parallel} &= \mathbf{J}_{\parallel} - \mathbf{v}\rho' & \mathbf{J}'_{\perp} &= \mathbf{J}_{\perp} & \rho' &= \kappa(\rho - \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}/c_0^2) & \kappa &= 1/\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c_0)^2}.\end{aligned}$$

Zamenjavi $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ in $\square' \leftrightarrow \square$ dasta obratne relacije. Glede na hitrost \mathbf{v} se vzdolžni (\parallel) deli vektorjev preslikajo drugače kot prečni (\perp); preslika se tudi gostota naboja. Sporočilo: opazovalca zaznavata isti elektromagnetni pojav različno, oba pa pravilno. Ni težko opaziti, da sta skalarna produkta vektorjev polj v obeh sistemih enaka, $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$; produkt polj je relativistična invarianca. Pri hitrosti $v \ll c_0$ gre $\kappa \rightarrow 1$; dobimo:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}/c_0^2 \quad \mathbf{J}' = \mathbf{J} - \mathbf{v}\rho \quad \rho' = \rho - \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}/c_0^2.$$

Pri običajnih vrednostih količin E , B , J , v in ρ sta relativistična člena $\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}/c_0^2$ in $\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}/c_0^2$ povsem zanemarljiva:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad \mathbf{J}' = \mathbf{J} - \mathbf{v}\rho \quad \rho = \rho'.$$

Na vsebino prve relacije smo se sklicevali pri gibalni inducirani napetosti. Za mirujočega opazovalca je električno polje nekje na zanki enako \mathbf{E} , za opazovalca na gibajoči zanki pa je drugačno, $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Gibajoči opazovalec bo trdil, da je napetost v zanki posledica transformacije, mirujoči pa, da je napetost v zanki posledica tako transformacije kot gibanja. Z različnim gledanjem na napetost v zanki dobita opazovalca na koncu enak rezultat.

Maxwellove enačbe, drugič. Naboje in toke kot vire elektromagnetnega polja delimo na proste in vezane. Vezani naboji v dielektrični snovi določajo vektor polarizacije \mathbf{P} , vezani toki v magnetni snovi pa vektor magnetizacije \mathbf{M} . S pomočjo teh sta definirana vektorja gostote električnega pretoka, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, in jakosti magnetnega polja, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$. Delitev virov na proste in vezane spremeni izgled Maxwellovih enačb, ne pa njenih vsebin. J. A. Stratton jih v svojem znamenitem delu *Electromagnetic theory* (1941) za mirujoče strukture zapiše takole:

$$(I) \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot da \quad (II) \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J}_{\text{pro.}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot da \quad (III) \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot da = 0 \quad (IV) \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot da = \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{pro.}} dv.$$

Ta zapis Maxwellovih enačb je pogost pri elektrotehnikih, pri fizikih pa prejšnji. Fizikom moramo pritrditi: njihov zapis ne deli virov na proste in vezane. Resnično: vloga obeh je pri elektromagnetnem pojavu povsem enakovredna. Prednosti ima tudi elektrotehniški zapis: prosti naboji in njihovi toki, ki jih veže enačba $i_{\text{pro.}} = -Q'_{\text{not. pro.}}$, igrajo ključno vlogo pri vrednotenju moči električnih virov, joulske moči, moči elektrenja in magnetenja in pri Poyntingovi moči.

Mejni pogoji. Na Maxwellove enačbe se neposredno navezujejo lastnosti polj \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} in \mathbf{D} ob meji dveh snovi,

- (a) $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}(T_+) - \mathbf{E}(T_-)) = \mathbf{0}$
- (b) $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}(T_+) - \mathbf{H}(T_-)) = \mathbf{K}_{\text{pro.}}(T)$
- (c) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}(T_+) - \mathbf{B}(T_-)) = 0$
- (d) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}(T_+) - \mathbf{D}(T_-)) = \sigma_{\text{pro.}}(T)$,

mejni pogoj, ki izhaja iz kontinuitetne enačbe, pa tu zgolj navajamo. V najbolj splošnem primeru stika dveh snovi, ko je v meji tudi tokovna obloga $\mathbf{K}_{\text{pro.}}$, je sledeč:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{\text{pro.}}(T_+) - \mathbf{J}_{\text{pro.}}(T_-)) + \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\delta a} \oint_{\delta \mathcal{L}} \mathbf{K}_{\text{pro.}}(T_l) \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{n}) = -\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{\text{pro.}}(T).$$

Njegova posebnost sta limita in integral. Integral vrednoti množino ploskovnega toka prek krivulje $\delta \mathcal{L}$, ki leži v meji in v desno obkroži normalo v mejni točki T . Diferencial $d\mathbf{l}$ je konturni element v točki T_l na $\delta \mathcal{L}$; δa je ploščina lika, katere rob je $\delta \mathcal{L}$. Tokovne oblage so v praksi pogosto takšne, da ne kopičijo naboja na meji, da je limita zgornjega člena enaka nič; takrat ostane od zadnjega mejnega pogoja le še

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_{\text{pro.}}(T_+) - \mathbf{J}_{\text{pro.}}(T_-)) = -\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{\text{pro.}}(T).$$

V enosmernih razmerah velja homogen mejni pogoj, $J_{\text{pro.}n}(T_+) - J_{\text{pro.}n}(T_-) = 0$, v časovno spremenljivih razmerah pa v duhu enačbe $i_{\text{pro.}} = -Q'_{\text{not. pro.}}$ preide v nehomogen pogoj.

Poyntingova moč. Ob izkazani podobnosti magnetnega in električnega polja v izolantu koaksialnega kabla v enosmernih razmerah smo to moč že omenili oziroma vzeli na znanje. V okviru Biot-Savartovega zakona smo imeli na voljo le vektor \mathbf{B} , zato smo Poyntingov vektor v nemagnetni snovi zapisali kot $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$, sicer pa je vektor \mathbf{S} definiran s produktom poljskih jakosti, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Pomembna je tudi Poyntingova moč p_S oziroma energijski tok skozi ploskev \mathcal{A} ,

$$p_S = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a}.$$

Poyntingova vektor in moč izhajata neposredno iz I. in II. Maxwellove enačbe, prav tako tudi Poyntingov stavek oziroma močnostna bilanca v prostoru \mathcal{V} , katerega ograja je sklenjena ploskev \mathcal{A} ,

$$p_g = p_j + p_{\text{elek.}} + p_{\text{mag.}} + p_S \quad \text{kjer je} \quad p_S = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a},$$

vendar izpeljava žal presega okvir osnov elektrotehnike. Stavek pravi: moč virov v prostoru je enaka vsoti joulske moči v prostoru, moči elektrena in moči magnetenja tega prostora ter Poyntingove moči, ki ta prostor zapušča. Moč p_g določa integral gostote moči $\mathbf{J}_{\text{pro.}} \cdot \mathbf{E}_g$ (ali $-\mathbf{J}_g \cdot \mathbf{E}$) v virih, moč p_j določa integral gostote moči $\mathbf{J}_{\text{pro.}} \cdot \mathbf{E}$ v prevodnih snoveh, moči elektrena $p_{\text{elek.}}$ in magnetenja $p_{\text{mag.}}$ pa integrala gostot $\mathbf{E} \cdot d_t \mathbf{D}$ in $\mathbf{H} \cdot d_t \mathbf{B}$ po prostoru. Od sklenjene ploskve je odvisno, kateri sumandi tvorijo močnostno bilanco. Če \mathcal{A} obkroži le vir, je $p_g = p_S$, če obkroži le upor, je $p_j = -p_S$, če obkroži le kondenzator, je $p_{\text{elek.}} = -p_S$, ali le tuljavo, je $p_{\text{mag.}} = -p_S$. Resnično, če skiciramo vektorje \mathbf{E} in \mathbf{H} ter \mathbf{S} na teh ograjah, ugotovimo, da je ob uporu vektor \mathbf{S} vedno usmerjen k uporu, pri viru, kondenzatorju ali tuljavi pa je \mathbf{S} usmerjen k njim, ko energijo sprejemajo, ali od njih, ko energijo oddajajo.

§14. Elektromagnetno polje

Pri obravnavi parcialnih polj smo sledili časovnemu zaporedju: začeli smo z elektrostatičnim, nadaljevali s tokovnim in z magnetnim ter zaključili z induciranim električnim poljem. Vpogledi v ta polja so bili delno okrnjeni, saj niso postregeli s celovito fizikalno sliko. Zatikalo se je pri energijskih vprašanjih: znali smo ovrednotiti energije, nismo pa uspeli pojasniti, kako energije pridejo v določen prostor (npr. v kondenzator, upor ali tuljavo). Pretekli razdelek je predstavil Maxwellove enačbe, ki tvorijo fizikalno-matematični model makroskopske teorije elektromagnetizma, zato upravičeno pričakujemo, da bodo iz njih izšli tudi odgovori na odprta vprašanja. Pot smo delno že nakazali: skrita je v naravi elektromagnetnega polja, ki je še ne poznamo, in v Poyntingovi moči. Osnovne izkušnje o elektromagnetnem polju bomo poskušali pridobiti iz značilnih primerov, ki bodo razkrili povsem nove pojave elektromagnetizma, to so valovanje, sevanje in difuzija.

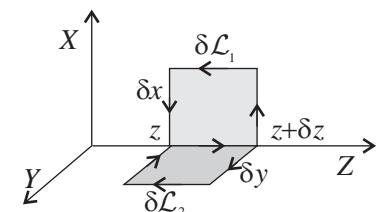


Ravninski val v praznem prostoru. To elektromagnetno polje je Maxwell predstavil v svoji elektromagnetni teoriji svetlobe. Maxwellove enačbe v območju praznega prostora (μ_0, ϵ_0), v katerem ni virov, $\mathbf{J}_{\text{pro.}} = \mathbf{0}$ in $\rho_{\text{pro.}} = 0$, so:



$$(I) \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (II) \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (III) \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (IV) \oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = 0.$$

Ravninski val oblikujeta vektorja električne in magnetne poljske jakosti, ki sta tangentna na ravnini, bodi to ravnina XY , in sta funkciji koordinate z in časa t . Izberimo možnost $E_x = E_x(z, t)$ in $H_y = H_y(z, t)$. Gostoti polj $D_x = \epsilon_0 E_x = D_x(z, t)$ in $B_y = \mu_0 H_y = B_y(z, t)$ zadoščata III. in IV. enačbi, saj se gostoti vzdolž svojih gostotnic ohranjata. Enačbi I in II govorita o vzajemni prepletenu električnega in magnetnega polja. Izberimo majhno pravokotno ploskvico δA_1 s stranicama δx in δz , katere rob je zankica δL_1 . Približni oceni integralov v I. enačbi privedeta do diferenčne enačbe:



$$\oint_{\delta L_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \cong E_x(z + \delta z/2, t) \delta x - E_x(z, t) \delta x \quad \text{in} \quad \int_{\delta A_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \cong \mu_0 \frac{\partial H_y(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \delta x \delta z \quad \Rightarrow$$

$$E_x(z + \delta z, t) - E_x(z, t) = -\mu_0 \frac{\partial H_y(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \delta z.$$

Podobno storimo s ploskvico $\delta\mathcal{A}_2$ s stranicama δy in δz in zankico $\delta\mathcal{L}_2$ v II. enačbi:

$$\oint_{\delta\mathcal{L}_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong H_y(z + \delta z, t)\delta y - H_y(z, t)\delta y \quad \text{in} \quad \int_{\delta\mathcal{A}_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \cong -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \delta y \delta z \quad \Rightarrow$$

$$H_y(z + \delta z, t) - H_y(z, t) = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \delta z.$$

Diferenčni enačbi delimo z δz in limitiramo $\delta z \rightarrow 0$; dobimo diferencialni enačbi krajevno-časovnih polj:

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} \quad \text{in} \quad \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t}.$$

Če prvo odvajamo na t , drugo na z , ju združimo in upoštevamo zvezo $\mu_0 \varepsilon_0 c_0^2 = 1$, dobimo valovno enačbo za polje H_y :

$$\frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial t \partial z} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial t^2} \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial z^2} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial t \partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

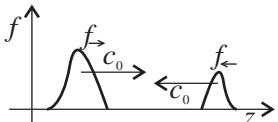
(V času Maxwell-a so ostale veje fizike valovne enačbe že poznale. Omenja se domnevo, da je Maxwell vpeljal premikalni tok v želji po valovnem vpogledu na elektromagnetne pojave.) Zgornjo enačbo reši vsaka dvakrat odvedljiva funkcija g , katere argument ima obliko $t \pm z/c_0$, torej $g(t \pm z/c_0)$ – t. i. d'Alambertova rešitev. Oba druga odvoda to potrjujeta:

$$\frac{\partial^2 g(t \pm z/c_0)}{\partial z^2} = (\pm 1/c_0)^2 g'' = \frac{g''}{c_0^2} \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 g(t \pm z/c_0)}{\partial t^2} = g'' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 g(t \pm z/c_0)}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 g(t \pm z/c_0)}{\partial t^2} = 0.$$

Zapišimo d'Alambertovo rešitev valovne enačbe za magnetno poljsko jakost:

$$H_y(z, t) = f_{\rightarrow}(t - z/c_0) + f_{\leftarrow}(t + z/c_0).$$

Bolj kot funkciji f_{\rightarrow} in f_{\leftarrow} sta pomembni njuni interpretaciji. Ob času t ima f_{\rightarrow} na mestu z neko vrednost F , ob času t^* ima tej enako vrednost na mestu $z^* = z + c_0(t^* - t)$, kar pomeni, da se funkcionalna vrednost F pomika vzdolž osi Z s hitrostjo c_0 oziroma s hitrostjo svetlobe. Tako kot ta, se vzdolž osi Z pomikajo tudi vse druge funkcionalne vrednosti oziroma celotna krajevna podoba $\mathcal{F}(z) = f_{\rightarrow}(t_1 - z/c_0)$ te funkcije ob kateremkoli času t_1 . Funkcijo $f_{\rightarrow}(t - z/c_0)$ sprejemamo kot naprej



(vzdolž osi Z) potajoči val. Podobno ugotovimo tudi za funkcijo $f_{\leftarrow}(t + z/c_0)$, da pomeni nazaj (vzdolž osi Z) potajoči val. Rešitev za električno poljsko jakost dobimo iz zveze

$$\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t}$$

s pomočjo nedoločenega integrala. Izpišimo to jakost za naprej potajoči val,

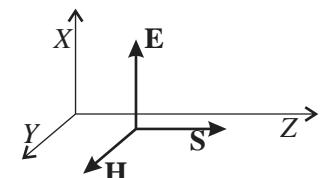
$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{x\rightarrow}(z, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_{y\rightarrow}(z, t)}{\partial z} \Rightarrow E_{x\rightarrow}(z, t) = \int \frac{\partial E_{x\rightarrow}(z, t)}{\partial t} dt = -\frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\partial H_{y\rightarrow}(z, t)}{\partial z} dt \Rightarrow \\ E_{x\rightarrow}(z, t) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\partial f_{\rightarrow}(t - z/c_0)}{\partial z} dt = \frac{1}{\epsilon_0 c_0} \int f'_{\rightarrow}(t - z/c_0) dt = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} f_{\rightarrow}(t - z/c_0), \end{aligned}$$

in do predznaka podoben rezultat dobimo za nazaj potajoči val. Če rešitvi združimo, dobimo:

$$E_x(z, t) = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} f_{\rightarrow}(t - z/c_0) - \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} f_{\leftarrow}(t + z/c_0).$$

Konstanta $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = R_{v0}$ je valovna upornost praznega prostora; pri $c_0 \cong 3 \cdot 10^8$ m/s znaša približno $120\pi \Omega \cong 377 \Omega$.

Kar samo zapisali za obe poljski jakosti, je v duhu drugih valovanj v fiziki; dva nasproti potajoča vala srečamo pri odboju. Elektromagnetno polje ima tudi vse druge značilnosti valovanj (lom, uklon, ...), vendar to ne bo več naša tema.



Nadalujmo le z enim, naprej vzdolž osi Z potajočim ravninskim valom soodvisnih polj

$$E_x(z, t) = R_{v0} f_{\rightarrow}(t - z/c_0) \quad \text{in} \quad H_y(z, t) = f_{\rightarrow}(t - z/c_0).$$

Gostota Poyntingove moči je

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \Rightarrow S_z(z, t) = E_x(z, t)H_y(z, t) = R_{v0}f_{\rightarrow}^2(t - z/c_0) = 2c_0w_e(z, t) = 2c_0w_m(z, t) = c_0w_{em} = S_{em}.$$

Krajevno-časovnima porazdelitvama jakosti polj sledita tudi gostoti električne in magnetne energije oziroma gostota elektromagnetne energije $w_{em} = w_e + w_m = 2w_e = 2w_m$, ki v produktu s hitrostjo c_0 daje gostoto moči S_{em} ravnega vala v praznem prostoru. Pri jakosti magnetnega polja 1 A/m je jakost električnega polja 377 V/m, gostota Poyntingove moči je 377 W/m², gostota elektromagnetne energije pa 1,26 μJ/m³. Za primerjavo: gostota moči sončne svetlobe na Zemlji je okoli 1000 W/m². Polprevodniška sončna celica uspe v električno energijo pretvoriti le okoli 20% tega svetlobnega toka.



25:13

Ravninski val je najosnovnejši in le eden iz neskončne množice elektromagnetičnih valovanj. Nekateri od teh so razvrščeni v skupine. Ravninski val spada v skupino transverzalnih elektromagnetičnih valovanj (TEM valovanje); vektorja električne in magnetne poljske jakosti sta prečna na smer širjenja valovanja. Ravninski val ni le stvar neomejenega prostora, ampak ga srečamo tudi v tračnih strukturah. Elektromagnetno polje med vodnikoma tračnega dvovoda ali dveh mikrotraktastih linij je možno solidno aproksimirati z dvema TEM valoma vzdolž dvovoda. Kolikšen je delež katerega, je odvisno od vrste drugih podatkov (vir na začetku, breme na koncu, dolžina, ...). V prostoru med trakoma je magnetno polje vzporedno z trakoma, električno pa je nanj pravokotno.



29:49

TEM valovanje v koaksialnem kablu. V enosmernih razmerah se električno in magnetno polje v kablu navezujeta na napetost in tok, ne poznamo pa soodvisnosti dinamičnih polj v luči elektromagnetičnega valovanja. Naj sta žila in oklop idealno prevodna. TEM valovanje v izolantu dielektričnosti $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ in permeabilnosti μ_0 določata prečni komponenti $E_\rho = e_\rho(z, t)/\rho$ in $H_\phi = h_\phi(z, t)/\rho$, ki slabita z oddaljenostjo ρ od osi. Nadalujmo z enačbama:

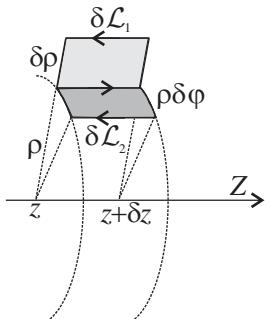
$$(I) \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (II) \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}.$$

Izberimo majhno pravokotno ploskvico $\delta\mathcal{A}_1$ s stranicama $\delta\rho$ in δz , katere rob je zankica $\delta\mathcal{L}_1$. Približni oceni integralov v I. enačbi privedeta do diferenčne enačbe:

$$\oint_{\delta\mathcal{L}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \cong \frac{1}{\rho} (e_\rho(z + \delta z, t) - e_\rho(z, t)) \delta\rho \quad \text{in} \quad \int_{\delta\mathcal{A}_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \cong \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial h_\phi(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \delta\rho \delta z \Rightarrow \\ e_\rho(z + \delta z, t) - e_\rho(z, t) = -\mu_0 \frac{\partial h_\phi(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \delta z.$$

Podobno storimo s ploskvico $\delta\mathcal{A}_2$ s stranicama δy in δz in zankico $\delta\mathcal{L}_2$ v II. enačbi:

$$\oint_{\delta\mathcal{L}_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong \frac{1}{\rho} (h_\phi(z + \delta z, t) - h_\phi(z, t)) \rho \delta\phi \quad \text{in} \quad \int_{\delta\mathcal{A}_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \cong -\frac{\epsilon}{\rho} \frac{\partial e_\rho(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \rho \delta\phi \delta z \Rightarrow$$



$$h_\varphi(z + \delta z, t) - h_\varphi(z, t) = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial e_\rho(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \delta z.$$

Diferenčni enačbi delimo z δz in izvedemo limito $\delta z \rightarrow 0$; dobimo diferencialni enačbi krajevno-časovnih funkcij:

$$\frac{\partial e_\rho(z, t)}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial h_\varphi(z, t)}{\partial t} \quad \text{in} \quad \frac{\partial h_\varphi(z, t)}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial e_\rho(z, t)}{\partial t}.$$

Nadaljevanje je identično. Če prvo odvajamo na t , drugo na z in ju združimo, dobimo valovno enačbo za polje h_φ ,

$$\frac{\partial^2 h_\varphi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_\varphi(z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Hitrost elektromagnetnega vala v izolantu je manjša, $c = c_0 / \sqrt{\varepsilon_r}$. Spremeni se tudi valovna upornost: $R_v = R_{v0} / \sqrt{\varepsilon_r}$. Pri $\varepsilon_r = 4$ sta hitrost polja in valovna upornost polovici tistih v vakuumu. Rešitvi za poljski jakosti sta:

$$H_\varphi(z, t) = \frac{g_\rightarrow(t - z/c)}{\rho} + \frac{g_\leftarrow(t + z/c)}{\rho} \quad \text{in} \quad E_\rho(z, t) = R_v \frac{g_\rightarrow(t - z/c)}{\rho} - R_v \frac{g_\leftarrow(t + z/c)}{\rho}.$$

Nadalujmo z naprej potujočim valom. Valovna funkcija naj je sinusna, s krožno frekvenco ω ,

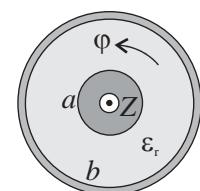
$$E_\rho(z, t) = \frac{R_v I_m}{2\pi\rho} \sin \omega(t - z/c) \quad \text{in} \quad H_\varphi(z, t) = \frac{I_m}{2\pi\rho} \sin \omega(t - z/c).$$

V izolantu je takšen val, če je na začetku (pri $z = 0$) med žili kabla priključen vir s tokom $i(t) = I_m \sin \omega t$, konec kabla pa zaključuje breme, katerega upornost R_b ustrezata karakteristični upornosti kabla, $R_k = (R_v / 2\pi) \ln(b/a)$; takrat rečemo, da je breme prilagojeno na kabel. Pri $\varepsilon_r = 4$ in $b/a = e$ je $R_k = 30 \Omega$. Argument sinusne funkcije je

$$\omega(t - z/c) = \omega t - (\omega/c)z = \omega t - \beta z \quad \Rightarrow \quad \beta = \omega/c = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda;$$

β in λ sta fazno število oziroma valovna dolžina sinusnega vala. Pri frekvenci $f = 1 \text{ GHz}$ sta v vakuumu $\lambda_0 = 30 \text{ cm}$ in $\beta_0 = 20,95 \text{ m}^{-1}$, v izolantu z $\varepsilon_r = 4$ pa $\lambda = 15 \text{ cm}$ in $\beta = 41,90 \text{ m}^{-1}$. Gostota moči in pretok elektromagnetne energije skozi izolant kabla s polmeroma žile a in oklopa b sta

$$S_z(z, t) = E_\rho(z, t) H_\varphi(z, t) = R_v \frac{I_m^2}{4\pi^2 \rho^2} \sin^2(\omega t - \beta z) \quad \text{in} \quad p_S(z, t) = \int_a^b S_z(z, t) 2\pi \rho d\rho = \frac{R_v \ln(b/a)}{2\pi} I_m^2 \sin^2(\omega t - \beta z).$$



Moč je pulzirajoča; njeno časovno popreče (kjerkoli med virom in bremenom) je

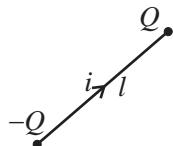
$$P_S = \overline{p_S(z, t)} = \frac{R_v \ln(b/a)}{4\pi} I_m^2 = \frac{1}{2} R_k I_m^2 = \frac{1}{2} R_b I_m^2.$$

Kadar je $R_b \neq R_k$, se v kablu k naprej potupočemu pridruži še nazaj potupoči oziroma odbiti val; končni rezultat je manjša prenašana moč.

TEM val vzdolž dvovoda. Tračnemu dvovodu in koaksialnemu kablu je skupno: 1) da se TEM val širi vzdolž strukture, 2) da sta nosilki vala transverzalni poljski jakosti in 3) da njuni porazdelitvi v prečni ravnini ustreza statičnim poljem. Pričakujemo lahko, da smo pretekle ugotovitve smiseln uporabiti tudi pri ostalih izvedbah dvovodov. Tisto, kar vsem primerom še manjka, je upoštevanje realnosti prevodnikov in izolantov, vendar o tem v nadaljevanju.



Krogelni TEM val opisuje daljne polje antene; relativno oddaljenost od nje določa razmerje r/λ . V bližini antene ($r \approx \lambda$) je elektromagnetno polje zelo razgibano, prevladujeta Coulombovo električno in Biot-Savartovo magnetno polje, daleč stran od nje ($r \gg \lambda$) pa prevlada krogelni TEM val, ki se radialno širi v prostor. Pri frekvenci mobilne telefonije 1,8 GHz ($\lambda \cong 16$ cm) se takšno polje vzpostavi že na oddaljenosti nekaj metrov od antene. Nosilki TEM vala sta tangentni jakosti polj; njuni porazdelitvi po površini krogle sta identični, sicer pa odvisni od vrste in oblike antene. Antena je lahko že kar izhodna odprtina koaksialnega kabla. Razširjeno skupino anten predstavljajo raznovrstne žične antene. Najpreprostejši sta dipolni anteni: par vzporednih žic, ki se na koncu razpre v dva repka (električni dipol), ali par vzporednih žic, ki se na koncu zaključi z zanko (magnetni dipol). Obstajajo tudi skupine anten, ki so vzbujane s faznimi zamiki. Zamiki omogočajo oblikovanje ali spreminjač snopa Poyntingove moči, ki se širi v prostor.



Zapis krogelnega TEM vala bomo navezali na tokovni element, ki je osnovni gradnik žične antenske strukture. V uvodu v magnetiko smo tokovni element prepoznali tudi kot električni dipol. Izberimo odsek žice dolžine l , v kateri je sinusni tok, $i(t) = I_m \sin \omega t$; na koncih žice sta naboja $\pm Q(t) = \pm (I_m / \omega) \cos \omega t$; dipol ima električni dipolni moment $p(t) = Q(t)l$.

Tokovni element imenujemo tudi Hertzov dipol. H. R. Hertz je sledil Maxwellovi hipotezi o elektromagnetnem valovanju; leta 1887 je izdelal oscilator, ki je omogočil tok v krakih dipolne antene. V bližnji zanki je instrument zaznal njen polje, s čimer je bil potrjen obstoj elektromagnetnih valov. Izpeljava polja Hertzovega dipola presega osnove elektrotehnike, zato bomo do poenostavljenega krogelnega TEM vala ubrali drugačno pot.

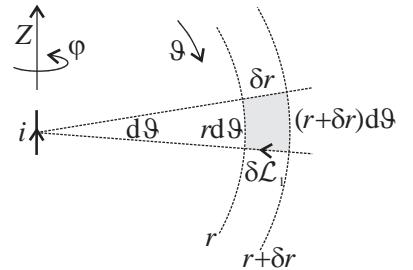
Tokovni element naj je v izhodišču usmerjen vzdolž osi Z . Mesto opazovanja postavimo v ravino XY . Pričakujemo, da bo magnetna jakost imela krožno smer okoli tokovnega elementa; za to polje je odgovorna komponenta $H_\varphi = H_\varphi(r, t)$; ta je tangentna na krogli polmera r . Glede električne jakosti poskusimo z drugo tangentno in k prvi pravokotno komponento $E_\vartheta = E_\vartheta(r, t)$. Izhodišči bosta spet dve sklopljeni Maxwellovi enačbi,

$$(I) \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (II) \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Tokovni element naj obdaja prazen prostor, $D_\vartheta = \epsilon_0 E_\vartheta = D_\vartheta(r, t)$ in $B_\varphi = \mu_0 H_\varphi = B_\varphi(r, t)$. Izberimo ploskvico $\delta\mathcal{A}_1$, kot izsek klina z lokoma dolžin $r\delta\vartheta$ in $(r + \delta r)\delta\vartheta$ ter krakoma dolžine δr , katerega rob je pentlja $\delta\mathcal{L}_1$. Oceni integracij v I. enačbi privedeta do diferenčne enačbe:

$$\oint_{\delta\mathcal{L}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \cong ((r + \delta r)E_\vartheta(r + \delta r, t) - rE_\vartheta(r, t))\delta\vartheta \quad \text{in} \quad \int_{\delta\mathcal{A}_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \cong \mu_0 \frac{\partial H_\varphi(r + \delta r/2, t)}{\partial t} (r + \delta r/2)\delta\vartheta\delta r \Rightarrow$$

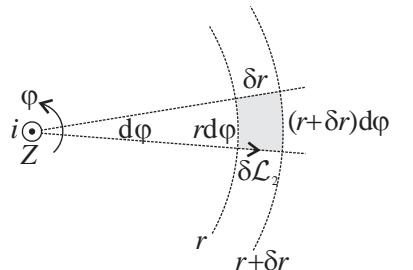
$$(r + \delta r)E_\vartheta(r + \delta r, t) - rE_\vartheta(r, t) = -\mu_0(r + \delta r/2) \frac{\partial H_\varphi(r + \delta r/2, t)}{\partial t} \delta r.$$



Podobno storimo s ploskvico $\delta\mathcal{A}_2$, kot izsekom klina z lokoma dolžin $r\delta\varphi$ in $(r + \delta r)\delta\varphi$ ter krakoma dolžine δr , katerega rob je pentlja $\delta\mathcal{L}_2$, v II. enačbi:

$$\oint_{\delta\mathcal{L}_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong ((r + \delta r)H_\varphi(r + \delta r, t) - rH_\varphi(r, t))\delta\varphi \quad \text{in} \quad \int_{\delta\mathcal{A}_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \cong -\epsilon_0 \frac{\partial E_\vartheta(r + \delta r/2, t)}{\partial t} (r + \delta r/2)\delta\varphi\delta r \Rightarrow$$

$$(r + \delta r)H_\varphi(r + \delta r, t) - rH_\varphi(r, t) = -\epsilon_0(r + \delta r/2) \frac{\partial E_\vartheta(r + \delta r/2, t)}{\partial t} \delta r.$$



Diferenčni enačbi delimo z δr in opravimo limito $\delta r \rightarrow 0$; dobimo diferencialni enačbi krajevno-časovnih polj:

$$\frac{\partial(rE_\vartheta(r,t))}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial(rH_\varphi(r,t))}{\partial t} \quad \text{in} \quad \frac{\partial(rH_\varphi(r,t))}{\partial r} = -\varepsilon_0 \frac{\partial(rE_\vartheta(r,t))}{\partial t}.$$

Če prvo odvajamo po t , drugo po r in ju združimo, dobimo valovno enačbo za funkcijo rH_φ :

$$\frac{\partial^2(rE_\vartheta(r,t))}{\partial t \partial r} = -\mu_0 \frac{\partial^2(rH_\varphi(r,t))}{\partial t^2} \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2(rH_\varphi(r,t))}{\partial r^2} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2(rE_\vartheta(r,t))}{\partial t \partial r} \Rightarrow \frac{\partial^2(rH_\varphi(r,t))}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2(rH_\varphi(r,t))}{\partial t^2} = 0.$$

Zapišimo d'Alambertovo rešitev valovne enačbe za funkcijo rH_φ :

$$rH_\varphi(r,t) = f_{\rightarrow}(t - r/c_0) + f_{\leftarrow}(t + r/c_0) \Rightarrow H_\varphi(r,t) = \frac{f_{\rightarrow}(t - r/c_0)}{r} + \frac{f_{\leftarrow}(t + r/c_0)}{r}.$$

Novost je usihanje valovanj z oddaljevanjem od tokovnega elementa. Rešitev za električno poljsko jakost je

$$E_\vartheta(r,t) = R_{v0} \frac{f_{\rightarrow}(t - r/c_0)}{r} - R_{v0} \frac{f_{\leftarrow}(t + r/c_0)}{r}.$$

Glede na to, da je tokovni element edini vir v prostoru, je smislen le oddaljujoči val. Pri sinusnem toku, $i(t) = I_m \sin \omega t$, v žici dolžine l se z ustrezeno izpeljavo elektromagnetnega polja tokovnega elementa za daljnje polje dobi sledeča izraza:

$$E_\vartheta(r,t) = R_{v0} \frac{\beta_0 I_m l \sin \vartheta}{4\pi} \cos(\omega t - \beta_0 r) \quad \text{in} \quad H_\varphi(r,t) = \frac{\beta_0 I_m l \sin \vartheta}{4\pi} \cos(\omega t - \beta_0 r)$$

Novost je kotna zakonitost $\sin \vartheta$, ki jo poznamo iz električnega polja dipola in magnetnega polja tokovnega elementa ter fazni premik za $\pi/2$, ki je značilen za daljnje polje. Blizu tokovnega elementa se zgornjim zapisom pridružijo še sumandi, ki upadajo z drugo in tretjo potenco oddaljenosti od vira. Gostota Poyntingove moči usiha s kvadratom oddaljenosti,

$$S_r(r,t) = E_\vartheta(r,t)H_\varphi(r,t) = R_{v0} \left(\frac{\beta_0 I_m l}{4\pi r} \right)^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \cos^2(\omega t - \beta_0 r),$$

zato je moč skozi vse koncentrične krogle površin $4\pi r^2$ enaka. Izrazimo to moč:

$$p_S(r,t) = \int_0^\pi S_r(r,t) 2\pi r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta = R_{v0} 2\pi r^2 \left(\frac{\beta_0 I_m l}{4\pi r} \right)^2 \cos^2(\omega t - \beta_0 r) \underbrace{\int_0^\pi \sin^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta}_{4/3} = R_{v0} \frac{(\beta_0 I_m l)^2}{6\pi} \cos^2(\omega t - \beta_0 r).$$

Časovno poprečje moči na katerikoli oddaljenosti r je

$$P_S = \overline{p_S(r, t)} = \frac{1}{2} \frac{R_{v0}(\beta_0 l)^2}{6\pi} I_m^2 = \frac{1}{2} R_s I_m^2.$$

Upornost R_s je t. i. sevalna upornost tokovnega elementa:

$$R_s = \frac{R_{v0}(\beta_0 l)^2}{6\pi} = \frac{2\pi}{3} R_{v0} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \cong 800 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2.$$

Pri dolžini $l = \lambda/2$ je $R_s = 20\pi^2 \Omega \cong 200 \Omega$. Tolikšna je ponavadi skupna dolžina krakov dipolne antene, vendar pa tok vzdolž njih ni konstanten, ampak se h koncem manjša približno po sinusni funkciji. Zaradi tega je polje ustrezeno manjše, manjša pa je tudi sevalna upornost, ki znaša takrat približno 73Ω . Pri amplitudi vstopnega toka v anteno 2 A je izsevana moč v prostor okoli 146 W. Mobilni telefon ima to moč okoli stokrat manjšo.

Poleg sevalne upornosti je pomemben podatek antene njen smerni diagram. V primeru tokovnega elementa je ta zajet v funkciji $\sin \vartheta$. Brž ko bi tokovni element odklonili od osi Z , bi prejšnja funkcija prešla v funkcijo $F(\vartheta, \varphi)$; toliko bolj je to očitno, če upoštevamo, da je antena v resnici velika množica dipolov.

Ravninski val v izgubni snovi. Ključni sta enačbi

$$(I) \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (II) \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \left(\mathbf{J}_{\text{pro.}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}.$$

Privzemimo linearne snov s specifično prevodnostjo γ , dielektričnostjo ϵ in permeabilnostjo μ . Zanimal nas bo ravninski val z jakostma $E_x = E_x(z, t)$ in $H_y = H_y(z, t)$ ter gostotami $J_x = \gamma E_x(z, t)$, $D_x = \epsilon E_x(z, t)$ in $B_y = \mu H_y(z, t)$. V II. enačbi je desna podintegralna funkcija razširjena z gostoto konduktivnega toka,

$$J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} = \gamma E_x(z, t) + \epsilon \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t}.$$



Pričakujemo, da bo v dobrem izolantu prevladoval premikalni, v dobrem prevodniku pa konduktivni tok. Če privzamemo majhno zankico kot v primeru neizgubne snovi, je diferenčna enačba sledeča:

$$\oint_{\delta\mathcal{L}_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong (H_y(z + \delta z, t) - H_y(z, t)) \delta y \quad \text{in} \quad \int_{\delta\mathcal{A}_1} \left(\mathbf{J}_{\text{pro.}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \cong \left(-\gamma E_x(z + \delta z/2, t) - \varepsilon \frac{\partial E_x(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \right) \delta y \delta z \Rightarrow$$

$$H_y(z + \delta z, t) - H_y(z, t) = \left(-\gamma E_x(z + \delta z/2, t) - \varepsilon \frac{\partial E_x(z + \delta z/2, t)}{\partial t} \right) \delta z.$$

Ko diferenčno enačbo delimo z δz in opravimo limito $\delta z \rightarrow 0$, dobimo diferencialno enačbo, ki se pridruži nespremenjeni diferencialni enačbi iz I. enačbe:

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} \quad \text{in} \quad \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} = -\gamma E_x(z, t) - \varepsilon \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t}.$$

Če prvo odvajamo na t , drugo na z in ju združimo, dobimo difuzijsko enačbo za polje H_y :

$$\frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial z^2} - \mu \gamma \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Zanimalo nas bo elektromagnetno valovanje s sinusno časovno odvisnostjo. Pričakovati je, da bo rešitev valovna funkcija, ki s koordinato z usiha, kajti elektromagnetna energija, ki se pomika skozi izgubno snov, se verjetno spotoma pretvarja v joulsko toploto. Primerna nastavka za naprej potujoči val sta

$$H_y(z, t) = C e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) \quad \text{ali} \quad H_y(z, t) = C e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z);$$

α je konstanta slabljenja in β je fazno število. Nadaljujmo z drugim nastavkom. Konstanti določimo tako, da nastavek $H_y(z, t) = C e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ vnesemo v zgornjo enačbo. Potrebujemo tri odvode:

$$\frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial z^2} = C(\alpha^2 - \beta^2) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) - 2C\alpha\beta e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z),$$

$$\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} = -C\omega e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial t^2} = -C\omega^2 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z).$$

Ko te zanesemo v diferencialno enačbo, dobimo enačbo

$$(\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2\mu\varepsilon) \cos(\omega t - \beta z) - (2\alpha\beta - \omega\mu\gamma) \sin(\omega t - \beta z) = 0,$$

ki je za vsak z in vsak t izpolnjena le, če sta koeficienta

$$\alpha^2 - \beta^2 - \omega^2\mu\varepsilon = 0 \quad \text{in} \quad 2\alpha\beta - \omega\mu\gamma = 0.$$

Njuna združitev da enačbi in rešitvi:

$$(\alpha^2)^2 - \omega^2\mu\varepsilon\alpha^2 - (\omega\mu\gamma/2)^2 = 0 \implies \alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left(\sqrt{1 + (\gamma/\omega\varepsilon)^2} - 1\right),$$

$$(\beta^2)^2 + \omega^2\mu\varepsilon\beta^2 - (\omega\mu\gamma/2)^2 = 0 \implies \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left(\sqrt{1 + (\gamma/\omega\varepsilon)^2} + 1\right).$$

Električno jakost določimo s pomočjo nedoločenega integrala,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} &\implies E_x(z, t) = -\mu \int \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} dz = \omega\mu C \int e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) dz \implies \\ E_x(z, t) &= \frac{\omega\mu C}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \operatorname{arcctg}(\beta/\alpha)). \end{aligned}$$

Ravninski val v izgubnem polprostoru. Naj je v polprostoru $z > 0$ izgubna snov. Bodи H_{y0} amplituda magnetne jakosti pri $z = 0$. Jakosti polj in gostoto toka v snovi določajo sledeče funkcije:

$$H_y(z, t) = H_{y0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad E_x(z, t) = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} H_{y0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \operatorname{arcctg}(\beta/\alpha)) \quad J_x(z, t) = \gamma E_x(z, t).$$

Polja so valovne funkcije, ki v globino prostora slabijo. Osredotočili se bomo na izgubni izolant in prevodnik.

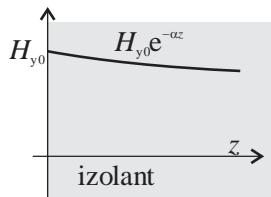
Izgubni izolant. Gostota totalnega toka v njem je

$$J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} H_{y0} e^{-\alpha z} (\gamma \cos(\omega t - \beta z + \operatorname{arcctg}(\beta/\alpha)) - \omega\varepsilon \sin(\omega t - \beta z + \operatorname{arcctg}(\beta/\alpha))).$$

Kvaliteto izolanta določa razmerje amplitud premikalne in konduktivne gostote toka, ozirom razmeje $\omega\varepsilon/\gamma$. Pri dobrem izolantu, $\gamma \ll \omega\varepsilon$, dobimo z uporabo Taylorjeve vrste za konstanti α in β sledeči aproksimaciji:



$$\alpha \cong \frac{\gamma}{2\sqrt{\epsilon}} \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2\right) \quad \text{in} \quad \beta \cong \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2\right).$$



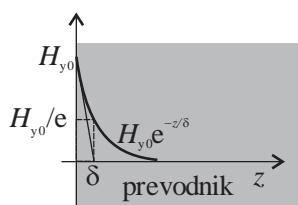
V zraku, $\mu_0, \epsilon_0, \gamma \approx 10^{-10}$ S/m, sta: $\alpha \approx 1,9 \cdot 10^{-8}$ m⁻¹ in $\beta \cong \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Pri običajnih razdaljah je slabljenje zanemarljivo, fazno število pa je identično β_0 . Specifična prevodnost γ je pokazatelj joulskih izgub v snovi. Poleg joulskih se v izolantu pojavijo še dielektrične izgube, ki so posledica nelinearnega polariziranja. V takem primeru govorimo o ekvivalentni prevodnosti $\gamma_{\text{ekv.}}$, ki numerično vrednoti celotne izgube. Kvaliteta $\omega\epsilon/\gamma_{\text{ekv.}}$ dobrih izolantov je od 10^2 do 10^5 .

Prevodnik. Mišljena je kovina, pri kateri je (praviloma) $\gamma \gg \omega\epsilon$. Konstanti α in β sta takrat praktično enaki:

$$\alpha \cong \beta \cong \sqrt{\omega\mu\gamma/2} = 1/\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{2/\omega\mu\gamma}.$$

Konstanta δ je t. i. vdorna globina ali globina penetracije elektromagnetnega vala,

$$H_y(z, t) = H_{y0}e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad E_x(z, t) = \sqrt{\omega\mu/\gamma} H_{y0}e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta + \pi/4) \quad J_x(z, t) = \gamma E_x(z, t).$$



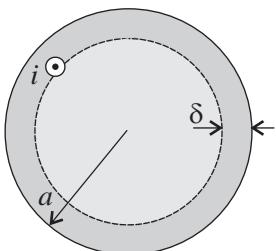
Do globine $z = \delta$ se vsa polja zmanjšajo s faktorjem $1/e \cong 0,36788$, do 2δ z $0,13534$, do 5δ pa s faktorjem $0,00674$, kar je manj kot 1%. Gostota Poyntingove moči na vstopu v steno prevodnika (pri $z = 0$) je

$$S_z(0, t) = E_x(0, t)H_y(0, t) = \sqrt{\omega\mu/\gamma} H_{y0}^2 \cos(\omega t + \pi/4) \cos \omega t.$$

Njeno časovno poprečje je

$$\overline{S_z(0, t)} = \sqrt{\omega\mu/\gamma} H_{y0}^2 \overline{\cos(\omega t + \pi/4) \cos \omega t} = \frac{1}{2} \sqrt{\omega\mu/2\gamma} H_{y0}^2 = \frac{1}{2} (1/\gamma\delta) H_{y0}^2 = \frac{1}{2} R_{\text{povr.}} H_{y0}^2.$$

Faktor $1/\gamma\delta$ imenujemo površinska upornost $R_{\text{povr.}}$. Dobljeni rezultati predstavljajo močno izraženim kožni pojav. Če krivinski radij prevodnega objekta močno presega vdorno globino, moremo te rezultate tam tudi smiselnou uporabiti.



Imejmo tokovodnik krožnega preseka polmera $a \gg \delta$. V vodniku je tok dejansko tik pod površino; pri površju je gostota največja, v globino do nekaj δ pa približno eksponentno usiha s funkcijo $e^{-(a-\rho)/\delta}$. Če je amplituda toka v vodniku I_m , je amplituda poljske jakosti na površini $I_m/2\pi a$. Poprečje Poyntingove moči P_S , ki vstopa v vodnik na dolžini l , je enako produktu poprečja gostote moči in površine vodnika,

$$P_S = \left(\frac{1}{2}R_{\text{povr.}}H_0^2\right)(2\pi al) = \frac{1}{2}(1/\gamma\delta)(I_m/2\pi a)^2(2\pi al) = \frac{1}{2}(l/2\pi a\gamma\delta)I_m^2 = \frac{1}{2}R_{\text{vod.}}I_m^2,$$

$R_{\text{vod.}}$ je upornost vodnika z močno izraženim kožnim pojavom. Rezultat bi komentirali: kot da bi bila za tok uporabljenata skorja debeline δ ob površini vodnika. Izraz $l/2\pi a\gamma\delta$ lahko uporabimo tudi za vodnik drugačnega preseka: mero $2\pi a$ razumemo takrat kot njegov obseg. Izgube v vodniku krožnega preseka, ki je lahko kar žila koaksialnega kabla, moremo dopolniti še z izgubami v plašču. Na notranji steni plašča, pri radiju b , je amplituda poljske jakosti $I_m/2\pi b$, Poyntingova moč, ki vstopa v žilo in plašč je

$$P_S = \frac{1}{2}(l(a+b)/2\pi ab\gamma\delta)I_m^2 = \frac{1}{2}R_{\text{žil.}}I_m^2.$$

Ozadje teh izgub je parazitna poljska jakost E_z , ki je na stenah žil usmerjena vzdolž tokov v njih in s komponento H_φ daje Poyntingovi moči, ki vstopata v žili. Pri analizi TEM vala smo jakost E_z prezrli. Če izgubno moč primerjamo z močjo, ki se širi skozi dielektrik kabla, dobimo razmerje upornosti žil in karakteristične upornosti, $R_{\text{žil.}}/R_k$. Idealizacija kabla je očitno pogojena z razmerjem $R_{\text{žil.}}/R_k \ll 1$. Pri bakru, $\gamma = 56 \text{ MS/m}$, in $f = 1,8 \text{ GHz}$ je vdorna globina $\delta = \sqrt{2/\omega\mu_0\gamma} = 1,59 \mu\text{m}$. Pri $b = 3a = 3 \text{ mm}$ je $R_{\text{žil.}}/l = 2,4 \Omega/\text{m}$. Pod površinski tok v žilah seže do globine $5\delta = 8 \mu\text{m}$. Pod površino stisnjeni tok že lahko razumemo kot ploskovni tok. Če uporabimo mejni pogoj za magnetno jakost, dobimo gostoto ploskovnega toka: K_x (od 0 do $8 \mu\text{m}$, t) = $H_y(5\delta, t) - H_y(0, t) \cong -H_y(0, t)$.



Drug primer je ravna tuljava dolžine l z N ovoji, ki je vzbujana s sinusnim tokom amplitudo I_m . Če vanjo vstavimo jeklen valj, se bo ta segreval. Amplituda poljske jakosti na površini valja je $H_0 = NI_m/l$, vstopna moč v valj polmer $a \gg \delta$ pa je

$$P_S = \left(\frac{1}{2}R_{\text{povr.}}H_0^2\right)(2\pi al) = \frac{1}{2}(1/\gamma\delta)(NI_m/l)^22\pi al = \frac{1}{2}(2\pi aN^2/l\gamma\delta)I_m^2.$$

Naj so: $\gamma = 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_r = 1000$, $f = 5 \text{ kHz}$, $a = 1 \text{ cm}$, $l = 10 \text{ cm}$, $N = 40$. Vdorna globina v jeklu je $\sqrt{2/\omega\mu\gamma} = 0,14 \text{ mm}$. Ekvivalentna upornost je $2\pi aN^2/l\gamma\delta \cong 0,72 \Omega$. Pri amplitudi toka 20 A se v valju sprošča toplota z močjo 287 W. Ravno tuljavo se v industriji uporablja za taljenje in mešanje legur. Tuljava je obzidana s šamotom v lonec (indukcijska lončna peč). Indukcijsko segrevanje se pogosto uporablja tudi v postopkih površinskega kaljenja osi, zobnikov,

Kompleksna valovna funkcija. Valovni del komponent elektromagnetnega polja zapisujemo s funkcijama $\sin(\omega t - \beta z)$ ali $\cos(\omega t - \beta z)$. Če upoštevamo Eulerjev obrazec, $e^{is} = \cos s + i \sin s$, kjer je i imaginarna enota, $i^2 = -1$, moremo npr. funkcijo $e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ zapisati tudi takole,

$$e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) = e^{-\alpha z} \operatorname{Re}[e^{i(\omega t - \beta z)}] = \operatorname{Re}[e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}] = \operatorname{Re}[e^{i(\omega t - (\beta - i\alpha)z)}] = \operatorname{Re}[e^{i(\omega t - kz)}],$$

kjer je $k = \beta - i\alpha$ t. i. valovno število. Valovno število (k) je kompleksno: sestavljen je iz faznega števila (β) in konstante slabljenja (α). Naprej in nazaj potupoča valova imata obliki

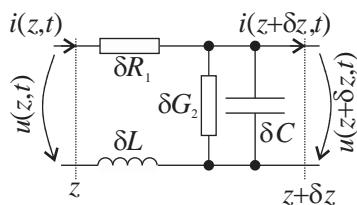
$$e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{in} \quad e^{-i(\omega t - kz)}.$$

Naprej potupoči ravinski val v izgubni snovi bi na kompleksni način zapisali takole:

$$H_y(z, t) = H_{y0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \implies H_y(z, t) = \operatorname{Re}[H_{y0} e^{i(\omega t - kz)}] = \operatorname{Re}[H_{y0} e^{-ikz} e^{i\omega t}].$$

Kompleksni zapis dve krajevni funkciji združi v eno, $e^{-i(kz)}$, krajevno-časovno funkcijo $H_{y0} e^{i(\omega t - kz)}$ pa predstavi kot produkt krajevne ($H_{y0} e^{-ikz}$) in časovne funkcije ($e^{i\omega t}$). Pri analizi elektromagnetnih polj imajo kompleksne krajevne funkcije osrednje mesto. Funkcija $H_{y0} e^{-ikz}$ je 'kompleksna amplituda' funkcije $H_y(z, t)$.

Telegrafska enačba. Avtor enačbe je Oliver Heaviside. Enačba opisuje napetostno-tokovne razmere v kablih oziroma linijah. O enačbah linijske smo nekaj povedali že v enosmernih razmerah; tokrat nas čakata nadmestno vezje in opis linije v dinamičnih razmerah. Linijo smo takrat predstavili kot verigo dvovahodnih vezij. Vsako od njih je povzemalo vzdolžno upornost, ter prečni prevodnost in kapacitivnost kratkega odseka linije. V luči elektromagnetne indukcije sodi v to vezje še vzdolžna induktivnost odseka. V enosmernih razmerah sta bili pomembni vzdolžna upornost in prečna prevodnost, v dinamičnih razmerah pa se njima pridružita še vzdolžna induktivnost in prečna kapacitivnost. Vzdolžni tok in prečna napetost sta krajevno-časovni funkciji. Del prečnega toka prevzame še kondenzator, del vzdolžnega padca napetosti pa še tuljava. Če so r , ℓ , c in g gostote porazdeljenih parametrov, potem so $\delta R_1 = r_1 \delta z$, $\delta L = \ell \delta z$, $\delta C = c \delta z$ in $\delta G_2 = g_2 \delta z$ upornost, induktivnost, kapacitivnost in prevodnost elementov dvovahodne celice, ki predstavlja odsek linije dolžine δz . Napetost in tok na vhodu sta $u(z, t)$ in $i(z, t)$, na izhodu pa $u(z + \delta z, t)$ in $i(z + \delta z, t)$. Zančna in spojiščna enačba sta:



$$\begin{aligned} -u(z, t) + r_1 \delta z i(z, t) + \ell \delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + u(z + \delta z, t) &= 0, \\ -i(z, t) + g_2 \delta z u(z + \delta z, t) + c \delta z \frac{\partial u(z + \delta z, t)}{\partial t} + i(z + \delta z, t) &= 0. \end{aligned}$$

Enačbi delimo z δz , opravimo limiti z $\delta z \rightarrow 0$ in dobimo

$$(I) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} + r_1 i(z, t) + \ell \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} = 0 \quad (II) \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} + g_2 u(z, t) + c \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = 0.$$

Prvo odvajamo na t in drugo na z :

$$(I^*) \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z \partial t} + r_1 \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + \ell \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (II^*) \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} + g_2 \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} + c \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t \partial z} = 0.$$

Če množimo (I^*) z c in (I) z g_2 ter vnesemo v (II^*) , dobimo telegrafsko enačbo za tok,

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - \ell c \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} - (r_1 c + g_2 \ell) \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - r_1 g_2 i(z, t) = 0,$$

z identičnim postopkom pa identično enačbo tudi za napetost. Enačba ima podobno zgradbo kot valovna enačba ravnega vala v izgubni snovi. Od nje odstopa le zadnji člen, ki ga tam ni zaradi nesimetrije v Maxwellovih enačbah, sicer pa prvi in zadnji člen poznamo že iz enosmernih razmer, $\partial/\partial t \equiv 0$:

$$\frac{d^2 i(z)}{dz^2} - r_1 g_2 i(z) = 0.$$

Če je linija kratka, smemo vzdolžno upornost r_1 in prečno prevodnost g_2 zanemariti; telegrafska enačba in rešitev sta:

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - \ell c \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad i(z, t) = f_{\rightarrow}(t - z/v) + f_{\leftarrow}(t + z/v),$$

pri čemer je $v = 1/\sqrt{\ell/c}$ hitrost vala vzdolž linije. Rešitev za napetost sledi iz enačbe $\partial i/\partial z + c \partial u/\partial t = 0$ na podoben način kot pri eni od Maxwellovih enačb:

$$u(z, t) = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial u}{\partial z} dt = \frac{1}{vc} f_{\rightarrow}(t - z/c) - \frac{1}{vc} f_{\leftarrow}(t + z/c) = R_k f_{\rightarrow}(t - z/v) - R_k f_{\leftarrow}(t + z/v);$$

$1/vc = \sqrt{\ell/c} = R_k$ je karakteristična upornost linije.

Imejmo koaksialni kabel s polmerom žil a in notranjim polmerom plašča b , v katerem je izolant z dielektričnostjo $\epsilon_r \epsilon_0$ in s permeabilnostjo μ_0 . Pri visokih frekvencah (izraženem kožnem pojavu) je tok v žili zbran pri polmeru a , v plašču pa pri polmeru b ; glavnina električnega in magnetnega polja je v izolantu. Parametri kabla so takrat sledeči:

$$\ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a) \quad \text{in} \quad c = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\ln(b/a)} \quad \Rightarrow \quad v = 1/\sqrt{\ell c} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_r\epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{in} \quad R_k = \sqrt{\ell/c} = \frac{R_v}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Tako hitrost kot karakteristično upornost smo omenili že pri TEM valu, kaj več o analizi valovnih pojavov na linijah pa bi preseglo okvir osnov elektrotehnike.

Sklep. Razdelek razkriva vlogo izolantov in prevodnikov v elektromagnetičnih strukturah. Energija potuje skozi izolante z mehanizmom elektromagnetičnega valovanja, prevodniki pa energijske tokove usmirjajo. Antene in trase linij usmerjajo energijske tokove, prevodni objekti (npr. elektrode kondenzatorjev in navitja tuljav) pa oblikujejo prostore, v katerih se začasno skladiščita električna ali magnetna energija. 'Cena' posredniške vloge prevodnikov so energijske izgube v njih.



§15. Električna vezja v dinamičnih razmerah

Besedno zvezo 'električno vezje' uporabljamo tako za fizično vezje kot za njegov model, ki je vezje strnjениh elementov. Pričakujemo, da model povzema lastnosti fizičnih elementov; da upošteva parazitne pojave, ki kvarijo idealne podobe elementov. To smo izpostavili že pri kondenzatorju, uporu in tuljavi, kot osnovnih gradnikih električnih vezij. Prevodniki, izolanti, dielektriki in magnetiki niso idealni. Kondenzatorja ne določa zgolj kapacitivnost, žični upor ni le upor, ima tudi induktivnost, navite imata upornost, včasih je potrebno upoštevati medovojne kapacitivnosti, jedra tuljav so nelinearna, vir ima notranjo upornost, lahko tudi induktivnost in kapacitivnost. Pri izbiri modela ima važno vlogo časovna dinamika, ki jo odslikuje frekvenčni spekter tokov in napetosti. V luči elektromagnetnega valovanja je pomembna še valovna dolžina. Valovna funkcija sporoča, da je tok v splošnem krajevno-časovna funkcija, kar je v nasprotju s konceptom vezij strnjениh elementov, v katerih so vejni toki le časovne funkcije. Valovna dolžina je očitno ključni kriterij, ki modelu postavlja mejo njegove uporabljivosti.

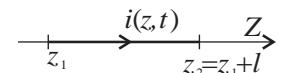
Tok veje in valovna dolžina. Dolžina neke veje v fizičnem vezju naj je l , tok v njej pa sinusen. Porazdelitev toka vzdolž veje opiše valovna funkcija $i(z, t) = I_m \sin(\omega t \pm \beta z)$. Toka na začetku (pri z_1) in na koncu veje (pri $z_1 + l$) ob času t sta:

$$i(z_1, t) = I_m \sin(\omega t \pm \beta z_1) \quad \text{in} \quad i(z_1 + l, t) = I_m \sin(\omega t \pm \beta z_1 \pm \beta l).$$

Razlika med vstopnim in izstopnim tokom veje je pri $\beta l \ll 1$ naslednja:

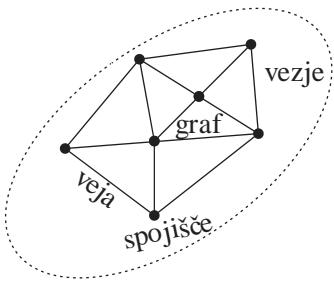
$$i(z_1 + l, t) - i(z_1, t) \cong \frac{\partial i}{\partial z} l = (\pm \beta l) I_m \cos(\omega t \pm \beta z_1) = (\pm 2\pi l / \lambda) I_m \cos(\omega t \pm \beta z_1).$$

Da bi govorili o toku veje kot dominantno časovni funkciji, da npr. dopuščamo zgornjo razliko v iznosu 1% amplitude I_m , mora biti $l < 0,0016 \lambda$. Takšni veji rečemo, da je električno kratka. Pri frekvenci $f = 1 \text{ GHz}$ ($\lambda = 30 \text{ cm}$) je $l < 0,48 \text{ mm}$. V nasprotnem je modelnemu vezju pot priprta. Preostane le še reševanje elektromagnetna polja v strukturi, kar je mnogo težja naloga, kot pa je reševanje spojniščnih in zančnih enačb v vezju strnjениh elementov. Izjema so linije, ki povezujejo

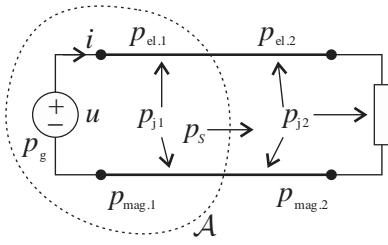


dele širšega vezja. Tok in napetost na liniji sta sicer krajevno-časovni funkciji, vendar se da linijo računsko prikazati kot dvovahodno vezje, ki ga opisujeta relaciji med tokoma in napetostma na konceh linije.

Kirchhoffova zakona izhajata iz kontinuitetne enačne in zakona indukcije: $i_{\mathcal{A}} = -Q'_{\text{not.}}$ in $u_{\mathcal{L}} = -\phi'_{\mathcal{L}}$. Sklenjeni ploskev \mathcal{A} in krivulja \mathcal{L} imata geometrijske atributte v fizičnem vezju, v modelnem pač ne. Od modelnega vezja pričakujemo, da so vanj, prek magnetnih in električnih povezav, pretoki zank in naboji spojišč fizičnega vezja že vključeni. Zanke in spojišča v modelnem vezju torej niso naslovniki pretokov in nabojev, ker to ne morejo biti, zato ostajata v njem v veljavi oba Kirchhoffova zakona v že znani oblikih: $\sum_{k=1}^n (\pm) i_k = 0$ in $\sum_{j=1}^m (\pm) u_j = 0$.



Moči v električnem vezju. V mislih imejmo vezje z električno kratkimi vejami; toki v njih so praktično časovne funkcije. Takšno tokovno strukturo moremo predstaviti kot družino parov tokovnih elementov; parov v smislu enakih jakosti in nasprotnih smeri. Daljnje polje ($r \gg \lambda$) tokovnega elementa upada z zakonitostjo $1/r$, polje para elementov pa (zaradi nasprotnih si tokov) z zakonitostjo $1/r^2$. Poyntingov vektor upada z zakonitostjo $1/r^4$, Poyntingova moč skozi kroglo s površino $4\pi r^2$ pa z naraščajočim radijem limitira k nič. Nauk je sledeč: vezje z električno kratkimi vejami ne seva. Ali še drugače: moč virov je enaka vsoti jouliske moči, moči elektrenja in moči magnetenja prostora: $p_g = p_j + p_{\text{elek.}} + p_{\text{mag.}}$. Ta enačba pomeni bilanco moči oziroma Tellegenov stavek celotnega električnega vezja.



Še vedno pa velja splošen Poyntingov stavek. Imejmo preprosto vezje: izmenični vir, dvovod in breme. Vir in del dvovoda sta znotraj sklenjene ploskve \mathcal{A} , drugi del dvovoda in breme pa izven te ploskve. Indeks 1 in 2 se nanaša na notranjost oziroma zunanjost:

$$p_g = \underbrace{p_{j1} + p_{j2}}_{p_j} + \underbrace{p_{\text{elek.}1} + p_{\text{elek.}2}}_{p_{\text{elek.}}} + \underbrace{p_{\text{mag.}1} + p_{\text{mag.}2}}_{p_{\text{mag.}}} \quad \text{in} \quad p_g = p_{j1} + p_{\text{elek.}1} + p_{\text{mag.}1} + p_s \Rightarrow p_s = p_{j2} + p_{\text{elek.}2} + p_{\text{mag.}2}.$$

Prva enačba govori o bilanci moči v celotnem prostoru, druga pa o notranji bilanci: moč vira je enaka vsoti jouliske moči v notranjem delu dvovoda, moči elektrenja in moči magnetenja notranjega prostora ter Poyntingove moči p_s , ki prehaja v

zunanjost. Zadnja bilanca oziroma razlika obeh sporoča, da je Poyntingova moč, ki vstopa v zunanji prostor, enaka vsoti joulske moči v bremenu in v zunanjem delu dvovoda ter moči elektrenja in magnetenja zunanjega prostora.

Analiza električnih vezij. V nadaljevanju se bomo ukvarjali le še z električnimi vezji strnjениh elementov. Problematika je zelo široka in za elektrotehniko izredno pomembna. O vezjih se je razvila bogata sistemski teorija, ki je pomembna za analizo in kasnejšo sintezo električnih vezij. Omenjena znanja spremljajo inženirsko elektrotehniko praktično na vsakem koraku. Znotraj osnov elektrotehnike se bomo omejili na analizo zelo preprostih linearnih električnih vezij, vendar bomo že ob njih spoznali paleto problematik. Zelo hitro bomo spoznali, da obseg opravil v bolj razvejanih vezjih strmo narašča. Obsežnejšega vezja se brez računalniške podpore sploh ne moremo lotiti. Novo dimenzijo vnaša nelinarnost. Pri njih se peš postopki že na začetku ustavijo; za resno analizo so potrebna ustrezna numerična orodja. Kljub težavam, na katere prejkoslej naletimo, imamo pri analizi vezij dve ključni opori, na kateri se moremo zanesti: to sta dosledna uporaba obeh Kirchhoffovih zakonov in jasen fizikalni uvid v naravo elementov električnih vezij. Da to osvojimo, so preprosta linearna vezja kot naročena. V naslednjem razdelku bomo pozornost usmerili v prehodna stanja v vezjih, ki jih sprožijo preklopni manevri, v razdelkih do konca pa se bomo ukvarjali z analizo izmeničnih električnih vezij. V okviru tega bomo spoznali simbolični račun, ki reševanje sinusno (harmonično) vzbujanih vezij prestavi v (kompleksno) Gaussovo ravnino.



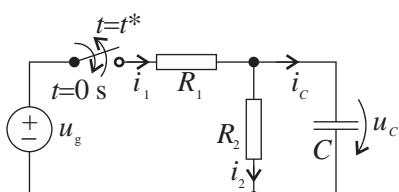
§16. Prehodni pojavi v električnih vezjih



Uvod. V električnih vezjih prihaja do prehodnih pojavov (tranzientov) ob stikalnih manipulacijah (vklop, preklop, izklop) ali ob različnih impulznih vzbujanjih. Tukaj obravnavana vezja bodo oblikovali napetostni in tokovni viri, upori, tuljave, kondenzatorji in sklopi tuljav; rečemo jim vezja RLC. Za obnašanje teh vezij so pomembne lastnosti njihovih elementov. Upor je pasiven, pasivna sta tudi tuljava in kondenzator, vendar sta reaktivna; ko energijo sprejemata, sta pasivna, ko jo oddajata, sta aktivna. Energija ($\frac{1}{2}Cu^2$ ali $\frac{1}{2}Li^2$) ne pride ali odide kar od enkrat, ampak prihaja ali odhaja zvezno. Očitno je, da morajo biti zvezne vse napetosti kondenzatorjev in vsi toki tuljav. To sporočata tudi zvezi $i = Cu'$ in $u = Li'$; če naj so toki in napetosti v vezju omejeni, morajo biti napetosti kondenzatorjev in toki tuljav in zvezni. Če se ob času $t = t_1$ zgodi stikalni maneuver, mora veljati sledeče:

$$u_{C_j}(t_1 + 0) = u_{C_j}(t_1 - 0) \quad \text{in} \quad i_{L_k}(t_1 + 0) = i_{L_k}(t_1 - 0),$$

da so napetosti kondenzatorjev in toki tuljav tik po manevru (ob $t_1 + 0$) enaki tistim pred manevrom (ob $t_1 - 0$). Tem izhodiščem bomo v nadaljevanju rekli začetni pogoji. Drug pogoj pa je, da morajo toki in napetosti v vezju vsak trenutek zadoščati obema Kirchhoffovima zakonom. Za potrebe osnov elektrotehnike bodo značilni primeri najboljša izkušnja.



PRVI PRIMER. Vir enosmerne napetostni, dva upora in kondenzator ter stikalo, ki omogoča vklop/izklop vira. Naj je $t = 0$ s čas sklenitve stikala. Pred tem je bil kondenzator prazen, $u_C(-0) = 0$. Zanimajo nas razmere v vezju po sklenitvi stikala. Za čase $t > 0$ zapišemo Kirchhoffove enačbe in upoštevamo, da je $i_C = Cu'_C$:

$$-i_1 + Cu'_C + i_2 = 0 \quad -u_g + R_1 i_1 + u_C = 0 \quad -u_C + R_2 i_2 = 0.$$

Sistem enačb se naslavlja na tri vejske količine. Katera nas najprej zanima, je stvar izbire. Odločimo se za napetost u_C . Če izrazimo i_1 iz druge in i_2 iz tretje ter ju vnesimo v prvo, dobimo enačbo za napetost na kondenzatorju:

$$-\frac{u_g - u_C}{R_1} + Cu'_C + \frac{u_C}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 R_2 Cu'_C + (R_1 + R_2) u_C = R_2 u_g.$$



Diferencialna enačba je prvega reda (najvišji odvod je prvi), je linearja (koeficienta pred funkcijo in njenim odvodom sta konstanti) in je nehomogena (desna stran je različna od nič). Splošna rešitev ima dva dela: prvi del je rešitev homogene enačbe, $R_1 R_2 C u'_{Ch} + (R_1 + R_2) u_{Ch} = 0$, drugi del pa je partikularna rešitev (u_{Cp}), ki ustrezna desnemu delu diferencialne enačbe. Rešitev za u_{Ch} iščemo z nastavkom $u_{Ch}(t) = Ae^{\lambda t}$, ki je razumljiv: le odvod eksponentne funkcije je sorazmeren njej sami, $u'_{Ch}(t) = \lambda Ae^{\lambda t}$. Vstavimo oboje v prejšnjo enačbo:

$$(R_1 R_2 C \lambda + (R_1 + R_2)) A e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 R_2 C \lambda + (R_1 + R_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = -\frac{1}{\tau}.$$

Konstanta λ je ničla karakterističnega polinoma $R_1 R_2 C \lambda + (R_1 + R_2) = 0$; $\tau = -1/\lambda$ je časovna konstanta prehodnega pojava. Partikularno rešitev iščemo glede na desno stran diferencialne enačbe ($R_2 u_g$). Ker je ta konstanta, bo takšna tudi rešitev za u_{Cp} : $u_{Cp} = B$, $u'_{Cp} = 0$. Ko vnesemo to v enačbo $R_1 R_2 C u'_C + (R_1 + R_2) u_C = R_2 u_g$, dobimo konstanto B , takoj za tem pa še splošno rešitev:

$$0 + (R_1 + R_2)B = R_2 u_g \quad \Rightarrow \quad B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_g \quad \Rightarrow \quad u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp} = A e^{\lambda t} + B.$$

Konstanta A določimo, sklicujoč se na začetni pogoj, $u_C(+0) = u_C(-0) = 0$. Pišimo: $u_C(+0) = A + B = 0$, sledi $A = -B$.

Osvežimo ključna mesta: 1) Kirchhoffova zakona vodita k diferencialni enačbi, 2) iz stanja kondenzatorja pred vklopom izhaja začetni pogoj in 3) rešitev,

$$1) \quad R_1 R_2 C u'_C + (R_1 + R_2) u_C = R_2 u_g \quad 2) \quad u_C(+0) = u_C(-0) = 0 \quad 3) \quad u_C(t) = \frac{R_2 u_g}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Prvi dve zadevi sta elektrotehniški, tretja pa matematična. Iz vstopnih enačb sledijo še druge količine v vezju. Določimo morda toke i_C , i_1 in i_2 :

$$i_C(t) = C u'_C(t) = \frac{u_g}{R_1} e^{-t/\tau} \quad i_1(t) = \frac{u_g - u_C(t)}{R_1} = \frac{u_g}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-t/\tau} \right) \quad i_2(t) = \frac{u_C(t)}{R_2} = \frac{u_g}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Časovna konstanta in zakonitost eksponentne funkcije določata dinamiko prehodnega pojava. Po času $t > 5\tau$ je napetost kondenzatorja že ustaljena na vrednosti $R_2 u_g / (R_1 + R_2)$, kar ustrezna stanju napetostnega delinika, $R_2 / (R_1 + R_2)$; to bi

utegnili sklepali že pred začetkom reševanja naloge. Poglejmo primer, ko gre $R_2 \rightarrow \infty$; ostanek vezja predstavlja polnilno vezje kondenzatorja. Tok in napetost sta:

$$i_C(t) = \frac{u_g}{R_1} e^{-t/R_1 C} \quad \text{in} \quad u_C(t) = u_g(1 - e^{-t/R_1 C}).$$

Vrnimo se k izhodiščnemu vezju. Naj je t^* čas razklenitve stikala; do tega časa doseže kondenzator napetost

$$u_C(t^*) = \frac{R_2 u_g}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t^*/\tau}) = u_C^*.$$

V nadaljevanju se kondenzator prazni skozi desni upor. Obdržimo iste oznake in zapišimo enačbi:

$$i_C + i_2 = 0 \quad -u_C + R_2 i_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Cu'_C + \frac{u_C}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 Cu'_C + u_C = 0.$$

Diferencialna enačba je tokrat homogena; nastavek je $u_C(t) = D e^{pt}$, začetni pogoj pa je $u_C(t^* + 0) = u_C^*$:

$$(R_2 C p + 1) D e^{pt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{1}{R_2 C} \quad \Rightarrow \quad u_C(t^* + 0) = D e^{pt^*} = u_C^* \quad \Rightarrow \quad D = u_C^* e^{-pt^*} \quad \Rightarrow \quad u_C(t) = u_C^* e^{-(t-t^*)/R_2 C}.$$

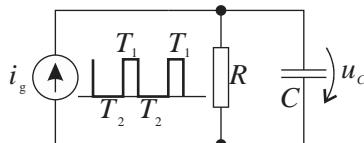
Kondenzator se po razklenitvi stikala prazni z dinamiko, ki jo določa časovna konstanta $R_2 C$. Po času $t - t^* = 5(R_2 C)$ je napetost kondenzatorja že manjša od odstotka napetosti u_C^* . Zanimivo postane, če pretikalo izmenično preklapljammo iz enega v drug položaj; kondenzator se izmenja polni in prazni. Tekom ritmičnega preklapljanja preide napetost u_C v periodično funkcijo, ki 'niha' med zgornjo in spodnjo mejno vrednostjo.

DRUGI PRIMER. Izmenično preklapljanje lahko nadomesti impulzni generator. Naj je to tokovni vir z jakostjo impulza i_0 , v trajanju T_1 , in pavze, v trajanju T_2 . Po nekaj impulzih preidejo napetost, toka, moči in električna energija v periodičnost. Poiščimo vrednosti zgornje ($u_C^{\text{zg.}}$) in spodne ($u_C^{\text{sp.}}$) napetosti na kondenzatorju! V času impulza, od t_1 do $t_1 + T_1$, je:

$$Cu'_C + u_C/R = i_0 \quad u_C(t_1 + 0) = u_C^{\text{sp.}}$$

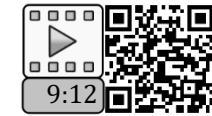
Glede na izkušnjo iz prejšnjega primera lahko nastavek za splošno rešitev že kar zapišemo,

$$u_C(t) = u_{\text{Ch}}(t) + u_{\text{Cp}} = E e^{qt} + F \quad \Rightarrow \quad u'_C(t) = q E e^{qt},$$



določimo konstanti q in F ,

$$Cu'_C + \frac{u_C}{R} = CqEe^{qt} + \frac{1}{R}(Ee^{qt} + F) = i_0 \Rightarrow \underbrace{\left(Cq + \frac{1}{R}\right)}_0 Ee^{qt} + \underbrace{\frac{F}{R}}_0 - i_0 = 0 \Rightarrow q = -\frac{1}{RC} \quad F = Ri_0,$$



zatem pa še konstanto E , kar da rešitev:

$$u_C(t_1 + 0) = Ee^{-t_1/RC} + Ri_0 = u_C^{\text{sp.}} \Rightarrow E = (u_C^{\text{sp.}} - Ri_0)e^{t_1/RC} \Rightarrow u_C(t) = (u_C^{\text{sp.}} - Ri_0)e^{-(t-t_1)/RC} + Ri_0.$$

Ob času $t_1 + T_1$, ko je konec impulza, je $u_C(t_1 + T_1) = u_C^{\text{zg.}}$, kar da zvezo

$$\text{A: } u_C^{\text{zg.}} = (u_C^{\text{sp.}} - Ri_0)e^{-T_1/RC} + Ri_0.$$

V času pavze, od $t_1 + T_1$ do $t_1 + T_1 + T_2$, je

$$Cu'_C + u_C/R = 0 \quad u_C(t_1 + T_1 + 0) = u_C^{\text{zg.}}$$

Nastavek za rešitev je,

$$u_C(t) = Ge^{rt} \Rightarrow u'_C(t) = rGe^{rt},$$

določimo konstanti r in G ,

$$Cu'_C + \frac{u_C}{R} = \left(rC + \frac{1}{R}\right)Ge^{rt} = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{RC} \Rightarrow u_C(t_1 + T_1 + 0) = Ge^{-(t_1+T_1)/RC} = u_C^{\text{zg.}} \Rightarrow G = u_C^{\text{zg.}} e^{(t_1+T_1)/RC},$$

ki dasta rešitev

$$u_C(t) = u_C^{\text{zg.}} e^{-(t-t_1-T_1)/RC}.$$

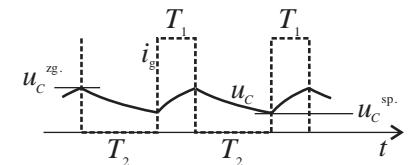
Ob času $t_1 + T_1 + T_2$, ko je konec pavze, je $u_C(t_1 + T_1 + T_2) = u_C^{\text{sp.}}$, kar da zvezo

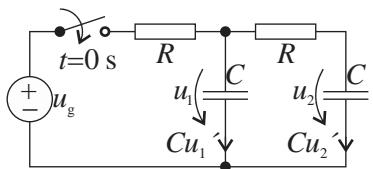
$$\text{B: } u_C^{\text{sp.}} = u_C^{\text{zg.}} e^{-T_2/RC} \quad \text{od prej pa že} \quad \text{A: } u_C^{\text{zg.}} = (u_C^{\text{sp.}} - Ri_0)e^{-T_1/RC} + Ri_0.$$

Iz obeh relacij sledita spodnja in zgornja vrednost nihajoče napetosti:

$$\frac{u_C^{\text{sp.}}}{Ri_0} = \frac{1 - e^{-T_1/RC}}{1 - e^{-(T_1+T_2)/RC}} e^{-T_2/RC} \quad \frac{u_C^{\text{zg.}}}{Ri_0} = \frac{1 - e^{-T_1/RC}}{1 - e^{-(T_1+T_2)/RC}},$$

pri tem je Ri_0 napetost, kateri bi se napetost $u_C(t)$ približala pri $T_2 \ll T_1$.





TRETJI PRIMER. Priključitev dvojnega člena RC na enosmerni napetostni vir. Naj sta kondenzatorja pred sklenitvijo stikala prazna: $u_1(-0) = u_2(-0) = 0$. Za kasnejše čase ($t > 0$) zapišemo zančni enačbi:

$$-u_g + (Cu'_1 + Cu'_2)R + u_1 = 0 \quad -u_1 + RCu'_2 + u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -u'_1 + RCu''_2 + u'_2 = 0.$$

Iz druge enačbe in njenega odvoda izrazimo u_1 in u'_1 , ju vstavimo v prvo in dobimo diferencialno enačbo za u_2 :

$$(RC)^2 u''_2 + 3RCu'_2 + u_2 = u_g.$$

Enačba je nehomogena in drugega reda. Parikularna rešitev je spet konstanta, saj je vir enosmeren. Nastavek za splošno rešitev je $u_2(t) = Ae^{\lambda t} + B$. Izrazimo prvi in drugi odvod ter ju vstavimo v zgornjo diferencialno enačbo:

$$\underbrace{((RC)^2\lambda^2 + 3RC\lambda + 1)}_0 Ae^{\lambda t} + \underbrace{B - u_g}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad (RC)^2\lambda^2 + 3RC\lambda + 1 = 0 \quad \text{in} \quad B = u_g.$$

Karakteristični polinom druge stopnje ima dva negativna korena, $\lambda_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{5})/2RC$. Splošno rešitev oblikujeta dve eksponentni funkciji in partikularni del,

$$u_2(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + u_g.$$

Iz $u_1(+0) = u_2(+0) = 0$ in druge zančne enačbe sledi,

$$\underbrace{-u_1(+0)}_0 + \underbrace{RCu'_2(+0)}_0 + \underbrace{u_2(+0)}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u'_2(+0) = 0.$$

Pri določitvi konstant A_1 in A_2 se sklicujemo na pogoja $u_2(+0)$ in $u'_2(+0) = 0$:

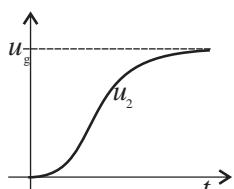
$$u_2(+0) = A_1 + A_2 + u_g = 0 \quad u'_2(+0) = \lambda_1 A_1 + A_2 \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{\lambda_2 u_g}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad A_2 = \frac{\lambda_1 u_g}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Napetosti prvega, $u_1 = RCu'_2 + u_2$, in drugega kondenzatorja, u_2 , sta

$$u_1(t) = \frac{u_g}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1(1 + \lambda_2 RC)e^{\lambda_2 t} - \lambda_2(1 + \lambda_1 RC)e^{\lambda_1 t}) + u_g \quad u_2(t) = \frac{u_g}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) + u_g,$$

polnilna toka prvega, $i_1 = Cu'_1$, in drugega, $i_2 = Cu'_2$, pa sta

$$i_1(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 C u_g}{\lambda_2 - \lambda_1} ((1 + \lambda_2 RC)e^{\lambda_2 t} - (1 + \lambda_1 RC)e^{\lambda_1 t}) \quad i_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 C u_g}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}).$$



ČETRTI PRIMER. Vklop vezja magnetno sklopljenih tokokrogov na enosmerni napetostni vir. Trenutek sklenitve stikala naj je $t = 0$ s. Začetni vrednosti tokov sta $i_1(+0) = i_2(+0) = 0$. Napetostni enačbi zank v kasnejših časih ($t > 0$) sta:

$$E: -u_g + R_1 i_1 + L_1 i'_1 + M i'_2 = 0 \quad F: R_2 i_2 + L_2 i'_2 + M i'_1 = 0.$$

Iz F izrazimo i'_1 in ga vnesemo v E,

$$i'_1 = -\frac{R_2}{M} i_2 - \frac{L_2}{M} i'_2 \Rightarrow -u_g + R_1 i_1 + \frac{L_1}{M} (-R_2 i_2 - L_2 i'_2) + M i'_2 = 0.$$

Zatem enačbo E odvajamo in vanjo ponovno vnesemo i'_1 :

$$R_1 i'_1 + \frac{L_1}{M} (-R_2 i'_2 - L_2 i''_2) + M i''_2 = 0 \Rightarrow (L_1 L_2 - M^2) i''_2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) i'_2 + R_1 R_2 i_2 = 0.$$

Ali tudi: iz E izrazimo i'_2 in ga vnesemo v F,

$$i'_2 = -\frac{R_1}{M} i_1 - \frac{L_1}{M} i'_1 + \frac{u_g}{M} \Rightarrow R_2 i_2 + \frac{L_2}{M} (-R_1 i_1 - L_1 i'_1 + u_g) + M i'_1 = 0.$$

Zatem enačbo F odvajamo in vanjo ponovno vnesemo i'_2 :

$$R_2 i'_2 + \frac{L_2}{M} (-R_1 i'_1 - L_1 i''_1) + M i''_1 = 0 \Rightarrow (L_1 L_2 - M^2) i''_1 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) i'_1 + R_1 R_2 i_1 = R_2 u_g.$$

Za oba toka dobimo identični enačbi; prva je homogena, druga je nehomogena. Karakteristični polinom je za obe isti:

$$(L_1 L_2 - M^2) \lambda^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) \lambda + R_1 R_2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(R_1 L_2 + R_2 L_1) \pm \sqrt{(R_1 L_2 + R_2 L_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}}{2(L_1 L_2 - M^2)}.$$

Oba korena karakteristične enačbe sta negativna. Splošni rešivi sta:

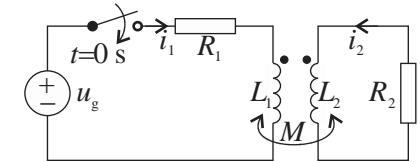
$$i_1(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} + u_g / R_1 \quad i_2(t) = C e^{\lambda_1 t} + D e^{\lambda_2 t}.$$

Za določitev štirih konstant potrebujemo še dva začetna pogoja; dobimo ju iz enačb E in F tik po vklopu:

$$E(+0): -u_g + R_1 \underbrace{i_1(+0)}_0 + L_1 i'_1(+0) + M i'_2(+0) = 0 \quad F(+0): R_2 \underbrace{i_2(+0)}_0 + L_2 i'_2(+0) + M i'_1(+0) = 0,$$

Toka in njuna odvoda tik po vklopu so:

$$i_1(+0) = 0 \quad i'_1(+0) = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} u_g \quad \text{in} \quad i_2(+0) = 0 \quad i'_2(+0) = -\frac{M}{L_1 L_2 - M^2} u_g.$$



Konstanti A in B dobimo iz enačb

$$i_1(+0) = A + B + \frac{u_g}{R_1} = 0 \quad i'_1(+0) = \lambda_1 A + \lambda_2 B = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} u_g,$$

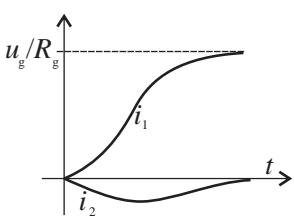
$$A = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{\lambda_2}{R_1} + \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \right) u_g \quad B = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{R_1} + \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \right) u_g,$$

konstanti C in D pa iz enačb

$$i_2(+0) = C + D = 0 \quad i'_2(+0) = \lambda_1 C + \lambda_2 D = -\frac{M}{L_1 L_2 - M^2} u_g \Rightarrow C = -D = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \right) u_g.$$

Rešitvi sta:

$$i_1(t) = \frac{u_g}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\left(\frac{\lambda_1}{R_1} + \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \right) e^{\lambda_2 t} - \left(\frac{\lambda_2}{R_1} + \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \right) e^{\lambda_1 t} \right) + \frac{u_g}{R_1} \quad i_2(t) = \frac{u_g}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \right) (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}).$$



Tok v drugi zanki sčasoma izzveni, v prvi pa doseže polno vrednost u_g/R_1 . Dinamiko prehodnega pojava v sklopljenem vezju krojita korena λ_1 in λ_2 . V tem pogledu sta zanimivi dve skrajnosti: 1) ko sta tokokroga magnetno šibko povezana ($M \ll \sqrt{L_1 L_2}$) in 2) ko sta tokokroga magnetno čvrsto povezana ($M \approx \sqrt{L_1 L_2}$).

Za magnetno šibko povezana tokokroga pišimo $L_1 L_2 - M^2 \cong L_1 L_2$. Ničli polinoma sta:

$$\lambda_{1,2} \cong \frac{-(R_1 L_2 + R_2 L_1) \pm \sqrt{(R_1 L_2 + R_2 L_1)^2 - 4 R_1 R_2 L_1 L_2}}{2 L_1 L_2} = \frac{-(R_1 L_2 + R_2 L_1) \pm |R_1 L_2 - R_2 L_1|}{2 L_1 L_2} = \begin{cases} -R_1/L_1 \\ -R_2/L_2 \end{cases}.$$

Časovni konstanti določata upornosti in induktivnosti prve in druge zanke: $\tau_1 = L_1/R_1$ in $\tau_2 = L_2/R_2$. Toka sta:

$$i_1(t) \cong \frac{u_g}{R_1} (1 - e^{-t/\tau_1}) \quad i_2(t) \cong \frac{M u_g}{R_1 L_2 - R_2 L_1} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}).$$

Za magnetno čvrsto povezana tokokroga pišimo $(L_1 L_2 - M^2) = (1 - K^2) L_1 L_2 = s L_1 L_2$, kjer je s faktor stresanja, ki je reda velikosti stotinke, tisočinke. Ničli karakterističnega polinoma sta:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(R_1 L_2 + R_2 L_1) \pm \sqrt{(R_1 L_2 + R_2 L_1)^2 - 4 R_1 R_2 L_1 L_2 s}}{2 s L_1 L_2}.$$

Ker je $4 R_1 R_2 L_1 L_2 s \ll (R_1 L_2 + R_2 L_1)^2$, razvijemo korensko funkcijo v Taylorjevo vrsto in vzamemo le prva dva člena:

$$\lambda_{1,2} \cong \frac{-(R_1 L_2 + R_2 L_1) \pm \left((R_1 L_2 + R_2 L_1) - \frac{2 R_1 R_2 L_1 L_2 s}{(R_1 L_2 + R_2 L_1)} \right)}{2 s L_1 L_2} \cong \begin{cases} -(R_1 L_2 + R_2 L_1)/L_1 L_2 s & \left\{ \begin{array}{l} -(\tau_1 + \tau_2)/\tau_1 \tau_2 s \\ -1/(\tau_1 + \tau_2) \end{array} \right. \\ -R_1 R_2/(R_1 L_2 + R_2 L_1) & \end{cases}.$$

Korena

$$\lambda_1 \cong -(R_1 L_2 + R_2 L_1)/L_1 L_2 s = -(\tau_1 + \tau_2)/\tau_1 \tau_2 s = -1/\tau_{12}^* \quad \lambda_2 \cong -R_1 R_2/(R_1 L_2 + R_2 L_1) = -1/(\tau_1 + \tau_2) = -1/\tau_{12}$$

sta si zelo različna; prvi je okvirno stokratnik, tisočkratnik drugega, zato je $\lambda_2 - \lambda_1 \cong 1/\tau_{12}^* s$. Toka sta:

$$i_1(t) \cong \frac{u_g}{R_1} \left(1 - e^{-t/\tau_{12}} \right) + \frac{u_g \tau_{12}^*}{R_1 \tau_{12}} \left(e^{-t/\tau_{12}} - e^{-t/\tau_{12}^* s} \right) \quad i_2(t) \cong -\frac{u_g}{M} \tau_{12}^* \left(e^{-t/\tau_{12}} - e^{-t/\tau_{12}^* s} \right).$$

Funkcija $(e^{-t/\tau_{12}} - e^{-t/\tau_{12}^* s})$ je impulz zvončaste oblike, ki tik po vklopu strmo naraste skoraj do vrednosti ena, zatem pa zložno upada k vrednosti nič. Tej funkciji do predznaka ustrezata tudi tok v drugem tokokrogu. V prvem tokokrogu je prvi sumand glavni del toka, temu pa se pridruži impulz, ki je zmanjšan za faktor $\tau_{12}^*/\tau_{12} \leq 0,25$.

PETI PRIMER. Vklop vezja RLC na vir enosmerne napetosti. Pred sklenitvijo stikala naj je $u_C(-0) = 0$; po sklenitvi ($t > 0$) je enačba zanke sledeča: $Ri + Li' + u_C - u_g = 0$. To zatem odvajamo in dobimo homogeno enačbo drugega reda,

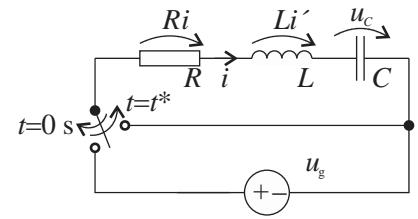
$$Ri' + Li'' + u'_C = Li'' + Ri' + i/C = 0.$$

Karakteristični polinom in korena so:

$$\lambda^2 + (R/L)\lambda + 1/CL = 0 \quad \lambda_{1,2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/CL} = -p \pm \sqrt{q^2}.$$

Pri $q^2 > 0$ sta ničli negativni, pri $q^2 < 0$ sta ničli konjugirano kompleksniali, pri $q^2 = 0$ je dvojna ničla. Splošna rešitev je $i(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$. Začetna pogoja sta $u_C(+0) = 0$ in $i(+0) = 0$. Zapišimo zančno enačbo ob trenutku $+0$:

$$R \overset{0}{\overbrace{i(+0)}} + Li'(+0) + \overset{0}{\overbrace{u_C(+0)}} - u_g = 0 \quad \Rightarrow \quad i'(+0) = u_g/L.$$



Iz začetnih pogojev sledita konstanti in rešitev,

$$i(+0) = A + B = 0 \quad i'(+0) = \lambda_1 A + \lambda_2 B = u_g/L \quad \Rightarrow \quad B = -A = \frac{u_g/L}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{u_g/L}{2q} (e^{qt} - e^{-qt}) e^{-pt} = \frac{u_g}{qL} e^{-pt} \sin qt.$$

Takšna je v primeru $q^2 > 0$. V začetku tok narašča, doseže maksimum in se zatem manjša k nič. Če je $q^2 < 0$, sta korena $\lambda_{1,2} = -p \pm i|q|$ konjugirano kompleksna. Rešitev dobimo iz prejšnje, če q zamenjamo z $i|q|$:

$$i(t) = \frac{u_g}{|q|L} e^{-pt} \sin|q|t.$$

Tok je nihajoča funkcija, ki eksponentno usiha (dušeno nihanje); število $|q|$ je krožna frekvenca, ki je lastna RLC členu. Mejno ozziroma kritično dušenje nastopi pri $q^2 = 0$ ozziroma pri $(R/2L)^2 = 1/LC$. Rešitev dobimo z limito,

$$i(t) = \lim_{|q| \rightarrow 0} \frac{u_g}{|q|L} e^{-pt} \sin|q|t = \frac{u_g}{L} e^{-pt} \lim_{|q| \rightarrow 0} \frac{\sin|q|t}{|q|} = \frac{u_g}{L} t e^{-pt}.$$

Toku sledijo tudi ostale količine v vezju. Napetost upora je $u_R(t) = Ri(t)$, tuljave je $u_L(t) = Li'(t)$ in kondenzatorja je

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = \frac{u_g}{2qLC} \int_0^t (e^{-(p-q)t'} - e^{-(p+q)t'}) dt' = u_g - u_g e^{-pt} \left(\frac{p}{q} \sinh qt + \cosh qt \right).$$

Pri $q^2 = 0$ in $q^2 < 0$ pa sta napetosti na kondenzatorju sledeči:

$$u_C(t) = u_g - u_g e^{-pt} (pt + 1) \quad u_C(t) = u_g - u_g e^{-pt} \left(\frac{p}{|q|} \sin|q|t + \cos|q|t \right).$$

Rešitvam je skupno, da tok sčasoma izzveni, kondenzator pa doseže polno napetost (u_g). Če ob času t^* , $pt^* > 5$, damo pretikalo stikala v drug položaj, se odvije obraten pojav. Pri $q^2 < 0$ sta praznilni tok in napetost kondenzatorja sledeča:

$$i(t) = -\frac{u_g}{|q|L} e^{-p(t-t^*)} \sin(|q|(t-t^*)) \quad u_C(t) = u_g e^{-p(t-t^*)} \left(\frac{p}{|q|} \sin(|q|(t-t^*)) + \cos(|q|(t-t^*)) \right).$$

Po nekem času tok izzveni in kondenzator se izprazni, prej akumulirana energija $\frac{1}{2}Cu_g^2$ pa se pretvorí v toploto v uporu.

ŠESTI PRIMER. Vklop vezja RLC na vir sinusne napetosti z amplitudo U_{gm} in krožno frekvenco ω . Napetost vira naj določa zapis $u_g(t) = U_{\text{gm}} \cos(\omega t + \alpha_g)$. Pri tem je kot α_g parameter, ki uskladi začetek štetja časa ($t = 0$) in vrednost napetosti vira v trenutku sklenitve stikala: $u_g(0) = U_{\text{gm}} \cos \alpha_g$. Zančna enačba je nespremenjena,

$$Ri + Li' + u_c - u_g(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad LCu_c'' + RCu_c' + u_c = U_{\text{gm}} \cos(\omega t + \alpha_g),$$

enako tudi karakteristični polinom in ničli karakterističnega polinoma,

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC} = -p \pm \sqrt{q^2}.$$

Možnosti so: $q^2 >, =, < 0$. Partikularno rešitev iščemo s funkcijo $u_{\text{cp}}(t) = U_{\text{cm}} \cos(\omega t + \alpha_c) = U_{\text{cm}} \cos(\omega t + \alpha_g + \varepsilon)$; poiskati moramo amplitudo U_{cm} in kot α_c oziroma diferenčni kot $\varepsilon = \alpha_c - \alpha_g$. Odvoda funkcije $u_{\text{cp}}(t)$,

$$u'_{\text{cp}}(t) = -\omega U_{\text{cm}} \sin(\omega t + \alpha_g + \varepsilon) \quad u''_{\text{cp}}(t) = -\omega^2 U_{\text{cm}} \cos(\omega t + \alpha_g + \varepsilon),$$

vstavimo v enačbo in dobimo:

$$-\omega^2 LCU_{\text{cm}} \cos(\omega t + \alpha_g + \varepsilon) - \omega CRU_{\text{cm}} \sin(\omega t + \alpha_g + \varepsilon) + U_{\text{cm}} \cos(\omega t + \alpha_g + \varepsilon) = U_{\text{gm}} \cos(\omega t + \alpha_g).$$

Združimo kosinusna člena in uporabimo adicijska teorema za sinus in kosinus,

$$\begin{aligned} -\omega CRU_{\text{cm}} \sin(\omega t + \alpha_g + \varepsilon) + (1 - \omega^2 LC)U_{\text{cm}} \cos(\omega t + \alpha_g + \varepsilon) &= U_{\text{gm}} \cos(\omega t + \alpha_g), \\ -\omega CRU_{\text{cm}} (\sin(\omega t + \alpha_g) \cos \varepsilon + \cos(\omega t + \alpha_g) \sin \varepsilon) + \\ (1 - \omega^2 LC)U_{\text{cm}} (\cos(\omega t + \alpha_g) \cos \varepsilon - \sin(\omega t + \alpha_g) \sin \varepsilon) &= U_{\text{gm}} \cos(\omega t + \alpha_g). \end{aligned}$$

Ker sta sinusna in kosinusna funkcija linearno neodvisni, mora veljati dvoje:

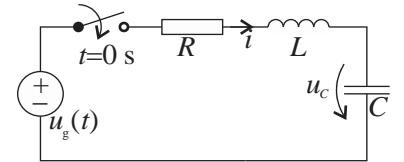
$$-\omega CRU_{\text{cm}} \cos \varepsilon - (1 - \omega^2 LC)U_{\text{cm}} \sin \varepsilon = 0 \quad \text{in} \quad -\omega CRU_{\text{cm}} \sin \varepsilon + (1 - \omega^2 LC)U_{\text{cm}} \cos \varepsilon = U_{\text{gm}}.$$

Iz prve sledi ε oziroma α_c , če pa enačbi kvadriramo in seštejemo, dobimo še U_{cm} ,

$$\varepsilon = \arctg \frac{\omega CR}{\omega^2 LC - 1} \quad \alpha_c = \alpha_g + \arctg \frac{\omega CR}{\omega^2 LC - 1} \quad U_{\text{cm}} = \frac{U_{\text{gm}}}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}.$$

Splošna rešitev je

$$u_c(t) = E e^{\lambda_1 t} + F e^{\lambda_2 t} + U_{\text{cm}} \cos(\omega t + \alpha_c).$$



Začetna pogoja sta $u_C(+0) = 0$ in $i(+0) = Cu'_C(+0) = 0$, torej

$$E + F + U_{Cm} \cos \alpha_C = 0 \quad \lambda_1 E + \lambda_2 F - \omega U_{Cm} \sin \alpha_C = 0,$$

konstanti pa:

$$E = \frac{U_{Cm}}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_2 \cos \alpha_C - \omega \sin \alpha_C) \quad F = \frac{U_{Cm}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 \cos \alpha_C + \omega \sin \alpha_C).$$

Rešitev

$$u_C(t) = \underbrace{\frac{U_{Cm}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((-\lambda_2 \cos \alpha_C - \omega \sin \alpha_C) e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 \cos \alpha_C + \omega \sin \alpha_C) e^{\lambda_2 t} \right)}_{\text{prehodni pojav}} + \underbrace{U_{Cm} \cos(\omega t + \alpha_C)}_{\text{stacionarno stanje}}$$

je sestavljena iz prehodnega pojava, ki po času $t^* = 5/p$ praktično izzveni, in t. i. stacionarnega stanja, ki traja vse dokler je vezje priključeno na vir:

$$u_C(t > t^*) \cong \frac{U_{gm}}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \cos \left(\omega t + \alpha_g + \arctg \frac{\omega CR}{\omega^2 LC - 1} \right).$$

Kar velja za napetost u_C , velja tudi za tok in ostali napetosti:

$$\begin{aligned} i = Cu'_C &\Rightarrow i(t > t^*) \cong -\frac{\omega C U_{gm}}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \sin \left(\omega t + \alpha_g + \arctg \frac{\omega CR}{\omega^2 LC - 1} \right), \\ u_R = Ri &\Rightarrow u_R(t > t^*) \cong -\frac{\omega C R U_{gm}}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \sin \left(\omega t + \alpha_g + \arctg \frac{\omega CR}{\omega^2 LC - 1} \right), \\ u_L = Li' &\Rightarrow u_L(t > t^*) \cong -\frac{\omega^2 L C U_{gm}}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \cos \left(\omega t + \alpha_g + \arctg \frac{\omega CR}{\omega^2 LC - 1} \right). \end{aligned}$$

Struktura rešitve ima splošno veljavo: če katerokoli vezje RLC priključimo na sinusni vir, se po izteku prehodnega pojava vse napetosti in vsi toki v vezju navzamejo sinusnih zakonitosti. V nadaljevanju poglavja se bomo ukvarjali izključno le še z linearimi vezji, ki jih vzbujajo sinusni viri; pri tem nas ne bodo več zanimali prehodni pojavi, čeravno se jih zavedamo, ampak le še stacionarna stanja količin v njem. In kaj je zanje ključno: amplitude in fazni koti. Pri analizi preprostega vezja

smo imeli nemalo dela z iskanjem amplitude U_{Cm} in kota α_C , na katerih sloni stacionarno stanje. V novem razdelku bomo spoznali kompleksni račun, ki analizo linearnih vezij skrajša in jo naredi mnogo bolj pregledno.

Sklep. Prehodni pojavi so pomembna problematika tudi z vidika sistemsko teorije. Za analizo teh pojavov se uporablja t. i. integralske transformacije. Pomembni med njimi sta Laplaceova in Fourierjeva transformacija, ki odzivanja sistemov na vzbujanja prenesejo iz časovnega v drug, simbolični prostor, v katerem se potrebne operacije odvijajo bistveno bolj pregledno. Različna področja elektrotehnike se ukvarjajo z različnimi sistemi, zato nadaljevanje v tej smeri pač ne sodi v osnove elektrotehnike.

§17. Kompleksni račun

Uvod. Kompleksni ali simbolični račun je matematično orodje, ki služi analizi periodičnih pojavov v linearih sistemih, sicer pa sodi račun v širši okvir Fourierjeve analize in kompleksnih funkcij. Posebnost kompleksnega računa je v tem, da se zapisi relacij v električnem vezju ne naslavljajo na toke in napetosti v časovnem prostoru, ampak na njihove slike v kompleksnem oziroma frekvenčnem prostoru. Prehod iz prostora v prostor je pregleden, izkaže pa se, da je povratek v časovni prostor včasih odveč, saj vrsto vrednotenj nudijo že slike v kompleksnem prostoru. Kompleksni račun se odvija znotraj sistema linearnih enačb, kar je precej lažje opravilo, kot pa reševanje sistema diferencialnih enačb. Kompleksni račun uvaja nekaj novih količin kot so kompleksor, impedanca, admitanca in kompleksna ter aktivna in reaktivna moč, vse te pa se navezujejo na krožno frekvenco ω , kar omogoča kasnejšo frekvenčno analizo linearnih električnih vezijh.



24:08

Periodična funkcija. V izmeničnih vezjih se periodičnost naslavlja na tok, napetost, moč in energijo. Imejmo tok $i(t)$ ali napetost $u(t)$ s periodo T , da velja $i(t+T) = i(t)$ ali $u(t+T) = u(t)$. Za vrednotenje periodičnih razmer v električnem vezju sta pomembni aritmetična srednja vrednost in kvadratična srednja vrednost; prvo določamo toku, napetosti, moči in energiji, drugo pa zgolj toku in napetosti. Imejmo tuljavo z induktivnostjo L in tokom $i(t)$, magnetna energija v njej je $\frac{1}{2}Li^2$. Pri periodičnem toku je periodična tudi energija. Važen podatek je poprečna vrednost oziroma aritmetična srednja vrednost magnetne energije, ki se izraža s kvadratično srednjo vrednostjo oziroma z efektivno vrednostjo toka ($I_{\text{ef.}}$),

$$W_{m,\text{po.}} = \overline{W_m(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} W_m(t) dt = \frac{1}{2}L \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt \right) = \frac{1}{2}LI_{\text{ef.}}^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\text{ef.}} = \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt \right)^{1/2} = \left(\overline{i^2(t)} \right)^{1/2},$$

trenutek t_0 je katerikoli trenutek, pogosto pa kar $t_0 = 0$. Podobno je pri poprečni električni energiji v kondenzatorju,

$$W_{e,\text{po.}} = \overline{W_e(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} W_e(t) dt = \frac{1}{2}C \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt \right) = \frac{1}{2}CU_{\text{ef.}}^2 \quad \Rightarrow \quad U_{\text{ef.}} = \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt \right)^{1/2} = \left(\overline{u^2(t)} \right)^{1/2},$$

in joulski moči v uporu,

$$P_{j,\text{po.}} = \overline{p_j(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p_j(t) dt = R \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt \right) = RI_{\text{ef.}}^2.$$

Efektivna vrednost $I_{\text{ef.}}$ ustreza vrednosti enosmernega toka, ki bi imel enak termični učinek kot periodični $i(t)$. Poprečni ali aritmetični srednji vrednosti periodične napetosti ali toka ustreznata njunima enosmernima komponentama,

$$U_{\text{po.}} = \overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt \quad I_{\text{po.}} = \overline{i(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(t) dt.$$

Primer: odklon inštrumenta z vrtljivo tuljavico določa poprečna vrednost toka skozi navitje tuljavice. Trivialen primer je napetost $u(t) = U_m \sin(\omega t + \gamma)$. Poprečna vrednost $u(t)$ je $U_{\text{po.}} = U_m \overline{\sin(\omega t + \gamma)} = 0$, kvadrat efektivne vrednosti pa je $U_{\text{ef.}}^2 = U_m^2 \overline{\sin^2(\omega t + \gamma)} = U_m^2/2$; $U_{\text{ef.}} = U_m/\sqrt{2}$. Efektivna vrednost omrežne napetosti frekvence 50 Hz je $U_{\text{ef.}} = 230 \text{ V}$; amplituda te napetosti je torej $U_m = U_{\text{ef.}}\sqrt{2} \cong 325 \text{ V}$.

Poleg poprečne in efektivne vrednosti periodične napetosti (toka) je pomemben tudi njen (njegov) frekvenčni spekter oziroma zastopanost enosmerne komponente, osnovne harmonike in višjih harmonikov. Odgovor na to daje Fourierjeva analiza: periodično funkcijo (napetost) je možno izraziti z neskončno vsoto trigonometričnih funkcij,

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) \quad C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad \operatorname{tg} \alpha_k = -\frac{B_k}{A_k}$$

pri tem so Fourierjevi koeficienti A_k in B_k določeni s sledečima Eulerjevima formulama,

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cos(\omega_k t) dt \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \sin(\omega_k t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Z vidika reševanja linearnih električnih vezij, v katerih velja superpozicija, je to zelo pomembno. Kadar je vezje vzbujano

z viri periodičnih napetosti in tokov, moremo rezultate analize vezja pri eni frekvenci smiselno uporabiti tudi pri drugih frekvencah in delne rezultate zatem sešteji. To je razlog, da se bomo v nadaljevanju posvetili postopkom za analizo vezij pri splošni krožni frekvenci ω , superpozicijo pa zatem uporabili do tiste mere, ki jo narekujejo viri v vezju. Izkaže se, da frekvenčna analiza ni pomembna le pri periodičnih, ampak tudi pri aperiodičnih tokih in napetostih; prejšnji diskretni spekter postane z aperiodičnostjo zvezen (frekvence od 0 do ∞), bazični funkciji pa še vedno ostajata $\sin(\omega t)$ in $\cos(\omega t)$.



Kompleksor. Splošno trigonometrično funkcijo $C_k \cos(\omega_k t + \alpha_k)$ v Fourierjevem razvoju bomo za električno napetost $u(t)$ zapisali takole: $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$; U_m je maksimalna vrednost ali amplituda, $\omega = 2\pi f$ je krožna frekvanca, f je frekvanca in α_u je fazni kot, ki je vezan na izbran začetek $t = 0$. Z uporabo Eulerjeve formule

$$e^{is} = \cos s + i \sin s \quad \Rightarrow \quad \cos s = \operatorname{Re}[e^{is}]$$

moremo napetost $u(t)$ izraziti kot realni del kompleksne funkcije,

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = \operatorname{Re}[U_m e^{i(\omega t + \alpha_u)}] = \operatorname{Re}[(U_m e^{i\alpha_u}) e^{i\omega t}].$$

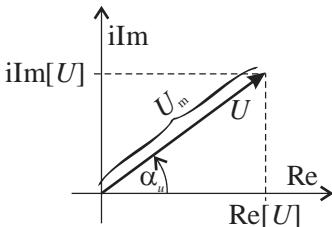
Izraz v notranjem oklepaju je kompleksna količina, ki združuje amplitudo U_m in fazni kot α_u ; imenujemo jo kompleksna amplituda ali kompleksor ali fazor ali kazalec U . Kompleksor U in $u(t)$ povezujejo sledeči zapisi:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u) \quad \text{in} \quad U_m e^{i\alpha_u} = U \quad \text{ter} \quad \operatorname{Re}[U e^{i\omega t}] = u(t).$$

Kompleksno amplitudo zapisujemo v eksponentni, $U = U_m e^{i\alpha_u}$, in algebrski obliki, $U = \operatorname{Re}[U] + i\operatorname{Im}[U]$; prva je primena za množenje, druga za seštevanje. Prehajanje iz ene v drugo obliko sledi naslednjim zapisom:

$$U = U_m e^{i\alpha_u} = U_m \cos \alpha_u + i U_m \sin \alpha_u = \operatorname{Re}[U] + i\operatorname{Im}[U] \quad |U| = \operatorname{abs}(U) = U_m \quad \arg(U) = \alpha_u.$$

Kompleksno količino določata kompleksno število in merska enota. Kompleksno število je zgolj točka v Gaussovi ravnini. Pri uporabi simboličnega računa je uveljavljen dogovor, da kompleksno količino upodobljamo z usmerjeno daljico od izhodišča do te točke. Dolžina daljice ustrezata absolutni vrednosti kompleksne količine, kot od pozitivnega dela realne osi do daljice v pozitivni matematični smeri pa ustrezata argumentu. Pri analizi vezij upodabljamemo kazalce napetosti in tokov v ustreznih merilih v isti kompleksni ravnini. Slike kazalcev tega vezja rečemo kazalčni diagram.

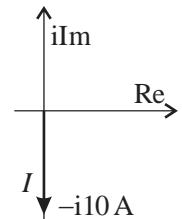


Primera. Naj je tok $i(t) = 10 \sin \omega t$ A; določimo njegov kompleksor I :

$$i(t) = 10 \sin \omega t \text{ A} = 10 \cos(\omega t - \pi/2) \text{ A} \Rightarrow I = 10e^{-i\pi/2} \text{ A} = -i10 \text{ A.}$$

In obratno: naj je kompleksor $U = 200(1 + i\sqrt{3})$ V; izrazimo napetost $u(t)$:

$$U = 200(1 + i\sqrt{3}) \text{ V} = 400e^{i\pi/3} \text{ V} \Rightarrow u(t) = 400 \cos(\omega t + \pi/3) \text{ V.}$$



Notacije kompleksorja. V literaturi zasledimo različne notacije. 1) Tukaj smo izhajali iz zapisa sinusne funkcije v obliki $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$. 2) Nekateri uporabljajo zapis $u(t) = U_m \sin(\omega t + \beta_u)$; v tem primeru je $U = U_m e^{i\beta_u}$, obratno pa je $u(t) = \text{Im}[U e^{i\omega t}]$. 3) Kompleksor lahko podčrtujemo, $\underline{U} = U_m e^{i\alpha_u}$. 4) Srečujemo še zapis $u(t) = \text{Re}[U e^{-i\omega t}]$. Eulerjeva formula ponuja izbiro, $\cos s = \text{Re}[e^{\pm is}]$. 5) Za imaginarno enoto se uporablja tudi črka j , čeravno ni bojazni, da bi se enota i zamenjevala s simbolom i za električni tok. Glede na to, da je črka i mednarodno sprejeta za imaginarno enoto, bomo pri tem tudi ostali.

Kirchhoffova zakona. Prenesti ju moramo iz časovnega v kompleksni prostor. Spojiščni zakon izpišimo takole:

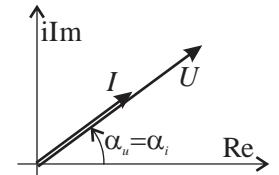
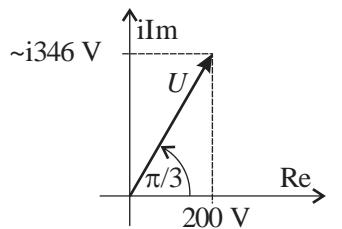
$$\sum_{k=1}^n (\pm) i_k = \sum_{k=1}^n (\pm) \text{Re}[I_k e^{i\omega t}] = \text{Re} \left[\left(\sum_{k=1}^n (\pm) I_k \right) e^{i\omega t} \right] = 0.$$



Vsota kazalcev, $\sum_{k=1}^n (\pm) I_k$, množena s funkcijo $e^{i\omega t}$, predstavlja kazalec, ki se vrvi v pozitivni matematični smeri s kotno hitrostjo ω . Da bo njegov realni del ob vsakem času t enak nič, mora biti $\sum_{k=1}^n (\pm) I_k = 0$. Enako velja tudi za napetostni zakon, $\sum_{j=1}^m (\pm) U_j = 0$. To sta torej zapisa Kirchhoffovih zakonov v kompleksni obliki.

Kazalci in pasivni elementi RLC vezij. Zanimajo nas relacije med kazalci napetosti in tokov na uporu, kondenzatorju in tuljavi ter na sklopih tuljavah. Tok in napetost sta na uporu sorazmerna,

$$i(t) = Gu(t) = G \text{Re}[U e^{i\omega t}] = \text{Re}[GU e^{i\omega t}] = \text{Re}[I e^{i\omega t}] \Rightarrow I = GU = R^{-1}U \Rightarrow I_m = GU_m \quad \text{in} \quad \alpha_i = \alpha_u,$$



in enako velja tudi za njuna kazalca; relacijo $I = GU$ upodabljata dva sofazna kazalca. Polnilni tok kondenzatorja določa odvod napetosti,

$$i(t) = Cu'(t) = \operatorname{Re}[C(Ue^{i\omega t})'] = \operatorname{Re}[i\omega CUE^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[Ie^{i\omega t}] \Rightarrow I = i\omega CU \Rightarrow I_m = \omega CU_m \text{ in } \alpha_i = \alpha_u + \pi/2.$$

Amplitudi toka in napetosti sta sorazmerni, fazni kot toka je za $\pi/2$ večji od faznega kota napetosti. Napetost na tuljavi določa odvod toka,

$$u(t) = Li'(t) = \operatorname{Re}[L(Ie^{i\omega t})'] = \operatorname{Re}[i\omega LIe^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[Ue^{i\omega t}] \Rightarrow U = i\omega LI \Rightarrow U_m = \omega LI_m \text{ in } \alpha_u = \alpha_i + \pi/2.$$

Amplitudi toka in napetosti sta sorazmerni, fazni kot napetosti je za $\pi/2$ večji od faznega kota toka. V primeru sklopa dveh tuljav določata napetosti tuljav toka obeh tuljav,

$$u_1(t) = L_1 i'_1(t) + M i'_2(t) = \operatorname{Re}[(L_1 I_1 + MI_2)(e^{i\omega t})'] = \operatorname{Re}\left[\left(\underbrace{i\omega L_1 I_1 + i\omega MI_2}_{u_1}\right)e^{i\omega t}\right] \Rightarrow U_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega MI_2,$$

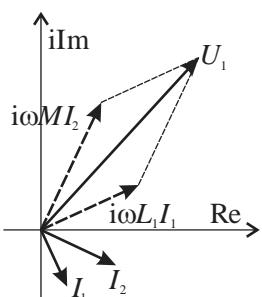
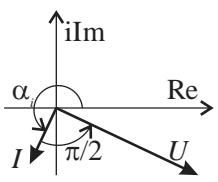
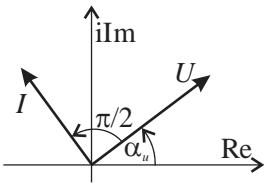
$$u_2(t) = M i'_1(t) + L_2 i'_2(t) = \operatorname{Re}[(MI_1 + L_2 I_2)(e^{i\omega t})'] = \operatorname{Re}\left[\left(\underbrace{i\omega MI_1 + i\omega L_2 I_2}_{u_2}\right)e^{i\omega t}\right] \Rightarrow U_2 = i\omega MI_1 + i\omega L_2 I_2.$$

Kazalec napetosti je vsota kazalcev. V kazalčnem diagramu ga določa paralelogramsko pravilo. Pri sklopu več tuljav je kazalec napetosti posamezne tuljave enak vsoti kazalcev delnih napetosti, $U_j = \sum_{k=1}^n i\omega L_{jk} I_k$.

Relacije v kompleksnem prostoru so enostavnejše: odvod v časovnem prostoru preide v množenje z $i\omega$, drugi odvod v množenje z $(i\omega)^2$ itn. In tudi obratno, integral v časovnem prostoru preide v deljenje z $i\omega$. Resnično, pri kondenzatorju je $u = (1/C) \int idt$, zato je $U = I/i\omega C$, kar že vemo. Če bi s to izkušnjo pristopili k partikularni oziroma stacionarni rešitvi šestega primera iz prejšnjega razdelka, bi pisali:

$$LCu''_C + RCu'_C + u_C = U_{gm} \cos(\omega t + \alpha_g) \Rightarrow LC(i\omega)^2 U_C + RCi\omega U_C + U_C = U_g \Rightarrow U_C = \frac{U_g}{1 - \omega^2 LC + i\omega CR}.$$

Razmerje amplitud in razlika faznih kotov sledita iz zadnje enačbe,



39:13

$$\frac{|U_C|}{|U_g|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad \text{in} \quad \alpha_c - \alpha_g = \arctg \frac{\omega CR}{\omega^2 LC - 1}.$$

Opazimo, da je postopek v kompleksni notaciji krajši in preglednejši.

Impedanca, admitanca (imitanca). Impedanco dvopola določa kvocient kazalca napetosti in kazalca toka, $Z = U/I$, admitanco pa njej recipročni kvocient, $Y = I/U$, $YZ = 1$; imitanca kot sestavljenka začetka prve in konca druge besede je skupno ime za obe. Nekaj imitanc že poznamo: upor, $Z_R = R$ in $Y_R = 1/R$, tuljava, $Z_L = i\omega L$ in $Y_L = 1/i\omega L = -i/\omega L$, ter kondenzator, $Z_C = 1/i\omega C = -i/\omega C$ in $Y_C = i\omega C$. Nadalujmo z realno tuljavo. Kazalec napetosti dvopola je vsota delnih napetosti, iz česar sledita imitanci (impedanci zaporednih elementov se seštevata):

$$U = U_R + U_L = RI + i\omega LI = (R + i\omega L)I \Rightarrow Z = \frac{U}{I} = R + i\omega L \quad \text{in} \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} = \frac{R - i\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Podobno je z realnim kondenzatorjem (idealni kondenzator in upora, ki predstavlja prevodnost izolanta in upornost priključkov); upoštevamo oba Kirchhoffova zakona in dobimo (admitanci vzporednih elementov se seštevata):

$$I = I_C + I_G = (i\omega C + G)(U - R_p I) \Rightarrow \frac{I}{i\omega C + G} = U - R_p I \Rightarrow Z = \frac{U}{I} = R_p + \frac{1}{G + i\omega C} \quad \text{in} \quad Y = \frac{G + i\omega C}{R_p(G + i\omega C) + 1}.$$

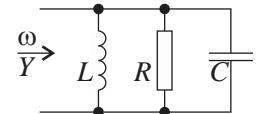
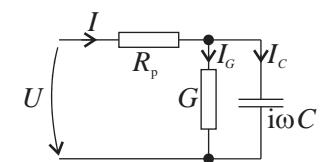
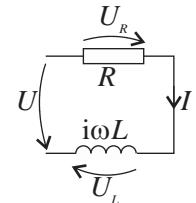
Iz zgradbe imitanc obeh vezij vidimo, da postopamo pri sestavljenih dvopolih z impedancami in admitancami elementov tako kot z upornostmi in prevodnostmi v uporovnih vezjih. Lep primer je vzporedni nihajni krog: kondenzator, tuljava in upor. Imitanci sta:

$$Y = \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = Y(\omega) \quad \text{in} \quad Z = \left(\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right)^{-1} = \frac{(\omega L)^2 R + i(1 - \omega^2 LC)\omega L R^2}{(\omega L)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2 R^2} = Z(\omega).$$

Pogosto nas zanimata njuni frekvenčni odvisnosti, torej $Z(\omega)$ ali $Y(\omega)$. Pozornost pritegne frekvenca $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, pri kateri je $\omega_0 C - 1/\omega_0 L = 0$. Absolutna vrednost admitance,

$$|Y(\omega)| = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2},$$

ima pri $\omega = \omega_0$ minimalno vrednost. Če bi to vezje vzbujal tokovni vir nastavljive frekvence in nespremenjene amplitude



(frekvenčni generator), bi bila amplituda napetosti na elementih pri $\omega = \omega_0$ maksimalna, pri $\omega \gg \omega_0$ in $\omega \ll \omega_0$ pa bi se manjšala k vrednosti nič; rečemo, da ima nihajni krog pri frekvenci ω_0 tokovno resonanco. Še bi lahko nizali primere in vsakokrat bi z uporabo Kirchhoffovih zakonov ali z združevanjem imitanc elementov prišli do imitanc v algebrski obliki,

$$Z(\omega) = \underbrace{\text{rezistanca}}_{R(\omega)} + i \underbrace{\text{reaktanca}}_{X(\omega)} = R(\omega) + iX(\omega) \quad \text{in} \quad Y(\omega) = \underbrace{\text{konduktanca}}_{G(\omega)} + i \underbrace{\text{susceptanca}}_{B(\omega)} = G(\omega) + iB(\omega).$$

Poimenovanja impedanca, admitanca, rezistanca, reaktanca, konduktanca in susceptanca je v analizo izmeničnih vezij vpeljah O. Heaviside, ime imitanca pa H. W. Bode v povezavi s teorijo vodenja sistemov. Sporočilen je tudi eksponentni zapis imitanc:

$$Z = U/I = U_m e^{i\alpha_u}/I_m e^{i\alpha_i} = (U_m/I_m) e^{i(\alpha_u - \alpha_i)} \quad \alpha_u - \alpha_i = \varphi \quad \Rightarrow \quad Z = |Z| e^{i\varphi} \quad Y = |Y| e^{-i\varphi}.$$

Absolutni vrednosti imitanc določata razmerji amplitud toka in napetosti, φ pa razliko faznega kota napetosti in faznega kota toka oziroma fazni kot dvopola. Če se s tem vrnemo k vzporednemu nihajnemu krogu, je

$$Y(\omega) = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \sqrt{\frac{1/R^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}{|Y(\omega)|}} e^{i \arctg((1/\omega L - \omega C)R)}.$$

Novost je fazni kot nihajnega vezja. Pri $\omega = \omega_0$ je $\varphi(\omega_0) = 0$; tok in napetost sta si takrat sofazna, sicer pa zavzame $\varphi(\omega)$ vrednosti od $-\pi/2$ do $\pi/2$, kar velja tudi za vsakršno dvopolno vezje RLC. Splošno velja: $\text{Re}[Z(\omega)] \geq 0$. Tako kot kazalce upodabljam z usmerjenimi daljicami tudi imitance.

Imitance večvhodnega vezja. Primer dvovhodnega vezja, sklopa dveh tuljav, imamo že pripravljen:

$$U_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2 \quad U_2 = i\omega M I_1 + i\omega L_2 I_2.$$

Kvocienta U_1/I_1 in U_2/I_2 nimata pravega smisla, vpeljemo pa zato štiri delne impedance,

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = i\omega L_1 \quad Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = i\omega M \quad Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = i\omega M \quad Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = i\omega L_2,$$

ko je eden od tokov enak nič. Sistema napetostnih in tokovnih enačb sta

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix};$$

pri tem so delne admittance določene s kvocienti tokov in napetosti, ko je ena od napetosti enaka nič,

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \quad Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = \dots \quad Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \dots \quad Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \dots$$

Produkt impedančne matrike $[Z]$ in admittančne matrike $[Y]$ je enotska matrika, $[Z][Y] = [I]$. Ni pa nujno, da admittančna matrika obstaja; pri $Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 0$ je sklop tuljav nima. Razširitev sheme na večvhodno vezje je formalna. Delne imitance so definirane s kvocienta

$$Z_{jk} = \left. \frac{U_j}{I_k} \right|_{\substack{I_m=0 \\ m \neq k}} \quad \text{in} \quad Y_{jk} = \left. \frac{I_j}{U_k} \right|_{\substack{U_m=0 \\ m \neq k}}.$$

Če sta $[U]$ in $[I]$ vektorja napetosti in tokov na vhodih, sta napetostna in tokovna matrična enačba sledeči:

$$[U] = [Z][I] \quad [I] = [Z]^{-1}[U] = [Y][U].$$

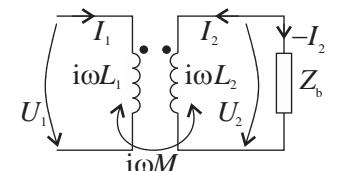
Transformirana imitanca. Beseda prihaja od sklopa dveh tuljav, ki predstavlja najosnovnejši model transformatorja. Če med sponki drugega navitja priključimo breme z impedanco Z_b in se sprašujemo po kvocientu U_1/I_1 oziroma t. i. vhodni impedanci, zapišemo sledeče:

$$U_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2 \quad U_2 = i\omega M I_1 + i\omega L_2 I_2 = Z_b(-I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{-i\omega M I_1}{i\omega L_2 + Z_b}.$$

Tok drugega navitja vstavimo v prvo enačbo in že dobimo vhodno impedanco:

$$U_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2 = i\omega L_1 I_1 + \frac{(\omega M)^2 I_1}{i\omega L_2 + Z_b} = \left(i\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{i\omega L_2 + Z_b} \right) I_1 \Rightarrow \frac{U_1}{I_1} = Z_{vh.} = i\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{i\omega L_2 + Z_b}.$$

Priv del $Z_{vh.}$ je impedanca prvega navitja, drugi del pa predstavlja transformacijo impedance Z_b prek magnetnega sklopa na vhod. Zanimiv rezultat dobimo, če je sklop navitij zelo dober $M \cong \sqrt{L_1 L_2}$ in je $|Z_b| \ll \omega L_2$. Takrat pišemo:



$$Z_{vh.} = i\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{i\omega L_2 + Z_b} \cong i\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{i\omega L_2(1 + Z_b/i\omega L_2)} \cong i\omega L_1 - i\omega L_1(1 - Z_b/i\omega L_2) = \frac{L_1}{L_2} Z_b.$$

Razmerje induktivnosti navitij na skupnem jedru je $L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2$, zato je $Z_{vh.} = (N_1/N_2)^2 Z_b$. Transformator očitno zmora breme preslikati v drugo breme; to lastnost imajo tudi druga dvohodna vezja, vendar več o tem pri analizi vezij.



Kompleksna moč pasivnega dvopola. Sinusna tok in napetost dvopola določata zapisa $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$ in $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$, njuna fazorja pa zapisa $U = U_m e^{i\alpha_u}$ in $I = I_m e^{i\alpha_i}$. Trenutna vstopna moč v dvopol je

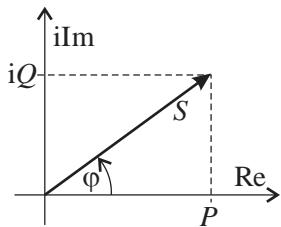
$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \alpha_u) \cos(\omega t + \alpha_i) = \frac{1}{2} U_m I_m (\cos(\alpha_u - \alpha_i) + \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i)) = \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2(\omega t + \alpha_u) - \varphi) = \underbrace{\frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi (1 + \cos 2(\omega t + \alpha_u))}_{p_1(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi \sin 2(\omega t + \alpha_u)}_{p_2(t)}. \end{aligned}$$

Vstopna moč v dvopol je pulzirajoča; okoli poprečja $\frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$ niha z amplitudo $\frac{1}{2} U_m I_m$ in s krožno frekvenco 2ω . Pri $\cos \varphi < 1$ je moč v dvopol daljši čas pozitivna, krajišči čas pa negativna. V daljšem intervalu je dvopol v bremenskem, v krajiščem pa v generatorskem režimu. Razlog vračanja energije v druge elemente v vezju so reaktivni elementi v dvopolu. Izjemi sta dvopol s $\cos \varphi = 1$, moč je nenegativna, $p(t) \geq 0$, s povprečjem $\frac{1}{2} U_m I_m$, in dvopol s $\cos \varphi = 0$, moč je sinusna, s povprečjem nič. Prvi dvopol je praviloma uporovno vezje, drugi pa reaktivno vezje; so tudi izjeme, vendar o njih kasneje. Pulzirajoča narava moči je razlog za vpeljavo več moči. Prva je aktivna ali delovna ali povprečna moč $P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$, ki je merilo za prejeto energijo v daljšem obdobju, druga pa je reaktivna ali jalova moč $Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi$, katere absolutna vrednost ustreza amplitudi izmenjalne moči $p_2(t)$ med dvopolom in preostalim vezjem. Reaktivna moč je pozitivna, če ima dvopol induktivni značaj ($\sin \varphi > 0$), negativna pa, če ima dvopol kapacitivni značaj ($\sin \varphi < 0$). Da bi obe moči vpeli v kompleksni račun, se opremo na izraza zanju, ki po vzoru Eulerjeve formule ponujata vpeljavo kompleksne moči S :

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi \quad \text{in} \quad Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad S = P + iQ = \frac{1}{2} U_m I_m (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \frac{1}{2} U_m e^{i\alpha_u} I_m e^{-i\alpha_i} = \frac{1}{2} UI^*;$$

I^* je konjugirani kazalec toka I . Vpeljujemo še navidezno moč $|S|$:

$$S = P + iQ = \frac{1}{2} UI^* \quad P = \operatorname{Re}[S] \quad Q = \operatorname{Im}[S] \quad |S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{1}{2} U_m I_m = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}}.$$



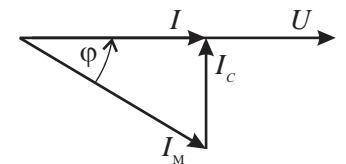
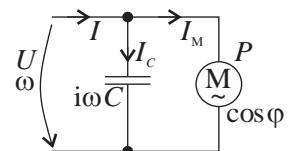
Čeravno izražamo moč v vatih, je tu elektrotehniška praksa naredila 'izjeme': aktivno moč podajamo v W, reaktivno moč v VAr (ali var) in navidezno moč v VA. Izjemo bi smeli tudi zaobiti, kajti v množici fizikalnih količin je moč zgolj ena izmed njih. Pri dvopolu z imitancama Z in Y je kompleksna moč $S = \frac{1}{2}UI^* = \frac{1}{2}Z|I|^2 = \frac{1}{2}Y^*|U|^2$.

Kompenzacija jalove moči. Izmenjalna moč je pri prenosu energije moteča. Zloben primer bi bil, da bi vsi porabniki na omrežje priključili samo kondenzatorje. Omrežje bi bilo zasičeno s tokom, v vodnikih bi bile termične izgube, števci delovne energije ($\int Pdt$) na strani odjemalcev pa bi izmerili nič joulov. V izogib temu imajo veliki odjemalci vgrajene tudi števce jalove energije ($\int |Q|dt$), kajti ta bremenijo omrežje in preprečuje dobavo delovne energije drugim odjemalcem. Na udaru so odjemalci s številnimi ali z močnimi elektromotorji, $\varphi > 0$. Vzemimo motor, ki ima delovno moč P in faktor delavnosti $\cos\varphi$; jalova moč motorja je $Q = P \operatorname{tg}\varphi > 0$. Težavo odpravi kompenzacija jalove moči. Vzporedno k motorju priključimo kondenzator s kapacitivnostjo C , katerega jalova moč je $Q_C = \operatorname{Im}\left[\frac{1}{2}Y_C^*|U|^2\right] = -\frac{1}{2}\omega CU_m^2 < 0$. Celotna kompleksna moč je $P + i(Q - \frac{1}{2}\omega CU_m^2)$. Jalova moč motorja bo kompenzirana, če bo $C = 2Q/\omega U_m^2 = Q/\omega U_{\text{ef}}^2$. Energija se ne izmenjuje več med omrežjem in motorjem, ampak kar med kondenzatorjem in motorjem. Odjemalci energije uporabljajo v ta namen kondenzatorske baterije, ki se jih po potrebi elektronsko vklaplja in izklaplja. Vlogo kompenzatorja vrši tudi nadvzbujen sinhronski generator. Pri delni kompenzaciji, $C \neq Q/\omega U_{\text{ef}}^2$, ostane nekaj jalove moči. Faktor delavnosti $\cos\varphi_1$ pri delno kompenzirani jalovi moči motorja je

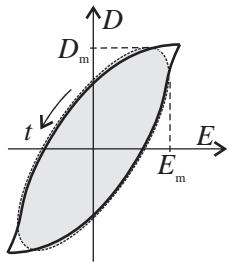
$$\cos\varphi_1 = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q - \omega CU_{\text{ef}}^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg}\varphi - \omega CU_{\text{ef}}^2/P)^2}}.$$

Na omrežje $U_{\text{ef}} = 230$ V, $f = 50$ Hz naj je priključen motor s $P = 2$ kW in $\cos\varphi = 0,8$. Določimo interval kapacitivnosti, da bo faktor $\cos\varphi_1 > 0,95$. Iz podatkov sledijo $\operatorname{tg}\varphi = 0,75$, $Q = 1,5$ kvar in $C = 90,3 \mu\text{F}$, ki v celoti kompenzira jalovo moč. Mejni vrednosti C_1 in C_2 intervala kapacitivnosti sledita iz zgornje enačbe,

$$(C_1, C_2) = (\operatorname{tg}\varphi \pm \operatorname{tg}\varphi_1) \frac{P}{\omega U_{\text{ef}}^2} = \left(\sqrt{(1/\cos^2\varphi) - 1} \pm \sqrt{(1/\cos^2\varphi_1) - 1} \right) \frac{P}{\omega U_{\text{ef}}^2} = (50,7 \mu\text{F}, 129,8 \mu\text{F}).$$



Faktor $\cos \varphi_1 > 0,95$ oziroma $\operatorname{tg} \varphi_1 < 0,33$ je namreč področje, v katerem jalove energije ni potrebno plačevati.



Kompleksni dielektričnost in permeabilnost. Kompleksni račun ponuja možnost linearizacije procesov histereznega magnetenja in elekturenja. Histereza magnetikov je aktualna že pri nizkih frekvencah, dielektrikov pa šele pri visokih. V ireverzibila procesa sta vpletena termična učinka in akumulacija energij; in kompleksni permeabilnost in dielektričnost povzemata prav to dvoje. Če histerezno zanko aproksimiramo s poševno elipso, se odpre možnost vpeljave kompleksnih snovnih konstant na način, ki je zelo podoben vpeljavi kompleksne moči. Postopek je pri obeh identičen; opravimo ga za dielektrik. Naj je ta v ploščnem kondenzatorju, ki je vzbujan s sinusnim virom. Poljska jakost je $E(t) = E_m \cos(\omega t + \alpha_E)$, napetost med ploščama je $u(t) = E_m d \cos(\omega t + \alpha_E)$, gostota pretoka je $D(t) = D_m \cos(\omega t + \alpha_D)$ in naboju na (+) plošči je $Q(t) = D_m S \cos(\omega t + \alpha_D)$, pri čemer je $\alpha_D < \alpha_E$, saj gostota fazno kasni za jakostjo, S in d pa sta površina plošč in razmik med njima. Polnilni tok je $i(t) = Q'(t) = -\omega D_m S \sin(\omega t + \alpha_D)$. Moč elekturenja je

$$\begin{aligned} p_{\text{elek.}}(t) &= u(t)i(t) = -\omega E_m D_m d S \cos(\omega t + \alpha_E) \sin(\omega t + \alpha_D) = \frac{1}{2}\omega E_m D_m d S (\sin(\alpha_E - \alpha_D) - \sin(2\omega t + \alpha_E + \alpha_D)) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\omega E_m D_m d S \sin(\alpha_E - \alpha_D)}_{\text{moč dielektričnega segrevanja } p_{\text{diel.}}(t)} (1 + \cos 2(\omega t + \alpha_E)) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\omega E_m D_m d S \cos(\alpha_E - \alpha_D)\right)}_{\text{moč izmenjevanja električne energije } p_e(t)} \sin 2(\omega t + \alpha_E) \end{aligned}$$

Poprečna moč dielektričnega segrevanja, $\overline{p_{\text{diel.}}(t)} = \frac{1}{2}\omega E_m D_m d S \sin(\alpha_E - \alpha_D)$, je sorazmerna frekvenci in sinusu faznega zaostanka gostote za jakostjo polja. Integral izmenjevalne moči $p_e(t)$ je električna energija,

$$W_e(t) = -\frac{1}{2}\omega E_m D_m d S \cos(\alpha_E - \alpha_D) \int \sin 2(\omega t' + \alpha_E) dt' = \frac{1}{4}E_m D_m d S \cos(\alpha_E - \alpha_D) \cos 2(\omega t + \alpha_E) + W_{e0} \geq 0.$$

Nič je njena najmanjša vrednost, zato je integracijska konstanta $W_{e0} = E_m D_m d S \cos(\alpha_E - \alpha_D)/4$. Od tod sledi:

$$W_e(t) = \frac{1}{4}E_m D_m d S \cos(\alpha_E - \alpha_D) (1 + \cos 2(\omega t + \alpha_E)) \quad \Rightarrow \quad \overline{W_e(t)} = \frac{1}{4}E_m D_m d S \cos(\alpha_E - \alpha_D).$$

Izraz $2\omega \overline{W_e(t)}$ ustrezna amplitudi moči $p_e(t)$, po obliki pa je podoben poprečni moči dielektričnih izgub,

$$2\omega \overline{W_e(t)} = \frac{1}{2}\omega E_m D_m d S \cos(\alpha_E - \alpha_D) \quad \overline{p_{\text{diel.}}(t)} = \frac{1}{2}\omega E_m D_m d S \sin(\alpha_E - \alpha_D).$$

Zapisa asocirata na Eulerjevo formulo. Če časovnim funkcijam gostote $D_m \cos(\omega t + \alpha_D)$ in jakosti $E_m \cos(\omega t + \alpha_E)$, priredimo kompleksni amplitudi $D_m e^{i\alpha_D}$ in $E_m e^{i\alpha_E}$ ter tvorimo njun kvocient,

$$\frac{D_m e^{i\alpha_D}}{E_m e^{i\alpha_E}} = \frac{D_m}{E_m} e^{-i(\alpha_E - \alpha_D)} = \underbrace{\frac{D_m}{E_m} \cos(\alpha_E - \alpha_D)}_{\varepsilon'} - i \underbrace{\frac{D_m}{E_m} \sin(\alpha_E - \alpha_D)}_{\varepsilon''} = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon.$$

dobimo t. i. kompleksno dielektričnost. Realni in imaginarni del dobita razvidni vlogi v prejšnjih izrazih:

$$2\omega \overline{W_e(t)} = \frac{1}{2}\omega E_m D_m dS \cos(\alpha_E - \alpha_D) = \frac{1}{2}\omega \varepsilon' E_m^2 dS \quad \overline{p_{\text{diel.}}(t)} = \frac{1}{2}\omega E_m D_m dS \sin(\alpha_E - \alpha_D) = \frac{1}{2}\omega \varepsilon'' E_m^2 dS$$

Poprečna moč dielektričnih izgub spominja na poprečje joulskih izgub zaradi prevodnosti γ dielektrika, $\overline{p_j(t)} = \frac{1}{2}\gamma E_m^2 dS$.

Te moči v izvajanje nismo vključili, lahko pa bi jo, če bi k moči elekture dodali še moč $p_j(t) = \gamma E_m^2 dS \cos^2(\omega t + \alpha_E)$.

Kvaliteto dielektrika $Q_{\text{diel.}}$ določa kvocient:

$$Q_{\text{diel.}} = \frac{2\omega \overline{W_e(t)}}{\overline{p_{\text{diel.}}(t)} + \overline{p_j(t)}} = \frac{\omega \varepsilon'}{\omega \varepsilon'' + \gamma}.$$

Identično postopamo pri histereznu magnetenju jedra s presekom S in srednjo dolžino l . Kompleksna permeabilnost, poprečna magnetna energija in poprečna moč histereznih izgub so:

$$\frac{B_m e^{i\alpha_B}}{H_m e^{i\alpha_H}} = \frac{B_m}{H_m} e^{-i(\alpha_H - \alpha_B)} = \underbrace{\frac{B_m}{H_m} \cos(\alpha_H - \alpha_B)}_{\mu'} - i \underbrace{\frac{B_m}{H_m} \sin(\alpha_H - \alpha_B)}_{\mu''} = \mu' - i\mu'' = \mu$$

$$\overline{W_m(t)} = \frac{1}{4}\mu' H_m^2 l S \quad \overline{p_{\text{his.}}(t)} = \frac{1}{2}\omega \mu'' H_m^2 l S.$$

Histereznim se pridružujejo še vrtinčne oziroma jouske izgube v lamelah jedra zaradi vrtinčnih tokov; te smo ocenili v okviru Faradayeve indukcije, $\overline{p_j(t)} = \omega^2 \gamma B_m^2 d^2 l S / 24 = \omega^2 \gamma |\mu|^2 H_m^2 d^2 l S / 24$; γ in d sta specifična prevodnost in debelina lamel, $|\mu|$ pa je absolutna vrednost kompleksne permeabilnosti lamel. Kvaliteto jedra določa sledeči izraz:

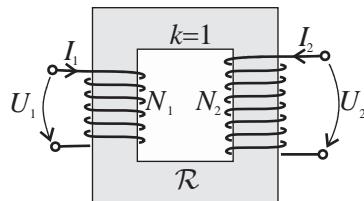
$$Q_{\text{jedra}} = \frac{2\omega \overline{W_m(t)}}{\overline{p_{\text{his.}}(t)} + \overline{p_j(t)}} = \frac{\omega \mu'}{\omega \mu'' + \omega^2 \gamma |\mu|^2 d^2 / 12}.$$

§18. Analiza izmeničnih električnih vezij

Uvod. Vprašanja analize izmeničnih vezij so podobna tistim iz enosmernih in kondenzatorskih vezij (določitev napetosti, tokov, nabojev, energij, moči), pridružijo pa se jim nova, ki so vezana na tuljavo in sklop tuljav, simbolični račun, imitance in frekvenčno analizo teh vezij; pretekle izkušnje bodo pri tem vsekakor dobrodošle. Postopki vejnih napetosti in vejnih tokov, spojiščnih potencialov in zančnih tokov so aktualni tudi v izmeničnih vezjih. Pri vezjih s sklopljenimi tuljavami se neposrednega določanja vejnih napetosti in spojiščnih potencialov rajši izogibamo; izkaže se, da si naložimo več dela, kot bi bilo potrebno. V nadaljevanju bodo omenjene postopke uporabljali in jih na ta način utrjevali.



32:11



Transformator tvorijo navitji in jedro, ki zagotavlja čvrst magnetni sklop med njima. Večina magnetnega polja je v jedru, nekaj malega tudi izven, največ v predelu ovojev. V napravi se sprošča toplota, ki je posledica ireverzibilnega magnetenja, vrtinčnih tokov in upornosti navitij. Za začetek poenostavimo okoliščine do te mere, da zanemarimo izgube in magnetno polje izven jedra. Izhodiščem ustrezata popolno sklopljeni navitji z induktivnostmi $L_1 = N_1^2 / \mathcal{R}$, $L_2 = N_2^2 / \mathcal{R}$ in $M = \sqrt{L_1 L_2}$, kjer je \mathcal{R} magnetna upornost jedra. Sklopljeni navitji sta dvovhodno vezje (četveropol). Čeravno sta vhoda enakovredna, pravimo npr. prvemu primar, drugemu sekundar; na primar priključujemo običajno vir (aktivno vezje), na sekundar breme (porabnik). Proučimo lastnosti četveropola, ki ju povezuje. Napetostni enačbi navitij,

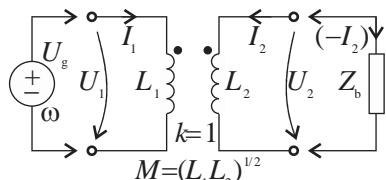
$$U_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega \sqrt{L_1 L_2} I_2 \quad U_2 = i\omega \sqrt{L_1 L_2} I_1 + i\omega L_2 I_2,$$

preoblikujmo tako, da količini primarja izrazimo s količinama sekundarja:

$$I_1 = \frac{U_2 - i\omega L_2 I_2}{i\omega \sqrt{L_1 L_2}} \quad \Rightarrow \quad U_1 = i\omega L_1 \frac{U_2 - i\omega L_2 I_2}{i\omega \sqrt{L_1 L_2}} + i\omega \sqrt{L_1 L_2} I_2 = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}} U_2.$$

Razmerja induktivnosti izrazimo s števili ovojev, vpeljemo prestavo n in dobimo osnovni enačbi transformatorja:

$$U_1 = \frac{N_1}{N_2} U_2 \quad I_1 = \frac{U_2}{i\omega \sqrt{L_1 L_2}} - \frac{N_2}{N_1} I_2 \quad \text{pri } \frac{N_1}{N_2} = n \text{ sta} \quad U_1 = n U_2 \quad I_1 = \frac{U_1}{i\omega L_1} + n^{-1}(-I_2).$$



Iz njiju izhaja nekaj pomembnih ugotovitev:

- 1) Kazalca napetosti med sponkama navitij sta v razmerju n (števila ovojev), $U_1/U_2 = N_1/N_2 = n$.
- 2) Pri odprtih sponkah na sekundarju, $I_2 = 0$, je primarni tok enak magnetilnemu toku, $I_1|_{I_2=0} = I_{1m} = U_1/i\omega L_1$.
- 3) Skozi breme z impedanco Z_b je tok $(-I_2) = U_2/Z_b$. Na primarni strani se toku I_{1m} pridruži reakcijski tok I_{1r} ,

$$I_1 = I_{1m} + n^{-1}(-I_2) = I_{1m} + n^{-1}U_2/Z_b = I_{1m} + I_{1r} \quad I_{1r}/(-I_2) = n^{-1} = N_2/N_1.$$

- 4) Magnetna napetost vzdolž jedra je $\theta = N_1 I_1 + N_2 I_2 = N_1 I_{1m} + N_1 (-N_2/N_1) I_2 + N_2 I_2 = N_1 I_{1m}$. Magnetni napetosti sekundarnega in reakcijskega toka sta v ravnovesju; režim v magnetnem jedru je neodvisen od Z_b .
- 5) Vhodna impedanca je

$$Z_{vh.} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{nU_2}{U_2/i\omega\sqrt{L_1L_2} + n^{-1}(-I_2)} = \frac{n^2 Z_b}{Z_b/i\omega L_2 + 1}.$$

- 6) Vhodna kompleksna moč je $S_{vh.} = \frac{1}{2}U_1 I_1^* = \frac{1}{2}U_1 I_{1m}^* + \frac{1}{2}U_1 n^{-1}(-I_2)^* = iQ_{1m} + \frac{1}{2}U_2 (-I_2)^* = iQ_{1m} + S_b$ oziroma

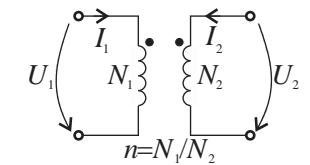
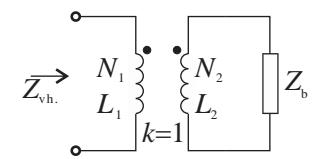
$$P_{vh.} = P_b \quad \text{in} \quad Q_{vh.} = Q_{1m} + Q_b.$$

Vhodna in bremenska delovna moč sta enaki, vhodna jalova pa je za jalovo moč magnetenja jedra večja od bremenske. Zadnji enačbi sta zaradi induktivnega značaja četveropola pričakovani. Transformator postane tehnično zanimiv, če je dimenzioniran tako, da je za predvidene impedance bremen $\omega L_2 \gg |Z_b|$. Takrat je magnetilni tok

$$I_{1m} = \frac{U_1}{i\omega L_1} = \frac{U_2}{i\omega\sqrt{L_1L_2}} = \frac{Z_b(-I_2)}{i\omega L_2 n} = \frac{Z_b I_{1r}}{i\omega L_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|I_{1m}|}{|I_{1r}|} = \frac{|Z_b|}{\omega L_2} \ll 1$$

zanemarljiv glede na reakcijski tok. Tej zahtevi zadosti jedro z ustrezno majhno magnetno upornostjo $\mathcal{R} = l/\mu S$ (visoka permeabilnost, velik presek in kratke gostotnice). Dobri transformatorji imajo zgornje razmerje manjše od 0,01. V vrsti izračunov magnetilni tok celo zanemarimo, kar je enako, kot če bi privzeli idelano jedro, jedro s permeabilnostjo $\mu \rightarrow \infty$. Strukturi navitij na jedru, ki je idalna glede sklopa, izgub in permeabilnosti, rečemo idealni transformator; dvovahodno vezje določa le še razmerje števila ovojev. Prejšnje relacije se v tem primeru zaradi $I_{1m} = 0$ zelo poenostavijo:

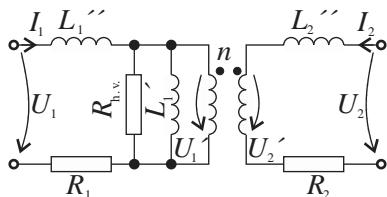
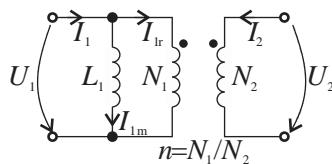
$$U_1 = nU_2 \quad I_1 = -n^{-1}I_2 \quad Z_{vh.} = n^2 Z_b \quad S_{vh.} = S_b.$$



Dobro dimenzioniran transformator je ena redkih naprav, ki se tako dobro približa svojemu idealu. Osnovno sporočilo je zajeto v napetostni in tokovni enačbi. Energija nemoteno prehaja iz primarne na sekundarno stran, napetost in tok pa se transformirata v obratnem razmerju. Če bi energije velikih moči iz elektrarn prenašali na nivoju 400 V (kar je efektivna vrednost omrežne medfazne napetosti trifaznega sistema), bi to zahtevalo izredno debele vodnike; to bi bilo potratno in neekonomično. Rešitev so transformatorske postaje, ki napetost (okoli 1 kV) iz elektrarn dvignejo na višje nivoje (20 kV, 110 kV, 400 kV), toke pa spustijo na ustrezeno nižje nivoje. Energija zatem vstopa v omrežja, se vzdolž njih širi in na več mestih tudi izstopa. Tam so ponovno transformatorske postaje, ki visoke napetosti znižajo do nizkonapetostnega nivoja 400 V. Elektroenergetski sistem je vseevropski. Kot celota je robusten in tudi krhek; razpet je med visokimi pričakovanji odjemalcev po razpoložljivi in kvalitetni energiji ter trenutnimi zmožnostmi elektrarn in omrežja.



13:19



Idealni transformator je realnemu zelo blizu. Vprašajmo se, kako bi vezje idealnega transformatorja dopolnili, da bi zajeli vse tisto, kar ju ločuje. Če vezje v smislu enačbe $I_1 = I_{1m} + I_{1r}$ dopolnimo s tuljavo z induktivnostjo L_1 , dobimo vezje, ki je ekvivalentno sklopu dveh navitij. Tok I_{1r} vstopa v primar idealnega transformatorja, tok I_{1m} pa v tuljavo z induktivnostjo L_1 . Navitji v resnici nista idealno sklopljeni, $M^2 < L_1 L_2$. Vpeljimo razcep $L_1 = L'_1 + L''_1$ in $L_2 = L'_2 + L''_2$, da sta $L'_1 L'_2 = M^2$ in $(L'_1 / L'_2)^{1/2} = n$; L'_1 in L'_2 sta induktivnosti popolno sklopljenih tuljav, L''_1 in L''_2 pa sta stresani induktivnosti; prvi dve se navezujeta na magnetno polje v jedru, drugi dve pa na polje izven njega. Transformator se po tem razcepu ne naslavlja na induktivnosti L_1 in L_2 , ampak na L'_1 in L'_2 , induktivnostma L''_1 in L''_2 pa pripadata magnetno nepovezani tuljavi na primarni in sekundarni strani; njima se pridružita upora z upornostma R_1 in R_2 . Histerezne in vrtinčne izgube določata kvaliteta jedra in polje v njem; izgube odslikuje upor z upornostjo $R_{h,v} = \omega L'_1 / Q_{\text{jedra}}$, ki je vzporeden k tuljavi z induktivnostjo L'_1 . Nadomestno vezje transformatorja opisujejo tri napetostne in ena tokovna enačba,

$$U_1 = (R_1 + i\omega L''_1)I_1 + U'_1 \quad U_2 = (R_2 + i\omega L''_2)I_2 + U'_2 \quad U'_1 = nU'_2 \quad I_1 = \frac{U'_1}{R_{h,v}} + \frac{U'_1}{i\omega L'_1} + n^{-1}(-I_2).$$

Linija. Enačbi linije v časovnem prostoru sta:

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} + r_1 i(z, t) + \ell \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} + g_2 u(z, t) + c \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = 0;$$

r_1 in ℓ pomenita vzdolžni upornost in induktivnost linije, parametra g_2 in c pa prečni prevodnost in kapacitivnost na meter dolžine. Pri sinusnem vzbujanju imata tok in napetost kjerkoli na liniji sinusno časovno odvisnost. Njuni amplitudi in fazna kota sta funkciji koordinate z : $u(z, t) = U_m(z) \cos(\omega t + \alpha_u(z))$ in $i(z, t) = I_m(z) \cos(\omega t + \alpha_i(z))$. Toku $i(z, t)$ in napetosti $u(z, t)$ priredimo krajevni funkciji kazalcev napetosti in toka na sledeč način:

$$i(z, t) = \operatorname{Re}[I_m(z)e^{i(\omega t + \alpha_i(z))}] = \operatorname{Re}[I_m(z)e^{i\alpha_i(z)}e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[I(z)e^{i\omega t}] \Rightarrow I(z) = I_m(z)e^{i\alpha_i(z)},$$

$$u(z, t) = \operatorname{Re}[U_m(z)e^{i(\omega t + \alpha_u(z))}] = \operatorname{Re}[U_m(z)e^{i\alpha_u(z)}e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[U(z)e^{i\omega t}] \Rightarrow U(z) = U_m(z)e^{i\alpha_u(z)}.$$

Kazalca $U(z)$ in $I(z)$ sta kompleksni funkciji vzdolžne koordinate linije in združujeta amplitudo in fazni kot posamezne količine. Običajno je na vhod linije priključeno aktivno vezje (vir), na izhod pa breme z impedanco Z_b . Ugotoviti želimo: odvisnosti $U(z)$ in $I(z)$, kako se impedanca bremena transformira na vhodno stran, kolikšna sta naprej in nazaj potupoča valova, itn. Funkciji $u(z, t) = \operatorname{Re}[U(z)e^{i\omega t}]$ in $i(z, t) = \operatorname{Re}[I(z)e^{i\omega t}]$ vstavimo v prvo enačbo,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} + r_1 i(z, t) + \ell \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} = \\ & \frac{\partial \operatorname{Re}[U(z)e^{i\omega t}]}{\partial z} + r_1 \operatorname{Re}[I(z)e^{i\omega t}] + \ell \frac{\partial \operatorname{Re}[I(z)e^{i\omega t}]}{\partial t} = \operatorname{Re}\left[\left(\underbrace{\frac{dU(z)}{dz} + r_1 I(z) + i\omega \ell I(z)}_0\right) e^{i\omega t}\right] = 0, \end{aligned}$$

in podobno storimo še z drugo; dobimo sklopljeni diferencialni enačbi,

$$\frac{dU(z)}{dz} + (r_1 + i\omega \ell)I(z) = 0 \quad \frac{dI(z)}{dz} + (g_2 + i\omega c)U(z) = 0.$$

Če drugo odvajamo in vanjo vstavimo prvo, dobimo diferencialno enačbo drugega reda za tok,

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} + h^2 I(z) = 0 \quad h = \sqrt{-(r_1 + i\omega \ell)(g_2 + i\omega c)} = \beta - i\alpha,$$

kjer so h konstanta širjenja, β fazno število in α konstanta slabljenja. Splošna rešitev enačbe je

$$I(z) = A e^{-ihz} + B e^{ihz} \quad \dots \quad I(z) = A e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} + B e^{\alpha z} e^{i\beta z}.$$

Prvi sumand predstavlja naprej, drugi pa nazaj po osi Z potujoči val. Rešitev za napetost sledi iz druge enačbe:

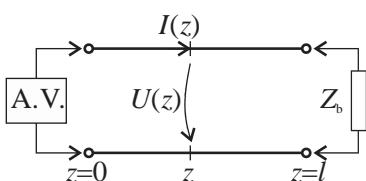
$$U(z) = -\frac{1}{g_2 + i\omega c} \frac{dI(z)}{dz} = \frac{ih}{g_2 + i\omega c} (A e^{-ihz} - B e^{ihz}) = Z_k (A e^{-ihz} - B e^{ihz}) \quad Z_k = \sqrt{\frac{r_1 + i\omega\ell}{g_2 + i\omega c}} = \frac{1}{Y_k},$$

kjer sta Z_k , Y_k karakteristični imitanci linije. Konstanta širjenja (h) in karakteristična impedanca (Z_k) sta ključna podatka linije. Nadzemni ali kablirani vodi, ki se uporabljajo pri prenosu električne energije, imajo vzdolžne in prečne parametre paroma primerljivih vrednosti, okvirno velja: $r_1 > \omega\ell$ in $g_2 < \omega c$. Drugače je pri dvovodih in kablih, ki služijo prenosu visokofrekvenčnih signalov; tam dominirata reaktivna člena in velja: $\omega\ell \gg r_1$ in $\omega c \gg g_2$. Takrat za h in Z_k uporabimo približka, ki ju dobimo z upoštevanjem prvih dveh členov pri razvoju korenskih funkcij v Taylorjevi vrsti,

$$Z_k = \sqrt{\frac{\ell}{c}} \sqrt{\frac{1 - i r_1/\omega\ell}{1 - i g_2/\omega c}} \cong \sqrt{\frac{\ell}{c}} \left(1 - i \frac{r_1}{2\omega\ell}\right) \left(1 + i \frac{g_2}{2\omega c}\right) \cong \sqrt{\frac{\ell}{c}} \left(1 + i \frac{g_2\ell - r_1 c}{2\omega\ell c}\right),$$

$$h = \omega\sqrt{\ell c} \sqrt{(1 - i r_1/\omega\ell)(1 - i g_2/\omega c)} \cong \omega\sqrt{\ell c} \left(1 - i \frac{r_1}{2\omega\ell}\right) \left(1 - i \frac{g_2}{2\omega c}\right) \cong \underbrace{\omega\sqrt{\ell c}}_{\beta} - i \underbrace{\frac{r_1 c + g_2 \ell}{2\sqrt{\ell c}}}_{\alpha},$$

ali pa rezultata kar v celoti poenostavimo; govorimo o privzetem idealni liniji, $Z_k \cong \sqrt{\ell/c}$ in $h \cong \beta \cong \omega\sqrt{\ell c}$.



Imejmo linijo dolžine l , ki jo določata Z_k in h . Poiščimo odnosa med vhodnima $U_1 = U(0)$ in $I_1 = I(0)$ in izhodnima količinama $U_2 = U(l)$ in $I_2 = I(l)$. Izhajamo iz

$$I(z) = A e^{-ihz} + B e^{ihz} \quad U(z) = Z_k A e^{-ihz} - Z_k B e^{ihz}$$

in vanju vstavimo razmere na izhodu ter izrazimo konstanti A in B ,

$$\begin{aligned} I_2 &= I(l) = A e^{-ihl} + B e^{ihl} & U_2 &= U(l) = Z_k A e^{-ihl} - Z_k B e^{ihl}, \\ A &= \frac{1}{2Z_k} (Z_k I_2 e^{ihl} + U_2 e^{ihl}) & B &= \frac{1}{2Z_k} (Z_k I_2 e^{-ihl} - U_2 e^{-ihl}). \end{aligned}$$

Tok in napetost vzdolž linije sta

$$I(z) = I_2 \cos h(l-z) + iY_k U_2 \sin h(l-z) \quad U(z) = iZ_k I_2 \sin h(l-z) + U_2 \cos h(l-z).$$

Na vhodu v linijo sta:

$$I_1 = I(0) = I_2 \cos hl + iY_k U_2 \sin hl \quad U_1 = U(0) = iZ_k I_2 \sin hl + U_2 \cos hl.$$

Razmere na liniji so odvisne od imitance bremena (Z_b, Y_b), $U_2 = Z_b I_2$, in argumenta hl . Vhodna impedanca v linijo je

$$Z_{vh} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cos hl + iZ_k I_2 \sin hl}{I_2 \cos hl + iY_k U_2 \sin hl} \Big|_{U_2=Z_b I_2} = \frac{Z_b + iZ_k \operatorname{tg} hl}{1 + iY_k Z_b \operatorname{tg} hl}.$$

Linija impedanco bremena očitno preslika oziroma transformira v neko drugo impedanco. Če to želimo, je to vsekakor dobrodošla možnost, v nasprotnem pa imamo zaradi tega lahko tudi težave. Oglejmo si nekaj možnosti.

KRATEK STIK IN ODPRTJE SPONKE. Pri kratkem stiku na izhodu, $Z_b = 0, U_2 = 0$, so:

$$I(z) = I_2 \cos h(l-z) \quad U(z) = iZ_k I_2 \sin h(l-z) \quad Z_{vh} = iZ_k \operatorname{tg} hl,$$

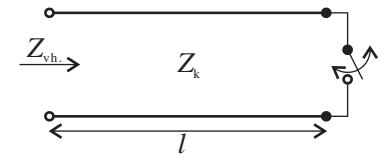
Pri odprtih sponkah, $|Z_b| = \infty, I_2 = 0$, so:

$$I(z) = iY_k U_2 \sin h(l-z) \quad U(z) = U_2 \cos h(l-z) \quad Z_{vh} = -iZ_k \operatorname{ctg} hl.$$

Če je linija neizgubna, $h = \beta$, sta vhodni imitanci čisto reaktivni. Linija, ki bo daljsa od nje za večkratnik polovice valovne dolžine, $n\lambda/2 = \pi n/\beta$, bo imala enako vhodno imitanco; če bo daljsa za $n\lambda/4$, bo spremenila značaj, npr. iz induktivnega v kapacitivni. Če je linija izgubna, $h = \beta - i\alpha$, so funkcije vrednosti trigonometričnih funkcij kompleksne. Pri velikem argumentu, $|hl| \gg 1, \operatorname{tg} hl \cong i$, sta vhodni imitanci odprte in kratko staknjene linije praktično enaki, $Z_{vh} \cong Z_k$. Vhodno imitanco v celoti determinira linija sama.

SPOŠNO BREME. Pri poljubnem bremenu, $0 < |Z_b| < \infty$, imata tok in napetost sledeči porazdelitvi:

$$I(z) = I_2 (\cos h(l-z) + iY_k Z_b \sin h(l-z)) \quad U(z) = I_2 (Z_b \cos h(l-z) + iZ_k \sin h(l-z)).$$



Pri neizgubni liniji se vhodna imitanca z daljšanjem linije periodično spreminja, perioda je $\lambda/2$; njene vrednosti ležijo na krožnici s središčem na realni osi. Pri izgubni liniji se vhodna imitanca z daljšanjem linije spreminja; vrednosti imitance ležijo na spirali, ki se zavija okoli točke karakteristične imitance; pri $|hl| \gg 1$ je $Z_{vh} \cong Z_k$.

PRILAGOJENO BREME. Posebno mesto med bremenimi ima prilagojeno breme, to je tisto, katerega impedanca $Z_b = Z_k$,

$$I(z) = I_2(\cos h(l-z) + i \sin h(l-z)) = I_2 e^{ih(l-z)} \quad U(z) = Z_k I_2(\cos h(l-z) + i \sin h(l-z)) = Z_k I_2 e^{ih(l-z)}.$$

V tem primeru na liniji ni nazaj potajočega vala (konstanta $B = 0$); vhodna impedanca Z_{vh} je enaka Z_k . Pri takšni izbiri bremena dolžina linije z vidika vhodnih sponk ne igra več nobene vloge. To je izredno pomembno: ni več bojazni, da bi dolžina linija spremenila značaj bremena. Ker na liniji ni odbitega vala, so tudi izgube na njej minimalne.

NADOMESTNO VEZJE LINIJE. Porazdeljena tok in napetost dajeta vpogled v razmere na liniji, kadar pa nas te ne zanimajo, je primerno, da linijo nadomestimo z dvovhodnim vezjem. Pogosto izbiramo med četveropoloma T in Π . Glede na enačbi linije, ki povezujeta vhodni in izhodni količini,

$$I_1 = I_2 \cos hl + i Y_k U_2 \sin hl \quad U_1 = i Z_k I_2 \sin hl + U_2 \cos hl,$$

storimo tako še z nadomestnim vezjem. Izberimo četveropol T z impedancami Z_1, Z_2 in Z_3 . Zapišemo napetostni enačbi:

$$U_1 = Z_1 I_1 + Z_3(I_1 - I_2) = (Z_1 + Z_3)I_1 - Z_3 I_2 \quad U_2 = -Z_2 I_2 + Z_3(I_1 - I_2) = Z_3 I_1 - (Z_2 + Z_3)I_2.$$

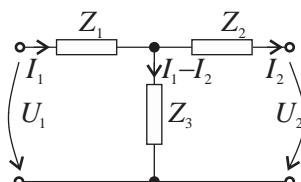
Iz druge izrazimo I_1 , ga vstavimo v prvo in dobimo vhodni količini izraženi z izhodnima:

$$I_1 = \frac{1}{Z_3} U_2 + \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} I_2 \quad U_1 = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_3} U_2 + \frac{Z_1 Z_2 + Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_3} I_2.$$

Iz primerjave koeficientov sledijo impedance:

$$Z_3 = -\frac{i Z_k}{\sin hl} \quad Z_1 = Z_2 = \frac{i Z_k (1 - \cos hl)}{\sin hl}.$$

Na podoben način dobimo tudi impedance Z_{12}, Z_{23} in Z_{31} nadomestnega četveropola Π , vendar bomo ubrali drugačno pot. Iz napetostnih enačb četveropola T izrazimo oba toka,



$$I_1 = \frac{(Z_2 + Z_3)U_1 - Z_3U_2}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \quad I_2 = \frac{Z_3U_1 - (Z_1 + Z_3)U_1}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1},$$

za četveropol Π pa zapišimo tokovni enačbi,

$$I_1 = Y_{31}U_1 + Y_{12}(U_1 - U_2) = (Y_{31} + Y_{12})U_1 - Y_{12}U_2 \quad I_2 = Y_{12}(U_1 - U_2) - Y_{23}U_2 = Y_{12}U_1 - (Y_{12} + Y_{23})U_2.$$

Iz primerjave koeficientov sledijo impedance četveropola Π :

$$Z_{12} = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_3} \quad Z_{23} = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1} \quad Z_{31} = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_2},$$

te pa nadalje izrazimo s parametri linije,

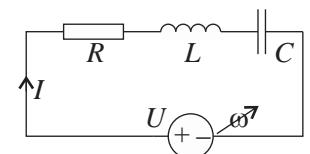
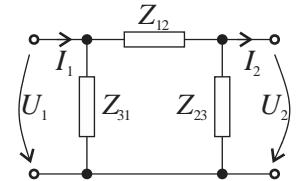
$$Z_{12} = iZ_k \sin hl \quad Z_{23} = Z_{31} = -\frac{iZ_k(1 + \cos hl)}{\sin hl}.$$

Izberimo primer neizgubne linije dolžine $l = \lambda/8$ s karakteristično impedanco 50Ω . Argument $hl = (2\pi/\lambda)(\lambda/8) = \pi/4$.

Impedance četveropolov T in Π so:

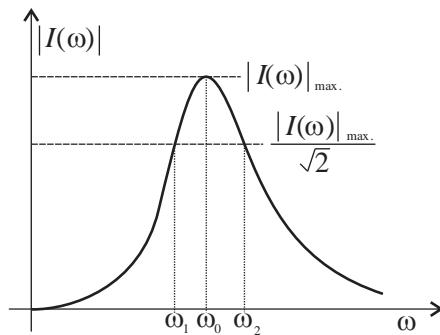
$$\begin{aligned} Z_1 = Z_2 &= \frac{iZ_k(1 - \cos hl)}{\sin hl} = i50(\sqrt{2} - 1) \Omega & Z_3 &= -\frac{iZ_k}{\sin hl} = -i50\sqrt{2} \Omega \\ Z_{12} &= iZ_k \sin hl = i50\sqrt{2} \Omega & Z_{23} = Z_{31} &= -\frac{iZ_k(1 + \cos hl)}{\sin hl} = -i50(\sqrt{2} + 1) \Omega. \end{aligned}$$

Resonanca. Zaporedna in vzporedna vezava kondenzatorja, tuljave in upora sta klasična primera resonančnih oziroma nihajnih vezij. Ob njiju bomo spoznali osnovne pojme, kot so resonančna krivulja, resonančna frekvenca, pasovna širina in kvaliteta, ki so pomembni tudi pri drugih resonančnih vezjih.



ZAPOREDNI NIHAJNI KROG. Impedanca zaporednega nihajnega kroga je $Z = R + i\omega L + 1/i\omega C$. Če je dvopol priključen na vir sinusne napetosti oziroma frekvenčni generator nastavljive krožne frekvence ω , sta kazalec toka in amplituda sledeča:

$$I = \frac{U}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} = I(\omega) \quad |I| = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = |I(\omega)|.$$



Pri spremenjanju frekvence vira doseže funkcija $|I(\omega)|$ maksimum pri frekvenci $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, ko je $\omega_0L - 1/\omega_0C = 0$. Vezju se zgodi tokovna resonanca: $|I(\omega)|_{\text{max.}} = |I(\omega_0)| = |U|/R$. Pojav poznamo iz nihanj v fiziki, ko zunajna sila izzove ekstremne elongacije. Govorimo o vsiljenem nihanju, resonančni krivulji $|I(\omega)|$ in resonančni frekvenci ω_0 . S strani vira se nihajni krog v resonanci vede kot upor (reaktivna moč je enaka nič); med tuljavo in kondenzatorjem se stalno izmenjuje energija. Poprečni energiji v tuljavi, $\overline{W_m(t)} = \frac{1}{4}L|I|^2$, in kondenzatorju, $\overline{W_e(t)} = \frac{1}{4}C|I/i\omega C|^2$, postaneta v resonanci enaki.

Kvaliteto nihajnega kroga $Q_{\text{n.k.}}$ določa kvocient,

$$Q_{\text{n.k.}} = \frac{2\omega_0 \overline{W_m(t)}}{p_J(t)} = \frac{2\omega_0 \overline{W_e(t)}}{p_J(t)} = \frac{2\omega_0 \frac{1}{4}L|I(\omega_0)|^2}{\frac{1}{2}R|I(\omega_0)|^2} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \dots = \frac{|i\omega_0 L I|}{|RI|} = \frac{|I/i\omega_0 C|}{|RI|},$$

ki pri zaporednem nihajnjem krogu ustreza tudi razmerju med amplitudo napetosti na tuljavi oziroma kondenzatorju in amplitudo napetosti na uporu. Kvaliteta nihajnega kroga je v neposredni zvezi s širino resonančne krivulje $|I(\omega)|$; širina krivulje je frekvenčni interval, v katerem je $|I(\omega)| \geq |I(\omega)|_{\text{max.}}/\sqrt{2}$. Mejni frekvenci ω_1 in ω_2 sledita iz neenačbe

$$\frac{|\omega L - 1/\omega C|}{R} = \left| \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right| \frac{\omega_0 L}{R} = \left| \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right| Q_{\text{n.k.}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{Q_{\text{n.k.}}} \quad \text{in} \quad \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{Q_{\text{n.k.}}}.$$

Vsota in razlika enačb vodita k rešitvi,

$$\frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_0} + \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = (\omega_2 + \omega_1) \left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1 \omega_2} \right) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_1} = (\omega_2 - \omega_1) \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega_1 \omega_2} \right) = \frac{2}{Q_{\text{n.k.}}},$$

iz prve je $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$, slednje in druga pa določita absolutno in relativno pasovno širino,

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q_{\text{n.k.}} \quad \Rightarrow \quad (\omega_2 - \omega_1)/\omega_0 = 1/Q_{\text{n.k.}}$$

Visoka kvaliteta je znak ozke resonančne krivulje. Če bi nihajni krog vzbujala napetost $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, ki je vsota napetosti različnih frekvenc, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, bi nihajni krog izdatno nihal s frekvenco, ki je v intervalu pasovne širine, npr. z ω_k , pri ostalih frekvencah pa bi bledo nihal. Če bi tuljavi približali drugo, bi imala v njej inducirana napetost močno k -to komponento, ostale pa bi bile precej šibkejše. Vezje očitno zmore iz spektra frekvenc izsejati željeno komponento. Svoje resonančne krivulje in frekvence imajo tudi vse tri napetosti,

$$|U_R| = \frac{R|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad |U_C| = \frac{|U|}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad |U_L| = \frac{\omega L |U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}},$$

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_C = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{(R/L)^2}{2}} \quad \omega_L = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{(RC)^2/2}{2}}.$$

Krivulje so si med seboj podobne; prva je identična tokovni, druga je pomaknjena v levo, tretja pa v desno od prve.

VZPOREDNI NIHAJNI KROG. Admitnca vzporednega nihajnega kroga je $Y = (1/R) + i(\omega C - 1/\omega L)$. Če je dvolopol priključen na vir sinusnega toka nastavljive frekvence, sta kazalec napetosti in amplitude sledeči funkciji:

$$U = \frac{I}{(1/R) + i(\omega C - 1/\omega L)} = U(\omega) \quad |U| = \frac{|I|}{\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}} = |U(\omega)|.$$

Funkcija $|U(\omega)|$ doseže maksimum pri $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. To je točka napetostne resonance: $|U(\omega)|_{\max.} = |U(\omega_0)| = R|I|$. S strani vira se v resonanci tudi ta nihajni krog vede kot upor; med tuljavo in kondenzatorjem se stalno izmenjuje energija. Poprečni energiji v tuljavi, $\overline{W_m(t)} = \frac{1}{4}L|U/i\omega L|^2$, in kondenzatorju, $\overline{W_e(t)} = \frac{1}{4}C|U|^2$, sta v resonanci enaki. Kvaliteto nihajnega kroga določa kvocient,

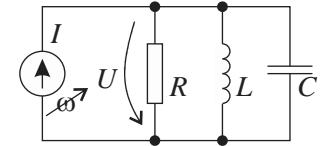
$$Q_{\text{n.k.}} = \frac{2\omega_0 \overline{W_m(t)}}{\overline{p_j(t)}} = \frac{2\omega_0 \overline{W_e(t)}}{\overline{p_j(t)}} = \frac{2\omega_0 \frac{1}{4}C|U(\omega_0)|^2}{\frac{1}{2}|U(\omega_0)|^2/R} = R\omega_0 C = \frac{R}{\omega_0 L} = \dots = \frac{|i\omega_0 C U|}{|U/R|} = \frac{|U/i\omega_0 L|}{|U/R|},$$

ki pri vzporednem krogu ustreza tudi razmerju med amplitudo toka tuljave oziroma kondenzatorja in amplitudo toka skozi upor. Širino resonančne krivulje določa neenačba $|U(\omega)| \geq |U(\omega)|_{\max.}/\sqrt{2}$, vse ostalo pa je tako kot pri prejšnjem nihajnem krogu,

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q_{\text{n.k.}} \Rightarrow (\omega_2 - \omega_1)/\omega_0 = 1/Q_{\text{n.k.}}$$

Resonančne krivulje in frekvence imajo tudi vsi trije toki,

$$|I_R| = \frac{|I|/R}{\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}} \quad |I_L| = \frac{|I|}{\omega L \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}} \quad |I_C| = \frac{\omega C |I|}{\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}},$$



$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_L = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2(RC)^2}} \quad \omega_C = \sqrt{\frac{1}{LC - (L/R)^2/2}}.$$

DRUGA DVOPOLNA RESONANČNA VEZJA. Pri obeh nihajnih krogih so stvari sicer pregledne, vendar kaj hitro trčimo ob težave, ko je dvopolno vezje le malenkost drugačno. Že zaporedno vezje zračne tuljave in kondenzatorja z izgubnim izolantom predstavlja problem. Impedanca dvopola je

$$Z(\omega) = R_L + i\omega L + \frac{1}{i\omega C + (1/R_C)} = R_L + \overbrace{\frac{1/R_C}{(\omega C)^2 + (1/R_C)^2}}^{R(\omega)} + i\omega \left(L - \frac{C}{(\omega C)^2 + (1/R_C)^2} \right).$$

Upornost R_L povzema izgube v navitju tuljave, upornost R_C pa izgube v dielektriku. Da bi našli resonančno frekvenco analitično, ni možnosti, saj bi pri iskanju točke ekstrema funkcije $|Z(\omega)|$ naleteli na polinom pete stopnje. Določen približek ponuja sklicevanje na dejstvo, da se osnovna nihajna kroga v resonanci vedeta kot upora, da se električna in magnetna energija v njiju izmenjujeta, da je reaktanca enaka nič. Če to uporavimo pri zgornji impedanci, dobimo pri pogoju $X(\omega_r) = 0$ približek za resonančno frekvenco:

$$X(\omega_r) = \omega \left(L - \frac{C}{(\omega C)^2 + (1/R_C)^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(R_C C)^2}}.$$

Poprečno energijo v tuljavi in joulsko moč na ekvivalentnem uporu upornosti $R(\omega_r)$ določa isti tok, zato je kvaliteta

$$Q_{n.v.} = \frac{2\omega_r \overline{W_m(t)}}{\overline{p_J(t)}} = \frac{2\omega_r^2 L |I(\omega_r)|^2}{\frac{1}{2} R(\omega_r) |I(\omega_r)|^2} = \frac{\omega_r L}{R(\omega_r)} = \frac{\sqrt{LC R_C^2 - L^2}}{R_L C R_C + L}.$$

Kadar upori v nihajnjem vezju modelirajo izgube reaktivnih elementov, se ponuja še ena možnost: da prvotno RLC vezje poenostavimo v čisto LC vezje. Imejmo sklopljeni navitji z induktivnostmi L_1, L_2 in M ter kondenzator s kapacitivnostjo C , ki je vključen v tokokrog drugega navitja. Vezje poenostavljamo do te mere, da spregledamo izgube v kondenzatorju in v navitjih. Impedanco med sponkama prvega navitja določa že znan izraz (iz razdelka o simboličnem računu),

$$Z(\omega) = i\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{i\omega L_2 + 1/i\omega C} = R(\omega) + iX(\omega) \Rightarrow X(\omega) = \omega L_1 - \frac{(\omega M)^2}{\omega L_2 - 1/\omega C}.$$

Za reaktanco dobimo ulomljeno racionalno funkcijo krožne frekvence ω , za katero so značilni poli in ničle,

$$X(\omega) = \omega \frac{(L_1 L_2 - M^2)\omega^2 - L_1/C}{\omega^2 L_2 C - 1} \Rightarrow B(\omega) = \frac{\omega^2 L_2 C - 1}{\omega((L_1 L_2 - M^2)\omega^2 - L_1/C)}.$$

Poli reaktance ustrezajo točkam napetostne, ničle pa točkam tokovne resonance. Pri susceptanci $B(\omega)$ je oboje ravno zamenjano. Točka $\omega = 0$ pomeni enosmerno količino, ki je za izmenične razmere irelevantna. Ničli in pola $X(\omega)$ sta:

$$\text{ničli } \omega_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{L_1/C}}{\sqrt{L_1 L_2 - M^2}} \quad \text{pola } \omega_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}.$$

Negativna frekvanca pomeni zgolj štetje faznih kotov v negativni matematični smeri. Funkcijo $\cos \omega t = \operatorname{Re}[e^{\pm i\omega t}]$ lahko razumemo kot projekcijo kroženja fazorja $e^{i\omega t}$ v pozitivni ali fazorja $e^{-i\omega t}$ v negativni matematični smeri. Napetostna resonanca nastopi pri $\omega_{\text{nap.}} = 1/\sqrt{L_2 C}$, tokovna pa pri $\omega_{\text{tok.}} = \sqrt{L_1/C(L_1 L_2 - M^2)}$. O pasovni širini resonančne krivulje in kvaliteti nihajnega LC vezja pač ne moremo govoriti.

Z resonanco se vrnimo k liniji. Pri odprtih sponkah ali kratkem stiku na izhodu sta vhodni impedanci v neizgubno linijo

$$Z_{vh}(\omega) = iZ_k \operatorname{ctg} h(\omega)l = iZ_k \operatorname{ctg} (\sqrt{\ell c} l \omega) \quad \text{ali} \quad Z_{vh} = -iZ_k \operatorname{tg} h(\omega)l = -iZ_k \operatorname{tg} (\sqrt{\ell c} l \omega).$$

Poli in ničle funkcij določajo frekvence tokovne in napetostne resonance. Če linijo zaključuje breme z impedanco Z_b , je

$$Z_{vh}(\omega) = \frac{Z_b - iZ_k \operatorname{tg} (\sqrt{\ell c} l \omega)}{1 - iY_k Z_b \operatorname{tg} (\sqrt{\ell c} l \omega)} \Rightarrow |Z_{vh}(\omega)| = \left| \frac{Z_b - iZ_k \operatorname{tg} (\sqrt{\ell c} l \omega)}{1 - iY_k Z_b \operatorname{tg} (\sqrt{\ell c} l \omega)} \right|.$$

Maksimumi funkcije $|Z_{vh}(\omega)|$ določajo frekvence napetostnih, minimumi pa frekvence tokovnih resonanc. Pri izgubni liniji je argument trigonometrične funkcije kompleksen. Poizvedovanje po frekvenčnih lastnostih RLC vezij nasprotno je v zadnjem koraku v domeni numeričnih postopkov in postopkov spektralne analize.



§19. Teoremi o izmeničnih električnih vezjih

Uvod. Pri analizi enosmernih električnih vezij smo se s teoremi o vezjih že srečali. Vsebine superpozicije, nadomestitve, Tellegena, Thevenina in Nortona ter prilagoditve bomo v tem razdelku umestili v časovni in frekvenčni prostor; nekateri teoremi bodo imeli identične, nekateri pa razširjene vsebine.

Superpozicija se naslavlja na vezja z več viri. Teorem pravi: če je vezje linearno, moremo toke, napetosti, zančne toke in potenciale določiti kot vsote deležev posameznih virov. Delež vira določimo tako, da vse ostale razumemo kot neaktivne; napetostni so zamenjani s sklenjenimi, tokovni pa z razklenjenimi stikali. To se navezuje na časovni prostor, ne pa tudi na frekvenčni; v frekvenčnem prostoru je superpozicija možna le, če so viri v vezju koherentni oziroma enakih frekvenc. Lep primer tega bomo srečali pri trifaznem sistemu. Omejitev je razumljiva, kajti kazalci tokov in napetosti so vezani na eno samo frekvenco. Seštevanje kazalcev tokov in kazalcev napetosti ter kompleksnih moči, ki pripadajo virom različnih frekvenc, je v nasprotju z izhodišči simboličnega računa. Iz povedanega sledi, da moremo z uporabo tega računa določiti deleže nekoherentnih virov, njihovo seštevanje pa izvesti v časovnem prostoru. Superpozicija ima tudi lepo izjemo, ki se navezuje na poprečja moči v uporih ter poprečja energij v kondenzatorjih in tuljavah. Pri vezju z nekoherentnimi viri moremo deleže virov k omenjenim poprečjem seštetи, v nasprotnem pač ne. Za povprečje moči ali energij je odgovoren kvadrat efektivne vrednosti toka oziroma napetosti. Če imajo npr. deleži toka isto frekvenco, je poprečje kvadrata vsote različen od vsote poprečij kvadratov, $\overline{i^2(t)} \neq \overline{i_1^2(t)} + \overline{i_2^2(t)} + \dots + \overline{i_n^2(t)}$, če pa so različnih frekvenc, je poprečje kvadrata vsote enak vsoti poprečij kvadratov, $\overline{i^2(t)} = \overline{i_1^2(t)} + \overline{i_2^2(t)} + \dots + \overline{i_n^2(t)}$.

Nadomestitev se nanaša na zamenjavo veje, v kateri poznamo tok ali napetost, z virom takega toka ali take napetosti. V časovnem prostoru to vsekakor velja, v kompleksnem pa le, če so viri koherentni.

Tellegenov teorem govori o močnostni bilanci vezja. Vsota moči virov je vsak trenutek enaka vsoti joulske moči ter moči elektrenja in magnetenja; o tem smo govorili že v preteklih razdelkih. V frekvenčnem prostoru velja Tellegenov stavek za kompleksne moči le v vezju s koherentnimi viri: vsota kompleksnih moči aktivnih elementov je enaka vsoti kompleksnih moči pasivnih elementov.

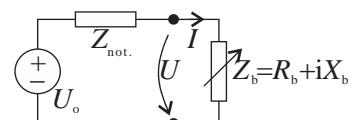
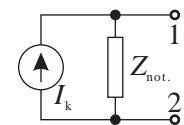
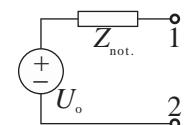
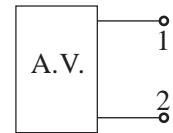
Theveninov in Nortonov stavek se navezujeta na zamenjavo aktivnega dvopolnega vezja s koherentnimi viri z realnim napetostnim ali realnim tokovnim virom. Kazalec napetosti odprtih sponk U_o in kazalec toka kratkega stika I_k aktivnega dvopola določata notreno impedanco $Z_{\text{not.}} = U_o/I_k$; ta ustreza tudi nadomestni impedanci dvopola pri neaktivnih virih v vezju. Stavka ne veljata za vezja z nekoherentnimi viri (kazalca in impedanca so vezani na eno frekvenco) in ne veljata za vezja v časovnem prostoru, kajti kvocient $u(t)/i(t)$ nima nikakršne fizikalne vsebine.

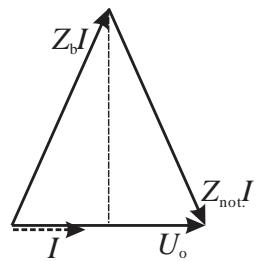
Prilagoditev se tiče vprašanja maksimalne moči, ki jo more aktivno dvopolno vezje dati primerno izbranemu bremenu. Omejitev na aktivna vezja s koherentnimi viri je pričakovana. Pri simboličnem računu operiramo s kompleksno močjo S . Prostor kompleksnih števil ni urejen prostor, zato je spraševanje po »največji kompleksni moči« matematični nesmisel. Smiselno je edino iskanje bremena, kateremu je aktivno dvopolno vezje sposobno posredovati maksimum poprečne ali delovne moči. Privzemimo, da smo aktivnemu dvopolu s koherentnimi viri že našli Theveninovo vezje: kazalec napetosti odprtih sponk U_o in notranjo impedanco $Z_{\text{not.}} = R_{\text{not.}} + iX_{\text{not.}}$. Če nanj priključimo breme z impedanco $Z_b = R_b + iX_b$, sta kazalec I toka skozi breme in delovna moč P_b na njem slediča:

$$I = U_o / (Z_{\text{not.}} + Z_b) \quad P_b = \frac{1}{2} R_b |I|^2 = \frac{1}{2} \frac{|U_o|^2 R_b}{(R_{\text{not.}} + R_b)^2 + (X_{\text{not.}} + X_b)^2} = P_b(R_b, X_b).$$

$P_b(R_b, X_b)$ je funkcija rezistance R_b in reaktance X_b iskanega bremena. Reaktanca bo najprimernejša, če bo $X_b = -X_{\text{not.}}$, kajti takrat bo imenovalec najmanjši. Kar še ostane,

$$P_b(R_b, -X_{\text{not.}}) = \frac{1}{2} R_b |I|^2 = \frac{1}{2} \frac{|U_o|^2 R_b}{(R_{\text{not.}} + R_b)^2},$$





poznamo iz enosmernih razmer. Ulomljena funkcija ima maksimum pri $R_b = R_{\text{not.}}$. In že imamo odgovor: delovna moč iz aktivnega vezja v breme bo maksimalna pri $Z_b = Z_{\text{not.}}^*$. Če je notranja impedanca kapacitivnega značaja, $X_{\text{not.}} < 0$, mora biti breme induktivnega značaja, $X_b > 0$. Kazalca toka in napetosti odprtih sponk sta sofazna; vsota $Z_{\text{not.}} + Z_b = 2R_b$ je v vlogi impedance zaporednega nihajnega kroga v resonanci. Med aktivnim vezjem in bremenom se del energije izmenjuje, del energije pa nepovratno vstopa v breme s povprečno močjo

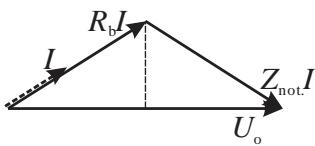
$$P_b(R_{\text{not.}}, -X_{\text{not.}}) = \frac{|U_o|^2}{8R_{\text{not.}}}.$$

Smiselno je še vprašanje izbire uporavnega bremena, da bo aktivna moč na njem maksimalna. Tokrat je na bremenu moč

$$P_b = \frac{1}{2}R_b|I|^2 = \frac{1}{2} \frac{|U_o|^2 R_b}{(R_{\text{not.}} + R_b)^2 + X_{\text{not.}}^2} = P_b(R_b).$$

Po odvajjanju, sledita upornost bremena in maksimalna moč:

$$\frac{dP_b}{dR_b} = \frac{1}{2}|U_o|^2 \frac{(R_{\text{not.}} + R_b)^2 + X_{\text{not.}}^2 - 2R_b(R_{\text{not.}} + R_b)}{((R_{\text{not.}} + R_b)^2 + X_{\text{not.}}^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = |Z_{\text{not.}}| \quad \text{in} \quad P_b(|Z_{\text{not.}}|) = \frac{|U_o|^2}{4(R_{\text{not.}} + |Z_{\text{not.}}|)}.$$



§20. Trifazni sistem



Uvod. Trifazni sistem napetosti je Teslova zamisel, ki je izboljšala lastnosti takratnih enosmernih in izmenčnih postrojev ter odprla pot trifaznim, ki omogočajo učinkovito generacijo, distribucijo in uporabo električne energije. V tem razdelku se bomo dotaknili osrednje ideje, izvedbe komponent trifaznega sistema pa sodijo v področje elektroenergetike.

Amplitudni in efektivni kazalci. Do tu smo operirali s kazalci, katerih absolutna vrednost ustreza amplitudi izmenične napetosti oziroma toka; rekli smo jim tudi kompleksne amplitude ali fazorji. V elektroenergetiki so uveljavljeni 'efektivni' kazalci, ki se od 'amplitudnih' razlikujejo za faktor $\sqrt{2}$; faktor ustreza kvocientu amplitude in efektivne vrednosti sinusne količine: $U_m = \sqrt{2}U_{ef}$ ali $I_m = \sqrt{2}I_{ef}$. Razlog je zgodovinski. Prisotna je bila težnja po podobnosti zapisov napetostnih, tokovnih in močnostnih relacij v izmeničnem vezju z ustrezimi zapisi v enosmernih vezjih, po drugi strani pa so takšno izbiro narekovali inštrumenti, ki so v začetkih elektrotehnike izkoriščali mehanski ali termični učinek električnega toka. Elektrotehnika je glede tega razdeljena; ni naša naloga, da to spremenimo, ampak, da to sprejmemo. Dogovorimo se: naj so od tu dalje vsi kazalci tokov in napetosti efektivni kazalci, ki so s sinusnimi toki in napetostmi v sledečem odnosu:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \alpha_i) = \sqrt{2}I_{ef} \cos(\omega t + \alpha_i) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}I_{ef}e^{i\omega t}] \quad \Rightarrow \quad I = I_{ef}e^{i\alpha_i}, \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = \sqrt{2}U_{ef} \cos(\omega t + \alpha_u) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}U_{ef}e^{i\omega t}] \quad \Rightarrow \quad U = U_{ef}e^{i\alpha_u}. \end{aligned}$$

Multiplikator $\sqrt{2}$ ne spremeni obeh Kirchhoffovih zakonov, ta se sedaj naglašata na efektivne kazalce, ne spremeni tudi odnosov med kazalci na pasivnih elementih, izražajo se še vedno z imitancama Z in Y , spremeni pa se zapis kompleksne moči, ki nima polovičke ($\frac{1}{2}$): $S = P + iQ = U_{ef}I_{ef}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = U_{ef}I_{ef}e^{i\varphi} = U_{ef}I_{ef}e^{i(\alpha_u - \alpha_i)} = UI^*$.

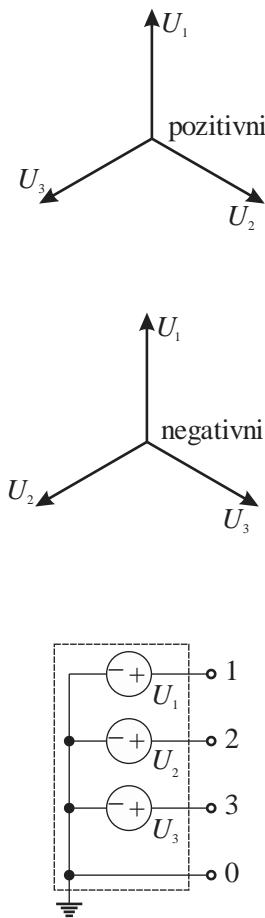
Trifazni sistem napetosti. Generacija sistema treh napetosti se vrši v sinhronskem generatorju. Na statorju stroja so tri enaka navitja, ki so razmeščena po obodu s kotnim zamikom $120^\circ = 2\pi/3$. Na rotorju je navitje z enosmernim tokom. Ta ustvarja magnetno polje, katerega gostotnice se iz rotorja prek reže nadaljujejo skozi stator in se prek reže na nasprotni



strani vračajo v rotor. Pri vrtenju rotorja s kotno hitrostjo ω so magnetni sklepi navitij praktično sinusne funkcije, ki so med seboj fazno premaknjene za kot $2\pi/3$ in enako tudi napetosti med sponkami posameznih navitij;

$$u_1(t) = \sqrt{2}U_f \cos(\omega t + \alpha) \quad u_2(t) = \sqrt{2}U_f \cos(\omega t + \alpha \pm 2\pi/3) \quad u_3(t) = \sqrt{2}U_f \cos(\omega t + \alpha \pm 4\pi/3),$$

$$U_1 = U_f e^{i\alpha} \quad U_2 = U_f e^{i(\alpha \pm 2\pi/3)} \quad U_3 = U_f e^{i(\alpha \pm 4\pi/3)}.$$



Napetostim rečemo simetričen trifazni sistem napetosti. $\sqrt{2}U_f$ je amplituda faznih ali linijskih napetosti, U_f je njihova efektivna vrednost, alternacija \pm faznega premika med napetostmi je odvisna od smeri vrtenja in zaporedja navitij, pri predznaku »-« sledi maksimumu prve maksimum druge in zatem maksimum tretje napetosti, imenujemo ga pozitivni sistem napetosti, pri predznaku »+« pa maksimumu prve sledi maksimum tretje in zatem še maksimum drugje napetosti, imenujemo ga negativni sistem napetosti. Zamenjava zaporedja navitij spremeni sistem napetosti v njemu nasprotnega. Kazalce napetosti predstavi kazalčni diagram. Kot α je povsem poljuben; kazalec prve napetosti pogosto usmerimo vzdolž imaginarno osi, da je $\alpha = \pi/2$. Kazalci obeh sistemov napetosti so takrat sledeči:

$$\begin{array}{lll} U_1 = U_f e^{i\pi/2} & U_2 = U_f e^{-i\pi/6} & U_3 = U_f e^{-i5\pi/6} \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \end{array} \quad \text{pozitivni sistem napetosti},$$

$$\begin{array}{lll} U_1 = U_f e^{i\pi/2} & U_2 = U_f e^{-i5\pi/6} & U_3 = U_f e^{-i\pi/6} \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \end{array} \quad \text{negativni sistem napetosti}.$$

Rotorji generatorjev se praviloma ne vrtijo s hitrostjo ω , ampak s hitrostjo ω/p , kjer je p število polovih parov. Zgoraj opisan primer ustreza številu $p = 1$. Če sliko rotorja in navitij iz kota 2π preslikamo (skrčimo) v kota $2\pi/p$, manjkajoče prostore pa zapolnimo s $p - 1$ slikami rotorja in navitij iz kota $2\pi/p$, dobimo p -polni generator. Navitja, ki pripadajo isti fazi, lahko vežemo vzporedno ali zaporedno. Pri kotni hitrosti rotorja ω/p imajo napetosti med sponkami navitij krožno frekvenco ω . Da bo frekvenco napetosti vzdolž navitijih 50 Hz, se mora rotor pri številu $p = 4$ vrti s 750 obrati/minuto; za enako frekvenco napetosti bi se moral rotor enopolnega stroja vrteti s 3000 obrati/minuto.

Konci navitij generatorja so povezani v spojišče, ki je praviloma ozemljeno. Začetki navitij in spojišče predstavljajo štiri sponke trifaznega generatorja. Osnovno električno shemo trifaznega generatorja tvorijo trije koherentni napetostni viri, s štirimi sponkami, npr. 1, 2, 3 in 0. Trifazni generator ponuja tri fazne ali linijske napetosti, U_1 , U_2 in U_3 , in tri medfazne

napetosti, U_{12} , U_{23} in U_{31} . Računsko ali grafično (iz kazalčnega diagrama) ugotovimo, da so

$$U_{12} = U_1 - U_2 = U_f (e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/6}) = U_f (i - \cos \pi/6 + i \sin \pi/6) = \sqrt{3} U_f (-1/2 + i\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} U_f e^{i2\pi/3} = U_{mf} e^{i2\pi/3},$$

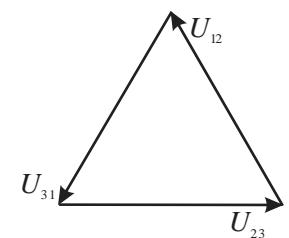
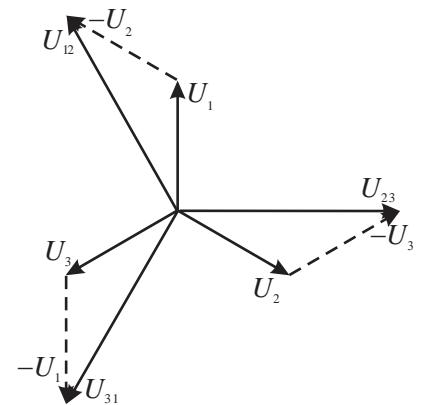
$$U_{12} = U_1 - U_2 = U_{mf} e^{i2\pi/3} \quad U_{23} = U_2 - U_3 = U_{mf} e^{i0} \quad U_{31} = U_3 - U_1 = U_{mf} e^{-i2\pi/3} \Rightarrow |U_{jk}| = \sqrt{3} |U_l|.$$

U_{mf} je efektivna vrednost medfaznih napetosti; njo in efektivno vrednost fazne napetosti povezuje enačba $U_{mf} = \sqrt{3} U_f$. Efektivna vrednost nizkonapetostne oziroma omrežne medfazne napetosti je 400 V, efektivna vrednost fazne napetosti pa je $400 \text{ V}/\sqrt{3} \cong 231 \text{ V}$. To omrežje označujemo s podateki $3 \times 400/230 \text{ V}/50 \text{ Hz}$. Višje nivoje distribucijskega omrežja določajo efektivne vrednosti medfaznih napetosti, 20 kV, 110 kV in 400 kV, obstajajo pa še 220 kV, 35 kV in 10 kV nivoji, ki so v postopnem opuščanju. Za kazalce faznih in medfaznih napetosti veljata očitni zvezi:

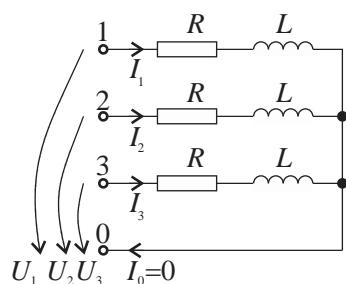
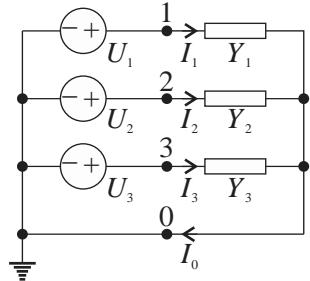
$$U_1 + U_2 + U_3 = 0 \quad \text{in} \quad U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0.$$

Če izvzamemo lokalne aggregate, se iz ožilja distribucijskega omrežja energijsko oskrbuje praktično vse, od industrijskih, elektromehanskih in elektronskih sistemov do naprav široke uporabe. Vsi ti imajo tudi povraten vpliv na distribucijsko omrežje in elektrarne, kar posredno spreminja idealizirano podobo trifaznega sistema napetosti. Anomalije vnašajo tudi same elektrarne in omrežja. Posledica soodvisnosti dejavnikov je, da odjemalci energije na nizkonapetostni strani nimajo na voljo deklariranih $3 \times 400/230 \text{ V}/50 \text{ Hz}$, kar se posredno odraža tudi v motenem delovanju naprav. Za potrebe osnov elektrotehnike bomo trifazni sistem napetosti sprejeli kot idealen: simetričen, s tremi koherentnimi napetostnimi viri in štirimi priključnimi sponkami. Na začetku bomo risali vire, kasneje pa le še priključne sponke.

Načini priključevanja bremen. Najbolj množično je priključevanje enofaznih bremen; v tem prednjačijo gospodinjstva. Bremena se priključujejo med fazni in povratni vodnik. Bremena so po fazah formalno »enakomerno« razporejena že v bivalnih in delovnih enotah, kar pa še ne zagotavlja ravnovesne obremenitve trifaznega sistema. Posamezna bremena so med seboj različna in tudi niso stalno v uporabi. To povzroča različne padce napetosti na vodnih in kablih, kar spremeni idealno podobo simetričnega trifaznega sistema napetosti. Če to okoliščino »spregledamo« in množico enofaznih bremen



reduciramo v tri bremena, govorimo o vezavi bremen v zvezdo s povratnim vodnikom. Poimenovanje izhaja iz možnega risanja sheme bremen v podobi zvezde, ki spominja na kazalce faznih napetosti; za to vezavo se uporablja tudi oznaka Y. Pri četveropolih se enako vezavo elementov označuje kot vezje T. Druga možnost je priključitev bremen v vezavi zvezda brez povratnega vodnika. Ta vezava je pogosta pri simetričnih bremeh (trifazni motorji, trifazna grela, ...) ali pri vezjih za posebne namene. Do takšne vezave lahko pride tudi po pomoti ali napaki, pri prekinitvi povratnega vodnika. Tretja možnost je priključitev bremen na fazne vodnike v vezavi trikot. Imenovanje izhaja iz možnega risanja bremen v podobi trikotnika, ki spominja na kazalce medfaznih napetosti; za to vezavo se uporablja še oznaka Δ. Pri četveropolih se enako vezavo elementov označuje kot vezje Π. Bremena izkoriščajo v tem primeru medfazne napetosti. Ta vezava je značilna za simetrična bremena, so pa tudi izjeme. Poleg teh vezav bremen so še druge. Analiza teh in vseh drugih vezij je v domeni znanih postopkov reševanja vezij in simboličnega računa. V nadaljevanju si oglejmo nekaj značilnosti posameznih vezav bremen na trifazni sistem napetosti.



VEZAVA BREMEN V ZVEZDO S POVRATNIM VODNIKOM. Kazalce štirih tokov določajo imitance bremen in fazne napetosti:

$$I_1 = Y_1 U_1 \quad I_2 = Y_2 U_2 \quad I_3 = Y_3 U_3 \quad I_0 = I_1 + I_2 + I_3.$$

Če je breme simetrično, $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y$, je $I_0 = 0$, saj je $U_1 + U_2 + U_3 = 0$ (v tem primeru povratni vodnik ni potreben), v nasprotnem je tok v povratnem vodniku v splošnem različen od nič. Pomembno je tudi poudariti, da je tok v povratnem vodniku odvisen od razporeditve bremen med tri faze, saj je $Y_1 U_1 + Y_2 U_2 + Y_3 U_3 \neq Y_2 U_1 + Y_1 U_2 + Y_3 U_3$. Kompleksna moč trifaznega bremena je enaka vsoti posameznih,

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = U_1 I_1^* + U_2 I_2^* + U_3 I_3^*.$$

Imejmo primer treh enakih sklopljenih tuljav z lastno induktivnostjo L in medsebojno induktivnostjo $-KL$ in treh uporov z upornostjo R . Število K je sklopni faktor, predznak minus pa pomeni, da si lastna in tuja magnetna poja v tuljavah pri označenih tokih nasprotujejo. Vezje bi lahko sprejeli kot modelno vezje treh navitij, ki so drug do drugega zavrteni za kot $2\pi/3$ (trifazni motor). Ker sta trifazno breme in trifazni sistem napetosti simetrična, bodo simetrični tudi linijski tokovi, $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Za eno od zank zapišemo napetostno enačbo in upoštevamo simetrijo kazalcev tokov:

$$-U_1 + RI_1 + i\omega LI_1 + \underbrace{i\omega(-KL)I_2 + i\omega(-KL)I_3}_{i\omega KLI_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_1}{R + i\omega(1+K)L}.$$

Podobno velja tudi za ostala dva toka. V tem primeru povratni vodnik očitno ni potreben.

VEZAVA BREMEN V ZVEZDO BREZ POVRATNEGA VODNIKA. Če ni povratnega vodnika, je vsota faznih tokov enaka nič. Za potencial V_0 skupne točke bremen uporabimo postopek spojiščnih potencialov. Kazalce tokov izrazimo s potencialom V_0 in faznimi napetostmi in že dobimo potencial:

$$I_1 = Y_1(U_1 - V_0) \quad I_2 = Y_2(U_2 - V_0) \quad I_3 = Y_3(U_3 - V_0) \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{Y_1 U_1 + Y_2 U_2 + Y_3 U_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

Pomembno je spoznanje, da so kazalci napetosti na bremenih lahko zelo različni: $U_1 - V_0 \neq U_2 - V_0 \neq U_3 - V_0$. Imejmo primer treh uporov s prevodnostmi G , $2G$ in $3G$, ki so na fazah 1, 2 in 3.. Potencial spojišča uporov izrazimo, napetosti na njih pa kar grafično upodobimo v kazalčnem diagramu:

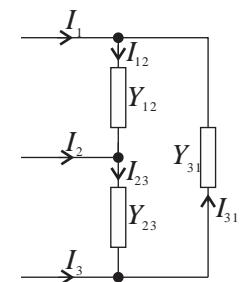
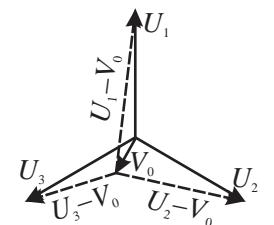
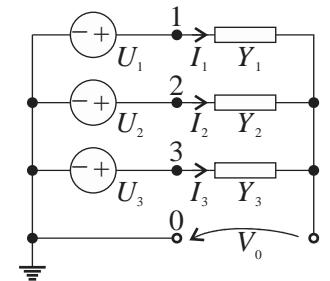
$$V_0 = \frac{U_1 + 2U_2 + 3U_3}{6} = \frac{U_2 + 2U_3}{6} = \frac{U_3 - U_1}{6} = \frac{U_{31}}{6} \quad \Rightarrow \quad |U_1 - V_0| > |U_1| \quad |U_2 - V_0| > |U_2| \quad |U_3 - V_0| < |U_3|.$$

Če bi upori predstavljali svetilke na žarilno nitko z močmi 25 W, 50 W in 75 W, katerih nazivna napetost je 230 V, kar bi ustrezalo prevodnostim $G = 430 \mu\text{S}$, $2G$ in $3G$, bi prva žarnica, zaradi $|U_1 - V_0| > |U_1|$, verjetno pregorela. Drugi dve pa bi, zaporedno vezani, obtičali na medfazni napetosti U_{23} in bi morda niti ne brleli.

VEZAVA BREMEN V TRIKOT. Bremena z aditancami Y_{12} , Y_{23} , Y_{31} in kazalci medfaznih napetosti določajo njihove toke,

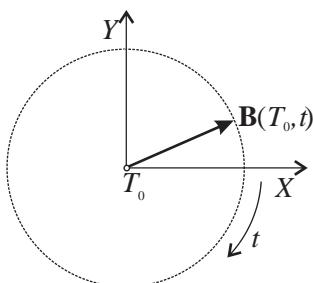
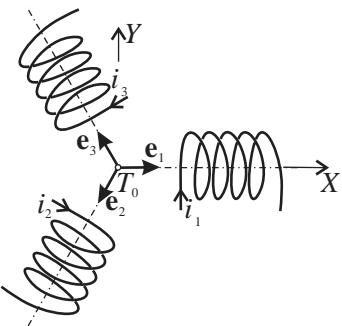
$$I_{12} = Y_{12}U_{12} \quad I_{23} = Y_{23}U_{23} \quad I_{31} = Y_{31}U_{31} \quad I_1 = I_{12} - I_{31} \quad I_2 = I_{23} - I_{12} \quad I_3 = I_{31} - I_{23},$$

njihove razlike pa linijske toke. Kompleksna moč takega trifaznega bremena je $S = (Y_{12}^* + Y_{23}^* + Y_{31}^*)U_{mf}^2$. Imejmo trifazni motor z močjo $P = 60 \text{ kW}$ in $\cos \varphi = 0,8$; navitja motorja so vezana v trikot in na medfazne napetosti. Določimo vezavo in kapacitivnosti kompenzacijskih kondenzatorjev. Jalove moči navitij so $Q/3 = 20 \operatorname{tg} \varphi \text{ kvar} = 15 \text{ kvar}$. Kapacitivnosti kondenzatorjev, ki bi jih vezali vzporedno k trem navitjem, na medfazne napetosti, bi bile $C = (Q/3)/\omega U_{mf}^2 = 301 \mu\text{F}$. Še



bolje pa, če se odločimo za vezavo treh kondenzatorjev s kapacitivnostmi $3C \cong 903 \mu\text{F}$ v zvezdo; izdelava kondenzatorja za manjšo napetost je namreč cenejša.

Sklep. V začetku razdelka smo omenili, da trifazni sistem prinaša prednosti pred enosmernim ali enofaznim prenosom energije; po vsem povedanem jih lahko sedaj tudi predstavimo.



VRTILNO POLJE. Naj so tri enaka tuljave prostorsko postavljeni tako, da ležijo njihove osi v isti ravnini, osi pa med seboj oklepajo kote $2\pi/3$. Če so toki teh tuljav trifazni, da jih popišejo časovne funkcije s faznim zamikom $2\pi/3$,

$$i_1(t) = I_m \cos(\omega t) \quad i_2(t) = I_m \cos(\omega t - 2\pi/3) \quad i_3(t) = I_m \cos(\omega t - 4\pi/3),$$

potem se v prostoru okoli sečišča osi vzpostavi magnetno polje, ki mu rečemo vrtilno magnetno polje. Osi tuljav naj leže v ravnini XY , os prve pa v osi X . Smerniki osi tuljav so:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_x/2 - \mathbf{e}_y \sqrt{3}/2 \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_x/2 + \mathbf{e}_y \sqrt{3}/2$$

Magnetna polja posameznih tuljav so usmerjena vzdolž svojih osi in so sorazmerna tokom. Magnetno polje v T_0 , v sečišču osi, določa vektorska vsota:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(T_0, t) &= k\mathbf{e}_1 i_1(t) + k\mathbf{e}_2 i_2(t) + k\mathbf{e}_3 i_3(t) = \\ kI_m(\mathbf{e}_x \cos(\omega t) &+ (-\mathbf{e}_x/2 - \mathbf{e}_y \sqrt{3}/2) \cos(\omega t - 2\pi/3) + (-\mathbf{e}_x/2 + \mathbf{e}_y \sqrt{3}/2) \cos(\omega t - 4\pi/3)) = \\ kI_m(\mathbf{e}_x \cos(\omega t) &- (1/2)\mathbf{e}_x \underbrace{(\cos(\omega t - 2\pi/3) + \cos(\omega t - 4\pi/3))}_{-\cos(\omega t)} - (\sqrt{3}/2)\mathbf{e}_y \underbrace{(\cos(\omega t - 2\pi/3) - \cos(\omega t - 4\pi/3))}_{\sqrt{3}\sin(\omega t)} = \\ \frac{3kI_m}{2}(\mathbf{e}_x \cos(\omega t) &- \mathbf{e}_y \sin(\omega t)) \Rightarrow |\mathbf{B}(T_0, t)| = \frac{3kI_m}{2}. \end{aligned}$$

Polje je tangentno na ravnino XY , se enakomerno vrati in ohranja svojo absolutno vrednost; kot da bi se viseč podkvast magnet enakomerno vrtel okoli osi Z , z njim pa magnetno polje med njegovima poloma. Vrtilno polje se doseže tudi z dvema pravokotnima tuljavama in tokoma, ki sta drug do drugega fazno premaknjena za kot $\pi/2$. Vrtilno magnetno polje je osnova delovanja trifaznih in dvofaznih motorjev.

PRETOK ENERGIJE oziroma vstopna moč v trifazno breme je nekaj posebnega. Privzemimo simetrično trifazno breme, npr. trifazni motor, ki je priključen na trifazno omrežje. Fazne napetosti in linijske toke določajo zapisi:

$$u_1(t) = \sqrt{2}U_f \cos(\omega t + \alpha_u) \quad u_2(t) = \sqrt{2}U_f \cos(\omega t + \alpha_u \pm 2\pi/3) \quad u_3(t) = \sqrt{2}U_f \cos(\omega t + \alpha_u \pm 4\pi/3),$$

$$i_1(t) = \sqrt{2}I_f \cos(\omega t + \alpha_i) \quad i_2(t) = \sqrt{2}I_f \cos(\omega t + \alpha_i \pm 2\pi/3) \quad i_3(t) = \sqrt{2}I_f \cos(\omega t + \alpha_i \pm 4\pi/3),$$

kjer je $\alpha_u - \alpha_i = \varphi$ fazni kot simetričnega bremena. Vstopna moč v trifazno breme je hkrati enaka vsoti moči virov,

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) + u_3(t)i_3(t).$$

Produkti spominjajo na vstopno moč v enofazno breme, ki smo ga v okviru kompleksne moči podrobno obdelali. Pišimo:

$u_1(t)i_1(t) = 2U_f I_f \cos(\omega t + \alpha_u) \cos(\omega t + \alpha_i) = U_f I_f (\cos(\alpha_u - \alpha_i) + \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i))$. Podobno storimo še z drugima dvema produktoma in tvorimo vsoto:

$$p(t) = 3U_f I_f \cos \varphi + U_f I_f \overbrace{(\cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i) + \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i \pm 4\pi/3) + \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i \pm 8\pi/3))}^0.$$

Dotok energije v enofazno breme je pulzirajoč, v simetrično trifazno breme pa enakomeren, $p(t) = 3U_f I_f \cos \varphi$. Rezultatu ne gre oporekati, potrebuje pa pojasnilo. Spomnimo se Poyntingovega vektorja, ki govorji o gostoti moči. Ugotovili smo, da se energija od vira k bremenu prenaša skozi prostor med vodniki. Ker sta intenzivnosti električnega in magnetnega polja ob vodnikih največji, je ob njih tudi koncentracija energijskega toka največja. Namišljene cevi, ki obdajajo vodnike, so torej energijski kanali. V luči tega razumemo sumand $3U_f I_f \cos \varphi$ kot energijski tok skozi te cevi od omrežja k motorju, ostale sumande pa kot toke, ki se v njih vrtinčijo. Zaradi slednjih motor in omrežje nič ne pridobita in tudi nič ne izgubita. Magnetna energija $W_m(t)$ se v trifaznem motorju ne spreminja, spreminja pa se njena gostota. Energija se iz enih v druge dele motorja ne seli po motorju, ampak v njih prihaja in iz njih odhaja skozi namišljene cevi vzdolž vodnikih. Zaradi tega so termične izgube v vodnikih večje; mera za povečanje je jalova moč $Q = 3U_f I_f \sin \varphi$, enako kot pri enofaznem sistemu.

UČINKOVITOST IN VARČNOST. Trifazni sistem je duhovit, enostaven in eleganten: koristi proizvodnji, prenosu, distribuciji in uporabi električne energije. Trifazni generatorji in motorji so v primerjavi z enosmernimi ali enofaznimi za enake moči manjši, učinkovitejši v izrabi prostora in varčnejši pri materialu. Enako velja za transformatorje: enofazni so dvostebrni,

trifazni tristebrni. Pri prenosu in distribuciji energije je trifazni sistem z dodatkom tretjega vodnika trikrat zmoglivejši od enofaznega. Pomembna pridobitev je tudi vrtilno polje. Praktično ne najdemo vsebine, ki bi trifazni sistem odvračala. Trifazni sistem je gotovo ena največjih tehničnih pridobitev preteklega stoletja. – Na obzorju so že nove zamisli, ki bodo generacijo, distribucijo in uporabo električne energije verjetno občutno spremenile.

Viri

- [1] W. J. Duffin: Electricity and Magnetism, McGraw-Hill Book Company, London, New York, ... , 1990,
- [2] R.P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: The Feynman lectures on Physics, Addison- Wesley, 1972,
- [3] D. J. Griffiths: Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall, New Jersey, 1999,
- [4] O. D. Jefimenko: Causality electromagnetic induction and gravitation, Electret Scientific Company, Star City, 2000,
- [5] J. C. Maxwell: A treatise on electricity and magnetism, 1873, Dover Publications, 1954,
- [6] M. A. Plonus: Applied Electromagnetics, McGraw-Hill Book Company, London, New York, ... , 1986,
- [7] B. D. Popović: Osnovi elektrotehniki I in II, Građevinska knjiga, Beograd, 1986,
- [8] E. M. Purcell: Electricity and Magnetism, Berkellely physics course - volume 2, 1963,
- [9] A. R. Sinigoj: Osnove elektromagnetike, Založba FE-FRI, Ljubljana, 1996,
- [10] J. A. Stratton: Electromagnetic theory, McGraw-Hill, New York, 1941,
- [11] I. E. Tamm: Osnovy tjeorii električestva, Gostehizdat, Moskva 1949,
- [12] F. T. Ulaby: Fundamentals of applied electromagnetics 2004 Media Edition, Pearson Prentice Hall, London, 2004.

Učbenik Osnove elektrotehnike II je namenjen študentom prvega letnika študija elektrotehnike. Snov dveh poglavij je razdeljena v dvajset razdelkov. Poleg teoretičnih vsebin posreduje tudi vrsto praktičnih zgledov. Učbenik je opremljen s slikami magnetnih in tokovnih polj, ki podpirajo matematične zapise in pripomorejo k boljšemu razumevanju snovi – skupaj s posnetki predavanj in eksperimentov ter naborom rešenih nalog in gradiv, ki so dostopna prek spletja, tvori zaokroženo celoto. V učbeniku uporabljeni matematični orodji so zahtevnejša, vendar jih študenti srečujejo še pri fiziki, teoretično pa poglobijo tudi pri matematiki.

Iztok Humar izvaja predavanja, vodi vaje in raziskovalno sodeluje na področjih Osnov elektrotehnike, Aplikativne elektromagnetike in Telekomunikacijskega inženiringa na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani. Na področju osnov elektrotehnike je soavtor dveh univerzitetnih učbenikov, soavtor štirih video učbenikov in dveh gimnazijskih e-učbenikov ter avtor treh skript za laboratorijske vaje.

Edi Bulić je asistent pri predmetih Osnove elektrotehnike in Elektromagnetika na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani. Raziskovalno se ukvarja z numeričnim reševanjem elektromagnetnih polj.

Anton Rafael Sinigoj je na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani vrsto let predaval Osnove elektrotehnike I in II ter Elektromagnetiko. Področje njegovega dela sta teorija elektromagnetnega polja in uporaba numeričnih metod v elektromagnetiki. Je avtor ali soavtor štirih univerzitetnih učbenikov, štirih video učbenikov, treh gimnazijskih učbenikov in dveh e-učbenikov ter različnih gradiv za vaje.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE II

I. HUMAR

E. BULIĆ

A.R. SINIGOJ

**ZALOŽBA
FAKULTETE ZA
ELEKTROTEHNIKO**

