Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

Osnove elektromagnetike

Anton R. SINIGOJ

Ljubljana, 1999

... roditeljema,
Rafaelu in Alojziji

Predgovor

Učbeniku, ki "odhaja na pot" in je namenjen študentom prvega letnika univerzitetnega študija elektrotehnike, pa tudi ostalim, ki jih osnove elektromagnetike kakorkoli zanimajo ali pa so to v preteklosti že absolvirali in bi si hoteli kakšne nadrobnosti ponovno osvežiti, želim – kot avtor – pridati na rob nekaj besed.

Krajši komentar terja že naslov. Vrsto let so se namreč študentom elektrotehnike na ljubljanski Univerzi posredovali temelji tega področja pri predmetih Osnove elektrotehnike I do V v prvih štirih semestrih študija. Tvarina teh petih je zaobjemala osnovna znanja, ki so bila splošna in hkrati uvodna v nadaljnji študij na posameznih smereh. Zadnji trije predmeti so se z leti preimenovali – z novimi naslovi so se približali vsebinam posredovanih snovi –, nespremenjena pa sta do danes ostala le prva dva, ki sta vsebinsko povezana in šele skupaj zaključena celota ter je delitev na I in II zgolj formalizem semestrskega načina študija. Z izbranim naslovom *Osnove elektromagnetike* sem se tako hotel tudi tu bolj približati sami tematiki omenjenih predmetov *Osnove elektrotehnike I* in *II*; snov teh dveh pokriva namreč osnovna znanja o zakonitostih *elektromagnetnega polja* in *električnih vezij*, ki so podlaga za nadaljnji študij.

Prav to, predstavitev polj in vezij, je hkrati tudi osnovni cilj, kateremu je učbenik s svojim konceptom podrejen. Čisto pravilno je namreč mnenje, da je razumevanje vezij lažje – torej predstavljivejše –, pa tudi študenti prineso iz srednjih šol (posebno tehniških) že kar solidna znanja o tem, mnogo manj pa to velja za polja, ki po svoji naravi terjajo rabo zahtevnejšega matematičnega aparata in tudi smisel za "abstraktne" predstave. Ker pa je splošno uveljavljen koncept te tvarine zasnovan ravno obratno – od splošnega (polja) k posebnemu (vezjem) –, je pri študentih že v uvodnih urah čutiti določen "odpor"; češ, zakaj tako? Resda, na začetku je potrebna določena podreditev, ki pa se kasneje hvaležno obrestuje. Pa tudi sicer je stvar zastavljena tako, da se ta pojma (polje in vezje) vseskozi izmenjujeta in dopolnjujeta, kar vse utrjuje pogled na vezje s stališča polja – in obratno.

Eno večjih težav (preprek) predstavlja študentom – vsaj na začetku – uporabljano matematično orodje. V samem začetku se namreč srečamo z osnovnimi *vektorskimi notacijami*, ki se potem ob različnih fizikalnih vsebinah "vlečejo" skozi celotno snov. Pri tem je nasploh pomembno, da študent "začuti" tesno korelacijo med fizikalno ugotovitvijo ali dejstvom na eni in temu prirejenim matematičnim zapisom na drugi strani. Nemalokrat se namreč dogodi, da študent kakšen elektromagnetni pojav jasno opiše, zatakne pa se pri matematičnem zapisu tega. Tu je mišljena predvsem pravilna raba *skalarjev* in *vektorjev* ter *opreacij* med njimi in pa raba *krivuljnega* ali *ploskovnega integrala*. Slednja dva sicer že delno posegata v področje vektorske analize, ki se študentom posreduje šele v drugem letniku študija, vendar pa je stvar takšna, da se ju uporablja v prvem letniku tudi že pri fiziki. Prvega se sreča pri delu sile na poti, drugega pa pri pretoku fluida skozi prerez. Delo

in pretok sta torej tisti dve razvidni opori, s katerima moremo vsebinsko ali pojmovno pospremiti interpretacijo omenjenih integralov.

O zasnovi učbenika. Njegova vsebina je razdeljena na sedem poglavij oz. devetinšestdeset razdelkov. Uvodno poglavje zajema zgodovinski pregled razvoja *elektriške znanosti*, predstavitev potrebnih *matematičnih orodij* in pa osnovne *definicije*, ki se tičejo *električnega naboja* in *toka*. Drugo poglavje je zajetno in obravnava *elektrostatično polje*, končuje pa se s *kondenzatorskimi vezji*. Tretje poglavje je posvečeno *tokovnemu polju* časovno nespremenljivih tokov in je hkrati uvod v poglavje o *o vezjih enosmernega toka*. – Do tu seže tudi vsebina predmeta Osnove elektrotehnike I. V nadaljevanju je predstavljeno *magnetostatično polje*, ki se zaključi s t.i. *magnetnimi vezji*. Šesto poglavje se ukvarja z *dinamičnim (elektromagnetnim) poljem*, ki se sklene s temeljnimi enačbami *makroskopske teorije elektromagnetnega polja*. To poglavje je fizikalno in matematično najzahtevnejše in predstavlja uvod v poglobljeno teorijo teh polj v višjih letnikih študija elektrotehnike. Sklepno poglavje je posvečeno *električnim vezjem časovno spremenljivih tokov*, kjer je poudarek na *harmonično vzbujanih električnih vezjih*.

Učbenik kot celota je zajeten; prvič že zato, ker vključuje snov dveh semestralnih predmetov, in drugič, ker predstavljeno spremlja okrog stošestdeset *rešenih zgledov* in približno štiristo *slik*. Predvsem zgledi so tisto – najbolj uporabno –, kar študentom pomaga tako pri razumevanju podajane snovi kot pri samostojnem reševanju nalog. Prav koristno bo zato, če bo študent te predelal do te mere, da bo pri njih povsem samostojen in bo sproti iskal tudi odgovore na ostala vprašanja, ki jih bo našel med vpadljivima znakoma in se običajno začno: ♣ bralec naj reši, ugotovi, določi, nariše, premisli, itn. ♣

Tekst je med drugim pospremljen z vrsto opomb, ki so kot pripis dodane *pod črto* – na dnu strani. Tam se včasih "znajde" kakšna neobvezna izpeljava ali zgolj navedba kake formule. Podobno velja tudi za *drobnejši tisk*, ki vsebinsko ali pojmovno izstopa iz postavljenih okvirov in ga lahko bralec brez škode preskoči. Drobnejši tisk – vendar v ožjem formatu – je uporabljen tudi za zglede, ki pa ostajajo s tem vseeno vsebinski del celote. Vsa potrebna numeracija slik, tabel, pomembnih enačb in formul (v okvirjih) ter zgledov se začne z zaporedno številko razdelka; ta in ustrezno poglavje sta odtisnjena tudi v "glavi" lista sode oz. lihe strani.

Tu bi izkoristil še priliko in opozoril na posamezna mesta v učbeniku, ki so drugačna, razširjena, okrnjena ali pa le drugače postavljena kot kje drugje. Zadnje vrste drugačnost se tiče že prvega poglavja, ko je, razen o nabojih, govora še o tokih, *enačbi kontinuitete* in *elektromagnetni sili*, čeravno vsega tega prvi hip še ne potrebujemo. Tok in enačba kontinuitete sta uvrščena na začetek zato, ker sodita vsebinsko k nabojem, za katere velja ohranitveni zakon, ki presega zgolj elektromagnetni fenomen in je sprejet kot splošna fizikalna danost. Drugače je s silo. Vstopna pozornost je njej namenjena zato, ker vse niti do razumevanja elektromagnetnega polja vodijo preko nje. Drugo takšno mesto najdemo v elektrostatiki, ko je govora o *zrcaljenju*. Tega v drugih programih na tej stopnji običajno ne srečamo v tolikšnem obsegu, čeravno je pri tem rabljena matematika "preprosta". Naslednja tri mesta so v šestem poglavju. Kot prvo se poskuša opredeliti *kvazistatičnost* polja, ki s svojim kriterijem označuje meje uporabnosti koncepta vezij. Druga stvar

se tiče definicije *induktivnosti*, ki se ne opira na magnetni pretok, ampak na poprečje pretokov v zanki toka. Tretje takšno mesto se nanaša na sledenje drugačne poti, ki vodi do *prve Maxwellove enačbe*. Dodatna stvar, ki jo velja v zvezi s tem omeniti, je možnost *grafične analize* harmonično vzbujanih električnih vezij s *kazalci* v *kompleksni ravnini*. Nekaj tega tam je, opuščeno pa je t.i. *grafično invertiranje*, ki ga redkeje najdemo tudi v drugih učbenikih. Če se bo to pokazalo kasneje kot pomankljivost, bo to ob drugi priliki odpravljeno. Za konec pa še beseda o *nalogah*. Teh je po učbeniku "natrosenih" kar nekaj, ni pa še dodatnih, ki bi bile sistematično zbrane na enem ali več mestih. Devetdeset takšnih nalog, od katerih so bile nekatere stare izpitne ali kolokvijske, sem že izbral in tehtal, ali jih v učbenik uvrstiti ali ne. Na koncu je prevesilo mnenje, da je nalog "kar tako" in tistih v tipičnih zgledih že tako ali tako veliko, čeravno ni ponujenih nalog nikoli "preveč". Pa tudi sicer, če bi omenjene uvrstil, bi jih bilo potrebno kasneje ažurno obnavljati. Prav zato sem se odločil, da bom takšne naloge posredoval študentom sproti, na drug način.

Učbenik, takšen kot pač je, bo, upam, koristna opora pri sledenju snovi in pri študiju nasploh. Kaže pa ob tem pripomniti, da velja pogledati kdaj tudi še učbenike (knjige) drugih avtorjev, ki to tvarino obravnavajo. Vsakdo namreč utira pri tem nekoliko drugačne poti in osvetljuje problematiko na svoj način, vse to pa vodi študenta k boljšemu razumevanju in solidnejšemu znanju, kar je gotovo vsem cilj.

Na koncu mi ostaja še prijetna dolžnost, da se zahvalim vsem, ki so mi pri nelahkem, obsežnem in odgovornem delu kakorkoli pomagali. Učbenik je nastajal hitro; rokopis je bil nared v enem letu. Brez sodelavcev, ga. Vesne Bleiweis, ki je vnašala tekst, absolventa fizike g. Renata Bertalaniča, ki je postavljal slike, in absolventa elektrotehnike g. Tomaža Ebenšpangerja, ki je skrbel za vnos zahtevnega matematičnega teksta in tudi tehnično zasnoval ter uredil celoten učbenik, bi ne bilo ne tega ne predlog, ki so jih študenti dobili že v šol. l. 1993/94, zato sem jim za kvalitetno in hitro opravljeno delo nadvse hvaležen. Zahvala gre tudi Elektroinštitutu "Milan Vidmar", ki me je podprl pri tehnični pripravi predlog. Te sem v zadnjem letu dopolnil in opravil vrsto korektur. Na določena kočljiva mesta, šibke točke in pomankljivosti so me opozorili prof. dr. Tomaž Slivnik, prof. dr. Jože Mlakar in prof. dr. Joško Budin. Vsem sem za pripombe neizmerno hvaležen. Hvaležen sem tudi mojemu prvemu diplomantu g. Vitu Neneziću, ki je pregledal izvajanja in zglede, in g. Borisu Žužku, ki mi je pomagal pri odpravljanju jezikovnih napak.

Velik "hvala" tudi mojim, Metki, Raheli – Raši, Jakobu, Vidu in Nikiju – Dominiku, ki so moje odsotnosti potrpežljivo prenašali.

Šmartin, m. srpana 1994 avtor

Predgovor k drugi izdaji

Če so bili občutki pri pisanju zajetnega učbenika o osnovah elektromagnetnega polja in električnih vezij mnogokrat mešani, prežeti s težo odgovornosti, včasih tudi z bojaznijo, kako bo stvar sprejeta med študenti in drugimi uporabniki, pa so ti po nepopolnih dveh letih, ko je naklada štiristotih izvodov "pridno" pošla, že mnogo bolj urejeni, zato je tudi pisanje nagovora k drugi izdaji drugačno, morda kar prijetno opravilo.

Pokazalo se je namreč, da študentje radi posegajo po tej knjigi, da jim torej zadovoljivo osvetljuje zahtevne fizikalne pojme elektromagnetike, pa čeravno pri tem uporabljena matematična orodja nikakor niso lahka; morem kratkomalo ugotoviti, da se študenti – ob zavzetem učenju – dokopljejo do solidnega razumevanja fizikalno-matematičnega modela opisovanja elektromagnetnega polja in električnih vezij.

Kot katerakoli druga knjiga tako tudi ta učbenik ni (že v prvi izdaji) utekel raznovrstnim tiskarskim škratom in napakam; takšne hibe sem poskušal v novi izdaji v čim večji meri odpraviti, vendar bo pozorno oko vseeno še kaj našlo. – Ničesar pač ni, kar bi bilo "dokončno" ali "popolno".

Šmartin, sušca 1996 avtor

Predgovor k tretji izdaji

Dragi bralci: pred Vami je tretja izdaja učbenika Osnove elektromagnetike, ki z novim ponatisom presega okroglo mejo tisoč izvodov. Obseg in vsebina knjige sta tudi v tej izdaji nespremenjeni; odpravljene so bile le posamezne tiskarske napake in izvedeni določeni stilistični popravki. Za večino pripomb in opozoril dolgujem zahvalo asistentu Ediju Buliću, ki je tekst kar se da skrbno pregledal, nekaj pripomb pa so mi posredovali tudi posamezni študenti, za kar sem jim iskreno hvaležen.

Že ob prvi izdaji sem študentom obljubil sklop dodatnih nalog za utrjevanje in lažje razumevanje tvarine; prav zato so moji slušatelji vsa ta leta prejemali snopič z okrog štiristo nalogami ob začetku študijskega leta. Sedaj je ta nabor nalog dosegljiv tudi na spletnem naslovu http://torina.fe.uni-lj.si/~oe/, na tem in na naslovu http://lane.fe.uni-lj.si/~oe/oe.htm pa se sproti oblikuje tudi "banka" izpitnih in kolokvijskih nalog z rešitvami.

Šmartin, vinotoka 1999 avtor

Pregled

I Uvodne teme

1. Od Talesa do Hertza . . . 1
2. Matematični uvod . . . 7
3. Lorentzova (elektromagnetna) sila . . . 26
4. Porazdelitve elektrin . . . 27
5. Pretok elektrine – električni tok . . . 30
6. Vektor gostote električnega toka . . . 32
7. Kontinuitetna enačba . . . 33
8. Razvrstitev elektromagnetnih polj . . . 36

II Elektrostatično polje

9. Coulombov zakon električne sile . . . 39
10. Polje električnih sil . . . 41
11. Vektor električne poljske jakosti . . . 42
12. Gaussov stavek vektorja električne poljske jakosti . . . 48
13. Delo sil elektrostatičnega polja . . . 54
14. Potencialna energija . . . 58
15. Električni potencial in električna napetost . . . 59
16. Električno polje v luči potenciala . . . 62
17. Točkasti dipol . . . 68
18. Prevodnik v elektrostatičnem polju . . . 73
19. Izolator – dielektrik v elektrostatičnem polju . . . 96
20. Vektor gostote električnega pretoka . . . 99
21. Električni pretok . . . 103
22. Mejni pogoji elektrostatičnega polja . . . 107
23. Vir enosmerne napetosti . . . 112
24. Kapacitivnost . . . 115
25. Metoda zrcaljenja . . . 126
26. Energija elektrostatičnega polja . . . 136
27. Gibalni procesi . . . 148
28. Kondenzatorska vezja . . . 153

III Časovno konstantno tokovno polje

29. Prevajanje elektrin v električnem polju . . . 165
30. Ohmov in Joulov zakon . . . 167
31. Časovno konstantno tokovno polje . . . 175
32. Mejni pogoji v tokovnem polju . . . 177
33. Električna upornost (prevodnost) in izgubna moč . . . 183
34. Dualnost električnega in tokovnega polja . . . 191
35. Kirchhoffova zakona . . . 199

IV Enosmerna električna vezja

36. Elementi enosmernih električnih vezij . . . 205
37. Metode reševanja enosmernih linearnih vezij . . . 215
38. Stavki o enosmernih električnih vezjih . . . 226
39. Osnove pasivnih linearnih štiripolnih vezij . . . 238

V Magnetostatično polje

40. Ampèrov zakon magnetne sile . . . 247
41. Vektor gostote magnetnega pretoka . . . 254
42. Magnetni pretok . . . 267
43. Neizvornost magnetnega polja . . . 268
44. Vrtinčnost magnetnega polja . . . 272
45. Sile in delo magnetnega polja . . . 284
46. Snov v magnetnem polju . . . 293
47. Vektor magnetne poljske jakosti . . . 294
48. Magnetne lastnosti snovi . . . 297
49. Mejni pogoji magnetnega polja . . . 308
50. Skalarni magnetni potencial . . . 311
51. Magnetna vezja . . . 317

VI Dinamično elektromagnetno polje

52. Uvod v elektrodinamiko . . . 327
53. Faradayev zakon indukcije . . . 331
54. Medsebojna in lastna induktivnost . . . 347
55. Energija magnetnega polja . . . 367
56. Razširjen Ampèrov zakon toka . . . 382
57. Enačbe elektromagnetnega polja . . . 389
58. Osnove elektromagnetnega valovanja in difuzije . . . 392

VII Električna vezja spremenljivih tokov

59. Uvod v linearna električna vezja 401
60. Elementi linearnih električnih vezij 402
61. Kirchhoffova zakona in bilanca moči 407
62. Osnove prehodnih pojavov 409
63. Harmonično vzbujana električna vezja 416
64. Kompleksni račun 420
65. Metode reševanja harmonično vzbujanih vezij 433
66. Stavki o harmonično vzbujanih vezjih 436
67. Posebne vezave elementov 441
68. Trifazni sistem napetosti 451
69. Lastnosti realnih elementov 463

I. POGLAVJE

Uvodne teme

1. Od Talesa do Hertza

Nekako ne da se uteči vsaj kratkemu zgodovinskemu pregledu védenja o elektriki. V tem "sprehodu skozi čas" bomo kar najbolj kratki (zgolj faktografski), čeravno je (bi bilo) brskanje po izvirnih zapisih o elektriki sila zanimivo in tudi poučno.

- Začetki elektrike segajo v antično Grčijo – do filozofa Talesa iz Mileta (Srednja Azija). Okrog leta 600 p.n.š. je zabeležil opažanje: če se jantar (gr. $'\acute{\eta}\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$) podrgne ob tkanino, potem nase privlači lahne kosme volne, lase, lesene opilke itd.

- Ta naravni pojav je bil za naravoslovje latenten dobri dve tisočletji. Prvi, ki se je bolj sistematično lotil tega fenomena, je bil angleški lekarnar William Gilbert ($1544 - 1603$). Okrog leta 1600 je ugotovil, da imajo podobne lastnosti kot jantar tudi steklo, ebonit, krzno, ...; naštel je okrog dvajset takšnih snovi. Telesa, ki so pridobila lastnost privlačevanja, je imenoval *naelektrena*. To vrsto privlačne sile je označil kot "vis electrica" (lat. vis – moč, sila, vpliv).

- Francoski fizik C. F. de Cisternay du Fay ($1698 - 1739$) je leta 1733 z eksperimenti dognal, da je naelektrenost stekla drugačna kot naelektrenost jantarja ali drugih smol; poimenoval ju je "steklasta" in "smolasta" naelektrenost. Poskusi so namreč pokazali, da se podrgnjena kosa stekla (ali jantarja) odbijata, medtem ko se podrgnjena kosa stekla in jantarja privlačita.

- Danes ti vrsti naelektritev poimenujemo *pozitivna* (steklasta) in *negativna* (smolasta). Ta termina je leta 1747 prvi uporabil ameriški fizik Benjamin Franklin ($1706 - 1790$), ki je tudi ugotovil, da se pozitivna in negativna naelektritev pojavljata istočasno. Namreč, pri drgnjenju jantarja ob tkanino postane jantar ravno toliko negativno naelektren kot postane tkanina pozitivno naelektrena[1]. Prav ta

[1] Algebraična vsota obeh naelektritev je potemtakem vedno nič. Ta postulat bomo kasneje tudi matematično formulirali in ga poimenovali kot zakon o ohranitvi elektrine ali kot kontinuitetna enačba. Omenjena Franklinova ugotovitev je bila smela in daljnovidna; potrjena je bila šele 150 let kasneje, na prehodu iz XIX. v XX. stoletje, ko so fiziki sistematično proučevali zgradbo snovi in atoma. Danes pravimo, da so v snoveh nosilci negativne naelektritve elektroni in pozitivne protoni in da je vsaka naelektritev telesa pozitiven ali negativen večkratnik osnovnih, kvantiziranih in uravnoteženih $\pm e$ nabojev; $e = 1.6021 \cdot 10^{-19}$ C (Millikanov poskus – gibanje razpršenih oljnih kapljic v električnem polju). Da

odločitev namreč, da se obe vrsti naelektritev poimenujeta kot pozitivna in negativna elektrina – ne v slabšalnem smislu –, pa je že naznanila začetke znanstvenega proučevanja vplivov med elektrinami.

- Franklinovo delo je pospešilo proučevanje učinkov med naelektrenimi telesi. Fizik J. Priestley (1733 – 1804) je leta 1767 postavil tezo, da je mogoče vplive med naelektrenimi telesi kvantitativno opredeliti. Neodvisno od njega je isto trdil tudi fizik H. Cavendish (1731 – 1810), ki je leta 1773 eksperimentalno ugotovil *inverzno kvadratično zakonitost* sil med naelektrenimi telesi. Ta zakonitost (vpliv upada s kvadratom oddaljenosti), ki je bila v tistem času že dodobra poznana v gravitacijskem polju, je dala proučevanju električnih sil še dodatnega zagona.

- Francoski fizik Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806) je izdelal precizno torzijsko tehtnico, s katero je leta 1785 eksperimentalno potrdil svojo kvantitativno formulacijo električnih sil med majhnimi naelektrenimi telesi (kroglicami). Njegov zakon (danes ga imenujemo *Coulombov zakon*) pravi: sila med dvema (relativno mirujočima) elektrinama je premosorazmerna produktu množin elektrin in obratnosorazmerna s kvadratom medsebojne oddaljenosti; sila je vzajemna in deluje v smeri zveznice med obema elektrinama; sila je odbojna, če sta elektrini enakega predznaka, in je privlačna, če sta nasprotnega predznaka. Nova – električna – sila med dvema naelektrenima telesoma je bila neprimerljivo večja kot do takrat poznana Newtonova sila (med telesoma[2]).

  Coulombovo odkritje je bilo zelo hitro sprejeto prav zaradi svoje eksperimentalne nazornosti in čistosti in je kot naročeno "padlo" v čas, ko je bilo matematično orodje za popis gravitacijskih polj že dodobra izčiščeno (teorija potenciala, gradientno vektorsko polje). Omenimo le nekaj najzaslužnejših matematikov tistega časa: Lagrangea, Laplacea, Poissona in Greena[3]; ti so s svojimi dosežki (so)gradili tudi teorijo električnega polja.

- Do konca XVII. stoletja je bilo živo predvsem ekperimentiranje z (relativno) mirujočimi naelektrenimi telesi (elektrinami). Naslednja "vrata" je odprl italjanski zdravnik Luigi Galvani (1737 – 1798), ki je leta 1789 odkril, da pride do reakcije mišic v žabjem kraku, če se ga vpne med dve sponki iz različnih kovin, ki sta na konceh spojeni[4]. Čeravno je Galvani ta pojav nerodno razlagal s t.i. "živalsko"

ima elektron negativni naboj, proton pa pozitivnega, je zgolj stvar dogovora; moglo bi biti tudi obratno. Torej, ko rečemo, da je neko telo naelektreno, imamo v mislih tisti del elektrine, ki je na telesu v presežku. Telesu, ki v algebraični vsoti ne izkazuje presežka, bomo rekli nevtralno telo ali tudi: telo je *električno nevtralno*.

[2]Če bi vzeli jekleni kroglici premera 1 cm v medsebojni oddaljenosti 10 cm z enakima presežnima elektrinama 10 nC = 10^{-8} C = $6.24 \cdot 10^{10}$ e, bi bila električna sila približno 90 μN, Newtonova sila pa približno 0.11 pN. Razmerje bi bilo približno $8 \cdot 10^8$ v korist električne sile, pri tem pa s količino elektrine niti najmanj nismo pretiravali. Pri analizi električnih sil med elektrinami bomo – prav zato – "pozabili" na gravitacijske sile.

[3]J. L. Lagrange (1736-1813), P. S. Laplace (1749-1827), S. D. Poisson (1781-1840), G. Green (1793-1841).

[4]Danes vemo, da dve kovini (elektrodi) z vlažnim krakom (elektrolitom) tvorita galvanski člen (vir električne napetosti), ki nabite delce požene v urejeno gibanje, v pretok elektrine, v električni tok, in da

elektriko, pa je s tem vendar posredno opozoril na soodvisnost med električnimi pojavi in kemičnimi procesi.

Italijanskemu fiziku Alessandru Volti (1745 – 1827) je leta 1800 prvemu uspelo izdelati napetostni vir (Voltov člen), ki more v prevodnem (kovinskem) krogotoku "poganjati" stabilnejši in trajnejši električni tok.

- Danski fizik Hans Christian Oersted (1777 – 1851) je v zimi 1819/20 opazil svojevrstno odklanjanje magnetne igle v bližini žice, če ta vodi električni tok, in s tem opozoril na interakcijo med električnim tokom in magnetnimi pojavi. Povedati velja, da so magnetne učinke poznali tudi že v antiki. (Omenja se, da je zanje vedel že Tales.) Vedeli so, da se kosi nekaterih železovih rud med seboj privlačijo oz. odbijajo. Koren "magne" izvira verjetno iz imena mesta Magnezija (Mala Azija), v okolici katerega so bila nahajališča magnetita (Fe_3O_4). Tudi stari Kitajci (okrog l. 120 p.n.š.) so vedeli, da se viseča magnetna igla obrne v smeri sever-jug; do Gilberta so menili, da se igla obrača po zvezdi Severnici. Z magnetnimi pojavi se je ukvarjal tudi Coulomb, ki je hotel magnetne sile popisati analogno električnim, vendar se je kasneje ta smer izkazala za napačno.

- Oerstedovemu odkritju je sledilo izredno intenzivno obdobje dveh, treh let, ko je "naveza" francoskih fizikov opravila pionirsko delo, primerljivo z izsledki Coulomba in njegovih sodobnikov izpred štiridesetih let. Osrednja osebnost je gotovo fizik André Marie Ampère (1775 – 1836), ki je Oerstedove eksperimente še razširil in odkril, da so magnetni pojavi prisotni tudi med dvema električnima tokokrogoma. Po seriji sijajnih eksperimentov je dognal kvalitativne in kvantitativne relacije, ki določajo magnetne sile med toki v električnih tokokrogih. Tako kot je Coulomb podal matematični izraz za silo med dvema elektrinama, je Ampère leta 1820 podal ustrezen matematični izraz za magnetno silo med dvema kratkima odsekoma žice (tokovnima elementoma), ki vodita električna toka. Matematični zapis te sile je nekoliko bolj zapleten (vsebuje dvojni vektorski produkt), vendar izraža – generalno gledano – določene sorodnosti s Coulombovim zakonom. Magnetna sila je premosorazmerna produktu momentov tokovnih elementov (moment je produkt toka in dolžine odseka) in obratnosorazmerna s kvadratom oddaljenosti tokovnih elementov ter kot vektor sorazmerna z dvojnim vektorskim produktom med smernikom prvega tokovnega elementa, smernikom distančnega vektorja med tokovnima elementoma in smernikom drugega tokovnega elementa.

  Ampère je postavil tudi tezo, da je mogoče snovi, ki zadržijo magnetne lastnosti (trajni magneti, feromagnetne snovi) obravnavati z notranjimi (lokalnimi) električnimi toki. Njegova trditev se je kasneje tudi potrdila, zato so ti mikroskopski toki danes poimenovani po njem kot *Ampèrovi toki*. Ampère je v svoji monografiji tudi prvi sistematično ločil obravnavo električnih in magnetnih pojavov; prvo področje je poimenoval *elektrostatika*, drugo pa *elektrodinamika*[5].

  Istočasno z Ampèrom so se z magnetnimi učinki med električnimi toki ukvarjali tudi njegovi sodobniki: Jean Baptiste Biot (1774 – 1862), Félix Savart (1791 – 1841) in

ta povzroči krčenje mišic.

[5]Danes to področje imenujemo *magnetostatika*.

Pierre Simon Laplace (1749 – 1827). Njihov skupni izsledek je bil matematični zapis vektorja gostote magnetnega pretoka, ki pripada kratkemu tokovnemu elementu – elementarnemu segmentu električnega tokokroga[6].

- Angleški knjigovez in samouk v fiziki, Michael Faraday (1791 – 1867), je Oerstedovo odkritje magnetnih učinkov električnega toka intuitivno razširil v obratno vprašanje: ali je možno z magnetizmom doseči električne učinke? Po šestletnih naporih je leta 1831 eksperimentalno ugotovil, da se v sklenjeni prevodni zanki, ki objame časovno spremenljiv magnetni pretok, *inducira* električni tok, in da je napetost, ki potiska elektrine v zanki, sorazmerna časovni spremembi omenjenega magnetnega pretoka[7].

  Praktično navodilo za določitev smeri inducirane napetosti (toka) je leta 1834 podal ruski fizik Emil Hristianovič Lenc (1804 – 1865); ugotovil je, da je smer induciranega toka takšna, da se z lastnim (induciranim) magnetnim poljem upira vsiljeni spremembi magnetnega pretoka. Leta 1834 je Faraday odkril še pojav samoindukcije, ne vedoč, da je prav to isto, že dve leti prej, v Ameriki odkril Joseph Henry (1797 – 1878). Faradayev zakon indukcije je v dokončno (današnjo) matematično obliko dal šele tri desetletja kasneje J. C. Maxwell.

  Čeprav Faraday ni bil "vešč" matematike, pa so bila njegova fizikalna videnja elektromagnetnih pojavov izredno globokoumna in pomenijo temelj elektromagnetne teorije, ki jo je fizikalno-matematično dovršil Maxwell. Do Faradaya je vladalo prepričanje, da so električni in magnetni pojavi, podobno kot gravitacijski, zgolj posledica vplivov na daljavo. Faraday pa je te učinke pripisal interakciji med elektrino ali tokom in pripadajočim poljem na tistem mestu. S tem v zvezi je uvedel pojem *silnic* ter pojma *električno polje* in *magnetno polje*[8]. Prostor, v katerem se vsi ti pojavi dogajajo, je dobil tako svojo vlogo in ustrezno mesto.

- V tem obdobju je Voltova baterija pospešila tudi proučevanje prevajanja elektrin v električnih tokokrogih. Georg Simeon Ohm (1787 – 1854) je leta 1826 eksperimentalno ugotovil, da je tok skozi žico, ki ne vsebuje virov, premosorazmeren potencialni razliki med koncema žice[9]. Čeprav je bila Ohmova ugotovitev sila preprosta – v resnici pa pomembna –, je "rabila" kar nekaj let, da se je uveljavila. Leta 1841 je James Prescott Joule (1818 – 1889) ugotovil, da je sproščena toplota v žici (grelu) sorazmerna kvadratu električnega toka skozi njo. Leta 1847 je v razvijajočo teorijo prispeval izdaten del tudi nemški fizik Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887) s

[6]Ta matematični zapis se danes imenuje z njihovimi imeni v različicah: Biot-Savartov, Biot-Savart-Laplaceov, Ampèrov, Ampère-Laplaceov, čeravno so zanj verjetno vsi izdatno zaslužni. V ta okvir tematsko sodi tudi izsledek Henryja Rowlanda pol stoletja kasneje. Eksperimentalno je ugotovil, da gibajoča elektrina povzroča kvalitativno in kvantitativno enake magnetne učinke kot tok v žicah (meril je magnetno polje vrtečega naelektrenega prstana). Aleksander Eichenwald je l. 1903 prišel do podobne ugotovitve tudi za gibno mikroskopsko vezano elektrino.

[7]Istega leta je Faraday razvil tudi enosmerni generator, ki je temeljil na njegovem odkritju (izdelal ga je z rotirajočim diskom med poloma trajnega magneta).

[8]Njegova "filozofija" gledanja na elektromagnetne pojave je bila (posredno) fizikalno dokazana (šele dvajset let po njegovi smrti) s Hertzovim eksperimentom, ki je potrdil Maxwellovo tezo o širjenju elektromagnetne energije po prostoru.

[9]Ta zakon imenujemo danes *Ohmov zakon*; razen redkih izjem velja za večino elektrotehniških materialov.

formulacijo dveh svojih zakonov. Prvi govori o kontinuiteti električnega toka, drugi pa o tem, da je napetost med dvema točkama v električnem vezju enaka po vseh poteh med njima[10].

- Čeravno se je angleški fizik James Clerk Maxwell (1831 – 1879) v letu Fararday-jevega odkritja indukcije šele rodil, pa je bil verjetno prvi, ki je sprejel njegove razlage in predstave o elektromagnetnih pojavih; in kar je še pomembneje: s svojo izjemno intuicijo je matematične formulacije elektromagnetnega polja dovršil in jih tudi smiselno dopolnil. Vpeljal je t.i. *premikalni*[11]*tok*, ki ga je postavil ob bok konduktivnemu toku in tako odpravil neskladje med *Ampèrovim zakonom toka* in *kontinuitetno enačbo*. Svoje epohalno delo je predstavil l. 1864 v članku *A dynamic theory of the electromegnetic field*. Podal je osnovne enačbe elektromagnetnega polja[12], ki jih danes po njem tudi imenujemo.

  Do Maxwella se je teorija elektromagnetnega polja gradila postopno od eksperimenta do matematičnega zapisa, pri njegovem premikalnem toku pa se je utečen vrstni red zamenjal. Do eksperimentalne potrditve Maxwellove vizije je prišlo šele z novo generacijo (četrt stoletja kasneje – že po njegovi smrti[13]). Maxwell je tudi trdil, da se vsi elektromagnetni pojavi odvijajo v *etru*[14], ki kot medij zapolnjuje ves prostor. V svojem drugem pomembnem delu (knjigi) z naslovom *A treatise on electricity and magnetism*, l. 1873, je Maxwell podal pregled celotne teorije elektromagnetizma. Posebno poglavje je posvetil svetlobi v luči elektromagnetizma. Svoje znamenite enačbe je zapisal za prazen prostor (vakuum) in z združitvijo prišel do valovne enačbe. Ta je ustrezala hipotetičnemu valovanju, ki bi se v prostoru širilo s hitrostjo, katere vrednost se je zelo ujemala z – do takrat – izmerjeno hitrostjo svetlobe[15]. Povlekel je smel zaključek, in sicer, da je svetloba elektromagnetni pojav, ki se širi v prostoru po zakonih elektromagnetizma.

- Maxwellovo delo je dobesedno klicalo po eksperimentalni potrditvi. Nemški fizik Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894) je l. 1888, na pobudo svojega učitelja, fizika Hermanna von Helmholtza (1821 – 1894), potrdil obstoj elektromagnetnih valov. V ta namen je izdelal visokofrekvenčni oscilator, ki je oddajal 60-centimetrske elektromagnetne valove, katere je nato detektiral ter s tem potrdil Faraday-Maxwellovo teorijo elektromagnetnega polja.

- Obdobje po Hertzu (na prehodu iz XIX. v XX. stoletje) pa je bilo že zaznamovano

[10] Današnja formulacija teh dveh zakonov je nekoliko strožja, vendar v svojem bistvu identična.

[11] Tudi *tok odmika* (ang. displacement current, nem. der Versciebungsstrom, rus. tok smeščenija).

[12] Maxwell vseh svojih enačb ni zapisal v danes uveljavljenih formah, katerih obliko so jim dali Hertz, Lorentz in Heaviside (šele po njegovi smrti), ampak v formah, ki so posredno enakovredne.

[13] Resnici na ljubo je bil Maxwell pri razširitvi električnega toka s premikalnim tokom nekako nedorečen, kar priča tudi simpozij sovjetske Akademije znanosti o njem leta 1981 (ob 150-letnici rojstva Maxwella), kjer so različni avtorji podali nekaj možnih hipotez, ki bi mu lahko narekovale vpeljavo novega toka.

[14] Pojem etra je bil z izsledki Einsteinove teorije relativnosti dokončno ovržen.

[15] V tretji izdaji Maxwellove knjige (leta 1891) je omenjeno ime (verjetno) našega slovenskega rojaka Klemenčiča, ki je leta 1884 izmeril svetlobno hitrost v iznosu $3.019 \cdot 10^8$ m/s. Študent g. Leon Marc je avtorja (Antona R. Sinigoja) leta 1993 opozoril, da bi omenjeni Klemenčič verjetno lahko bil Nace Klemenčič.

z rojevanjem nove – kvantne teorije. Nemški fizik Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) je leta 1895 postavil teorijo elektromagnetnih in optičnih pojavov, ki se na eni strani opira na Maxwellovo teorijo, na drugi pa na obstoj elementarnih nabojev, ki so v povezavi z delci materije. Sledilo je Thomsonovo odkritje elektrona (leta 1897) in sistematično proučevanje zgradbe snovi in zakonitosti v atomarnem "svetu". Kvantna teorija je postavila tudi meje uporabnosti Maxwellove teorije. Slednja je uporabljiva le v območjih prostora, ki niso manjša od *fizično majhne prostorninice* (takšne torej, ki zajame še vedno veliko atomov), in je uporabljiva le znotraj časovnih intervalov, ki niso krajši od *fizično kratkega intervala časa* (takšnega torej, ki je še vedno mnogo daljši kot je npr. "obhodni" čas elektrona). Zato tudi rečemo, da je Maxwellova teorija *makroskopska teorija* elektromagnetnih pojavov; nasprotno od kvantne teorije, ki proučuje mikroskopske pojave v atomarnih časovno-prostorskih "dimenzijah".

Prav zato so tudi vse relevantne skalarne in vektorske količine, s katerimi popisujemo to makroskopsko polje na določenem mestu in ob določenem času, razumljene in opredeljene kot *krajevno-časovno povprečje* znotraj fizično majhne prostorninice δv in znotraj fizično kratkega časovnega intervala[16] δt. Makroskopsko količino ψ – kot krajevno-časovno funkcijo – bi za splošno točko T v prostoru in za splošen trenutek t pisali kot

$$\psi(T,t) = \langle\psi\rangle_{\text{znotraj } \delta v \text{ in } \delta t}$$

kjer je δv fizično majhna okolica točke T in je t trenutek znotraj fizično kratkega časovnega intervala δt. Sklicujoč se na prostorsko-časovne omejitve makroskopske teorije elektromagnetnega polja, bomo fizično majhen volumen oz. fizično kratek interval časa matematično razumeli kot dv oz. dt, čeravno kot takšna označujeta "neskončno majhno prostorninico" oz. "neskončno kratek časovni interval".

- Nemški fizik Albert Einstein (1879 – 1955) je leta 1905 v svojem znamenitem članku *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* ovrgel postulat etra (absolutnega prostora) in pokazal invariantnost Maxwellovih enačb v inercialnih sistemih. Še bolj zanimivo pa je, da je mogoče z uporabo Coulombovega zakona in specialne teorije relativnosti izpeljati glavne enačbe elektromagnetnega polja. Lorentzova sila se pri tem kaže kot transformacija Coulombove sile iz gibajočega v mirujoči sistem. Takšna izvajanja je prvi opravil Leight Page leta 1912; pokazal je, da Ampèrova sila in Faradayev zakon indukcije izhajata iz Coulombovega zakona.

♠ ♠ ♠

Maxwellove enačbe tvorijo konsistenten sistem (enačb) in predstavljajo znanstvene osnove makroskopske teorije elektromagnetnega polja in elektrotehnike nasploh. K tem enačbam dodajamo še: i) tri empirične enačbe, ki popisujejo interakcijo med atomarno strukturo snovi in elektromagnetnim poljem, ii) kontinuitetno enačbo in iii) Lorentzovo enačbo za silo na delček (v splošnem gibajoče) elektrine v elektromagnetnem polju. Lorentzova sila ni nič drugega kot posplošitev Coulombove električne in Ampèrove magnetne sile in je

[16] Z znakom δ (delta) bomo poudarili, da imamo v mislih "majhen delček" neke fizikalne količine.

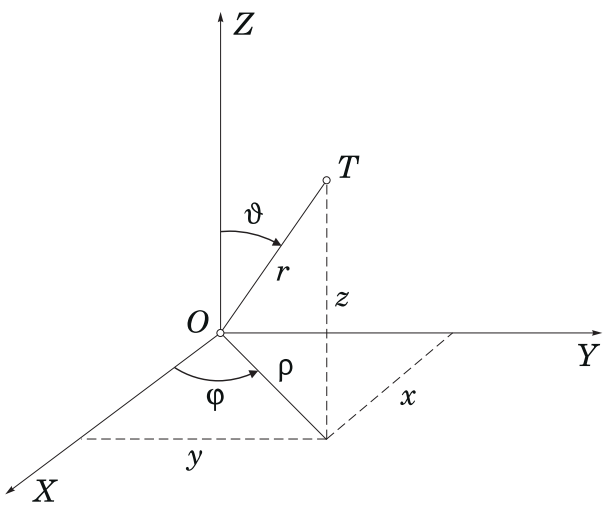
hkrati tudi vezni člen med "nevidnim" elektromagnetnim poljem in preostalim neelektričnim "svetom". Vse elektromagnetne pojave, ki jih zaznavamo, jih namreč moremo z njo neposredno ali posredno pojasniti.

2. Matematični uvod

Za popis lastnosti in porazdelitev elektromagnetnega polja bomo uporabljali *skalarne* in *vektorske funkcije* prostorskih koordinat in časa. Nad funkcijami bomo izvajali operaciji odvoda in integrala, vektorske funkcije bomo med seboj skalarno in vektorsko množili itd. V tem razdelku si bomo pripravili (ali ponovili) le nekaj od tega, ostalo pa bomo sproti (skozi poglavja) dopolnjevali.

Koordinatni sistemi. Spoznali bomo celo vrsto fizikalnih količin, ki bodo v prostoru spremenljive (od točke do točke). Funkcije, s katerimi jih bomo popisali, bodo podajale *skalarno* ali *vektorsko polje* določene količine; bo pa to polje lahko od trenutka do trenutka drugačno – torej tudi časovno spremenljivo. Da bi bile te funkcije enoznačne "slike" fizikalnih količin v prostoru, jih zapisujemo v predhodno izbranem *koordinatnem sistemu* (v nadaljevanju k.s.). Za začetek si izberimo osnovnega, t.j. *kartezijev k.s.* Določen je z izhodiščno točko O in trojico med seboj *pravokotnih koordinatnih osi* X, Y in Z. Splošna točka T je v njem opredeljena s *koordinatno trojko* (x, y, z), kjer so *koordinate* x, y in z pravokotne projekcije daljice $\overline{OT}$ na posamezne koordinatne osi.

V tem, osnovnem ali izhodiščnem k.s. pa je definiranih še mnogo drugih k.s. Mi bomo omenili le še dva, ki sta v praksi zelo pogosta: to sta *valjni* (ali cilindrični) in *krogelni* (ali sferični) k.s. V valjnem k.s. je splošna točka T opredeljena s trojko (ρ, φ, z) – prvi dve imenujemo tudi polarni koordinati – v krogelnem pa je splošna točka opredeljena s trojko (r, ϑ, φ). Geometrijski pomen posameznih koordinatnih trojk podaja slika 2.1; koordinati φ in z se pri tem podvajata. Med koordinatami veljajo očitne trigonometrične relacije:



Slika 2.1: Koordinate splošne točke.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi = \rho\cos\varphi & \qquad \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi = \rho\sin\varphi & \qquad r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ z &= r\cos\vartheta & \qquad \varphi &= \arctan(y/x) \\ & & \qquad \vartheta &= \arccos(z/r) \end{aligned}$$

Imajo pa koordinate tudi svoja definicijska območja: $x, y, z \in \mathbb{R}$; $\rho, r \geq 0$; $\varphi \in [0, 2\pi)$; $\vartheta \in [0, \pi]$, znotraj katerih se morejo in morajo gibati, da dosežejo ves prostor osmih kvadrantov.

Neposredno s koordinatami lahko vpeljemo tudi pojem *koordinatne ploskve*. Koordinatna ploskev je tista ploskev, na kateri je določena koordinata konstantna. Koordinatne ploskve h koordinatam x, y in z so ravnine. Pri koordinati x so to vzporedne ravnine x_1, x_2, x_3, ..., ki jih koordinatna os X pravokotno "prebada"; podobno je tudi pri y in z koordinati. Koordinatne ploskve koordinate φ so polravnine, ki so "vpete" na Z os in oklepajo s pozitivno X osjo kote φ_1, φ_2, φ_3, ... Projekcije teh ploskev na ravnino (XY) so polpremice iz izhodišča. Koordinatne ploskve koordinate ρ so koncentrični valji ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... okrog Z osi. Koordinatne ploskve koordinate r so koncentrične krogle z radiji r_1, r_2, r_3, ..., ki imajo središče v O (izhodišču). Koordinatne ploskve koordinate ϑ so stožci s skupnim vrhom v O. Če je $\vartheta = 0$, je stožec kar pozitivna Z os, če je $\vartheta = \pi/2$, se stožec "razpre" v ravnino $z = 0$, in pri $\vartheta = \pi$ je stožec "stisnjen" v negativno Z os.

Splošno točko T, s koordinatno trojko (u_1, u_2, u_3), moremo razumeti kot presečišče koordinatnih ploskev u_1, u_2 in u_3; z u_1, u_2 in u_3 smo označili trojko enega od omenjenih treh k.s. Skalarno funkcijo ψ bi v takšnem k.s. zapisali kot funkcijo treh spremenljivk: $\psi = \psi(u_1, u_2, u_3)$.

Zgled 2.1

Zapišimo nekaj skalarnih funkcij, ki so izražene s koordinatami posameznih k.s.:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad U(\rho,\varphi) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

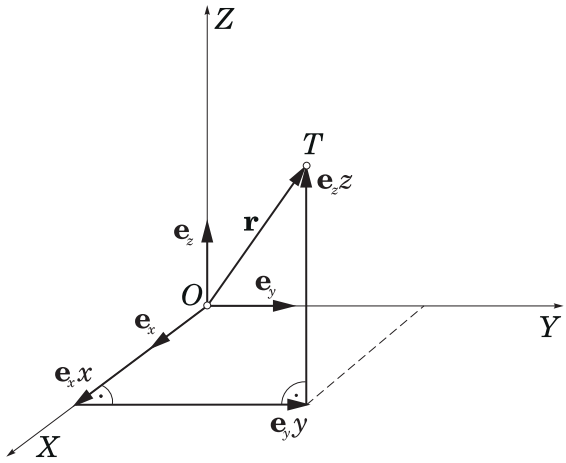
$$B(z,t) = B_0\cos(\omega t - \beta z)$$

$$\sigma(x) = \frac{qh}{\pi(h^2+x^2)} \qquad f(r) = C\frac{e^{-ikr}}{r}$$

V teh nekaj primerih moremo videti, da skalarna funkcija ni nujno vedno odvisna od vseh koordinat. Če vzamemo že prvo, bi jo enakovredno pisali tudi kot $V(x,y,z) = Q/4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Očitno je zapis daljši in neroden – če že nič drugega –, zato bomo v nadaljevanju izbirali koordinatni sistem tako, da bo danemu problemu najbolj naraven; izražave in enačbe bodo tako krajše in preglednejše.

Enotski vektor in bazni vektorji. Za jasen, enoumen in pregleden zapis vektorjev in vektorskih funkcij bomo vpeljali vektorje enote oz. *enotske vektorje*. Ti vektorji se ne bodo glasili na neko fizikalno količino – bodo neimenovani –, njihova dolžina pa bo ena – zato enotski.

Vzemimo za začetek kar osnovni (kartezijev) k.s. V izhodišče "položimo" (tri) enotske vektorje $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ in $\mathbf{e}_z$ tako, da se njihove smeri ujemajo z istoimenskimi koordinatnimi

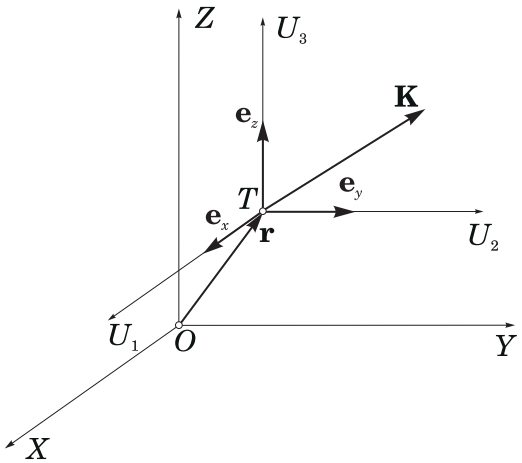


Slika 2.2: Krajevni vektor splošne točke.

osmi; slika 2.2. Glede na to, da so koordinate točke T pravokotne projekcije daljice $\overline{OT}$ na posamezne koordinatne osi, potem moremo, po paralelogramskem pravilu za sestavljanje in razstavljanje vektorjev, vektor $\mathbf{r}$, ki je krajevni vektor točke T s koordinatno trojko (x, y, z), pisati kot linearno kombinacijo baznih vektorjev: $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x\, x + \mathbf{e}_y\, y + \mathbf{e}_z\, z$. Vektor $\mathbf{r}$ je torej paralelogramska vsota vektorjev $\mathbf{e}_x\, x$, $\mathbf{e}_y\, y$ in $\mathbf{e}_z\, z$. Nasploh pa bomo za vektorje uporabljali dva zapisa: i) zapis z baznimi vektorji in ii) komponentni zapis; torej:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{e}_x\, x + \mathbf{e}_y\, y + \mathbf{e}_z\, z && \text{zapis z baznimi vektorji} \\ \mathbf{r} &= (x, y, z) && \text{komponentni zapis} \end{aligned}$$

Tako kot smo bazno trojko $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ narisali v koordinatnem izhodišču, jo lahko tudi v poljubni točki v prostoru. Premaknimo to trojko translatorno (brez rotacije) v točko T; slika 2.3. Če iz te točke potegnemo v smereh enotskih vektorjev osi U_1, U_2 in U_3 –

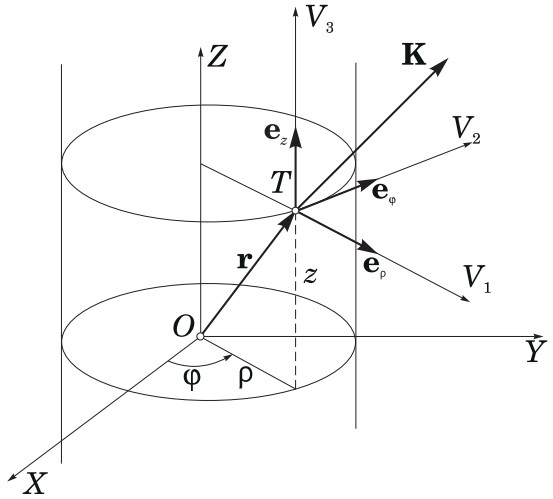


Slika 2.3: Bazna trojka v kartezijevem koordinatnem sistemu.

te so posamično vzporedne k osem X, Y in Z –, dobimo nov (lokalni) k.s. Če v točki T pripada neki fizikalni količini vektor $\mathbf{K}$, potem ima ta vektor določene pravokotne

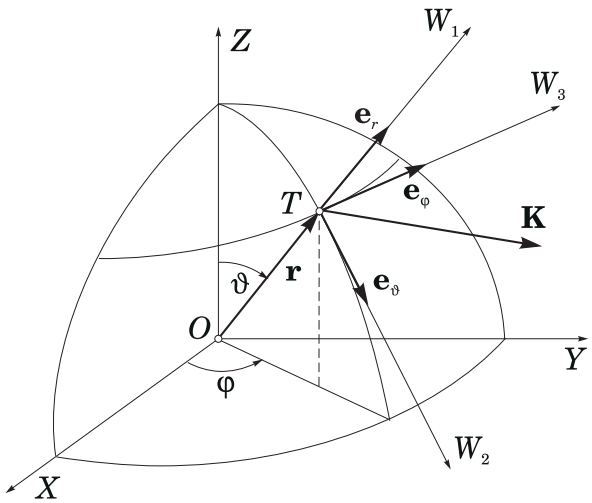
projekcije K_x,K_y in K_z na koordinatne osi U_1, U_2 in U_3 oz., zaradi vzporednosti, tudi na osi X, Y in Z. Podobno kot krajevni vektor $\mathbf{r}$, zapišimo tudi vektor $\mathbf{K}$ v eni ali drugi obliki: $\mathbf{K} = \mathbf{e}_x\, K_x + \mathbf{e}_y\, K_y + \mathbf{e}_z\, K_z$ ali $\mathbf{K} = (K_x, K_y, K_z)$.

Podobno kot smo vpeljali bazne vektorje v kartezijevem k.s., bomo to storili še za oba druga koordinatna sistema. Bazno trojko enotskih vektorjev bomo v splošni točki T dobili tako, da bomo tri vektorje enote orientirali v smereh priraščanja pripadajočih koordinat v tej točki; sliki 2.4 in 2.5. Da bi bila slika dovolj plastična[1], smo si pomagali



Slika 2.4: Bazna trojka valjnega koordinatnega sistema.

s pomožnimi krivuljami in črtami, ki ponazarjajo valj oz. kroglo. Slika 2.4 podaja bazno trojko (enotskih vektorjev) $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ valjnega k.s., slika 2.5 pa podaja bazno trojko $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi\}$ krogelnega k.s.



Slika 2.5: Bazna trojka krogelnega koordinatnega sistema.

[1]♣ Da bi prostorska slika še bolj "zaživela", naj se bralec postavi v kot sobe in naj z razprtjem palca, kazalca in sredinca ponazori lego trojke baznih vektorjev v splošni točki. ♣

Vsaka trojka zase predstavlja *ortogonalno bazo*; bazni vektorji znotraj trojke so si paroma pravokotni[2]: $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_1$. (Z indeksi 1, 2 in 3 smo označili prvi, drugi in tretji bazni vektor izbranega k.s.) Če sedaj v smeri baznih vektorjev iz točke T potegnemo poltrake, dobimo lokalna kartezijeva k.s.: v valjnem z osmi V_1, V_2 in V_3, v krogelnem pa z osmi W_1, W_2 in W_3. Če vektor $\mathbf{K}$ (v točki T) projiciramo na lokalne koordinatne osi, dobimo v valjnem k.s. projekcije K_ρ, K_φ in K_z, v krogelnem pa projekcije K_r, K_ϑ in K_φ. Vektor $\mathbf{K}$ zapišemo v valjnem k.s. kot $\mathbf{K} = \mathbf{e}_\rho\, K_\rho + \mathbf{e}_\varphi\, K_\varphi + \mathbf{e}_z\, K_z$ ali kot $\mathbf{K} = (K_\rho, K_\varphi, K_z)$, v krogelnem k.s. pa kot $\mathbf{K} = \mathbf{e}_r\, K_r + \mathbf{e}_\vartheta\, K_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi\, K_\varphi$ oz. kot $\mathbf{K} = (K_r, K_\vartheta, K_\varphi)$. Za splošen pravokoten k.s., s koordinatami u_1, u_2 in u_3 ter pripadajočimi baznimi vektorji $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ in $\mathbf{e}_3$, bi vektor $\mathbf{K}$ zapisali kot $\mathbf{K} = \mathbf{e}_1\, K_1 + \mathbf{e}_2\, K_2 + \mathbf{e}_3\, K_3 = (K_1, K_2, K_3)$, kjer so K_1, K_2 in K_3 pravokotne projekcije tega vektorja na osi lokalnega kartezijevega k.s.

Če smo pri kartezijevem k.s. videli, da se bazna trojka – pri gibanju po prostoru – le translatorno premika (osi lokalnega in izhodiščnega k.s. ostajajo paroma vzporedne), pa tega ne moremo trditi za valjnega in krogelnega. Pri valjnem se trojka obrača okrog Z osi, pri krogelnem pa okrog Z osi in se od nje odklanja. Zaključimo lahko, da so bazni vektorji v splošnem k.s. spremenljivi (ne po dolžini, pač pa po smeri) – torej so vektorske funkcije koordinat. Kot primer vzemimo enotski vektor $\mathbf{e}_\vartheta$ v točki T, slika 2.5. Če ga projiciramo na osi X, Y in Z, dobimo projekcije: $\cos\vartheta\cos\varphi$, $\cos\vartheta\sin\varphi$ in $-\sin\vartheta$, ali drugače: $\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_x \cos\vartheta\cos\varphi + \mathbf{e}_y \cos\vartheta\sin\varphi - \mathbf{e}_z \sin\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi,\ \cos\vartheta\sin\varphi,\ -\sin\vartheta)$. ♣ Bralec naj poskusi na podoben način izraziti še kak drug bazni vektor. ♣ Očitno je $\mathbf{e}_\vartheta$ od točke do točke drugačen; če ga izrazimo s koordinatami x, y in z splošne točke T, dobimo:

$$\mathbf{e}_\vartheta = \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

Iz izraza je tudi razvidno, da vektor $\mathbf{e}_\vartheta$ na osi Z (ko sta x in y enaka nič) ni definiran (kvocient 0/0). To je očitno: če se postavimo na Zemljin pol, ne moremo pokazati smeri poldnevnika. Zaključiti moremo, da bazna trojka v splošnem k.s. ni povsod definirana. Pri naših treh k.s. je bazna trojka kartezijevega k.s. definirana povsod, ostala dva pa te trojke nimata definirane na Z osi.

Končno zapišimo še vektorsko funkcijo $\mathbf{K}$ v splošnem k.s. Določena bo s trojko baznih vektorjev $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ in $\mathbf{e}_3$ ter s pripadajočo trojico komponent K_1, K_2 in K_3,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i K_i(u_1, u_2, u_3) = (K_1, K_2, K_3)$$

pri tem pa bo vsaka komponenta zase v splošnem skalarna funkcija treh koordinat (Zgled 2.1).

Zgled 2.2

Zapišimo dve vektorski funkciji:

$$\mathbf{K}(x, y) = (xy^2, x^2y, 0) \qquad \text{v kartezijevem k. s.}$$

[2]Tudi koordinatne ploskve sosednjih koordinat danega k.s. se v prostoru sekajo pod pravim kotom.

$$\mathbf{E}(r,\vartheta) = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cos\vartheta}{r^3}, \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\vartheta}{r^3}, 0\right) \qquad \text{v krogelnem k.s.}$$

Vektor oz. vektorska funkcija ima tudi svojo t.i. *absolutno vrednost*. Označimo jo s $|\mathbf{K}|$ ali kratko K; $K = |\mathbf{K}|$. Projekcije vektorja $\mathbf{K}$ (v lokalnem k.s.) lahko z vzporednicami na lokalne osi grafično dopolnimo in dobimo kvader z robovi K_1, K_2 in K_3. Absolutna vrednost ustreza dolžini prostorske diagonale tega kvadra. Zanjo velja pitagorska vsota: $K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2$. Absolutna vrednost je tako: $K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}$. Očitno je absolutna vrednost vektorja nič le in le tedaj, ko so vse projekcije nič – pa tudi obratno: $\mathbf{K} = \mathbf{0} \iff K = 0$. Absolutna vrednost enotskih vektorjev je po definiciji ena, $|\mathbf{e}_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$.

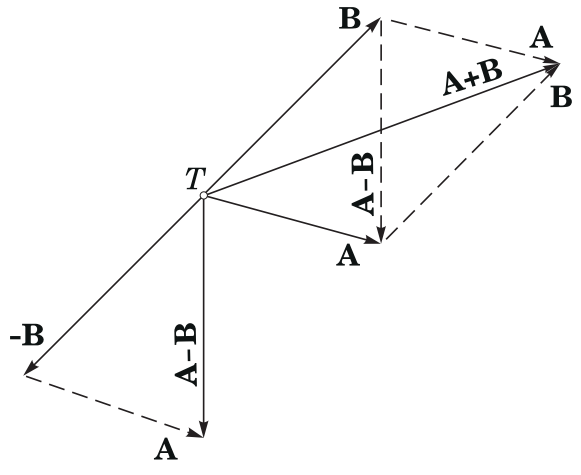
Moremo pa opredeliti tudi enotski vektor, ki ni nujno bazni vektor. Bodi v točki T vektor $\mathbf{R}$; $R \neq 0$. Enotski vektor $\mathbf{e}_R$ bomo dobili s kvocientom $\mathbf{R}/R$; $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$. Njegova absolutna vrednost je očitno ena.

Zgled 2.3

$$\mathbf{R} = (1, -2, 3) \qquad R = \sqrt{14} \qquad \mathbf{e}_R = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

Operacije z vektorji. Ponovili bomo nekatere operacije z vektorji. Vzemimo, da imamo v splošni točki T dane tri od nič različne vektorje $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$. Poznamo torej tudi njihove komponente v enem in istem k.s.

1) Vsota(razlika) vektorjev. Dva vektorja določata v prostoru paralelogram; slika 2.6. Vsoti vektorjev pripada – po definiciji – diagonalni vektor paralelograma iz točke T.



Slika 2.6: Vsota in razlika dveh vektorjev.

Isto vsoto dobimo, če na en vektor superponiramo (naložimo) drug vektor po zgornjem ali pa po spodnjem trikotniku; $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ – komutativnost. Vsota je tudi asociativna, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ – vrstni red seštevanja ni pomemben. Zapišimo naše vektorje z baznimi vektorji; upoštevajmo lastnosti vsote in dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2 + \mathbf{e}_3 A_3) + (\mathbf{e}_1 B_1 + \mathbf{e}_2 B_2 + \mathbf{e}_3 B_3) \\ &= \mathbf{e}_1(A_1 + B_1) + \mathbf{e}_2(A_2 + B_2) + \mathbf{e}_3(A_3 + B_3)\end{aligned}$$

ali

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$$

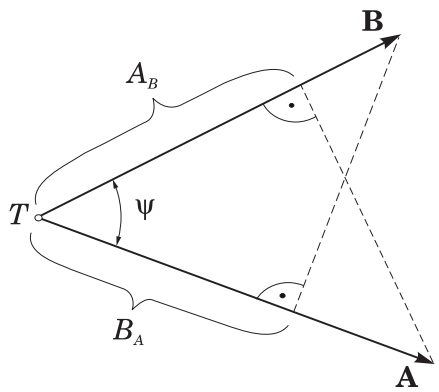
Komponente vsote dveh vektorjev dobimo tako, da seštejemo "soležne" komponente sumandov. Razliko dveh vektorjev napravimo kot vsoto prvega in drugemu nasprotnega vektorja: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$. Razliko geometrijsko ponazarja druga diagonala v paralelogramu.

Zgled 2.4

$$a) \quad \mathbf{A} = (1, 3, 5) \quad \mathbf{B} = (2, -1, -4) \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = (3, 2, 1)$$

$$b) \quad \mathbf{K} = (y, 2x, 4) \quad \mathbf{L} = (-x, 2y, z) \Rightarrow \mathbf{K} - \mathbf{L} = (x + y, 2x - 2y, 4 - z)$$

2) Skalarni produkt. Ta produkt je takšen, da priredi dvema vektorjema skalar. Vzemimo spet vektorja $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$; slika 2.7. Po definiciji je *skalarni produkt* vektorja $\mathbf{A}$ z



Slika 2.7: Grafična interpretacija skalarnega produkta.

vektorjem $\mathbf{B}$ enak produktu absolutne vrednosti vektorja $\mathbf{A}$ in projekcije vektorja $\mathbf{B}$ na smer vektorja $\mathbf{A}$. Pišemo:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB_A$$

Očitno je $B_A = B \cos\psi$, kjer je ψ ravninski kot, ki ga vektorja oklepata v svojem paralelogramu. Ker pa je $A_B = A \cos\psi$, moremo zgornji predpis pisati tudi kot BA_B ali kot

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\psi$$

Skalarni produkt je očitno komutativen, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Ker pa je projekcija vsote dveh vektorjev na dano smer enaka vsoti projekcij na to smer, je skalarni produkt tudi distributiven, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Če sta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ različna od nič, potem pri $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ velja $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ (vektorja sta pravokotna, kot $\psi = \pi/2$, $\cos\psi = 0$) – in tudi obratno. Če pravilo skalarnega produkta uporabimo na medsebojnih produktih baznih vektorjev, dobimo:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Skalarni produkt $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ bomo izvedli tako, da bomo oba vektorja zapisali s pomočjo baznih vektorjev in upoštevali naštete lastnosti,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (\mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2 + \mathbf{e}_3 A_3)\cdot(\mathbf{e}_1 B_1 + \mathbf{e}_2 B_2 + \mathbf{e}_3 B_3)$$

Vsak sumand z leve strani produkta množimo z vsakim z desne strani; dobimo

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

Skalarni produkt opravimo tako, da seštejemo zmnožke soležnih komponent obeh vektorjev. Izračunamo lahko tudi kot med njima, $\psi = \arccos(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}/AB)$. Po definiciji skalarnega produkta je $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$.

Zgled 2.5

$$\mathbf{A} = (1,3,5) \quad \mathbf{B} = (2,-1,-4) \Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 2-3-20 = -21$$
$$A = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35} \quad B = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$$
$$\cos\psi = \frac{-21}{\sqrt{735}} \doteq -0.775 \quad \psi \doteq 141^\circ$$

Včasih nas bo zanimala projekcija kakega vektorja ($\mathbf{A}$) na določeno smer. V to smer položimo enotski vektor; bodi to $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$. Skalarni produkt med vektorjema $\mathbf{n}$ in $\mathbf{A}$ nam po definiciji skalarnega produkta da iskano projekcijo A_n,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{A} = A_n$$

Zgled 2.6

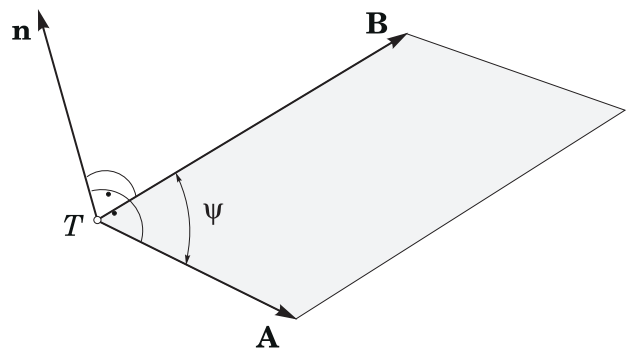
$$\mathbf{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \qquad |\mathbf{n}| = 1 \qquad \mathbf{A} = (1,3,5)$$
$$A_n = \frac{2-3+5}{\sqrt{6}} \doteq 1.633$$

Kot, ki ga $\mathbf{A}$ oklepa s smernikom $\mathbf{n}$, dobimo iz enačbe $\cos\psi = A_n/A \doteq 0.276$; $\psi \doteq 74^\circ$.

Skalarni produkt kot matematični zapis bomo večkrat uporabljali: delo sile na poti, pretok vektorske funkcije skozi ploskev in drugo.

3) Vektorski produkt. Ta produkt je takšen, da dvema vektorjema priredi nov vektor. Spet vzemimo vektorja $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$; slika 2.8. Vektorja določata paralelogram (šrafiran lik) oz. ravnino, na kateri vektorja in paralelogram ležijo. Ravnina ima vse pravokotnice vzporedne. Vzdolž pravokotnic položimo enotski vektor $\mathbf{n}$; velja: $\mathbf{n} \perp \mathbf{A}$ in $\mathbf{n} \perp \mathbf{B}$. *Vektorski produkt* med vektorjem $\mathbf{A}$ in vektorjem $\mathbf{B}$ je definiran takole:

a) smer vektorskega produkta (kot vektorja) določa smernik $\mathbf{n}$ oz. normala ravnine vektorjev $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$,



Slika 2.8: Grafična interpretacija vektorskega produkta.

b) usmerjenost smernika $\mathbf{n}$ določa *desno pravilo*; če prvi vektor ($\mathbf{A}$) zavrtimo po "najkrajši poti" (po paralelogramu) v drugi vektor ($\mathbf{B}$), dobimo po pravilu desnega vijaka usmerjenost smernika $\mathbf{n}$,

c) absolutna vrednost vektorskega produkta je enaka ploščini paralelograma.

Opredeljen produkt zapišemo kot

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{n} AB \sin \psi$$

Očitno se zaradi desnega pravila, točka b), usmerjenost vektorskega produkta obrne v nasprotno smer, če faktorja v produktu zamenjamo: $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ – vektorski produkt je antikomutativen. Če sta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ različna od nič in je njun vektorski produkt nič, pomeni, da je $\sin \psi = 0$ oz., da je kot $\psi = 0$ – vektorja sta kolinearna (vzporedna). Velja pa tudi obratno: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \iff \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$.

Vektorski produkt je po iznosu največji, ko sta vektorja pravokotna. Če vektor $\mathbf{B}$ zapišemo kot vsoto $\mathbf{B}_\parallel + \mathbf{B}_\perp$, kjer je $\mathbf{B}_\parallel$ vzporeden z $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_\perp$ pa pravokoten na $\mathbf{A}$, je $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp$. Če pa namesto $\mathbf{B}$ pišemo vsoto $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, potem je $(\mathbf{B} + \mathbf{C})_\perp = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp$. Za hip privzemimo, da je $\mathbf{A}$ enotski vektor. Vektorja $\mathbf{B}_\perp$ in $\mathbf{C}_\perp$ določata ravnino. Po pravilu vektorskega množenja leži tudi produkt $\mathbf{A} \times (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp)$ v tej ravnini, le da je glede na vsoto $\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp$ zavrten za $\pi/2$. Enak rezultat se tudi dobi, če se zavrti vsakega posebej in se ju nato sešteje. Zaključimo: vektorski produkt je distributiven, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

Poglejmo si vektorske produkte med baznimi vektorji splošnega k.s.; pomagamo si s slikami 2.3, 2.4 in 2.5. Vektorji so si pravokotni in za njih velja desno pravilo: če zavrtimo $\mathbf{e}_1$ v $\mathbf{e}_2$, dobimo smer $\mathbf{e}_3$, če zavrtimo $\mathbf{e}_2$ v $\mathbf{e}_3$, dobimo smer $\mathbf{e}_1$, in končno, če $\mathbf{e}_3$ zavrtimo v $\mathbf{e}_1$, dobimo smer $\mathbf{e}_2$. Po pravilu vektorskega množenja dobimo: $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ in $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, pri zamenjavi faktorjev pa: $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$, in še: $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, 3$.

Izvedimo končno vektorski produkt

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2 + \mathbf{e}_3 A_3) \times (\mathbf{e}_1 B_1 + \mathbf{e}_2 B_2 + \mathbf{e}_3 B_3)$$

Množimo vsakega z leve z vsakim z desne strani produkta in upoštevajmo našteto; dobimo:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathbf{e}_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathbf{e}_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

Čeprav je izraz dolg, si ga moremo zapomniti po "kroženju" indeksov. Pomagamo si lahko tudi s formo, ki je podobna, kot pri računanju determinante matrike 3×3,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Zgled 2.7

$$\mathbf{A} = (1, 3, 5) \qquad \mathbf{B} = (2, -1, -4)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_1(-12 + 5) + \mathbf{e}_2(10 + 4) + \mathbf{e}_3(-1 - 6) = (-7, 14, -7)$$

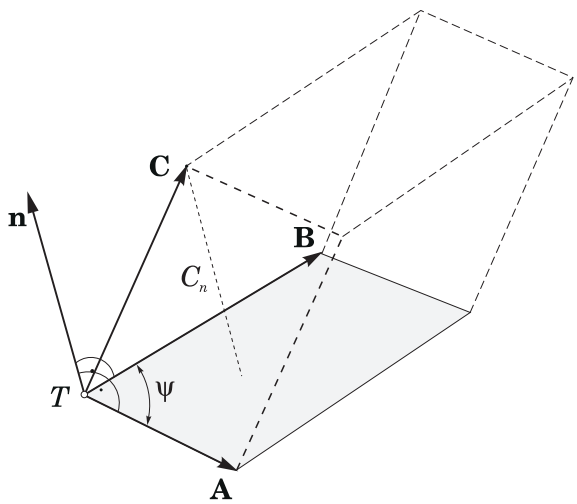
Absolutna vrednost ustreza ploščini paralelograma; $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 7\sqrt{1 + 4 + 1} = 7\sqrt{6}$.

Vektorski produkt bomo uporabili za zapis navora, magnetne sile, itd.

4) Mešani produkt. Imenuje se tudi *psevdoskalarni produkt*. Opredeljen je z zapisom

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

Zanj je moč najti geometrijsko interpretacijo; slika 2.9. Če vektorje $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$ dopol-



Slika 2.9: Mešani produkt vektorjev.

nimo z vzporednicami, dobimo paralepiped z robovi dolžin A, B in C. Pišemo: $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{n}AB \sin\psi) \cdot \mathbf{C} = C_n AB \sin\psi$. Izraz številsko ustreza volumnu paralepipeda. Če zaporedje vektorjev $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$ "globalno" ustreza desnemu pravilu, je rezultat pozitiven, drugače je negativen; velja: $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}) = (\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = -(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C}) = -(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{A}) = -(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B})$. Če je mešani produkt nič, vektorji ne tvorijo paralepipeda; so

torej *koplanarni* – leže na isti ravnini. Uporabimo sedaj rezultat za $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ in ga skalarno pomnožimo s $\mathbf{C}$; dobimo:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (A_2B_3 - A_3B_2)C_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)C_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)C_3$$

Očitno moremo mešani produkt zapisati z determinanto,

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Zgled 2.8

$$\mathbf{A} = (1, 3, 5) \qquad \mathbf{B} = (2, -1, 4) \qquad \mathbf{C} = (1, 1, 1)$$

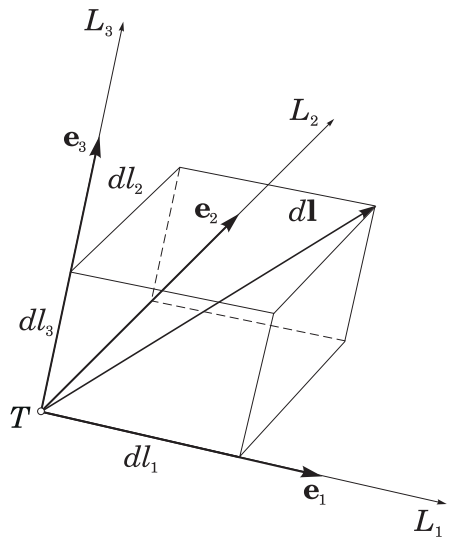
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 12 + 10 + 5 - 4 - 6 = 16$$

Mešani produkt bomo srečali kasneje: pri gibalni inducirani napetosti, pri integralu magnetne sile, pri navoru in še kje.

Diferencialna geometrija. Pri spoznavanju zakonitosti naših polj se bo potrebno, če ne drugače, vsaj miselno premikati po nekem delu krivulje ali ploskve ali volumna. Pomemben bo vsak segment poti – tudi najmanjši. V ta namen si bomo najprej pogledali splošen diferencialen premik v enem od k.s. Postavimo se miselno v splošno točko T (slike 2.3, 2.4 in 2.5). Iz nje se lahko premaknemo za diferencial dolžine v smeri prve, druge ali tretje lokalne koordinatne osi (oz. v smereh posameznih baznih vektorjev). Označimo te tri *elementarne premike* z dl_1, dl_2 in dl_3; zaradi diferencialnih dolžin moremo elementarne premike smatrati kot ravne. Če te dolžine dopolnimo z vzporednicami, dobimo kvader z robovi dl_1, dl_2 in dl_3; slika 2.10.

Prostorski diagonali kvadra priredimo vektor $d\mathbf{l}$, ki ga bomo imenovali splošni diferencialni premik (kasneje tudi *element poti* ali *diferencial poti*). Kot vektor zapišemo $d\mathbf{l}$ podobno kot vse dosedanje vektorje: $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_1 dl_1 + \mathbf{e}_2 dl_2 + \mathbf{e}_3 dl_3 = (dl_1,\ dl_2,\ dl_3)$, kjer so dl_1, dl_2 in dl_3 projekcije diferencialnega vektorja $d\mathbf{l}$ na posamezne koordinatne osi lokalnega kartezijevega k.s. v točki T. Opredelimo sedaj elementarne premike dl_1, dl_2 in dl_3 za naše tri k.s. V kartezijevem (slika 2.3) so to kar diferenciali koordinat; torej dx, dy in dz. V valjnem (slika 2.4) je v smeri radija ρ ta premik kar $d\rho$. Če se koordinata (kot) φ poveča za diferencial $d\varphi$, se pomaknemo po obodu krožnice z radijem ρ za dolžino loka $\rho d\varphi$; v smeri osi Z pa je diferencialni premik enak dz. V krogelnem k.s. (slika 2.5) je diferencialni premik v smeri radija r enak dr. V smeri kota ϑ se, pri prirastku ϑ za $d\vartheta$, premaknemo po krožnici (po poldnevniku) z radijem r za dolžino loka $rd\vartheta$. Pri prirastku kota φ za $d\varphi$ pa se premaknemo po krožnici (po vzporedniku) z radijem $\rho = r \sin\vartheta$ za dolžino loka $\rho d\varphi = r \sin\vartheta d\varphi$. Elementarni premiki v smeri koordinatnih osi so za naše tri k.s. naslednji:

$$\begin{array}{rl} dx,\ dy,\ dz & \text{za kartezijev} \\ d\rho,\ \rho\, d\varphi,\ dz & \text{za valjni} \\ dr,\ r\, d\vartheta,\ r \sin\vartheta\, d\varphi & \text{za krogelni} \end{array}$$



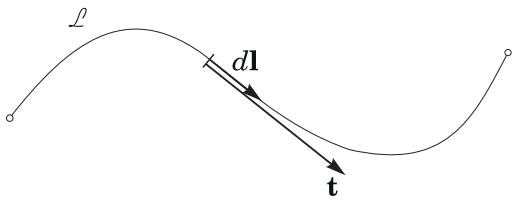
Slika 2.10: Elementaren premik v splošni točki.

Vidimo lahko, da diferencial premika v smeri koordinatne osi v splošnem ni vedno enak diferencialu koordinate.

Elementarni premik $d\mathbf{l}$ moremo potemtakem pisati kot trojko: $d\mathbf{l} = (dl_1,\ dl_2,\ dl_3) = (h_1 du_1,\ h_2 du_2,\ h_3 du_3)$, kjer h_1, h_2, h_3 pomenijo t.i. *metrične* ali *Laméjeve koeficiente*, du_1, du_2, du_3 pa so diferenciali ustreznih koordinat. Za naše tri osnovne k.s. so pripadajoči metrični koeficienti naslednji:

k.s.	h_1	h_2	h_3
kartezijev	1	1	1
valjni	1	ρ	1
krogelni	1	r	$r \sin \vartheta$

Mnogokrat bomo uporabljali pojem konturnega elementa $d\mathbf{l}$ na neki poti (krivulji ali konturi) $\mathcal{L}$ v prostoru, ki more biti splošna ali pa določena in podana s krivuljo; slika 2.11. Element poti lahko zapišemo tudi z njegovim smernikom $\mathbf{t}$ na tistem mestu: $d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$.



Slika 2.11: Element poti na krivulji.

Zgled 2.9

Bodi v (XY) ravnini krivulja med točkama $(0,0)$ in $(1,1/2)$ podana z enačbo $y = x^2/2$ (sliko naj si bralec nariše sam). Diferencial poti v tej ravnini je $d\mathbf{l} = (dx, dy)$.

Za dano krivuljo je $dy = (d(x^2/2)/dx)\,dx = x\,dx$; dobimo: $d\mathbf{l} = (dx, x\,dx) = (1, x)\,dx$. V točki $(1/2, 1/8)$ – na krivulji – je $d\mathbf{l} = (1, 1/2)\,dx$. Ta element oklepa z osjo X kot $\arctan(1/2) = 26.6°$. Smernik ($\mathbf{t}$) tangente v splošni točki na krivulji je $(1, x)/\sqrt{1 + x^2}$.

Neposredno v zvezi z diferencialnimi premiki moremo definirati tudi *diferencialne ploskvice*. Diferencialna prizmica na sliki 2.10 je ograjena s šestimi diferencialnimi ploskvicami. Tri od njih imajo lice (gledano iz prizme ven) obrnjeno v smer priraščanja koordinat, druge tri pa v nasprotno smer. Označimo jih z da_1, da_2 in da_3. Njihove velikosti so: $da_1 = dl_2 dl_3$, $da_2 = dl_3 dl_1$ in $da_3 = dl_1 dl_2$. Ploskvicam, ki imajo lice obrnjeno v smer priraščanja ustrezne koordinate, moremo prirediti vektorski značaj, in sicer: $d\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i da_i$ – in do predznaka podobno tudi ostalim trem. Glede na geometrijsko vsebino vektorskega produkta moremo za ploskvico $d\mathbf{a}_1$ pisati tudi: $d\mathbf{a}_1 = d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{l}_3$ – in podobno tudi za ostale.

Zgled 2.10

Diferencial površine krogle s polmerom r_0 je v krogelnem k.s. sledeč: $da_r = (r_0 d\vartheta)(r_0 \sin\vartheta d\varphi) = r_0^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. Geometrijsko si diferenciale ploskvic najlažje predstavimo, če si na površini krogle mislimo zarisane poldnevnike in vzporednike, ki te ploskvice ograjujejo. Površino krogle dobimo, če vse te diferencialne ploskvice "seštejemo" – integriramo. Integracijo moramo izvesti po vseh vzporednikih in vseh poldnevnikih. Če ustrezne seštejemo najprej po vseh poldnevnikih, dobimo diferencial površine med dvema diferencialno blizu ležečima vzporednikoma,

$$da' = \int_0^{2\pi} r_0^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = r_0^2 \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r_0^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$$

Končno seštejemo te pasove še vzdolž poldnevnikov; dobimo:

$$\int_0^{\pi} 2\pi r_0^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi r_0^2 \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta = 4\pi r_0^2$$

Ta rezultat pa že poznamo. ♣ Obratni vrstni red integriranja naj bralec opravi sam. ♣

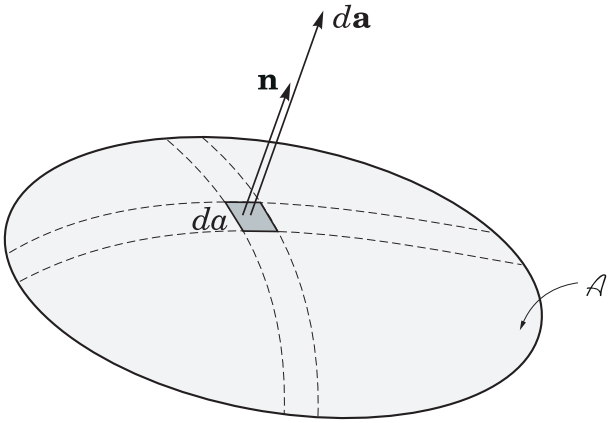
Zgled 2.11

Poglejmo si zvezo med prostorskim in ravninskim kotom stožca. Stožec z vrhom v izhodišču določa polarni (ravninski) kot ϑ. Stožec zaprimo na vrhu z delom površine krogle z radijem r in s središčem v izhodišču; sliko naj bralec nariše sam. Ta kapica stožca ima površino med dvema diferencialno blizu ležečima vzporednikoma (prejšnji zgled) enako $2\pi r^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'$. Seštejemo te površinice do kota ϑ; dobimo

$$a_{\text{kapice}} = 2\pi r^2 \int_0^{\vartheta} \sin\vartheta'\, d\vartheta' = 2\pi r^2 (1 - \cos\vartheta)$$

Prostorski kot Ω, pod katerim vidimo segment površine krogle iz njenega središča, je definiran s kvocientom a_{segmenta}/r^2. Od tu je prostorski kot stožca določen kot

$$\Omega = \frac{a_{\text{kapice}}}{r^2} = 2\pi(1 - \cos\vartheta)$$



Slika 2.12: Element ploskvice na ploskvi.

Tudi diferencial ploskvice bomo posplošili. Imejmo v prostoru poljubno ploskev $\mathcal{A}$; slika 2.12. V mislih si jo moremo predstaviti kot mrežo majhnih diferencialnih ploskvic, od katerih pripada vsaki pravokoten smernik, ki opredeljuje, kam je izbrano lice ploskvice obrnjeno[3]. Za ploskvico $d\mathbf{a}$ pišemo: $d\mathbf{a} = \mathbf{n}\, da$, kjer je da diferencial površine, $\mathbf{n}$ pa je njen smernik.

Za konec nam ostane še *diferencial volumna*. Zopet se bomo sklicali na sliko 2.10. Diferencial volumna (dv) je enostavno produkt vseh treh elementarnih premikov: $dv = dl_1 dl_2 dl_3$. ♣ Bralec naj sam izračuna volumen krogle s polmerom r_0 tako, da sešteje ("pointegrira") diferencialne volumne ($dv = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$) po radiju in obeh kotih; razmisli naj tudi o vrstnem redu integracij. ♣

Določeni integral. Pojem *določenega integrala* in njegova geometrijska interpretacija sta bralcu verjetno poznana. Iz matematike vemo, da je določen integral funkcije $f(x)$ – na intervalu od a do b – enak razliki funkcijskih vrednosti nedoločenega integrala $F(x)$ na zgornji (b) in spodnji (a) meji,

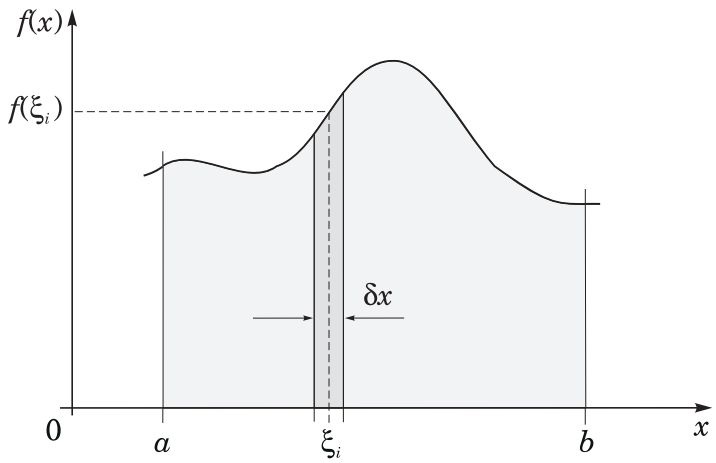
$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

kjer velja, da je $F'(x) = f(x)$. Določeni integral moremo pisati tudi v obliki izlimitirane vsote,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{\delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \delta x_i$$

Tu je δx_i širina ozkega segmenta na intervalu $[a, b]$; na tem intervalu je n takih segmentov, $f(\xi_i)$ pa je funkcijska vrednost v točki iz i-tega segmenta; slika 2.13. Vrednost določenega integrala geometrijsko ustreza "ploščini" lika med funkcijo in abciso – šrafirana površina na sliki. Če je $f(x)$ odsekoma zvezna funkcija, izvedemo določeni integral z integracijo po odsekih njene zveznosti.

[3]Ploskve, ki jih bomo v nadaljevanju srečevali, bodo "preproste", zato z izbranim smernikom $\mathbf{n}$ ne bo težav. Nasploh pa izbrana normala nima enolične lastnosti. Takšno izjemo zasledimo pri Möbiusovem traku: ko se gibamo okrog po traku do izhodiščnega mesta, se smer normale ravno obrne.



Slika 2.13: Grafična interpretacija določenega integrala.

Zgled 2.12

Izračunajmo srednjo (poprečno) vrednost funkcije $\sin x$ in funkcije $\sin^2 x$ na intervalu $[0, \pi]$. Povprečna vrednost funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ je tista številska vrednost (konstanta $\overline{f}$), ki ima na tem intervalu enak določen integral,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \overline{f}\,dx = \overline{f}\int_a^b dx = (b-a)\overline{f}$$

Srednja vrednost je

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Nedoločeni integral k funkciji $\sin x$ je $-\cos x + C$; C je poljubna konstanta. Funkcijo $\sin^2 x$ moremo pisati tudi kot $0.5(1-\cos 2x)$; njen nedoločeni integral je $0.5(x - 0.5\sin 2x) + C$. Oba določena integrala funkcij sta:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi) - \frac{1}{2}(0 - \frac{1}{2}\sin 0) = \frac{\pi}{2}$$

Konstanta C pri razliki odpade, zato je običajno ne pišemo. Končno dobimo za srednji vrednosti funkcij na intervalu $[0, \pi]$ vrednosti $2/\pi$ in $1/2$.

Večkrat bomo naleteli na integral, ki bo imel spodnjo ali zgornjo mejo gibljivo, nedoločeno, spremenljivo. V zapisu integrala zamenjamo b z x in x z x'; dobimo:

$$\int_a^x f(x')\,dx' = F(x) - F(a)$$

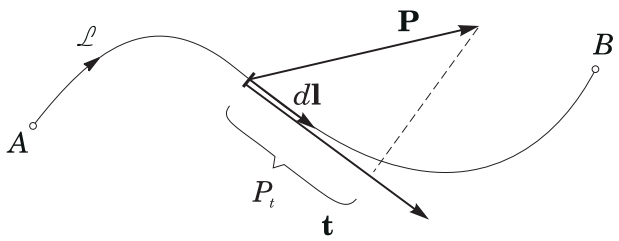
kjer je x' spremenljivka znotraj navzgor gibljivega intervala $[a, x]$. Podobno napravimo tudi za navzdol premakljivo mejo.

Zgled 2.13

Izračunajmo integral funkcije $f(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ v mejah od r_0 do splošnega radija r:

$$\int_{r_0}^{r} f(r')\,dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{r_0}^{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$$

Krivuljni integral. Imejmo v prostoru dano vektorsko funkcijo $\mathbf{P}$ in orientirano krivuljo $\mathcal{L}$, ki je opredeljena med svojim začetkom (točko A) in koncem (točko B); slika 2.14.



Slika 2.14: Grafična ponazoritev k integraciji po krivulji.

S *krivuljnim integralom* bomo poimenovali zapis

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{P}\cdot d\mathbf{l}$$

Brali bomo tudi: krivuljni integral vektorske funkcije $\mathbf{P}$ po poti $\mathcal{L}$. S puščico na $\mathcal{L}$ bomo označili smer integracije; na sliki 2.14 je smer od A k B. Pod integralom se nahaja skalarni produkt funkcije $\mathbf{P}$ in diferenciala $d\mathbf{l}$. Glede na definicijo skalarnega produkta moremo za $\mathbf{P}\cdot d\mathbf{l}$ pisati tudi $\mathbf{P}\cdot\mathbf{t}dl = P_t dl$, kjer je $\mathbf{t}$ enotski vektor elementa $d\mathbf{l}$, P_t pa je pravokotna projekcija vektorja $\mathbf{P}$ na smernik $\mathbf{t}$. S tem je

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{P}\cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{L}} P_t\,dl$$

Vidimo, da je pod znakom integrala zapis, ki je vsebinsko zelo podoben zapisu $f(x)\,dx$. Formalno gledano, bomo tudi integral izračunali zelo podobno. Primerov uporabe zgornjega zapisa je veliko. Vsak se gotovo spomni dela, ki ga sila opravi na neki poti; za delo na poti je odločilna le projekcija sile v smeri poti.

Zgled 2.14

Izračunajmo krivuljni integral vektorske funkcije $\mathbf{P}(x,y) = (xy^2, x^2y)$ po krivulji $\mathcal{L}$ med točkama $(0,0)$ in $(1,1/2)$, ki je opredeljena s parabolo $y = x^2/2$ v (XY) ravnini. Pišimo: $d\mathbf{l} = (dx, dy)$ in $\mathbf{P}\cdot d\mathbf{l} = xy^2\,dx + x^2y\,dy$. Upoštevajmo, da soodvisnost med x in y pogojuje enačba krivulje. S pomočjo nje izrazimo y z x-om: $y = x^2/2, dy = x\,dx$. Da izračunamo $\int_{\mathcal{L}}\mathbf{P}\cdot d\mathbf{l}$, upoštevajmo, da se od A do B spreminja x od 0 do 1,

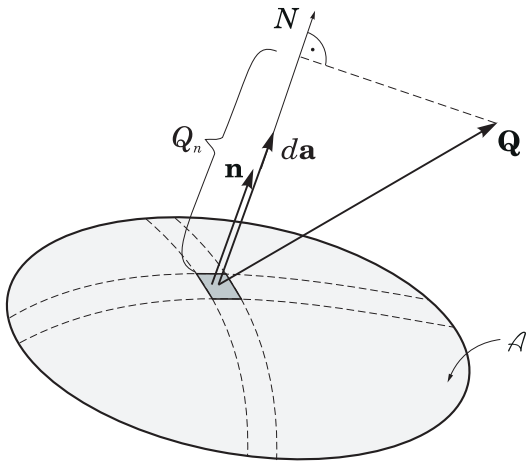
$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{P}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 \left(x\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + x^2\left(\frac{x^2}{2}\right)x\right)dx = \frac{3}{4}\int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{8}$$

Pri matematičnem zapisu fundamentalnih lastnosti elektromagnetnega polja se bo krivuljni integral nanašal tudi na sklenjeno krivuljo, takšno torej, ki nima ne svojega začetka ne konca. Znak integrala bomo opremili s krogcem in zapisali

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}$$

ter brali: integral vektorske funkcije po sklenjeni poti. S tem v zvezi bomo uporabljali tudi pojem *(ne)vrtinčnosti* nekega polja.

Ploskovni integral. Imejmo v prostoru dano vektorsko funkcijo $\mathbf{Q}$ in ploskev $\mathcal{A}$; slika 2.15.



Slika 2.15: Grafična ponazoritev k integraciji po ploskvi.

S *ploskovnim integralom* bomo poimenovali zapis

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{a}$$

ki ga bomo brali: ploskovni integral vektorske funkcije $\mathbf{Q}$ po ploskvi $\mathcal{A}$ ali, pretok vektorske funkcije $\mathbf{Q}$ skozi ploskev $\mathcal{A}$.

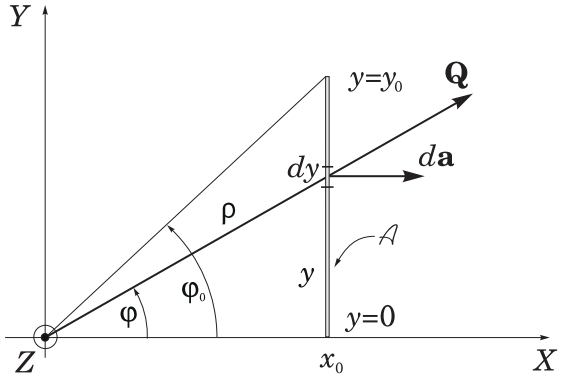
Pod znakom integrala imamo spet skalarni produkt. Po pravilih tega produkta moremo za $\mathbf{Q} \cdot d\mathbf{a}$ pisati tudi $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} da = Q_n \; da$, kjer je Q_n pravokotna projekcija vektorja na smernik ali normalo ploskvice, da pa je njena velikost. Ploskovni integral moremo zato enakovredno pisati tudi kot

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}} Q_n \; da$$

Mnogo fizikalnih količin je takšnih, ki opisujejo materialen ali le fiktiven pretok. Če vektor $\mathbf{Q}$ podaja gostoto nekega pretoka, potem ploskvico da "pretaka" le projekcija vektorja v normalni smeri, medtem ko projekcija vektorja v tangencialni smeri ploskvico da samo "oplazi".

Zgled 2.15

Gostota pretoka je podana z vektorsko funkcijo $\mathbf{Q} = (1, 0, 0)q/2\pi\rho$ v valjnih koordinatah. Ima le radialno smer in upada recipročno z oddaljenostjo od Z-osi; kot $1/\rho$. Kot ploskev $\mathcal{A}$ si izberemo trak na ravnini $x = x_0 > 0$, ki ga omejujeta koordinati $y = 0$ in $y = y_0 > 0$; slika 2.16. Dolžina traku vzdolž Z-osi bodi l. Izračunajmo



Slika 2.16: Pretok vektorske funkcije skozi trak.

pretok vektorske funkcije skozi to ploskev. Produkt $\mathbf{Q} \cdot d\mathbf{a}$ moremo zapisati s kosinusom kota, ki ga vektorja oklepata: $\mathbf{Q} \cdot d\mathbf{a} = Q\, da \cos\varphi$. Ploščina traku diferencialne višine dy in dolžine l je $l\, dy$. Diferencial pretoka $\mathbf{Q} \cdot d\mathbf{a}$ je $ql \cos\varphi\, dy/2\pi\rho$. Kar naenkrat imamo v izrazu tri spremenljivke: ρ, φ in dy, ki pa so trigonometrično povezane, soodvisne. Za $\cos\varphi$ pišimo x_0/ρ, za ρ^2 pa $x_0^2 + y^2$. Diferencial pretoka je $(ql/2\pi)x_0\, dy/(x_0^2 + y^2)$, celoten pretok skozi trak pa je integral,

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{a} = \frac{ql}{2\pi} \int_0^{y_0} \frac{x_0\, dy}{x_0^2 + y^2} = \frac{ql}{2\pi} \left[\arctan \frac{y}{x_0}\right]_0^{y_0} = \frac{ql}{2\pi} \arctan \frac{y_0}{x_0} = \frac{ql}{2\pi}\varphi_0$$

Pretok je odvisen le od ravninskega kota (φ_0), pod katerim se trak vidi iz izhodišča. V elektrostatičnem polju bomo ta rezultat koristno uporabili.

Pri popisu temeljnih lastnosti elektromagnetnih polj bomo uporabljali tudi zapis ploskovnega integrala po sklenjeni ploskvi. Sklenjena ploskev je takšna ploskev, ki je vase zaprta in definira določen del prostora – ograjuje volumen $\mathcal{V}$. Vsako fizično telo ograjuje sklenjena ploskev; more pa biti ta ploskev povsem fiktivna – nevezana na oblike teles. Integral vektorske funkcije $\mathbf{Q}$ po sklenjeni ploskvi $\mathcal{A}$ bomo zapisali z dodatnim krogcem na znaku integrala,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{a}$$

Glede na fizikalno interpretacijo ploskovnega integrala – kot pretoka vektorskega polja – bomo ob njem v nadaljevanju uporabljali tudi pojem *(ne)izvornosti* vektorske funkcije.

Odvod in parcialni odvod. Večkrat smo že omenjali skalarne in vektorske funkcije. Več pozornosti smo posvetili njeni krajevni odvisnosti, more pa biti hkrati tudi časovna funkcija. Skalarno funkcijo V zapišemo v najbolj splošni obliki kot $V = V(u_1, u_2, u_3, t)$, kjer so u_1, u_2 in u_3 splošne krajevne koordinate, t pa je čas. Podobno je tudi z vektorsko

funkcijo $\mathbf{M} = \mathbf{M}(u_1, u_2, u_3, t)$, pri kateri je vsaka njena komponenta zase skalarna funkcija, $M_i = M_i(u_1, u_2, u_3, t)$.

Že tu se dogovorimo za krajši in preglednejši zapis vektorske ali skalarne funkcije. Koordinate u_1, u_2, u_3 opredeljujejo splošno točko T v prostoru – in so to njene koordinate. Točka T ima tudi svoj krajevni vektor $\mathbf{r}$, ki ga te tri koordinate določajo. Opraviti imamo s sinonimi: T, $\mathbf{r}$ in (u_1, u_2, u_3). Zato bomo zapise $\mathbf{M}(u_1, u_2, u_3, t)$, $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ in $\mathbf{M}(T, t)$ razumeli kot enakovredne, enako tudi $V(u_1, u_2, u_3, t)$, $V(\mathbf{r}, t)$ in $V(T, t)$ za skalarno funkcijo.

Določene lastnosti naših polj bomo včasih zapisali z odvodi po koordinatah in času. Ker pa bodo obravnavane funkcije v splošnem odvisne od štirih spremenljivk, bomo ločili tudi štiri odvode; rečemo jim *parcialni* (ali delni) odvodi. Za (navaden) odvod funkcije $f(x)$ vemo, da ima v geometrijski interpretaciji pomen tangensa naklonskega kota funkcije. Po domače bi rekli, da odvod $f'(x) = df(x)/dx$ pove, kako "hitro" se funkcija $f(x)$ spreminja. Kot vemo, je odvod funkcije na intervalu njene zveznosti definiran z limito:

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Zelo podobno je definiran tudi parcialni odvod funkcije več spremenljivk. Parcialni odvod funkcije $V(u_1, u_2, u_3, t)$ po koordinati npr. u_1 zapišemo kot $\partial V/\partial u_1$ in je definiran s tole limito:

$$\frac{\partial V}{\partial u_1} = \lim_{\delta u_1 \to 0} \frac{V(u_1 + \delta u_1, u_2, u_3, t) - V(u_1, u_2, u_3, t)}{\delta u_1}$$

Tak odvod geometrijsko interpretiramo s strmino spreminjanja funkcije V v smeri ustrezne koordinate. Pravila parcialnega odvajanja so enaka kot pri odvajanju funkcije ene spremenljivke; pri odvajanju po eni spremenljivki imajo vse druge vlogo konstante.

Zgled 2.16

Imejmo funkcijo

$$V(r, \vartheta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

in izračunajmo oba parcialna odvoda – torej $\partial V/\partial r$ in $\partial V/\partial \vartheta$. Po predhodno omenjenih pravilih sta ta:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta}{r^2}\right) = \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cos\vartheta}{r^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta}{r^2}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\cos\vartheta) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\vartheta}{r^2}$$

Vzemimo še funkcijo $B(z, t) = B_0 \cos(\omega t - \beta z)$. Odvoda $\partial B/\partial z$ in $\partial B/\partial t$ sta:

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \beta B_0 \sin(\omega t - \beta z) \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_0 \sin(\omega t - \beta z)$$

Parcialni odvod neke vektorske funkcije $\mathbf{D}$ npr. po času bomo zapisali kot $\partial \mathbf{D}/\partial t$. S tem zapisom je mišljeno, da so parcialno (po času) odvajane vse tri komponente; pišemo:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \left(\frac{\partial D_1}{\partial t}, \frac{\partial D_2}{\partial t}, \frac{\partial D_3}{\partial t}\right)$$

3. Lorentzova (elektromagnetna) sila

Čeravno s tem razdelkom prehitevamo tok dogodkov[1], nadaljujmo prvo poglavje prav z njim. Teža razdelka ni samo v enačbi, ki jo bomo zapisali, bistvo tiči v dejstvu, da se vsi elektromagnetni pojavi prepoznavajo skozi formo Lorentzove sile, ki učinkuje na električni naboj in se "kot takšna" navzven manifestira kot fizikalno neelektričen učinek. Razglasiti bi jo mogli za vezni člen med elektromagnetnim in preostalim (drugačnim) "svetom". Ali še več: skozi silo, ki jo zaznavamo in merimo, prepoznavamo in posredno tudi definiramo relevantne količine elektromagnetnega polja (skozi razdelke bo to zadnje tudi povsem razvidno).

H. A. Lorentz je (leta 1895) zunanjo, neelektrično manifestacijo elektromagnetnih pojavov opredelil s silo, ki deluje na delček (v splošnem gibajoče) elektrine v elektromagnetnem polju. Zapisal je

$$\boxed{\delta\mathbf{F}_{\mathrm{L}} = \delta Q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})} \tag{3.1}$$

Vse količine, ki nastopajo v enačbi, se nanašajo na mesto elektrine v prostoru. V izrazu pomenijo:

$\mathbf{E}$ – *vektor električne poljske jakosti.* Enota zanjo je V/m (volt/meter). Zapisujemo jo kot vektorsko funkcijo, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(u_1, u_2, u_3, t)$.

$\mathbf{B}$ – *vektor gostote magnetnega pretoka.* Enota zanjo je T (tesla) ali Vs/m^2 ali Wb/m^2 (Wb – weber). Tudi $\mathbf{B}$ zapišemo kot $\mathbf{B}(u_1, u_2, u_3, t)$.

δQ – *delček elektrine.* S črko Q označujemo *množino elektrine*, ki jo v SI (*Système International d'Unités*) sistemu merskih enot merimo v C (coulombih); C = As (ampère-sekunda). Z znakom δ (delta) želimo poudariti, da je δQ majhna množina elektrine, ki se nahaja v fizično majhnem volumnu (makroskopsko gledanje), torej tako majhnem, da moremo v njenem območju vektorski funkciji polja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ razumeti le še kot časovni funkciji. Pa tudi množino elektrine δQ moremo matematično – v limiti – razumeti kot *diferencial elektrine* dQ, čeravno je električni naboj kvantiziran. Za diferencial elektrine bi enačbo pisali kot

$$\boxed{d\mathbf{F}_{\mathrm{L}} = dQ\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})} \tag{3.2}$$

Na diferencial elektrine deluje diferencialna sila.

$\mathbf{v}$ – *vektor hitrosti* elektrine δQ. Hitrost razumemo v prostoru v splošnem kot vektorsko funkcijo, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u_1, u_2, u_3, t)$. Enote zanjo so m/s (meter/sekundo).

$\delta\mathbf{F}_{\mathrm{L}}$ – *Lorentzova elektromagnetna sila*, ki deluje na elektrino δQ in podaja vektorsko polje teh sil. Enota zanjo je N (newton).

Vektorja (vektorski funkciji) $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ moremo označiti kot osrednja in najbolj karakteristična vektorja elektromagnetnih polj, čeprav bomo poleg njiju spoznali kasneje še vrsto drugih, ki pa bodo večinoma definirani posredno z njima.

[1] Iz srednješolske fizike so bralcu gotovo že poznani osnovni pojmi in količine, ki jih v tem razdelku omenjamo, zato jih verjetno ne sprejema kot "tujke".

Ena naših osrednjih nalog bo ravno računanje teh polj, ki pripadajo množici mirujočih in gibajočih elektrin. Te elektrine so (po Lorentzovi sili) posredno – preko njim lastnega polja – v interakciji s katerokoli elektrino δQ, ki se v tem polju nahaja.

4. Porazdelitve elektrin

Ko govorimo o elektrinah (električnih nabojih), lahko rečemo, da te značilno zaznamujejo posebno stanje prostora, ki bo v nadaljevanju predmet naših proučevanj. Prav zato bomo ta – in nekaj naslednjih razdelkov – namenili določenim definicijam, ki nam omogočajo matematično enoznačen popis porazdeljenosti elektrin v prostoru.

Prostorska porazdelitev. Če uporabimo makroskopsko načelo gledanja, potem moremo za elektrino reči, da se – v nekem trenutku t – v nekem fizično majhnem volumnu δv nahaja v splošnem neka ustrezno majhna množina elektrine δQ, ki je cel mnogokratnik osnovnega naboja. Bodi točka T centralna točka prostorninice δv. Če izvedemo formalno limito kvocienta $\delta Q/\delta v$, ko gre δv proti nič, bomo dobili *gostoto prostorsko porazdeljene elektrine* ρ[1] v tej točki,

$$\boxed{\rho = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\delta Q}{\delta v}} \tag{4.1}$$

Enota za ρ bo $\mathrm{C/m^3}$. Gostota je v splošnem očitno krajevno časovna funkcija; $\rho = \rho(T, t)$. Trenutno je ob tej novi količini še manjši pomislek okrog fizično majhnega volumna in kvantiziranosti elektrine ($e \doteq 1.6 \cdot 10^{-19}$ C), vendar je nekaj podobnega tudi pri volumski gostoti določene snovi, ki je tudi definirana z zgornji podobno limito kvocienta $\delta m/\delta v$, čeravno vemo, da je atomarni prostor skoraj "prazen". Torej tudi specifično gostoto (specifično maso) snovi sprejemamo kot makroskopsko količino.

Zgled 4.1

Kot ilustracijo navedimo, da je število prostih elektronov (takšnih, ki so energijsko v prevodnem pasu in se morejo gibati v medatomarnem "svetu") v bakru (Cu) pri normalni temperaturi $\sim 8.4 \cdot 10^{28}/\mathrm{m}^3$. V kubičnem μm je teh elektronov $\sim 8.4 \cdot 10^{10}$. (Z nekega tehničnega vidika moremo $\mu\mathrm{m}^3$ že smatrati kot fizično majhen volumen.) Njim pripadajoča gostota ρ je $-1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 8.4 \cdot 10^{28} = -1.34 \cdot 10^{10}$ $\mathrm{C/m^3}$. Res pa je tudi, da je gibanje prostih elektronov v atomarni strukturi kaotično (neurejeno); njihove hitrosti segajo tudi do 10^6 m/s. Če ti naboji niso izpostavljeni kakemu zunanjemu polju sil, potem statistično gledano "mirujejo"; ni opaziti nekega integralno urejenega gibanja. Dodati pa še velja, da je celotna gostota nabojev, tudi protonov in ostalih elektronov skupaj, v električno nevtralnem telesu vedno enaka nič.

O prostorski gostoti elektrine lahko govorimo tudi pri atmosferskih naelektritvah, pri elektronih ob katodi elektronske cevi, iz katere izstopajo, ali pri ($\pm$) ionih v elektrolitu; za te in podobne prostorske porazdelitve elektrin je udomačen termin t.i. *oblaka elektrin*.

[1] Črko ρ smo vpeljali tudi kot koordinato v valjnem k.s. V primeru, da bi se oznaki v nekem izvajanju (nalogi) "srečali", bomo za eno od njiju začasno uvedli drugo oznako ali dodali kak indeks.

Ploskovna porazdelitev. V elektrotehniki se presežna elektrina največkrat "pojavi" na (ob) površini prevodnih teles (zakaj in kako, bo govora kasneje – razdelek 18). Smiselno je zato uvesti količino, ki naj pove, koliko je te elektrine na vsakem delčku (mestu) površine telesa. Vpeljimo količino σ, ki jo bomo imenovali *gostota ploskovno porazdeljene elektrine* in jo bomo formalno definirali z limito,

$$\boxed{\sigma = \lim_{\delta a \to 0} \frac{\delta Q}{\delta a}} \tag{4.2}$$

V izrazu pomeni δQ množino elektrine, ki se – v nekem času t – nahaja na fizično majhni površinici δa s centralno točko T. V limiti bo σ pomenil gostoto ("ploskovne") elektrine v določeni točki na površini. To količino bomo, podobno kot prejšnjo, razumeli v makroskopskem smislu, kot $\sigma = \sigma(T, t)$. Enota za σ bo $\mathrm{C/m^2}$.

Zgled 4.2

Tematsko bomo za hip prehitevali, vendar vseeno. Pri naelektrenem telesu pride do prisilne razelektritve (preboja), če doseže električna poljska jakost v zraku (ob površini telesa) vrednost okrog 3 MV/m. Kot bomo videli kasneje, ustreza tej jakosti površinska gostota $\sigma = 26.5\ \mu\mathrm{C/m^2}$. Število presežnih elektronov (ali protonov) je ob površini ploskvice enega $\mu\mathrm{m}^2 \sim 166$. Če bi vzeli za "premer" atoma $\sim 10^{-9}$ m, bi bilo na/ob tej površinici $\sim 10^6$ atomov, kar pomeni, da ima vsak 6000. obpovršinski atom "defekt" enega elementarnega naboja.

Za ploskovno porazdeljeno elektrino je v rabi tudi termin t.i. *obloge* ali *sloja elektrin*, vendar pa ta obloga ni mišljena v kakem fizično kompaktnem smislu. Še več. Ta obloga predstavlja "tanek" sloj (oblak) prostorske elektrine tik ob površini. Naj ima ta sloj prostorsko gostoto ρ. Tej gostoti pripadajoča ploskovna elektrina σ je (integral) $\int_0^{\delta h} \rho dh$, kjer je δh "debelina" oblaka ob površini, ki dosega velikostni razred le nekaj medatomarnih "razdalj". Če bi z $\bar{\rho}$ označili povprečno gostoto, bi bila gostota σ enaka $\bar{\rho}\delta h$.

Vzdolžna porazdelitev. V elektrotehniki so vodniki (žice) nepogrešljive komponente. Brez njih ne moremo napraviti nič tehnično uporabnega. Tudi na njihovih površinah se pojavijo presežki elektrin, vendar nas pri vodnikih, bolj kot σ, zanima, koliko elektrine je na kratkem odseku vodnika (žice). To še zlasti velja za žice, katerih prerezne izmere so majhne v primerjavi z ostalo relevantno geometrijo. Vpeljali bomo količino *gostote vzdolžno porazdeljene elektrine*. Označili jo bomo s q, enote pa bodo C/m. Vzemimo kratek odsek žice dolžine δl, na katerem je delček presežne elektrine δQ. Gostoto q na tem mestu (vzdolž žice) bomo definirali z limito kvocienta $\delta Q/\delta l$ kot

$$\boxed{q = \lim_{\delta l \to 0} \frac{\delta Q}{\delta l}} \tag{4.3}$$

in tudi zanjo velja, da je v splošnem krajevno-časovna funkcija, $q = q(T, t)$.

Zgled 4.3

Daljnovodna vrv naj ima polmer 1.8 cm in bodi "obešena" 20 m nad zemljo. Dozemna kapacitivnost na dolžinski meter je ~ 7.2 pF/m. Pri dolžini vrvi 1 km in dozemni napetosti 150 kV so na vrvi: $q = 1.08\ \mu\mathrm{C/m}$, $\sigma = 9.55\ \mu\mathrm{C/m^2}$ in celotna elektrina $Q = 1.08 \cdot 10^{-3}$ C.

Kot limitni primer tanke naelektrene žice bomo vpeljali še pojem *linijsko porazdeljene elektrine*. To bo zgolj in samo matematičen ekvivalent za tanko naelektreno žico, ko bomo opisovali razmere daleč stran od nje. Pri ravnih vodih bomo rabili tudi termine *prema elektrina*, *naelektrena daljica* ali *naelektrena premica*.

Točkasti naboj. Kot zadnjo porazdelitveno obliko elektrine opredelimo še *točkasto elektrino*. Termin zelo spominja na *masno točko* v kinematiki. Kot točkasto elektrino lahko razumemo majhno naelektreno kroglico (ali drugo majhno telo), katere radij je zanemarljiv v primerjavi z ostalo relevantno geometrijo. Lahko pa točkasto elektrino razumemo v izlimitiranem smislu, ko telesu odvzamemo prostorske razsežnosti in ga zamenjamo s točko T in elektrino Q – *naelektrena točka*. Točkasta elektrina je zgolj matematično pomagalo, ki atribute fizikalnosti povsem izgubi; v njeni infinitezimalni okolici imajo namreč električne količine singularen značaj, kar je v nasprotju z omejenostjo fizikalnih količin nasploh. Podobna kritična distanca velja tudi do "linijske" elektrine.

Zgled 4.4

Primer si sposodimo kar iz Newtonove mehanike. Sila med dvema masnima točkama bi presegala vse meje, če bi se ti ekstremno zbližali. Vemo pa, da so te sile med dvema telesoma končnih izmer vedno končne. Je pa model točkastih mas povsem uporaben in korekten, če sta telesi dovolj narazen.

Za zaključek razdelka napravimo kratek rezime. Celotna elektrina ($Q_{\text{cel.}}$) je v prostoru lahko porazdeljena ali v oblaku z gostoto ρ ali na ploskvi z gostoto σ ali (pogojno) na krivulji z gostoto q ali (pogojno) v točki z elektrino Q. Porazdelitve ρ, σ in q se nanašajo na neko točko T v prostoru. Če to točko ogradimo z diferencialom volumna dv, ali z diferencialom ploskve da, ali z diferencialnim odsekom dl, potem je v teh diferencialnih segmentih diferencial elektrine enak $\rho\, dv$, ali $\sigma\, da$, ali $q\, dl$. Te diferencialne količine elektrin bomo imenovali *diferenciali točkastih elektrin*. Zapisali jih bomo kot $dQ(T)$, in bo T pomenil mesto ali točko v prostoru, kjer se ta diferencial elektrine nahaja. Če se bo diferencial elektrine v točki T s časom spreminjal, bomo pisali $dQ(T,t)$. Običajno se porazdelitve ρ, σ in q v prostoru ne prekrivajo (so separirane), zato pišemo dQ po potrebi kot $\rho\, dv$, kot $\sigma\, da$, ali kot $q\, dl$.

Količino elektrine v notranjosti določenega območja dobimo tako, da izvedemo integracijo vseh porazdelitev znotraj tega območja, vštevši tudi morebitne točkaste elektrine v tem območju,

$$Q_{\text{not.}} = \int_{\mathcal{V}} \rho\ dv + \int_{\mathcal{A}} \sigma\ da + \int_{\mathcal{L}} q\, dl + \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Glede na to, da so σ, q in točkasta elektrina Q limitni primeri stisnjenega oblaka elektrin v ploskev, ali v krivuljo, ali v točko, in da te predstavljajo določeno geometrijsko in matematično poenostavitev, moremo – v smislu ohranitve fizikalnih predstav o porazdeljenosti elektrin – zgornjo enačbo pisati le kot

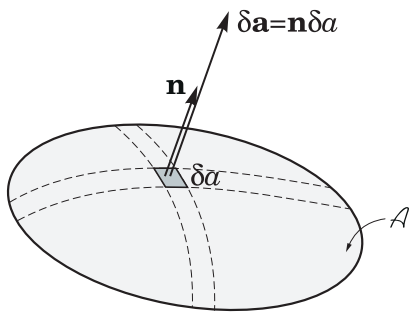
$$\boxed{Q_{\text{not.}} = \int_{\mathcal{V}} \rho\, dv} \tag{4.4}$$

kjer je prostorska gostota ρ mišljena v izvirnem, neizlimitiranem smislu. V kasnejši obravnavi bomo elektrine (naboje) formalno ločili na makroskopsko proste (ρ_{prosti}), katerih mesto bo v prevodniku (ali vakuumu), in na polarizabilne, mikroskopsko vezane ($\rho_{\text{pol.}}$), katerih mesto bo v izolatorju. Celotno prostorsko gostoto ($\rho_{\text{cel.}}$) bomo v takšnem primeru zapisali kot vsoto ($\rho_{\text{cel.}} = \rho_{\text{prosti}} + \rho_{\text{pol.}}$), njeno skupno množino ($Q_{\text{cel. not.}}$) znotraj $\mathcal{V}$ pa kot integral,

$$\boxed{Q_{\text{cel. not.}} = \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{cel.}}\, dv} \tag{4.5}$$

5. Pretok elektrine – električni tok

Iz fizike poznamo vrsto tokov (pretokov): masni tok, pretok vode, svetlobni tok, energijski tok itd. Definirani so kot (pre)toki mase (energije, ...) skozi neko določeno (konkretno) ploskev ali prerez. Tudi električni tok bomo definirali povsem enako. Vzemimo poljubno ploskev $\mathcal{A}$; slika 5.1. Ploskev ima dvoje lic (dve strani). Odločiti se moramo za eno od



Slika 5.1: Pretok elektrine skozi ploskev.

njiju, kar pokažemo z izbrano smerjo normale $\mathbf{n}$, ki kaže vstran od izbranega lica.

Imejmo v celotnem prostoru na nek način porazdeljeno elektrino, ki naj je definirana s porazdelitvenimi funkcijami. Privzemimo, da se elektrine gibljejo po prostoru urejeno. V kratkem časovnem intervalu δt bi ploskev $\mathcal{A}$ v izbrani smeri prestopila določena množina elektrine δQ. Kvocient $\delta Q/\delta t$ bi dal informacijo o poprečni intenziteti prestopa (prehoda) elektrine v omenjenem intervalu δt. Ker pa je intenzivnost pretakanja lahko od trenutka do trenutka drugačna, je zato smiselno poznati pretok elektrine – *električni tok* – ob vsakem času. Do tega formalno pridemo, če napravimo limito kvocienta $\delta Q/\delta t$, ko gre $\delta t \to 0$. Električni tok, ki ga označujemo s črko i – enota zanj je C/s oz. A (ampère)[1] –, je tako

$$\boxed{i_{\text{skozi } \mathcal{A}} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta Q_{\text{skozi } \mathcal{A} \text{ v } \delta t}}{\delta t}} \tag{5.1}$$

[1] A (ampère) je četrta od sedmih osnovnih merskih enot mednarodnega sistema merskih enot SI (*Système International d'Unités*). Definirana je z magnetno silo med dvema ravnima, en meter oddaljenima, linijskima vodnikoma, ki vodita enak nespremenljiv tok; in sicer: če je sila med vodnikoma na metru dolžine 2.10^{-7} N, potem po vodnikih teče tok enega ampèra (razdelek 41).

Če s funkcijo $Q(t)$ opredelimo količino elektrine, ki je od $t = 0$ do časa t prestopila ploskev $\mathcal{A}$ v dogovorjeni smeri, potem je

$$\boxed{i = \frac{dQ}{dt}} \tag{5.1a}$$

V limiti toku i očitno ustreza časovni odvod pretečene elektrine skozi ploskev $\mathcal{A}$.

Tok je integralna količina, in je pri mirujoči ploskvi le še funkcija časa, $i = i(t)$. Integralna je pač zato, ker pove, kolikšen je pretok skozi celotno ploskev $\mathcal{A}$, nič pa ne o tem, kolikšen je pretok skozi posamezen delček ploskve. More se zgoditi, da se elektrina po delu ploskve pretaka v eno, po drugem delu pa enako intenzivno v nasprotno smer. Rezultantni tok bi bil nič, kar še ne pomeni, da ploskve elektrina na določenih mestih ne prestopa.

Če ima tok v trenutku t' negativno vrednost, pomeni, da prehaja elektrina ploskev takrat v nasprotni smeri. Še več, elektrina, ki ploskev prestopa, je lahko pozitivna ali negativna. V prevodnikih je ta negativna (gibljejo se elektroni), v ioniziranih plinih in disociiranih tekočinah pa se gibljejo predvsem ($\pm$) ioni. Tok skozi ploskev je v izbrani smeri potemtakem pozitiven, če jo v tej smeri prestopa pozitivna ali pa jo v nasprotni smeri prestopa negativna elektrina. Pri prevajanju v kovinah (nosilci toka so elektroni) sta si zato smer toka in smer gibanja elektronov nasprotni. Pri ionskem prevajanju je celoten tok rezultat gibanja ($-$) anionov in ($+$) kationov v nasprotnih smereh: $i = dQ^{(+)}/dt + dQ^{(-)}/dt$. Če je intenzivnost pretakanja enih in drugih enaka, potem je celoten tok dvojen.

Tu omenjeni toki so t.i. *konduktivni toki* ($i_{\text{kond.}}$), katerih nosilci so prosti (gibljivi, mobilni) in elektrinsko nabiti delci v snovi. Morejo pa biti nosilci naboja injicirani v prostor (redek plin ali vakuum); pretoku teh elektrin pravimo *konvektivni tok* ($i_{\text{konv.}}$). Kasneje, pri študiju elektromagnetnih polj v izolatorjih in magnetikih, bomo srečali še t.i. *polarizacijski tok* ($i_{\text{pol.}}$) in *tok magnetizacije* ($i_{\text{mag.}}$), ki pa bosta vezana na globalno urejena gibanja vezanih elektrin v atomarni strukturi snovi. Matematična opredelitev teh tokov bo v vsakem primeru vezana na definicijo (5.1). Formalno bi skupen (celoten) tok zapisali kot vsoto: $i_{\text{cel.}} = i_{\text{kond.}} + i_{\text{konv.}} + i_{\text{pol.}} + i_{\text{mag.}}$.

Zgled 5.1

Vzemimo žico, skozi katero se "pretaka" elektrina. Žico v mislih "prerežemo" s poljubno nematerialno ploskvijo $\mathcal{A}$. Izberimo si trenutek $t = 0$, od katerega dalje opazujemo selitev elektrin skozi ploskev. Označimo s $Q(t)$ množino elektrine, ki je to ploskev prestopila od časa $t = 0$ do časa t v izbrani smeri. Naj je ta funkcija $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$, $Q_0 > 0$. Od začetka ($\omega t_1 = 0$), pa do $\omega t_2 = \pi/2$, elektrina očitno prestopa ploskev v eno smer (funkcija narašča), po tem času pa začne $Q(t)$ padati, in smer toka se obrne. Ker pa je sinusna (harmonična) funkcija periodična, se tudi selitev elektrine odvija periodično – enkrat v eno, drugič v drugo smer. Izračunajmo tok: $i = dQ/dt = \omega Q_0 \cos \omega t$. ♣ Bralec naj si v časovnem diagramu skicira funkciji $Q(t)$ in $i(t)$. ♣ Dopolnimo zgled še s številskim primerom. Bodi frekvenca $f = 50$ Hz (hertz), krožna frekvenca $\omega = 2\pi f = 100\pi$ s^{-1}. Če ima tok amplitudo 1 A (amplituda je maksimalna vrednost harmoničnega toka), potem je Q_0 množina elektrine, ki prestopa izbran prerez; $Q_0 = 1$ A$/100\pi$ s$^{-1} = 3.18 \cdot 10^{-3}$ C.

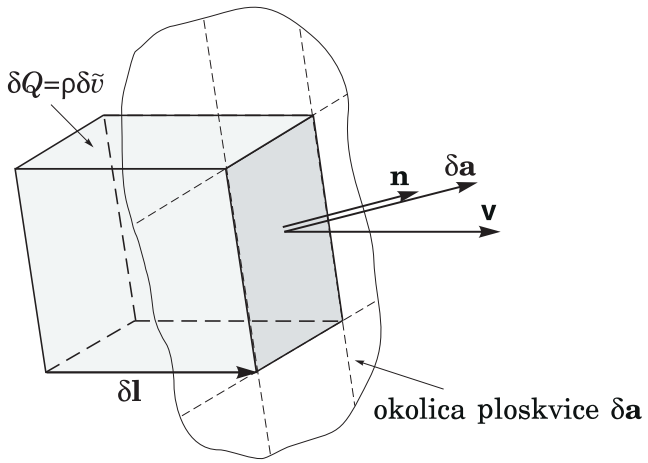
Zgled 5.2

Skozi izbran prerez bodi tok časovno konstanten: $i = I$ (časovno konstantne toke označujemo z veliko tiskano črko). Pišemo: $i = I = dQ/dt$. Očitno je pretečena elektrina od t_0 do časa t enaka $I(t - t_0)$. Če pa tok ni časovno konstanten (torej i), potem v času dt prestopi mejo elektrina $i\ dt$, in od t_0 do t prestopi mejo množina elektrine, ki je enaka integralu toka,

$$\int_{t_0}^{t} i(t')\ dt' = Q(t) - Q(t_0)$$

6. Vektor gostote električnega toka

Ob definiciji električnega toka smo opozorili na njegov integralni značaj (karakter). Popolnejšo informacijo o pretoku bomo dobili, če bomo vedeli, kolikšen je pretok skozi splošno in majhno ploskvico na ploskvi $\mathcal{A}$; slika 6.1 (v smislu fizično majhnih izmer si smemo prostorsko geometrijo v bližini prehoda zamišljati kot ravno). V ta namen si poglejmo



Slika 6.1: Prehod delčka elektrine skozi delček ploskve.

prestop elektrine δQ skozi ploskvico δa, ki je ena izmed mnogih na ploskvi $\mathcal{A}$. Vzemimo, da ima "paket" elektrine δQ – ob prehodu ploskvice δa – hitrost $\mathbf{v}$. (Vektor hitrosti $\mathbf{v}$ oklepa z vektorjem normale $\mathbf{n}$ oz. z vektorjem ploskvice $\delta\mathbf{a}$ nek kot.) Paket elektrine δQ si predočimo z oblakom elektrine s prostorsko gostoto ρ v majhni prostorninici $\delta\tilde{v}$, ki si jo zamislimo kot majhen paralepiped, ki ga določata ploskvica $\delta\mathbf{a}$ in kratek rob $\delta\mathbf{l}$ paralepipeda v smeri hitrosti $\mathbf{v}$; prostorninica $\delta\tilde{v}$ bo tedaj enaka $\delta\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{l}$. Če celoten paket δQ prestopi mejo v intervalu časa δt, potem je $\delta\mathbf{l} = \mathbf{v}\delta t$. Ker je ploskvica majhna, bo takšen tudi pretok elektrine oz. električni tok; pisali ga bomo kot δi. Po definiciji toka bo $\delta i = \delta Q/\delta t = \rho\delta\tilde{v}/\delta t = \rho(\delta\mathbf{l}/\delta t) \cdot \delta\mathbf{a} = \rho\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{a}$. Produkt $\rho\mathbf{v}$ imenujemo *vektor gostote električnega toka*; označimo ga z $\mathbf{J}$, enote zanjo pa so $\mathrm{A/m^2}$. Torej

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}} \tag{6.1}$$

Glede na predhodna razmišljanja je $\mathbf{J}$ vektorska funkcija, ki je v prostoru (v splošnem) od točke do točke in od trenutka do trenutka drugačna – tako, kot se pač ρ in $\mathbf{v}$ spreminjata. Pišemo: $\mathbf{J} = \mathbf{J}(T, t)$.

Sedaj pa moremo formalno izvesti sumacijo tokov δi_k skozi ploskvice δa_k (k naj je tekoči indeks ploskvic) in dobimo celoten tok skozi ploskev $\mathcal{A}$: $i_{\text{skozi }\mathcal{A}} = \sum_k \delta i_k = \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \delta \mathbf{a}_k$. V limiti, ko velikost ploskvic vse bolj drobimo in njih število raste čez vse meje, preide neskončna vsota v ploskovni integral,

$$\boxed{i_{\text{skozi }\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}} \tag{6.2}$$

Zgled 6.1

Zgled o prostih elektrinah v bakru smo še imeli. Dopolnimo ga še v luči toka in tokovne gostote. Vzemimo Cu žico prereza 2.5 mm^2, ki vodi tok 10A. Privzemimo enakomerno gostoto toka po prerezu. Za gostoto J dobimo $4{\cdot}10^6$ A/m^2 = 4 A/mm^2. Zaradi toka v žici, se po Joulovem zakonu ta segreva. Dopustne gostote, ki še ne zahtevajo dodatnega hlajenja, segajo do 7 A/mm^2. Iz prostorske gostote elektrine prostih elektronov, ki smo jo tam izračunali ($\rho = -1.344 \cdot 10^{10}$ C/m^3), dobimo (iz enačbe 6.1) povprečno hitrost (elektronov) $v = 298$ μm/s. Očitno so poprečne hitrosti urejenega gibanja elektronov za okvirno deset dekad manjše od kaotičnih hitrosti prostih elektronov.

Pri tekočinah in plinih, kjer so nosilci toka ($\pm$) ioni, bi enačbo za tokovno gostoto pisali: $\mathbf{J} = \rho^{(+)}\mathbf{v}^{(+)} + \rho^{(-)}\mathbf{v}^{(-)}$.

Tako, kot smo električni tok (v prejšnjem razdelku) formalno razdelili na štiri dele, moremo to storiti tudi s tokovo gostoto. Pisali bomo: $\mathbf{J}_{\text{cel.}} = \mathbf{J}_{\text{kond.}} + \mathbf{J}_{\text{konv.}} + \mathbf{J}_{\text{pol.}} + \mathbf{J}_{\text{mag.}}$. Gostota toka iz zgleda se torej nanaša na konduktivni tok (pretok prostih nosilcev naboja v trdi snovi).

7. Kontinuitetna enačba

Že od Franklina je poznana teza, da se ob elektritvah pojavljajo množinsko uravnoteženi presežki pozitivnih in negativnih naelektritev in da se učinek teh presežkov ob njuni "združitvi" izniči. Kot nam je iz atomarne zgradbe poznano, gre pri takšnih procesih zgolj za makroskopsko prostorsko prerazporejanje elementarno nabitih delcev. V žargonu tudi rečemo: naboji ne "nastajajo" in ne "izginjajo" – se le gibajo po prostoru –, pri tem pa je njihova algebraična vsota enaka nič. To je osnovni postulat o elektrinah oz. t.i. *zakon o ohranitvi elektrine*[1].

[1]Formulacija o "nenastajanju" in "neizginjanju" je dandanes presežena, saj vemo, da se z absorpcijo visokoenergijskih gama žarkov tvori par pozitron-elektron z elementarnima nabojema $\pm e$. S tem v zvezi je zakon ohranitve električnega naboja postuliran tudi na tale način: v izdvojenem (izoliranem) sistemu nabojev se sumarna množina električnega naboja ne spreminja. (Pri tem je kot izdvojen sistem razumljen prostor, v katerega ne vstopi in iz katerega ne izstopi noben naboj.) Bistvo te opredelitve je v tem, da se ne "prešteva" nabitih delcev, pač pa njihove naboje znotraj izdvojenega prostora, kjer se dopušča tudi tvorba parov pozitron-elektron – ti pa k množini sumarnega električnega naboja nič ne prispevajo. Veljavnost zakona je potrjena tudi pod bistveno strožjimi pogoji. Ne samo, da je omenjena množina elektrine časovno nespremenljiva v vsakem inercialnem sistemu, enako množino ugotavljajo tudi opazovalci iz različnih inercialnih sistemov. To tudi pomeni, da je množina elektrine v izdvojenem sistemu *relativistična invarianta*.

To fizikalno dejstvo bomo sedaj tudi matematično formulirali. Vzemimo, da imamo v prostoru vsak trenutek znano makroskopsko porazdelitev celotne elektrine. Vpeljimo v prostor neko (relativno) mirujočo nematerialno sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$. Ta ploskev ogradi določen volumen $\mathcal{V}$ in razdeli celoten prostor na notranji in zunanji del, s tem pa tudi elektrine na notranje ($Q_{\text{not.}}$) in zunanje ($Q_{\text{zun.}}$). Po ohranitvenem zakonu je njuna vsota vsak trenutek t enaka nič. Rečemo tudi, da je globalni sistem nabojev *električno zaključen*. Pišemo:

$$\boxed{Q_{\text{not.}}(t) + Q_{\text{zun.}}(t) = 0} \tag{7.1}$$

V splošnem se elektrine selijo iz notranjosti v zunanjost in obratno. Zapišimo zgornjo enačbo v malce kasnejšem trenutku $t + \delta t$:

$$Q_{\text{not.}}(t + \delta t) + Q_{\text{zun.}}(t + \delta t) = 0$$

Tvorimo razliko, ki jo delimo z δt; dobimo

$$\frac{Q_{\text{zun.}}(t + \delta t) - Q_{\text{zun.}}(t)}{\delta t} = -\frac{Q_{\text{not.}}(t + \delta t) - Q_{\text{not.}}(t)}{\delta t}$$

V limiti, ko gre $\delta t \to 0$, preide leva stran v $dQ_{\text{zun.}}/dt$, desna pa v $-dQ_{\text{not.}}/dt$. Če pa se ozremo na definicijo električnega toka (enačba 5.1), potem je zgornji izraz enak električnemu toku (pretoku elektrine) iz notranjosti v zunanjost. Dogovorimo se, da bo to naša referenčna smer. Tok skozi $\mathcal{A}$ je tako

$$\boxed{i_{\text{skozi } \mathcal{A}} = \frac{dQ_{\text{zun.}}}{dt} = -\frac{dQ_{\text{not.}}}{dt}} \tag{7.2}$$

Če tok skozi sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ zapišemo s ploskovnim (pretočnim) integralom tokove gostote $\mathbf{J}$ (enačba 6.2), elektrino znotraj $\mathcal{V}$ pa z volumskim integralom gostote ρ (enačba 4.4), dobimo

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv = 0$$

z zamenjavo odvoda in integrala v drugem sumandu pa še

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv = 0} \tag{7.3}$$

V prejšnjem zapisu se je časovni odvod nanašal na integralno količino, ki je le funkcija časa (zato navaden odvod), v spodnjem zapisu pa je ρ krajevno-časovna funkcija (zato pišemo parcialni odvod).

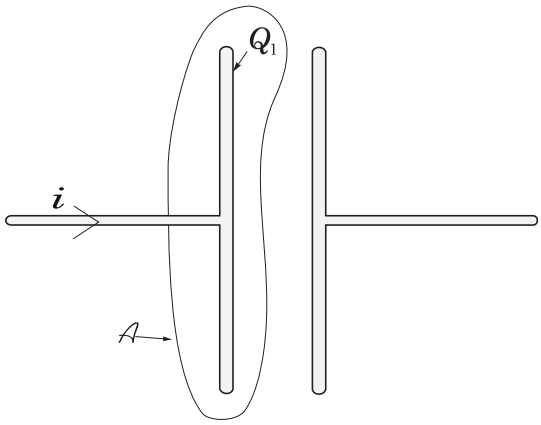
Slednja enačba je t.i. *kontinuitetna enačba* v integralni obliki. V svojem bistvu sloni na zakonu o ohranitvi elektrine in je za proučevanje elektromagnetnih polj vsekakor temeljna, saj v soodvisnost veže dve osnovni porazdelitveni funkciji, ki opredeljujeta makroskopsko stanje virov elektromagnetnega polja.

V skladu s pripravami na kasnejše formalno ločene tipe tokov (konduktivni, konvektivni, polarizacijski in tok magnetizacije), ki po kontinuitetni enačbi seveda korespondirajo s časovnimi odvodi elektrin, bi enačbo 7.3 za $\mathbf{J}_{\text{cel.}}$ in $\rho_{\text{cel.}}$ zapisali kot

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{cel.}} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_{\text{cel.}}}{\partial t} \, dv = 0} \tag{7.4}$$

Zgled 7.1

Naj na levo ploščo kondenzatorja teče tok $i(t) = 10 \sin 100\pi t$. Ob $t = 0$ naj je plošča električno nevtralna; razmere ponazarja slika 7.1. Ogradimo levo ploščo



Slika 7.1: Interpretacija kontinuitetne enačbe na ploščnem kondenzatorju.

s sklenjeno ploskvijo $\mathcal{A}$. Označimo elektrino na levi plošči s Q_1. Kontinuitetna enačba pravi, da je tok, ki območje zapušča (pri nas $-i$), enak časovnemu pojemku elektrine znotraj (pri nas $-dQ_1/dt$). Pišemo: $-i = -dQ_1/dt$ ali $i = dQ_1/dt$ ali $dQ_1 = i\,dt = 10 \sin(100\pi t)\,dt$. Če integriramo od $t = 0$ do časa t, dobimo trenutno vrednost množine elektrine na levi plošči,

$$Q_1(t) = \int_0^t 10 \sin(100\pi t')\,dt' = \frac{1}{10\pi}(1 - \cos 100\pi t)$$

♣ Bralec naj si sam nariše časovna poteka $i(t)$ in $Q_1(t)$. ♣

Izvornost tokovne gostote. Če je pretok vektorske funkcije skozi sklenjeno ploskev različen od nič, potem je fizikalno smiselno govoriti o izvornosti takšnega polja. Kontinuitetna enačba (7.3) očitno razkriva takšno naravo tokovne gostote, saj je

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dv$$

Da bi dobili oceno o "moči izvora", bi bilo potrebno pretok $\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ normirati na volumen območja $\mathcal{V}$ (znotraj $\mathcal{A}$). Če smo pri tem še zahtevnejši, da želimo izvedeti za izvornost v najmanjšem volumnu s centralno točko T, napravimo limito

$$\lim_{\delta v \to 0} \frac{\oint_{\delta\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}}{\delta v} = -\lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \int_{\delta\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dv = -\frac{\partial \rho(T)}{\partial t}$$

in dobimo t.i. izvornost tokovnega polja $\mathbf{J}$ v točki prostora[2], ki je enaka časovnemu pojemku prostorske gostote elektrine v tej točki.

[2]Pri vektorski analizi se kot merilo izvornosti vektorskega polja vpelje t.i. *divergenca*. Iz zgornje limite se da pokazati, da takšni izvornosti (divergenci) ustreza tudi "skalarni produkt" (Hamiltonovega) nabla operatorja ($\boldsymbol{\nabla}$) z vektorskim poljem. Piše se: div $\mathbf{J} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}$. V kartezijevem k.s. se to izvede z vsoto

Porazdelitvi ρ in J ter Lorentzova sila. Če v Lorentzovi sili za dQ pišemo $\rho\, d\tilde{v}$, za $\mathbf{v}$ pa $\mathbf{J}/\rho$, moremo s kvocientom $d\mathbf{F}_{\mathrm{L}}/d\tilde{v}$ (v 3.1a) vpeljati še volumsko gostoto ($\mathbf{f}_{\mathrm{L}}$) te sile:

$$\boxed{\mathbf{f}_{\mathrm{L}} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}} \tag{7.5}$$

8. Razvrstitev elektromagnetnih polj

Elektromagnetna polja bomo razvrstili po kriteriju gibanja elektrin oz. glede na splošno krajevno-časovno odvisnost tokovne gostote. Ta je po ohranitvenem zakonu v neposredni zvezi (relaciji) s prostorsko porazdelitvijo elektrin. Na to enačbo se bomo tu sklicevali, zato jo zapišimo še enkrat:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv$$

Razlikovali bomo tri odvisnosti: prvič, elektrine relativno mirujejo, drugič, tokovna gostota je časovno neodvisna, je le krajevna funkcija, in tretjič, tokovna gostota je krajevno-časovna funkcija. Pojdimo po vrsti:

1) Mirujoče elektrine. Če elektrine makroskopsko mirujejo, je $J = 0$. Po kontinuitetni enačbi je množina elektrine v poljubnem delu prostora vsak trenutek enaka, zato je ρ le krajevna funkcija: $\rho = \rho(T)$. Področje elektromagnetike, ki proučuje zakonitosti učinkov med relativno mirujočimi elektrinami, imenujemo *elektrostatika*, razredu polj pa rečemo *elektrostatična polja*. V ta okvir sodijo tudi enosmerna kondenzatorska vezja.

2) Tokovna gostota je časovno neodvisna. Če je $\mathbf{J} = \mathbf{J}(T)$, potem je po ohranitvenem zakonu ploskovni integral takšne tokovne gostote konstanta; bodi ta enaka K. Dalje sledi, da je (desna stran) $-dQ_{\mathrm{not.}}/dt = K$. To bi pomenilo, da se znotraj $\mathcal{V}$ množina elektrine časovno kopiči preko vseh mej, kar pa je povsem nefizikalno – v končnem volumnu ne more biti neskončno elektrine. Iz tega sledi, da mora biti $K = 0$ oz., da je $\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$ za vsako sklenjeno ploskev. Neposredno iz ohranitvene enačbe sledi, da mora biti tudi množina elektrine znotraj $\mathcal{V}$ časovno konstantna, zato je ρ le krajevna funkcija; $\rho = \rho(T)$. V okviru takšnih tokovnih gostot, ali t.i. enosmernih tokov, ločimo razred *časovno konstantnih tokovnih polj* in razred *magnetostatičnih polj* oz. področje *enosmernega toka* in področje *magnetostatike*. Prvo se ukvarja predvsem s karakteristikami konduktivnega prevajanja

parcialnih odvodov komponent vektorja po zadevnih koordinatah,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

kjer ima $\boldsymbol{\nabla}$ značaj simbolnega vektorskega operatorja,

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(v nadaljevanju pa z zakonitostmi in lastnostmi v enosmernih električnih vezjih), drugo pa s proučevanjem zakonitosti magnetnih učinkov med enosmernimi toki.

3) Tokovna gostota je krajevno-časovna funkcija. Takšne tokovne gostote pogojujejo dinamična (spremenljiva) elektromagnetna polja. Temu razredu rečemo kratko kar *dinamična polja*. Področje *elektrodinamike* je izredno široko in matematično sorazmerno zahtevno, zato si bomo v našem okviru poskušali predočiti tiste resnično osnovne karakteristike dinamičnih polj. Več prostora bomo namenili analizi harmonično vzbujanih električnih vezij, nekoliko pa se bomo pomudili tudi ob osnovah analize prehodnih pojavov v električnih vezjih.

Takšno razvrstitev in zaporedje podpirajo tudi pedagoški razlogi, ki narekujejo postopno spoznavanje lastnosti elektromagnetnih polj; od začetnih, bolj preprostih, lažje predstavljivih in matematično enostavneje zapisljivih, do zahtevnejših in bolj kompleksnih. Resnici na ljubo se ta vrstni red v glavnem ujema tudi z zgodovinskim razvojem vede kot celote.

Eden izmed razlogov za tak pristop je dejstvo, da v času, ko še nisem pričel s študijem elektrike, nisem našel nobenega dela, ki bi snov obravnavala z matematičnega vidika – vse dokler nisem bral Faradayevih poskusov. Zavedal sem se, da obstaja razlika med Faradeyevim načinom podajanja in načinom, ki se ga poslužujejo matematiki. Eni in drugi niso zadovoljni z jezikom drugega. Zavedal pa sem se, da ta prepad med njimi ne izhaja iz tega, ker bi se ena ali druga stran motila... Ko sem nadaljeval s študijem Faradaya, sem spoznal, da je tudi njegov način podajanja v bistvu matematičen, čeprav ni bil izražen v obliki običajnih matematičnih simbolov... Npr. Faraday si je predstavljal, da se silnice razprostirajo po celotnem prostoru, matematiki pa so videli središče sile, delujoče na daljavo. Faraday je videl vmesni medij tam, kjer so oni videli le razdaljo med telesoma. Faraday je postavil sam pojav v vmesni medij, matematiki so se zadovoljili s silo na daljavo, ki učinkuje na električni fluid. Ko sem to, kar sem imenoval Faradayeve ideje, poskušal spraviti v matematično obliko, sem ugotovil, da se v splošnem rezultati obeh metod ujemajo.

Maxwell

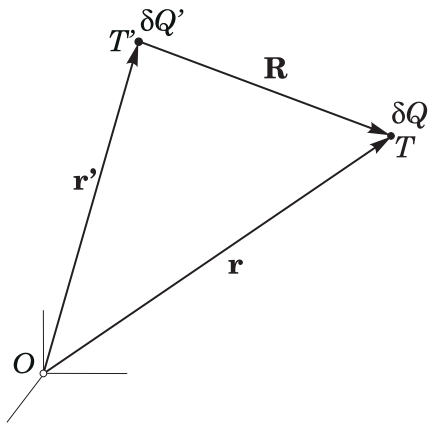
II. POGLAVJE

Elektrostatično polje

9. Coulombov zakon električne sile

Charles Augostin de Coulomb je leta 1785 kvantitativno opredelil silo med dvema "točkastima" elektrinama in zakonitost tudi eksperimentalno potrdil. Coulombov zakon pravi, da je sila premosorazmerna produktu obeh elektrin in obratnosorazmerna s kvadratom njune oddaljenosti; sila je odbojna, če sta elektrini enakega predznaka, in privlačna, če sta elektrini različnega predznaka.

Da bi to silo matematično korektno zapisali, si pripravimo splošno geometrijsko konstelacijo; slika 9.1. Vzemimo dve (točkasti) elektrini δQ in $\delta Q'$, ki sta locirani v točkah T



Slika 9.1: Pozicija dveh točkastih elektrin v prostoru.

in T'; pripadajoča krajevna vektorja teh točk naj sta $\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$. Vpeljimo distančni vektor $\mathbf{R}$ med točkama T' in T (na daljici $\overline{T'T}$); $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Njemu prirejen enotski vektor je $\mathbf{R}/R$. Vektor sile na elektrino δQ bi v duhu Coulombovega zakona zapisali kot

$$\delta \mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) k \, \frac{\delta Q \, \delta Q'}{R^2}$$

Sila na drugo elektrino je enake velikosti, vendar nasprotne smeri,

$$\delta \mathbf{F}'_{\mathrm{e}} = -\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) k \, \frac{\delta Q \, \delta Q'}{R^2}$$

in velja: $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} + \delta\mathbf{F}'_\mathrm{e} = \mathbf{0}$ – sili sta vzajemni.

Vprašanje se pojavi ob konstanti k, ki more (in mora) enačbo še dimenzijsko in količinsko uskladiti. Za časa Coulomba je bila ta konstanta ena in neimenovano število. Z zgornjo enačbo je bila takrat definirana tudi enota za množino elektrine. So pa te sile praviloma majhne, precizno težko merljive in zato neprimerne za definicijo enote elektrine. Enota za elektrino je danes As ali C (coulomb), ki je posredno definirana z enoto za električni tok; pri toku 1 A steče v 1 s skozi prerez elektrina 1 C. Nasploh pa je konstanta k – z razvojem in spreminjanjem merskih sistemov – "doživljala" spremembe. V sredini tega stoletja so tekle diskusije okrog poenotenja merskih sistemov vseh vej fizike, ki so se končno uskladili v internacionalnem merskem sistemu enot SI, ki ima sedem osnovnih, več izpeljanih ter dve dopolnilni enoti. Prve štiri, ki so najpogostejše, so meter, kilogram, sekunda in ampere; njim rečemo kratko MKSA sistem.

V veljavnem sistemu merskih enot je (konstanta) $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, kjer je ε_0 t.i. *dielektričnost* praznega prostora (vakuuma) in je določena takole:

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2\mu_0} \qquad \begin{aligned} &\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/Am} \\ &\varepsilon_0 \simeq 8.854\cdot 10^{-12}\ \mathrm{As/Vm} \\ &c_0 = 299792458\ \mathrm{m/s} \end{aligned}} \tag{9.1}$$

Konstanta μ_0 je *permeabilnost* praznega prostora in je dogovorjeno izbrana konstanta, c_0 pa je hitrost svetlobe v vakuumu. S približkom za c_0 ($\simeq 3.10^8$ m/s) dobimo praktično uporaben približek za ε_0,

$$\varepsilon_0 \simeq \frac{10^{-9}}{36\pi}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

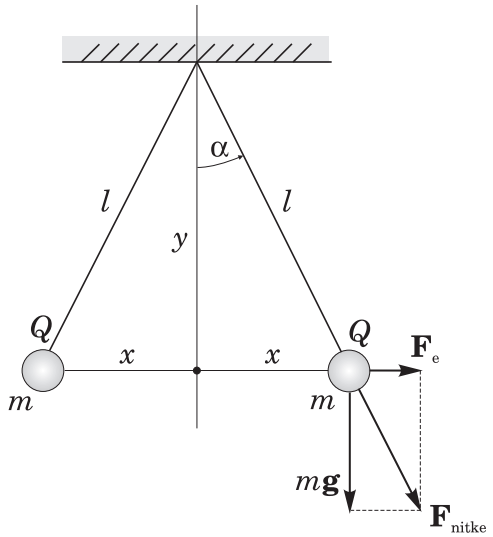
V SI sistemu merskih enot zapišemo Coulombovo silo sedaj takole:

$$\boxed{\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} = \mathbf{R}\frac{\delta Q\,\delta Q'}{4\pi\varepsilon_0 R^3}} \tag{9.2}$$

Kasneje, ko bomo študirali elektrostatične razmere v snoveh, bomo spoznali tudi dielektričnosti drugih snovi. Pri normalni temperaturi in tlaku se dielektričnost zraka le malenkostno razlikuje (šele na četrti decimalki) od dielektričnosti vakuuma, zato si moremo vse miselne eksperimente, ki jih bomo v nadaljevanju navajali, in se bodo glasili na prazen prostor (vakuum), misliti izvedene v zraku.

Zgled 9.1

Vzemimo dve naelektreni kroglici "majhnega" polmera, ki visita na nitkah dolžine l in sta vpeti pod stropom. Kroglici imata masi m in na obeh sta enaki množini elektrin Q. Po Coulombovem zakonu se bosta kroglici odbijali in nitki bosta napeti poševno, pod kotom α glede na vertikalo; slika 9.2. Ugotovimo relacijo med kotom in množino elektrine! Vsota električne in težnostne sile mora v ravnovesju nit nategovati: $Q^2/4\pi\varepsilon_0(2x)^2 = mg\tan\alpha$. Za x pišemo $l\sin\alpha$ in imamo: $Q = (16\pi\varepsilon_0 l^2 mg\sin^2\alpha\tan\alpha)^{1/2}$. Pri zelo dolgi niti in majhnem kotu bi pisali: $\tan\alpha \simeq \sin\alpha = x/l$; dobimo: $Q = (16\pi\varepsilon_0 mgx^3/l)^{1/2}$. (Takšna merilna priprava bi nam lahko služila za merjenje množine elektrine – elektrometer.)



Slika 9.2: Dve viseči naelektreni kroglici.

10. Polje električnih sil

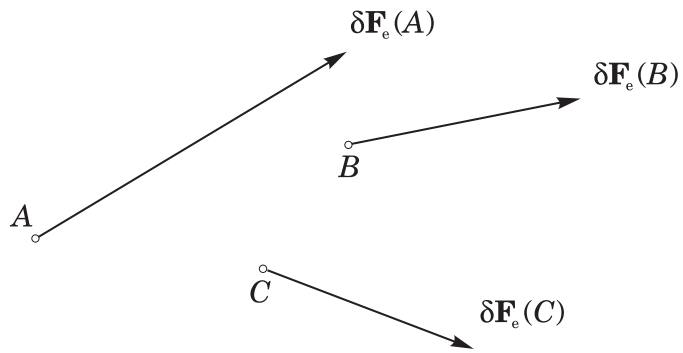
Vzemimo, da imamo v prostoru $1 + n$ točkastih elektrin. Označimo jih z δQ, δQ_1, δQ_2, ..., δQ_n. Nameščene naj so v točkah T, T_1, T_2, ..., T_n s krajevnimi vektorji $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_n$. Po "Coulombu" je delna sila na elektrino δQ – zaradi elektrine δQ_i – enaka

$$\delta \mathbf{F}_{\mathrm{e}i} = \mathbf{R}_i \frac{\delta Q \delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3} \qquad \mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$$

Parcialne sile (vseh n elektrin) tvorijo v točki T pahljačo vektorjev različnih smeri in velikosti. Rezultirajoči vektor sile na elektrino δQ dobimo s *superponiranjem* ("natovarjanjem") parcialnih sil oz. z njihovo vektorsko vsoto,

$$\boxed{\delta \mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \sum_{i=1}^{n} \delta \mathbf{F}_{\mathrm{e}i} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \frac{\delta Q_i}{R_i^3}} \tag{10.1}$$

Zamislimo si, da (pri mirujočih elektrinah δQ_1 do δQ_n) elektrino δQ navidezno premikamo



Slika 10.1: Enostavna ponazoritev vektorskega polja sil v prostoru.

po prostoru. Vsaki točki trenutne pozicije elektrine δQ bi ustrezal načelno drugačen vektor sile. Sila $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}$ bi se od točke do točke spreminjala in določala neko krajevno porazdelitev sil – *vektorsko polje sil*. Grafično bi to vektorsko polje ponazorili z vektorji sile $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}$ v izbranih točkah A, B, C, ..., slika 10.1. Če bi točke dovolj gosto posejali po prostoru, bi s tako vrisanimi vektorji dobili razmeroma plastično predstavo o polju sil. ♣ Bralec naj si takšno polje skicira za primer samo ene mirujoče elektrine $\delta Q'$ in ene premakljive elektrine δQ. Na sliki naj upošteva, da se velikost sile na dvakratni, trikratni, ... razdalji zmanjša za štirikrat, devetkrat, ... ♣

11. Vektor električne poljske jakosti

Če bi vektorsko polje sile $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}$ risali za različne vrednosti elektrine δQ, bi bile grafične predstavitve teh vektorskih polj med seboj podobne (pomanjšane, povečane, ali pa bi se smeri vektorjev obrnile, če bi elektrini δQ zamenjali predznak).

Nekako logično bo, če vpeljemo normirano vektorsko polje sil. Pripadajočo vektorsko funkcijo bomo označili z $\mathbf{E}$ in ji rekli *vektor električne poljske jakosti*. Definirali jo bomo s kvocientom:

$$\boxed{\mathbf{E}(T) = \frac{\delta\mathbf{F}_{\text{e na elektrino } \delta Q \text{ v točki } T}}{\delta Q}} \tag{11.1}$$

Enote zanjo bodo V/m (volt/meter); V/m=N/C (newton/coulomb). Pomembno je, da vektorsko polje $\mathbf{E}$ ni v ničemer več vezano na elektrino δQ, ampak samo še na elektrine δQ_1, δQ_2, ..., δQ_n, na njihovo lego v prostoru in na lego splošne točke T, kjer to polje zapišemo. Vektor $\mathbf{E}$ je torej le še vektorska funkcija splošne točke T; $\mathbf{E} = \mathbf{E}(T)$. Po izrazu za silo na elektrino δQ (enačba 10.1) in glede na definicijo 11.1, je vektor $\mathbf{E}$ dalje tudi

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}i}}{\delta Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i\frac{\delta Q_i}{R_i^3} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}i}}{\delta Q}$$

Čeravno so identitete izrazov očitne, velja opozoriti na določeno odliko vektorja električne poljske jakosti, namreč, $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}i}/\delta Q$ bi (po enačbi 11.1) pomenil vektor električne poljske jakosti elektrine δQ_i na mestu elektrine δQ; torej $\delta\mathbf{E}_i(T)$. Rezultirajoče polje $\mathbf{E}(T)$ dobimo potemtakem s superponiranjem vektorjev parcialnih (delnih) poljskih jakosti $\delta\mathbf{E}_i(T)$,

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{i=1}^{n}\delta\mathbf{E}_i(T) \qquad\qquad \delta\mathbf{E}_i(T) = \mathbf{R}_i\frac{\delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3}$$

Če ima neko vektorsko (ali skalarno) polje to lastnost, da rezultančnem polju ustreza vsota parcialnih polj, potem rečemo, da zanj velja stavek *superpozicije*[1]. Večina polj, ki jih bomo spoznali še kasneje, ima to lastnost, obstajajo pa tudi izjeme, na katere bomo sproti opozarjali.

Glede na splošno porazdeljenost elektrin v prostoru, ki je opredeljena s porazdelitvenimi funkcijami, moremo splošnemu diferencialu točkaste elektrine dQ (v točki T') prirediti v splošni točki T pripadajoč diferencial polja $d\mathbf{E}(T)$ kot

$$d\mathbf{E}(T) = \mathbf{R}\frac{dQ(T')}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

[1]Veljavnost superpozicije je eden od pogojev, da je določen sistem *linearen*.

Po zgoraj omenjeni veljavnosti stavka superpozicije bo rezultirajoče polje $\mathbf{E}(T)$ "zvezna vsota" oz. integral diferencialnih prispevkov vseh diferencialnih elektrinic $dQ(T')$ celotne elektrine ($Q_{\text{cel.}}$) v prostoru,

$$\boxed{\mathbf{E}(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q_{\text{cel.}})} \frac{\mathbf{R}}{R^3} dQ(T')} \tag{11.2}$$

V zapisu pomeni T' točko, kjer se nahaja splošen diferencial točkaste elektrine $dQ(T')$, distančni vektor $\mathbf{R}$ pa je usmerjena daljica med točko vira (T') in točko opazovanja (T); torej $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

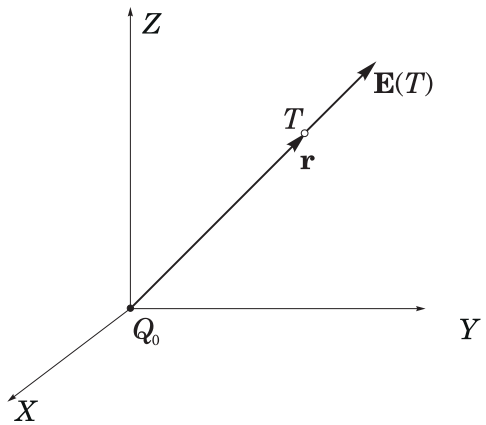
Če v to polje vnesemo kako točkasto elektrino δQ, in se zaradi tega porazdelitve ostalih elektrin ne bodo spremenile[2], potem bo nanjo delovala Coulombova sila

$$\boxed{\delta\mathbf{F}_{\text{e}} = \delta Q\mathbf{E}} \tag{11.3}$$

Če se vrnemo na poglavje o elektrinah in izraz primerjamo z Lorentzovo silo, vidimo, da je dobljena sila vsebovana v njenem prvem delu. Vektor $\mathbf{E}$, ki smo ga spoznali in vpeljali kot normirano silo, bo imel v elektrostatiki (in v elektromagnetiki nasploh) eno glavnih in najpomembnejših vlog; njegov stik s silo bo zanj značilen.

Zgled 11.1

Izrazimo polje $\mathbf{E}$ okrog točkaste elektrine Q_0, ki jo postavimo v koordinatno izhodišče; slika 11.1. Njen krajevni vektor $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$. Dalje so: $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}/r = \mathbf{e}_r$ in $\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r Q_0/4\pi\varepsilon_0 r^2$ ali $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (Q_0/4\pi\varepsilon_0 r^2, 0, 0)$ – v krogelnem k.s. Zakonitost vektorja $\mathbf{E}$ okrog točkastega izvora je tipična. Upada recipročno



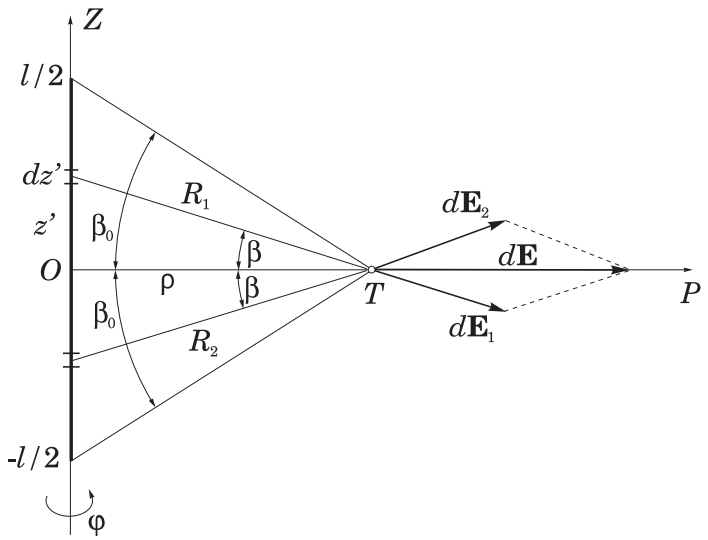
Slika 11.1: Vektor $\mathbf{E}$ točkaste elektrine.

s površino sfere ($4\pi r^2$), ki jo vir "napaja" iz oddaljenosti r. Proti neskončnosti ($r \to \infty$) njen vpliv upada z drugo potenco proti nič. (Povsem sorodno zakonitost ima gravitacijski pospešek okrog planeta.) Posebnost polja $\mathbf{E}$ je v tem, da se mu smer obrne k "izvoru", če je ta negativen ($Q_0 < 0$). "Sitnost" pa je z njegovo singularnostjo v bližini elektrine, kar je posledica geometrijske brezdimenzijskosti točkaste elektrine – vendar o tem kasneje.

[2] Če se z vnosom elektrine δQ spremenijo porazdelitve ostalih elektrin, je potrebno v enačbi 11.3 upoštevati njihovo novo polje $\mathbf{E}$.

Zgled 11.2

Poglejmo, kaj je z električnim poljem **E** v okolici naelektrene daljice. Tudi tu moremo pričakovati določene težave, saj daljica nima debeline. (V stvarnem se naelektreni daljici še najbolj približa zelo tanek naelektren podolgovat elipsoid.) Pa vzemimo, da je daljica dolžine l naelektrena z elektrino Q. Vzdolžno gostoto privzemimo kot konstantno: $q = Q/l$. Da bi polje **E** računali v splošni točki, bi bilo nekoliko prezahtevno. Izračunajmo ga zato le v simetralni ravnini, ki daljico razpolavlja; slika 11.2. Naj je to ravnina $z = 0$; pol daljice je nad njo in pol je



Slika 11.2: Polje **E** naelektrene daljice.

je pod njo. Vse točke, ki so na krožnici z radijem ρ okrog osi Z, so enakovredne. Rečemo, da vlada t.i. *rotacijska simetrija* okrog Z-osi. Izberimo si splošno točko T, ki je za ρ oddaljena od osi daljice. Na daljici vzemimo dva diferenciala točkastih elektrin na lokacijah $\pm z'$; diferencialni elektrini na teh mestih sta qdz'. Diferenciala elektrin povzročata diferencialni poljski jakosti $d\mathbf{E}_1$ in $d\mathbf{E}_2$; njuna vsota ($d\mathbf{E}$) kaže v smeri koordinate ρ: $d\mathbf{E} = (dE_\rho, 0, 0)$ in $dE_\rho = 2dE_1 \cos\beta$. Po izrazu za polje **E** točkaste elektrine je dE_1 dalje enak $qdz'/4\pi\varepsilon_0 R_1^2$ in $dE_\rho = q\cos\beta\ dz'/2\pi\varepsilon_0 R_1^2$. Spremenljivke β, R_1 in z' so medsebojno trigonometrično povezane: $R_1 = \rho/\cos\beta$, $z' = \rho\tan\beta$ in $dz' = \rho\ d\beta/\cos^2\beta$. Za dE_ρ dobimo: $dE_\rho = q\cos\beta\ d\beta/2\pi\varepsilon_0\rho$. Ker seštevamo polji dveh diametralno ležečih elektrinic, bomo integrirali po kotu β od 0 do β_0

$$E_\rho = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\rho}\int_0^{\beta_0}\cos\beta\ d\beta = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\rho}\sin\beta_0$$

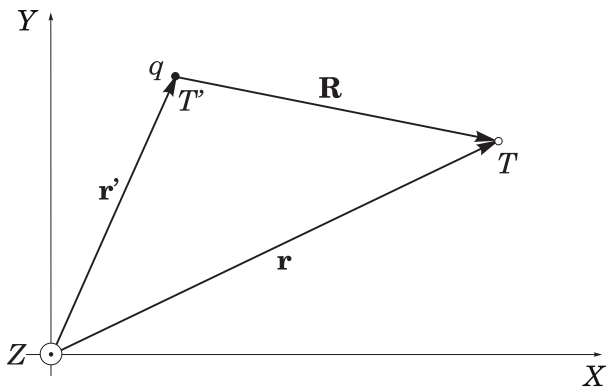
Limitni primer je, ko daljico "raztegujemo" v premico in ohranjamo q; dobimo: $E_\rho = q/2\pi\varepsilon_0\rho$. Pa sploh ni potrebno, da raztegujemo daljico v premico; že če je $\rho \ll l$, je $\beta_0 \simeq \pi/2$, in rezultat je enak. Še več, ta rezultat je dober tudi izven simetralne ravnine, če smo le dovolj blizu daljici in še razmeroma oddaljeni od obeh koncev. Pisali bomo:

$$E_\rho(\rho, z) \doteq \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\rho} \qquad \text{če je} \quad \rho \ll l,\ l/2 - |z|$$

V praksi imamo s tovrstnim poljem opraviti v bližini naelektrene daljnovodne vrvi. Če se postavimo pod njo, ji ne vidimo ne začetka ne konca. Za opazovalca je ta vrv kot naelektrena premica, saj je tudi njen radij majhen glede na nekajmetrske oddaljenosti od nje.

Točkasta elektrina in naelektrena premica sicer nista fizikalna "stvora" – sta le limitna primera majhne kroglice in dolgega tankega vodnika (žice) –, vendar bomo njuni polji še pogosto srečevali; na primer kot gradnike bolj zamotanih konfiguracij.

Posplošimo dobljen rezultat še na premo elektrino q, ki leži vzporedno z Z-osjo na poljubnem mestu v (XY) ravnini; slika 11.3. Koordinata z ni tu več pomembna. Mesto



Slika 11.3: Prema elektrina v splošni legi.

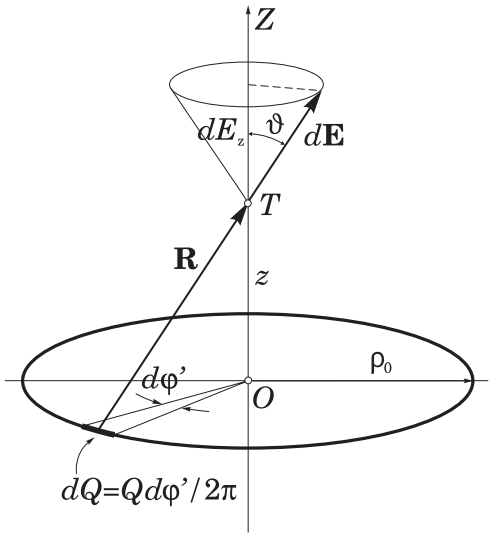
elektrine q določa točka T' oz. krajevni vektor $\mathbf{r}' = (x', y')$, splošno točko T pa opredeljuje krajevni vektor $\mathbf{r} = (x, y)$. Polje je vstran od elektrine, v smeri vektorja $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, če je ta pozitivna, in k njej, če je ona negativna; njegova velikost je $q/2\pi\varepsilon_0 R$. Vektor $\mathbf{E}(T)$ je tako:

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{R}\frac{q(T')}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

♣ Bralec naj po analogiji s točkastimi elektrinami zapiše vektor $\mathbf{E}(T)$ kot vsoto prispevkov n vzporedno ležečih premih elektrin q_1, q_2, ..., q_n, na lokacijah T_1, T_2, ..., T_n. Dobljena izražava je že primerna za določanje vektorja $\mathbf{E}$ v okolici večvodniških sistemov. Bralec naj tudi razmisli o zakonitosti upadanja polja v okolici preme elektrine, ki je sedaj obratnosorazmerna z oddaljenostjo (pri točkasti elektrini je bila zakonitost upadanja obratnosorazmerna s kvadratom oddaljenosti). Podobna odgovora bi dobili, če bi se vprašali po zakonitosti upadanja osvetljenosti od sveče ali od premega niza sveč. ♣

Zgled 11.3

Določimo polje v osi naelektrenega tankega prstana s polmerom ρ_0 in elektrino Q. Položimo prstan v ravnino $z = 0$ in izračunajmo polje v osi Z; slika 11.4. O obodu prstana si mislimo, da je razdeljen na diferencialne obodne loke z diferencialnim središčnim kotom $d\varphi'$. Diferencialne elektrine na teh segmentih povzročajo v točki T diferencialne poljske jakosti $d\mathbf{E}$, ki ležijo na plašču stožca. Pri integraciji diferencialov $d\mathbf{E}$ se bodo njihove radialne projekcije izničile, aksialne projekcije (dE_z) pa

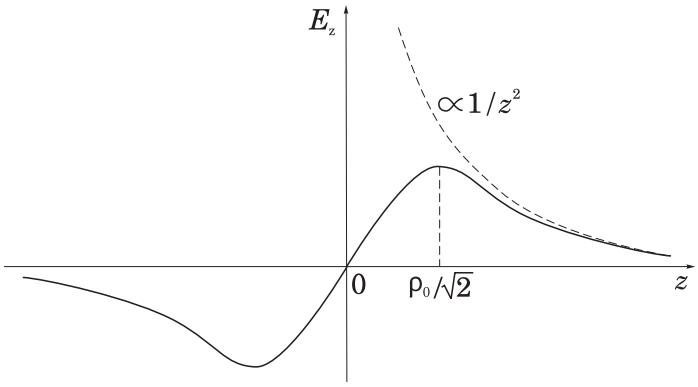


Slika 11.4: Polje **E** naelektrene krožne zanke.

se bodo superponirale. Projekcija dE_z je dalje: $dE_z = dE\cos\vartheta = (z/R)\,dE$; diferencial $dE = (Qd\varphi'/2\pi)/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Če združimo, dobimo: $dE_z = Qzd\varphi'/8\pi^2\varepsilon_0 R^3$. Razdalji R in z se s kotom φ' ne spreminjata, zato je integral preprost,

$$E_z(T) = E_z(z) = \frac{Q}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{z}{R^3}\int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(\rho_0^2+z^2)^{3/2}}$$

Poljsko jakost v osi predstavimo kot funkcijo koordinate z; slika 11.5. Polje je za



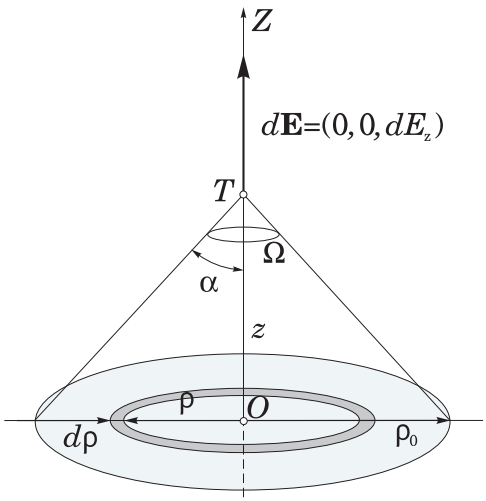
Slika 11.5: Potek polja E_z v osi naelektrene krožne zanke.

$z > 0$ usmerjeno v smeri osi Z, za $z < 0$ pa v nasprotno smer; polje kaže stran od središča prstana, če je $Q > 0$, in k središču, če je $Q < 0$. V središču je polje nič – vsi diametralni diferencialni prispevki polja se izničijo. ♣ Bralec naj sam pokaže, da sta ekstrema E_z pri $z = \pm\rho_0/\sqrt{2}$, in naj izračuna, kolikšna sta. ♣ Funkcija E_z se pri $z \gg \rho_0$ asimptotično približa funkciji $Q/4\pi\varepsilon_0 z^2$, kar je logično. Če smo daleč stran od prstana, se nam ta "kaže" kot točkasta elektrina. Polje **E** v splošni točki

okrog prstana je matematično nekoliko zahtevneje določiti[3], zato se bomo te naloge na tem nivoju izognili.

Zgled 11.4

Določimo še polje **E** v osi enakomerno naelektrenega diska polmera ρ_0; slika 11.6. Temu se v praksi sorazmerno približa naelektrena prevodna krožna plošča, vendar



Slika 11.6: Polje **E** naelektrenega diska.

takrat elektrina ni enakomerno porazdeljena po površini – v centralnem delu sicer je, proti obodu pa ploskovna gostota σ narašča. Ta detajl bomo tu "spregledali" in vzeli, da je na disku enakomerna ploskovna gostota σ. Ploščo si mislimo razdeljeno na diferencialno ozke kolobarje s površinami $2\pi\rho d\rho$. Elektrina na kolobarju je $2\pi\sigma\rho\ d\rho$. Vsak kolobar povzroča polje $d\mathbf{E}$ v Z smeri, zato bo takšno tudi rezultančno polje; $\mathbf{E} = (0,\ 0,\ E_z)$. Diferencial dE_z kolobarja je takšen kot od naelektrenega prstana, le da za Q pišemo $2\pi\sigma\rho\ d\rho$, za ρ_0 pa ρ: $dE_z = \sigma z\rho\ d\rho/2\varepsilon_0(\rho^2 + z^2)^{3/2}$. Prispevke integriramo po ρ od 0 do ρ_0:

$$E_z(T) = E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^{\rho_0}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]_0^{\rho_0}$$

Po vstavitvi mej dobimo

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{\rho_0^2+z^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{\Omega}{4\pi}\right)$$

kjer sta α in Ω ravninski in prostorski kot, ki ju določata disk in točka T; zgled 2.11. Rezultat za E_z se nanaša na točke $z > 0$. Točke na osi pod ploščo ($z < 0$) imajo polje v nasprotno smer, v samem centru diska pa je polje nič – kot pri prstanu.

[3]Izvajanja nas pripeljejo do eliptičnih integralov, ki analitično niso rešljivi – izračunava se jih numerično.

Pa vzemimo primer, da se disk "razleze" v "naelektreno ravnino", σ pa ostaja konstanten: $\rho_0 \to \infty$, $\alpha \to \pi$, $\Omega \to 2\pi$. Izraz za E_z je

$$E_z = \begin{cases} \sigma/2\varepsilon_0 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -\sigma/2\varepsilon_0 & z < 0 \end{cases}$$

Rezultat je zanimiv: polje na zgornji in spodnji strani je neodvisno od oddaljenosti od ravnine, torej je konstantno po smeri in velikosti – takšnemu polju rečemo *homogeno polje*. In sploh ni nujno, da disk limitiramo v ravnino, dovolj je že, če je $|z| \ll \rho_0$, pa bo polje imelo povsem identično zakonitost; in tudi če se pomaknemo iz osi diska, in ne ravno do roba, bo zakonitost polja še vedno takšna. ♣ Bralec naj naelektreno ravnino interpretira z ravninskim nizom sveč in premisli, kako bi se tam spreminjala osvetljenost z oddaljevanjem od ravnine? ♣

V tem razdelku smo si ogledali nekaj aplikacij računanja sumarnega polja enostavno porazdeljenih elektrin. Uporabljali smo stavek superpozicije; lastnost namreč, da je vektorsko polje $\mathbf{E}$ od množice elektrin enako vektorski vsoti parcialnih ali delnih prispevkov. Seveda pa sumacija (integracija) matematično ni vedno tako preprosta, zato si pomagamo še z drugimi načini – vendar o tem v nadaljevanju.

12. Gaussov stavek vektorja električne poljske jakosti

Pogledali si bomo zelo lepo in uporabno lastnost Coulombovega polja; takšnega, ki upada s kvadratom oddaljenosti in je usmerjeno radialno od točkovnega vira. Vzemimo poljubno porazdelitev elektrin v prostoru in poljubno sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$; ta razmeji elektrine na notranje in zunanje. Reprezentanta notranjih in zunanjih diferencialnih elektrinic označimo z $dQ(T_\mathrm{n})$ in $dQ(T_\mathrm{z})$. Polje $\mathbf{E}$ v splošni točki T je

$$\mathbf{E}(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_\mathrm{cel.})} \frac{\mathbf{R}}{R^3} dQ(T')$$

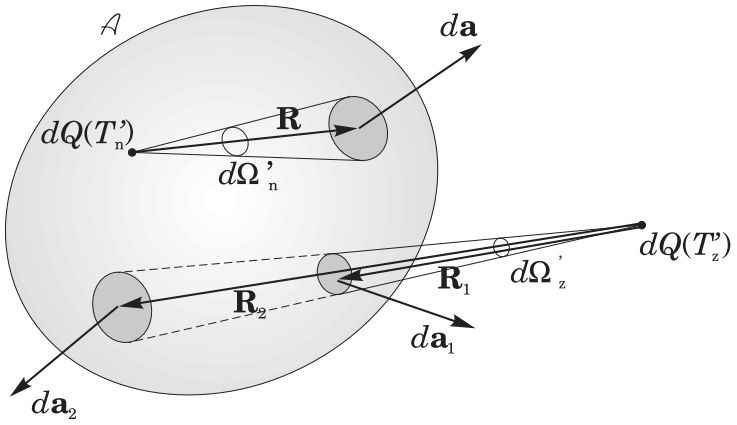
pri tem pa integracija teče po vseh notranjih in po vseh zunanjih elektrinah. Vprašajmo se po (integralu) $\oint_\mathcal{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$, oz. odgovorimo: kolikšen je "pretok" vektorja $\mathbf{E}$ skozi to sklenjeno ploskev? Pišimo:

$$\oint_\mathcal{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_\mathcal{A} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_\mathrm{cel.})} \frac{\mathbf{R}}{R^3} dQ(T') \right) \cdot d\mathbf{a}$$

in zamenjajmo vrstni red integracij; dobimo:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_\mathrm{cel.})} \left(\oint_\mathcal{A} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{R^2} \right) dQ(T')$$

Notranji integral bomo rešili s primerno geometrijsko interpretacijo. Distančni vektor $\mathbf{R}$ se nanaša na točko vira $dQ(T')$ in na splošno točko T na površini ploskve $\mathcal{A}$. Ločili bomo dva primera: prvič, da je T' notranja točka (T'_n), in drugič, da je T' zunanja točka (T'_z); slika 12.1.



Slika 12.1: Grafična interpretacija h Gaussovemu stavku polja **E**.

Vzemimo najprej notranjo točko; $T' = T'_{\mathrm{n}}$. Pod integralom imamo produkt $(\mathbf{R}/R) \cdot d\mathbf{a}/R^2$. Geometrijsko je produkt $(\mathbf{R}/R) \cdot d\mathbf{a}$ enak projekciji ploskvice $d\mathbf{a}$ na smernik $(\mathbf{R}/R)$ oz. enak vidnemu delu ploskvice da. Če pa ta vidni del ploskvice delimo s kvadratom oddaljenosti (R^2), ustreza to diferencialu prostorskega kota, pod katerim vidimo iz točke T'_{n} ploskvico da; torej $d\Omega'_{\mathrm{n}}$. Ker pa moramo integrirati po vseh ploskvicah, torej po vseh delčkih prostorskega kota znotraj polnega kota 4π, je integral enak 4π. Ploskovni integral za T'_{n} je s tem določen:

$$\oint_{\mathcal{A}} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{R^2} = \oint_{\mathcal{A}} d\Omega'_{\mathrm{n}} = 4\pi$$

Za točko T' zunaj, torej T'_{z}, je razmišljanje podobno. Iz točke T'_{z} vidimo ploskev $\mathcal{A}$ le delno (vidni/sprednji del, reprezentant $d\mathbf{a}_1$, in nevidni/zadnji del, reprezentant $d\mathbf{a}_2$). Reprezentančni ploskvici si izberimo tako, da sprednja ploskvica "zakriva" zadnjo. Podintegralska produkta $(\mathbf{R}_1 \cdot d\mathbf{a}_1)/R_1^3$ in $(\mathbf{R}_2 \cdot d\mathbf{a}_2)/R_2^3$ sta $-d\Omega'_{\mathrm{z}}$ in $d\Omega'_{\mathrm{z}}$; njuna vsota je vedno nič. Z integracijo po ploskvi prehodimo vse takšne pare in vsakič dobimo nič. Končno je

$$\oint_{\mathcal{A}} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{R^2} = \oint_{\mathcal{A}} d\Omega'_{\mathrm{z}} = 0$$

Če kratko povzamemo: sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ vidimo z notranje strani pod prostorskim kotom 4π, z zunanje strani pa pod kotom nič. Naravno bi se bilo vprašati, kaj je s tem integralom, ko bi bila točka T' v površini; $T' = T'_{\mathrm{p}}$. Pol prostorskega kota bi bilo dovolj, da se ozremo po notranjosti; rezultat bi bil 2π. Analizirani ploskovni integral ima naslednje vrednosti:

$$\oint_{\mathcal{A}} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{R^2} = \begin{cases} 4\pi & T' = T'_{\mathrm{n}} \\ 2\pi & T' = T'_{\mathrm{p}} \\ 0 & T' = T'_{\mathrm{z}} \end{cases}$$

V integralu za pretok vektorja **E** je nadalje potrebno elektrino $dQ(T')$ pomnožiti s primerno utežjo; ali 4π ali 2π ali 0. Vse zunanje elektrine so množene z nič, zato od njih ni prispevka k integralu. Elektrin v površini $\mathcal{A}$ ni, saj nima debeline; ostanejo le notranje elektrine, množene s 4π:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\text{cel. not.}})} 4\pi dQ(T_{\mathrm{n}}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{(Q_{\text{cel. not.}})} dQ(T'_{\mathrm{n}})$$

Preostali integral je vsota vseh elektrin znotraj ploskve $\mathcal{A}$. Iskan pretok vektorja $\mathbf{E}$ skozi sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ je končno znan:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{cel. not.}}}{\varepsilon_0}} \tag{12.1}$$

Dobljen izraz imenujemo *Gaussov stavek vektorskega polja* $\mathbf{E}$. Zanimivo je, da pretok ni odvisen od zunanjih virov, ampak le od algebrske vsote vseh v notranjost ploskve "ujetih" elektrin. Po stavku o superpoziciji bi rezultančno polje lahko pisali kot vsoto $\mathbf{E}_{\text{n}}$ (polja notranjih elektrin) in $\mathbf{E}_{\text{z}}$ (polja zunanjih elektrin); $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{n}} + \mathbf{E}_{\text{z}}$. Po Gaussovem stavku bi veljalo:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}_{\text{n}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{cel. not.}}}{\varepsilon_0} \qquad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}_{\text{z}} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Koristnost in uporabnost tega stavka bo zelo pestra in nam bo v mnogočem olajšala tako razmisleke kot tudi izvajanja in račune.

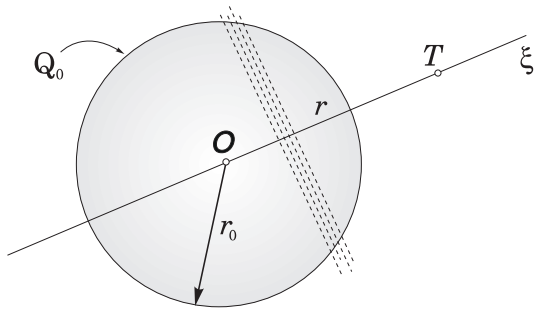
Izvornost vektorja E. Že ko smo uvajali ploskovni integral kot matematično formo pretoka, smo omenili pojem izvornosti. Po povedanem lahko rečemo, da ima vektorsko polje $\mathbf{E}$ izvore v elektrinah oz., da je to polje izvorno. Vsakemu volumnu $\mathcal{V}$, ki ga ograjuje sklenjena ploskev $\mathcal{A}$, lahko rečemo, da ima proporcionalno tolikšno izvornost, kolikor elektrine je znotraj. Čim manjša bi bila ploskev $\mathcal{A}$, tem točnejša bi bila informacija o izvornosti. V limiti bi rekli: izvornost na enoto volumna v točki T je

$$\lim_{\delta v \to 0} \frac{\oint_{\delta\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}}{\delta v} = \frac{1}{\varepsilon_0} \lim_{\delta v \to 0} \frac{\int_{\delta\mathcal{V}} \rho_{\text{cel.}}\, dv}{\delta v} = \frac{\rho_{\text{cel.}}(T)}{\varepsilon_0}$$

Izvornost vektorja $\mathbf{E}$ v točki T je $\rho_{\text{cel.}}(T)/\varepsilon_0$. Tako definirana izvornost točke pa je že kategorija, ki po svoji vsebini presega okvir osnovnih znanj o elektromagnetnih poljih, zato o tem dalje ne bi govorili.

Zgled 12.1

Vprašajmo se po polju enakomerno naelektrene krogelne lupine (folije) z elektrino Q_0 in radijem r_0. Zanimata nas predvsem notranjost in zunanjost lupine. Očitno vlada v okolici lupine t.i. krogelna simetrija. Kota ϑ in φ sfernega k.s. izgubita pomen; vse točke, ki so od centra enako oddaljene, so "enakovredne". Vzemimo točko T, ki je za r oddaljena od centra (izhodišče k.s.) krogelne lupine; slika 12.2. Na



Slika 12.2: Polje $\mathbf{E}$ naelektrene krogelne lupine.

daljico $\overline{OT}$ narišimo premico ξ in pravokotno nanjo nanizajmo množico vzporednih si ravnin, ki lupino "razrežejo" na ozke kolobarje. Vsak kolobar zase "generira" s

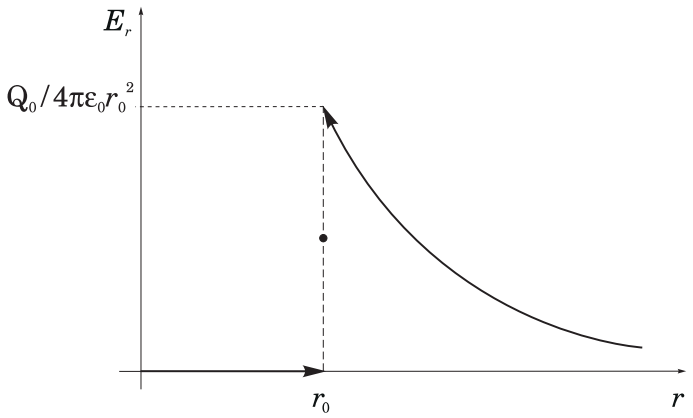
svojo elektrino polje v T, ki je podobno polju naelektrenega prstana v osi; torej vzdolž ξ. Njihovo sumarno polje bo zato le v radialni smeri: $\mathbf{E} = (E_r,\ 0,\ 0)$. Sklep velja za notranjost ($r < r_0$) in zunanjost ($r > r_0$) lupine. Omislimo si sedaj krogelno površino (sklenjeno ploskev) koncentrično k naelektreni krogelni lupini; njen polmer bodi r. Uporabimo Gaussov stavek in upoštevajmo, da E_r ni odvisen od φ in ϑ; dobimo:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_r \oint_{\mathcal{A}} da_r = E_r 4\pi r^2 = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ Q_0/\varepsilon_0 & r > r_0 \end{cases}$$

Končno je

$$E_r = E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ Q_0/4\pi\varepsilon_0 r^2 & r > r_0 \end{cases}$$

Ta hip ni toliko zanimivo, kaj je z E_r v sami lupini, povejmo le, da ima tam vrednost $Q_0/8\pi\varepsilon_0 r_0^2$, kar je ravno srednja vrednost med E_r tik nad ($Q_0/4\pi\varepsilon_0 r_0^2$) in tik pod lupino (0). Z vrednostjo polja v sloju (oblogi elektrin) se bomo ukvarjali kasneje – v nekem splošnejšem kontekstu. Predočimo rezultat za E_r enakomerno naelektrene krogelne lupine z grafikonom; slika 12.3. Vidimo, da je polje zunaj lupine takšno,

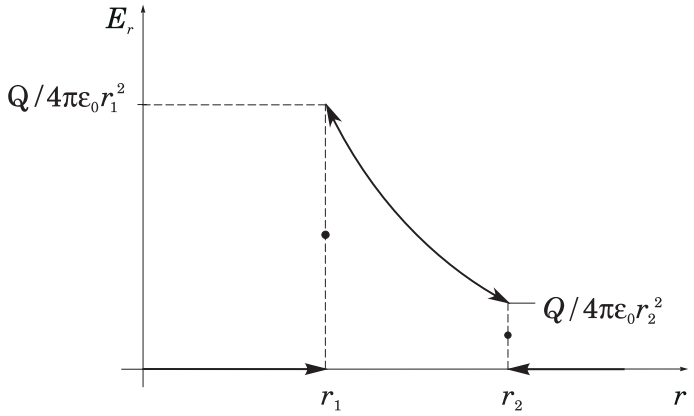


Slika 12.3: Potek polja E_r v okolici naelektrene krogelne lupine.

kot da bi bila vsa elektrina Q_0 (z lupine) združena v točkasti elektrini v središču krogelne lupine, polje znotraj lupine pa je nič. (Slednji rezultat spominja na primer iz gravitacijskega polja. Če bi maso enakomerno porazdelili po obodu krogelne lupine, bi bil gravitacijski pospešek znotraj lupine nič. Na maso m', ki bi jo vnesli v ta prostor, ne bi delovala nikakršna sila.) ♣ Bralec naj poskusi to pokazati brez uporabe Gaussovega stavka. ♣

Zgled 12.2

Kaj pa, če vzamemo dve koncentrični krogelni lupini z radijema r_1 in $r_2 > r_1$ ter elektrinama $Q_1 = Q$ in $Q_2 = -Q$. V notranjosti notranje krogle ($r < r_1$) polja ni, ker je ta prostor notranjost za obe lupini, v zunanjosti obeh krogel ($r > r_2$) se polji obeh elektrin kompenzirata, v vmesnem prostoru pa je polje le od notranje elektrine. Polje E_r podaja grafikon na sliki 12.4. Polje na mejah je polovično (piki na sliki).



Slika 12.4: Potek polja E_r v medprostoru dveh naelektrenih krogelnih lupin.

Iz slednjih dveh zgledov se da zaključiti, da so – pri določenih porazdelitvah elektrin in določeni geometriji – možne cone, ki so brez polja, in da more biti polje prisotno le v nekem končnem volumnu.

♣ Bralec naj sam izvede razmislek v primeru enakomerno porazdeljene elektrine na površini "neskončno" dolgega valja polmera ρ_0 (po vzorcu naelektrene krogelne lupine). Če se postavi Z-os v os valja, se v valjnem k.s. ugotovi: $\mathbf{E} = (E_\rho,\ 0,\ 0)$; pri vzdolžni naelektritvi q_0 na valju je

$$E_\rho(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho < \rho_0 \\ q_0/2\pi\varepsilon_0\rho & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

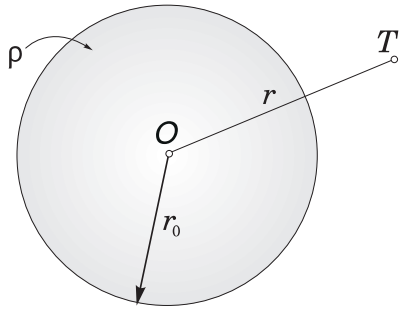
In dalje, če vzamemo dva koncentrična valja z elektrino q na ρ_1 ter elektrino $-q$ na $\rho_2 > \rho_1$, dobimo podoben grafikon, kot je na sliki 12.4, le da polje ne upada z drugo, temveč s prvo potenco. ♣

Primera iz krogelne in valjne geometrije bosta zelo uporabljiva v kasnejših zgledih, ko bomo v elektrostatična polja vnesli prevodnike in izolatorje. Zgled krogelne geometrije bo imel aplikacijo v sfernem kondenzatorju, valjni primer pa bo matematična osnova za elektrostatično polje v koaksialnem kablu.

Zgled 12.3

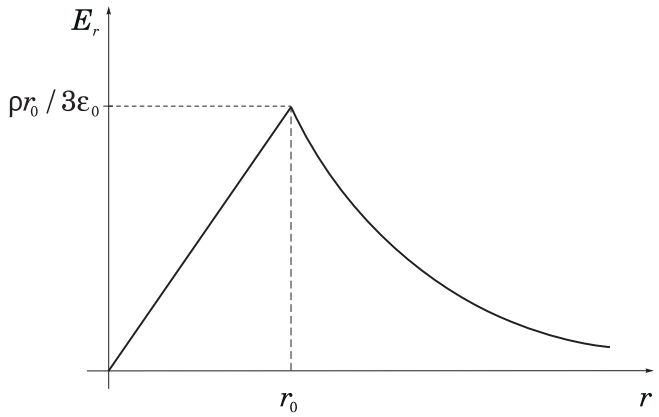
Vzemimo oblak elektrine s konstantno prostorsko gostoto ρ v obliki krogle polmera r_0; slika 12.5. Koordinatno izhodišče postavimo v center oblaka. Polje $\mathbf{E}$ bo krogelno simetrično, torej bo le funkcija radija r. Oblak elektrine moremo predstaviti z nizom koncentričnih krogelnih lupin diferencialnih debelin dr. Vsaka lupina elektrin navznoter nima polja, navzven pa ima takšnega, kot da bi bila združena v izhodišču. Če je splošna točka T v oblaku ($r < r_0$), potem v tej točki povzročajo polje le elektrine lupin, ki so znotraj tega radija; množina teh je $Q(r) = (4/3)\pi r^3\rho$. Polje E_r je znotraj enako $Q(r)/4\pi\varepsilon_0 r^2 = \rho r/3\varepsilon_0$. Če pa je točka T zunaj oblaka ($r > r_0$), potem je ta točka zunanjost za vse lupine; E_r je tam $Q(r_0)/4\pi\varepsilon_0 r^2 = \rho r_0^3/3\varepsilon_0 r^2$. Vidimo lahko, da se izraza na meji ($r = r_0$) ujemata; poljska jakost E_r je tam zvezna; torej:

$$E_r(r) = \begin{cases} \rho r/3\varepsilon_0 & r < r_0 \\ \rho r_0^3/3\varepsilon_0 r^2 & r \geq r_0 \end{cases}$$



Slika 12.5: Elektrinski oblak v obliki krogle.

Grafikon na sliki 12.6 podaja funkcijsko odvisnost $E_r(r)$.



Slika 12.6: Potek polja E_r v okolici kroglastega elektrinskega oblaka.

Slednji zgled je zelo poučen. Govorili smo že o delčku elektrine δQ v fizično majhnem volumnu δv, ki je fizikalno sprejemljivejši kot točkasta elektrina. Če bi elektrinico δQ prostorninsko limitirali v točko, bi ρ prešel vse meje, s tem pa tudi polje E_r. Pri oblaku z elektrino δQ v volumnu δv in pri fizikalno omejeni gostoti ρ pa te bojazni ni; še več, z zmanjševanjem volumna (radija r_0) limitira največja poljska jakost proti nič.

Ob Gaussovem stavku (12.1) moremo napraviti še majhno dopolnitev. Dopustimo za hip možnost, da bi se elektrine s porazdelitvijo $\rho_{\text{cel.}}$, ki povzročajo polje $\mathbf{E}$, premikale po prostoru in tudi prestopale ploskev $\mathcal{A}$. Časovni odvod enačbe 12.1 bi dal zvezo:

$$\oint_{\mathcal{A}} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \frac{dQ_{\text{cel. not.}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{cel.}}\, dv$$

kjer smo odvod in integral zamenjali. Če to enačbo združimo z kontinuitetno (7.4), dobimo novo povezavo med $\mathbf{J}_{\text{cel.}}$ in $\mathbf{E}$:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J}_{\text{cel.}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} = 0} \tag{12.2}$$

Enačba velja povsem splošno, če je le $\mathbf{J}_{\text{cel.}}$ tokovna gostota vseh – kakorkoli – gibajočih se elektrin.

13. Delo sil elektrostatičnega polja

Elektrostatično polje kakorkoli porazdeljene elektrine v prostoru znamo izračunati z integracijo,

$$\mathbf{E}(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q_{\text{cel.}})} \frac{\mathbf{R}}{R^3}\, dQ(T')$$

Za nekaj razmeroma preprostih primerov smo to integracijo posredno ali neposredno že izvedli, če pa se pri tem zatika, nam ostane na voljo še vedno možnost numeričnega približka. Območje elektrin razdelimo na majhne prostorninice δv_i s centralnimi točkami T_i in elektrinami $\delta Q(T_i)$, zgornji integral pa zapišemo s sumacijskim približkom po vseh segmentih ($i = 1, 2, ..., n$):

$$\mathbf{E}(T) \doteq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3}\delta Q(T_i) \qquad\qquad \mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$$

Smatramo lahko, da pri dani porazdelitvi elektrin v prostoru polje $\mathbf{E}$ poznamo.

Pa vzemimo, da v to polje postavimo majhno naelektreno telo z maso δm in elektrino δQ. To telo bomo smatrali kot majhno, če bodo njegove izmere tako majhne, da bo polje $\mathbf{E}$ v notranjosti njegovih izmer praktično konstantno. V limiti bi rekli, da telo z maso δm in elektrino δQ zamenjamo z masno točko – točkasto elektrino. Na to elektrino bi v točki T delovala električna sila $\delta\mathbf{F}_{\text{e}} = \delta Q\mathbf{E}$. Dopustimo možnost, da se točkasta masa-elektrina more gibati. Zanjo bi zapisali gibalno enačbo: vsota vseh sil je nič,

$$\boxed{-\delta m\dot{\mathbf{v}} + \delta\mathbf{F}_{\text{u}} + \delta\mathbf{F}_{\text{z}} + \delta Q\mathbf{E} = \mathbf{0}} \tag{13.1}$$

Sila ($-\delta m\dot{\mathbf{v}}$) je sila vztrajnosti ($\dot{\mathbf{v}}$ je časovni odvod vektorja hitrosti oz. pospešek), $\delta\mathbf{F}_{\text{u}}$ je sila upora, $\delta\mathbf{F}_{\text{z}}$ je zunanja sila, ki ima neelektrično (mehansko, kemično, ...) "poreklo", in $\delta Q\mathbf{E}$ je električna – Coulombova sila. Zaenkrat smo v praznem prostoru in upora ni ($F_{\text{u}} = 0$); in tudi zunanja sila bodi nič ($F_{\text{z}} = 0$). Gibalna enačba bo takrat: $\delta m\dot{\mathbf{v}} = \delta Q\mathbf{E}$. Vzemimo, da se ta masa-elektrina prične gibati v prostoru po zakonitostih te enačbe. V dveh zaporednih časih t_1 in t_2 jo "najdemo" v točkah T_1 in T_2, v vmesnem intervalu (t_1, t_2) pa opiše neko trajektorijo ali pot $\mathcal{L}$. Poglejmo, kaj nam da integracija člena $\delta m\dot{\mathbf{v}}$ po tej poti (za diferencial premika $d\mathbf{l}$ bomo pisali $\mathbf{v}dt$):

$$\int_{\mathcal{L}} \delta m\dot{\mathbf{v}}\cdot d\mathbf{l} = \delta m\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}\, dt$$

Produkt hitrosti in pospeška moremo preoblikovati takole:

$$\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_z\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2(t)$$

Zgornji integral je s tem opredeljen:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{L}} \delta m\dot{\mathbf{v}}\cdot d\mathbf{l} &= \frac{1}{2}\delta m\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(v^2(t)\right)\, dt = \frac{1}{2}\delta m\int_{t_1}^{t_2} d\left(v^2(t)\right)\\ &= \frac{1}{2}\delta m\left(v^2(t_2) - v^2(t_1)\right) = \frac{1}{2}\delta m\left(v_2^2 - v_1^2\right)\end{aligned}$$

Integral fizikalno pomeni spremembo kinetične energije mase δm. Povsem očitno je, da je to delo opravila električna sila $\delta Q\mathbf{E}$ oz. električno polje sil. Smiselno je, da govorimo o opravljenem delu električnega polja na poti $\mathcal{L}$. Označimo ga z $\delta A_{\mathrm{e}}(\mathcal{L})$ in pišimo:

$$\delta A_{\mathrm{e}}(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} \delta Q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \delta Q \int_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{L}} \delta m\dot{\mathbf{v}}\cdot d\mathbf{l}$$

kjer je $\mathcal{L}$ spet (zgornja) trajektorija gibanja masne točke od T_1 do T_2.

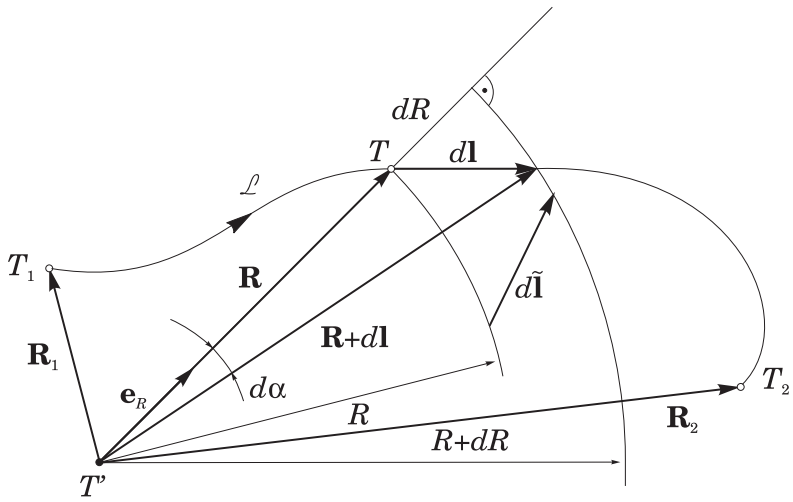
V nadaljevanju nas bo predvsem zanimalo, kako to delo izračunati pri znanem polju $\mathbf{E}$ in kakšne lastnosti ima ta integral; rezultati bodo bistveni in daljnosežni. V integral za delo $\delta A_{\mathrm{e}}(\mathcal{L})$ bomo vstavili (tako, kot pri Gaussovem stavku) načelni izraz za polje $\mathbf{E}$ prostorsko porazdeljenih elektrin in zamenjali zaporedje integracij:

$$\delta A_{\mathrm{e}}(\mathcal{L}) = \delta Q \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \frac{\mathbf{R}}{R^3} dQ(T') \right) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \left(\int_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{R}\cdot d\mathbf{l}}{R^3} \right) dQ(T')$$

Zanimal nas bo najprej notranji integral,

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{R}\cdot d\mathbf{l}}{R^3}$$

Vektor $\mathbf{R}$ je tu vezan na lego diferencialne elektrine $dQ(T')$, ki je pri tej integraciji neka fiksna točka, in na splošno točko T (na krivulji $\mathcal{L}$) med T_1 in T_2, na kateri je tudi element poti $d\mathbf{l}$. Oglejmo si geometrijske relacije, ki osvetljujejo podintegralski produkt; slika 13.1. Produkt $(\mathbf{R}/R)\cdot d\mathbf{l}$ pišimo kot $\mathbf{e}_R\cdot d\mathbf{l}$; to pa je ravno projekcija vektorja premika $d\mathbf{l}$ na



Slika 13.1: Geometrijska interpretacija diferenciala krivuljne integracije.

smernik $\mathbf{e}_R$. V diferencialu, pri diferencialnem kotu $d\alpha$, ustreza ta projekcija diferencialni spremembi dolžine distančnega vektorja $\mathbf{R}$, zato pišemo: $(\mathbf{R}/R)\cdot d\mathbf{l} = dR$ oz. $(\mathbf{R}/R^3)\cdot d\mathbf{l} = dR/R^2$. Rezultat preseneča v toliko, da pri podintegralskem produktu, ki je vezan na nek splošen diferencial poti $d\mathbf{l}$, nekaj "štejeta" (veljata) le R in dR. Neskončno difencialov poti $d\tilde{\mathbf{l}}$ med lupinama R in $R+dR$ bi mogli narisati, pa bi bil $(\mathbf{R}/R^3)\cdot d\mathbf{l}$ vedno enak dR/R^2. Pri krivuljnem integralu, ki ga opazujemo, pot $\mathcal{L}$ očitno izgublja na važnosti, pomembno

je le, kako se R spreminja vzdolž nje oz., od katere do katere vrednosti se spreminja R na tej poti. Če točki T_1 ustreza distanca R_1, točki T_2 pa distanca R_2, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'$, potem je

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{l}}{R^3} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = \left[-\frac{1}{R}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

Krivuljni integral vektorske funkcije $(\mathbf{R}/R^3)$ ima to lepo lastnost, da pot $\mathcal{L}$ ni več pomembna, pomembni sta le krajni točki T_1 in T_2, ki določata razdalji R_1 in R_2. Zato moremo pisati:

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{l}}{R^3} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{l}}{R^3} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

Notranji integral v izražavi za delo polja je tako določen, s tem pa tudi

$$\delta A_{\mathrm{e}}(\mathcal{L}) = \delta Q \int_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) dQ(T')$$

Razmišljanje o delu elektrostatičnega polja sil moremo skleniti z ugotovitvijo, da je opravljeno delo teh sil – pri gibanju elektrine δQ iz točke T_1 v točko T_2 – odvisno le še od začetne in končne točke, nič pa več od oblike poti $\mathcal{L}$ med njima. Zato bomo nadalje namesto $\delta A_{\mathrm{e}}(\mathcal{L})$ pisali $\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2)$ in tudi prvoten zapis krivuljne integracije $(\int_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l})$ bomo zamenjali z zapisom $\int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Električno delo med T_1 in T_2 bo dalje takole:

$$\boxed{\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2) = \delta Q \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) dQ(T')} \tag{13.2}$$

Ob opravljanju dela vsakršnih sil se seveda postavi že kar logično vprašanje: na "račun" zmanjšanja čigave energije se pa je to delo opravilo? Prozornega odgovora ta hip še ne utegnemo dati, slutimo pa lahko: če dan sistem zmore razplesti polje sil in opraviti delo, potem ima v "zakulisju" gotovo določen energijski "bazen". Torej je tudi naš prostor, ki ga zaznamuje prisotnost elektrin, energijsko akumulabilen sistem. Kje je ta energija, kolikšna je, v kakšni korelaciji je s porazdelitvijo elektrin in z njenim električnim poljem (?), so generalna vprašanja, ki terjajo odgovore, in nas še čakajo.

Energijski pogled lahko še nekoliko poglobimo. V kompletni gibalni enačbi vzemimo primer, da obstaja zunanja sila $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{z}}$. Naj je $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{z}}$ sila, s katero "mehanska roka" premakne telo z maso δm in elektrino δQ iz mirovne lege v T_1, v novo mirovno lego v T_2. Kinetični energiji na začetku in koncu sta nič. Upora na tej poti naj ne bo, $F_{\mathrm{u}} = 0$. Če integriramo okrnjeno gibalno enačbo po poti $\mathcal{L}$, ki jo elektrina opiše od T_1 do T_2, dobimo

$$\int_{\mathcal{L}} \delta\mathbf{F}_{\mathrm{z}} \cdot d\mathbf{l} + \delta Q \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Prvi sumand je delo $\delta A_{\mathrm{z}}(\mathcal{L})$ zunanje sile , drugi pa je delo $\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2)$ elektrostatičnih sil. Zveza je tale:

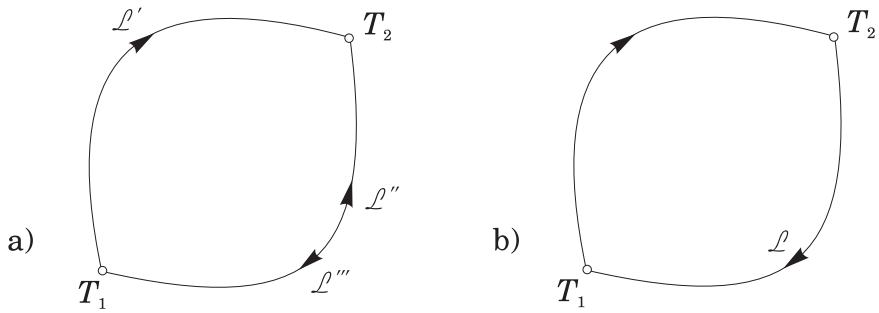
$$\delta A_{\mathrm{z}}(\mathcal{L}) + \delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2) = 0$$

Enačba govori o energijski izmenjavi med mehanskim sistemom (na eni) in električnim (na drugi strani). Če je $\delta A_{\mathrm{z}}(\mathcal{L}) > 0$, je opravljeno delo električnega sistema negativno,

torej sprejme energijo, če pa je $\delta A_{\mathrm{z}}(\mathcal{L}) < 0$, je delo $\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2) > 0$ in električni sistem opravi mehansko delo.

Stokesov stavek polja E. Za delo elektrostatičnega polja smo ugotovili, da je neodvisno od oblike poti med T_1 in T_2, kar pomeni, da ima to lastnost tudi $\int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$.

Pa vzemimo dve različni poti (krivulji) $\mathcal{L}'$ in $\mathcal{L}''$ med točkama T_1 in T_2; slika 13.2. Za



Slika 13.2: a) Enakovredni poti, b) sklenjena pot.

oznake na skici a) bi, upoštevajoč ugotovljeno lastnost, pisali

$$\int_{\mathcal{L}'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{L}''} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

za usmerjeno pot $\mathcal{L}'''$, ki je obratna k poti $\mathcal{L}''$, pa bi pisali

$$\int_{\mathcal{L}'''} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{T_2}^{T_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

kjer smo upoštevali, da se vrednost integrala spremeni za predznak, če integracijski meji zamenjamo. Seštejmo zadnji dve enačbi; dobimo:

$$\int_{\mathcal{L}'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{L}'''} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

"Zlepek" poti $\mathcal{L}'$ in $\mathcal{L}'''$, na skici b), določa sklenjeno pot (konturo $\mathcal{L}$), za katero torej vedno velja

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0} \tag{13.3}$$

Prišli smo do zelo pomembne ugotovitve (lastnosti): krivuljni integral vektorja $\mathbf{E}$ je v elektrostatičnem polju po katerikoli sklenjeni poti vedno enak nič. Če začetno še enkrat ponovimo: krivuljni integral vektorja $\mathbf{E}$ med splošnima točkama T_1 in T_2 je v elektrostatičnem polju neodvisen od poti.

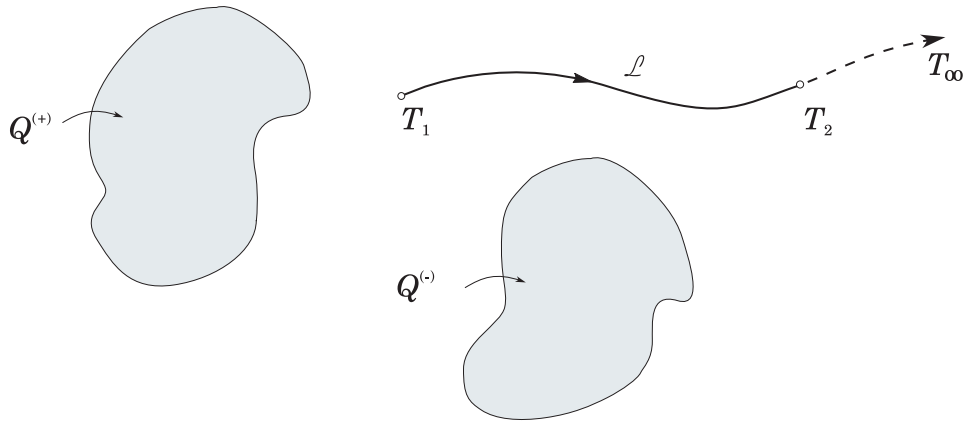
Če bi za neko vektorsko funkcijo $\mathbf{P}$ ugotovili, da je $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, bi nas to navajalo na misel, da ima $\mathbf{P}$ v poprečju neko istosmiselno (pozitivno ali negativno) projekcijo na smer poti $\mathcal{L}$. Če bi narisali nekaj reprezentančnih vektorjev $\mathbf{P}_i$ na tej poti, bi iz slike dobili vtis, da se vektorsko polje vrtinči, cirkulira. Takšna polja bomo spoznali v magnetiki. Za naše elektrostatično polje $\mathbf{E}$ pa moremo po vsem tem trditi, da je nevrtinčno. To tudi ni težko doumeti. Polje točkaste elektrine je sferično razpršeno v vse smeri – brez vrtinčenja. In če polje elementarnega vira ni vrtinčno, potem – po superpoziciji – tudi vsota polj množice takšnih virov ne more biti vrtinčna.

14. Potencialna energija

Vrnimo se (nazaj) k delu polja električnih sil, ki je premikalo elektrino δQ. Za $\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2)$ smo dobili:

$$\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2) = \delta Q \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dQ(T')$$

Dejanskim razmeram se primerno približamo, če za elektrino $Q_{\mathrm{cel.}}$, ki povzroča polje $\mathbf{E}$, trdimo, da se nahaja v prostorsko omejenem področju. Še več, ta elektrina je običajno "grupirana" v uravnoteženih parih presežkov ($\pm$) elektrin. Najbolj preprost primer je že ploščni kondenzator, ki ga z baterijo naelektrimo in dobimo presežek ($+$) elektrine na eni ter enak presežek ($-$) elektrine na drugi plošči. Temu podobnih razdvojitev elektrin imamo v praksi mnogo. Možno je tudi, da je na nekaj mestih presežek pozitivne, na drugih mestih pa enak presežek negativne elektrine. Možno razdvojenost elektrin podaja slika 14.1.



Slika 14.1: Trajektorija gibanja elektrine δQ od T_1 do T_2.

Pa vzemimo, da je točka T_2 daleč stran od $Q^{(+)}$ in $Q^{(-)}$ elektrin; v limiti naj gre proti neskončnosti. Člen $1/R_2$ bi v izrazu za delo $\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2)$ limitiral proti nič, saj razdalje R_2 presegajo vse meje, množini elektrin $Q^{(+)}$ in $Q^{(-)}$ pa sta absolutno vedno omejeni. Pri hipotetičnem gibanju elektrine δQ od T_1 do $T_2 \to T_\infty$ bi bilo delo polja električnih sil določeno že s členom $1/R_1$. Označimo to količino dela z $\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_\infty)$ in pišimo:

$$\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_\infty) = \delta Q \int_{T_1}^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \frac{dQ(T')}{R_1}$$

Telo z elektrino δQ in maso δm, ki bi ga v točki T_1, kjer ima hitrost v_1, prepustili gibanju, bi daleč stran, do "neskončnosti", pridobilo kinetično energijo $\delta m(v_\infty^2 - v_1^2)/2$. Začetna točka T_1 je tu neka povsem splošna točka, zato indeks 1 opustimo in pišimo

$$\boxed{\delta A_{\mathrm{e}}(T, T_\infty) = \delta Q \int_{T}^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \frac{dQ(T')}{R}} \tag{14.1}$$

Potemtakem moremo vsaki točki T v prostoru prirediti skalarno količino, ki pove, kolikšno kinetično energijo bi elektrina δQ (z maso δm) pridobila, če bi dopustili, da se giblje do

"neskončne" okolice. Očitno je zgornji izraz lahko tudi negativen: ali zaradi predznaka elektrine δQ ali pa zaradi močnejšega vpliva negativnih elektrin nad pozitivnimi. V takšnem primeru pomeni $\delta A_{\mathrm{e}}(T, T_\infty)$ spet razliko kinetičnih energij: $\delta m(v_\infty^2 - v^2)/2$. Pri $v_\infty = 0$, je v tista hitrost, s katero mora telo pričeti gibanje, da bo doseglo "neskončno" okolico (in ušlo vplivu polja) in tam ostalo brez kinetične energije. To slednje pa že močno spominja na drugo kozmično hitrost, s katero je potrebno telo izstreliti, da zapusti vpliv gravitacijskega polja Zemlje. V primeru gravitacijskih polj sta pri tovrstnih razmišljanjih v izmenjavi kinetična in potencialna energija – če seveda upor in ostale dejavnike zanemarimo. Opraviti imamo s pretvarjanjem ene energije v drugo, pri tem pa se njuna vsota ohranja.

Po vzoru kinematike masne točke v mehaniki vpeljemo tudi v električnem polju termin potencialne energije oz. t.i. *električno potencialno energijo*. Opredelimo jo takole: če dano elektrostatično polje opravi za premik elektrine δQ od izhodiščne točke T do neskončne okolice delo $\delta A_{\mathrm{e}}(T, T_\infty)$, potem rečemo, da je imela elektrina δQ v izhodiščni poziciji temu delu količinsko enako potencialno energijo $\delta W_{\mathrm{ep}}(T)$, kar matematično zapišemo kot

$$\boxed{\delta W_{\mathrm{ep}}(T) = \delta A_{\mathrm{e}}(T, T_\infty)} \tag{14.2}$$

Glede na slednjo definicijo moremo izraz (13.2) za delo elektrostatičnega polja pisati kot diferenco potencialnih energij

$$\begin{aligned}
\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2) &= \delta Q \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \frac{dQ(T')}{R_1} - \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \frac{dQ(T')}{R_2} \\
&= \delta Q \int_{T_1}^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \delta Q \int_{T_2}^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \delta W_{\mathrm{ep}}(T_1) - \delta W_{\mathrm{ep}}(T_2)
\end{aligned}$$

oz. kot

$$\boxed{\delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_2) = \delta W_{\mathrm{ep}}(T_1) - \delta W_{\mathrm{ep}}(T_2) = \delta A_{\mathrm{e}}(T_1, T_\infty) - \delta A_{\mathrm{e}}(T_2, T_\infty)} \tag{14.3}$$

15. Električni potencial in električna napetost

Električna potencialna energija je trenutno še vezana na elektrino δQ, ki ji dopuščamo neko – vsaj virtualno – premikanje, in na porazdelitev elektrin, v polju katerih se ta premika. Prikladno je, da električno potencialno energijo "razbremenimo" elektrine δQ in vpeljemo t.i. normirano električno potencialno energijo ali *električni potencial*[1]. Oznaka za električni potencial je V. Električni potencial, ali kratko *potencial*, je v splošni točki definiran s kvocientom:

$$\boxed{V(T) = \frac{\delta W_{\text{ep elektrine } \delta Q \text{ v točki } T}}{\delta Q}} \tag{15.1}$$

in je pri dani porazdelitvi elektrin opredeljen z izrazom

$$\boxed{V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\mathrm{cel.}})} \frac{dQ(T')}{R}} \tag{15.2}$$

[1]Termin *potencial* je v matematiko uvedel George Green (1793 – 1841), pripadajočo skalarno funkcijo pa je že leta 1777 vpeljal J.L.Lagrange (1736 – 1813).

ki sledi iz definicije in enačb 14.1 in 14.2. Enota za potencial je V (volt); V=J/C (joule/coulomb). Slednja enačba opredeljuje novo – tokrat skalarno polje – v okolici elektrin. Številsko je potencial enak delu polja električnih sil pri premiku 1 C elektrine od točke T do neskončnosti. Iz enačbe 15.2 je tudi razvidno, da gre $V(T) \to 0$, če se točka T odmika daleč stran ($T \to T_\infty$) od elektrin ($Q_{\text{cel.}}$), ki to električno polje povzročajo. Delo polja električnih sil (v enačbi 13.2) moremo sedaj izraziti s potencialom:

$$\delta A_e(T_1, T_2) = \delta Q \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \delta W_{\text{ep}}(T_1) - \delta W_{\text{ep}}(T_2) = \delta Q \left(V(T_1) - V(T_2)\right)$$

Razliko potencialov v izrazu imenujemo *električna napetost*[2]. Označujemo jo z U in jo izražamo – enako kot potencial – v voltih,

$$\boxed{U_{12} = V(T_1) - V(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \tag{15.3}$$

Dodamo ji še indeksa, ki pripadata začetni in končni točki. Zaradi lastnosti integrala velja, da je $U_{21} = -U_{12}$. Električna napetost U_{12}, med točkama T_1 in T_2, je številsko enaka delu polja električnih sil pri premiku 1 C elektrine od točke T_1 do točke T_2.

In končno še: če v diferenci potencialov izberemo za T_1 splošno točko T, za T_2 pa točko v neskončnosti (T_∞), kjer je potencial nič, dobimo za potencial $V(T)$ integral

$$\boxed{V(T) = \int_{T}^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \tag{15.4}$$

Z vpeljavo potenciala V smo prišli do nove električne količine, ki je gotovo matematično enostavnejša, kot do sedaj poznana vektorska funkcija jakosti električnega polja $\mathbf{E}$. Obe količini povezuje zadnja enačba, ki nas preko integracije vodi od znanega polja $\mathbf{E}$ k potencialu; obratno pot si bomo ogledali kasneje. Vsaka količina po svoje omogoča določen vpogled v hipotetično možna dogajanja v okolici (porazdeljenih) elektrin. Informacije, ki jih ti količini ponujata, so zaenkrat še skromne (sila, izvornost, delo, potencialna energija), vendar se bo njuna izrazna moč od razdelka do razdelka krepila.

Zgled 15.1

Točkasta elektrina je geometrijsko najpreprostejša porazdelitev naboja. Postavimo jo v koordinatno izhodišče; množina elektrine naj bo enaka Q_0. Vsi diferenciali elektrine Q_0 so v izhodišču, zato je za vse njih $R = r$, kjer je r oddaljenost točke opazovanja od izhodišča (slika 11.1). Po izrazu za potencial prostorsko porazdeljenih elektrin (enačba 15.2) je iskan potencial $V(r) = Q_0/4\pi\varepsilon_0 r$. Potencial upada obratnosorazmerno z oddaljenostjo in je v neskončnosti enak nič.

Zgled 15.2

Za prstan (krožnico) polmera ρ_0, ki je naelektren z elektrino Q, smo v zgledu 11.3 ugotovili, da je polje $\mathbf{E}$ v osi prstana podano z enačbo $E_z = Qz/4\pi\varepsilon_0(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}$.

[2] Anglosaksonska literatura uporablja za el. napetost enak simbol kot za potencial; U_{12} se tam zapisuje kot V_{12}.

Odgovorimo sedaj, kako je potencial porazdeljen v osi; $V = V(z) = ?$ Uporabimo enačbo 15.3; za T_1 izberemo splošno točko T na osi s koordinato z, točka T_2 pa naj ustreza točki $T_\infty(z \to \infty)$, kjer je potencial (po definiciji) nič. Integrirajmo po osi Z – saj druge možnosti tudi nimamo –, kajti le tam poznamo polje $\mathbf{E}$; čeravno bi bile, po lastnosti krivuljnega integrala polja $\mathbf{E}$, enakopravne tudi druge poti. Splošno koordinato na intervalu $[z, \infty)$ označimo z z' in pišimo:

$$V(z) - \overbrace{V(\infty)}^{0} = \int_T^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}' = \int_z^\infty E_z \, dz' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_z^\infty \frac{z' \, dz'}{(\rho_0^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Dalje je

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + z'^2}} \right]_z^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\rho_0^2 + z^2}}$$

Koren v izrazu je oddaljenost točke (v osi) do oboda, kjer se nahaja elektrina. Do rezultata bi mogli priti tudi direktno, z integracijo (enačba 15.2):

$$V(z) = V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q_{\text{cel.}})} \frac{dQ(T')}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(Q/2\pi) \, d\varphi'}{\sqrt{\rho_0^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\rho_0^2 + z^2}}$$

♣ Funkcijska poteka $V(z)$ in $E_z(z)$ naj si bralec nariše kar sam. ♣

Zgled 15.3

Poglejmo, kaj je s potencialom v okolici krogelnega oblaka elektrin polmera r_0 z gostoto ρ, ki je podan v zgledu 12.3. Polje $\mathbf{E}$ je samo radialno, potencial v neskončnosti $(r \to \infty)$ je nič. Podobno prejšnjemu zgledu je

$$V(r) = \int_T^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}' = \int_r^\infty E_r \, dr'$$

Ker je funkcija E_r podana v dveh delih (notranjost, zunanjost), bomo tudi funkcijo potenciala pogledali ločeno za obe območji. Najprej zunanjost:

$$V(r) = \int_r^\infty \frac{r_0^3 \rho}{3\varepsilon_0 r'^2} \, dr' = \frac{r_0^3 \rho}{3\varepsilon_0 r} = \frac{Q(r_0)}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad r > r_0$$

Potencial v zunanjosti oblaka je takšen, kot da bi bila celotna elektrina oblaka združena v izhodišču v točkasti elektrini z elektrino $Q(r_0)$. Na površini oblaka je (potencial) $V(r_0) = Q(r_0)/4\pi\varepsilon_0 r_0$. Za notranjost oblaka bomo pisali:

$$V(r) - V(r_0) = \int_r^{r_0} \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0} \, dr' = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r_0^2 - r^2)$$

Potencial znotraj oblaka je

$$V(r) = \frac{\rho r_0^2}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \qquad r \le r_0$$

Očitno se izraza za potencial znotraj in zunaj oblaka na meji ujemata – potencial je zvezna funkcija. Pa tudi sicer velja zveznost potenciala. Potencial je krivuljni integral jakosti $\mathbf{E}$. Ker pa je (v stvarnih razmerah) $\mathbf{E}$ vedno absolutno navzgor omejena funkcija, in ker je integral omejene funkcije zvezna funkcija, je tudi potencial zvezna funkcija. ♣ Bralec naj si izriše funkcijska poteka $V(r)$ in $E_r(r)$. Ni tudi težko videti, da je $V(0)/V(r_0) = 1.5$. Potencial v centru je za 50% višji kot na robu oblaka. ♣

16. Električno polje v luči potenciala

Ekvipotencialne ploskve. Že ime je dovolj povedno. *Ekvipotencialna ploskev* je ploskev v prostoru, ki povezuje točke enakega potenciala. Kako je s tem pri našem potencialu? Električni potencial je v elektrostatiki funkcija koordinat u_1, u_2 in u_3; $V = V(u_1, u_2, u_3)$. Zanimala nas bo neka konkretna ekvipotencialna ploskev ("ekvipotencialka") s potencialom $V = C_1$ (C_1 je konstanta). Enačba je sedaj: $V(u_1, u_2, u_3) = C_1$. Tu so koordinate implicitno skrite v funkciji V. Če nam uspe izraziti eno od treh z ostalima dvema, dobimo npr. $u_3 = f(u_1, u_2, C_1)$. To pa je enačba ploskve, kjer je C_1 parameter te ploskve. Če si izbiramo za konstanto še (druge) vrednosti C_2, C_3, ..., dobimo nove ploskve v prostoru. Te se med seboj ne morejo sekati, saj je potencial zvezna in tudi enolična funkcija ter enoumno opredeljena s krivuljnim integralom vektorske funkcije; pa tudi njeno fizikalno ozadje (potencialna energija) ne dovoljuje takšnih "anomalij".

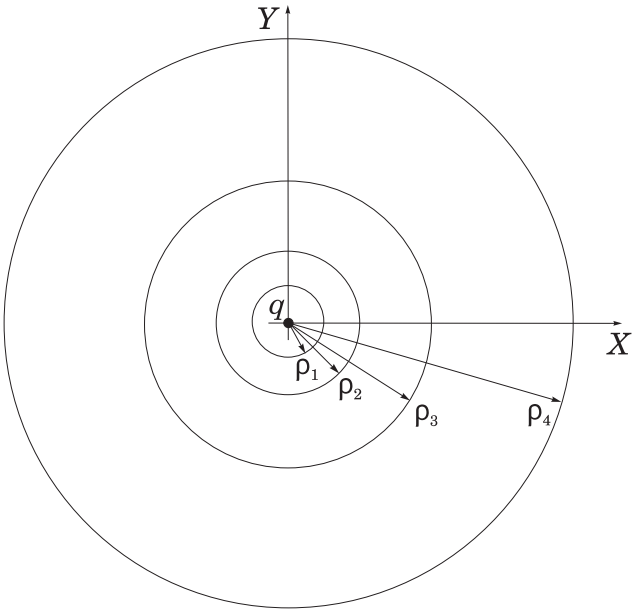
Vprašanje se postavi, kako te ploskve grafično predstaviti? Papir je dvodimenzionalen, ploskev pa se razteza v treh dimenzijah. Gotovo je potrebna določena spretnost, da te ploskve zadosti plastično upodobimo. Pomagamo si lahko tudi z ravninskimi preseki teh ploskev tako, da jih podajamo v več prereznih ravninah. Velikokrat pa nam pomaga že določena simetrija problema, kajti potencial postane le še funkcija dveh ali ene koordinate. Takšne grafične predstavitve ekvipotencialk so za papir razmeroma preproste. (Lep primer iz geodezije so izohipse – linije na zemljevidu, ki vežejo točke enake nadmorske višine.) Praviloma upodabljamo ekvipotencialke enakih potencialnih razlik (enakih medsebojnih napetosti). Iz slike ekvipotencialnih ploskev pa že moremo sklepati tudi na jakost polja $\mathbf{E}$. Tam, kjer ležijo ekvipotencialke bolj skupaj, bo polje $\mathbf{E}$ "močnejše" in obratno (enačba 15.3).

Zgled 16.1

Vzemimo naelektreno premico z vzdolžno elektrino q v osi Z (Zgled 11.2). Za naelektreno premico smo že povedali, da ni fizikalen, ampak le limitni primer, ki nam bo služil bolj v smislu matematičnega gradnika pri realnih primerih. Elektrine na premici je neskončno mnogo, pa tudi o potencialu v neskončnosti ne moremo reči nič fizikalno trdnega. Poglejmo si zato le napetost med radijema ρ_1 in ρ_2. Po enačbi 15.3 in izrazu za $E_\rho = q/2\pi\varepsilon_0\rho$ v omenjenem zgledu je

$$U_{12} = V(\rho_1) - V(\rho_2) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

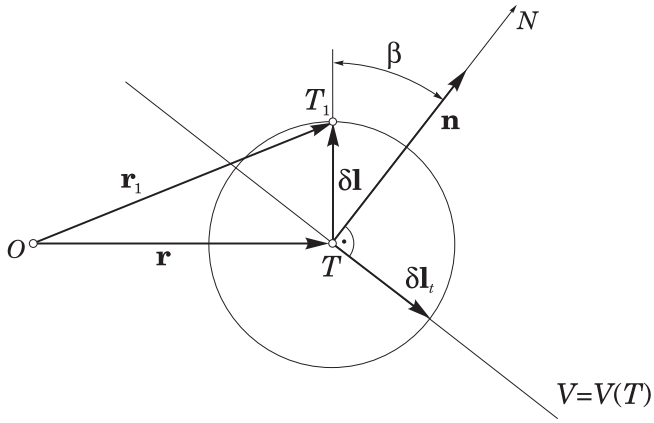
Očitno se potencial spreminja le v radialni smeri, saj je le tam $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ od nič različen. Ekvipotencialke bodo koncentrični valji. Ekvipotencialki $V(\rho_1)$ in $V(\rho_2)$ sta valja z radijema ρ_1 in ρ_2. Poiščimo tretjo, ki bo imela od druge napetost $U_{23} = q/2\pi\varepsilon_0\ln(\rho_3/\rho_2)$. Napetost U_{23} bo enaka U_{12}, če bo $\rho_3/\rho_2 = \rho_2/\rho_1$. Dalje bi za $U_{34} = U_{23}$ dobili: $\rho_4/\rho_3 = \rho_3/\rho_2$. Radiji razvidno tvorijo geometrijsko zaporedje. Na sliki 16.1 vidimo, da se z večanjem radija ekvipotencialke redčijo; to pomeni, da je $\mathbf{E}$ vse šibkejši, kar je tudi res. ♣ Bralec naj poišče in ponazori ekvipotencialke za točkasto elektrino, naelektreno ravnino, krogelni oblak elektrine in naelektreno krogelno lupino. ♣



Slika 16.1: Ekvipotencialne ploskve okrog preme elektrine.

Kako od potenciala V do polja E? Nakazali smo že, da moremo iz slike ekvipotencialk do neke mere sklepati na večji (manjši) iznos vektorja električne poljske jakosti. Tu bomo vprašanje razširili in se vprašali: kako iz funkcije potenciala najti vektorsko polje **E**? Ta odgovor bo, ko ga najdemo, zelo koristen, saj je računanje potenciala po enačbi 15.2 matematično lažje, kot računanje vektorske funkcije **E** po enačbi 11.2.

Vzemimo, da skalarno funkcijo potenciala $V(u_1, u_2, u_3)$ poznamo. Okvirno znamo skicirati tudi ekvipotencialke. Vzemimo si eno od njih in si na njej izberimo poljubno točko T; slika 16.2, (okolico točke si mislimo toliko povečano, da je ekvipotencialka videti tam kot ravna). Potencial ekvipotencialke je $V(T) = konst$. Izhajajmo iz enačbe 15.3 in



Slika 16.2: Odmik od ekvipotencialne ploskve.

jo zapišimo za točki T in T_1

$$V(T) - V(T_1) = \int_T^{T_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Pa vzemimo, da leži točka T_1 (s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_1$) zelo blizu točke T (s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$); loči naj ju kratek delček poti $\delta\mathbf{l} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$. Če je δl zelo kratek, tako kratek, da se polje $\mathbf{E}$ na tej poti praktično ne spremeni, moremo zgornjo enačbo pisati v približku kot

$$V(T) - V(T_1) = V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_1) = -(V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{l}) - V(\mathbf{r})) \doteq \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{l}$$

V oklepaju imamo diferenco med potencialom pri povečanem in potencialom pri izhodiščnem argumentu. Če je δl kratek, polje $\mathbf{E}$ pa omejeno, je (proporcionalno δl) majhna tudi diferenca potencialov. To diferenco bomo pisali kot δV, $\delta V = V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{l}) - V(\mathbf{r})$, ali dalje kot

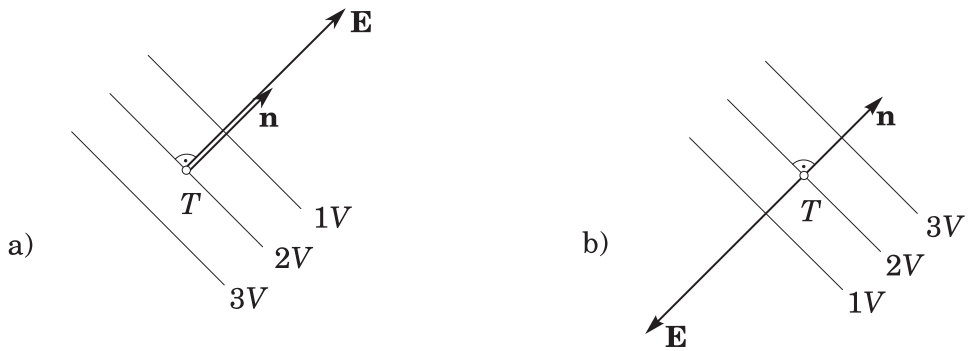
$$-\delta V \doteq \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{l}$$

Premik $\delta\mathbf{l}$ je tu zaenkrat povsem poljuben. Mislimo si, da lahko "pleše" po krogelni površini z radijem δl in središčem v T, δl pa je kakor hočemo majhen. V točki T se odločimo za enega od obeh možnih smernikov normale – izbrali smo narisanega. Pa vzemimo, da je $\delta\mathbf{l} = \delta\mathbf{l}_t$ – tangencialni premik. Pri tem ostajamo na ekvipotencialki, zato je $\delta V = 0$. Sledi: $\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{l}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{E} \perp \delta\mathbf{l}_t$ (če je le $E \neq 0$; ta pa je takšen, če ne drugje, vsaj tam, kjer polje je in nas zato zanima). Slednje pomeni, da vektor $\mathbf{E}$ stoji pravokotno na ekvipotencialki, torej ima tam le normalno smer, kar zapišemo: $\mathbf{E} = \mathbf{n}E_n$ in je E_n projekcija vektorja $\mathbf{E}$ na smernik normale ($\mathbf{n}$). Za splošen premik $\delta\mathbf{l}$ moremo pisati: $-\delta V \doteq E_n\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{l} = E_n\delta l \cos\beta$. Pri $\beta = 0$ bo δl enak delčku premika δn v smeri normale, zato bo $E_n \doteq -\delta V/\delta n$. Vidimo, da je normalna komponenta E_n enaka upadku spremembe potenciala v smeri normale. V limiti, ko gre $\delta n \to 0$, pišemo:

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{n}E_n = -\mathbf{n} \lim_{\delta n \to 0} \frac{\delta V}{\delta n} = -\mathbf{n}\frac{\partial V}{\partial n}} \tag{16.1}$$

Zgled 16.2

Vzemimo preprosto družino ekvipotencialk. Naj so to kar ekvipotencialne ravnine, slika 16.3. Potencialna razlika bodi 1 V, med seboj pa naj so oddaljene 0.5 mm. V



Slika 16.3: Polje $\mathbf{E}$ v homogenem polju.

obeh primerih narišemo v označeni točki T normalo $\mathbf{n}$. Potencial v smeri normale linearno upada, skica a), oz. narašča, skica b), zato lahko odvod zamenjamo s kvocientom (končnih) diferenc. V primeru a) je $\partial V/\partial n = (1-3)/10^{-3} = -2000$ V/m, v primeru b) pa je $\partial V/\partial n = (3-1)/10^{-3} = 2000$ V/m. Vektor $\mathbf{E}$ je (po enačbi

16.1) v primeru a) v smeri normale, v primeru b) je v obratni smeri, vsakokrat pa kaže v smeri upadanja potenciala.

Seveda je izraz 16.1 zelo splošen – nevezan na katerikoli k.s. Ker pa se pri zapisu skalarnih in vektorskih količin v prostoru opiramo na njih, bi kazalo omenjeno povezavo razširiti tudi v tej smeri. Pričnimo s kartezijevim k.s. Vektor $\mathbf{E}$ ima v splošnem vse tri komponente: $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$. Poiščimo vsako zase. V približku $-\delta V \doteq \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{l}$ bodi $\delta\mathbf{l} = (\delta x, 0, 0)$; v smeri X osi se pomaknemo za δx, pa dobimo:

$$-\delta V = (E_x, E_y, E_z) \cdot (\delta x, 0, 0) = E_x \delta x$$

Izrazimo E_x in kvocient limitirajmo ($\delta x \to 0$); dobimo:

$$E_x = -\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta V}{\delta x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Odvod je parcialen pač zato, ker se koordinati y in z ob limitiranju ne spreminjata. Podobno dobimo še: $E_y = -\partial V/\partial y$ in $E_z = -\partial V/\partial z$. Končno je vektor jakosti

$$\boxed{\mathbf{E} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right)} \tag{16.1a}$$

V tej obliki pa je pot od potenciala V do jakosti $\mathbf{E}$ sila preprosta: funkcijo potenciala je potrebno le še parcialno odvajati po posameznih koordinatah[1].

Zgled 16.3

Naj je potencial podan s funkcijo $V(x, y, z) = 3x - 2y + 4z - 5$. Enačbe ekvipotencialk nam dajo družino vzporednih ravnin. Komponente polja so: $E_x = -\partial V/\partial x = -3$, $E_y = -\partial V/\partial y = 2$, $E_z = -\partial V/\partial z = -4$ in $\mathbf{E} = (-3, 2, -4)$. Polje $\mathbf{E}$ je homogeno z jakostjo $E = \sqrt{29}$ V/m, smernik polja je $\mathbf{E}/E$. Potencialni povzročitelj takšnega polja je lahko naelektrena ravnina, ki bi ležala vzporedno k družini ekvipotencialnih ploskev in bi imela ploskovno gostoto $\sigma = 2\varepsilon_0 E = 95.23$ pC/m^2 (Zgled 11.4).

Enačbo 16.1 je potrebno prirediti še za primer, ko je potencial izražen v kakšnem drugem k.s. V matematičnem uvodu smo spoznali metrične oz. Laméjeve koeficiente. Kratek premik v smeri ene od koordinatnih osi moremo zapisati s produktom $\mathbf{e}_i h_i \delta u_i$, kjer je $\mathbf{e}_i$ smernik, h_i je metrični koeficient in δu_i je majna sprememba koordinate u_i. Upadek potenciala pišemo v tem primeru kot

$$-\delta V \doteq \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{l} = E_i h_i \, \delta u_i$$

Komponento E_i dobimo z limitiranjem $\delta u_i \to 0$,

$$E_i = -\lim_{\delta u_i \to 0} \frac{1}{h_i} \frac{\delta V}{\delta u_i} = -\frac{1}{h_i} \frac{\partial V}{\partial u_i}$$

[1] Odnos med vektorskim in skalarnim poljem, kot ga kaže enačba 16.1a (ali 16.1), je v matematiki opredeljen z *gradientom*. Zapiše se ga tudi z nabla operatorjem: $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\, V = -\boldsymbol{\nabla} V$.

V valjnem k.s. bo

$$\boxed{\mathbf{E} = \left(-\frac{\partial V}{\partial \rho},\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi},\ -\frac{\partial V}{\partial z}\right)} \tag{16.1b}$$

v krogelnem k.s. pa bo

$$\boxed{\mathbf{E} = \left(-\frac{\partial V}{\partial r},\ -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta},\ -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)} \tag{16.1c}$$

V slednjih dveh izražavah se poleg odvodov pojavijo tudi metrični koeficienti pripadajočega k.s. Pripomnimo še: če potencial ni funkcija določene koordinate, potem ima vektor **E** komponento te koordinate enako nič (ustrezen odvod je nič).

Zgled 16.4

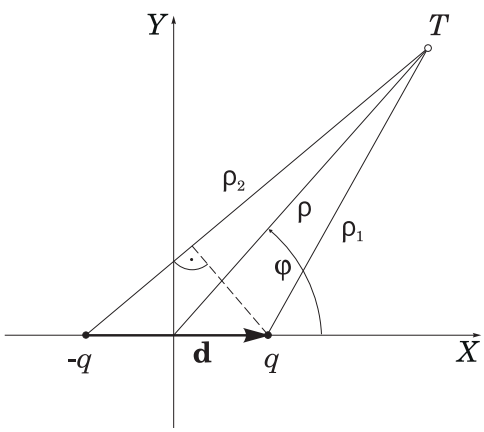
Poglejmo še enkrat premo elektrino q (zgleda 11.2 in 16.1). Polje **E** ima radialno smer; potencial bo le funkcija radija ρ, zato parcialni odvod v 16.1b zamenjamo z navadnim. Pišemo: $E_\rho = -dV/d\rho = q/2\pi\varepsilon_0\rho$ ali $dV = -qd\rho/2\pi\varepsilon_0\rho$. Nedoločen integral da

$$V(\rho) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{\rho} + C$$

Napetost med radijema ρ_1 in ρ_2 je $U_{12} = V(\rho_1) - V(\rho_2) = (q/2\pi\varepsilon_0)\ln(\rho_2/\rho_1)$, kar smo v zgledu 16.1 že imeli. Funkcija potenciala se v okolici preme elektrine "pokorava" logaritemski zakonitosti. Konstante C – iz že omenjenih razlogov – fizikalno ne moremo opredeliti.

Zgled 16.5

Poglejmo si primer premih elektrin $q_1 = q$ in $q_2 = -q$, ki ju simetrično položimo v k.s.; slika 16.4. Distančni vektor med njima označimo z **d** in ga orientirajmo od



Slika 16.4: Premi dipol.

negativne k pozitivni elektrini. Princip superpozicije potenciala moremo uporabiti

enako kot pri vektorju $\mathbf{E}$, saj sta V in $\mathbf{E}$ povezana z odvodom oz. integralom; velja, da je integral (odvod) vsote enak vsoti integralov (odvodov). Zato je

$$V(T) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{\rho_1} + C_1 + \frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{\rho_2} + C_2$$

Upoštevamo predznak elektrin in konstanti združimo

$$V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C$$

Opazovan primer ima že nekatere atribute praktičnega značaja, čeravno – zaradi naelektrenih premic – še ne povsem. Pa vendar, moremo si misliti, da sta omenjeni dve elektrini ($\pm q$) na tankih žicah. Žici tvorita dvovod in funkcija $V(T)$ podaja porazdelitev potenciala v okolici. Sistem je tudi t.i. električno zaključen; količina $(+)$ in $(-)$ elektrin je uravnotežena, kar je osnovno načelo. Priznati je potrebno, da smo v dosedanjih zgledih imeli primere neuravnoteženih sistemov, ali drugače: elektrine nasprotnega znaka (naj) so bile toliko oddaljene od lokalnih dogajanj, da je bil njihov vpliv vreden zanemaritve[2].

Povsem korektno je, če zahtevamo, da se izraz za $V(T)$ v neskončni okolici pokorava principu nične potencialne energije; torej $V(T \to \infty) \to 0$. Če je točka T daleč, sta ρ_1 in ρ_2 praktično enaka, njun kvocient je ena in $\ln 1 = 0$, zato mora biti $C = 0$. Končno je

$$V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

V desni polravnini ($x > 0$) je $\rho_2 > \rho_1$, zato je $V > 0$, v levi polravnini je potencial "zrcalno" negativen; simetralna ravnina ($x = 0$ ali $\rho_1 = \rho_2$) ima potencial nič. ♣ Bralec naj z vektorskim seštevkom jakosti polja obeh elektrin ugotovi, da je na $x = 0$ vektor $\mathbf{E}$ pravokoten na ekvipotencialko $V = 0$. Glede na izraz za $V(T)$ je očitno, da bo družina ekvipotencialk opredeljena z enačbo $\rho_2/\rho_1 = k$ (konstanta); družino ekvipotencialk more bralec najti z uporabo srednješolske geometrije. ♣

Zanimivo je tudi polje daleč stran od dvovoda ($\rho \gg d$). Za $\ln(\rho_2/\rho_1)$ pišemo $\ln(1 + (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1)$ in uporabimo približka: $\rho_2 - \rho_1 \doteq d\cos\varphi$ in $\rho_1 \doteq \rho$. Potencial je

$$V(T) \doteq \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left(1 + \frac{d\cos\varphi}{\rho}\right)$$

Argument logaritma ima obliko $(1 + t)$, kjer je $|t| \ll 1$. Vzemimo funkcijo $w(t) = \ln(1 + t)$. Pri $|t| \ll 1$ moremo pisati: $w(t) - w(0) \doteq w'(0)t$; $w'(0) = 1$ in $w(t) \doteq t$. S tem je potencial

$$V(T) \doteq \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

Dve relativno blizu ležeči premi elektrini nasprotnih znakov imenujemo tudi *premi dipol*. Produktu qd rečemo *moment premega dipola*, ki je definiran kot vektor; $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$. V limitnem primeru, ko bi šel $d \to 0$, moment pa bi z večanjem q ohranjali konstanten, bi dobili:

$$V_{\text{dip.}}(T) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

[2]Na te pomisleke bomo našli tehnično in fizikalno korektne odgovore, ko bomo v obravnavo vpletli tudi Zemljo, to pa bomo razumeli kot lokalno ravno prevodno podlago.

Enačba ekvipotencialk je $\cos\varphi/\rho = K$ (konstanta). To so krogi (valji vzdolž Z-osi), ki imajo središča na osi X pri $K/2$, radije pa enake $|K|/2$. Po izrazu 16.1b določimo še komponente polja $\mathbf{E}$:

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{p\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0\rho^2} \qquad E_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{p\sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0\rho^2} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Zanimivo pri tem je, da je absolutna jakost ($E = p/2\pi\varepsilon_0\rho^2$) konstantna v točkah, ki so enako oddaljene od dipola. ♣ V nekaj točkah (na radiju ρ) naj si bralec skicira vektor $\mathbf{E}$. ♣

17. Točkasti dipol

Električni moment. Neposredno v zvezi s porazdelitveno funkcijo elektrin (ρ) je še ena količina in sicer t.i. *električni moment* $\mathbf{p}$. V izbranem k.s. pripada diferencialu elektrine $dQ(T) = \rho(T)\,dv$ (v točki T) krajevni vektor $\mathbf{r}$. Diferencial električnega momenta ($d\mathbf{p}$) je definiran s produktom $\mathbf{r}\,dQ(T)$, celoten električni moment pa kot integral po območju elektrin,

$$\boxed{\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho\mathbf{r}\,dv} \tag{17.1}$$

Podintegralsko funkcijo imenujemo *prostorska gostota električnega momenta* in jo označujemo s $\mathbf{P}$ (enote so C/m^2)

$$\boxed{\mathbf{P} = \rho\mathbf{r}} \tag{17.2}$$

Danemu končnemu naboru točkastih elektrin $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, ki se nahajajo v točkah s krajevnimi vektorji $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_n$, bi v smislu enačbe 17.1 pripadal električni moment

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\mathbf{r}_i$$

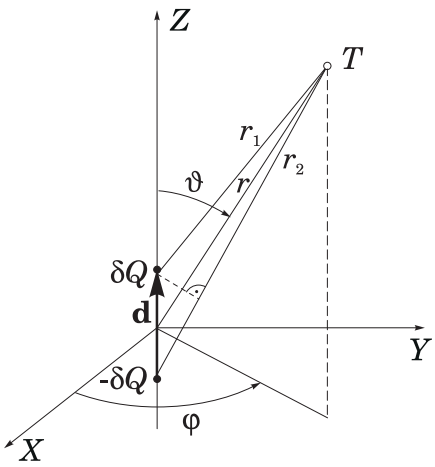
Točkasti dipol. V nadaljevanju bomo srečevali t.i. *točkasti dipol*, ki ga tvori par enakih in raznoimenskih elektrinic ($\delta Q_1 = \delta Q$ in $\delta Q_2 = -\delta Q$), ki sta si sorazmerno blizu. Njima pripadajoč *dipolski moment* bi bil: $\delta\mathbf{p} = \delta Q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta Q\mathbf{d}$, kjer je $\mathbf{d}$ distančni vektor, ki leži med $-\delta Q$ in δQ.

Vprašajmo se po elektrostatičnem polju takšnega dipola. Koordinatni sistem postavimo simetrično med ($\pm$) elektrini tako, da bo vektor $\mathbf{d}$ v osi Z; slika 17.1. Simetrija po kotu φ je očitna. Potencial točkaste elektrine iz zgleda 15.1 že poznamo. Prispevka obeh elektrin seštejemo, pa dobimo

$$\delta V(T) = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Če je $d \ll r$, moremo pisati: $r_2 - r_1 \doteq d\cos\vartheta$ in $r_1 r_2 \doteq r^2$. S tem je

$$\delta V(T) \doteq \frac{\delta Q d}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta}{r^2}$$



Slika 17.1: Točkasti dipol.

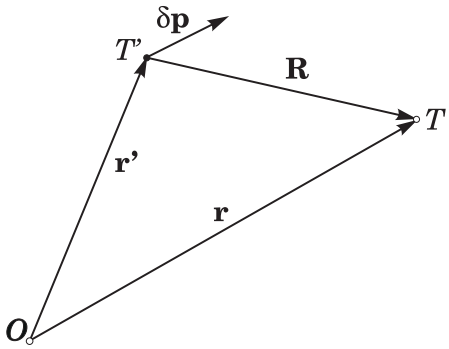
V limiti, ko je d "fizično kratek", rečemo, da je $\delta\mathbf{p}$ dipolski moment točkastega dipola (v točki). Potencial je

$$\delta V(T) = \frac{\delta p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

Če odvajamo po koordinatah, v smislu izraza 16.1c, dobimo polje $\delta\mathbf{E}$:

$$\delta E_r = -\frac{\partial\delta V}{\partial r} = \frac{\delta p\cos\vartheta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \delta E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\delta V}{\partial\vartheta} = \frac{\delta p\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \delta E_\varphi = 0$$

Posplošimo izraz za potencial točkastega dipola, ki ima moment $\delta\mathbf{p}$ in se nahaja v splošni točki T'; slika 17.2. Produkt $\delta p\cos\vartheta$ (v prejšnjem izrazu) ustreza – v geometri-



Slika 17.2: Točkasti dipol v splošni točki.

jskem smislu skalarnega produkta – izrazu $\delta\mathbf{p}\cdot(\mathbf{R}/R)$. Potencial dipola bo

$$\boxed{\delta V_{\text{dip.}}(T) = \frac{\delta\mathbf{p}(T')\cdot\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}} \tag{17.3}$$

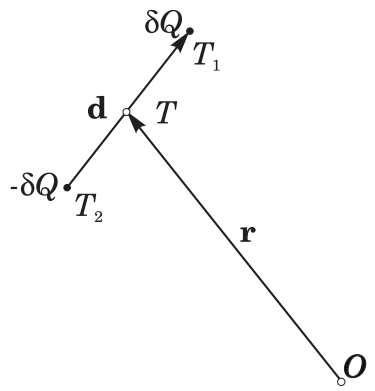
V naravi so molekule (vode, alkohola, ...), katerih zgradba izraža dipolski značaj. V molekuli vode (H_2O) oklepata jedri vodika z jedrom kisika kot 104°. Elektrona vodika

postaneta skupna tudi kisiku, kar ima za posledico, da težišči (+) in (−) nabojev molekule ne sovpadata; (±) naboji molekule tvorijo dipolski moment, katerega smer razpolavlja kot 104° v trikotniku HOH. Dipolski moment molekule vode je $1.9 \cdot 10^{-29}$ Cm. Seveda so te molekule v prostoru kaotično orientirane in nimajo rezultančnega polja. Stanje pa se spremeni, če se takšne molekule nahajajo v kakem zunanjem polju; pride namreč do polarizacije (usmerjanja) molekul, vendar o tem kasneje (razdelek 19).

Sile na točkasti dipol. Vzemimo elektrostatično vektorsko polje $\mathbf{E}$ s pripadajočim električnim potencialom V. Zanimala nas bo električna sila na točkasti dipol, ki bi se "znašel" (nahajal) v takšnem polju. Ker pa je točkasti dipol "združba" dveh točkastih elektrin različnega predznaka, si osvežimo najprej primer ene same točkaste elektrine (δQ) v znanem polju.

V polju deluje nanjo sila $\delta Q\mathbf{E}$. Če je $\delta Q > 0$, je sila v smeri polja, v smeri upadanja potenciala oz. v smeri upadanja potencialne energije elektrine δQ; v nasprotnem, ko je $\delta Q < 0$, kaže sila v nasprotni smeri polja $\mathbf{E}$, v smeri priraščanja potenciala, in dalje (zaradi $\delta Q < 0$), v smeri upadanja potencialne energije elektrine δQ. V obeh primerih je elektrini δQ intencija, gibati se v smeri zmanjševanja potencialne energije.

Pri točkastem dipolu pa sklepanje ni tako preprosto. Na dipol deluje namreč dvojica sil, ki lahko togi dipol zavrti ali pa ga translatorno premakne. Začnimo z rotacijo; slika 17.3. Sili na elektrini sta $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}1} = \delta Q\mathbf{E}(T_1)$ in $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}2} = -\delta Q\mathbf{E}(T_2)$ ter tvorita na ročicah



Slika 17.3: Točkasti dipol v električnem polju.

$\pm\mathbf{d}/2$ navor $\delta\mathbf{M}_{\mathrm{e}}$ okrog točke T:

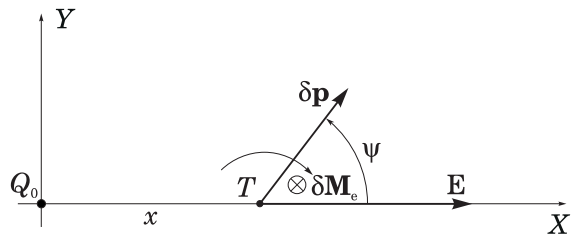
$$\delta\mathbf{M}_{\mathrm{e}} = \frac{\mathbf{d}}{2} \times \delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}1} + \left(-\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \times \delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}2} = \frac{\delta Q\mathbf{d}}{2} \times (\mathbf{E}(T_1) + \mathbf{E}(T_2))$$

Pri kratki distanci d je $\mathbf{E}(T_1) + \mathbf{E}(T_2) \doteq 2\mathbf{E}(T)$. Navor na točkasti dipol z momentom $\delta\mathbf{p} = \delta Q\mathbf{d}$ je:

$$\boxed{\delta\mathbf{M}_{\mathrm{e}} = \delta\mathbf{p} \times \mathbf{E}} \tag{17.4}$$

Zgled 17.1

Imejmo v koordinatnem izhodišču točkasto elektrino Q_0 (Zgled 11.1). V točki T s koordinatami $(x,\ 0,\ 0)$ naj se nahaja točkasti dipol z momentom $\delta\mathbf{p} = (\delta p_x,\ \delta p_y,\ 0) =$



Slika 17.4: Zasuk dipola v električnem polju.

$(\cos\psi,\ \sin\psi,\ 0)\delta p$; slika 17.4. V tej točki ima električna poljska jakost od nič različno le x-komponento: $E_x = Q_0/4\pi\varepsilon_0 x^2$. Po vektorskem množenju dobimo navor $\delta\mathbf{M}_\mathrm{e}$ z z-komponento,

$$\delta M_{\mathrm{e}z} = -\frac{\delta p_y Q_0}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = -\frac{\delta p Q_0}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\sin\psi$$

Na sliki je s puščico nakazana smer, v katero bi se ta dipol zavrtel. Ravnovesna lega dipola bi bila v smeri polja; ko je $\delta\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$. Pozitivna elektrina dipola bi se pomaknila najdlje v smeri polja, negativna elektrina pa najdlje v nasprotni smeri polja. Obema bi se potencialna energija zmanjšala, s tem pa bi se zmanjšala tudi potencialna energija celotnega dipola. Zaključimo lahko, da se bo dipol v električnem polju zasukal tako, da bo njegova potencialna energija najmanjša. ♣ Bralec naj ugotovi, za koliko se zmanjša potencialna energija dipola, če se ta iz narisane lege postavi v horizontalni položaj. ♣

Poleg rotacije (dipola) pa je možen tudi translatoren premik. Rezultirajoča sila $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}$ je $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}1}+\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}2} = \delta Q(\mathbf{E}(T_1)-\mathbf{E}(T_2))$. Vprašanje se postavi, kako silo $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}$ izraziti z momentom dipola in poljem $\mathbf{E}(T)$ v centru dipola. Če so točke T, T_1 in T_2 blizu (d majhen), je

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} \doteq 2\delta Q(\mathbf{E}(T_1) - \mathbf{E}(T)) \doteq 2\delta Q(\mathbf{E}(T) - \mathbf{E}(T_2))$$

Pri tem bo x-komponenta sile izražena kot

$$\delta F_{\mathrm{e}x} \doteq 2\delta Q(E_x(T_1) - E_x(T)) = 2\delta Q(E_x(\mathbf{r}+\mathbf{d}/2) - E_x(\mathbf{r}))$$

Povsem podobno diferenco smo srečali v prejšnjem razdelku pri potencialu. Upoštevaje enačbo 16.1a bi tamkajšnjo diferenco δV pisali: $V(\mathbf{r}+\delta\mathbf{l})-V(\mathbf{r}) \doteq -\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{l} = (\partial V/\partial x)\,\delta x + (\partial V/\partial y)\,\delta y + (\partial V/\partial z)\,\delta z$. Če pa ta zapis smiselno uporabimo pri diferenci komponente E_x, in $\delta\mathbf{l}$ zamenjamo z $\mathbf{d}/2$, dobimo:

$$\delta F_{\mathrm{e}x} \doteq 2\delta Q(E_x(\mathbf{r}+\mathbf{d}/2) - E_x(\mathbf{r})) \doteq \delta Q\, d_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + \delta Q\, d_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + \delta Q\, d_z\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

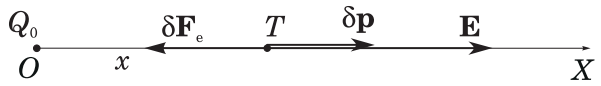
Sorodno pridemo tudi do komponent $\delta F_{\mathrm{e}y}$ in $\delta F_{\mathrm{e}z}$. Če sedaj komponente sil vektorsko

združimo in za $\delta Q\mathbf{d}$ pišemo moment $\delta\mathbf{p} = (\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z)$, dobimo[1] silo

$$\boxed{\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} = \left(\delta p_x \frac{\partial}{\partial x} + \delta p_y \frac{\partial}{\partial y} + \delta p_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{E}} \tag{17.5}$$

Zgled 17.2

Vzemimo kar prejšnji zgled, le da moment $\delta\mathbf{p}$ usmerimo v X smeri; $\delta\mathbf{p} = (\delta p_x, 0, 0)$ – tako torej, kot bi se ta zaradi navora $\delta\mathbf{M}_\mathrm{e}$ postavil; slika 17.5. Po izrazu 17.5 bo



Slika 17.5: Premik dipola v električnem polju.

sila imela le x-komponento,

$$\delta F_{\mathrm{e}x} = \delta p_x \frac{dE_x}{dx} = -\frac{\delta p_x Q_0}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$$

Če je $Q_0 \delta p_x > 0$, se bo dipol gibal k točkasti elektrini Q_0. Tako kot so razmere narisane na sliki, leži $-\delta Q$ elektrina dipola levo, δQ elektrina dipola pa desno od točke T. Pri gibanju v levo se potencialna energija $(-)$ elektrine dipola manjša hitreje, kot pa se veča potencialna energija $(+)$ elektrine dipola, saj je $(-)$ elektrina bližje Q_0. Spet moremo zaključiti: pri translatornem premikanju se bo točkasti dipol gibal v smeri zmanjševanja njegove potencialne energije. Ni težko videti, da translacije v homogenem polju ne more biti – možna je le rotacija.

Potencialna energija dipola. Za zaključek si oglejmo še potencialno energijo točkastega dipola v električnem polju. Če se $(+)$ elektrina dipola nahaja v točki T_1, $(-)$ elektrina pa v točki T_2, potem je potencialna energija dipola enaka vsoti potencialnih energij obeh elektrin: $\delta W_{\text{ep dipola}} = \delta Q V(T_1) - \delta Q V(T_2)$. Po enačbi 15.3 moremo diferenco potencialov izraziti s približkom $V(T_1) - V(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \doteq \mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$. Za potencialno energijo dobimo

$$\boxed{\delta W_{\text{ep dipola}} = -\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}} \tag{17.6}$$

Ker pa smo spoznali, da delujejo električne sile v avtonomnih sistemih elektrin vedno v smislu zmanjšanja potencialne energije, moremo silo na elektrino ali dipol razlagati z upadkom potencialne energije. V kartezijevem k.s. bi to zapisali kot

$$\boxed{\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} = \left(-\frac{\partial \delta W_{\text{ep dipola}}}{\partial x}, -\frac{\partial \delta W_{\text{ep dipola}}}{\partial y}, -\frac{\partial \delta W_{\text{ep dipola}}}{\partial z}\right)} \tag{17.7}$$

[1] Z nabla operatorjem bi zgornje zapisali kot

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} = (\delta\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}$$

in podobno (kot z enačbami 16.1) tudi v ostalih k.s.

Vsa vprašanja v tem razdelku moremo strniti v ugotovitev: če imamo nek avtonomen sistem elektrin (brez zunanjih dejavnikov), potem se elektrine oz. togi elektrinski pari, ki se morejo gibati, premaknejo v polju tako, da se jim potencialna energija zmanjša.

18. Prevodnik v elektrostatičnem polju

Do tega razdelka smo se nekako "spretno izmikali" omenjati prevodnik, čeravno bi večino primerov, ki smo jih v zgledih matematično obdelali, vsaj fizično – brez prevodnika – ne mogli realizirati. Poudarjali smo, naj bo prstan tanek, žica tanka, plošča tanka, krogla majhna itn. S tem smo se zavestno izognili vprašanjem, kaj je v žici, v prstanu, v plošči, v krogli. Omejili smo se le na podatek, da tam nek presežek elektrine je. Skozi ves dosedanji uvodni del smo si pripravili toliko matematičnih pomagal in spoznali kar nekaj fundamentalnih zakonitosti elektrostatičnega (Coulombovega) polja, s pomočjo katerih bomo brez posebno mučnih izvajanj – bolj z razmišljanjem in deduktivnim sklepanjem – opredelili mesto in vlogo prevodnika v elektrostatičnem polju.

Prevodnik more pri kreiranju elektrostatičnega polja sodelovati v vlogi nosilca presežene elektrine ali pa kot električno nevtralno telo (brez presežne, sumarne elektrine). V obeh primerih je obnašanje prevodnika enako in pogojeno z električnimi prevodnostnimi lastnostmi mikroskopske atomarne zgradbe.

Tipično za električno prevodne snovi je, da so elektroni na zadnji "lupini" energijsko šibko vezani na jedro in se morejo prosteje gibati v medatomarnem "svetu" – so brez matičnega atoma. Rečemo, da so energijsko v t.i. *prevodnem pasu*. Vemo tudi, da se količina elektronov v prevodnem pasu s temperaturo povečuje, z zniževanjem te – proti absolutni ničli (0 K) – pa nabor elektronov "plahni". Reprezentanti dobrih prevodnikov so kovine: srebro, baker, zlato, aluminij, živo srebro, železo itn. Konec koncev je vsaka snov boljši ali slabši prevodnik. Silicij in germanij sta v čisti obliki zelo slaba prevodnika, pridobita pa prevodniške lastnosti z dodatkom akceptorskih ali donatorskih primesi. Elektroliti disociirajo in postanejo prevodni. Destilirana voda je slab prevodnik, boljša je voda (zaradi nečistoč), še ugodnejša je morska voda; prevodnost ji namreč povečujejo natrijevi in klorovi ioni. Plini so izolatorji, dokler ne ionizirajo (fluorescentne cevi), zrak je že skoraj izolator, čeprav pri visokih električnih poljskih jakostih tudi ionizira in začne prevajati (znan je pojav korone ob daljnovodnih vrveh – presketanje). Odličen izolator bi sicer bil vakuum, vendar se temu idealu že precej dobro približajo razne gume, smole, plastike, keramike itd.

No, o izolacijskih snoveh ter o njihovem mestu in vlogi v elektrostatičnem polju bo tekla beseda v naslednjem razdelku, tu pa se zaenkrat omejimo na dobre prevodnike – v mislih bomo največkrat imeli kovinska telesa.

Prevodno telo v elektrostatičnem polju. Za začetni razmislek vzemimo, da imamo na voljo neko primarno električno polje $\mathbf{E}_0$, ki ga generirajo (povzročajo) dane elektrine v prostoru. To polje okvirno znamo izračunati v vsaki točki prostora. Na voljo imamo direktno, integracijsko pot, preko enačbe 11.2, ali pa posredno, preko potenciala V_0 (integracija po enačbi 15.2) in odvajanja (enačba 16.1). Poznamo tudi zakonitosti tega polja. V "neskončnosti" – daleč stran od elektrin, ki to polje povzročajo – sta tako potencial V_0

kot pripadajoča poljska jakost $\mathbf{E}_0$ enaka nič.

Vzemimo, da iz te zelo oddaljene okolice "prinesemo" na določeno mesto v polju neko poljubno oblikovano prevodno telo s presežno elektrino Q. Pričakujemo lahko, da se ob vnašanju prevodnika v polje odvijajo v prostoru določene spremembe prvotnega stanja, ki ga pooseblja polji V_0 in $\mathbf{E}_0$. "V en dah" seveda teh dogajanj (pojavov) ne moremo ne omeniti ne ustrezno opisati, bomo pa to prej ko slej storili. Vzemimo, da se po končanem gibalnem procesu vzpostavi novo stanje, ki ga bosta pooseblja polji V in $\mathbf{E}$. Seveda je takoj pri roki vprašanje: kako hitro se novo stanje vzpostavi (stabilizira)? Ustreznega odgovora ta trenutek ne moremo dati; povemo lahko le to, da so časi prilagoditve na novo stanje reda velikosti t.i. *relaksacijskega časa*, ki je pri kovinah okrog 10^{-19} s, in da je ta čas pogojen z dinamiko odzivanja oblaka prostih elektronov na zunanje polje; o tem bomo lahko kaj več spregovorili v poglavju o tokovnem polju (razdelek 31). S tehničnega vidika moremo reči, da je vzpostavitev novega polja (V, $\mathbf{E}$) hipna, v "trenutku". Glavno vprašanje je: kakšno je to novo polje oz., kako je to novo polje determinirano s prisotnostjo prevodnega telesa?

Osrednji odgovor tiči v opredelitvi statusa polja v prevodniku. Če je novo polje časovno ustaljeno, potem se proste $(-)$ elektrine v prevodniku makroskopsko ne premikajo več, makroskopsko mirujejo, in če se ne gibljejo, nanje ne deluje Coulombova sila. To pomeni, da je električna poljska jakost v celotnem prevodniku nična oz. enaka nič. To je zelo pomembna in ključna ugotovitev – je kratkomalo aksiom oz. postulat v elektrostatičnih poljih –, in je(ga) tudi matematično eksplicitno ne moremo izvesti. Moremo pa njegovo veljavnost potrditi posredno z eksperimentom ali miselno.

Uporabimo pot protislovja. Vzemimo, da polje v prevodniku ni nično – ima določeno krajevno porazdelitev. To polje bi izzvalo neko urejeno gibanje prostih elektronov, električni tok, in po Joulovem zakonu bi se prevodno telo grelo (v njem bi se sproščala toplota). Ker pa se v elektrostatiki naelektrena telesa v mirovanju ne segrevajo, sledi, da je polje nično. Ali še drugače. Če bi polje v prevodniku eksistiralo, bi obstajala tudi neka porazdelitev električnega potenciala, ki bi se znotraj telesa spreminjala od neke najvišje do neke najnižje vrednosti. Proste $(-)$ elektrine bi imele intencijo zavzeti najmanjšo potencialno energijo. Po kontinuitetni enačbi za elektrine (enačba 7.3), bi to izzvalo brezmejno (neomejeno) kopičenje $(-)$ elektrine ob mestu najvišjega potenciala, kar je spet nefizikalno. Torej spet: polje v prevodniku mora biti nično.

Ta krajši uvod moremo zaključiti s postulatom:

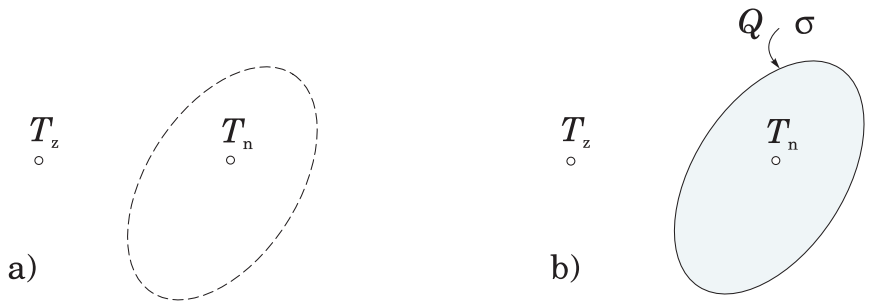
$$\boxed{\text{v elektrostatiki je } \mathbf{E} \text{ v prevodniku enak } \textbf{nič}} \tag{18.1}$$

ali

$$\boxed{E_{\text{v prevodniku}} = 0} \tag{18.1a}$$

Iz tega aksioma moremo – s pomočjo že povedanega o elektrostatičnem polju – izvesti vrsto zelo uporabnih ugotovitev, relacij in zaključkov, ki se tičejo prevodnika v elektrostatičnem polju. Pojdimo po vrsti.

1) Izberimo si dve točki. Točka T_z naj je zunanja točka in T_n bodi notranja točka; slika 18.1. Skica a) nakazuje mesto, kamor kasneje postavimo prevodnik; skica b). Prvotno je v teh dveh točkah polje $\mathbf{E}_0(T_\mathrm{z})$ in $\mathbf{E}_0(T_\mathrm{n})$. Po vnosu prevodnika pa je v teh točkah novo



Slika 18.1: Vnos prevodnika v elektrostatično polje.

polje $\mathbf{E}(T_z)$ in $\mathbf{E}(T_n)$. Po enačbi 18.1 je

$$E(T_n) = 0 \tag{$E1$}$$

2) Če uporabimo Gaussov stavek (enačba 12.1) za sklenjeno ploskev, ki je izključno znotraj prevodnika, potem je – zaradi ničnosti polja v prevodniku – pretok vektorja $\mathbf{E}$ skozi to ploskev vedno nič, kar pomeni, da znotraj te ploskve ni presežne elektrine. Ker pa je ta ploskev splošna (velika ali majhna), je v vsakem fizično majhnem volumnu vzpostavljeno elektrinsko ravnotežje. Makroskopska prostorska gostota elektrine v prevodniku je nič,

$$\rho(T_n) = 0 \tag{$E2$}$$

3) Presežna elektrina (Q) prevodnega telesa je zato izključno le na(ob) površini telesa v limitni ploskovni elektrini s porazdelitvijo σ in velja

$$Q = \int_{\mathcal{A}_{\text{telesa}}} \sigma \, da \tag{$E3$}$$

Če je prevodno telo električno nevtralno – nima presežne elektrine ($Q = 0$) –, potem to še ne pomeni, da je $\sigma = 0$, ampak, da je njen integral enak nič.

4) Ploskovna elektrina σ povzroča svoje elektrostatično polje $\mathbf{E}_\sigma$, ki ga moremo po enačbi 11.2 pisati kot

$$\mathbf{E}_\sigma(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{A}_{\text{telesa}}} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \sigma(T') \, da' \tag{$E4$}$$

kjer smo za $dQ(T')$ pisali $\sigma(T') \, da'$ – diferencial (točkaste) elektrine na površini telesa.

5) Po stavku superpozicije je polje zunaj in znotraj prevodnika enako vsoti prvotnega polja in polja elektrin na površini telesa,

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}_0(T) + \mathbf{E}_\sigma(T) \tag{E5}$$

Za zunanjo točko je

$$\mathbf{E}(T_z) = \mathbf{E}_0(T_z) + \mathbf{E}_\sigma(T_z) \tag{E5a}$$

za notranjo točko pa je vsota vedno nič (enačba 18.1),

$$\mathbf{E}_0(T_n) + \mathbf{E}_\sigma(T_n) = \mathbf{0} \tag{E5b}$$

Iz slednje enačbe evidentno sledi, da je porazdelitev elektrin na površini telesa takšna, da je sumarno polje v vseh točkah notranjosti nično. Polje porazdelitve σ v celoti kompenzira prvotno (primarno) polje $\mathbf{E}_0$ v telesu,

$$\mathbf{E}_\sigma(T_\mathrm{n}) = -\mathbf{E}_0(T_\mathrm{n})$$

6) Če je polje $\mathbf{E}$ v prevodniku nično, je napetost med dvema poljubnima točkama v notranjosti telesa enaka nič (enačba 15.3). To tudi pomeni, da je celotno telo na enakem potencialu,

$$V_\mathrm{telesa} = konst. \tag{E6}$$

7) Ploskovna elektrina na površini makroskopsko miruje – se ne giblje –, kar pomeni, da nanjo ne deluje tangencialna Coulombova sila oz., da je tangencialna komponenta električne poljske jakosti na površini enaka nič

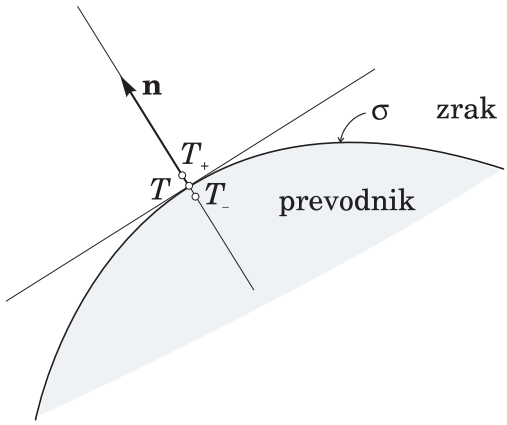
$$E_t = 0 \tag{E7}$$

Iz tega in prejšnje točke neposredno sledi, da je celotna površina prevodnika ekvipotencialna ploskev s potencialom, ki je skupen celotnemu prevodnemu telesu. Potencial telesa je določen z enačbo

$$V_\mathrm{telesa}(T) = V_0(T) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{A}_\mathrm{telesa}} \frac{\sigma(T')\,da'}{R} \tag{E8}$$

in je točka T katerakoli točka na ali v telesu. Prvi sumand je potencial prvotnega polja, drugi sumand pa je potencial ploskovne elektrine σ (po enačbi 15.2).

8) Vzemimo tri skrajno bližnje točke T_+, T in T_-, ki leže na premici nosilki normale $\mathbf{n}$ v točki T; slika 18.2. Za točko T_+ bomo rekli, da je točka "tik nad" površino, za točko



Slika 18.2: Ob površini prevodnika.

T_-, da je točka "tik pod" površino (v prevodniku), in za točko T bomo rekli, da je točka "v površini", v sloju ploskovne elektrine σ. Električna poljska jakost v točki T_+ bo (po enačbi 16.1) pri limiti $T_+ \to T$ takale:

$$\mathbf{E}(T_+) = -\mathbf{n}\frac{\partial V}{\partial n}(T_+) \tag{E9}$$

Tik nad površino prevodnika ima vektor električne poljske jakosti le normalno komponento, ki je enaka upadku potenciala v smeri normale.

9) Okrog točke T izberimo koncentrično okolico s površino δa tako, da je radij te ploskvice veliko večji, kot pa sta točki T_+ in T_- oddaljeni od T. Geometrijo si moremo vedno izbrati tako majhno, da je ploskvica praktično ravna in da je σ praktično konstantna na njej ter enaka $\sigma(T)$. Če smo z $\mathbf{E}$ označili rezultančno polje vseh elektrin, potem naj $\mathbf{E}'$ pomeni polje elektrine $\sigma(T)\delta a$, $\mathbf{E}''$ pa polje vseh preostalih elektrin, ki so na telesu in v prostoru zunaj njega. Po superpoziciji moremo polje $\mathbf{E}$ pisati kot vsoto, kjer upoštevamo dosedanje zaključke:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(T_+) &= \mathbf{E}'(T_+) + \mathbf{E}''(T_+) \\
\mathbf{E}(T_-) &= \mathbf{E}'(T_-) + \mathbf{E}''(T_-) = \mathbf{0} \\
\mathbf{E}(T) &= \mathbf{E}'(T) + \mathbf{E}''(T)
\end{aligned}$$

V zgledu 11.4 smo računali polje v okolici naelektrenega diska. Rezultat, ki smo ga tam dobili, moremo uporabiti za polje $\mathbf{E}'$ v vseh treh točkah, polje $\mathbf{E}''$ pa je, zaradi ekstremno blizu ležečih točk T_+, T in T_-, v njih praktično enako; $T_- \to T$ in $T_+ \to T \Rightarrow \mathbf{E}''(T_+) = \mathbf{E}''(T_-) = \mathbf{E}''(T)$. Pišemo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(T_+) &= \mathbf{n}\frac{\sigma(T)}{2\varepsilon_0} + \mathbf{E}''(T) \\
\mathbf{E}(T_-) &= -\mathbf{n}\frac{\sigma(T)}{2\varepsilon_0} + \mathbf{E}''(T) = \mathbf{0} \\
\mathbf{E}(T) &= \mathbf{0} + \mathbf{E}''(T)
\end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo $\mathbf{E}''(T) = \mathbf{n}\sigma(T)/2\varepsilon_0$. Če to vstavimo v prvo, dobimo $\mathbf{E}(T_+) = \mathbf{n}\sigma(T)/\varepsilon_0$ oz.

$$E_n(T_+) = \frac{\sigma(T)}{\varepsilon_0} \tag{E10}$$

Spet smo prišli do zelo važne ugotovitve: električno polje tik nad površino prevodnika je proporcionalno ploskovni elektrini na tistem mestu. In kot drugo, če seštejemo prvi dve enačbi in upoštevamo tretjo, ugotovimo, da je polje v točki (T) sloja polovica od tistega v točki T_+,

$$E_n(T) = \frac{\sigma(T)}{2\varepsilon_0} \tag{E11}$$

Nekaj podobnega smo srečali v zgledih 11.4, 12.1 in 12.2.

10) Elektrina na ploskvici δa se nahaja v polju preostalih elektrin – torej v polju $\mathbf{E}''(T)$. Coulombova sila nanjo je

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} = \sigma\,\delta a\mathbf{E}''(T) = \mathbf{n}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\,\delta a$$

Vpeljimo še ploskovno silo $\mathbf{f}_\mathrm{e}$ ali pritisk kot limito:

$$\mathbf{f}_\mathrm{e} = \lim_{\delta a\to 0}\frac{\delta\mathbf{F}}{\delta a} = \mathbf{n}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \tag{E12}$$

Kot vidimo, je pritisk vedno usmerjen iz telesa v prostor in je neodvisen od predznaka elektrine na tistem mestu. Rezultirajoča sila na prevodno telo v električnem polju bi bila tako enaka integralu ploskovnih sil,

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_{\mathcal{A}_{\mathrm{telesa}}} \sigma^2 \, d\mathbf{a}$$

V teh razmišljanjih, ki smo jih strnili v deset pomembnih ugotovitev, smo vseskozi imeli v mislih splošno oblikovano naelektreno telo, ki je v nekem tujem (danem) električnem polju. Vse povedano velja praktično tudi za primere, ki so bolj ali manj kompleksni od tega, kot na primer: nevtralno telo v tujem polju, naelektreno telo brez tujega polja, več prevodnih teles v tujem polju, naelektrena in nevtralna prevodna telesa brez tujega polja itn. Vse to pa bodo že primeri, ki bodo imeli izrazito praktično in uporabno vrednost.

Ni tudi težko videti, da je ključni problem vseh naših razmišljanj skrit v neznanih porazdelitvah elektrin po površinah prevodnih teles. Ko pa te – in če te – najdemo, so vsi ostali odgovori hitro dosegljivi. Je pa tudi res, da nas splošne in zahtevne geometrije kaj kmalu privedejo do težavnejših nalog, ki presegajo okvir matematičnih znanj na tem nivoju. Za zglede bomo zato izbirali matematičnemu nivoju prilagojene primere, kar pa ne pomeni, da ob njih bralec ne bo pridobil tistega osnovnega in prepotrebnega elektrotehničnega občutka, ki je praktiku še kako dobrodošel.

Zgled 18.1

Začnimo s kovinsko kroglo polmera r_0, ki je naelektrena z elektrino Q in je sama v prosotru (vse ostale elektrine so zelo daleč stran). Elektrina bo izključno na površini krogle (točka 3) in bo zaradi krogelne simetrije enakomerno razporejena po površini; $\sigma = Q/4\pi r_0^2$. Po zgledu 12.1 bo polje znotraj krogle nič, kar ustreza pogoju 18.1, zunaj krogle pa bo takšno, kot da bi bila vsa elektrina zbrana v centru krogle v obliki točkaste elektrine; $E_r = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Krogla ima okrog sebe potencialno polje $V(r)$; dobimo ga po enačbi 15.4:

$$V(r) = \int_r^\infty E_r(r')\, dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

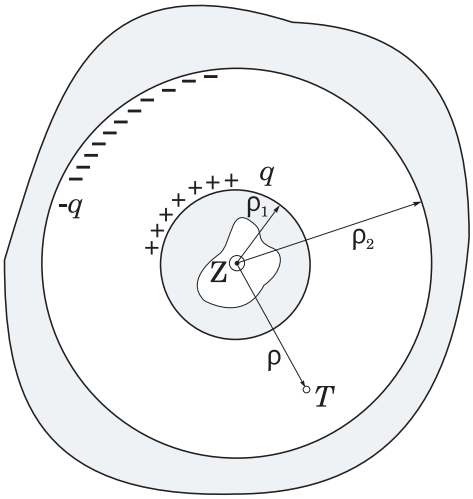
Potencial krogle do neskončne okolice je $V(r_0) = Q/4\pi\varepsilon_0 r_0$. ♣ Bralec naj si nariše grafikona $V(r)$ in $E_r(r)$ za $r \geq 0$ in določi radije ekvipotencialk s potencialno razliko $V(r_0)/10$ ter zgled pokomentira z vidika vseh desetih točk tega razdelka. ♣

Zgled 18.2

Bralec je po vzoru zgleda 12.1 (verjetno) dobil za dve koncentrični "neskončno dolgi" valjni lupini z radijema ρ_1 in $\rho_2 > \rho_1$, ki imata vzdolžni elektrini q in $-q$, naslednji rezultat za $\mathbf{E} = (E_\rho, 0, 0)$

$$E_\rho = \begin{cases} 0 & \rho < \rho_1 \\ q/2\pi\varepsilon_0\rho & \rho_1 < \rho < \rho_2 \\ 0 & \rho > \rho_2 \end{cases}$$

Polji znotraj notranjega valja in zunaj zunanjega valja sta nični. Obe območji moremo okoviniti, saj tam ni polja – električne razmere se zaradi tega ne bodo



Slika 18.3: Koncentrična koaksialna linija.

v ničemer spremenile; slika 18.3. Kovinski oblogi na sliki sta namenoma spremenljive debeline po obodu. S tem želimo poudariti, da v območju, kjer ni polja, oblika prevodnika ni važna. Prišli smo do konfiguracije koaksialnega kabla, ki je v elektrotehniki izredno uporabljan povezovalni element med električnimi napravami, postajami, aparaturami itd. Notranji vodnik je žila kabla, zunanji vodnik je plašč kabla; slednji je v praksi praviloma ozemljen – galvansko povezan z ozemljilom. (O zemlji in ozemljitvah bo tekla beseda kasneje.) Zaradi ničnosti polja zunaj ($\rho > \rho_2$) je potencial plašča tak kot v neskončni okolici, torej enak nič. V vmesnem prostoru ($\rho_1 < \rho < \rho_2$) je (po enačbi 16.1b) odvod $dV(\rho)/d\rho = -E_\rho = -q/2\pi\varepsilon_0\rho$. Z integracijo dobimo

$$V(\rho) - \overbrace{V(\rho_2)}^{0} = V(\rho) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\int_\rho^{\rho_2}\frac{d\rho'}{\rho'} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho}$$

Potencial notranje žile je hkrati tudi napetost med žilama,

$$U_{12} = V(\rho_1) - V(\rho_2) = V(\rho_1) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

V tem območju moremo funkciji $V(\rho)$ in $E_\rho(\rho)$ izraziti tudi z napetostjo in geometrijo. Konstanta $q/2\pi\varepsilon_0$ je $U_{12}/\ln(\rho_2/\rho_1)$, zato sta:

$$V(\rho) = \frac{U_{12}}{\ln(\rho_2/\rho_1)}\ln\frac{\rho_2}{\rho} \qquad E_\rho(\rho) = \frac{U_{12}/\rho}{\ln(\rho_2/\rho_1)}$$

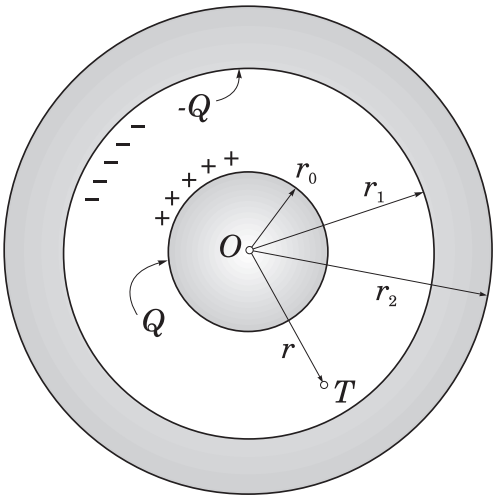
♣ Za $\rho \geq 0$ naj bralec grafikona $V(\rho)$ in $E_\rho(\rho)$ tudi nariše. ♣

Očitno je največja (mejna) poljska jakost (E_m) tik ob žili kabla: $E_\mathrm{m} = E_\rho(\rho_1) = U_{12}/\rho_1\ln(\rho_2/\rho_1)$. Vzemimo, da sta U_{12} in ρ_2 konstanti. Z $\rho_1 \to 0$ ali z $\rho_1 \to \rho_2$ gre imenovalec proti nič; vmes ima pri nekem ρ_1' največjo vrednost, največja poljska jakost E_m pa najmanjšo vrednost. Poiščimo ta radij! Imenovalec odvajamo po ρ_1 in dobimo:

$$\frac{d}{d\rho_1}\left(\rho_1\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \ln\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1$$

Optimalna točka za E_{m} bo, ko bo odvod nič. Dobimo: $\ln(\rho_2/\rho_1') - 1 = 0 \Rightarrow \rho_2/\rho_1' = e$. Ko bosta radija kabla v razmerju osnove naravnega logaritma ($e = 2.718...$), bo največja poljska jakost minimalna. Z nekega tehnološkega vidika (prebojne poljske jakosti) je ta rezultat gotovo zanimiv.

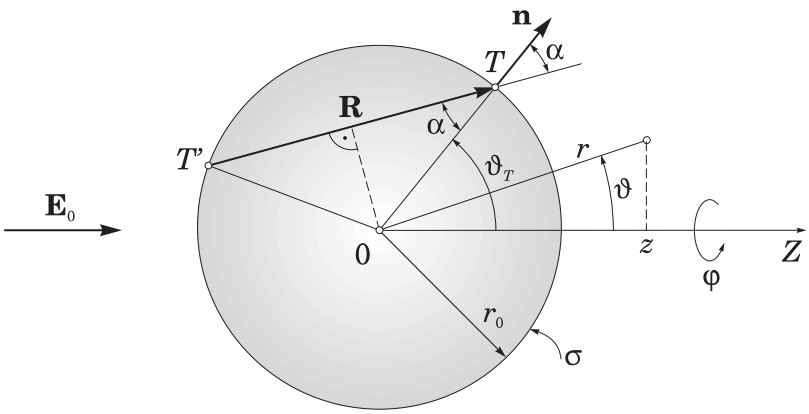
♣ Bralec naj po vzoru tega zgleda in s pomočjo rezultatov v zgledih 12.1 in 12.2 obdela primer sferičnega kondenzatorja; slika 18.4. ♣



Slika 18.4: Krogelni kondenzator.

Zgled 18.3

Vzemimo primer nevtralne prevodne kroglice polmera r_0, ki jo "postavimo" v homogeno električno polje jakosti $\mathbf{E}_0$. Sferični k.s. postavimo v središče krogle, os Z pa usmerimo v smer polja $\mathbf{E}_0$; slika 18.5. Po enačbi 16.1a moremo homogenemu



Slika 18.5: Prevodna krogla v homogenem polju.

polju prirediti funkcijo potenciala, $V_0(z) = -E_0 z + C$, in dalje, zaradi $z = r\cos\vartheta$, tudi: $V_0(r,\vartheta) = -E_0 r\cos\vartheta + C$, kjer je C prvoten potencial ravnine $z = 0$. V osmi točki tega razdelka smo ugotovili, da je normalna komponenta električne poljske

jakosti v sloju elektrin s ploskovno gostoto σ določena z $E_n(T) = \sigma/2\varepsilon_0$ in da to polje povzročajo vse prisotne elektrine in druge elektrine, ki so skrite v $\mathbf{E}_0$. Glede na točki 4) in 5) je

$$E_n(T) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}(T) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0(T) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{A}_{\text{krogle}}} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}}{R^3}\sigma(T')\,da'$$

Prvi člen je preprost: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0(T) = E_0\cos\vartheta_T$. Pod integralom imamo skalarni produkt $\mathbf{n}\cdot\mathbf{R} = R\cos\alpha = R(R/2r_0)$. Za $E_n(T)$ dobimo

$$E_n(T) = \frac{\sigma(T)}{2\varepsilon_0} = E_0\cos\vartheta_T + \frac{1}{2r_0}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{A}_{\text{krogle}}} \frac{\sigma(T')\,da'}{R}\right)$$

Izraz v oklepaju drugega sumanda spominja na potencial, ki ga povzroča σ na površini krogle (točka 7 tega razdelka),

$$V_\sigma(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{A}_{\text{krogle}}} \frac{\sigma(T')\,da'}{R}$$

Rezultirajoči potencial v točki T na krogli je

$$V(T) = V_0(T) + V_\sigma(T) = -E_0 r_0\cos\vartheta_T + C + V_\sigma(T)$$

Ker pa je površina krogle ekvipotencialka, ki ima nek potencial C_1, sledi, da je $V_\sigma(T) = E_0 r_0\cos\vartheta_T + C_1 - C$. Za $\sigma(T)$ dobimo:

$$\sigma(T) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\vartheta_T + (C_1 - C)\varepsilon_0/r_0$$

In ker smo rekli, da je krogla električno nevtralna, mora biti

$$\int_{\mathcal{A}_{\text{krogle}}} \sigma\,da = 0$$

Zaradi rotacijske simetrije bo diferencial ploskve takle: $da = 2\pi r_0^2\sin\vartheta_T\,d\vartheta_T$; za zgornji integral dobimo:

$$\int_0^\pi \sigma(T)2\pi r_0^2\sin\vartheta_T\,d\vartheta_T = 4\pi r_0^2(C_1 - C)\varepsilon_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad C_1 = C$$

za $V(T)$ pa $V(T) = C$. Nevtralna krogla zavzame tolikšen potencial, kot ga je prvotno imela simetralna ravnina $z = 0$. Porazdelitev elektrine na krogli je

$$\sigma(T) = \sigma(\vartheta_T) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\vartheta_T$$

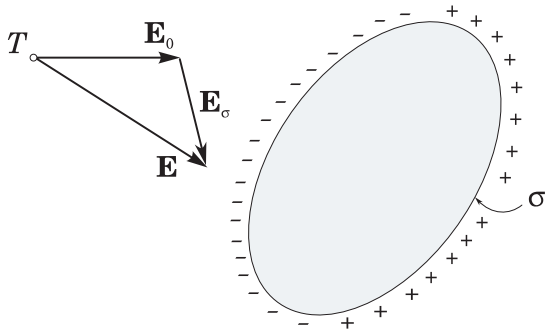
Elektrina je negativna na strani, od kjer polje "prihaja", in pozitivna na strani, v katero polje "odhaja". Glede na točko 9 tega razdelka je

$$E_n(T_+) = \sigma(T)/\varepsilon_0 = 3E_0\cos\vartheta_T$$

Očitno se poljska jakost v točkah $\vartheta_T = 0$ in π (tik nad površino krogle) potroji glede na prvotno homogeno polje E_0; rečemo, da se je polje ojačalo.

♣ Na podoben način naj bralec obdela primer, ko bi bila kroglica naelektrena z elektrino Q. ♣

Problem kroglice v homogenem polju je izredno poučen in ga moremo do neke mere posplošiti. Če damo v električno polje kako nevtralno[1] telo, potem se to telo *polarizira*; elektrine se razdvojijo tako, da je na "prihajajoči" strani polja presežek (−) elektrine, na "odhajajoči" strani polja pa presežek (+) elektrine; slika 18.6. Temu pojavu rečemo



Slika 18.6: Popačitev prvotnega polja.

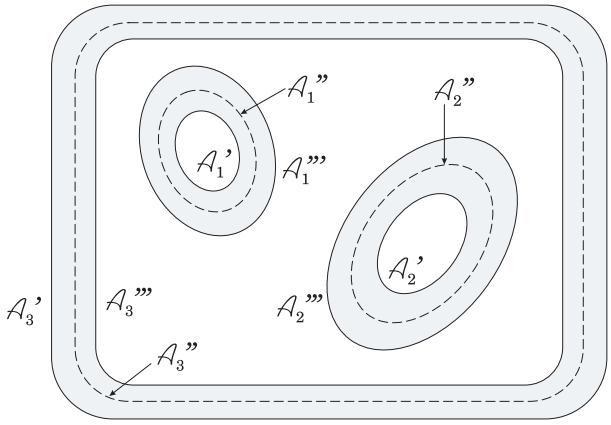
tudi *električna influenca* ali *električna indukcija*. Polarizirano telo izgleda globalno kot elektrinski par (dipol). Na takšno telo deluje določena integralna Coulombova sila.

Vnešeno prevodno nevtralno telo gotovo izdatno popači (spremeni) prvotno polje $\mathbf{E}_0$. Spremembe so izrazite v neposredni okolici telesa, medtem ko je popačitev $\mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0$ daleč stran od telesa sorazmerna upadanju polja v okolici točkastega dipola – upada torej s tretjo potenco. Za orientacijo: če se od telesa oddaljimo za desetkratnik njegovih izmer, je popačitev primarnega polja tam reda promile (upadanje polja točkastega dipola).

Avtonomnost električno zaključenih sistemov. V prejšnjem naslovu smo delali razmisleke s polnim (kompaktnim) prevodnim telesom v polju. Kaj pa, če bi bilo prevodno telo izvotleno, oz., da bi izgledalo kot prevodna lupina (škatla)? Vzemimo nekoliko splošnejši primer: naj je teh lupin več in naj so ena poleg druge ali ena v drugi; slika 18.7. V splošnem se more presežna elektrina nahajati povsod izven prevodnih lupin ali pa na površinah prevodnih lupin (v samih lupinah presežkov ni; točka 2).

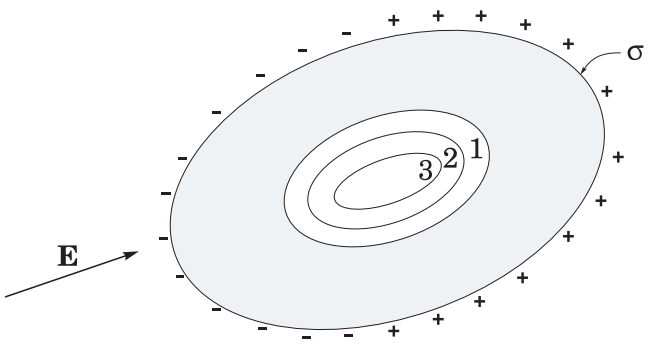
Znotraj vseh prevodnih lupin je elektrostatično polje ničnо. Za sklenjene ploskve ($\mathcal{A}_1''$, $\mathcal{A}_2''$ in $\mathcal{A}_3''$) znotraj prevodnih lupin, kjer ni polja, dobimo po Gaussovem stavku (enačba 12.1) za ploskovni integral polja $\mathbf{E}$ vedno rezultat nič, kar pomeni, da znotraj teh ploskev ni presežka elektrin. Ali drugače: elektrine znotraj ploskve $\mathcal{A}_1'$ in na $\mathcal{A}_1'$ tvorijo električno zaključen sistem, elektrine znotraj $\mathcal{A}_2'$ in na $\mathcal{A}_2'$ tvorijo električno zaključen sistem, elektrine med $\mathcal{A}_1'''$, $\mathcal{A}_2'''$ in $\mathcal{A}_3'''$ ter na ploskvah $\mathcal{A}_1'''$, $\mathcal{A}_2'''$ in $\mathcal{A}_3'''$ tvorijo električno zaključen sistem. Ker pa so po naravi vsi sistemi električno zaključeni, sledi, da tvorijo tudi elektrine zunaj ploskve $\mathcal{A}_3'$ in na $\mathcal{A}_3'$ električno zaključen sistem. Iz tega izhaja sklep, da prevodne lupine razdelijo globalno električno zaključen sistem na več posameznih električno zaključenih sistemov. Naslednja razmišljanja bomo usmerili v dokazovanje njihovih *avtonomnosti* oz. njihovih medsebojnih neodvisnosti. Za dokaz avtonomnosti bo dovolj, če pokažemo, da električno zaključen sistem, ki je le v zunanjosti prevodne lupine, ne povzroča električnega polja v notranjosti lupine, in obratno.

[1] Če pa je to telo še dodatno naelektreno, potem se njej pripadajoča ploskovna elektrina superponira k prejšnji porazdelitvi elektrin.



Slika 18.7: Elektrostatično avtonomna območja.

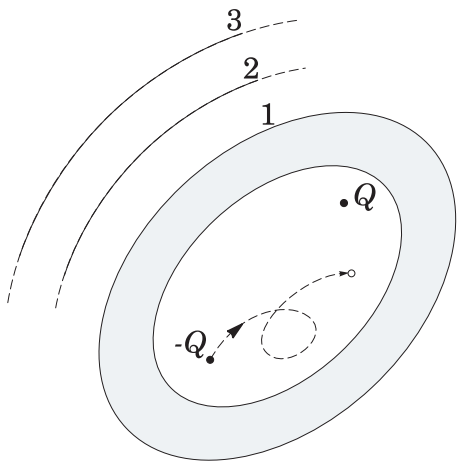
Vzemimo prevodno lupino in električno polje elektrin zunaj nje; slika 18.8. Pokažimo,



Slika 18.8: Kompakten prevoden plašč v zunanjem polju.

da je polje teh elektrin v izvotlenem delu nič. Uporabili bomo protislovje. Rekli bomo: naj polje znotraj je. Notranja stena lupine je površina prevodnika in je zato ekvipotencialka; njen potencial bodi V_1. Če polje znotraj je, moremo najti še dve ekvipotencialki s potencialoma V_2 in V_3. Zaradi enoličnosti potenciala, se ekvipotencialke ne morejo ne sekati ne dotikati – so kvečjemu ena znotraj druge. Bodi $V_1 < V_2 < V_3$. Na vsej drugi ekvipotencialki je zato $\mathbf{E}$ usmerjen pravokotno navzven. Po Gaussovem stavku bi sledilo, da je znotraj druge ekvipotencialke elektrina; te pa ni. Zato je $V_1 = V_2 = V_3$ in polja znotraj ni. Če pa polja znotraj ni, potem (po točki 9) tudi ploskovne elektrine na notranji steni ni – je le na zunanji steni.

Postavimo si še obratno nalogo. Vzemimo prevodno nevtralno lupino, ki v notranjost zapira električno zaključen sistem, zunaj lupine pa elektrin ni. Naj nam znotraj lupine na kakršenkoli način uspe delna razdvojitev na (+) in (−) elektrine. Elektrini naj sta na dveh prevodnih kroglicah; slika 18.9. Spet vzemimo, da zunaj polje je in si mislimo tri ekvipotencialke s potenciali V_1, V_2 in V_3, ki so zaradi enoličnosti kvečjemu ena znotraj druge. Po Gaussovem stavku bi za sklenjeno ploskev druge ekvipotencialke spet sledilo, da je znotraj nje presežek elektrine; tega pa ni, zato je $V_1 = V_2 = V_3$ in polja zunaj ni. Če ga pa ni, je $V_1 = 0$, tako kot v neskončni okolici, in ni tudi ploskovne elektrine na



Slika 18.9: Kompakten nevtralen prevoden plašč z objetimi elektrinami.

zunanji strani prevodne lupine (plašča). Ploskovna elektrina je le na notranji steni, njen ploskovni integral pa je nič. Polje je tako "ujeto" v izvotlen prostor.

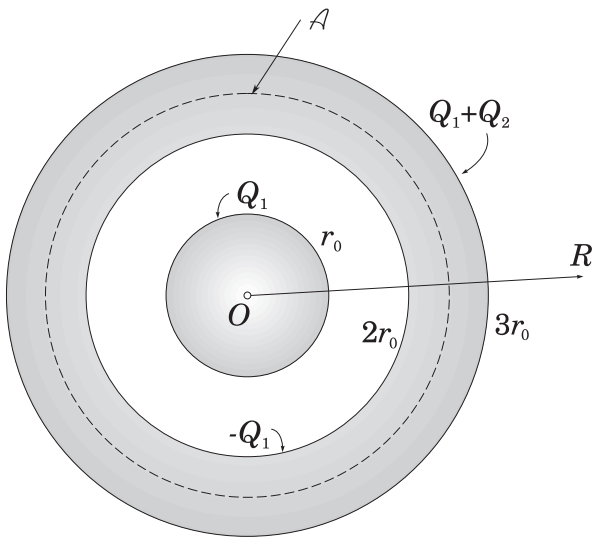
Če sedaj $(-)$ elektrino gibljemo po notranjosti, se to odrazi le na spremembi polja znotraj plašča in na porazdelitvi elektrine po notranji steni. Pa se pri tem premikanju $(-)$ elektrine z njo dotaknimo notranje stene. Kroglica postane galvanski del notranje stene (in tudi glavnina njene elektrine bo prešla na steno). Vse zgornje ugotovitve ostajajo nespremenjene, le s to razliko, da je notranja stena z dotikajočo kroglico v celoti nosilka elektrine $(-Q)$ in je polje spet ujeto znotraj kovinske ograje.

S tem je pokazana avtonomnost elektrostatično zaključenih sistemov, ki jih ločujejo prevodne bariere z ničnostjo polja[2]. Polja, ki so "ujeta" med stene barier, so v izključni domeni elektrin znotraj teh sten. Če v enem od teh zaključenih sistemov pride do naravne ali prisilne razelektritve (na sliki 18.9 – ko še elektrino Q pritisnemo ob steno), potem polje v tem sistemu "ugasne" in se to v ničemer ne odrazi na ostalih zaključenih sistemih. Če pa v omenjenem sistemu polja ni več, moremo njegovo notranjščino v celoti ali delno izpolniti s kovino (prevodnikom). Vse te ugotovitve bomo koristno uporabljali pri kasnejših praktičnih zgledih.

Zgled 18.4

Vzemimo kovinsko kroglico polmera r_0, ki nosi elektrino Q_1 in je zaprta v naelektreno koncentrično prevodno krogelno lupino polmerov $2r_0$ in $3r_0$ z elektrino Q_2; slika 18.10. Krogelna lupina razdeli prostor na dva avtonomna sistema. Notranji sistem je električno zaključen, zato je elektrina na notranji steni lupine $-Q_1$; ker pa je elektrina lupine enaka Q_2, mora biti na njeni zunanji površini elektrina $Q_1 + Q_2$, ki tvori z elektrinami v zelo oddaljeni okolici svoj električno zaključen sistem. Rešimo najprej zunanji sistem tako, da notranjega "ignoriramo". Polje E_r naelektrene krogle je po zgledu 18.1 takole: $E_r = (Q_1 + Q_2)/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Potencial lupine je $(Q_1 + Q_2)/12\pi\varepsilon_0 r_0$. Polje med kroglico in lupino določa le elektrina Q_1;

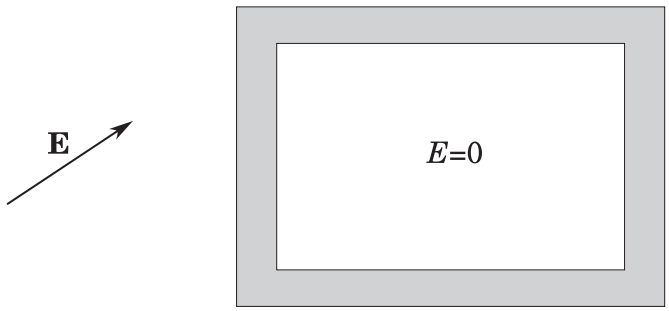
[2]Obe ugotovitvi sodita v sklop splošnega stavka o enoličnosti rešitve elektromagnetnega polja, o katerem tu ne bo govora. Segment tega stavka pravi tole: če v danem območju prostora ni virov in je na ograji tega območja $E_t = 0$, potem je povsod v tem območju polje E enako nič.



Slika 18.10: Krogla in koncentrična lupina - dva avtonomna sistema.

$E_r = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Napetost med kroglico in lupino je $U_{12} = Q_1/8\pi\varepsilon_0 r_0$; potencial kroglice je enak vsoti oz. izrazu $(1/4\pi\varepsilon_0)((Q_1 + Q_2)/3r_0 + Q_1/2r_0)$. Če bi kroglico pritisnili ob lupino, bi prišlo do razelektritve notranjega sistema $(Q_1 + (-Q_1) = 0)$, česar pa zunanji sistem ne bi "občutil".

Faradayeva kletka. Ugotovitve tega razdelka in zgled sam kažejo, kako moremo doseči elektrostatično "gluho" sobo. V praksi se pogosto želimo zaščititi pred elektromagnetnimi motnjami. Takšen primer so precizne merilnice, umerjevalnice, testni laboratoriji, občutljivi instrumenti itd. Objekt, ki ga želimo zaščititi, zapremo v kompakten prevoden plašč oz. t.i. *Faradayevo kletko*, ki jo praviloma tudi ozemljimo; slika 18.11. Za



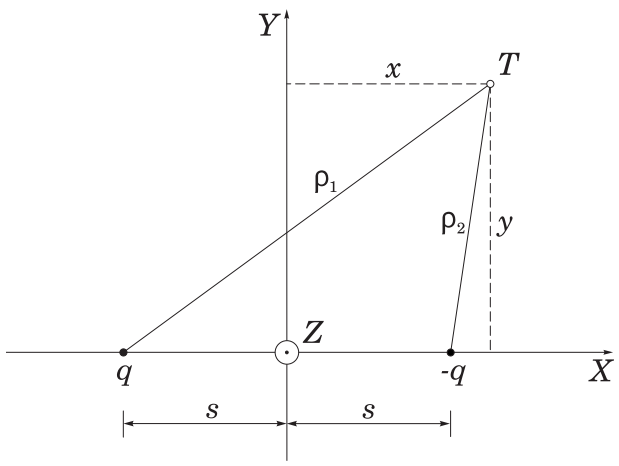
Slika 18.11: Faradayeva kletka – "gluh" prostor.

elektrostatično polje je tak prevoden oklep absolutna "zapora", medtem ko dinamično (časovno spremenljivo elektromagnetno) polje vseeno delno "pronica" v notranjost. Koliko takšnega polja še prodre v notranjost, je odvisno od debeline sten in frekvence motenj. Povsem enako funkcijo vršijo tudi oklopi signalnih vodov. Nekoliko manj učinkovita je mrežasta kletka, ki je tehnološko enostavnejša in bolj praktična, saj ne zastira dnevne

svetlobe v delovne prostore. Seveda pa je ščitenje učinkovito tudi v obratni smeri. Visokofrekvenčno varjenje plastik je izrazit primer elektromagnetnega "onesnaževanja". Te in podobne naprave se praviloma zastira z ozemljeno Faradayevo kletko.

"Okovinjanje" ekvipotencialk. S pridobljenimi izsledki si bomo tu pripravili določeno metodiko reševanja elektrostatičnih polj, ki nam bo ponujala enostaven matematični model, s katerim bomo "ukrotili" vrsto tehnično zelo zanimivih in uporabnih elektrostatičnih problemov. V ta okvir sodi predvsem *metoda zrcaljenja*, ki se bo izkazala kot sila uporabna; pa vendar spet ne kot neka "vsezveličavna" metoda.

Vzemimo dve vzporedni premi elektrini (q in $-q$) z medsebojno razdaljo $2s$. Elektrini postavimo simetrično v k.s. tako, da bo os Z vzdolžna os; slika 18.12. V zgledu 16.5



Slika 18.12: K potencialu dveh premih in raznoimenskih elektrin.

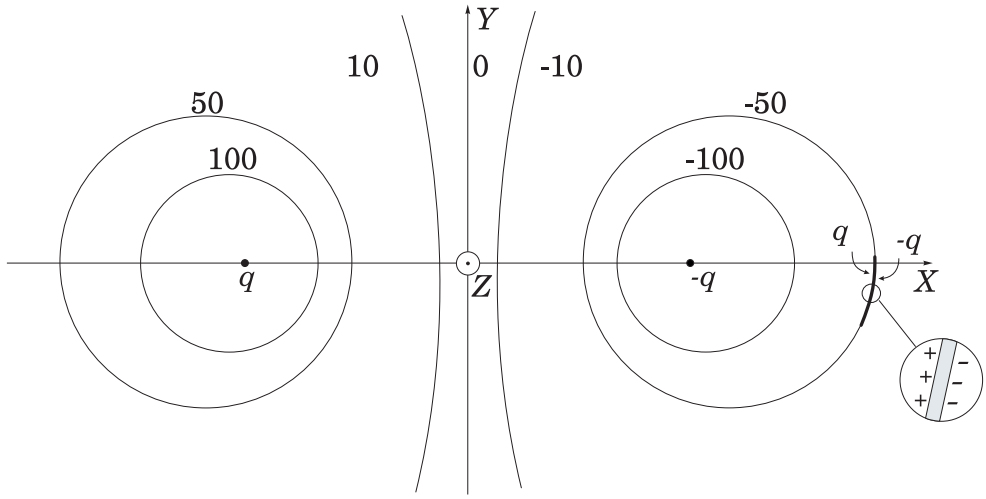
smo za potencial dobili tale izraz: $V(T) = (q/2\pi\varepsilon_0)\ln(\rho_2/\rho_1)$. Poiščimo ekvipotencialne ploskve! Zanima naj nas splošna ekvipotencialka s potencialom $V(T) = C$, kar zapišemo kot: $\rho_2/\rho_1 = \exp(2\pi\varepsilon_0 C/q) = k$. Iz geometrije na sliki dobimo: $\rho_1^2 = (x+s)^2 + y^2$ in $\rho_2^2 = (x-s)^2 + y^2$. Enačba ekvipotencialke je $(x-s)^2 + y^2 = k^2((x+s)^2 + y^2)$. Po kvadriranju in ureditvi dobimo:

$$x^2 + 2s\frac{k^2+1}{k^2-1}x + y^2 + s^2 = 0$$

To pa je enačba krožnice s središčem na X-osi. Bodi p izmik središča kroga in r bodi radij kroga. Tak krog ima enačbo $(x-p)^2 + y^2 - r^2 = 0$ oz. $x^2 - 2px + y^2 + (p^2 - r^2) = 0$. Če primerjamo to z zgornjo, dobimo parametra krogov:

$$p = -\frac{k^2+1}{k^2-1}s \qquad r = \frac{2k}{|k^2-1|}s \qquad s^2 = p^2 - r^2$$

oz. valje kot ekvipotencialke za različne C-je (k-je). Če si za $2\pi\varepsilon_0/q$ izberemo vrednost 0.05, dobimo za ekvipotencialke 0, ± 10, ± 20, ..., ± 100 V družino krogov (valjev); slika 18.13. Iz slike je razvidno, da ležita premi elektrini ekscentrično v valjih. Tam, kjer so si ekvipotencialke bliže, je poljska jakost večja.



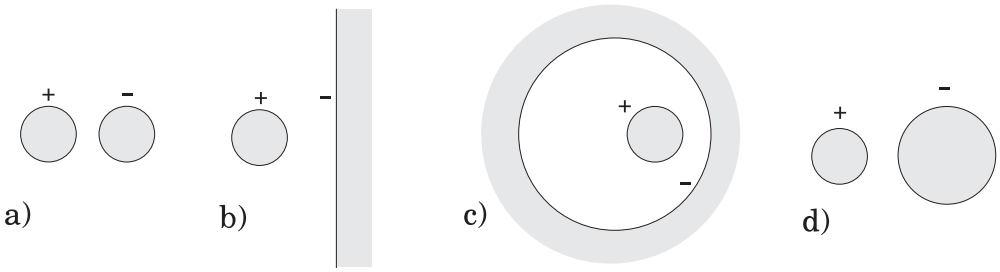
Slika 18.13: Okovinjanje ekvipotencialnih ploskev.

Sedaj si pa mislimo, da je ekvipotencialka s potencialom -50 V "okovinjena". To naj je zelo tanka folija; njena debelina je mnogo manjša kot s. Folija bi se polarizirala v normalni smeri na ekvipotencialko tako, da bi bilo polje E v njej nič. Po zgledu 18.4 bi bila na notranji strani vsota elektrin q, na zunanji pa $-q$; njuni porazdelitvi po obodu bi si bili simetrični. Če je folija resnično tanka, potem je polje razdvojenih elektrin v zunanjosti folije nično, kar pomeni, da zunaj folije ostaja "status quo", torej prvotno polje premih elektrin. Folija pa je prvoten zaključen elektrostatični sistem tudi razdelila na dva avtonomna zaključena sistema. Prvega tvori prema elektrina q in zunanja obloga folije z vzdolžno elektrino $-q$, drugega pa tvori notranja obloga folije z vzdolžno elektrino q ter prema elektrina $-q$. Vsak sistem je zase avtonomen in le elektrine, ki pripadajo dotičnemu sistemu, so povzročiteljice polja v sistemu. Če se lotimo okovinjanja še kakšne druge ekvipotencialke, se ves postopek razmišljanja ponovi. Končni rezultat so trije avtonomni sistemi in nespremenjenost polja izven folij.

Pa vzemimo, da smo to storili še za ekvipotencialko 50 V. Zanima naj nas sistem med obema folijama. Če sedaj obe premi elektrini premikamo znotraj območja obeh folij (valjev), se polje med folijama nič ne spremeni. Končno se s premima elektrinama $\pm q$ dotaknimo folij. Leva folija ima na svoji zunanji površini le še elektrino q, desna pa tudi na zunanji le še elektrino $-q$. Polji znotraj obeh folij sta nični in obe notranjosti moremo v celoti okoviniti. Dobimo zračni dvovod, slika 18.14, skica a), polje med njima pa je še vedno takšno, kot je bilo prvotno od dveh premih $\pm q$ elektrin . V primeru, da okovinimo valj in simetralno ravnino, dobimo s podobnim razmišljanjem vodnik pred prevodno steno; skica b).

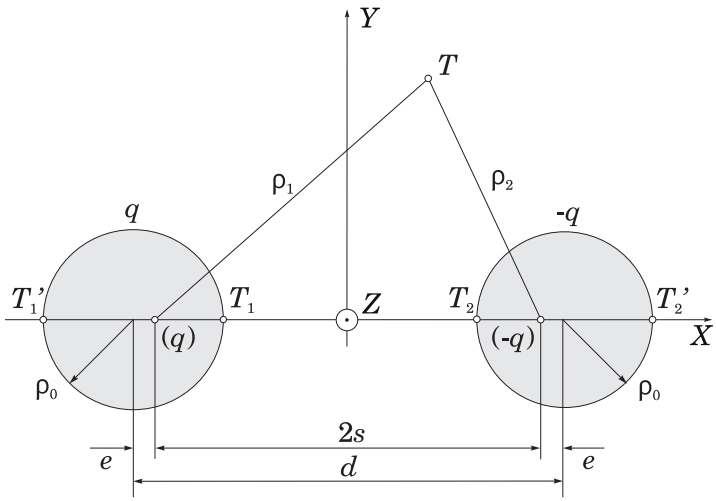
V primeru okovinjenja dveh valjev različnih radijev na eni ali na nasprotnih straneh simetralne ravnine dobimo ali ekscentričen kabel, skica c), ali nesimetričen dvovod, skica d). Električno polje med prevodnikoma je v vseh štirih primerih vedno takšno kot od dveh premih ($\pm q$) elektrin. Določiti je potrebno le njuno pravo ekscentrično lego glede na geometrijo primerov a), b), c) ali d).

Zgled 18.5



Slika 18.14: Izvlečki polja dveh premih elektrin.

Določimo polje v okolici dveh vzporednih dolgih vodnikov polmera ρ_0 in medsebojne razdalje d, če sta naelektrena z nasprotnima elektrinama $\pm q$; slika 18.15. Elektrini q



Slika 18.15: Simetričen dvovod.

in $-q$ sta dejanski elektrini na površini vodnikov, linijski elektrini (q) in $(-q)$ pa sta le njuni matematični ekvivalenci za polje zunaj vodnikov; zato smo ju tudi zapisali v oklepaju. Glede na sliko 18.13 ležita ti nadomestni elektrini ekscentrično glede na geometrijski osi vodnikov. Osema pomožnih elektrin pravimo tudi električni osi dvovoda; razmik med električno in geometrijsko osjo imenujemo ekscentričnost. Poglejmo, kako je ekscentričnost e določljiva z geometrijo dvovoda. Iz parametrov ekvipotencialk je $s = \sqrt{(d/2)^2 - \rho_0^2}$, kjer smo p zamenjali z $d/2$ in r z ρ_0. Po sliki je $e = d/2 - s = d/2 - \sqrt{(d/2)^2 - \rho_0^2}$.

Potencial v okolici dvovoda določata pomožni elektrini: $V(T) = (q/2\pi\varepsilon_0)\ln(\rho_2/\rho_1)$. Napetost med dvovodoma je razlika potencialov. Izberimo si točki T_1 in T_2 ter pišimo:

$$U_{12} = V(T_1) - \overbrace{V(T_2)}^{-V(T_1)} = 2V(T_1) = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{s + d/2 - \rho_0}{s - d/2 + \rho_0} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d + \sqrt{d^2 - 4\rho_0^2}}{2\rho_0}$$

V primeru samo dveh prevodnih teles, ki s $(\pm)$ elektrinama tvorita električno zaključen sistem, je praktično zanimiv parameter t.i. *kapacitivnost*, ki podaja soodvisnost med absolutno količino elektrine in napetostjo med telesoma. Kapacitivnost na

enoto dolžine ali vzdolžna kapacitivnost c je $q/U_{12} = \pi\varepsilon_0/\ln((d+\sqrt{d^2-4\rho_0^2})/2\rho_0)$. Več o kapacitivnosti kasneje (razdelek 24).

Pri znani napetosti U_{12} je funkcija potenciala takale:

$$V(T) = \frac{U_{12}\ln\dfrac{\rho_2}{\rho_1}}{2\ln\dfrac{d+\sqrt{d^2-4\rho_0^2}}{2\rho_0}}$$

Potencial in E_x na zveznici $\overline{T_1T_2}$ sta:

$$V(x) = \frac{U_{12}\ln\dfrac{s-x}{s+x}}{2\ln\dfrac{d+\sqrt{d^2-4\rho_0^2}}{2\rho_0}} \qquad E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{U_{12}\left(\dfrac{1}{s-x}+\dfrac{1}{s+x}\right)}{2\ln\dfrac{d+\sqrt{d^2-4\rho_0^2}}{2\rho_0}}$$

♣ Bralec naj zapiše izraz za potencial v splošni točki T s koordinatama (x, y) in po enačbi 16.1a določi komponenti električne poljske jakosti. ♣

Iz slike ekvipotencialk (slika 18.13) se vidi, da so te najbolj goste na zveznici med elektrinama. V našem zgledu bo poljska jakost največja ob notranji strani vodnikov v točkah T_1 in T_2. ♣ Bralec naj ugotovi razmerje $\sigma(T_1)/\sigma(T_1')$ in skicira to funkcijo v odvisnosti od razmerja d/ρ_0. ♣ S pomožnima elektrinama izrazimo tudi privlačno silo med vodnikoma. Zapišimo jo kot silo na enoto dolžine: $f_\mathrm{e} = q^2/4\pi\varepsilon_0 s$.

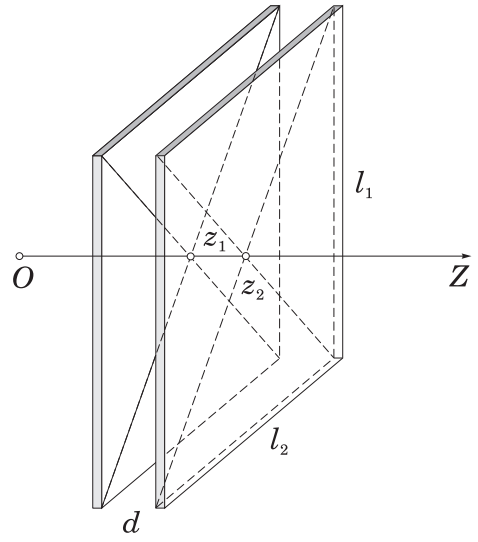
V praksi sta vodnika dvovoda sorazmerno razmaknjena glede na svoja radija; $d \gg \rho_0$. Takrat moremo ekscentričnost zanemariti in smatrati, da se pomožni (ekvivalentni) premi elektrini (q) in $(-q)$ nahajata v geometrijskih oseh vodnikov.

♣ Bralec naj na podoben način obdela še ostale tri primere s slike 18.14. ♣

Zgled 18.6

Zelo enostaven zgled okovinjanja moremo napraviti v homogenem polju. V zgledu 18.3 smo homogenemu polju $\mathbf{E}_0$ v Z smeri določili potencial $V_0 = -E_0 z + C$. Ekvipotencialke so vzporedne ravnine $z =$ konst. Če okovinimo ekvipotencialki z_1 in $z_2 = z_1 + d$, razdelita ti prostor na tri neodvisne (avtonomne) električno zaključene sisteme. Zanima naj nas vmesni: $z_1 < z < z_2$. Polje bo tam v Z smeri in homogeno z jakostjo E_0; gostoti elektrin na notranjih stenah ravnin bosta: $\sigma(z_1) = \varepsilon_0 E_0$ in $\sigma(z_2) = -\varepsilon_0 E_0$. Ti elektrini ne bosta imeli rezultirajočega polja v območjih $z > z_2$ in $z < z_1$. Sistema v teh dveh območjih moremo "izločiti" in območji izpolniti z določeno oblogo kovine. S tem dobimo dve ravni – "neskončno razsežni" plošči. Napetost U_{12} med njima se dobi po enačbi 15.3: $U_{12} = E_0 d$ oz. $E_0 = U_{12}/d$.

V praksi seveda nikoli ne moremo realizirati neskončnih plošč; pa vendar, če sta plošči recimo pravokotnih izmer (l_1 in l_2) ter sta l_1 in $l_2 \gg d$, slika 18.16, potem moremo po zgledu 11.4 trditi, da bo poljska jakost v pretežnem delu med ploščama praktično homogena in da bo računska jakost polja E enaka U_{12}/d. O homogenosti polja moremo govoriti le v osrednjem delu med ploščama. Za praktično rabo lahko rečemo: če se od robu plošč premaknemo proti osrednjemu delu za dva ali tri razmake d, smo že v področju homogenosti. Podobno velja tudi za ploskovno elektrino;



Slika 18.16: Dve prevodni, razsežni in ravni plošči – ploščni kondenzator.

ta je v osrednjem delu enaka $\pm\varepsilon_0 E$, proti robu pa naraste in v nekem zanemarljivem iznosu eksistira tudi na zunanji strani plošč.

Sistem na sliki 18.16 predstavlja ploščni zračni kondenzator. V idealiziranem primeru bi razmerje med absolutno ($\pm$) množino elektrine na ploščah in napetostjo med ploščama bilo: $\sigma(z_1)l_1l_2/U_{12} = \varepsilon_0 l_1 l_2/d$. To je tudi kapacitivnost (kapaciteta) kondenzatorja. Ena od tehnoloških izvedb kondenzatorjev so t.i. folijski kondenzatorji – dva folijska trakova sta z vmesnim izolacijskim papirjem zvita v svitek, na traka sta prispajkani kontaktni žički, svitek pa je ovit v izolacijski omot ali zalit v plastiko.

Dvojni sloj. V tem zgledu smo opozorili na odstopanje dejanskega polja glede na idealno homogeno polje. Vprašajmo se: kolikšno pa je polje zunaj ploščnega kondenzatorja? Površino plošč razdelimo v mislih na majhne ploskvice $\delta a'$ tako, da je $\delta a' \ll d^2$. Na nasproti ležečih ploskvicah sta elektrini $\pm\sigma\,\delta a'$. Ti dve tvorita *točkasti dipol* z momentom $\sigma\,\delta a'\mathbf{d}$. Potencial, ki pripada temu dipolu, je po enačbi 17.3 enak

$$\delta V(T) = \frac{\sigma(T')\,\delta a'\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Po izvajanjih v razdelku o Gaussovem stavku je geometrijski pomen produkta $(\mathbf{d}/d)\cdot\mathbf{R}\delta a'/R^3$ enak prostorskemu kotu $\delta\Omega$, pod katerim se iz točke T vidi ploskvica $\delta a'$. Dalje je $\delta V(T) = \sigma(T')d\delta\Omega/4\pi\varepsilon_0$. Produktu σd rečemo tudi *gostota momenta ploskovnega dipola* oz. *dipolske ploskve*; označimo ga s $\tau\,(=\sigma d)$. Celoten potencial dobimo, ko izvedemo seštevek (integracijo) po vseh parih (na obeh ploščah)

$$V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \tau(T')\,d\Omega$$

V teoriji polj temu potencialu rečemo tudi *potencial dvojnega sloja*. Za splošno ploskev $\mathcal{A}$ – z dvojnim slojem elektrin – bi potencial zapisali kot

$$\boxed{V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{A}} \frac{\mathbf{n}'\cdot\mathbf{R}}{R^3}\tau(T')\,da'} \tag{18.2}$$

kjer je $\mathbf{n}'$ normala ploskvice $\delta a'$ v točki T' in je usmerjena od ($-$) k ($+$) elektrini.

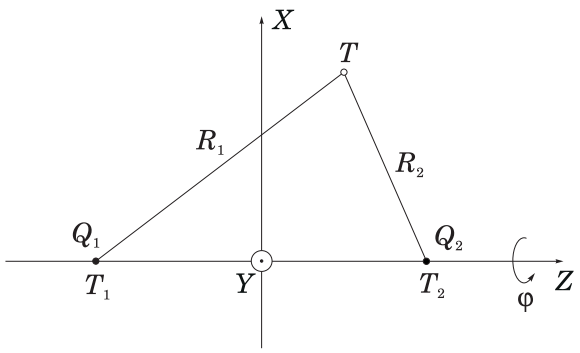
Če se vrnemo na zgled 18.6 in privzamemo konstantno oblogo σ, je $\tau = \sigma d = \varepsilon_0 U_{12}$; potencial $V(T)$ bi bil zunaj plošč enak $U_{12}\Omega/4\pi$, kjer je Ω prostorski kot, pod katerim vidimo plošči iz točke T. Če je točka opazovanja daleč stran od plošč, je električno polje identično polju točkastega dipola.

Vloga in mesto Zemlje (zemlje) kot prevodnika. Prevodniške lastnosti zemlje so nekako za osem dekadičnih razredov slabše kot pri tipičnih kovinskih prevodnikih in še zelo so odvisne od vlažnosti in sestave tal. Pa vendar, z vidika elektrostatičnega polja so relaksacijski časi zanjo še vedno zanemarljivo majhni (10^{-10} s), zato se zemlja, enako kot prevodnik, hipno odziva na morebitne spremembe polja. V nadaljevanju jo bomo zato smatrali kot enakovreden subjekt – poleg do sedaj omenjanih kovinskih teles. Vse ugotovitve, ki veljajo za prevodnike, veljajo tudi zanjo.

V dosedanjih razmišljanjih nismo nikoli omenjali zemlje. Zanimale so nas razmere v neposredni okolici elektrin, o vseh ostalih elektrinah, objektih (tudi o zemlji) pa smo lahko menili, da so zelo daleč stran; razlog smo imeli v strmem (kvadratičnem) upadanju njihovih polj. Kot se bo kasneje še potrjevalo, so te zanemaritve ali poenostavitve, iz praktično-tehničnega in matematično-računskega vidika, v večini primerov povsem korektne, vendar pa je zemlja (Zemlja) tako pomembna objektivna danost (končno živimo na Zemlji in vsakršen eksperiment napravimo na tleh ali nekje nad tlemi), da moramo končno spregovoriti tudi o tem. Za to opravilo bomo izhajali le iz dosedanjih dognanj o elektrostatičnem polju in iz dejstva, da je tudi zemlja prevodnik.

Osrednje vprašanje bo takole: kaj moremo reči o elektrostatičnem polju nad ravno prevodno podlago (zemljo - tlemi), če se nekje nad podlago nahaja elektrina? Za razmišljanje bo dovolj, če vzamemo, da je ta elektrina točkasta. Do odgovora na zastavljeno vprašanje bomo prišli postopno.

Vzemimo, da imamo v točkah T_1 in T_2 točkasti elektrini Q_1 in Q_2 različnih predznakov; $Q_1 Q_2 < 0$. Oddaljenosti splošne točke T od obeh elektrin sta naj R_1 in R_2; slika 18.17.



Slika 18.17: K potencialu dveh točkastih elektrin.

Potencial v T je določen z vsoto:

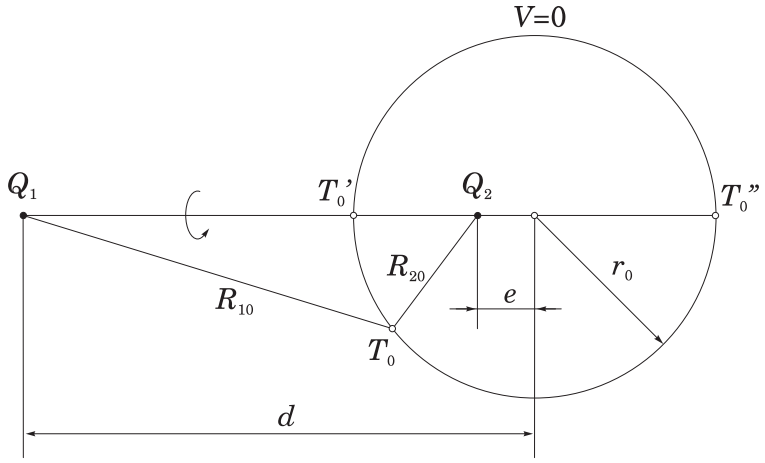
$$V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$$

Ker sta elektrini nasprotnega predznaka, bo gotovo nekje v prostoru potencial nič – torej tudi ekvipotencialka s tem potencialom. Splošna točka na njej bodi T_0 in razdalji do nje

naj sta R_{10} in R_{20}; dobimo:

$$V(T_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_{10}} + \frac{Q_2}{R_{20}}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R_{20}}{R_{10}} = -\frac{Q_2}{Q_1} > 0$$

V (XZ) ravnini je enačba ekvipotencialke enaka oni v primeru dveh premih elektrin, le da sta tamkajšnji razdalji ρ_1 in ρ_2 tu R_{10} in R_{20}. Iskana ekvipotencialka bo krog v (XZ) ravnini. Zaradi rotacijske simetrije po kotu φ bo ekvipotencialka s potencialom nič krogelna lupina. Vzemimo, da je $|Q_1| > |Q_2|$, potem bo ta krogla "objela" elektrino Q_2, znotraj katere bo ta imela ekscentrično pozicijo. Poglejmo sedaj korelacijo med geometrijo in velikostima obeh elektrin; slika 18.18.



Slika 18.18: Ena od ekvipotencialk dveh elektrin je krogla; ima potencial nič.

Zapišimo ničnost potenciala v točkah T_0' in T_0'' na krogli; dobimo:

$$\frac{Q_1}{d - r_0} = -\frac{Q_2}{r_0 - e} \qquad\qquad \frac{Q_1}{d + r_0} = -\frac{Q_2}{r_0 + e}$$

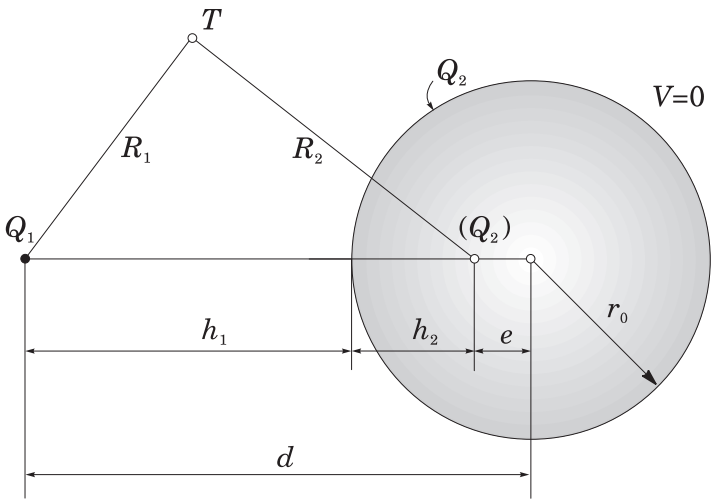
Z deljenjem enačb izločimo elektrini in nato iz ene od enačb pridemo še do njune soodvisnosti:

$$de = r_0^2 \qquad\qquad Q_1 r_0 = -Q_2 d$$

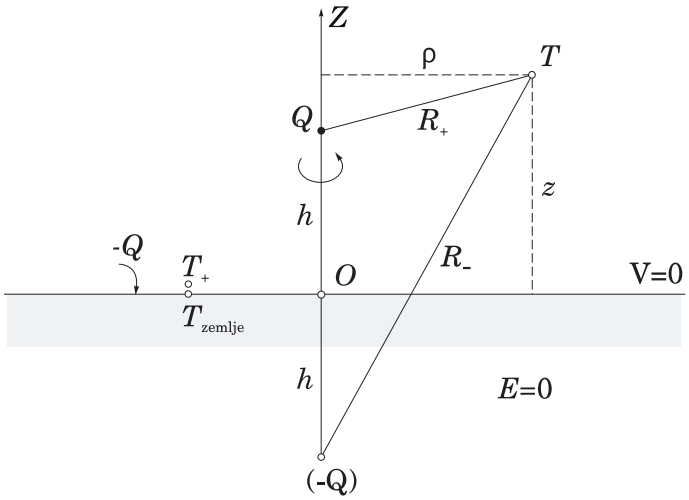
Če sedaj ekvipotencialko $V = 0$ okovinimo, razpade prvoten sistem na dva. Sistem znotraj lupine izločimo in notranjost krogle izpolnimo s prevodnikom. Polje v zunanjosti krogle bo nespremenjeno in določeno z elektirno Q_1 in ploskovno elektrino na površini krogle, ki je v integralu enaka Q_2, v prostor pa učinkuje kot točkasta elektrina v ekscentrični legi; slika 18.19.

Pa vzemimo, da je ta prevodna krogla Zemlja. Geometrijsko enačbo $de = r_0^2$ moremo pisati: $(r_0 + h_1)(r_0 - h_2) = r_0^2$ oz. $(h_1 - h_2) = h_1 h_2 / r_0$. Očitno je $h_1 - h_2 > 0$ oz. $h_1 > h_2$. Če pa je $h_1 \ll r_0$ (elektrina Q_1 je nekaj metrov nad Zemljo), potem sta h_1 in h_2 praktično enaka. Pišemo: $h_1 = h_2 = h$. Enačbo za elektrini pišemo kot $Q_1 r_0 = -Q_2(r_0 + h_1)$, kar nam ob relaciji $h_1 \ll r_0$ da zvezo $Q_2 = -Q_1$.

Odgovor je sedaj že tu. Elektrina Q nad Zemljo in ploskovna elektrina na Zemlji povzročata nad Zemljo električno polje, ki je številsko enako polju elektrine Q in njene *zrcalne elektrine* $(-Q)$; slika 18.20. Potencial v splošni točki T je takle:



Slika 18.19: Elektrina ob kovinski krogli s potencialom nič.



Slika 18.20: K potencialu elektrine nad Zemljo.

$$V(T) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

Zapišimo R_+ in R_- v valjnih koordinatah: $R_+^2 = (z-h)^2 + \rho^2$, $R_-^2 = (z+h)^2 + \rho^2$. Če je točka T na površini zemlje, je $R_+ = R_-$ in $V = 0$, zato je tudi $\partial V/\partial\rho = 0$; tangencialne komponente poljske jakosti tam ni, saj je zemlja prevodnik. Napravimo odvod $\partial V/\partial z = -E_z$ (po enačbi 16.1):

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z+h}{R_-^3} - \frac{z-h}{R_+^3}\right)$$

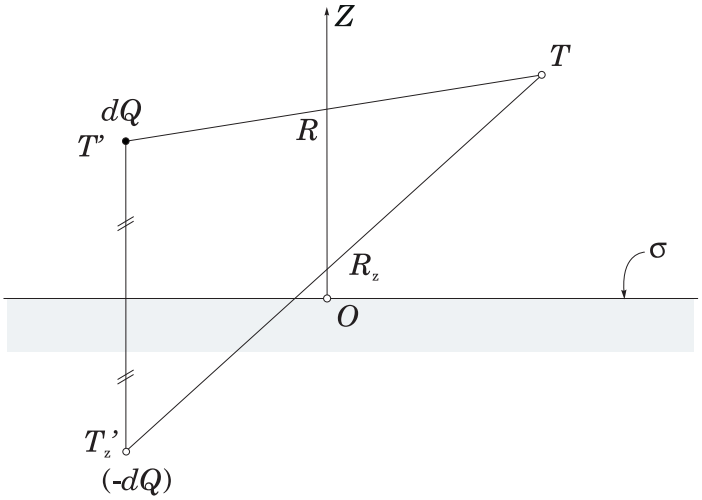
Če gre $z \to +0$ (tik nad površino, do točke T_+) je

$$\sigma(T)_{\text{zemlje}} = \varepsilon_0 E_z(T_+) = -\frac{Qh}{2\pi(h^2+\rho^2)^{3/2}}$$

Ploskovna elektrina je nasprotnega predznaka, njena porazdelitev pa je tipično zvončaste oblike. Gostota je največja tik pod elektrino Q; z oddaljevanjem od navpičnice asimptotično upada proti nič. Izračunajmo njen integral, čeravno vemo, da moramo dobiti $-Q$. Diferencial ploskve bo kolobar s ploščino $2\pi\rho\, d\rho$ na površini zemlje; elektrina bo

$$\int_0^\infty \sigma(\rho) 2\pi\rho\, d\rho = -Qh \int_0^\infty \frac{\rho\, d\rho}{(h^2+\rho^2)^{3/2}} = -Qh \left[\frac{1}{\sqrt{h^2+\rho^2}}\right]_0^\infty = -Q$$

Po stavku o superpoziciji moremo to ugotovitev sedaj razširiti na množico elektrin, ki so nad zemljo (ravno prevodno podlago) in imajo tam neko splošno prostorsko porazdelitev; slika 18.21.



Slika 18.21: K potencialu elektrin nad prevodno podlago.

Enačbo 15.2 za potencial v splošni točki nad prevodno podlogo bomo pisali sedaj takole:

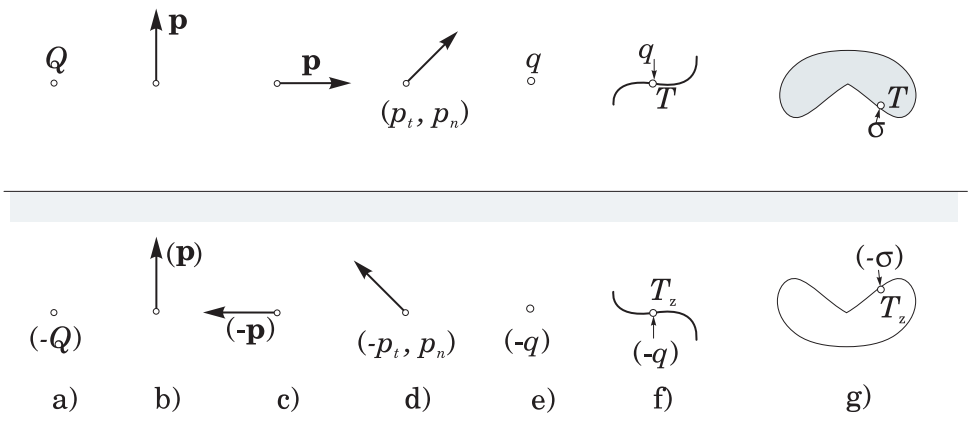
$$\boxed{V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(Q\ \mathrm{v}\ z>0)} dQ(T') \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_z}\right)} \tag{18.3}$$

pri tem pa bo integracija tekla po vseh elektrinah, ki se nahajajo nad prevodno ravno podlago; elektrina na površini zemlje je v integraciji že vključena z zrcalnim členom $(-1/R_z)$. Sedaj tudi vidimo, da vsaka elektrina, s katero kakorkoli eksperimentiramo, že ima svojo nasprotno elektrino na zemljini površini, torej tvori z njo "a priori" električno zaključen sistem. In končno, ta sklep velja tudi za celotno prostorsko porazdeljeno elektrino v zgornjem polprostoru ($z > 0$).

Če je bilo pri definiciji električnega potenciala njegovo referenčno – izhodiščno – mesto "potisnjeno" v neko abstraktno neskončno okolico, potem z izrazom 18.3 vidimo, da je mesto referenčnega (ničnega) potenciala tudi tu – v neposredni bližini – na Zemlji. Potencialna funkcija, ki jo bomo za dano porazdelitev elektrin izpeljali iz te formule, bo številsko ustrezala tudi napetosti med točko T in zemljino površino.

Po vsem tem vidimo, da nam zemlja ne bo delala nikakršnih težav. Poleg elektrin nad njo bomo upoštevali še nasprotno predznačene elektrine v zrcalnih legah. Na sliki 18.22 vidimo primere zrcaljenja nekaterih elektrinskih konfiguracij: a) točkasta elektrina,

b) vertikalni, c) horizontalni, d) poševni točkasti dipol, e) horizontalna prema elektrina, f) naelektrena žica, g) naelektreno (ali nevtralno) telo. Pri horizontalnem dipolu vidimo,



Slika 18.22: Zrcaljenje elektrinskih konfiguracij nad ravno prevodno podlago.

da je smer zrcalnega dipola obrnjena. Če se ozremo na razdelek 17, kjer smo opredelili smer momenta dipola, ki kaže od (−) k (+) elektrini, je potem obrat smeri razumljiv; podobno je tudi pri poševnem dipolu. Gledano z velike razdalje od površine zemlje se vsi "stvori" na sliki globalno kažejo kot točkasti dipoli, dipoli pa še dodatno kot *multipoli*.

Ko že govorimo o zemlji, ne moremo mimo še ene njene zelo pomembne praktične vloge – to je t.i. *ozemljevanje*. Spoznali smo, da prevodna telesa v električnem polju pridobijo (zavzamejo) določen potencial. Ta potencial je po vsem povedanem tudi napetost do zemlje; rečemo ji tudi napetost dotika. Končno se človek (ali žival) giblje v bližini naelektrenih teles in ob dotiku steče tok po organizmu v zemljo (razelektritev telesa). Napetost dotika je aktualna tudi sicer; pri vseh mogočih električnih napravah, kjer se more pojaviti napetost med ohišjem in zemljo. Izrazito na "udaru" je srčna mišica, ki ob močnejšem toku otrpne. Napetost 60 V je nekako zgornja predpisana meja dopustnosti za človeško telo, zato v praksi določena kovinska telesa ozemljujemo iz povsem varovalnih namenov. Tak primer so kovinski oklopi, ohišja (Faradayeva kletka), armature, razne kovinske konstrukcije itd. Končno tudi drseč odvodnik, ki je pritrjen na ohišje avtomobila, odvaja v zemljo (med vožnjo nabirajočo) presežno torno elektrino. Seveda pa je kvaliteta ozemljitve odvisna predvsem od kakovosti ozemljevanja – več o tem v poglavju o tokovnih poljih (razdelek 34).

Če morda vzamemo kar primer iz zgleda 18.4. Kaj bi se zgodilo, če bi krogelno lupino ozemljili? Lupina bi postala sestavni del ogromnega prevodnega telesa. Elektrina $Q_1 + Q_2$ bi se hipno "razlezla" po površini zemlje in kompenzirala elektrino $-Q_1 - Q_2$ na zemlji. Potenciala lupine in zemlje bi se izenačila, električnega polja zunaj lupine ne bi bilo, potencial notranje krogle bi bil le U_{12} in polje med lupino in kroglico bi ostalo nespremenjeno.

V praksi imamo včasih primere, ko je porazdelitev elektrin pred neko razsežno prevodno ozemljeno steno ali nad (pod) razsežno prevodno ozemljeno podlago (stropom). Tudi v teh primerih bomo uporabljali tehniko (metodo) zrcaljenja.

Zgled 18.7

Izračunajmo oddaljenost d od ozemljenega prevodnega stropa, na kateri "bi lahko" lebdel majhen naelektren košček Al folije z elektrino Q in maso m. Težnostna in električna sila si morata biti v ravnotežju. Velikost električne privlačne sile k stropu določa oddaljenost zrcalne $(-Q)$ elektrine: $F_\mathrm{e} = Q^2/4\pi\varepsilon_0(2d)^2$; težnostna sila navzdol pa je enaka mg. Distanca d je $15000\,Q/\sqrt{m}$. Račun je seveda korekten, če so izmere koščka folije majhne glede na d.

19. Izolator – dielektrik v elektrostatičnem polju

Kar zajeten prostor smo namenili prevodnikom v elektrostatičnem polju. Za njih smo ugotovili, da se v elektrostatičnem polju hipno polarizirajo (razdvojitev elektrin). Ta polarizacija se je manifestirala v ploskovni elektrini na površini telesa, ki je bila posledica premika oblaka prostih elektronov (v telesu) v nasprotni smeri polja; ti premiki so reda nekaj "atomarnih dimenzij". Rezultat premika (zamika) so bili presežki $(-)$ elektrine na eni in $(+)$ elektrine na drugi strani telesa.

Ostanejo nam še neprevodne, izolacijske snovi oz. t.i. *dielektrične snovi* ali kratko *dielektriki*. Njihovo obnašanje je v elektrostatičnem poju povsem drugačno; pogojeno je predvsem z izrazitim "pomanjkanjem" prostih elektronov. Relaksacijski časi so reda velikosti nekaj sekund pri steklu, do nekaj dni pri kvarcu, zato pri tipičnih izolacijskih materialih ne moremo "računati" s prevodniško naravo odziva na vsiljeno elektrostatično polje. To je res še toliko bolj, ker imamo v praksi opraviti z elektrinami na prevodnih telesih (kondenzatorjih), kjer se časovno hitro spreminjajo (odtekajo ali pritekajo) in se temu primerno dinamično obnaša tudi pripadajoče električno polje. Relaksacijski časi izolatorjev so zato v takem primeru videti kot "neskončno dolgi".

No, pa vendar, tudi atomarna (molekularna) struktura izolacijskih snovi (materialov) se na delovanje zunanjega električnega polja polarizacijsko odzove, le s to razliko, da so mehanizmi reagiranja drugačni in rezultirajo v nekoliko drugačne okvire. V nadaljevanju si bomo ogledali tri glavne načine polarizacije, in sicer: dipolsko (ali orientacijsko), elektronsko ter ionsko polarizacijo, čeravno se v izolacijskih snoveh ne pojavljajo ločeno, marveč v kombinaciji.

Dipolska polarizacija. Pri obravnavi točkastega dipola smo ugotovili, da na dipol v električnem polju deluje navor, ki ga teži zavrteti v smer polja. Omenili smo tudi, da imajo molekule nekaterih snovi – že po naravi – dipolski karakter, torej dipolski moment. Če zunanjega polja ni, so te termično nemirne molekule (dipoli) kaotično orientirane v snovi in nimajo svojega rezultirajočega električnega polja. Pod vplivom zunanjega polja težijo te dipolske molekule zavzeti stanje minimalne električne potencialne energije, pri čemer pa jih vseskozi "ovirajo" medmolekularni trki, zato moremo, v nekem statističnem smislu, govoriti le o orientacijski tendenci oz. o delni usmeritvi. Te delno orientirane molekule (dipoli) pa seveda ustvarjajo tudi svoje lastno električno polje, ki se vektorsko superponira k zunanjemu električnemu polju.

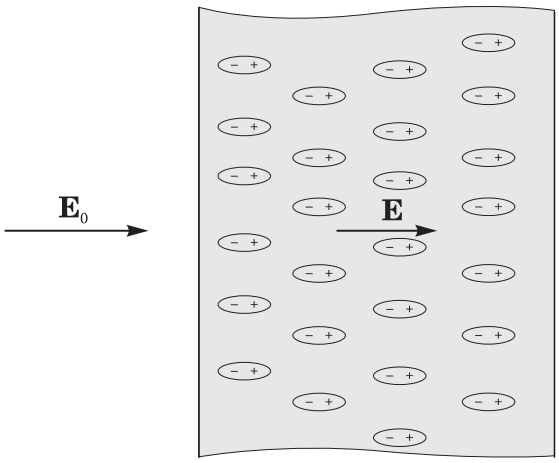
Vpeljimo *vektor prostorske gostote dipolskih momentov* z limito:

$$\boxed{\mathbf{P} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta v}} \tag{19.1}$$

kjer pomeni $\delta\mathbf{p}$ vektorsko vsoto dipolskih momentov v delčku volumna δv; enote za količino $\mathbf{P}$ so $\mathrm{C/m^2}$. Ta vektor vsebinsko ustreza gostoti električnega momenta (razdelek 17), le da se ta tu nanaša na vezane pare ($\pm$) elektrin (dipole). V nadaljevanju bomo $\mathbf{P}$ imenovali kratko *vektor električne polarizacije*, vezanim elektrinam, ki sodelujejo pri formiranju vektorja polarizacije, pa bomo na mestih, ko bo to potrebno, dodali pripis "pol." (polarizacijska).

Ob določenih poenostavitvah v termodinamskih zakonitostih se za dipolsko polarizacijo more pokazati, da je vektor dipolske polarizacije $\mathbf{P}_\mathrm{d}$ orientiranih molekul v linearnem odnosu z rezultirajočo jakostjo električnega polja na tistem mestu. Pišemo: $\mathbf{P}_\mathrm{d} = \alpha_\mathrm{d}\varepsilon_0\mathbf{E}$, kjer je α_d faktor *dipolske polarizabilnosti* in je pri takšnih snoveh močno temperaturno odvisen; z višanjem temperature upada, saj so nemirnejše molekule manj "dovzetne" za (pre)orientiranje.

Elektronska polarizacija. V dobrih izolatorjih so prosti elektroni "prava redkost"; večina njih je trdno vezanih na jedro. Težišče elektronskega "omota" (okrog jedra) je v jedru, kjer so protoni, zato atom ne izkazuje rezultančnega dipolskega momenta. V primeru pa, da je takšen atom v zunanjem električnem polju, se elektronski omot (in s tem njegovo težišče) izmakne iz jedra v obratni smeri polja – pojavi se dipolski moment atoma v smeri polja. V atomarni združbi atomov se seveda nekaj podobnega zgodi z vsakim atomom. Vsi tako inducirani dipoli pa ustvarjajo tudi lastna polja, ki se vektorsko superponirajo k zunanjemu polju. Če si zamislimo nek kompakten kos izolatorja in inducirane dipole modeliramo z elektrinskimi pari, si moremo ustvariti določeno prostorsko predstavo novonastalih razmer; slika 19.1. Na "prihajajoči" strani polja imamo presežek



Slika 19.1: Usmeritev dipolov v električnem polju.

vezane ($-$) elektrine, na odhajajoči strani pa presežek vezane ($+$) elektrine. Polje vmesnih ($\pm$) elektrin se kompenzira, ($-$) in ($+$) elektrine na zunanjih plasteh pa ustvarjajo v vmesnem prostoru polje, ki je v nasprotni smeri zunanjega polja. Poljska jakost, ki jo atom (združba atomov) v novonastalih razmerah "čuti", je zato načelno manjša od prvotne, kar pomeni, da so tudi izmiki elektronskih omotov in njim pripadajoči dipolski momenti atomov temu ustrezno manjši; vendar je to že stvar interakcije. Glede na atomarne dimenzije so ti izmiki majhni in praktično proporcionalni polju $\mathbf{E}$ na tistem

mestu, zato moremo za vektor elektronske polarizacije $\mathbf{P}_\mathrm{e}$, ki je proporcionalen izmikom in razumeljen v smislu limite (19.1), pisati: $\mathbf{P}_\mathrm{e} = \alpha_\mathrm{e}\varepsilon_0\mathbf{E}$. V izrazu je α_e faktor *elektronske polarizabilnosti*. Električno polje $\mathbf{E}$ je tudi tu razumljeno v makroskopskem smislu kot poprečje poljske jakosti znotraj fizično majhnega volumna.

Ionska polarizacija. V snoveh z ionsko vezjo teži zunanje polje razmakniti ione v kristalni mreži (v NaCl razdvaja Na^+ in Cl^-). S tem se na podoben način kot pri elektronski polarizaciji, inducirajo električni dipolski momenti. Spet moremo pisati: $\mathbf{P}_\mathrm{i} = \alpha_\mathrm{i}\varepsilon_0\mathbf{E}$, kjer je α_i faktor *ionske polarizabilnosti*, $\mathbf{P}_\mathrm{i}$ pa je vektor ionske polarizacije. V zvezi s kristali je potrebno pripomniti, da odzivanje kristalne mreže v smereh posameznih kristalnih osi ni vedno enako, kar pomeni, da polarizabilnost ni preprosto število, ampak je tenzor. Takšnim snovem pravimo, da so *anizotropne*[1].

Skupna polarizacija. V tem kratkem pregledu mehanizmov polarizacije smo spoznali okvirno soodvisnost vektorja polarizacije in električnega polja na tistem mestu. Seveda pa se v dejanskih razmerah pojavljajo polarizacijski mehanizmi v kombinacijah. Pri polarizaciji soli se pojavi tudi elektronska polarizacija. Tudi dipolski moment molekule vode se v polju spremeni: kot 104° v trikotniku HOH se zmanjša – moment se poveča. Ionska in elektronska polarizabilnost sta približno enakega velikostnega reda, medtem ko je dipolska polarizabilnost od teh mnogo večja. To velja predvsem za statična in nizkofrekvenčna polja. Pri visokih frekvencah pa dipolska polarizabilnost praktično odpove, saj okorne molekule ne morejo slediti hitrim spremembam, in ostaja le elektronski način polariziranja, in še ta nad ultravioletnim področjem "odpove".

Vsi opisani mehanizmi polarizacije imajo seveda le in zgolj kvalitativno vrednost ($\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$). V okviru makroskopske teorije se teh polarizabilnosti kvantitativno ne da ovrednotiti; njihova določitev (evalvacija) je praviloma prepuščena meritvi – kako in na kakšen način se to izmeri, bo iz kasnejše nadgradnje vsekakor razvidno. Linearen odnos med vektorjem celotne (skupne) polarizacije $\mathbf{P}$ in električno poljsko jakostjo $\mathbf{E}$ (v splošni točki izolatorja) bomo dalje pisali kot

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi_\mathrm{e}\varepsilon_0\mathbf{E}} \tag{19.2}$$

Konstanto χ_e imenujemo *električna susceptibilnost*. Je načelno vsota vseh polarizabilnosti določene snovi ($\chi_\mathrm{e} = \alpha_\mathrm{d} + \alpha_\mathrm{e} + \alpha_\mathrm{i}$) in praktično govori o odzivnosti snovi na električno polje.

Splošno v zvezi z izolatorji je potrebno spregovoriti še o eni njihovi (ne)odliki, namreč o t.i. *prebojni trdnosti*; ta je s praktičnega vidika še bolj pomembna kot polarizabilnost. Pri dovolj močnem električnem polju pridobijo namreč redki prosti elektroni (iz prevodnega pasu) med sosednjima "trkoma" zadostno kinetično energijo, da "izbijejo" valenčne elektrone v prevodni pas. Število prostih elektronov se poveča in s tem se poveča tudi število prehodov; izolator postane prevoden – rečemo, da je izolator "prebil". Seveda je to zgolj modelna slika dogajanj, ki se odvijejo v naglici ($\sim 10^{-8}$s). Poljski jakosti, pri kateri pride do verižnega prevajanja – preboja, rečemo *prebojna poljska jakost* ali kratko prebojna trdnost izolatorja. Je pa prebojna trdnost močno temperaturno odvisna. Pri

[1]Neposredno v zvezi s kristali v električnem polju je tudi t.i. *piezoelektrični pojav*. Pod vplivom električnega polja (napetosti) med plastema kristala (npr. kremena) se ta stisne, in obratno: pri stiskanju se pojavi med plastema električna napetost.

povišanih temperaturah ima prevodni pas izolatorja več prostih elektronov in verižno prevajanje "steče" že pri nižjih poljskih jakostih. Tabela 19.1 podaja tipične (okvirne) prebojne poljske jakosti za nekatere izolatorje.

izolator	$E_{\text{max.}}$ [MV/m]	izolator	$E_{\text{max.}}$ [MV/m]
zrak	$2.5 - 3$	steklo	$10 - 40$
trans. olje	15	guma	$20 - 40$
papir	20	polivinilklorid	$40 - 60$
porcelan	20	papir v olju	50
parafin	30	sljuda	200

Tabela 19.1: Prebojne poljske jakosti nekaterih izolatorjev.

20. Vektor gostote električnega pretoka

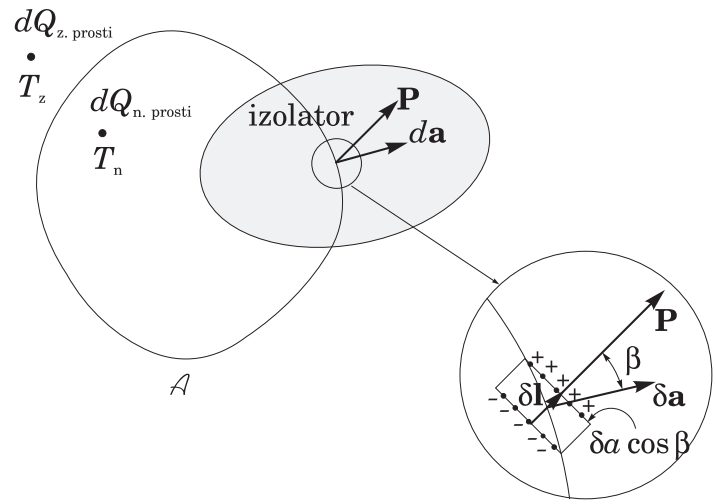
V tem razdelku se bomo posvetili predvsem novi vektorski količini, *vektorju gostote električnega pretoka* $\mathbf{D}$, ki je na eni strani vezan na izolacijske (dielektrične) snovi v električnem polju, na drugi strani pa omogoča jasnejši in predstavljivejši vpogled v celotno elektromagnetno teorijo, za katero je nasploh značilna bogata vektorska interpretativnost, ki "nevidnim" poljem "pridahne" mero plastičnosti.

Vzemimo, da imamo v prostoru dano porazdelitev prostih elektrin; njihovo polje označimo z $\mathbf{E}_0$. Če v to polje vnesemo polarizabilno izolacijsko snov, bo praktično v hipu (saj je polarizacija vezana na mikroskopske premike) prišlo do novega razmerja sil; do novega polja $\mathbf{E}$. Polariziran izolator bo končni rezultat interakcije med primarnim poljem ($\mathbf{E}_0$) in poljem orientiranih in induciranih dipolov ($\mathbf{E}_\text{p}$) na eni strani ter vektorjem polarizacije ($\mathbf{P}$) na drugi strani. Enačbo 19.2 moremo zapisati kot $\mathbf{P} = \chi_\text{e}\varepsilon_0(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_\text{p})$, kjer je $\mathbf{E}_\text{p}$ integral diferencialnih prispevkov polja točkastih dipolov $\mathbf{P}\,dv$. Po enačbi 17.3 bi potencial teh dipolov zapisali z integralom,

$$\boxed{V_\text{p}(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}_\text{izol.}} \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}(T')}{R^3}\,dv'} \tag{20.1}$$

polje $\mathbf{E}_\text{p}$ pa bi določili z eno od enačb 16.1.

V opazovanem prostoru si izberimo poljubno sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$, ki v svojo notranjost objame del prostih elektrin in del izolatorja oz. del vezanih (polariziranih) elektrin v njem; slika 20.1. Namišljena ploskev "prereže" nekatere dipole na meji "na dvoje" tako, da je (kot pri narisanem vektorju $\mathbf{P}$) negativna elektrina dipola(ov) še na notranji, pozitivna pa že na zunanji strani. Poglejmo, kaj bi nam mogel o tem povedati produkt $\mathbf{P}\cdot d\mathbf{a}$. Za majhen volumen δv na meji, v katerem so ti "prerezani" dipoli, bi pisali: $\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{a} = \delta\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{a}/\delta v$; $\delta\mathbf{p}$ pomeni seštevek dipolskih momentov znotraj δv. Pisati ga moremo tudi: $\delta\mathbf{p} = \sigma_\text{pol.}\delta a\cos\beta\,\delta\mathbf{l}$, kjer je $\sigma_\text{pol.}$ gostota (+) elektrine na ploskvici $\delta a\cos\beta$. Če vse združimo in upoštevamo, da je $\delta\mathbf{a}\cdot\delta\mathbf{l} = \delta v$, dobimo: $\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{a} = \sigma_\text{pol.}\delta a\cos\beta$; to pa je enako množini polarizirane (+) elektrine, ki je za ta mejni volumen (δv) v zunanjosti ploskve



Slika 20.1: K Gaussovemu stavku prostih in polariziranih elektrin.

$\mathcal{A}$ v presežku. Če sedaj napravimo ploskovni integral vektorja $\mathbf{P}$ po sklenjeni ploskvi $\mathcal{A}$, ugotovimo, da je

$$-\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{not. pol.}}$$

Uporabimo sedaj še Gaussov stavek za rezultantno električno polje $\mathbf{E}$ (enačba 12.1):

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{cel. not.}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{not. prosti}} + Q_{\text{not. pol.}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{not. prosti}} - \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}}{\varepsilon_0}$$

Enačbo množimo z ε_0 in integrala združimo; dobimo

$$\oint_{\mathcal{A}} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{not. prosti}}$$

Že pri vpeljevanju vektorja $\mathbf{P}$ smo verjetno imeli določen pomislek – morda odpor –, saj se v izolator ne moremo "vtihotapiti" z nobeno meritvijo, ne da bi zmotili notranje polje. Vektor $\mathbf{P}$ je kratkomalo nedosegljiv. Podobno velja tudi za vezano elektrino v in ob meji dielektrika, ki je ne moremo "izvabiti" iz materiala, da bi jo pognali v električni tok, ki bi ga izmerili.

Slednja enačba nam ponuja možnost, da se "otresemo" vektorja polarizacije in vpeljemo nov vektor, ki bo vezan izključno na proste (mobilne) elektrine, torej na tiste, ki jih preprosto "speljemo" (dovedemo, odvedemo) po prevodniku do želenega mesta.

Že sam integral ima fizikalno interpretacijo v pretoku – čeravno se fizično tu nič ne pretaka –, pa vendar; vpeljimo vektor gostote električnega pretoka, saj so na desni strani elektrine. Vektorsko količino *gostote električnega pretoka* označujemo z $\mathbf{D}$ in je definirana z enačbo

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \tag{20.2}$$

enote zanjo so As/m^2 (C/m^2). Integral gostote pretoka $\mathbf{D}$ bo torej:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{not. prosti}}} \tag{20.3}$$

Če za $Q_{\text{not. prosti}}$ uporabimo izražavo iz enačbe 4.4, dobimo še

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{prosti}}\, dv} \tag{20.3a}$$

Slednja enačba je t.i. *IV. Maxwellova enačba*[1], ki sodi v sklop štirih fundamentalnih enačb elektromagnetnega polja. Tu smo sicer še dodali pripis "prosti", vendar bomo to v nadaljevanju počasi opuščali – v mislih pa bomo imeli ravno to strukturo elektrine. Integral bomo brali: pretok vektorja gostote električnega pretoka skozi sklenjeno ploskev je enak algebraični vsoti prostih elektrin znotraj te ploskve. Enačbo 20.3 imenujemo tudi Gaussov stavek vektorja **D**, za razliko od enačbe 12.1, ki je Gaussov stavek vektorja **E**. Enačba 20.3 je formalno ožjega značaja, saj se nanaša le na proste elektrine, medtem ko se enačba 12.1 nanaša na vse elektrine.

Izvornost vektorjev D in P. Za vektor **D** rečemo, da ima izvore (ponore) v prostih elektrinah. Seveda bi bila informacija popolnejša, če bi izvornost poznali v vsaki točki. Za izvornost v točki T bi pisali:

$$\lim_{\delta v \to 0} \frac{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}}{\delta v} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\int_{\delta \mathcal{V}} \rho_{\text{prosti}} dv}{\delta v} = \rho_{\text{prosti}}(T)$$

Vidimo, da je izvornost vektorja **D** enaka gostoti prostorsko porazdeljene proste elektrine. O izvornosti vektorja **E** smo na koncu razdelka 12 tudi že govorili. Ako upoštevamo še zvezo 20.2, dobimo tudi izvornost vektorja **P**:

$$\lim_{\delta v \to 0} \frac{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}}{\delta v} = \frac{\rho_{\text{cel.}}(T)}{\varepsilon_0} \qquad \lim_{\delta v \to 0} \frac{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}}{\delta v} = -\rho_{\text{pol.}}(T)$$

ki korelira z lokalno (mikroskopsko) vezano in polarizirano elektrino.

Dielektričnost. Po tem splošnem uvodnem delu se spet vrnimo k našim konkretnim izolacijskim snovem v luči novega vektorja. Združimo enačbi 19.2 in 20.2; dobimo:

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_{\text{e}} \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_{\text{e}}) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{r}} \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}} \tag{20.4}$$

Pri večini izolatorjev je zveza med **D** in **E** sila preprosta – linearna. Faktor ε_{r} imenujemo *relativna dielektričnost* in ε imenujemo *dielektričnost* dotične izolacijske snovi. Dielektričnost je tudi ena iz družine treh snovnih konstant (drugi dve sta *specifična električna prevodnost* in *permeabilnost*), ki opredeljujejo makroskopske lastnosti materialov v elektromagnetnem polju in jih določamo praviloma empirično – torej z meritvijo. V tabeli 20.1 podajamo tipične (okvirne) vrednosti relativnih dielektričnosti nekaterih izolatorjev.

Po enačbah 20.2 in 20.4 je sedaj tudi vektor polarizacije (**P**) preprosto izrazljiv z vektorjema **E** in **D**:

$$\boxed{\mathbf{P} = (\varepsilon_{\text{r}} - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_{\text{r}} - 1}{\varepsilon_{\text{r}}} \mathbf{D}} \tag{20.5}$$

Enačba 20.4 se v primeru posebnih asimetričnih kristalov razširi v tenzorsko obliko, ki za splošno elektrotehniko ni toliko interesantna.

[1] Numeracije osnovnih Maxwellovih enačb se pri različnih avtorjih sicer razlikujejo, vendar ni to ne usodno ne tragično; morda je to le stvar konvencije v cilju lažjega sporazumevanja.

Zgled 20.1

Vzemimo kar primer koaksialnega kabla iz zgleda 18.2. Če vmesni prostor med žilo in plaščem izpolnimo z izolatorjem, bo električno polje – zaradi rotacijske simetrije – še vedno le radialno; $\mathbf{E} = (E_\rho, 0, 0)$. Po enačbi 20.4 bo $\mathbf{D} = (D_\rho, 0, 0)$ oz. $D_\rho = \varepsilon E_\rho$. Iz Gaussovega stavka za $\mathbf{D}$ (enačba 20.3) dobimo za valj polmera ρ in dolžine l tole: $2\pi\rho l D_\rho = ql$ oz. $D_\rho = q/2\pi\rho$ in $E_\rho = q/2\pi\varepsilon\rho$. Vidimo, da je električno polje $\mathbf{E}$ povsem identično tistemu v vakuumu, le da je vlogo ε_0 prevzel ε izolatorja. Vektor polarizacije ima le radialno komponento, ki je po enačbi 20.5 enaka izrazu $(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)q/2\pi\varepsilon_\mathrm{r}\rho$.

Napetost med žilo in plaščem je $U_{12} = (q/2\pi\varepsilon)\ln(\rho_2/\rho_1)$. Razmerje med elektrino in napetostjo je sedaj $2\pi\varepsilon/\ln(\rho_2/\rho_1)$. Vidimo, da sta novo in prejšnje razmerje v odnosu $\varepsilon/\varepsilon_0 = \varepsilon_\mathrm{r}$. To pa nam hkrati ponuja merilno možnost določanja relativne dielektričnosti. Elektrino se da meriti kot integral toka, napetost pa moremo tudi izmeriti.

Ta zgled je izredno poučen, saj določena opažanja veljajo povsem splošno. Namreč, če je ves prostor – kjer more polje elektrostatično zaključenega sistema eksistirati – izpolnjen s homogenim (enovitim) izolacijskim materialom, potem so – pri enakih množinah prostih elektrin – električna poljska jakost $\mathbf{E}$, električni potencial V in električna napetost U za faktor ε_r (izolatorja) manjši kot sicer (pri ε_0). V enačbah 11.2, 15.2 in 18.3 zamenjamo le ε_0 z dielektričnostjo dotičnega medija. Ploskovna elektrina $\sigma(T)$ na površini prevodnih teles je sedaj $\varepsilon E_n(T_+)$, ploskovna sila f_{en} pa je $\sigma^2/2\varepsilon$. V ničemer se ne spremeni odnos med napetostjo, potencialom in električno poljsko jakostjo – relacije od 15.3 do 16.1 ostajajo nespremenjene.

"Težave" se pa seveda začno, ko ves relevanten prostor ni več izpolnjen z enovitim dielektrikom (izolatorjem). Razen redkih lepih izjem – ki si jih bomo pogledali kasneje – je potrebno "vpreči" zahtevnejša matematična orodja, vključno z numeričnimi metodami; vendar to ne bo več naša tema.

izolator	ε_r	izolator	ε_r
zrak (0° C)	1.0006	steklo	$5 - 10$
zrak (pri 40 barih)	1.0218	sljuda	6
zrak (pri 80 barih)	1.0439	alkohol	$15 - 30$
papir	$2 - 2.5$	zrak (−191° C)	26.6
polietilen	2.2	glicerin (15° C)	56.2
olje	$2 - 5$	destilirana voda	81.1
guma	3	barijev titanat	1200
porcelan	5.7	bar. stroncijev tit.	10 000

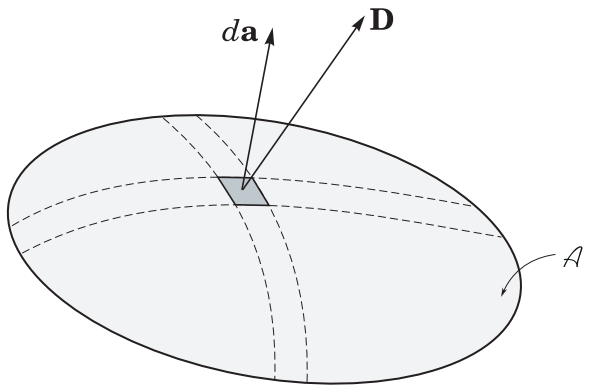
Tabela 20.1: Relativne diekletričnosti (ε_r) nekaterih snovi.

Z nekega formalnega vidika opredelimo dielektrično snov kot *homogeno*, če se ε krajevno ne spreminja ($\varepsilon \neq \varepsilon(T)$), kot *linearno*, če je ε neodvisen od poljske jakosti ($\varepsilon \neq$

$\varepsilon(E)$), in kot *izotropno*, če ε ni odvisen od smeri polja. V nasprotnem so snovi *nehomogene*, *nelinearne* in *anizotropne* [2].

21. Električni pretok

V sami definiciji vektorja gostote električnega pretoka smo se srečali s pretočnim integralom gostote $\mathbf{D}$ skozi sklenjeno ploskev. Videli smo, da je ta enak algebraični vsoti objetih prostih elektrin. Fizikalna vsebina tega pretoka je povsem očitna. Sedaj pa poglejmo, kako in v kolikšni meri bi nam služil ploskovni integral tega vektorja po poljubni nesklenjeni ploskvi? Zamislimo si neko vektorsko polje $\mathbf{D}(= \varepsilon\mathbf{E})$ in orientirano ploskev $\mathcal{A}$; slika 21.1. Električni pretok ϕ_e skozi to ploskev bo opredelil integral



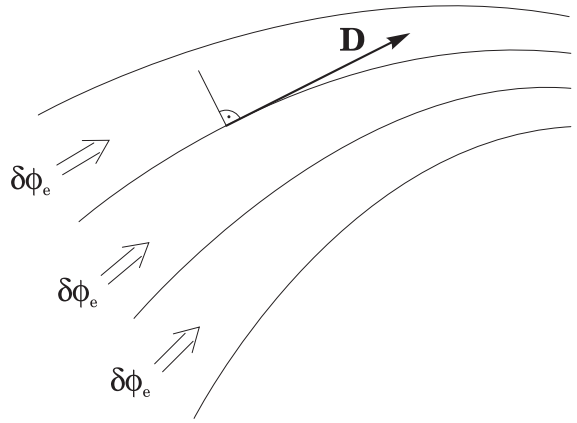
Slika 21.1: K pretoku vektorja $\mathbf{D}$.

$$\boxed{\phi_\mathrm{e} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}} \tag{21.1}$$

Tu očitno o nekem fizičnem pretakanju ni govora. Smo pa formalno-matematično identičen zapis srečali v enačbi 6.2; pri zapisu električnega toka (pretoka elektrin) skozi dano ploskev. No, tam je bil pretočni integral celo materializiran v fizičnem gibanju oblaka prostih nosilcev elektrine, čeravno je to gibanje človeškemu očesu "prikrito". Gotovo je bralcu iz fizike poznana slika pretakanja vode s primesmi prašnih delcev v prozorni cevi. Če gibanje ni ravno turbulentno (vrtinčno), se v cevi zarisujejo "lepe" laminarne linije, ki kažejo smer gibanja, in če pobliže pogledamo, moremo oceniti tudi hitrost delcev, torej vode, ter sklepati na pretok. To gibanje (pretok) ponazorimo grafično s tokovnicami (linijami), na katerih je vektor gostote pretoka tangencialen. Slika bo še bolj plastična in informativna, če si rišemo t.i. *pretočne cevke*, znotraj katerih je pretok enak. Ograje pretočnih cevk so hkrati tudi linije tokovnic (pretočnic). To grafično prezenatcijo pretoka si bomo izposodili tudi za naš električni pretok ϕ_e, ki ga bomo razdelili na več pretočnih cevk s pretoki $\delta\phi_\mathrm{e}$; slika 21.2.

Iz takšne slike je takoj razvidna smer vektorja $\mathbf{D}$, do neke mere pa tudi velikost; tam, kjer je cevka "stisnjena", je gostota pretoka večja. Ker je $\mathbf{D}(= \varepsilon\mathbf{E})$ tangencialen na ograji

[2] Določene snovi imajo anizotropne lastnosti. Hrastov les ima v smeri vlaken realtivno dielektričnost $2.5 - 4.2$, v prečni smeri pa $3.6 - 6.8$; podobno tudi kvarc: $\varepsilon_{\mathrm{r}\parallel} = 5.06$, $\varepsilon_{\mathrm{r}\perp} = 4.69$.

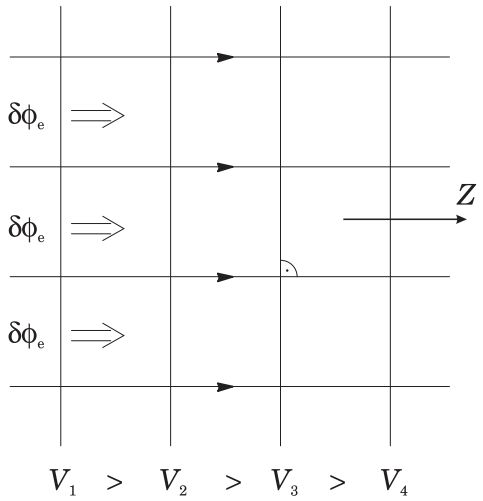


Slika 21.2: Grafična predstavitev pretočnih cevk.

pretočne cevke; **E** pa je pravokoten na ekvipotencialko, moremo zaključiti, da sta družini pretočnic in ekvipotencialk povsod v prostoru ortogonalni; reprezentanta ene in druge družine se v prostoru sekata pod pravim kotom.

Zgled 21.1

Najelementarnejše je homogeno polje (zgleda 18.3 in 18.6). Potencial je podan z enačbo $V(z) = -E_0 z + C$. Ekvipotencialke so ravnine $z =$ konst. Pretočnice so vzdolž Z-osi; če rišemo narise v (YZ) ravnini, dobimo sliko 21.3. Ograje pretočnih



Slika 21.3: Pretočnice in ekvipotencialke v homogenem polju.

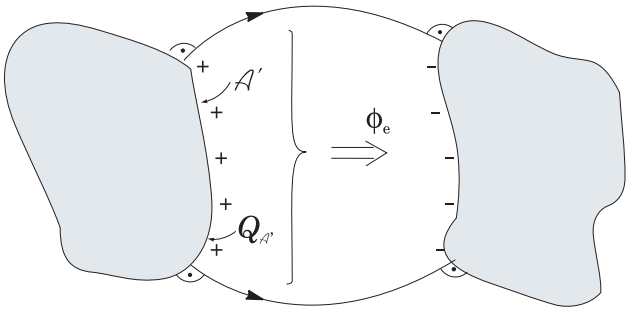
cevk opremimo tudi s puščico; s tem označimo smer polja **D**(ali **E**). ♣ Bralec naj v izolatorju koaksialnega kabla (v prerezni ravnini) skicira šest ekvipotencialk z enakimi δU in osem pretočnih cevk z (enakimi) pretoki $\delta\phi_{\mathrm{e}}$. ♣

Očitno moremo "pajčevino" (družini pretočnic in ekvipotencialk) risati povsod tam, kjer polje je. Poglejmo si, kako je s tem na meji prevodnik-izolator. Če integral v enačbi

21.1 zapišemo za del površine prevodnika ($\mathcal{A}'$ je poljuben segment površine prevodnika), potem je

$$\phi'_{\mathrm{e}} = \int_{\mathcal{A}'} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}'} D_n \, da$$

Ker pa je $D_n = \varepsilon E_n$, in je ε dielektričnost izolatorja ter je E_n na površini prevodnika enaka $E(T_+) = \sigma(T)/\varepsilon$, je zato ϕ'_{e} enak integralu ploskovne elektrine oz. elektrini $Q_{\mathcal{A}'}$ na tej ploskvi; $\phi'_{\mathrm{e}} = Q_{\mathcal{A}'}$. Še več. Na površini prevodnega telesa eksistira le normalna komponenta vektorja $\mathbf{E}$, torej E_n, zato ima tam $\mathbf{D}$ le komponento D_n, ki je enaka ploskovni elektrini na tistem mestu; $D_n(T_+) = \sigma(T)$. Polja $\mathbf{E}$ v prevodniku ni, zato tudi ni $\mathbf{D}$-ja; pretočnice se na površinah prevodnikov "končajo", če je tam $(-)$ elektrina, ali "začenjajo", če je tam $(+)$ elektrina; slika 21.4. Na površini prevodnika "stojijo" ograje pretočnih cevk



Slika 21.4: Korelacija med pretokom in presežkom elektrin na prevodniku.

pravokotno. Ker pa imamo v praksi presežne elektrine skoraj praviloma le na prevodnih telesih, se pretočne cevke "začno" na enem od teles in "končajo" na nekem drugem telesu. V žargonu tudi rečemo, da se je del $(+)$ elektrine nekega telesa "navezal" na del $(-)$ elektrine drugega telesa.

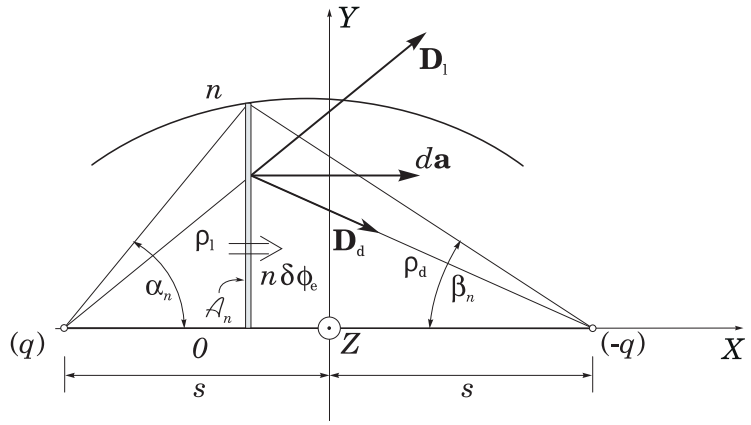
Zgled 21.2

V tem zgledu bomo določili "pajčevino" devetih ekvipotencialk in osmih pretočnih cevk za elektrostatično polje okrog naelektrenega dvovoda iz zgleda 18.5 z izmerami: $d = 26$ mm, $\rho_0 = 5$ mm. Po izrazih iz omenjenega zgleda je $e = 1$ mm; potenciala obeh žil sta $\pm C_0 = \pm q \ln 5/2\pi\varepsilon_0$. Parameter (k) ekvipotencialk iz razdelka 18 je $\exp(C \ln 5/C_0)$. Narisati želimo devet ekvipotencialk, zato si bomo za C/C_0 izbrali tele vrednosti: 1, 3/4, 1/2, 1/4, 0, $-1/4$, $-1/2$, $-3/4$, -1. Iz teh k-jev sledijo, po enačbah iz omenjenega razdelka, tudi parametri krogov z izmiki p_i in radiji r_i; enačbi moremo zapisati s hiperbolskimi funkcijami:

$$p_i = -s \coth(C_i \ln 5/C_0) \qquad r_i = \frac{s}{|\sinh(C_i \ln 5/C_0)|}$$

Lotimo se še pretočnih cevk. Za obliko polja med žicama sta odgovorni "pomožni" premi elektrini $(\pm q)$ v legah $x = \pm s = \pm 12$ mm. Povedali smo, da je ograja pretočne cevke tokovnica (pretočnica), na kateri je $\mathbf{D}$ tangencialen, in začne svoj potek na $(+)$ elektrini ter se konča na $(-)$ elektrini. Pri nas bo njen začetek na levem valju s $(+)$ elektrino, konec pa na desnem valju z $(-)$ elektrino. Zveznica med točkama T_1 in T_2 (slika 18.15) že more biti ograja, saj je tam $\mathbf{D}$ le z x-komponento. Indeksirajmo jo kot 0-to ograjo. Poiščimo sedaj n-to ograjo tako, da bo pretok med 0-to in n-to

ograjo enak n/m celotnega pretoka (m je število vseh pretočnih cevk; pri nas je $m = 8$). Ker pa sta valja edini naelektreni telesi in tvorita zaključen sistem, se bo vsa elektrina ql levega valja navezala na elektrino $-ql$ desnega valja; kjer je l dolžina dvovoda. Pretok v eni cevki bo $\delta\phi_\mathrm{e} = ql/m\,(= ql/8)$. Skicirajmo 0-to in n-to ograjo v okolici pomožnih elektrin $(+q)$ in $(-q)$; slika 21.5. Pretok skozi ploskev $\mathcal{A}_n$ zaradi



Slika 21.5: K določanju ograj pretočnih cevk dveh premih elektrin.

leve elektrine zapišemo kot

$$\int_{\mathcal{A}_n} \mathbf{D}_l \cdot d\mathbf{a}$$

kjer je $D_l = q/2\pi\rho_l$. Tak integral pa smo že rešili v zgledu 2.15. Zanj bi dobili rezultat, ki je sorazmeren ravninskemu kotu, pod katerim vidimo ploskev $\mathcal{A}_n$ iz mesta elektrine $(+q)$. Pri nas bo ta integral enak $ql\alpha_n/2\pi$. Desna $(-)$ elektrina ima pretok skozi $\mathcal{A}_n$ tudi v isto smer. Pretok zaradi nje bo enak $ql\beta_n/2\pi$. Skupen pretok je tako $n\delta\phi_\mathrm{e} = ql(\alpha_n + \beta_n)/2\pi$. Celoten pretok ql pa je tudi $m\delta\phi_\mathrm{e}$, kar končno da enačbo

$$\alpha_n + \beta_n = 2\pi n/m$$

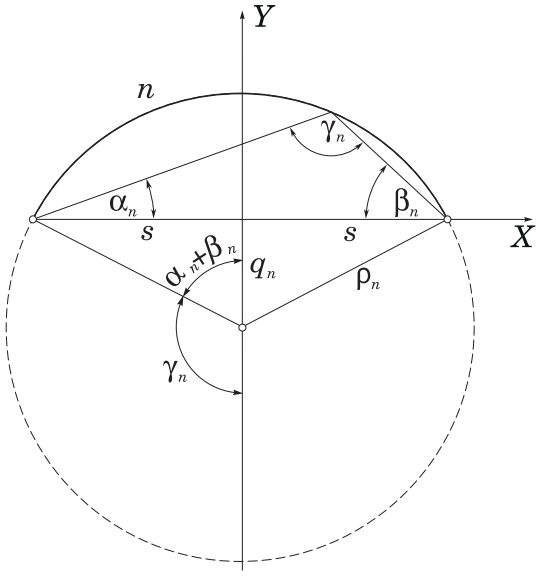
Kot $\gamma_n = \pi - \alpha_n - \beta_n$ se na pretočnici ohranja, kar pomeni, da so ograje loki krožnic; le krožnice imajo namreč to lastnost. Zaradi simetrije bodo središča krožnic očitno na Y-osi; krožnice bodo potekale skozi obe elektrini; slika 21.6.

Iz trigonometrije sledita relaciji:

$$q_n = -s\cot(2\pi n/m) \qquad \rho_n = \frac{s}{|\sin(2\pi n/m)|}$$

Tabeli 21.1 in 21.2 podajata parametre krožnic družine ekvipotencialk in družine pretočnic.

Na sliki 21.7 je narisana ortogonalna mreža ekvipotencialk in pretočnic. Med 2. in 6. ograjo je zbrana polovica celotnega pretoka, torej je tudi količina elektrine na obeh žicah med tema ograjama polovica celotne $(\pm ql/2)$. Očitno je tam gostota ploskovne elektrine večja, na hrbtni strani žic pa manjša; zaradi vpliva soseda se na notranjih straneh žic razporedi več elektrine kot na hrbtnih straneh.



Slika 21.6: Ograje pretočnih cevk dveh premih elektrin so valji.

i	C_i/C_0	p_i/s	r_i/s
1	1	-1.083	0.417
2	3/4	-1.196	0.657
3	1/2	-1.500	1.118
4	1/4	-2.618	2.420
5	0	$\pm\infty$	∞
6	$-1/4$	2.618	2.420
7	$-1/2$	1.500	1.118
8	$-3/4$	1.196	0.657
9	-1	1.083	0.417

Tabela 21.1: Primer izračuna ekvipotencialk.

n	$2\pi n/m$	q_n/s	ρ_n/s
0	0	$\pm\infty$	∞
1	$\pi/4$	-1	$\sqrt{2}$
2	$\pi/2$	0	1
3	$3\pi/4$	1	$\sqrt{2}$
4	π	$\pm\infty$	∞
5	$5\pi/4$	-1	$\sqrt{2}$
6	$3\pi/2$	0	1
7	$7\pi/4$	1	$\sqrt{2}$
8	2π	$\pm\infty$	∞

Tabela 21.2: Primer izračuna pretočnic.

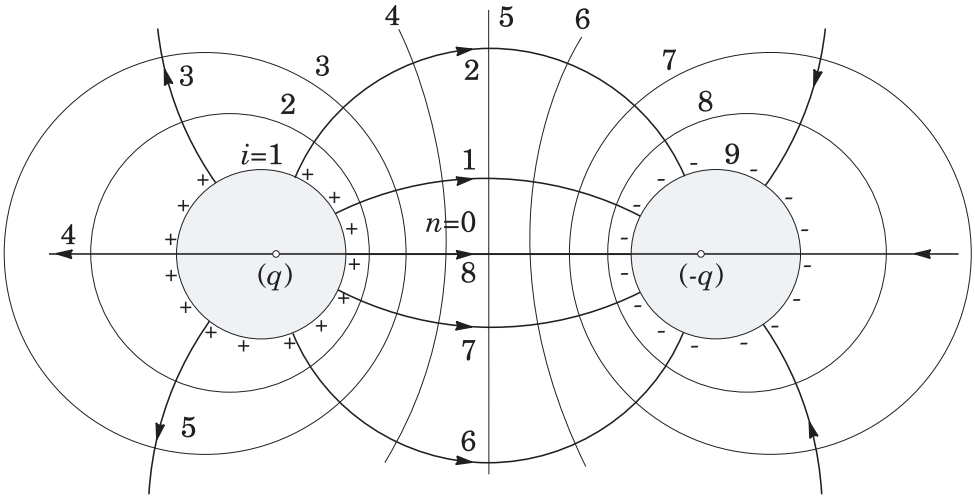
22. Mejni pogoji elektrostatičnega polja

Vsa dosedanja razmišljanja smo "vodili" v vakuumu ali v prostoru, ki je bil izpolnjen z homogenim dielektrikom (izolatorjem). Seveda pa imamo v praksi mnogokrat opraviti z elektrostatičnimi sistemi, kjer nastopa več izolatorjev. Vmesno je tole vprašanje: kaj je z našima vektorjema **E** in **D** na prehodu med različnima medijema?

Mejni pogoj vektorja E. Za ta vektor vedno velja, da je njegov krivuljni integral po sklenjeni poti enak nič (enačba 13.3),

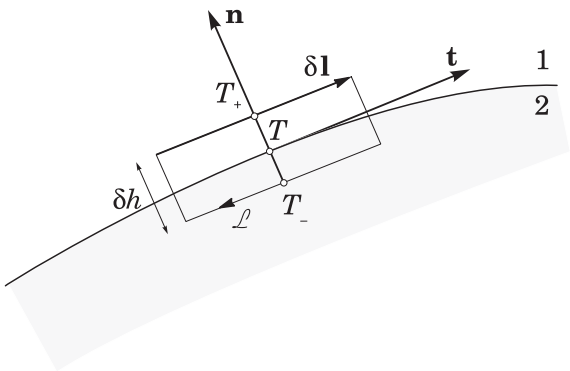
$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Iz te enačbe smo dalje izvedli potencial, ki je bil vezan na potencialno energijo oz. na delo elektrostatičnega polja. Enačbo moremo tolmačiti tudi kot posebno lastnost elektrostatičnega polja, in sicer, da je delo tega polja po sklenjeni poti vedno enako nič oz.,



Slika 21.7: Ekvipotencialke in pretočnice simetričnega dvovoda.

da je elektrostatično polje *potencialno*. Ta lastnost je generalna, zato mora veljati v vseh medijih, pa tudi na/ob mejah različnih medijev.



Slika 22.1: K integraciji krivuljnega integrala polja **E** ob meji.

Na/ob meji si izberimo majhno sploščeno pravokotno zankico dolžine δl in višine δh, $\delta h \ll \delta l$; slika 22.1. Točki T_+ in T_- sta zgornja in spodnja mejna točka k točki T "v meji" in sta še vsaka v svojem mediju. Ker je polje **E** fizikalno omejeno (ne more biti neskončno), je $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ po krajših stranicah majhen kot želimo; v limiti je nič. Od sklenjenega integrala ostaneta le vzdolžni (tangencialni) stranici, ki naj sta tako kratki, da integracijo po njih zamenjamo s produktom polja **E** in dolžine $\delta\mathbf{l}$; pišemo

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \doteq \mathbf{E}(T_+) \cdot \delta\mathbf{l} - \mathbf{E}(T_-) \cdot \delta\mathbf{l} = 0$$

Košček poti $\delta\mathbf{l}$ zapišimo kot $\mathbf{t}\delta l$, kar dalje da: $(E_t(T_+) - E_t(T_-))\delta l = 0$. Ker pa je δl kakor hočemo kratek, ne pa nič, sledi

$$\boxed{E_t(T_+) - E_t(T_-) = 0} \tag{22.1}$$

Mejni pogoj beremo takole: tangencialna komponenta vektorja električne poljske jakosti prehaja mejo dveh sredstev (medijev, snovi) zvezno.

Meja dveh snovi je očitno neka ploskev, ki ima v splošni točki T na meji opredeljen vektor normale $\mathbf{n}$, ki naj po dogovoru kaže v prostor z indeksom 1. Verjetno ni težko uvideti, da je mogoče mejni pogoj za vektor $\mathbf{E}$ zapisati tudi v vektorski obliki kot

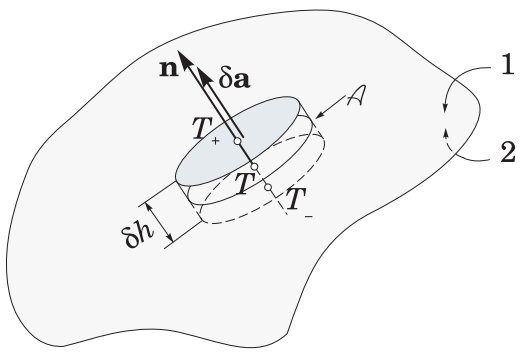
$$\boxed{\mathbf{n} \times (\mathbf{E}(T_+) - \mathbf{E}(T_-)) = \mathbf{0}} \tag{22.1a}$$

Zaradi ujemanja tangencialnih komponent je vektor razlike normalni vektor, zato je vektorski produkt gotovo nič.

Mejni pogoj vektorja D. Ta vektor smo vpeljali z enačbo $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ in zanj vedno velja, da je njegov pretok skozi sklenjeno ploskev enak algebraični vsoti vseh objetih prostih elektrin (enačba 20.3),

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{not. prosti}}$$

Enačba velja povsod, torej drži tudi za ploskev, ki delno sega v prvi in delno v drugi medij. Vzemimo spet nek del mejne površine in si za sklenjeno ploskev izberimo plašč majhnega sploščenega valja; slika 22.2. Na meji je načeloma neka ploskovna gostota proste elektrine.



Slika 22.2: K integraciji ploskovnega integrala polja **D** ob meji.

Če je δa majhen, je te elektrine znotraj plašča valja približno $\sigma(T)\delta a$. Pretok vektorja $\mathbf{D}$ skozi obod valja je majhen kakor hočemo, če je le višina valja δh dovolj majhna, saj je vektor $\mathbf{D}$ absolutno navzgor omejen. Od ploskovnega integrala tako ostaneta le integraciji po obeh osnovnih ploskvah, ki ju v približku zapišemo s produktoma; dobimo:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \doteq \mathbf{D}(T_+) \cdot \delta\mathbf{a} - \mathbf{D}(T_-) \cdot \delta\mathbf{a} \doteq \sigma(T)\delta a$$

Ploskvico $\delta\mathbf{a}$ bomo pisali kot $\mathbf{n}\delta a$, enačbo pa kot $(D_n(T_+) - D_n(T_-) - \sigma(T))\delta a \doteq 0$. Če je ploskvica δa majhna, in ne nič, ter sta T_+ in T_- limitno blizu točke T, sledi

$$\boxed{D_n(T_+) - D_n(T_-) = \sigma(T)} \tag{22.2}$$

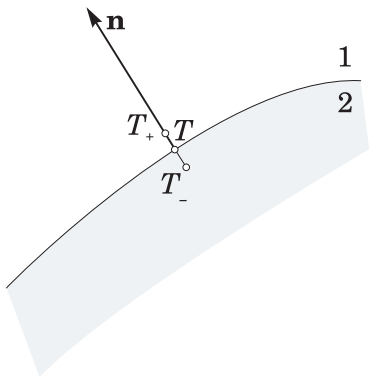
Mejni pogoj beremo takole: normalna komponenta vektorja **D** napravi na meji dveh medijev skok, ki je enak gostoti proste ploskovno porazdeljene elektrine na tistem mestu. Tudi ta mejni pogoj moremo zapisati v vektorski obliki z vektorjem normale:

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}(T_+) - \mathbf{D}(T_-)) = \sigma(T)} \tag{22.2a}$$

Pri tem zapisu se velja držati dogovora, da vektor normale "kaže" v prostor z indeksom 1; v nasprotnem bi se zapis razlikoval za predznak.

Elektrostatično polje ob meji. Enačbi 22.1 in 22.2 sta potemtakem mejna zapisa osnovnih enačb elektrostatičnega polja. Poglejmo si sedaj dve tipični stičišči dveh medijev, in sicer: i) mejo izolator-prevodnik in ii) mejo izolator-izolator.

Prvi primer smo že večkrat srečevali; potrebno ga je le še enkrat osvetliti v luči mejnih pogojev. Bodi prostor 1 izolator z dielektričnostjo ε, prostor 2 pa prevodnik; slika 22.3. V notranjosti prevodnika (razen meje) nimamo niti presežka elektrin niti presežka prostih



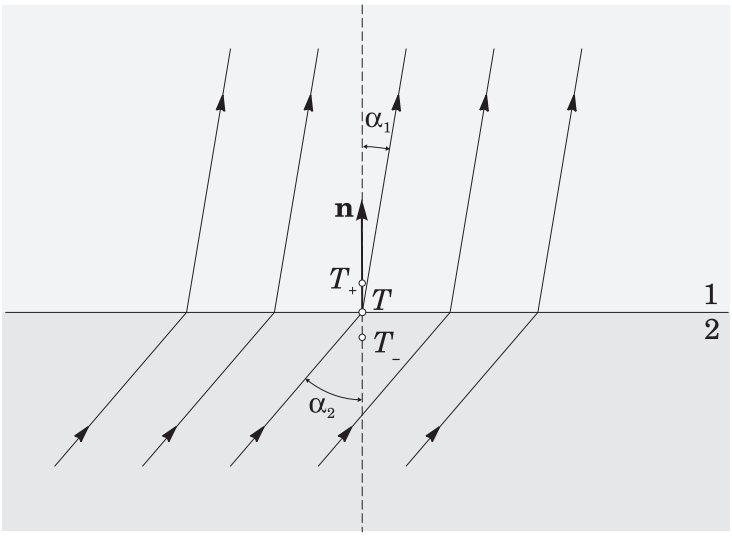
Slika 22.3: Meja izolator-prevodnik.

elektrin, zato sta **E** in **D** tam enaka nič. Iz pogoja 22.1 dobimo $E_t(T_+) = 0$; tik nad površino prevodnika ni tangencialne komponente polja **E**, zato je tudi $D_t(T_+) = 0$. Iz pogoja 22.2 dobimo $D_n(T_+) = \sigma(T)$ oz. $E_n(T_+) = \sigma(T)/\varepsilon$. To pa sta rezultata, ki ju poznamo že od prej, zato bo tudi ploskovna sila enaka: $f_{en} = \sigma^2/2\varepsilon = \varepsilon E_n^2(T_+)/2$.

Meja izolator-izolator ne more imeti proste elektrine, saj je ta praviloma na prevodniku, tega pa tu ni. Zamislili bi si sicer lahko mejo dveh dielektrikov z vmesno "ozko" špranjo, kjer bi imeli tanek prostorski oblak elektrine ρ, ki bi ga zaradi ozkosti špranje (δh) obravnavali kot ploskovno elektrino z gostoto $\sigma = \rho\delta h$. ♣ Ta primer tehnično ni tako zanimiv, ga pa bralec lahko obdela sam. ♣ Poglejmo si zato primer s $\sigma = 0$. Ker bomo relacije pisali za mejne točke T_+, T_- in T, ki so ekstremno blizu, moremo površinsko geometrijo okrog mejnih točk smatrati kot lokalno ravno, električno polje v neposredni okolici pa kot lokalno homogeno; slika 22.4.

Iz enačbe 22.1 dobimo: $E_t(T_+) = E_t(T_-) = E_t(T)$, iz enačbe 22.2 pa: $D_n(T_+) = D_n(T_-) = D_n(T)$ oz. $\varepsilon_1 E_n(T_+) = \varepsilon_2 E_n(T_-)$. Če enačbi delimo, dobimo še

$$\frac{E_t(T_+)}{\varepsilon_1 E_n(T_+)} = \frac{E_t(T_-)}{\varepsilon_2 E_n(T_-)}$$



Slika 22.4: Lom polja na meji izolator-prevodnik.

Za kvocient E_t/E_n moremo pisati $\tan\alpha$, kjer je α kot med smerjo polja $\mathbf{E}$ in smerjo normale $\mathbf{n}$. Zgornja enačba je tako:

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Slednja enačba je t.i. *zakonitost preloma elektrostatičnega polja*. Ta zakon govori o tem, da se smer elektrostatičnega polja med dvema dielektrikoma (z)lomi, če vstopa polje na mejo poševno. Te zakonitosti ne smemo mešati z *lomnim zakonom* v optiki (tam je razmerje sinusov kotov enako razmerju lomnih količnikov in se lomi smer širjenja svetlobe – valovanja).

V primeru, da je $\alpha_2 = 0$, je tudi $\alpha_1 = 0$; polje, ki na mejo "vstopa" pravokotno, jo tako tudi "zapušča". Če polje v 2. mediju mejo "oplazi" ($\alpha_2 = \pi/2$), jo "oplazi" tudi v 1. Torej, tu ni govora o kakšnem kotu popolnega odboja, kot pri valovanju.

Zanimiv pa je nek drug primer, ki se pojavi pri poševnem prehodu iz visokodielektrične v nizkodielektrično snov (ali obratno). Naj je α_2 nek od nič različen kot in naj je $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$; po zgornji enačbi bo $\alpha_1 \simeq 0$. Vektor $\mathbf{E}$ bo na površini meje (v T_+) "stal" praktično pravokotno, zato tangencialne komponente skoraj ne bo niti v 1. niti v 2. mediju, komponenta $E_n(T_-)$ pa bo zaradi visokega razmerja dielektričnosti tudi majhna; $E_n(T_-) \ll E_n(T_+)$. To pa formalno spominja na razmere ob meji izolator-kovina. V bližini dielektrika z visoko dielektričnostjo je električno polje podobno oblikovano kot v bližini prevodnika. Primer: če v neko električno polje vnesemo dielektrik z visoko dielektričnostjo ali pa enako oblikovano nevtralno prevodno telo, bo novo polje v zunanjosti enega ali drugega telesa identično.

Tudi na meji izolator-izolator eksistira ploskovna sila, kot je to poznano za mejo izolator-kovina. Sama izpeljava presega okvire osnov o poljih, zato tu navajamo le končni rezultat:

$$\boxed{f_{en}(T) = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left(E_t^2(T) + \frac{D_n^2(T)}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)} \tag{22.3}$$

Smer ploskovne sile je vedno usmerjena v prostor z nižjo dielektričnostjo. Eksperiment, ki to silo potrjuje, je na primer padanje oljnih kapljic med naelektrenima ploščama kondenzatorja. V območju polja se te raztegnejo v smeri polja, v pravokotni smeri pa se sploščijo.

Zgled 22.1

Vzemimo mejo med zrakom ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0$) in oljem ($\varepsilon_2 = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 = 4\varepsilon_0$). Naj ima polje $\mathbf{E}$ v olju ob meji jakost $E(T_-) = 50$ kV/m in naj vstopa v mejo pod kotom $\alpha_2 = 30°$. Po enačbi 22.1 bo $E_t(T) = E_t(T_+) = E_t(T_-) = E(T_-)\sin\alpha_2$, po enačbi 22.2 ($\sigma = 0$) pa bo $D_n(T) = D_\mathrm{n}(T_+) = \varepsilon_0 E_n(T_+) = D_n(T_-) = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 E_n(T_-) = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 E(T_-)\cos\alpha_2$.

Poljska jakost v zraku ob meji bo:

$$\begin{aligned} E(T_+) &= \sqrt{E_t^2(T_+) + E_n^2(T_+)} \\ &= \sqrt{\sin^2\alpha_2 + \varepsilon_\mathrm{r}^2\cos^2\alpha_2}\; E(T_-) = 3.5\; E(T_-) = 175 \text{ kV/m} \end{aligned}$$

Po zakonitosti preloma bo izstopni kot α_1 približno 8.2°. Ploskovna sila na meji zrak-olje bo (po enačbi 22.3) usmerjena v zrak in enaka

$$f_{en} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)}{2}\left(\sin^2\alpha_2 + \varepsilon_\mathrm{r}\cos^2\alpha_2\right) E^2(T_-) = 108 \text{ mN/m}^2$$

23. Vir enosmerne napetosti

V dosedanjih razdelkih smo pogosto rabili sintagmo naelektreno telo, nič pa nismo govorili o sami tehnični izvedbi tega. Čas je, da povemo nekaj osnovnega o virih enosmerne napetosti in se dogovorimo za določene relevantne električne količine, s katerimi bomo opredelili njegove električne lastnosti, ne meneč se več potem za fizikalne procese, ki se odvijajo v "ozadju" – ti so namreč lahko kemični, mehanski, termični itd.

Iz fizike poznamo pojav elektrodne napetosti. Če kovinsko elektrodo (palico, ploščo, telo) pomočimo v raztopino, potem ta raztaplja površino elektrode in v raztopino ob elektrodi prehajajo iz kovine (+) ioni kovine – pri tem postaja elektroda vse bolj negativna (presežek elektronov). Ta razdvojena (±) elektrina pa proces raztapljanja vse bolj zavira in končno zavre – med elektrodo in raztopino se vzpostavi t.i. *elektrodna napetost*, ki jo povzroča električno polje razdvojenih elektrin. Seveda pa je ta napetost predvsem odvisna od vrste kovine in vrste raztopine. Za kovine je elektrodna napetost vedno negativna. Ker pa te napetosti ne moremo direktno meriti, jo merimo primerjalno glede na standardizirano vodikovo elektrodo (platinasta elektroda z absorbiranim vodikom v enomolarni raztopini vodikovih kationov); zato imajo nekatere kovine (Al, Zn, Fe,...) elektrodno napetost negativno, druge (Cu, Ag, An,...) pa pozitivno.

Ta efekt se koristi pri galvanskih členih. Voltov člen sestavljata Zn in Cu elektroda, elektrolit pa je razredčena žveplena kislina (H_2SO_4), ki disociira v ione SO_4^{--} in H^+. Napetost med elektrodama določata elektrodni napetosti Zn in Cu. Če zunaj elektrolita elektrodi galvansko spojimo s prevodnikom, stečejo naslednji sočasni procesi: i) elektroni gredo iz Zn elektrode na Cu elektrodo po prevodniku, ii) ioni H^+ gredo k Cu elektrodi, se tam zbirajo in navezujejo na prihajajoče elektrone na Cu elektrodi, iii) ioni SO_4^{--}

gredo k Zn elektrodi in se vežejo z Zn^+ ioni v cinkov sulfat ($ZnSO_4$) in iv) Zn se vseskozi raztaplja in zagotavlja presežek elektronov na njej oz. napetost med elektrodama. Ta proces se odvija toliko časa, dokler Zn elektroda ne "izgori" ali dokler se elektrolit ne iztroši. Napetostno bolj stabilen vir predstavlja Laclanchéjev suhi člen. Za elektrodi ima ogljikovo palico in cinkovo čašico, elektrolit pa je amonijev klorid (NH_4Cl). Često je v rabi tudi svinčev (Pb) akumulator. Kot elektrodi ima svinec (Pb) in svinčev dioksid (PbO_2), elektrolit pa je razredčena H_2SO_4. Pri praznjenju akumulatorja se na obeh elektrodah tvori svinčev sulfat ($PbSO_4$) – in elektrolit se siromaši. Svinčev akumulator, in še nekateri drugi, se more po izpraznitvi ponovno napolniti s tokom zunanjega vira v obratni smeri.

Seveda pa "generiranja" električne napetosti ne zasledimo le pri določenih kemičnih procesih; prisotno je tudi ob drugačnih fizikalnih okoliščinah; npr. termočlen (spoj dveh kovin). Med spojema pride do prehajanja prostih elektronov, ki imajo v eni snovi višjo energijo kot v drugi. Tudi to prehajanje se ustavi, ko barierna poljska jakost, oz. napetost med razdvojenimi elektrinami v celoti kompenzira prvotno medenergijsko "stopničko". Napetost termočlena je pogojena z izbiro kovin v spoju (pogosto spoj Cu-konstantan[1]) in je izrazito temperaturno odvisna, zato se termočlen običajno rabi v merilne namene. Podoben princip prehajanja elektronov iz snovi v snov se odvija tudi pri torni elektriki, kjer se z dodatnim trenjem doseže predvsem boljši stik in lažji prehod elektronov med snovema.

Nekoliko drugače je pri fotoefektu. Če na katodo padajo fotoni, lahko prosti elektroni pridobijo tolikšno energijo (izstopno delo), da izstopijo in pridejo do anode, kjer se zbirajo. Proces selitve se ustavi, ko polje razdvojenih elektrin (in njihova napetost) kompenzira izstopno kinetično energijo elektronov.

Električni model napetostnega vira. Po tem kratkem opisu nekaterih osnovnih načinov generiranja električne napetosti si moremo predočiti določen električni model, ki je skupen tem in podobnim principom.

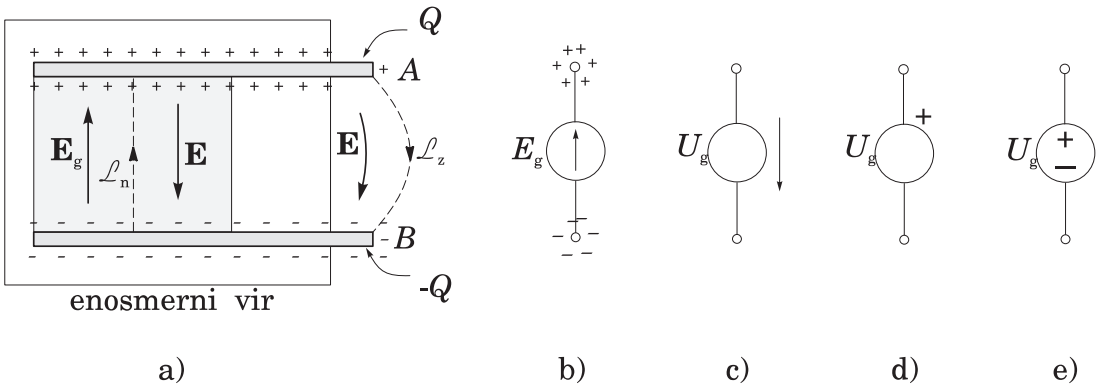
1) Naj v nekem neelektričnem sistemu obstoja določena (generatorska) razdvajalna sila $\delta\mathbf{F}_\mathrm{g}$, ki zmore mobilne naboje (δQ) "prenašati" z mesta B na mesto A in tako na tem mestu "ustvarjati" presežek (+) elektrine (Q), na mestu B pa enak presežek (−) elektrine ($-Q$).

2) V smislu Coulombove sile moremo tej sili prirediti "ekvivalentno električno poljsko jakost" $\mathbf{E}_\mathrm{g} = \delta\mathbf{F}_\mathrm{g}/\delta Q$.

3) "Preseljevanje" elektrin se zaključi, ko je električno polje ($\mathbf{E}$) razdvojenih (±) elektrin v ravnovesju z omejeno ekvivalentno jakostjo $\mathbf{E}_\mathrm{g}$; torej, ko je $\mathbf{E} + \mathbf{E}_\mathrm{g} = \mathbf{0}$.

Shematičen prikaz razmer ponazarjajo skice in simboli na sliki 23.1. Na skici a) predstavlja šrafiran del "generatorsko substanco", kjer deluje (je prisotna) razdvajalna sila in njej prirejena jakost $\mathbf{E}_\mathrm{g}$; mesti A in B sta elektrodi in pomenita (+ in −) sponki generatorja. Ko je generator neobremenjen (ko sta sponki A in B "odprti"), je znotraj generatorjeve substance vzpostavljeno ravnotežje ($\mathbf{E}_\mathrm{g} + \mathbf{E} = \mathbf{0}$) in količina razdvojene elektrine ($\pm Q$) je ustaljena. Napetost U_AB med sponkama A in B je (integral) $\int_{\mathcal{L}_\mathrm{z}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$.

[1]Konstantan je zlitina, ki vsebuje 54% Cu, 45% Ni in 1% Mn.



Slika 23.1: Model napetostnega vira in uporabljene oznake zanj.

Upoštevaje lastnost elektrostatičnega polja $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, je ta napetost enaka $-\int_{\mathcal{L}_\mathrm{n}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, in glede na ravnovesje $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_\mathrm{g}$, je enaka še (integralu) $\int_{\mathcal{L}_\mathrm{n}} \mathbf{E}_\mathrm{g} \cdot d\mathbf{l}$. S slednjo izražavo vpeljemo napetost (U_g) generatorja pri odprtih sponkah,

$$\boxed{U_\mathrm{g} = \int_{\mathcal{L}_\mathrm{n}} \mathbf{E}_\mathrm{g} \cdot d\mathbf{l}} \tag{23.1}$$

Ta zapis bo v nadaljevanju le formalnega značaja, kajti polja $\mathbf{E}_\mathrm{g}$ praviloma ne poznamo in nas tudi ne bo zanimalo. Ključen bo le integral, torej napetost U_g, ki jo moremo za dani vir (med sponkama A in B) dovolj natančno tudi izmeriti.

Na skici b) je shematično prikazana še bolj poenostavljena zgradba napetostnega vira. V kasnejših električnih vezjih bomo tak napetostni vir risali s simboli s skic c) ali d) ali e). Smer puščice na skici c) nakazuje smer električne poljske jakosti razdvojenih elektrin med sponkama, polariteta (+) na skici d) označuje sponko višjega potenciala in skica e) jasno kaže obe polariteti vira. Tak *generator* bo v nadaljevanju razumljen kot *koncentriran element*, ki ga v celoti opredeljuje le dana napetost med sponkama[2].

Seveda pa se v praktični elektrotehniki uporabljajo pretežno napetostni viri, ki jih tu še nismo omenjali in bazirajo na principu elektromagnetne indukcije (Faradayev zakon) ali pa delujejo kot električno-električni pretvorniki. Ti zadnji so danes v praksi skoraj nepogrešljivi, saj dajejo na izhodu (med sponkama) napetosti želenih vrednosti (stabilizirani usmernik) ali želenih časovnih oblik (funkcijski generatorji). Slednjim bomo njihove napetosti pisali kot $u_\mathrm{g}(t)$ in navajali časovne zakonitosti; npr. $u_\mathrm{g}(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + \varphi_n)$. Označbe takih generatorjev bodo enake kot na skicah c), d) ali e).

Z vpeljavo napetostnega vira smo naša električna dogajanja – v nadaljevanju tudi magnetna ter elektromagnetna – formalno ločili (separirali) od drugih neelektričnih (ali električnih) procesov; nadomestili smo jih z ekvivalentnim virom napetosti U_g.

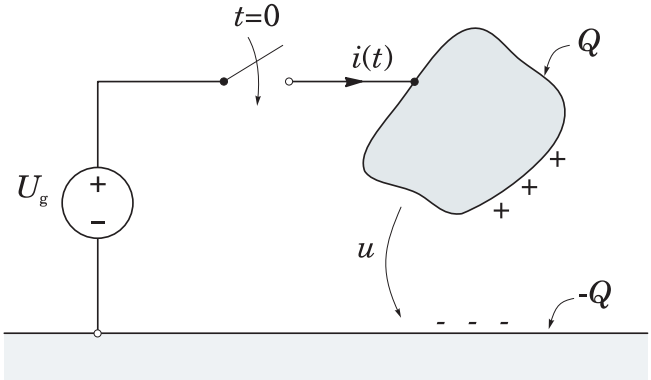
Z električnega vidika bo tudi pomembno, kolikšno delo tak vir opravlja, ko razdvaja elektrine. Da vir oz. polje $\mathbf{E}_\mathrm{g}$ "prenese" elektrino δQ iz potenciala V (spodnja sponka), do potenciala $V + U_\mathrm{g}$ (zgornja sponka), opravi delo $\delta A_\mathrm{g} = \delta Q \int_{\mathcal{L}_\mathrm{n}} \mathbf{E}_\mathrm{g} \cdot \delta\mathbf{l}$, kar da:

$$\boxed{\delta A_\mathrm{g} = \delta Q\, U_\mathrm{g}} \tag{23.2}$$

[2]V poglavju o tokovnih poljih bomo model napetostnega vira dopolnili še z notranjo upornostjo, ki bo opredeljevala električne izgube generatorja – vendar tega ta trenutek še ne rabimo.

Dejansko delo zunanjih sil je seveda večje, vendar gre to na račun izkoristka (efektnosti) sistema, ki se skriva za sponkama.

Elektritev. Po tem obširnem uvodu moremo končno odgovoriti tudi na začetno vprašanje tega razdelka, namreč: kako telo naelektrimo? Če želimo neko prevodno telo naelektriti s pozitivno elektrino, potem (+) sponko generatorja galvansko povežemo s telesom, (−) sponko generatorja pa ozemljimo; slika 23.2. Ko ob trenutku $t = 0$ vklopimo stikalo, steče



Slika 23.2: Naelektritev prevodnika z napetostnim virom.

iz zemlje, preko vira, na telo tok $i(t)$. Ta teče toliko časa, dokler se napetost u med telesom in zemljo (to napetost povzročata elektrini $\pm Q$, ki sta $\pm$ integrala toka i) ne izenači z napetostjo U_g. Za čas elektrenja je značilna eksponencialna funkcija toka oblike $e^{-t/\tau}$, kjer je τ *časovna konstanta*. O tem, kolikšna je ta časovna konstanta in od česa vse je odvisna, bomo govorili kasneje; okvirni velikostni razredi zanjo se gibljejo od nanosekund do nekaj sekund. Po času t.i. *prehodnega pojava* se razmere na telesu stacionirajo; tok ne teče več, telo je naelektreno, med telesom in zemljo se vzpostavi električno polje in generator moremo odklopiti. Ob tem se postavlja logično vprašanje: koliko elektrine bo na koncu elektrenja na telesu? No, to pa je že vsebina naslednjega razdelka.

Bistvenega pomena za proces elektrenja je dejstvo, da napetostni vir ne vnaša dodatnih elektrin v prostor, temveč le obstoječe prerazporeja. Vloga vseh električnih virov (tako napetostnih kot tokovnih, ki jih bomo spoznali kasneje) je le v tem, da na določen način izvajajo prerazporejanje elektrin, sistem prostih elektrin pa pri tem ostaja vseskozi električno zaključen – v algebraični vsoti ostaja elektrinsko uravnotežen.

24. Kapacitivnost

Elektrostatičen sistem običajno tvorijo prevodna telesa, ki so naelektrena z določenimi množinami elektrine. Med njimi je električno polje, ki ga opredeljujeta vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$. Telesa imajo določene potenciale glede na referenčno mesto s potencialom nič (neskončna okolica ali zemlja) in med telesi obstajajo določene napetosti (potencialne razlike). Glede na relacije med elektrinami in njim pripadajočimi polji, ki smo jih do sedaj spoznali, moremo uvideti njihovo linearno soodvisnost. Namreč, če elektrine, ki nastopajo v določenem električno zaključenem sistemu, povečamo za faktor k, se s tem faktorjem povečata tako polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ kot tudi potenciali in napetosti; $Q \to kQ \Rightarrow \mathbf{E} \to k\mathbf{E}$, $\mathbf{D} \to k\mathbf{D}$,

$V \to kV$ in $U \to kU$ (lastnost homogenosti). Druga lastnost pa je veljavnost stavka superpozicije. Namreč, če tvorijo elektrine Q_1, Q_2, ..., Q_n določen električno zaključen sistem in pripadajo tem elektrinam polja $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., $\mathbf{E}_n$, potem je rezultirajoče polje njihova vsota; $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$. Podobno velja tudi za ostale količine polja: za $\mathbf{D}$, V in U. Ti lepi lastnosti veljata seveda le, če je izolator linearen – ta pa običajno je.

Vektorski količini $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ sicer zelo natančno popisujeta elektrostatične razmere v prostoru, sta pa s praktičnega vidika zelo neprikladni. Vektor $\mathbf{E}$ bi sicer mogli posredno meriti preko Coulombove sile, vendar bi bilo to sila nerodno, vektorja $\mathbf{D}$ pa sploh ne moremo meriti – vpeljali smo ga povsem matematično. Mnogo bolj priročni in merljivi pa sta njima pripadajoči integralni količini: napetost (potencial) in elektrina (integral toka elektrenja).

Pri določeni geometriji prevodnikov in izolatorjev bodo med elektrinami na prevodnih telesih in napetostmi med njimi očitno veljali določeni linearni odnosi, ki koreninijo v linearnosti relacij v elektrostatičnem polju in jih bomo v nadaljevanju opredelili z novimi pojmi kot so *kapacitivnost*, *delna kapacitivnost* in *nadomestna kapacitivnosti*.

Kapacitivnost. Če elektrostatični sistem tvorita le dve naelektreni prevodni telesi, potem je – v smislu električno zaključenega sistema – prvo telo naelektreno z elektrino $Q_1 = Q$, drugo pa z nasprotno elektrino $Q_2 = -Q$. Napetost med prvim in drugim telesom je $U_{12} = U$. Kapacitivnost takšnega sistema bomo označili s C, definirali pa s kvocientom[1]

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}} \tag{24.1}$$

Enota zanjo bo C/V=F (farad). Kapacitivnost nam bo pomenila merilo za "sprejetje" elektrin $\pm Q$, ko je med telesoma napetost U.

Če se ozremo na naše predhodne zglede, smo takšnih preprostih elektrostatičnih sistemov srečali kar nekaj. Prvi takšen primer je bila naelektrena "osamljena" prevodna krogla (Zgled 18.1). Krogli rečemo, da je osamljena, če je od zemlje, glede na polmer r_0, zelo oddaljena. Takrat za potencial v bližini krogle, v enačbi 18.3, ni potrebno upoštevati zrcalne elektrine, zato je njen potencial do zemlje praktično $Q/4\pi\varepsilon_0 r_0$. Kapacitivnost sistema krogle in oddaljene prevodne podlage je po enačbi 24.1 enaka $4\pi\varepsilon_0 r_0$. Če bi bil vmesen prostor izolator z dielektričnostjo ε, bi bila kapacitivnost $4\pi\varepsilon r_0$; torej za faktor relativne dielektričnosti ε_r večja. Kapacitivnost se tudi poveča, če je radij krogle večji. Za kroglico polmera $r_0 = 1$ cm je $C = 1.11 \cdot 10^{-12}\mathrm{F} = 1.11\,\mathrm{pF}$.

V zgledu 18.2 smo imeli koaksialni kabel. Tam je smiselno vpeljati kapacitivnost na enoto dolžine (c) kot kvocient vzdolžne gostote elektrine (q) in napetosti (U) med žilo in plaščem. Po tam izvedenih relacijah je $c = 2\pi\varepsilon_0/\ln(\rho_2/\rho_1)$. Tudi tu velja, da se c poveča za ε_r, če je vmesni prostor med žilo in plaščem izpolnjen z izolatorjem te relativne dielektričnosti. Pri razmerju $\rho_2/\rho_1 = e$ dobimo za vzdolžno kapacitivnost $55.6 \cdot 10^{-12}$ F/m = 55.6 pF/m. Če je dolžina kabla 100 m, je $C = 5.56 \cdot 10^{-9}$ F = 5.56 nF.

Za krogelni kondenzator iz slike 18.4 je $C = 4\pi\varepsilon_0 r_0 r_1/(r_1 - r_0)$. Ko je $r_1 \gg r_0$ je $C \doteq 4\pi\varepsilon_0 r_0$ – kar je rezultat za osamljeno kroglo.

[1]Kapacitivnost bi mogli enakovredno definirati tudi s kvocientom ϕ_e/U, kjer je ϕ_e količina električnega pretoka med telesoma, ko je med njima potencialna razlika U.

V zgledu 18.5 smo imeli primer dvovoda. Vzdolžna kapacitivnost bi zanj bila enaka $\pi\varepsilon_0/\ln((d+\sqrt{d^2-4\rho_0^2})/2\rho_0)$. Če je $\rho_0 \ll d$, potem je tudi $e \ll \rho_0$ (ekscentričnost je zanemarljiva) in $c \doteq \pi\varepsilon_0/\ln(d/\rho_0)$.

V zgledu 18.6 smo analizirali ploščni kondenzator. Ob omenjenih privzetkih bi bila kapacitivnost enaka $\varepsilon_0 l_1 l_2/d$, kjer je produkt $l_1 l_2$ površina plošč.

Zgled 24.1

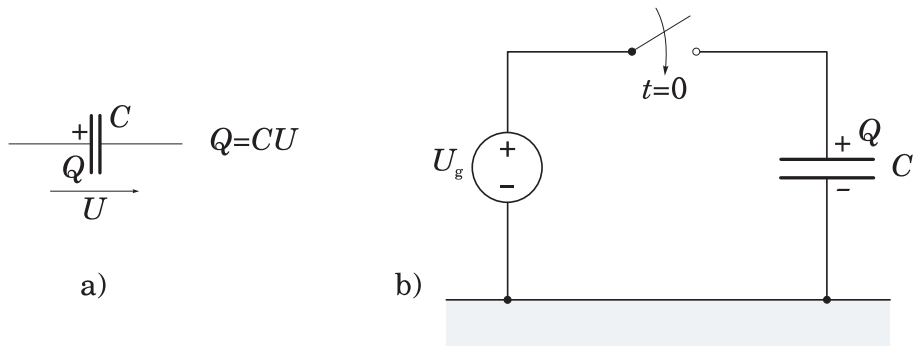
Poglejmo si kapacitivnost nadzemnega voda polmera $\rho_0 = 0.5$ cm, ki se nahaja na višini $h = 5$ m nad zemljo; skico b) na sliki 18.14 je potrebno le zavrteti za 90°. Če se zgledujemo po zgledu 18.5, je ekscentričnost $e = h - \sqrt{h^2-\rho_0^2}$; za naš primer je enaka 2.5 μm. Električna os leži praktično v geometrijski osi in polji določata pomožni elektrini ($\pm q$) v vodniku in v zrcalni legi pod zemljo. Po zgledu 18.5 je potencial

$$V_{\text{vodnika}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h-\rho_0}{\rho_0} \doteq \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{\rho_0}$$

Če izhajamo iz enačbe 24.1, dobimo kapacitivnost na enoto dolžine vodnika do zemlje: $c = 2\pi\varepsilon_0/\ln(2h/\rho_0) = 7.3$ pF/m. Vod dolžine 1 km ima kapacitivnost 7.3 nF. Če tak vod priključimo na napetost 10 kV do zemlje, bo na njem elektrina 73 μC (Zgled 4.3).

Vsem tem in takšnim sistemom dveh prevodnih teles rečemo, da so – z elektrostatičnega vidika – *kondenzatorji* s pripadajočo kapacitivnostjo. V smislu komponent *električnih vezij koncentriranih elementov* označimo tak sistem s simbolom dveh plošč, skica a) na sliki 24.1, in mu pripišemo vrednost kapacitivnosti. Pri koncentriranem elementu – kondenzatorju – izgubi prvotna geometrija vsakršen pomen; relevantni odnosi v polju se reducirajo le še na enačbo $Q = CU$.

Primer s slike 23.2 v prejšnjem razdelku bi v smislu vezij koncentriranih elementov narisali drugače; slika 24.1, skica b). Po končanem procesu elektrenja je napetost (U)



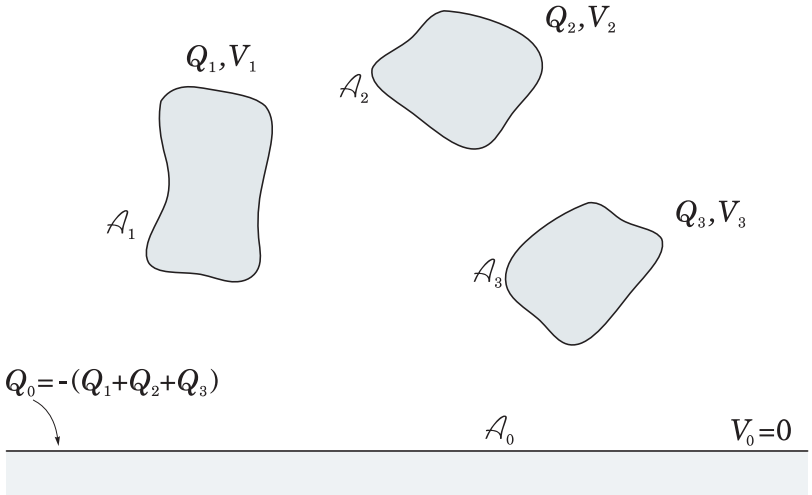
Slika 24.1: a) Simbol za kondenzator in pripadajoče oznake, b) modelno vezje elektritve.

na kondenzatorju enaka U_g, elektrina Q na njem pa je CU_g. Ko vir odklopimo, ostaja kondenzator naelektren.

Delne kapacitivnosti. Pojem delnih kapacitivnosti vpeljemo v tistih elektrostatičnih sistemih, kjer relevantno polje kreirajo (določajo) elektrine na treh ali več prevodnih

telesih. Tudi tovrstnih primerov imamo v praksi kar precej. Takšni so dvo- ali večžilni kabli, sistem daljnovodnih vrvi nad zemljo in drugi.

Na splošnosti kaj prida ne bomo izgubili, če si za začetek izberemo le tri prevodna telesa, ki se nahajajo nad zemljo – kot četrtim prevodnim telesom; slika 24.2. Telesa naj



Slika 24.2: Več prevodnih teles nad prevodno podlago.

so naelektrena z elektrinami Q_1, Q_2, Q_3 in naj so na potencialih V_1, V_2 in V_3. Za potenciale velja stavek superpozicije, torej jih lahko zapišemo kot vsoto prispevkov elektrin Q_1, Q_2 in Q_3. Razmišljamo takole: naj je v prvem koraku naelektreno le prvo telo s Q_1, drugi dve pa sta nevtralni; $Q_2 = Q_3 = 0$. Potenciali teles bodo $V_1^{(1)}$, $V_2^{(1)}$ in $V_3^{(1)}$; njihove vrednosti bodo zaradi linearnosti proporcionalne elektrini Q_1. Vpeljali bomo proporcionalne koeficiente oz. t.i. *potencialne koeficiente* p_{ij} in pisali: $V_1^{(1)} = p_{11}Q_1$, $V_2^{(1)} = p_{21}Q_1$ in $V_3^{(1)} = p_{31}Q_1$. Prvi indeks pri p se bo nanašal na telo, kjer pišemo potencial, drugi indeks pa se navezuje na telo, kjer je presežna elektrina. V drugem koraku si izberemo, da sta prvo in tretje telo nevtralni ($Q_1 = Q_3 = 0$), drugo telo pa ima elektrino Q_2. Pripadajoči delni potenciali so: $V_1^{(2)} = p_{12}Q_2$, $V_2^{(2)} = p_{22}Q_2$ in $V_3^{(2)} = p_{32}Q_2$. Na koncu ponovimo enako s tretjim telesom; dobimo: $V_1^{(3)} = p_{13}Q_3$, $V_2^{(3)} = p_{23}Q_3$ in $V_3^{(3)} = p_{33}Q_3$. Če potencialne prispevke posameznih elektrin seštejemo, dobimo potenciale teles:

$$V_i = \sum_{j=1}^{3} V_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}Q_j \qquad\qquad i = 1, 2, 3$$

Ta zapis je splošen in velja za poljubno oblikovana prevodna telesa; med prevodniki se more nahajati tudi več različnih izolatorjev, če so le le-ti linearni. Splošno se da tudi pokazati, da so potenciali koeficienti pri zamenjanih indeksih enaki; torej $p_{ji} = p_{ij}$.

Pokažimo enakost $p_{21} = p_{12}$ oz. enakost $V_1^{(2)}/Q_2 = V_2^{(1)}/Q_1$. V prvem koraku, pri $Q_1 \neq 0$, $Q_2 = Q_3 = 0$, so na telesih ploskovne elektrine σ_{11}, σ_{21} in σ_{31}. Integral prve po ploskvi $\mathcal{A}_1$ je Q_1, integrala drugih dveh po ploskvah $\mathcal{A}_2$ oz. $\mathcal{A}_3$ pa sta nič. V drugem koraku je $Q_2 \neq 0$ in sta Q_1 in Q_3 enaka nič. Na telesih so ploskovne elektrine σ_{12}, σ_{22}, in σ_{32}. Njihovi integrali po ploskvah $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ in $\mathcal{A}_3$ so 0, Q_2 in 0.

Potenciale $V_i^{(1)}$ in $V_i^{(2)}$ bomo zapisali z enačbo 18.3, kjer bomo izraz $(1/4\pi\varepsilon_0)(1/R - 1/R_z)$ označili z $\mathcal{R}$

$$V_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathcal{A}_j} \mathcal{R}_{ij}\sigma_{j1}\, da'_j \qquad V_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathcal{A}_j} \mathcal{R}_{ij}\sigma_{j2}\, da'_j \qquad i = 1, 2, 3$$

V $\mathcal{R}_{ij}$ se indeks i nanaša na telo, kjer pišemo potencial, indeks j pa na telo, po katerem integriramo potencialne prispevke. Prve tri enačbe množimo po vrsti s σ_{12}, σ_{22} in σ_{32} in integriramo po $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ in $\mathcal{A}_3$ ter jih seštejemo. Druge tri enačbe množimo po vrsti z σ_{11}, σ_{21} in σ_{31} in jih integriramo po $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ in $\mathcal{A}_3$ ter spet seštejemo. Tako dobimo iz šestih enačb dve:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}_1} V_1^{(1)}\sigma_{12}\, da_1 + \int_{\mathcal{A}_2} V_2^{(1)}\sigma_{22}\, da_2 + \int_{\mathcal{A}_3} V_3^{(1)}\sigma_{32}\, da_3 &= V_2^{(1)} Q_2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathcal{A}_i}\int_{\mathcal{A}_j} \mathcal{R}_{ij}\sigma_{j1}\sigma_{i2}\, da_i\, da'_j \\
\int_{\mathcal{A}_1} V_1^{(2)}\sigma_{11}\, da_1 + \int_{\mathcal{A}_2} V_2^{(2)}\sigma_{21}\, da_2 + \int_{\mathcal{A}_3} V_3^{(2)}\sigma_{31}\, da_3 &= V_1^{(2)} Q_1 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathcal{A}_i}\int_{\mathcal{A}_j} \mathcal{R}_{ij}\sigma_{j2}\sigma_{i1}\, da_i\, da'_j
\end{aligned}$$

Pri integracijah produktov potenciala in gostote elektrine smo upoštevali, da je potencial na prevodniku konstanten in da so integrali posameznih gostot tolikšni, kot smo v začetku rekli. Očitno sta desni dvojni vsoti enaki, kar pomeni, da je

$$\frac{V_2^{(1)}}{Q_1} = \frac{V_1^{(2)}}{Q_2}$$

To slednje je tudi t.i. *stavek recipročnosti* (vzajemnosti) in ga beremo: tako kot vpliva elektrina prvega telesa na potencial drugega, tako elektrina drugega telesa vpliva na potencial prvega. V primeru dveh točkastih elektrin Q in Q' na oddaljenosti R je slednji ulomek (potencialni koeficient) enak $1/4\pi\varepsilon_0 R$.

Enačbo za potenciale teles moremo pregledno pisati tudi v matrični formi

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

ali kratko

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{Q}} \tag{24.2}$$

kjer sta $\mathbf{V}$ in $\mathbf{Q}$ vektorja potencialov in elektrin, $\mathbf{P}$ pa je matrika potencialnih koeficientov. Pri znanih potencialih in potencialnih koeficientih moremo elektrine izračunati tako, da poiščemo inverzno matriko $\mathbf{P}^{-1}$,

$$\boxed{\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{V}} \tag{24.2a}$$

Poglejmo sedaj, kaj fizikalno pomenijo koeficienti matrike $\mathbf{P}^{-1}$. V smislu električnega pretoka (v razdelku 21) se elektrina enega telesa preko pretočnih cevk "naveže" na nasprotne elektrine na drugih telesih. Elektrina Q_1 se delno naveže na drugo, delno na tretje telo in delno na zemljo. Pisali bomo:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{13} + Q_{10}$$

in podobno še:

$$Q_2 = Q_{21} + Q_{23} + Q_{20}$$
$$Q_3 = Q_{31} + Q_{32} + Q_{30}$$

Elektrina Q_{12} fizikalno pomeni tisti del električnega pretoka, ki s svojimi pretočnicami začenja na prvem telesu in končuje na drugem telesu; $Q_{12} = \phi_{e12}$. Na začetku teh pretočnic je elektrina Q_{12}, na koncu pa elektrina $-Q_{12}$ oz. Q_{21}. Velja: $Q_{21} = -Q_{12}$, oz. splošno: $Q_{ji} = -Q_{ij}$.

Delno kapacitivnost C_{ij} bomo definirali kot razmerje med količino električnega pretoka, ki se vzpostavi med telesoma, in potencialno razliko med njima:

$$\boxed{C_{ij} = \frac{Q_{ij}}{V_i - V_j}} \tag{24.3}$$

Glede na opisano velja tudi: $C_{ij}(V_i - V_j) = -C_{ji}(V_j - V_i)$, oz. $C_{ij} = C_{ji}$. Elektrina Q_1 bo:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) + C_{10}(V_1 - V_0) \\ &= (C_{12} + C_{13} + C_{10})V_1 - C_{12}V_2 - C_{13}V_3 \end{aligned}$$

Podobni izražavi dobimo tudi za drugi dve elektrini:

$$\begin{aligned} Q_2 &= -C_{12}V_1 + (C_{12} + C_{23} + C_{20})V_2 - C_{23}V_3 \\ Q_3 &= -C_{13}V_1 - C_{23}V_2 + (C_{13} + C_{23} + C_{30})V_3 \end{aligned}$$

V matrični obliki bi pisali:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{10} + C_{12} + C_{13} & -C_{12} & -C_{13} \\ -C_{12} & C_{20} + C_{12} + C_{23} & -C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & C_{30} + C_{13} + C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

oz.

$$\boxed{\mathbf{Q} = \mathbf{C}\mathbf{V}} \tag{24.4}$$

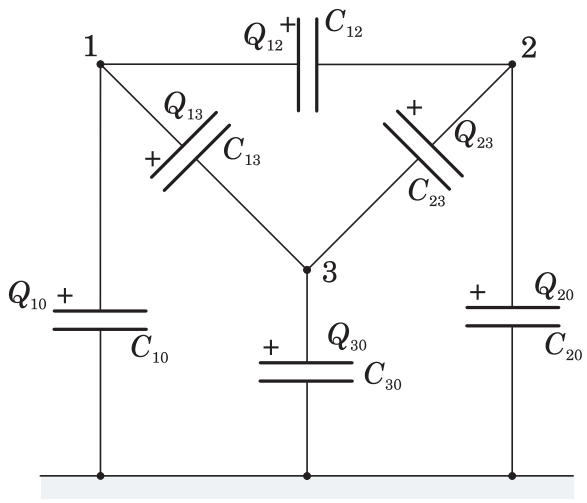
kjer ima matrika $\mathbf{C}$ koeficiente izražene z delnimi kapacitivnosti. Enačbi 24.2a in 24.4 bosta identični, ko bo $\mathbf{P}^{-1}$ enak $\mathbf{C}$. Naj ima matrika $\mathbf{P}^{-1}$ koeficiente k_{ij}

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

potem se iz primerjave matrik dobi:

$$C_{ij} = -k_{ij} \qquad i \neq j \neq 0 \qquad\qquad C_{i0} = \sum_{j=1}^{3} k_{ij}$$

Če torej poznamo potencialne koeficiente p_{ij}, moremo z aritmetiko določiti delne kapacitivnosti C_{ij}.



Slika 24.3: Kondenzatorsko modelno vezje.

Sistemu iz slike 24.2 moremo prirediti ekvivalentno *kondenzatorsko vezje*; slika 24.3. Ali drugače: če bi kondenzatorje C_{ij} realizirali s ploščnimi (folijskimi) kondenzatorji in jih povezali v smislu narisanega vezja, bi se to *modelno vezje* – na nivoju elektrin in potencialov (napetosti) – "obnašalo" enako kot sistem teles v originalnem problemu na sliki 24.2.

Tu pa smo trčili v zelo važno in uporabno metodo t.i. *modeliranja*. Namreč, nek električen problem moremo modelirati s koncentriranimi elementi (to pot s kondenzatorji) oz. z elementi električnih vezij, s katerimi dobimo – na nivoju integralnih količin polja (tu so to Q, U in V) – identično sliko. Seveda pa s takšnim modelom povsem izgubimo vpogled v polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ iz slike 24.2.

Nadomestna kapacitivnost. Velikokrat nas zanima samo kapacitivnost med dvema telesoma, ko so prisotna tudi druga prevodna telesa. To vprašanje je relevantno, če med dvema telesoma priključimo napetostni vir z napetostjo U_{g}, druga telesa pa so električno nevtralna, in se vprašamo: koliko $\pm Q$ elektrine se nabere na teh dveh telesih?

Nadomestno kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma danega električnega sistema več prevodnih teles bomo definirali s kvocientom množine ($\pm$) elektrine, s katero se telesi naelektrita, in napetosti elektrenja,

$$\boxed{C_{\mathrm{nad.}} = \frac{Q_{\mathrm{naelektritve}}}{U_{\mathrm{elektrenja}}}} \tag{24.5}$$

pri tem pa so vsa ostala prevodna telesa električno nevtralna.

Vzemimo, da med prvim telesom in zemljo (slika 24.2) oz. med prvim spojiščem in ozemljitvijo (slika 24.3) priključimo vir z napetostjo U_{g}. To telo se naelektri z elektrino Q_1, ostali dve telesi pa ostaneta nevtralni: $Q_2 = -Q_{12} + Q_{23} + Q_{20} = 0$, $Q_3 = -Q_{13} - Q_{23} + Q_{30} = 0$; zemlja "dobi" elektrino $-Q_1$, prvo telo (spojišče 1) pa zavzame potencial $V_1 = U_{\mathrm{g}}$. Nadomestna kapacitivnost med spojiščem 1 in zemljo bo

$$C_{10\ \mathrm{nad.}} = \frac{Q_1}{U_{\mathrm{g}}} = \frac{Q_{10} + Q_{12} + Q_{13}}{U_{\mathrm{g}}}$$

Postavi se seveda vprašanje: kako to izračunati, če elemente C_{ij} modelnega vezja poznamo? Izrazimo nevtralnost drugega in tretjega telesa s potenciali $V_1 = U_\mathrm{g}$, V_2, V_3 in $V_0 = 0$ ter delnimi kapacitivnostmi C_{ij}:

$$\begin{aligned} Q_2 &= -C_{12}(U_\mathrm{g} - V_2) + C_{23}(V_2 - V_3) + C_{20}(V_2 - V_0) = 0 \\ Q_3 &= -C_{13}(U_\mathrm{g} - V_3) - C_{23}(V_2 - V_3) + C_{30}(V_3 - V_0) = 0 \end{aligned}$$

Po ureditvi dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$\begin{aligned} (C_{12} + C_{23} + C_{20})V_2 - C_{23}V_3 &= C_{12}U_\mathrm{g} \\ -C_{23}V_2 + (C_{13} + C_{23} + C_{30})V_3 &= C_{13}U_\mathrm{g} \end{aligned}$$

Iz teh dveh enačb izračunamo V_2 in V_3 ter za $C_{10\ \mathrm{nad.}}$ pišemo:

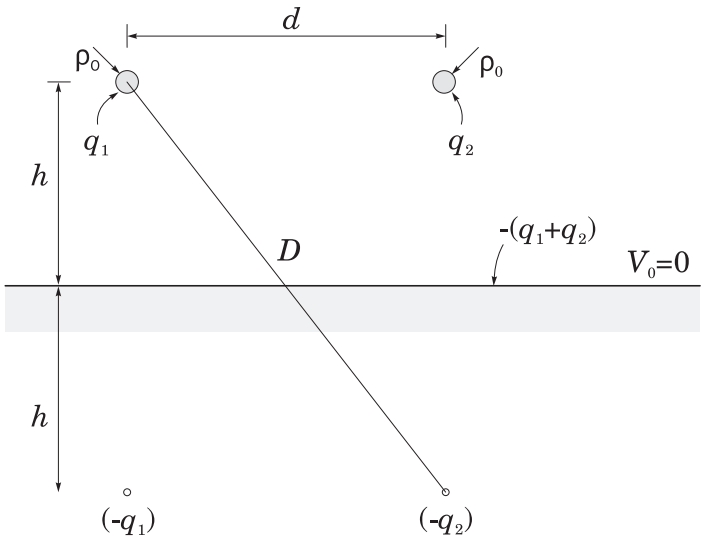
$$C_{10\ \mathrm{nad.}} = \frac{U_\mathrm{g}C_{10} + C_{12}(U_\mathrm{g} - V_2) + C_{13}(U_\mathrm{g} - V_3)}{U_\mathrm{g}}$$

Na podoben način moremo določiti tudi vse ostale nadomestne kapacitivnosti.

S tem pa smo se dotaknili že (posebne) teme o kondenzatorskih vezjih, ki ji bo posvečen svoj razdelek na koncu elektrostatike. Definicija vseh treh kapacitivnosti nam bo zaenkrat povsem zadostovala.

Zgled 24.2

Oglejmo si simetričen nadzemni dvovod v luči delnih kapacitivnosti oz. njegovo ekvivalentno kondenzatorsko vezje pri $h, d \gg \rho_0$; slika 24.4. Potencial prvega vodnika,



Slika 24.4: Simetričen dvovod nad zemljo.

zaradi elektrin ($\pm q_1$), je po zgledu 24.1 enak

$$V_1^{(1)} = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h}{\rho_0}$$

Potencial drugega vodnika, zaradi elektrin ($\pm q_1$), je po zgledu 18.3 takšen, kot bi ga imela os tega vodnika, če ga ne bi bilo. Ta potencial pa je za dve linijski elektrini (po zgledu 18.5) enak

$$V_2^{(1)} = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{D}{d}$$

kjer je $D = \sqrt{4h^2 + d^2}$. Na ta način smo že dobili oba potencialna koeficienta:

$$p_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2h}{\rho_0} \qquad p_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{D}{d}$$

Ker je višina drugega vodnika enaka višini prvega, je $p_{22} = p_{11}$; p_{12} pa je zaradi vzajemnosti enak p_{21}. Potenciala vodnikov sta:

$$V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 \qquad V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2$$

Matrika $\mathbf{P}$ je reda 2×2,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Če elektrini q_1 in q_2 izrazimo s potenciali, dobimo:

$$q_1 = \frac{a}{a^2 - b^2} V_1 - \frac{b}{a^2 - b^2} V_2 \qquad q_2 = -\frac{b}{a^2 - b^2} V_1 + \frac{a}{a^2 - b^2} V_2$$

Matrika $\mathbf{P}^{-1}$ je dalje:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{11} \end{bmatrix}$$

kjer sta $k_{11} = a/(a^2 - b^2)$ in $k_{12} = -b/(a^2 - b^2)$.

Kapacitivnosti c_{12}, c_{10} in c_{20} na enoto dolžine so:

$$c_{12} = -k_{12} = \frac{b}{a^2 - b^2} \qquad c_{10} = k_{11} + k_{12} = \frac{a - b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a + b} \qquad c_{20} = c_{10}$$

Če vstavimo potencialna koeficienta $a = p_{11}$ in $b = p_{22}$, dobimo:

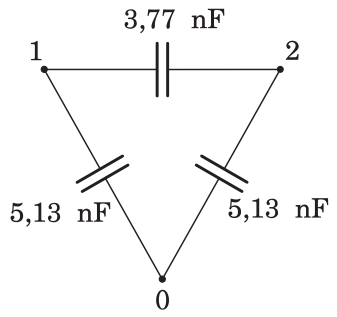
$$c_{12} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ln(D/d)}{\ln(2hd/\rho_0 D) \ln(2hD/\rho_0 d)} \qquad c_{10} = c_{20} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(2hD/\rho_0 d)}$$

Vzemimo številski primer: $h = 5$ m, $d = 40$ cm, $\rho_0 = 0.5$ cm, $l = 1$ km. Za vzdolžne kapacitivnosti dobimo: $c_{12} = 3.77$ pF/m, $c_{10} = c_{20} = 5.13$ pF/m. Kapacitivnosti modelnega vezja so: $C_{12} = 3.77$ nF, $C_{10} = C_{20} = 5.13$ nF.

Nadomestno kondenzatorsko vezje simetričnega dvovoda nad zemljo ponazarja shema na sliki 24.5. Dobljeno kondenzatorsko vezje v celoti modelira elektrostatične (U, Q) razmere danega simetričnega nadzemnega dvovoda.

Poglejmo si nadomestni kapacitivnosti $c_{10\ \text{nad.}}$ in $c_{12\ \text{nad.}}$. V prvem primeru je drug vodnik nevtralen: $q_2 = q_{21} + q_{20} = c_{12}(V_2 - V_1) + c_{20}V_2 = (c_{12} + c_{20})V_2 - c_{12}V_1 = 0$, zato je

$$V_2 = \frac{c_{12}}{c_{12} + c_{20}} V_1 = \frac{c_{12}}{c_{12} + c_{20}} U_\mathrm{g} \ (= 0.424 U_\mathrm{g})$$



Slika 24.5: Modelno kondenzatorsko vezje nadzemnega dvovoda.

Nadomestna kapacitivnost $c_{10\ \text{nad.}}$ je s tem določena,

$$c_{10\ \text{nad.}} = \frac{q_1}{U_\text{g}} = \frac{q_{10} + q_{12}}{U_\text{g}} = \frac{(c_{10} + c_{12})U_\text{g} - c_{12}V_2}{U_\text{g}} = c_{10} + \frac{c_{10}\,c_{12}}{c_{10} + c_{12}}$$

Ko vstavimo splošna izraza za c_{10} in c_{12}, dobimo: $c_{10\ \text{nad.}} = 2\pi\varepsilon_0/\ln(2h/\rho_0)$. Rezultat je povsem razumljiv. Desni vodnik, ki prosto visi ob levem (aktivnem) vodniku, je od njega toliko oddaljen, da bistveno ne moti osnovnega polja med levo žico in zemljo.

V primeru $c_{12\ \text{nad.}}$ je generator napetosti U_g priključen med oba vodnika; zemlja je nevtralna, zato je $q_2 = -q_1$. Pišimo vsoto

$$q_1 + q_2 = c_{10}V_1 + c_{12}(V_1 - V_2) + c_{20}V_2 + c_{12}(V_2 - V_1) = 0$$

Ker pa je $V_1 - V_2 = U_\text{g}$, sledi (zaradi $c_{10} = c_{20}$) iz zgornje enačbe tole: $V_1 + V_2 = 0$, $V_2 = -V_1 = U_\text{g}/2$ in $q_1 = c_{10}U_\text{g}/2 + c_{12}U_\text{g}$, zato je

$$c_{12\ \text{nad.}} = \frac{q_1}{U_\text{g}} = c_{12} + \frac{c_{10}}{2}$$

Zapišimo rezultat še s potencialnima koeficientoma:

$$c_{12\ \text{nad.}} = \frac{1}{2(a-b)} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2hd}{D\rho_0}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2hd}{\rho_0\sqrt{4h^2 + d^2}}}$$

V našem, številskem primeru je $h \gg d \gg \rho_0$, zato je $c_{12\ \text{nad.}} \doteq \pi\varepsilon_0/\ln(d/\rho_0)$; to pa je izraz za kapacitivnost dvovoda brez upoštevanja zemlje (Zgled 18.5). Če bi imeli drugačno geometrijsko konstelacijo, npr. $D \gg h \gg \rho_0$, bi dobili: $c_{12\ \text{nad.}} \doteq \pi\varepsilon_0/\ln(2h/\rho_0)$; to pa je polovica nadzemne kapacitivnosti vodnika nad zemljo (Zgled 24.1) – dve nadzemni kapacitivnosti sta zaporedni.

Pri dvovodu nad zemljo je ena od žic ozemljena (na potencialu nič); bodi to druga. Nadomestna kapacitivnost $\widetilde{c}_{10\ \text{nad.}}$ med vodnikom in zemljo je tokrat:

$$\widetilde{c}_{10\ \text{nad.}} = \frac{q_1}{U_\text{g}} = \frac{c_{10}U_\text{g} + c_{12}(U_\text{g} - 0)}{U_\text{g}} = c_{10} + c_{12}$$

Z vidika prenosa električne energije – pri visokih napetostih (400 kV in več) – je zanimiv primer dvojčka (trojčka, četverčka). Vodnika ene faze "tečeta" vzporedno

na medsebojni razdalji približno 40 cm in sta mestoma galvansko spojena. Izrazimo kapacitivnost tako združenega voda. Kapacitivnost ($c_{\text{dvojčka}}$) bo

$$c_{\text{dvojčka}} = c_{10} + c_{20} = 2c_{10} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\ln(2hD/\rho_0 d)}$$

Pri $D \simeq 2h$ je

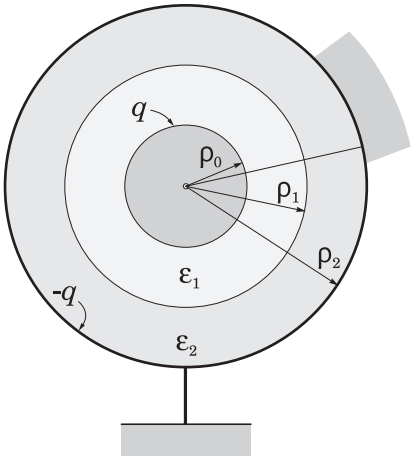
$$c_{\text{dvojčka}} \doteq \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(2h/\sqrt{\rho_0 d})}$$

Izraz spominja na kapacitivnost nadzemnega voda, ki bi imel ekvivalenten radij ($\rho_{\text{ekv.}}$) enak $\sqrt{\rho_0 d}$. Vidimo, da se dvojček "obnaša" kot vodnik s povečanim radijem. Neposredna posledica tega je, da se poljska jakost ob dvojčku zmanjša, s tem pa je manj izrazit koronski efekt; manjše koronske izgube. ♣ Bralec naj potrdi, da je v primeru trojčka (vodniki v enakostraničnem trikotniku s stranico d) ekvivalenten radij enak $\sqrt[3]{\rho_0 d^2}$. In kako je pri četverčku – za vodnike v ogliščih kvadrata s stranico d?

Bralec naj si izpelje tudi delne kapacitivnosti za dvovod, ki ima vodnika na različnih višinah; $h_1 \neq h_2$. ♣

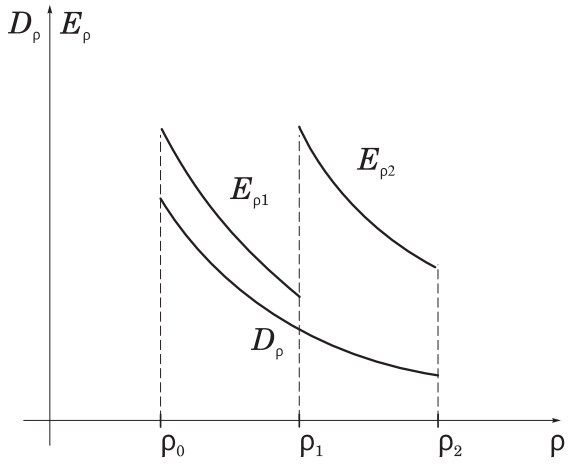
Zgled 24.3

Koaksialni kabel z dvoplastno izolacijo; slika 24.6. Žila kabla naj je na (+) sponki generatorja z napetostjo U_{g}, ozemljen plašč pa na njegovi (−) sponki generatorja. Elektrina q bo na notranji žili, plašč pa bo imel elektrino $-q$. Elektrina bo po



Slika 24.6: Koaksialen vod z dvojno izolacijo.

površinah enakomerno razporejena in polji **E** in **D** bosta le radialni. Po Gaussovem stavku (enačba 20.3) bo $D_\rho = q/2\pi\rho$ (za oba dielektrika), polje E_ρ pa bo obratnosorazmerno z dielektričnostjo: $E_{\rho_1} = q/2\pi\varepsilon_1\rho$, $E_{\rho_2} = q/2\pi\varepsilon_2\rho$. Grafikon na sliki 24.7 kaže funkcijski potek E_ρ in D_ρ v izolatorjih v primeru $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Povsem razumljivo je, da si izberemo notranji izolator z večjo dielektričnostjo, kajti s tem zmanjšamo največjo poljsko jakost ob notranji žili (preboj). Po zgledu 18.2 bo napetost U_{01} med mejama notranjega izolatorja enaka $(q/2\pi\varepsilon_1)\ln(\rho_1/\rho_0)$, med mejama zunanjega izolatorja pa bo $U_{12} = (q/2\pi\varepsilon_2)\ln(\rho_2/\rho_1)$; celotna napetost bo

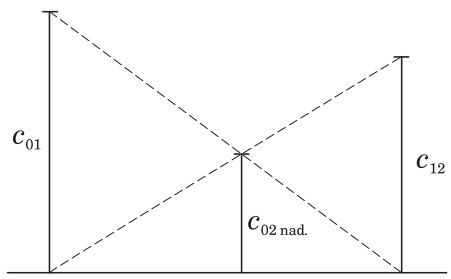


Slika 24.7: Potek radialnih polj v koaksialnem vodu z dvojno izolacijo.

enaka $U_{01} + U_{12} = U_g$. Obema izolatorjema moremo prirediti delni kapacitivnosti: $c_{01} = q/U_{01} = 2\pi\varepsilon_1/\ln(\rho_1/\rho_0)$, $c_{12} = q/U_{12} = 2\pi\varepsilon_2/\ln(\rho_2/\rho_1)$. Nadomestna kapacitivnost/m ($c_{02\ \mathrm{nad.}}$) med žilo in plaščem ali kapcitivnost kabla/m je dalje enaka q/U_g. Relacija med kapacitivnostmi je očitna:

$$\frac{1}{c_{02\ \mathrm{nad.}}} = \frac{U_g}{q} = \frac{U_{01}}{q} + \frac{U_{12}}{q} = \frac{1}{c_{01}} + \frac{1}{c_{12}}$$

oz. $c_{02\ \mathrm{nad.}} = c_{01}c_{12}/(c_{10}+c_{12})$. ♣ Bralec naj dokaže, da tej enačbi ustreza grafična rešitev na sliki 24.8. ♣



Slika 24.8: Geometrijska določitev nadomestne kapacitivnosti dveh zaporednih kapacitivnosti.

25. Metoda zrcaljenja

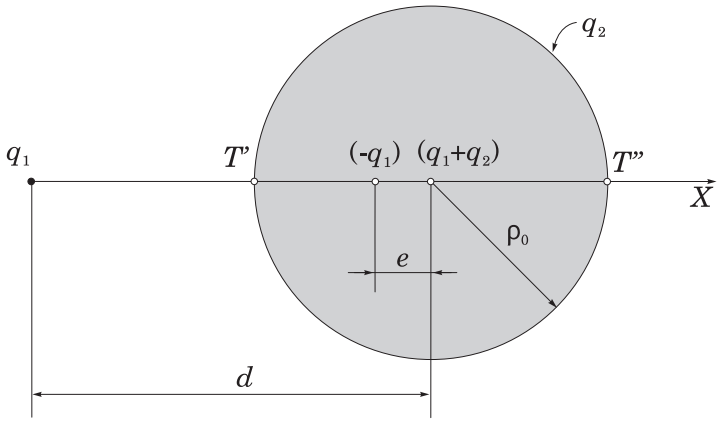
Metoda zrcaljenja je razmeroma preprosta metoda, ki sloni na izsledkih znanega polja dveh premih elektrin ($\pm q$) in polja dveh raznoimenskih točkastih elektrin (ki smo jih obdelali v razdelku 18) ter na *tehniki okovinjanja* iz istega razdelka. V praktični elektrotehniki srečamo nekatere geometrijsko preproste konfiguracije, ki vključujejo prevodnike v obliki valjev, krogel ali ravnih površin; površine valjev, krogelno lupino in ravnino pa smo v omenjenih poljih srečevali v vlogi ekvipotencialk, ki jih moremo s tehniko okovinjanja okoviniti; to nas privede do geometrijsko novih oblik, ki imajo še vedno izvorno porazdelitev električnega polja, pri tem pa dobijo elektrine, ki jih z okovinjanjem objamemo,

le še vlogo matematičnega ekvivalenta za dejansko elektrino na površini prevodnih valjev, krogel ali ravnin. Te pomožne ali ekvivalentne elektrine se v primeru ravnine nahajajo v zrcalnih legah, v primeru valjev ali krogel pa v ekscentričnih legah. Za vse te pomožne elektrine rečemo enotno, da se nahajajo – v prenesenem smislu – v določenih "zrcalnih" legah, ali kratko: govorimo o zrcaljenju na ravnini, krogli ali valju.

Srž metode zrcaljenja je skrit ravno v iskanju leg in velikosti pomožnih elektrin, ki določajo takšno polje, da so za te elektrine "naše" prevodne površine ekvipotencialne ploskve. Za to iskanje ne obstaja nikakršna receptura ali jasno izdelano pravilo. Najboljša pot spoznavanja metode zrcaljenja so ravno tipični zgledi, ki si jih bomo v nadaljevanju tudi ogledali.

Zgled 25.1

Naj se vzporedno ob tanki naelektreni žici (premi elektrini) z elektrino q_1 nahaja debelejša žica polmera ρ_0 z elektrino q_2; slika 25.1. Da bi površina valja bila ekvipo-



Slika 25.1: Prema elektrina ob naelektrenem valju.

tencialka, bi kot nadomestek elektrine q_2 "potrebovali" elektrino $(-q_1)$ v ekscentrični legi v valju (Zgled 18.5). Ta elektrina pa še ni popolen nadomestek za q_2, saj je $(-q_1) \neq q_2$. Da bi uskladili tudi to, moramo v valj "dodati" še elektrino $(q_1 + q_2)$ in to tako, da bo valj še vedno ekvipotencialka. Očitno mora ta elektrina ležati v osi valja (Zgled 16.1).

Z legama in velikostima elektrin $(-q_1)$ in (q_1+q_2) smo uskladili dvoje: i) za elektrine q_1, $(-q_1)$ in $(q_1 + q_2)$ je površina valja ekvipotencialka in ii) elektrina na valju je $(-q_1) + (q_1 + q_2) = q_2$. Potrebno je najti le še točno lego elektrine $(-q_1)$. Za premi elektrini, q_1 in $(-q_1)$ namreč vemo, da so ekvipotencialke valji in da mora biti njun potencial v točkah T' in T'' enak; to pomeni, da je

$$\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d - \rho_0}{\rho_0 - e} = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d + \rho_0}{\rho_0 + e}$$

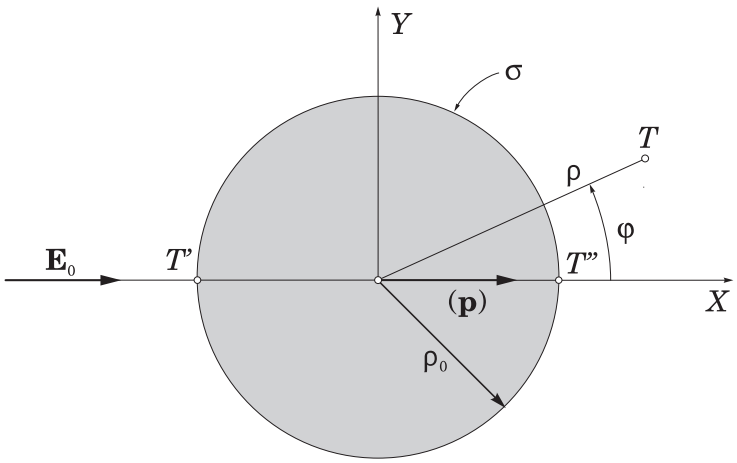
Argumenta logaritmov morata biti enaka; to da geometrijsko relacijo: $e = \rho_0^2/d$. Polje elektrin q_1, $(-q_1)$ in $(q_1 + q_2)$ postane tako popolen nadomestek za polje naelektrene tanke žice pred naelektrenim debelejšim valjem.

♣ Bralec naj za vajo izrazi razmerje $\sigma(T')/\sigma(T'')$ ter silo med žico in valjem in razmisli, kaj je v primeru, ko je valj nevtralen ($q_2 = 0$) in je $\rho_0 \gg d - \rho_0 = h$. ♣

Zgled 25.2

Izhajajmo iz prejšnjega zgleda in si poglejmo primer, ko je $d \gg \rho_0$ in je valj nevtralen ($q_2 = 0$). Elektrina $(-q_1)$ bo praktično v osi in bo skupaj z elektrino $(q_1 + q_2) = (q_1)$ tvorila premi dipol z momentom $\mathbf{p}$ v horizontalni smeri (Zgled 16.5). Ker pa je elektrina q_1 daleč stran, bo njeno polje v okolici valja praktično homogeno.

Ta limitni primer nas je privedel do novega problema, ki ga srečujemo, ko nevtralen valj s polmerom ρ_0 položimo v homogeno električno polje jakosti $\mathbf{E}_0$. Praktično srečamo ta problem pri daljnovodni vrvi, ki je obojestransko odklopljena in se nahaja v električnem polju preostalih daljnovodnih vrvi, ki povzročajo v njeni okolici lokalno homogeno polje. Glede na povedano bomo to nalogo rešili s superpozicijo homogenega polja in polja premega dipola v osi valja (vrvi); slika 25.2.



Slika 25.2: Vodnik v homogenem polju.

Polju $\mathbf{E}_0$ priredimo potencial $V_0(x) = -E_0 x + C$ oz. $V_0(\rho, \varphi) = -E_0 \rho \cos\varphi + C$, kjer je C potencial pri $x = 0$. Potencial premega dipola v horizontalni legi smo izpeljali v zgledu 16.5 in dobili: $V_{\text{dip.}} = (p/2\pi\varepsilon_0)\cos\varphi/\rho$. Končno je potencial zunaj valja enak vsoti:

$$V(\rho, \varphi) = -E_0 \rho \cos\varphi + \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\varphi}{\rho} + C$$

Glede na jakost prvotnega polja (E_0) je potrebno določiti moment dipola. Tega bomo dobili, če upoštevamo, da je površina valja ekvipotencialka oz., da je tangencialna komponenta polja, torej E_φ, tam enaka nič. Po enačbi 16.1b je

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\left(E_0 - \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 \rho^2}\right)\sin\varphi$$

Da bo $E_\varphi(\rho_0, \varphi) = 0$, mora biti $p/2\pi\varepsilon_0 = \rho_0^2 E_0$. Potencial v okolici valja je torej:

$$V(\rho, \varphi) = -E_0 \rho \left(1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right)\cos\varphi + C$$

Na površini valja ($\rho = \rho_0$) je potencial enak C; torej enak potencialu, ki ga je prvotno (brez valja) imela ravnina $x = 0$ (simetralna ravnina valja); ugotovitev je

podobna kakor v zgledu 18.3. Drugi člen v oklepaju predstavlja motnjo (odstopanje) novega polja od prvotnega, homogenega polja; na razdalji $\rho = 10\rho_0$ je ta motnja reda 1%. Polje $\mathbf{E}$ v okolici dobimo po enačbi 16.1b z odvodoma:

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho,\varphi) &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} = E_0\left(1+\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right)\cos\varphi \\ E_\varphi(\rho,\varphi) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -E_0\left(1-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right)\sin\varphi \end{aligned}$$

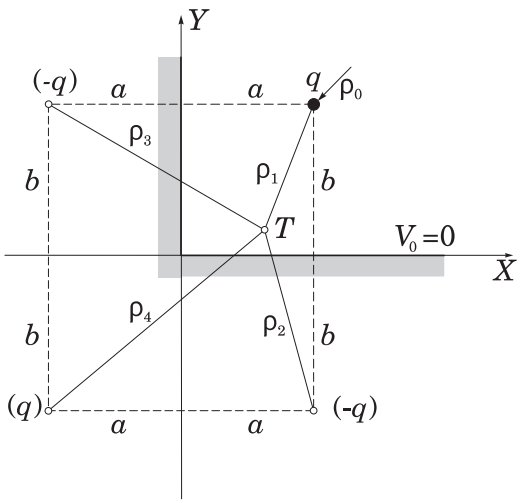
V polju $\mathbf{E}_0$ se vodnik polarizira; ploskovna elektrina σ na površini je $\varepsilon_0 E_n$ ali

$$\sigma(\varphi) = \varepsilon_0 E_\rho(\rho_0,\varphi) = 2\varepsilon_0 E_0 \cos\varphi$$

Integral te elektrine po površini je očitno enak nič; $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = 0$. Na levi strani valja je elektrina negativna, na desni pa pozitivna. V točkah T' in T'' na površini, je poljska jakost podvojena ($2E_0$); polje se tam najbolj ojači.

Zgled 25.3

Naj se naelektrena žica polmera $\rho_0 \ll a, b$ nahaja v bližini ozemljenega prevodnega vogala; slika 25.3. Če za hip odmislimo navpično steno, imamo primer e) iz slike



Slika 25.3: Prema elektrina v kovinskem vogalu.

18.22. Da pa bi za elektrini q v (a,b) in $(-q)$ v $(a,-b)$ bila tudi navpična stena ($x=0$) na potencialu nič, "potrebujemo" še dve pomožni elektrini: $(-q)$ v $(-a,b)$ in (q) v $(-a,-b)$; ti dodatni elektrini ne porušita razmer na vodoravni podlagi. Vsota pomožnih elektrin je ravno $-q$, saj sta naelektrena žica in ozemljen vogal električno zaključena. Potencial v točki T dobimo s superpozicijo (Zgled 16.5):

$$V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2\rho_3}{\rho_1\rho_4}$$

Potencial žice z elektrino q in radijem ρ_0 je

$$V(a,b) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2ab}{\rho_0\sqrt{a^2+b^2}}$$

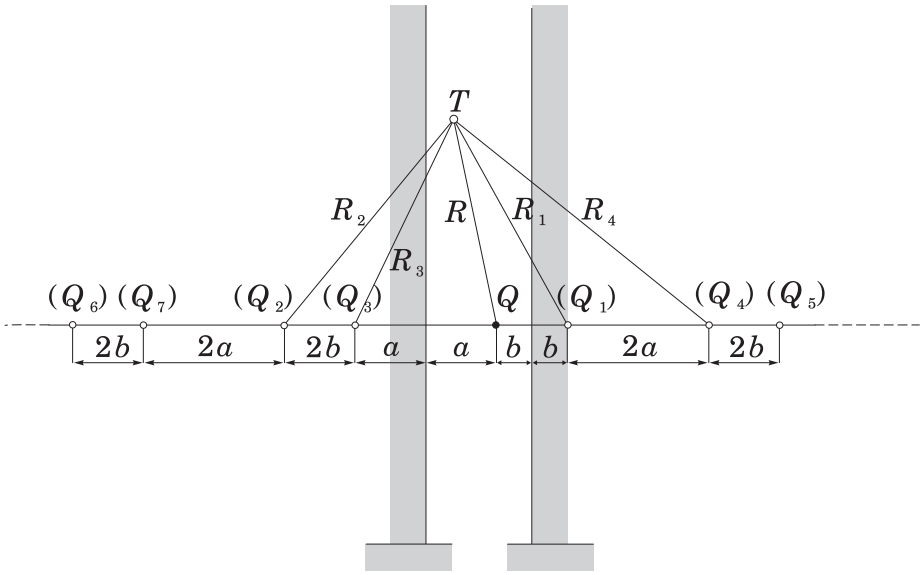
Za elektrino na žici smo smatrali, da ima ekvivalentno elektrino v svoji osi. Vzdolžna kapacitivnost vodnika do vogala bi bila:

$$c = \frac{q}{V(a,b)} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \dfrac{2ab}{\rho_0\sqrt{a^2+b^2}}}$$

♣ Bralec naj določi ploskovno porazdelitev elektrine na obeh stenah in premisli, kako bi rešil problem tanke žice v kovinskem vogalu s kotom $\alpha_n = \pi/n; n = 3, 4, ...$; primera za n je 1 in 2 smo že rešili. ♣

Zgled 25.4

Vzemimo primer točkaste elektrine Q (majhne naelektrene kroglice), ki se nahaja med dvema vzporednima ozemljenima prevodnima stenama na oddaljenosti a oz. b od njiju; slika 25.4. Če bi bila samo desna stena, bi problem rešili z zrcalno



Slika 25.4: Točkasta elektrina med prevodnima stenama.

elektrino $(Q_1) = -Q$ (slika 18.22a). Za ti dve elektrini (Q in (Q_1)) pa leva stena ni ekvipotencialka. Da bi bila, moramo "vnesti" dve novi elektrini $(Q_3) = -Q$ in $(Q_2) = (-Q_1) = Q$ v zrcalnih legah elektrin Q in (Q_1) preko leve stene. S tem se porušijo potencialne razmere na desni steni. Da jih uskladimo, "dodamo" elektrini $(Q_4) = (-Q_3) = Q$ in $(Q_5) = (-Q_2) = -Q$. Sledi usklajevanje leve stene z elektrinama $(Q_7) = (-Q_4) = -Q$ in $(Q_6) = (-Q_5) = Q$. To postopno usklajevanje rezultira v neskončen niz elektrin na premici v medsebojnih razdaljah $2a$ in $2b$, predznak elektrin pa se izmenjuje (alternira).

Če želimo določiti polje v medprostoru, ga dobimo s superponiranjem prispevkov niza zrcalnih elektrin in elektrine Q. Potencial v točki T dobimo z vsoto:

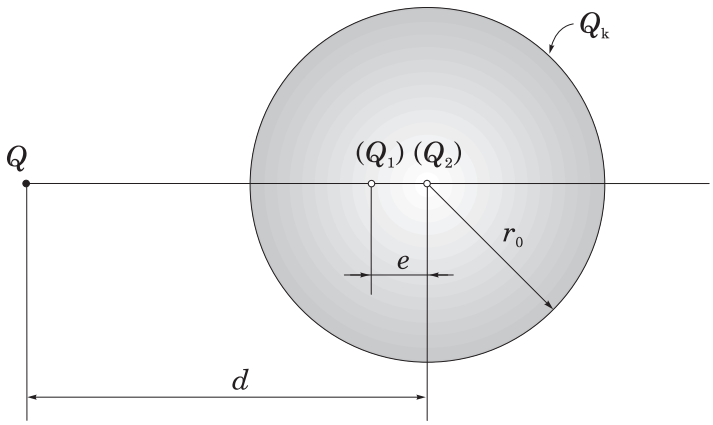
$$V(T) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{R_n}\right)$$

Členi v neskončni vsoti predstavljajo alternirajoče zaporedje, katerega vsota sorazmerno hitro konvergira, če le R ni pretirano večji od oddaljenosti a in b.

♣ Če ima bralec možnost preveriti konvergenco z računalnikom, naj to le napravi. Vmesna so tudi vprašanja: kolikšna je sila na elektrino Q, kakšna je porazdelitev elektrine na obeh stenah in kolikšna je sumarna elektrina na levi oz. desni steni? Bralec naj tudi premisli, kako bi določil električno polje v vmesnem prostoru, če bi točkasto elektrino zamenjal s premo elektino (vzdolž plošč) ali pa s horizontalnim (vertikalnim, poševnim) točkastim dipolom. ♣

Zgled 25.5

V prostoru se nahaja točkasta elektrina Q, ki je za d oddaljena od naelektrene kovinske krogle polmera r_0 z elektrino Q_k; slika 25.5. Elektrina Q_k bo po površini



Slika 25.5: Točkasta elektrina ob naelektreni krogli.

razporejena tako, da bo njeno polje in polje elektrine Q zagotavljalo ekvipotencialne razmere na površini korgle. Po primeru iz slike 18.18 bo površina krogle ekvipotencialka, če bo del elektrine Q_k učinkoval v prostor tako, kot točkasta elektrina (Q_1) v ekscentrični legi. Po enačbah iz razdelka 18 je $(Q_1) = -Qr_0/d$ in $e = r_0^2/d$. Preostali del elektrine $(Q_\mathrm{k} - Q_1)$ pa bo po površini krogle razporejen enakomerno, saj bo le tako površina krogle ekvipotencialka. Ta elektrina bo dajala krogli tak potencial, kot da bi bila združena v točkasti elektrini $(Q_2) = (Q_\mathrm{k} - Q_1)$ v centru krogle; $(Q_2) = Q_\mathrm{k} + Qr_0/d$. Polje izven krogle bomo računali kot vsoto polj treh točkastih elektrin v narisanih legah. Potencial krogle V_k določa le elektrina (Q_2), saj je potencialni prispevek elektrin Q in (Q_1) enak nič,

$$V_\mathrm{k} = \frac{Q_\mathrm{k} + Qr_0/d}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

Iz enačbe se vidi, da se potencial krogle spreminja, če elektrino Q gibljemo po prostoru. ♣ Bralec naj si nariše diagram $V_\mathrm{k}(d)$. ♣

Če je $d \gg r_0$, je potencial $V_\mathrm{k} \doteq Q_\mathrm{k}/4\pi\varepsilon_0 r_0$ (osamljena krogla), če pa se elektrina Q približa krogli, in se je dotakne, bo sumarna elektrina na krogli $Q_\mathrm{k} + Q$, njen potencial bo $V_\mathrm{k}' = (Q_\mathrm{k} + Q)/4\pi\varepsilon_0 r_0$; torej takšen, kot od osamljene naelektrene

krogle, in tudi elektrina $(Q_\mathrm{k} + Q)$ bo takrat po površini enakomerno porezdeljena (Zgled 18.1).

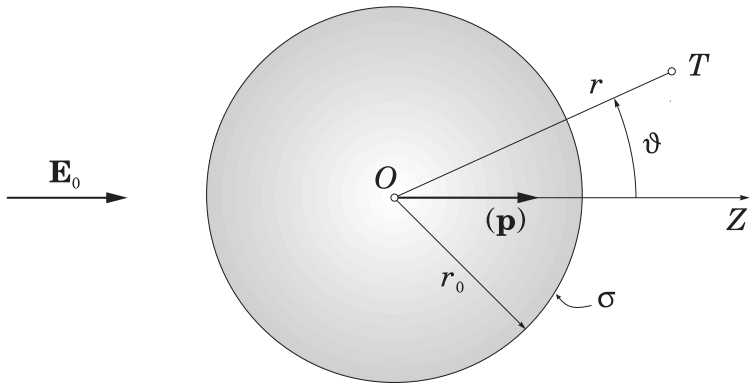
Če iz oddaljene okolice prihajajo vedno nove elektrine, si moremo na ta način predočiti proces elektrenja krogle, kateri potencial vseskozi narašča.

♣ Bralec naj razmisli o primeru, ko bi se točkasta elektrina Q nahajala ekscentrično znotraj prevodne ozemljene krogelne lupine. ♣

Zgled 25.6

Izhajajmo iz prejšnjega zgleda in vzemimo, da je krogla nevtralna ($Q_\mathrm{k} = 0$). Potencial krogle bo $V_\mathrm{k} = Q/4\pi\varepsilon_0 d$. Rezultat je zanimiv. Nevtralna krogla bo zavzela v bližini točkaste elektrine tolikšen potencial, kot bi ga imelo središče, če bi kroglo stisnili v točko; torej, kot da je ne bi bilo. Nadalje vzemimo, da je $d \gg r_0$. Pri tem geometrijskem odnosu bo $e \ll r_0$ in elektrina (Q_1) bo tvorila z elektrino $(Q_2) = -(Q_1)$ točkasti dipol v centru krogle. Ker pa je elektrina Q zelo oddaljena, bo njeno polje v bližnji okolici krogle praktično homogeno.

Ta razmislek nas je privedel do novega problema: do določitve električnega polja v okolici nevtralne krogle polmera r_0, ki je položena v homogeno polje jakosti $\mathbf{E}_0$; slika 25.6.



Slika 25.6: Nevtralna prevodna krogla v homogenem polju.

Tako nalogo smo v zgledu 18.3 že reševali; tam nam je sicer uspelo določiti ploskovno gostoto influirane elektrine in potencial krogle, odprto pa je ostalo vprašanje novega polja.

Polje v okolici krogle bomo očitno reševali s superpozicijo homogenega polja $\mathbf{E}_0$ in polja dipola z momentom $(\mathbf{p})$ v centru krogle, ki je le matematičen ekvivalent za ploskovno elektrino σ na površini krogle.

Zelo soroden problem smo srečali v valjni geometriji v zgledu 25.2. Metodika in matematičen postopek bosta tu sorodna, zato bo tudi komentar med izvajanjem skromnejši.

Kot že večkrat bomo polju $\mathbf{E}_0$ priredili potencial $V_0(z) = -E_0 z + C$ oz. $V_0(r, \vartheta) = -E_0 r \cos\vartheta + C$. Polje točkastega dipola poznamo iz razdelka 17:

$$V_\mathrm{dip.}(r, \vartheta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

Sumarni potencial je (vsota)

$$V(r,\vartheta) = \left(-E_0 r + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\cos\vartheta + C \qquad r \geq r_0$$

Površina krogle je ekvipotencialka; $E_\vartheta = -(1/r)\partial V/\partial\vartheta$ (enačba 16.1c) mora biti pri $r = r_0$ enaka nič. Po odvajanju in izenačitvi z nič dobimo: $p/4\pi\varepsilon_0 = r_0^3 E_0$. Dalje je

$$V(r,\vartheta) = -E_0 r\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right)\cos\vartheta + C \qquad \text{in} \qquad V(r_0,\vartheta) = C$$

Po enačbi 16.1c sta:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_0\left(1 + 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right)\cos\vartheta \qquad \Rightarrow \qquad E_r(r \to r_0,\vartheta) = 3E_0\cos\vartheta$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = E_0\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right)\sin\vartheta \qquad \Rightarrow \qquad E_\vartheta(r \to r_0,\vartheta) = 0$$

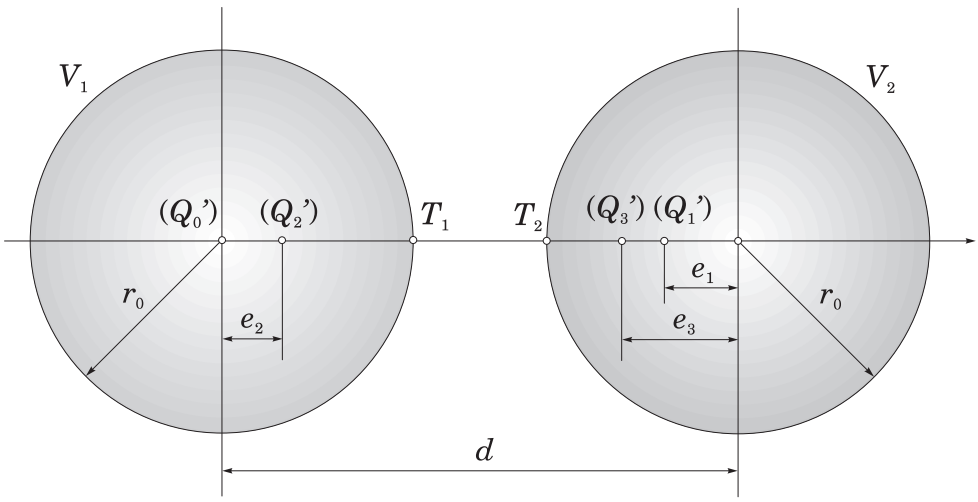
Ko gre $r \to r_0$, je $E_r = \sigma/\varepsilon_0$, kar da porazdelitev elektrin na krogli,

$$\sigma(\vartheta) = \varepsilon_0 E_r(r \to r_0,\vartheta) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\vartheta$$

Ob tem zgledu ugotavljamo dvoje: i) nevtralna krogla zavzame v homogenem polju tolikšen potencial, kot ga je predhodno (brez krogle) imela simetralna ravnina $z = 0$, ii) električno polje ob krogli se do trikrat ojači.

Zgled 25.7

Oglejmo si iskrišče, ki naj je izvedeno z dvema prevodnima kroglama enakega polmera r_0 z medsrediščno razdaljo d; $d > 2r_0$; slika 25.7. Naj sta krogli sorazmerno



Slika 25.7: Dve naelektreni krogli – iskrišče.

oddaljeni od zemlje, tako da ju moremo smatrati za sami v prostoru. Naj je leva krogla na potencialu V_1 in desna na potencialu V_2 do "neskončne" okolice. Problem

bomo reševali s superpozicijo, in sicer: v prvem koraku bomo smatrali, da je $V_1' = V_1$ in je $V_2' = 0$, v drugem koraku pa, da je $V_1'' = 0$ in je $V_2'' = V_2$.

Prvi korak. $V_1' = V_1$, $V_2' = 0$. V prvem približku smatramo, da je elektrina leve krogle enakomerno razporejena po površini in učinkuje v prostor kot točkasta elektrina v centru leve krogle: $(Q_0') = 4\pi\varepsilon_0 r_0 V_1' = 4\pi\varepsilon_0 r_0 V_1$. Če s C_0 označimo kapacitivnost osamljene krogle, je $(Q_0') = C_0 V_1$. Za to elektrino pa desna krogla ni na potencialu nič; da bi bila, "dodamo" znotraj nje v ekscentrični legi $e_1 = r_0^2/d$ elektrino $(Q_1') = -r_0(Q_0')/d$. Seveda pa ta elektrina spremeni potencial V_1 in leva krogla ni več ekvipotencialka; da bi bila in ostala na V_1, moramo v ekscentrični legi $e_2 = r_0^2/(d - e_1)$ dodati elektrino $(Q_2') = -r_0(Q_1')/(d - e_1)$. Z uvedbo te elektrine se porušijo potencialne razmere na desni krogli; "vpeljemo" elektrino $(Q_3') = -r_0(Q_2')/(d - e_2)$ v ekscentrični legi $e_3 = r_0^2/(d - e_2)$ znotraj desne krogle. To postopno usklajevanje se niza kot zaporedje popravkov v "neskončnost".

Postavlja se vprašanje: kako je s konvergenco niza popravkov ali, ali lahko usklajevanje pri določenem zaporednem približku n_0 ustavimo ter bodo rezultati za polje takrat že v okvirih predpisane točnosti? Opredelimo splošna člena zaporedja ekscentričnosti in elektrin z rekurzivnima formulama:

$$e_{n+1} = \frac{r_0^2}{d - e_n} \qquad (Q_{n+1}') = -\left(\frac{r_0}{d - e_n}\right)(Q_n')$$

Vsaka naslednja ekscentričnost je očitno večja in ne preseže polmera r_0. Zaporedje ekscentričnosti je monotono in navzgor omejeno; poglejmo si limito zaporedja e_n, ko gre $n \to \infty$; označimo jo z e. Zanjo dobimo: $e = r_0^2/(d - e)$. Rešitev kvadratne enačbe da: $e = d/2 - \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}$; pozicije točkastih elektrin (Q_n') se ob limitni ekscentričnosti vse bolj gostijo. Poglejmo še, kaj je z zgoščevanim nizom elektrin? Napravimo oceno

$$|(Q_{n+1}')| = \left|\frac{r_0}{d - e_n}(Q_n')\right| < \frac{r_0}{d - e}\,|(Q_n')| = \frac{e}{r_0}\,|(Q_n')|$$

ali dalje

$$|(Q_n')| < \left(\frac{e}{r_0}\right)^n |(Q_0')|$$

Absolutna vrednost na novo uvajanih elektrin upada približno v geometrijskem zaporedju. Za praktičen izračun polja bo dovolj že relativno majhno število pomožnih (ekvivalentnih) točkastih elektrin.

Drugi korak. $V_1'' = 0$, $V_2'' = V_2$. V drugem delu je postopek povsem enak. Začnemo z elektrino $(Q_0'') = C_0 V_2'' = C_0 V_2$ v centru druge krogle. Postopoma se nizajo elektrine (Q_1'') v levi krogli, (Q_2'') v desni krogli, ... v ekscentričnih legah f_1, f_2, ..., ki so identične e_1, e_2, ... Rekurzivna formula za elektrine je zato enaka,

$$(Q_{n+1}'') = -\left(\frac{r_0}{d - e_n}\right)(Q_n'')$$

Pomožne elektrine prvega in drugega koraka končno seštejemo in dobimo elektrini Q_1 in Q_2 na obeh kroglah:

$$\begin{aligned} Q_1 &= ((Q_0') + (Q_2') + ...) + ((Q_1'') + (Q_3'') + ...) \\ Q_2 &= ((Q_1') + (Q_3') + ...) + ((Q_0'') + (Q_2'') + ...) \end{aligned}$$

ali krajše:

$$Q_1 = aC_0V_1 - bC_0V_2 \qquad Q_2 = -bC_0V_1 + aC_0V_2$$

kjer sta a in b konstanti, ki sledita iz rekurzivnih formul in sta odvisni le od d in r_0:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{r_0^2}{d(d-e_1)} + \frac{r_0^4}{d(d-e_1)(d-e_2)(d-e_3)} + ... \\ b &= \frac{r_0}{d} + \frac{r_0^3}{d(d-e_1)(d-e_2)} + \frac{r_0^5}{d(d-e_1)(d-e_2)(d-e_3)(d-e_4)} + ... \end{aligned}$$

Po shemi delnih kapacitivnosti iz razdelka 24 moremo za elektrini Q_1 in Q_2 pisati:

$$\begin{aligned} Q_1 &= (C_{10} + C_{12})V_1 - C_{12}V_2 \\ Q_2 &= -C_{12}V_1 + (C_{12} + C_{20})V_2 \end{aligned}$$

kjer C_{10} in C_{20} pomenita delni kapacitivnosti krogel do neskončne okolice, C_{12} pa pomeni delno kapacitivnost med njima. Iz primerjave izražav za elektrini Q_1 in Q_2 dobimo:

$$C_{12} = bC_0 = 4\pi\varepsilon_0 r_0 b \qquad C_{10} = C_{20} = (a-b)C_0 = 4\pi\varepsilon_0 r_0(a-b)$$

Vzemimo primer, da med obe krogli priključimo napetostni vir ($U_\mathrm{g} = U_{12}$). Na kroglah bosta elektrini Q_1 in $Q_2 = -Q_1$, potenciala krogel bosta $V_1 = U_\mathrm{g}/2$ in $V_2 = -U_\mathrm{g}/2$. Nadomestna kapacitivnost med kroglama bo

$$C_{12\ \mathrm{nad.}} = \frac{Q_1}{U_\mathrm{g}} = \frac{(C_{10} + C_{12})U_\mathrm{g} + C_{12}U_\mathrm{g}}{2U_\mathrm{g}} = C_{12} + \frac{C_{10}}{2} = \frac{a+b}{2}C_0$$

V primeru, da sta krogli zelo oddaljeni ($d \gg r_0$), bo $a \doteq 1$, $b \doteq 0$ in nadomestna kapacitivnost bo približno $C_0/2$; to pa je ravno polovična kapacitivnost osamljene krogle. V primeru, da je druga krogla ozemljena, dobimo kapacitivnost $\widetilde{C}_{10\ \mathrm{nad.}}$ enako kot pri dvovodu nad zemljo (Zgled 24.2)

$$\widetilde{C}_{10\ \mathrm{nad.}} = C_{10} + C_{12} = aC_0$$

In spet, če bo $r_0 \ll d$, bo $\widetilde{C}_{10\ \mathrm{nad.}} \doteq C_0$. Prisotnost druge krogle, ki je od prve zelo oddaljena, ne vpliva na kapacitivnost prve krogle do "neskončne" okolice.

Določimo še izraz za največjo poljsko jakost, ko med krogli priključimo napetost U_g. Ta bo gotovo največja na mestih, kjer sta krogli najbliže skupaj, torej v točkah T_1 in T_2. Iskano poljsko jakost E_m dobimo s superponiranjem prispevkov posameznih točkastih elektrin na teh mestih,

$$\begin{aligned} E_\mathrm{m} &= \frac{r_0 U_\mathrm{g}}{2}\left(\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{(d-r_0)^2}\right) + \left(\frac{1}{(r_0-e_1)^2} + \frac{1}{(d-r_0-e_1)^2}\right)\frac{r_0}{d}\right. \\ &+ \left.\left(\frac{1}{(r_0-e_2)^2} + \frac{1}{(d-r_0-e_2)^2}\right)\frac{r_0^2}{d(d-e_1)} + ...\right) \end{aligned}$$

♣ Bralec naj razmisli o iterativnih postopkih: i) v primeru dveh krogel različnih radijev (r_1 in r_2) in ii) v primeru prevodne naelektrene krogle polmera r_0, ki se nahaja na višini h nad ravno prevodno ozemljeno podlago. ♣

26. Energija elektrostatičnega polja

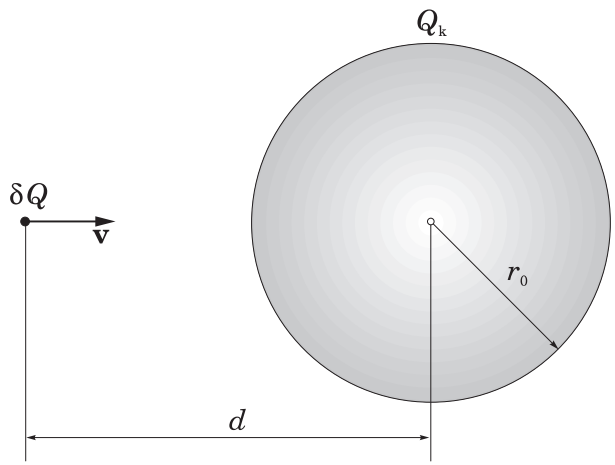
V razdelku 13 smo govorili o delu, ki ga polje električnih sil opravi za premik elektrine od ene do druge točke v prostoru. Takrat smo izrekli očitno trditev: če nek fizikalni sistem učinkuje na relevantno okolico z določeno silo, s katero se ta sistem prepoznava, in je ta sila sposobna opraviti delo, potem rečemo, da je opazovan sistem energijsko akumulabilen oz., da vsebuje ali da je zmožen hraniti določeno količino energije.

Zaradi Coulombove sile ima naše elektrostatično polje vse atribute akumulabilnega sistema, zato je tudi spraševanje po njegovi energiji povsem na mestu. Energijo določenega elektrostatičnega sistema bomo definirali z delom, ki ga ta zmore opraviti, dokler se ne iztroši oz., dokler električno polje ne usahne v celotnem prostoru[1].

Povsem očitno bo energija elektrostatičnega sistema odvisna od porazdelitve elektrin v prostoru oz. od električnega polja, ki tem elektrinam pripada. Globji fizikalni sliki se bomo približevali postopoma. Za začetek bomo opazovali proces elektrenja in proces razelektrenja preprostega elektrostatičnega sistema.

Elektrenje prevodnega telesa. Da bi bilo matematično izvajanje kar najbolj jasno in preprosto, si oglejmo elektrenje osamljene krogle, kasneje pa bomo dobljen rezultat razširili na splošno prevodno telo.

Za izhodišče si vzemimo zgled 25.5; slika 26.1. Elektrino Q bomo zamenjali z us-



Slika 26.1: Elektritev krogle.

trezno majhno množino δQ. Zamislimo si, da naboj δQ iz neskončne okolice dospe do površine krogle in do tja izgubi vso kinetično energijo. Da bi elektrina δQ ravno še dosegla površino krogle, mora biti iz oddaljene okolice "izstreljena" s tolikšno hitrostjo, da je njena kinetična energija tam enaka kasneje njeni potencialni energiji na krogli. Vloženo delo

[1] V posebnih (linearnih, reverzibilnih) sistemih moremo definicijo tudi obrniti. Elektrostatičen sistem vsebuje tolikšno energijo, kolikršen je sumarni energijski vložek, ki je potreben, da se od začetne ničnosti polja vzpostavi stacionarno električno polje elektrin.

δA_z zunanje (mehanske) sile bi bilo približno[2]

$$\delta A_z \doteq V_k \delta Q = \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\delta Q = \frac{Q_k}{C_0}\delta Q$$

kjer je C_0 kapacitivnost osamljene krogle. Naboj δQ, ki dospe do krogle, poveča celotno elektrino na krogli, zato bomo za δQ pisali δQ_k. Makroskopski sliki elektrenja se bomo še najbolj približali, če bomo za δQ_k pisali diferencial dQ_k. Za energijski vložek zunanje sile bomo dobili:

$$dA_z = \frac{Q_k}{C_0} dQ_k$$

Če si sedaj zamislimo, da se s prihajajočo elektrino dQ_k prvotna nevtralna krogla v določenem času naelektri do neke končne množine $Q_{\text{končna}}$, potem je zunanja sila opravila delo

$$A_z = \frac{1}{C_0}\int_0^{Q_{\text{končna}}} Q_k \, dQ_k = \frac{Q^2_{\text{končna}}}{2C_0}$$

Vloženo delo moremo izraziti tudi s končnim potencialom ($V_{\text{končni}}$):

$$A_z = \frac{1}{2} V_{\text{končni}} Q_{\text{končna}} = \frac{1}{2} C_0 V^2_{\text{končni}}$$

Na tem mestu moremo rezultat posplošiti na poljubno prevodno telo, ki bi ga elektrili na podoben način. Če je C_{telesa} kapacitivnost tega telesa do neskončne okolice in bo končna elektrina na njem enaka $Q_{\text{končna}}$, potem je potreben vložek dela (A_z) zunanje sile za elektrenje enak

$$A_z = \frac{Q^2_{\text{končna}}}{2C_{\text{telesa}}} = \frac{1}{2} C_{\text{telesa}} V^2_{\text{končni}}$$

Razelektrenje prevodnega telesa. Imejmo poljubno naelektreno prevodno telo nad zemljo. Čeravno je zrak dober izolator, ima vseeno določeno šibko gostoto ($\pm$) ionov in elektronov, ki se pod vplivom polja gibljejo med telesom in zemljo. Če ima telo presežek ($+$) elektrine, potem se anioni ($-$) in elektroni gibljejo k telesu, kationi ($+$) pa k zemlji. Ta tok ionov in elektronov omenjeno prevodno telo in zemljo sčasoma elektrinsko nevtralizira in električno polje v okolici usahne. Na tem mestu nas ne zanima toliko sámo prevajanje v zraku (plinih); povejmo morda le to, da je gibanje ionov in elektronov med atomi in molekulami ovirano in da se njihova sproti pridobljena kinetična energija "troši" za "trke" med atomi, kar se manifestira v notranji (toplotni) energiji medija (Joulov zakon).

Selitev elektrine pri razelektrenju moremo matematično modelirati kot zaporedno prehajanje diferencialov elektrine (dQ) pri vedno manjši potencialni razliki med telesom in zemljo. Vzemimo, da je bil na začetku procesa razelektrenja potencial telesa $V_{\text{začetni}}$ in je bila elektrina na njem $Q_{\text{začetna}}$. Ko se telo razelektri za elektrino Q, je potencial telesa enak $(Q_{\text{začetni}} - Q)/C_{\text{telesa}}$. Pri tej napetosti bo električno polje – za preselitev elektrine dQ – opravilo delo

$$dA_e = \frac{Q_{\text{začetni}} - Q}{C_{\text{telesa}}} dQ$$

[2]Približno pač zato, ker se s približevanjem naboja δQ potencial krogle (po omenjenem zgledu) povečuje od Q_k/C_0 do $(Q_k + \delta Q)/C_0$.

Delo električnega polja bo "dokončano", ko bo vsa začetna presežna elektrina odšla s telesa. Polje električnih sil bo opravilo delo

$$A_{\mathrm{e}} = \frac{1}{C_{\mathrm{telesa}}} \int_0^{Q_{\mathrm{začetni}}} (Q_{\mathrm{začetni}} - Q)\, dQ = \frac{Q^2_{\mathrm{začetni}}}{2C_{\mathrm{telesa}}}$$

ali

$$A_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} V_{\mathrm{začetni}} Q_{\mathrm{začetni}} = \frac{1}{2} C_{\mathrm{telesa}} V^2_{\mathrm{začetni}}$$

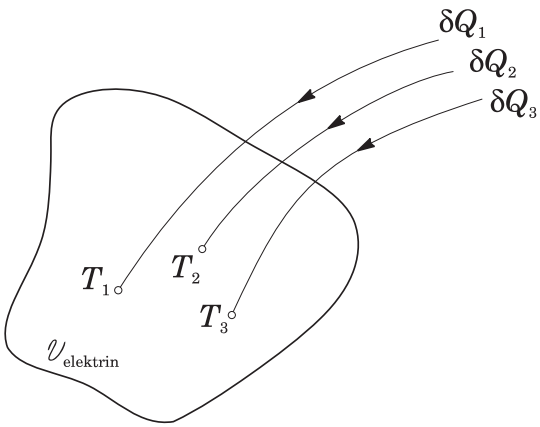
Iz primerjave elektrenja in razelektrenja prevodnega telesa moremo sklepati: če prevodno telo elektrimo do stanja $(V_{\mathrm{končni}}, Q_{\mathrm{končni}})$ in je to v nadaljevanju začetno stanje razelektrenja $(V_{\mathrm{začetni}}, Q_{\mathrm{začetni}})$, potem je vloženo delo zunanjih sil za elektrenje enako povrnjenemu delu v obliki toplotne energije. Očitno je bila med začetkom elektrenja in koncem razelektrenja v elektrostatičnem sistemu vseskozi akumulirana določena količina t.i. *električne energije*. Ta je bila gotovo največja ob zaključku elektrenja oz. ob začetku razelektrenja. V idealiziranem primeru, ko bi bil med prevodnim telesom in podlago vakuum, bi bila akumulirana energija "trajno" shranjena. Rekli bi: akumulirana energija oz. *energija elektrostatičnega sistema* (W_{e}) je

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

kjer so: V – potencial telesa do ozemljene podlage ali neskončne okolice, Q – količina presežne elektrine na telesu in C – kapacitivnost sistema telo-podlaga.

Ta uvodna razmišljanja so trenutno še preveč vezana na prevodno telo in prevodno podlago ali neskončno okolico in zato še ne omogočajo posplošitve na evalvacijo električne energije v sistemu, kjer imamo več prevodnikov in dielektrikov z dano prostorsko porazdelitvijo elektrin.

Elektritev in izelektritev prostora. Vzemimo neko območje prostora $\mathcal{V}_{\mathrm{elektrin}}$, ki naj bo na začetku "prazno" (brez elektrin in električnega polja); v ta prostor "bomo" v nadaljevanju – s pomočjo zunanje sile – iz "neskončne" okolice "dostavljali" elektrinice δQ_i; slika 26.2. Vzemimo, da bomo to vršili postopoma: z "vnosom" prve, druge, tretje,



Slika 26.2: Vnos elektrin v opazovan prostor.

i-te, do (zadnje) n-te elektrine. Razumljivo se ob tem postavlja vrsta vprašanj, kot: kje so prevodniki, kje so izolatorji, kakšna je njihova geometrija, kakšen je mehanizem dostavljanja elektrinic, od kje te elektrinice "zajemamo" itd? Ti pomisleki so povsem obvladljivi, če izhajamo iz predpostavke, da zajemamo vse elektrinice δQ_i iz območja (področja), kjer imajo električno potencialno energijo enako nič. Na sliki 23.2 na primer, vrši ta prenos napetostni vir s svojo gonilno poljsko jakostjo $\mathbf{E}_\mathrm{g}$, ki elektrinice δQ "zajema" iz podlage, kjer imajo potencialno energijo nič, in jih "prenaša" na prevodno telo, ki se na ta način elektri.

Če se opremo na makroskopsko načelo, potem se elektrenje – kakršnokoli že je – ne izvrši hipno in tudi elektrina ne dospeva v prostor v "paketih", ampak "zvezno", zato bomo elektrenje prostora z elektrinicami δQ_i v zadnji sekvenci limitirali v elektrenje z diferenciali elektrin dQ.

Proces elektrenja začnimo takole. Ob vnosu elektrinice δQ_1 ne opravi zunanja sila nikakršnega dela, saj se ta ne giblje v nikogaršnjem (tujem) polju. Pri vnosu elektrinice δQ_2 mora zunanja sila premagovati polje elektrinice δQ_1. Za vnos opravi delo $\delta Q_2 \delta V_1(T_2)$, kjer je $\delta V_1(T_2)$ potencial prve elektrinice na mestu druge. Pri vnosu elektrinice δQ_3 premaguje zunanja sila polje prvih dveh elektrin in opravi delo $\delta Q_3(\delta V_1(T_3) + \delta V_2(T_3))$; v oklepaju se nahaja potencial prvih dveh elektrinic na mestu tretje. Postopek nato nadaljujemo (do zadnje) elektrinice δQ_n. Po korakih je vloženo delo zunanje sile sledeče:

$$\delta A_\mathrm{z}^{(i)} = \delta Q_i \sum_{j=1}^{i-1} \delta V_j(T_i) \qquad\qquad i = 1, 2, ..., n$$

celotno vloženo delo pa je njihova vsota,

$$A_\mathrm{z} = \sum_{i=1}^{n} \delta Q_i \sum_{j=1}^{i-1} \delta V_j(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \delta Q_i \delta V_j(T_i)$$

Če dvojno vsoto smiselno preberemo, je potrebno sešteti vse produkte $\delta Q_i \delta V_j(T_i)$, za katere je $j < i$, ko teče i od 1 do n. Vse potrebne produkte bomo dobili tudi, če vrstni red seštevanja podredimo naslednji dvojni sumaciji:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \delta Q_i \delta V_j(T_i)$$

Očitno indeks i vsaj za ena presega indeks j ($j < i$), pri tem pa i še vedno preteče vse vrednosti od 1 do n.

V razdelku 24 smo omenili stavek recipročnosti. Če ga tu zapišemo za elektrinici δQ_i in δQ_j, sta njuna potenciala v relaciji $\delta Q_i \delta V_j(T_i) = \delta Q_j \delta V_i(T_j)$; prejšnjo dvojno vsoto moremo pisati kot:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \delta Q_j \delta V_i(T_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \delta Q_j \sum_{i=j+1}^{n} \delta V_i(T_j)$$

Po vseh teh preoblikovanjih seštejemo začetni in končni dvojni vsoti; dobimo dvojno vloženo delo:

$$2A_\mathrm{z} = \sum_{i=1}^{n} \delta Q_i \sum_{j=1}^{i-1} \delta V_j(T_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \delta Q_j \sum_{i=j+1}^{n} \delta V_i(T_j)$$

Če poskušamo dvojni vsoti spet smiselno prebrati, potem v prvi (dvojni vsoti) vsako elektrinico množimo z vsoto potencialov elektrinic nižjega indeksa, v drugi pa vsako elektrinico množimo z vsoto potencialov elektrinic višjega indeksa. Poenostavljeno rečeno: cela desna stran je enaka vsoti produktov $\delta Q_i \delta V_j(T_i)$, kjer je $i \neq j$ in tečeta i in j od 1 do n. Delo A_z je tako:

$$A_\mathrm{z} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta Q_i \delta V_j(T_i)$$

Rezultat je vsekakor zanimiv. Iz vsote ni več razvidno, s katero elektrino smo pričeli prostor elektriti. In še dalje, za vloženo delo je relevantna le porazdelitev elektrinic δQ_i v prosotru; potenciali so namreč že posledica te porazdelitve.

Proces razelektrenja prostora si moremo zamisliti ravno v obratnem vrstnem redu kot pri elektrenju. Kinetične energije elektrinic δQ_n, δQ_{n-1}, ... bi bile v neskončni okolici (kamor bi jih potiskale preostale elektrine) enake ravno prejšnjim vložkom dela zunanje sile za njihov vnos v prostor $\mathcal{V}_\mathrm{elektrin}$.

Zaključimo lahko, da se je vloženo delo zunanjih sil, ki je "gradilo" elektrostatičen sistem, najprej akumuliralo v električni energiji W_e, v nadaljevanju pa se je v celoti pretvorilo nazaj v mehansko energijo. Na prehodu iz elektrenja v razelektrenje je bila akumulirana električna energija enaka ravno A_z; torej:

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta Q_i \delta V_j(T_i)$$

Evalvacija električne energije elektrostatičnega sistema. V izrazu za energijo W_e izpostavimo δQ_i pred drugo sumacijo in dobimo:

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \delta Q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta V_j(T_i)$$

Notranja vsota predstavlja potencial sosednjih elektrinic na mestu elektrinice δQ_i. Elektrenju prostora se bomo v makroskopskem pogledu še najbolj približali, če bomo elektrinice δQ_i zmanjševali proti nič, njihovo število pa ustrezno limitirali proti neskončnosti. Za W_e dobimo:

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta Q_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \delta Q_i \left(\lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta Q_j \to 0}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta V_j(T_i) \right)$$

Elektrinico δQ_i si moremo zamisliti kot elektrinski oblak gostote ρ_i, katerega volumen δv_i limitiramo proti nič. V zgledu 15.3 smo za tak oblak ugotovili, da limitira njegov potencial v centru k nič, če gre volumen oblaka proti nič. Notranjo limito (v oklepaju) moremo zato razumeti kot rezultirajoči potencial v točki T_i od vseh elektrin, ki so v prostoru,

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta Q_j \to 0}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta V_j(T_i) = V(T_i)$$

Končno izvedemo še zunanjo limito

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta Q_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} V(T_i)\delta Q_i$$

ki preide v integral. Energija je tako:

$$\boxed{W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \int_{(Q_\mathrm{cel.})} V(T)\, dQ(T)} \tag{26.1}$$

Integral vsebinsko pomeni integracijo produkta diferenciala elektrine in potenciala na njenem mestu po območju celotne elektrine ($Q_\mathrm{cel.}$).

Zgled 26.1

V zgledu 15.3 smo določili potencialno funkcijo v in izven elektrinskega oblaka v obliki krogle polmera r_0. Po enačbi 26.1 izračunajmo, koliko električne energije hrani ta preprost elektrostatični sistem. Integrirali bomo samo po notranjosti oblaka – tam, kjer je pač elektrina. Potencial znotraj oblaka podaja izraz

$$V(r) = \frac{\rho r_0^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

Diferencial elektrine dQ v lupini z radijem r in debelino dr je enak $4\pi\rho r^2\, dr$. Za energijo sistema dobimo:

$$W_\mathrm{e} = \frac{\pi}{\varepsilon_0}\rho^2 r_0^2 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right) r^2\, dr = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 r_0^5$$

Energija v elektrostatičnem sistemu prevodnih teles. Naelektrena prevodna telesa srečujemo v elektrotehniki najpogosteje. Vzemimo, da je v opazovanem prostoru n prevodnih teles, ki se nahajajo nad zemljo. Potenciali teles naj so po vrsti V_1, V_2, ..., V_n, elektrine na njih pa Q_1, Q_2, ..., Q_n. Potencial zemlje (V_0) je nič, elektrina na njej pa je $Q_0 = -(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n)$; elektrostatično zaključen sistem.

Po izrazu 26.1 je potrebno integrirati po vseh elektrinah, torej po vseh prevodnih telesih. Ker pa je vsako telo ekvipotencialka, je

$$\int_{\mathcal{A}_i} V\, dQ = V_i \int_{\mathcal{A}_i} dQ = V_i Q_i$$

Energija v takšnem sistemu je (zaradi $V_0 Q_0 = 0$) kar vsota:

$$\boxed{W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i Q_i} \tag{26.2}$$

V razdelku 24 smo v okviru delnih kapacitivnosti za primer treh teles nad zemljo zapisali elektrine Q_1, Q_2 in Q_3 kot vsoto ustreznih delnih elektrin. Če bi tiste enačbe razširili na n teles, bi za Q_i pisali:

$$Q_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} C_{ij}(V_i - V_j)$$

Ko to vnesemo v 26.2 in vsoto formalno razširimo na indeks nič (zemlja), dobimo

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} V_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} C_{ij}(V_i - V_j)V_i$$

Dvojna vsota zajame same paroma sorodne sumande,

$$C_{ij}(V_i - V_j)V_i + C_{ij}(V_j - V_i)V_j = C_{ij}(V_i - V_j)^2 = C_{ij}U_{ij}^2$$

Električna energija sistema n teles nad zemljo je tako vsota členov $(1/2)C_{ij}U_{ij}^2$ po vseh delnih kapacitivnostih,

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} C_{ij}U_{ij}^2$$

teh pa je $n(n+1)/2$; torej toliko, kolikor je različnih povezav med $n+1$ točkami v prostoru.

Gostota električne energije. Do sedaj smo se ukvarjali predvsem z evalvacijo količine akumulirane električne energije, ki jo hrani naelektren prostor, nič pa nismo povedali, kje se ta energija nahaja, kje je je več, kje je je manj ali kje je ni? Seveda bi bilo sila zmotno "na slepo" brati enačbo 26.1 in sklepati, da je ta le tam, kjer so elektrine, ker pač integracija teče le po njih. Poglejmo si stvar pobliže. Vzemimo prevodno telo nad zemljo. Potencial telesa bodi V_1, napetost do zemlje je $U = V_1$. Elektrina na telesu je Q, na zemlji je $-Q$. Po enačbi 26.1 ali 26.2 bo energija v sistemu enaka $QU/2$. "Prva" ekvipotencialka je površina telesa, "zadnja" ekvipotencialka je površina zemlje. Med telesoma moremo določiti še poljubno število ekvipotencialk; bodi teh $n-1$, kjer je n poljubno veliko število. Potencialna razlika med sosednjima ekvipotencialkama bo zato ustrezno majhna; $\delta U_{i,i+1} = V_i - V_{i+1}$.

Sedaj pa te ekvipotencialke miselno okovinimo; polje med ekvipotencialkami se zato ne bo nič spremenilo. Tudi energija se ne bo nič spremenila; po enačbi 26.2 bo ta še vedno $QU/2$, saj so vmesne okovinjene ekvipotencialke električno nevtralne (sumarna elektrina na vsaki je nič). Po drugi strani pa te okovinjene ekvipotencialke razdelijo prvoten sistem na n avtonomnih sistemov. Vzemimo, da bi se v prvem sistemu (med prvo in drugo ekvipotencialko) "zgodila" razelektritev. V smislu razelektritve prevodnega telesa nad zemljo (v tem razdelku) bi sklepali, da se je energija v celotnem sistemu zmanjšala za $Q\delta U_{12}/2$. Resnično, prevodno telo bi po razelektritvi zavzelo potencial $V_2 = U - \delta U_{12}$ in presežna elektrina bi bila sedaj le na drugi ekvipotencialki. Po enačbi 26.2 bi bila energija v sistemu samo še $QV_2/2$ oz. $Q(U - \delta U_{12})/2$, kar pomeni, da bi se zmanjšala ravno za omenjen $Q\delta U_{12}/2$.

Razelektritve v prvem sistemu niso ostali sistemi v ničemer "občutili", saj so avtonomni; njih polja bi bila nespremenjena. Zaključimo lahko, da je bila omenjena razelektritev le "notranja zadeva" prvega avtonomnega sistema. Podoben razmislek bi mogli napraviti tudi ob razelektritvi i-tega avtonomnega sistema med i-to in $i+1$-vo ekvipotencialko. Skupna energija sistemov bi se zmanjšala za $Q\delta U_{i,i+1}/2$. Ti premisleki nas logično navajajo na sklep, da je "energijski defekt" $Q\delta U_{i,i+1}/2$ izključno v domeni prostora med i-to in $i+1$-vo ekvipotencialko oz., da je ta energija bila tudi pred razelektritvijo izključno le v tem prostoru.

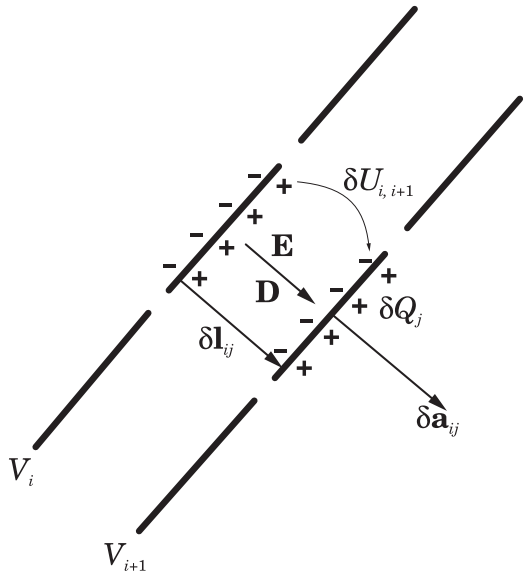
Po vsem tem moremo energijo izhodiščnega sistema pisati kot vsoto:

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}Q\sum_{i=1}^{n}\delta U_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}Q\delta U_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{n}\delta W_{\mathrm{e}i}$$

kjer $\delta W_{\mathrm{e}i}$ pomeni energijo i-tega avtonomnega sistema. S to miselno parcelacijo prvotnega prostora, ki smo jo dosegli z okovinjanjem ekvipotencialk, smo nekako "zaslutili", da vprašanje električne energije nekega elektrostatičnega sistema ni vezano na lokacijo elektrin, ampak na električna polja teh elektrin.

Po vsem povedanem bi bilo verjetno že "smešno" trditi, da je bila energija v prvotnem sistemu na telesu in zemlji, po okovinjanju pa je "poskakala" na ekvipotencialke. Nasprotno: pred okovinjanjem je bila energija v vmesnem prostoru in po okovinjanju ostaja še naprej na "svojem" mestu. Ali še bolj decidirano: energija v določenem delu prostora je izključno v domeni stanja električnega polja, tega pa enoumno opredeljujeta vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$.

Ostanimo še naprej pri naših avtonomnih sistemih. Če so ekvipotencialke izbrane dovolj na gosto, so te v lokalnem smislu ravne; slika 26.3. Električna energija ($\delta W_{\mathrm{e}i}$)



Slika 26.3: K interpretaciji elektrostatične energije v polju.

med ekvipotencialkama i in $i+1$ je $Q\delta U_{i,i+1}/2$. Napravimo še tale miselni poseg: vsako kompaktno okovinjeno ekvipotencialko razdelimo na m majhnih prevodnih "luskic", ki se "skoraj" dotikajo. Oblike polja ta "poseg" ne bo v ničemer zmotil. Luskice naj so izbrane tako, da se špranje med njimi ujemajo z ograjami pretočnih cevk. Energijo med opazovanima ekvipotencialkama moremo pisati kot vsoto:

$$\delta W_{\mathrm{e}i} = Q\delta U_{i,i+1}/2 = \sum_{j=1}^{m}\delta Q_j\delta U_{i,i+1}/2$$

Če energija "domuje" v polju, potem je njeno mesto tudi v delčku volumna $\delta v_{ij} = \delta\mathbf{a}_{ij}\cdot\delta\mathbf{l}_{ij}$. Po zgornjem "razcepu" bo energija v njem enaka

$$\delta W_{\mathrm{e}ij} = \delta Q_j\delta U_{i,i+1}/2$$

Če so luske dovolj majhne, in razmak med ekvipotencialkami tudi, moremo $\delta W_{\mathrm{e}ij}$ aproksimativno pisati kot

$$\delta W_{\mathrm{e}ij} \doteq (\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{a}_{ij})(\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{l}_{ij})/2$$

V izotropnih medijih sta $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ vzporedna, vsi štirje vektorji v izrazu so kolinearni (vzporedni), zato moremo vektorje v produktih poljubno "premešati"; dobimo:

$$\delta W_{\mathrm{e}ij} \doteq \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})(\delta \mathbf{a}_{ij} \cdot \delta \mathbf{l}_{ij}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})\, \delta v_{ij}$$

Končno napravimo limito kvocienta $\delta W_{\mathrm{e}ij}/\delta v_{ij}$, ki je t.i. *gostota električne energije* (w_{e}); torej:

$$\boxed{w_{\mathrm{e}} = \lim_{\delta v_{ij} \to 0} \frac{\delta W_{\mathrm{e}ij}}{\delta v_{ij}} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}} \tag{26.3}$$

Električno energijo v celotnem prostoru dobimo z volumsko integracijo gostote po prostoru,

$$\boxed{W_{\mathrm{e}} = \int_{\mathcal{V}} w_{\mathrm{e}}\, dv = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\, dv} \tag{26.4}$$

Očitno je energija le tam, kjer je polje; kjer električnega polja ni, tudi ni akumulirane energije. V kovinah polja ni; tam torej ni shranjena nikakršna energija – energija je le v izolatorju. Za linearne izolatorje, za katere tudi veljajo ta izvajanja, je $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ in gostoto energije moremo pisati tudi kot

$$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

Do tu smo večkrat rabili sintagmo: vložek zunanjih sil za elektrenje prostora. To moremo sedaj zamenjati in reči: vložek zunanjih sil za gradnjo električnega polja.

Zgled 26.2

Izračunajmo električno energijo v prostoru, kjer se nahaja elektrinski oblak v obliki krogle polmera r_0 in gostote ρ, še po enačbi 26.4. Kot diferencial volumna bomo znotraj in zunaj oblaka vzeli $4\pi r^2\, dr$. Pri oblaku smo za polje E_r dobili:

$$E_r = \begin{cases} \rho r/3\varepsilon_0 & r < r_0 \\ \rho r_0^3/3\varepsilon_0 r^2 & r > r_0 \end{cases}$$

Energija znotraj oblaka bo

$$W_{\mathrm{e\ not.}} = \frac{\rho^2}{18\varepsilon_0} \int_0^{r_0} r^2 4\pi r^2\, dr = \frac{2\pi\rho^2 r_0^5}{45\varepsilon_0}$$

zunaj oblaka pa

$$W_{\mathrm{e\ zun.}} = \frac{\rho^2}{18\varepsilon_0} r_0^6 \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2\, dr = \frac{2\pi\rho^2 r_0^5}{9\varepsilon_0}$$

Celotna energija bo vsota,

$$W_{\mathrm{e}} = W_{\mathrm{e\ not.}} + W_{\mathrm{e\ zun.}} = \frac{4\pi\rho^2 r_0^5}{15\varepsilon_0}$$

To pa je ravno rezultat, ki smo ga po drugačni poti dobili tudi v prejšnjem zgledu. Vidimo še, da je 1/6 celotne energije znotraj, preostalih 5/6 pa je je zunaj oblaka.

Kapacitivnost kot energijski koeficient. Ako vzamemo primer zračnega kondenzatorja s kapacitivnostjo C_0, ki je priključen na napetost U, bo energija v njem enaka

$$W_{\mathrm{e}_0} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\, dv = \frac{1}{2} C_0 U^2$$

Če pa prostor med ploščama izpolnimo v celoti z dielektrikom dielektričnosti ε, se pri isti napetosti polje $\mathbf{E}$ ne bo v ničemer spremenilo, $\mathbf{D}$ pa bo $\varepsilon\mathbf{E}$. Energija W_{e} bo:

$$W_{\mathrm{e}} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\varepsilon E^2}{2}\, dv = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} C_0\right) U^2 = \frac{1}{2} C U^2$$

kjer je C nova kapacitivnost. Razlika vložene energije $(W_{\mathrm{e}} - W_{\mathrm{e}_0})$ se je v tem primeru "vgradila" v orientacijo dipolskih momentov in v induciranje dipolskih momentov v izolatorju. Ob razelektritvi takšnega kondenzatorja se dipolski momenti relaksirajo in takrat to energijo tudi oddajo. V smislu električne energije moremo pojem kapacitivnosti zato še poglobiti in reči, da je kapacitivnost kondenzatorja hkrati tudi merilo za zmožnost sprejetja določene količine električne energije pri elektritvi z napetostjo U,

$$\boxed{C = \frac{2W_{\mathrm{e}}}{U^2}} \tag{26.5}$$

oz. merilo za zmožnost sprejetja energije pri naelektritvi z elektrinama $\pm Q$,

$$\boxed{C = \frac{Q^2}{2W_{\mathrm{e}}}} \tag{26.6}$$

V smislu kapacitivnosti kot energijskega koeficienta bi elektrinskemu oblaku iz zgleda 26.2 priredili kapacitivnost oz. kapaciteto $Q^2/2W_{\mathrm{e}} = 10\pi\varepsilon_0 r_0/3$.

Zgled 26.3

V zgledu 18.2 smo si ogledali polje v koaksialnem kablu. Poglejmo, kako je v izolatorju z dielektričnostjo ε porazdeljena gostota električne energije, če je kabel dolžine l ter radijev ρ_1 in ρ_2 priključen na napetost U_{12}. Iz omenjenega zgleda je

$$E_\rho(\rho) = \frac{U_{12}}{\rho \ln(\rho_2/\rho_1)}$$

Po enačbi 26.3 je gostota energije

$$w_{\mathrm{e}}(\rho) = \frac{\varepsilon E_\rho^2}{2} = \frac{\varepsilon U_{12}^2}{2\rho^2 \ln^2(\rho_2/\rho_1)}$$

Za diferencial volumna bomo pisali $2\pi\rho l\, d\rho$; energija bo:

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{\pi\varepsilon l U_{12}^2}{\ln^2(\rho_2/\rho_1)} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\pi\varepsilon l U_{12}^2}{\ln(\rho_2/\rho_1)}$$

Po enačbi 26.5 je kapacitivnost

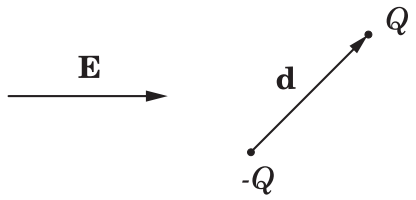
$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(\rho_2/\rho_1)}$$

kar iz omenjenega zgleda že poznamo.

Elektrenje prostora z nelinearnim izolatorjem. Do tu smo se ukvarjali izključno z energijsko bilanco elektritve in razelektritve prostora, ki je bil zapolnjen z linearnimi dielektriki – torej s takimi, pri katerih je odnos med $\mathbf{D}$ in $\mathbf{E}$ linearen. Zaradi te lepe lastnosti večine dielektrikov se tudi nismo posebej posvečali specifičnim dogajanjem v izolatorjih med samim procesom elektritve in razelektritve. Ugotovili smo le to, da bo kondenzator, ki bo kot izolator imel dielektrik večje dielektričnosti, shranil pri isti napetosti proporcionalno več energije in da bo ta večja akumulabilnost šla na račun induciranja dipolskih momentov v izolatorju.

Za razmislek o vlogi dielektrika pri elektritvah bomo s pridom uporabili važno ugotovitev: namreč, da je energija shranjena povsod tam, kjer je električno polje oz., da je energija elektrostatičnega sistema shranjena v električnem polju. Zaradi splošnosti bomo tudi vzeli, da je opazovan izolator nehomogen, nelinearen in anizotropen oz., da sta $\mathbf{E}$ in $\mathbf{P}$ ali $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ v neki splošni korelaciji.

Kot izhodišče vzemimo elektrinski par (točkasti dipol) v električnem polju; slika 26.4. Naj je razmak $\mathbf{d}$ v neki funkcijski zvezi s poljem $\mathbf{E}$. Vsaki vrednosti polja $\mathbf{E}$ pripada vektor



Slika 26.4: K modelu akumuliranja dipolske energije.

distance $\mathbf{d}$. Na elektrini dipola deluje dvojica sil $\pm Q\mathbf{E}$, ki dipol "vrti" (permanentni dipol) ali pa ga "razteguje" (induciran dipol). Pri minimalni spremembi polja od $\mathbf{E}$ do $\mathbf{E} + \delta\mathbf{E}$ se razmik med elektrinama minimalno spremeni od $\mathbf{d}$ na $\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}$. Ob tej spremembi je na elektrini delovala dvojica sil, ki je približno $\pm Q\mathbf{E}$, in ju je razmaknila za $\delta\mathbf{d}$ (vsako za $\delta\mathbf{d}/2$ v nasprotnih smereh). Dvojica sil je pri tem opravila delo $Q\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{d} = \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{p}$. Vzemimo, da se jakost polja v določenem intervalu časa spremeni od $\mathbf{E}_0$ do $\mathbf{E}$, dipolski moment pa od $\mathbf{p}_0$ do $\mathbf{p}$. Opravljeno delo bo

$$\int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{p}'$$

ki ga bomo razumeli kot limito vsote,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_k \cdot \delta\mathbf{p}_k$$

ko vsaki novi (k-ti) vrednosti polja $\mathbf{E}$ sledi posledično sprememba momenta dipola za $\delta\mathbf{p}_k$. V tem smislu naj so razumljeni tudi ostali sorodni integrali.

To delo se je vložilo v orientiranje in induciranje dipola in se more ob razelektrenju (usihanju polja $\mathbf{E}$) v celoti ali le delno povrniti nazaj. Ta rezultat moremo sedaj razširiti na diferencial prostora (dv), kjer je gostota dipolskih momentov opredeljena z gostoto $\mathbf{P}$ in se ta s spreminjanjem polja $\mathbf{E}$ spreminja od $\mathbf{P}_0$ do $\mathbf{P}$. Diferencial vložene energije

$dW_{\text{pol.}}$ za polarizacijo dipolov v diferencialu dv bi tako bil:

$$dW_{\text{pol.}} = \left(\int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{P}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{P}' \right) dv$$

Energijski vložek za polarizacijo celotnega izolatorja bi bil dalje integral,

$$W_{\text{pol.}} = \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{P}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{P}' \right) dv$$

Če vzamemo kot začetno (izhodiščno) točko $P_0 = 0$, potem bo energijski vložek v območju $\mathcal{V}$ enak

$$W_{\text{pol.}} = \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{0}^{\mathbf{P}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{P}' \right) dv$$

Izraz v oklepaju je gostota energijskega vložka za polarizicijo dielektrika; pišemo:

$$w_{\text{pol.}} = \int_{0}^{\mathbf{P}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{P}'$$

Sumarna gostota energije elektrenja $w_{\text{elek.}}$ je tako $w_{\text{e0}} + w_{\text{pol.}}$, kjer je w_{e0} gostota energije v praznem prostoru – torej $\varepsilon_0 E^2/2$. Skupna gostota je

$$w_{\text{elek.}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \int_{0}^{\mathbf{P}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{P}'$$

Če (po enačbi 20.2) za $\mathbf{P}$ pišemo $\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$, dobimo:

$$w_{\text{elek.}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \int_{0}^{\mathbf{D}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{D}' - \varepsilon_0 \int_{0}^{\mathbf{E}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{E}'$$

Tretji sumand je

$$-\varepsilon_0 \int_{0}^{\mathbf{E}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{E}' = -\varepsilon_0 \int_{0}^{\mathbf{E}} E'_x \, dE'_x + E'_y \, dE'_y + E'_z \, dE'_z = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{0}^{\mathbf{E}} d(E'^2) = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

in se s prvim odšteje. Za gostoto energije dobimo:

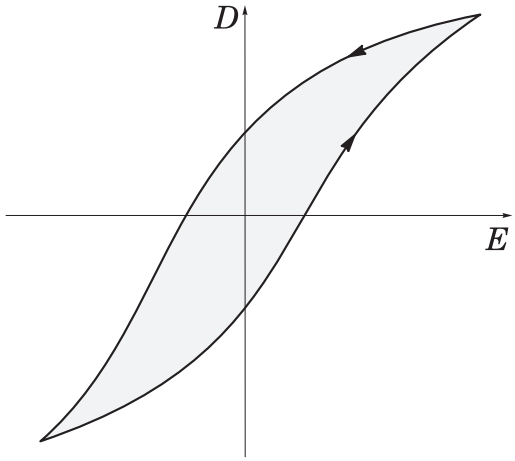
$$\boxed{w_{\text{elek.}} = \int_{0}^{\mathbf{D}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{D}'} \tag{26.7}$$

Za celotno vloženo energijo elektrenja je potrebno gostoto $w_{\text{elek.}}$ še integrirati,

$$\boxed{W_{\text{elek.}} = \int_{\mathcal{V}} w_{\text{elek.}} \, dv} \tag{26.8}$$

V primeru linearnega in izotropnega dielektrika je

$$w_{\text{elek.}} = \int_{0}^{\mathbf{D}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{D}' = \varepsilon \int_{0}^{\mathbf{E}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{E}' = \frac{\varepsilon E^2}{2}$$



Slika 26.5: Histereza ferodielektrika.

kar je skladno z enačbo 26.3. V takšnem primeru je energija elektrenja v celoti povrnljiva (reverzibilni proces), zato je tudi energijski vložek $W_{\text{elek.}}$ enak akumulirani električni energiji W_{e}.

Redke snovi, kot npr. barijev titanat, imajo to lastnost, da po usahnitvi zunanjega polja $\mathbf{E}$ še delno zadržijo orientiranost dipolskih momentov. Potrebno je polje nasprotne smeri, da jih "preobrne". Za odnos med E in D je značilna *histerezna zanka* v (E, D) diagramu; slika 26.5. Po enačbi 26.7 moremo reči, da "površina" histereze ustreza gostoti energije, ki je električno nepovratna in se porabi za prepolariziranje snovi od $\mathbf{P}$ do $-\mathbf{P}$ in nazaj do $\mathbf{P}$. Snovem, ki imajo opisano lastnost, pravimo tudi *ferodielektriki*. (Ime prihaja od *feromagnetikov*, kjer so podobne lastnosti mnogo bolj izražene.)

Elektrenje in razelektrenje se dejansko odvija v časovnem prostoru. Ako vzamemo trenutek $t = 0$ kot začetek procesa, čas t pa kot nek kasnejši trenutek, potem je gostota vložene energije elektrenja $w_{\text{elek.}}(t)$ v tem intervalu enaka temule integralu:

$$\boxed{w_{\text{elek.}}(t) = \int_0^t \mathbf{E} \cdot d_t\mathbf{D}} \tag{26.9}$$

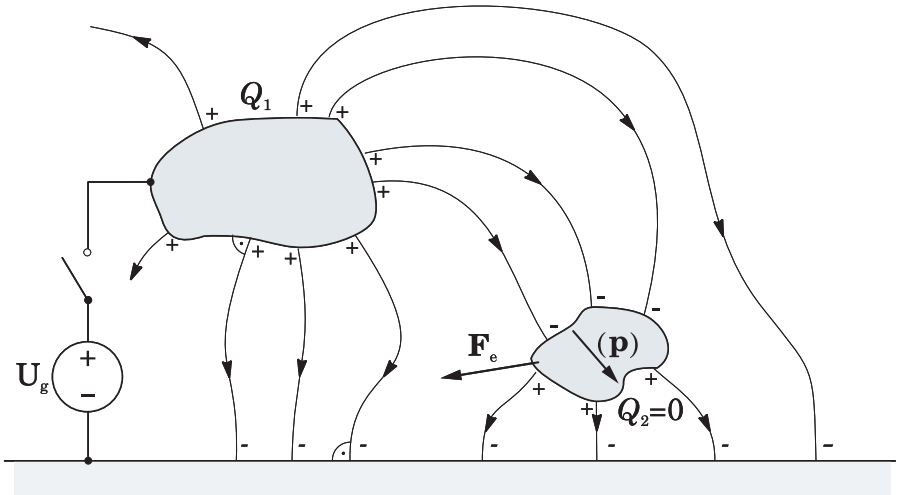
vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ pa se ob tem spreminjata tako, kot to narekujeta časovno spreminjanje polja in snovne lastosti dielektrika. Z diferencialnim znakom d_t hočemo poudariti, da gre za časovno spremembo vektorja $\mathbf{D}$; $d_t\mathbf{D} = (\partial\mathbf{D}/\partial t)\, dt$. Pri tem pa je $\mathbf{E}$ razumljena kot tista jakost, ki izzove omenjeno časovno spremembo gostote $\mathbf{D}$. Celoten energijski vložek $W_{\text{elek.}}(t)$ v elektrenje prostora od $t = 0$ do t pa je končno enak integralu,

$$\boxed{W_{\text{elek.}}(t) = \int_{\mathcal{V}} \left(\int_0^t \mathbf{E} \cdot d_t\mathbf{D} \right) dv} \tag{26.10}$$

27. Gibalni procesi

V tem razdelku si bomo poskušali energijsko osvetliti možne gibalne (premikalne) procese v elektrostatičnem polju. Kot zgled za razmišljanje bi si lahko izbrali bolj ali manj zapleten (kompleksen) elektrostatični sistem. No, izbrali bomo nekaj vmesnega. Vzemimo

prevodno telo nad zemljo. Med njima naj je preko stikala priključen napetostni vir z napetostjo U_g. V bližini naj se nahaja nevtralno prevodno telo; slika 27.1. Spraševali se



Slika 27.1: Električne sile na telo v polju.

bomo, kaj je s silo na nevtralno telo in v kakšni korelaciji je ta z energijo električnega polja v primeru, ko po naelektritvi napetostni vir izključimo, in v primeru, ko je napetostni vir stalno priključen.

Influirano (polarizirano) prevodno telo se navzven obnaša (v "grobem") kot dipol. Po enačbi 17.3 (kot v zgledu 17.2) bi se dipol, ki je orientiran v smeri polja (narisani je tak), gibal v tisti predel prostora, kjer je polje najmočnejše. Na naši sliki bi električna sila na nevtralno telo globalno delovala v levo. Njena intencija bi bila, premakniti telo v najbližje območje med prvo telo in zemljo.

1) Napetostni vir je izključen. V narisani legi je energija v polju enaka $W_e = U_g Q_1/2$. Če dopustimo, da se pod vplivom sile premakne drugo telo za "kratek" $\delta\mathbf{l}$, bo polje opravilo delo $\delta A_e \doteq \mathbf{F}_e \cdot \delta\mathbf{l}$. To delo more iti izključno na račun zmanjšanja električne energije. Za poljubno lego drugega telesa moremo pisati, da je vsota opravljenega dela in spremembe električne energije enaka nič,

$$\delta A_e + \delta W_e = \mathbf{F}_e \cdot \delta\mathbf{l} + \delta W_e = 0$$

Poglejmo komponente sile $\mathbf{F}_e$. Ako za $\delta\mathbf{l}$ pišemo $(\delta x, 0, 0)$, dobimo

$$F_{ex}\delta x + \delta W_e = 0$$

Če δx limitiramo proti nič, dobimo

$$F_{ex} = -\frac{\partial W_e}{\partial x}$$

in povsem podobno še F_{ey} in F_{ez}. Sila $\mathbf{F}_e$ je tako:

$$\boxed{\mathbf{F}_e\Big|_{\text{brez gen.}} = \left(-\frac{\partial W_e}{\partial x},\ -\frac{\partial W_e}{\partial y},\ -\frac{\partial W_e}{\partial z}\right)} \tag{27.1}$$

Enačba nas verjetno močno spominja na zvezo med $\mathbf{E}$ in V v enačbi 16.1a.

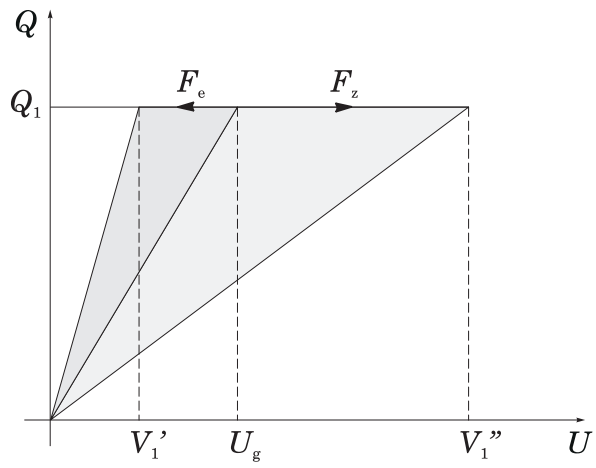
Če dopustimo, da se drugo telo premakne v levo, se bo energija sistema zmanjšala. Ker pa je energija sistema (po enačbi 26.2) enaka $V_1Q_1/2$, se bo pri naelektrenosti prvega telesa z elektrino Q_1, ki se ne more ne zmanjšati ne povečati, zmanjšal potencial V_1. Kvocient Q_1/V_1 pa je tudi nadomestna kapacitivnost $C_{10\text{nad.}}$ (prvega telesa do zemlje). Novo električno energijo moremo pisati tudi kot $Q_1^2/2C_{10\text{nad.}}$. Očitna je naslednja neenačba:

$$\frac{V_1Q_1}{2} = \frac{Q_1^2}{2C_{10\text{nad.}}} < \frac{U_\text{g}Q_1}{2}$$

in drugo telo se bo gibalo v smislu povečevanja kapacitivnosti $C_{10\text{nad.}}$.

V nasprotnem primeru, ko bi zunanja sila $\mathbf{F}_\text{z}$ drugo telo vlekla v desno, bi se energija polja povečevala. V skrajnem primeru, ko bi sila $\mathbf{F}_\text{z}$ "odvlekla" drugo telo zelo daleč (do neskončnosti), bi bila energija polja in potencial V_1 celo večja kot na začetku opazovanja. Rečemo tudi, da zunanja sila gradi električno polje oz. akumulira električno energijo.

Opisane razmere lahko prikažemo tudi v t.i. (U, Q) diagramu; slika 27.2. Leva šrafirana



Slika 27.2: Energijska bilanca avtonomnega sistema v (U, Q) diagramu.

ploščina ustreza delu polja električnih sil $(U_\text{g}Q_1/2 - V_1'Q_1/2)$, desna šrafirana ploščina pa je enaka delu zunanje sile $(V_1''Q_1/2 - U_\text{g}Q_1/2)$.

2) Napetostni vir je stalno priključen. V tem primeru bo potrebno v energijsko bilanco vključiti tudi delo vira z napetostjo U_g. Za splošen premik $\delta\mathbf{l}$ bomo energijsko bilanco pisali takole:

$$-\delta A_\text{g} + \delta A_\text{e} + \delta W_\text{e} = -\delta A_\text{g} + \mathbf{F}_\text{e} \cdot \delta\mathbf{l} + \delta W_\text{e} = 0$$

Če se bo pod vplivom sile $\mathbf{F}_\text{e}$ pomaknilo drugo telo v levo, se bo kapacitivnost $C_{10\text{ nad.}}$ povečala; pri stalni napetosti U_g bo na prvo telo pritekel del elektrine δQ_1. Generator bo za ta "donos" elektrine (po enačbi 23.2) opravil delo $\delta Q_1 U_\text{g}$. Zaradi povečanja elektrine prvega telesa se bo (po enačbi 26.2) povečala tudi energija v polju, njeno povečanje (δW_e) bo enako $U_\text{g}(Q_1 + \delta Q_1)/2 - U_\text{g}Q_1/2 = U_\text{g}\delta Q_1/2$. Zgornjo energijsko bilanco moremo dalje pisati kot

$$-U_\text{g}\delta Q_1 + \mathbf{F}_\text{e} \cdot \delta\mathbf{l} + \frac{U_\text{g}\delta Q_1}{2} = 0$$

ali kot

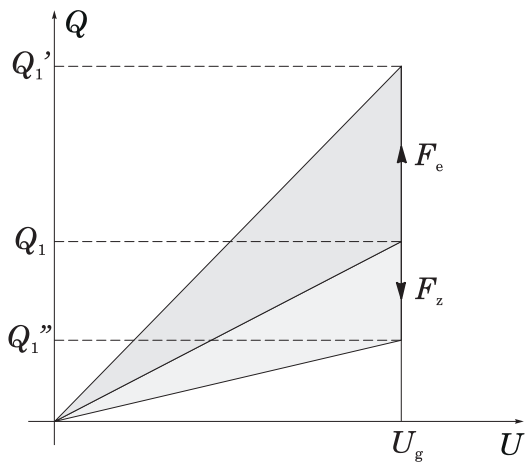
$$\mathbf{F}_\mathrm{e} \cdot \delta\mathbf{l} = \frac{U_\mathrm{g}\delta Q_1}{2} = \delta W_\mathrm{e}$$

Tako kot v primeru avtonomnega sistema dobimo komponente sile $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ na podoben način tudi tu; razlika je le v predznaku,

$$\boxed{\mathbf{F}_\mathrm{e}\Big|_{\mathrm{z\ gen.}} = \left(\frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial x}, \frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial y}, \frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial z}\right)} \tag{27.2}$$

Če se drugo telo giblje pod vplivom sile $\mathbf{F}_\mathrm{e}$, se bo polovica vloženega dela generatorja porabila za premik, polovica pa za gradnjo polja. V obratnem, ko bi zunanja sila $\mathbf{F}_\mathrm{z}$ vlekla telo iz polja, bi opravila delo A_z; za enak iznos bi se zmanjšala tudi energija polja. Tako zunanja sila kot polje bi energijo "dala" viru. Če bi bil vir akumulator, bi se ob tem procesu polnil; rečemo tudi, da bi bil v porabniškem režimu obratovanja.

Predstavimo ta dva gibalna procesa še v (U, Q) diagramu; slika 27.3. Zgornja šrafirana



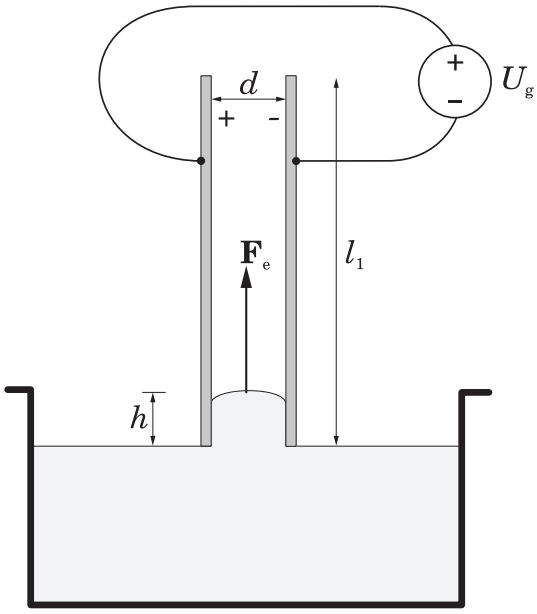
Slika 27.3: Energijska bilanca neavtonomnega sistema v (U, Q) diagramu.

površina ustreza delu polja električnih sil $(Q_1' U_\mathrm{g}/2 - Q_1 U_\mathrm{g}/2)$, spodnja površina pa ustreza delu zunanje sile $(Q_1 U_\mathrm{g}/2 - Q_1'' U_\mathrm{g}/2)$.

Iz opisanih primerov avtonomnega in neavtonomnega sistema zaključujemo, da so intencije električnih sil obakrat enake. S stališča zunanje sile – kot antagonista k električni sili – pa moremo reči, da ta ne "loči" med enim in drugim električnim ozadjem. Za delo polja električnih (A_e) in zunanjih sil (A_z) moremo zato pisati: $\delta A_\mathrm{e} + \delta A_\mathrm{z} = 0$.

Na koncu velja povedati, da bi do povsem enakih zaključkov prišli, če bi namesto drugega prevodnega telesa imeli dielektrično telo določene relativne dielektričnosti in je ta večja kot dielektričnost preostalega izolatorja. Sila $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ bi bila sicer manjša, vendar podobne smeri. V kolikor pa bi bil medij med prvim telesom in prevodno podlago olje, namesto drugega telesa pa bi bil na primer zračni mehurček, bi bila smer sile $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ nasprotne smeri; polje bi mehurček izrivalo iz "sebe".

Zgled 27.1



Slika 27.4: Sila na dielektrik v polju; oljni stolpec med ploščama kondenzatorja.

Vzemimo posodo z oljem relativne dielektričnosti ε_r. Nad gladino približamo ploščni kondenzator, ki je priključen na napetost U_g; slika 27.4. Polje med ploščama bo povleklo olje do določene višine h med plošče. Določimo višino, do katere se olje dvigne. Polje med ploščama bomo idealizirali – smatrali bomo, da so robne popačitve zanemarljive in da je polje med ploščama homogeno; $E = U_g/d$. Elektrina na delu plošč, do kamor seže olje, je $\pm\varepsilon_0\varepsilon_r U_g l_2 h/d$, na preostalem delu pa je $\pm\varepsilon_0 U_g l_2(l_1 - h)/d$. Z l_2 smo označili dolžino plošč; l_1 je njihova višina. Če elektrini na eni plošči seštejemo in delimo z napetostjo, dobimo kapacitivnost,

$$C(h) = \frac{((l_1 - h) + \varepsilon_r h)\varepsilon_0 l_2}{d}$$

Sila, ki drži oljni stolpec, mora (po enačbi 27.2) biti enaka dW_e/dh (navadni odvod pišemo zato, ker je W_e odvisna le od višine h). Energija W_e je enaka $CU_g^2/2$; za silo F_{eh} dobimo:

$$F_{eh} = \frac{d}{dh}\left(\frac{CU_g^2}{2}\right) = \frac{U_g^2}{2}\frac{dC}{dh} = \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\frac{U_g^2 l_2}{d}$$

Enak odgovor za silo bi dobili po enačbi 22.3, ki smo jo le navedli. Na meji olje-zrak (med ploščama) eksistira le E_t, ki je U_g/d. Ploskovna sila kaže po tej enačbi navzgor, celotno silo pa dobimo, ko izraz pomnožimo še z $l_2 d$ (površina "ravne" gladine),

$$F_{eh} = \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\left(\frac{U_g}{d}\right)^2 l_2 d = \frac{1}{2}(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\frac{U_g^2 l_2}{d}$$

Sila F_{eh} mora "držati" težo oljnega stolpca, $mg = \rho_{olja} h l_2\, dg$, kjer je ρ_{olja} specifična gostota olja. Višina stolpca bi tako bila:

$$h = \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 U_g^2}{2d^2 g\rho_{olja}}$$

28. Kondenzatorska vezja

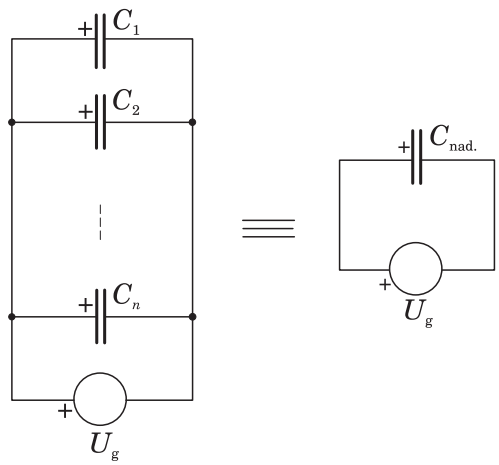
Na takšna vezja smo naleteli že v razdelku 24 v okviru delnih kapacitivnosti, kjer smo (Q, V) razmere na več prevodnih telesih modelirali z ekvivalentnim kondenzatorskim vezjem. Tam so bile delne kapacitivnosti med posameznimi telesi pogojene s celokupno geometrijo. Vsakršen premik enega od njih "povleče" za seboj spremembo vseh delnih kapacitivnosti oz. celotnega ekvivalentnega kondenzatorskega vezja. Pa tudi računanje teh delnih kapacitivnosti ni ravno lahko opravilo – razen redkih lepih izjem seveda.

Mnogo pogosteje pa v tehniki srečujemo vezja takšnih kondenzatorjev, ki imajo svoja polja praktično povsem ločena. Za ploščni kondenzator smo videli, da ima polje v glavnem le med ploščama; polje zunaj je praktično nično. Tudi koaksialni kabel ima polje le znotraj; nekaj malega se polje razsipa ob konceh. Če je več takšnih ločenih – med seboj neodvisnih – kondenzatorjev in napetostnih virov na nek način galvansko povezanih, pravimo dobljenemu zvezju *kondenzatorsko vezje*; v nadaljevanju mu priredimo t.i. *modelno vezje koncentriranih elementov*. Kondenzatorje, kot koncentrirane elemente takšnega vezja, dogovorno označimo in jim pripišemo njihove vrednosti kapacitivnosti. Pri tem nas ne zanimajo več količine polja, ampak le (Q, U) razmere na njih. Tudi napetostni vir – kot koncentriran element – dogovorno označimo, zaznačimo polariteto in pripišemo vrednost generatorjeve napetosti.

Kondenzatorsko vezje je dejansko le neka posebna (svojska) prostorska konfiguracija prevodnikov v električnem polju, zato tudi vse zakonitosti in lastnosti, ki smo jih postopno spoznavali, veljajo vsekakor tudi za njih. Mnoge zakonitosti, ki smo jih tam popisali z vektorji polja, bodo tu imele matematično izredno preprosto formo, in tudi enačbe bodo enostavne in linearne; največ, kar se nam more zgoditi, je to, da moramo rešiti sistem dveh, treh ali več linearnih enačb.

Vezave kondenzatorjev. Za uvod si poglejmo nadomestne kapacitivnosti preprostih vezav kondenzatorjev.

1) Vzporedna vezava. Imejmo n vzporedno vezanih kondenzatorjev s kapacitivnostmi C_1, C_2, ..., C_n, ki so priključeni na vir napetosti U_g; slika 28.1. Elektrine na kondenzatorjih



Slika 28.1: Vzporedna vezava kondenzatorjev in nadomestna kapacitivnost.

so Q_1, Q_2, ..., Q_n. Napetosti so na vseh kondenzatorjih enake; $U_i = U_\mathrm{g}$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$. Po vrsti moremo pisati: $Q_i = C_i U_i = C_i U_\mathrm{g}$. Skupna elektrina na eni strani kondenzatorjev je vsota delnih,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = U_\mathrm{g} \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Kapacitivnost nadomestnega kondenzatorja bo Q/U_g ali

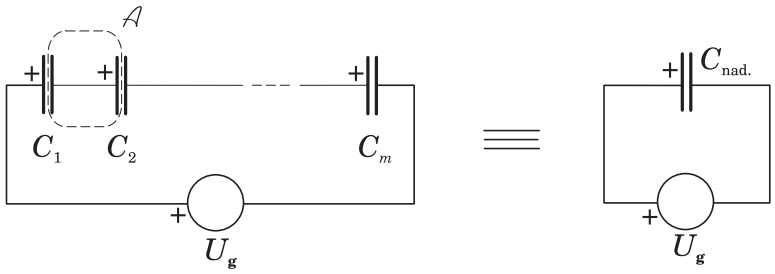
$$\boxed{C_\mathrm{nad.} = \sum_{i=1}^{n} C_i} \tag{28.1}$$

Energije na kondenzatorjih so: $W_{\mathrm{e}i} = C_i U_\mathrm{g}^2/2$. Skupna energija je vsota,

$$W_\mathrm{e} = \sum_{i=1}^{n} W_{\mathrm{e}i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i U_\mathrm{g}^2}{2} = \frac{C_\mathrm{nad.} U_\mathrm{g}^2}{2}$$

Z energijskega vidika generator ne "čuti" razlike med nizom vzporednih kondenzatorjev in nadomestnim - ekvivalentnim - kondenzatorjem.

2) Zaporedna vezava. Vzemimo verigo m kondenzatorjev z vrednostmi C_1, C_2, ..., C_m; slika 28.2. Če so bili kondenzatorji pred priključitvijo na vir nenaelektreni ($Q_j = 0$), in njih



Slika 28.2: Zaporedna vezava kondenzatorjev in nadomestna kapacitivnost.

verigo nato priključimo na vir, priteče elektrina na levo ploščo prvega in odteče iz desne plošče zadnjega. Na vmesnih kondenzatorjih se izvršijo le prerazporeditve elektrin med sosednjimi ploščami, ki so galvansko spojene in predstavljajo nevtralna telesa. Vprašanje je pa, v kolikšni meri? Prerazporeditev preko galvanskih povezav bo zaključena, ko bo tam polje $\mathbf{E}$ enako nič; to pa bo le, če bo vsak kondenzator tvoril električno avtonomen sistem, ki zunaj sebe nima polja. Če ima leva plošča prvega elektrino Q_1, potem mora imeti nasprotno ($-Q_1$) elektrino desna plošča. Nadalje tvorita desna plošča prvega in leva plošča drugega nevtralno telo, saj kondenzatorji predhodno niso bili naelektreni. Za narisano sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ bi Gaussov stavek za vektor[1] $\mathbf{D}$ (enačba 20.3) pisali

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_\mathrm{not.} = -Q_1 + Q_2 = 0$$

[1]Pri koncentriranih elementih smo pripomnili, da vektorji polja nimajo več svojega mesta (vloge), zato je potrebno integracijo po $\mathcal{A}$ razumeti v simbolnem smislu: kot seštevek prostih elektrin znotraj $\mathcal{A}$.

Dobimo $Q_1 = Q_2$ in dalje $Q_2 = Q_3$; tja do konca. Končno: vse elektrine na kondenzatorjih v verigi so enake; $Q_j = Q$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ m$. Napetosti na kondenzatorjih so pogojene s kapacitivnostmi; $U_j = Q/C_j$.

Krivuljni integral[2]

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

od leve plošče prvega do desne plošče zadnjega kondenzatorja mora biti enak U_g. Ker pa je $\mathbf{E}$ samo med ploščami, se integracija reducira le na izolatorje kondenzatorjev, kjer integral daje po vrsti vrednosti U_1, U_2 ,..., U_m. Napetost U_g je torej vsota,

$$U_\mathrm{g} = \sum_{j=1}^{m} U_i = Q \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{C_j}$$

Kvocient Q/U_g ustreza nadomestni kapacitivnosti $C_\mathrm{nad.}$ in velja:

$$\boxed{\frac{1}{C_\mathrm{nad.}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{C_j}} \tag{28.2}$$

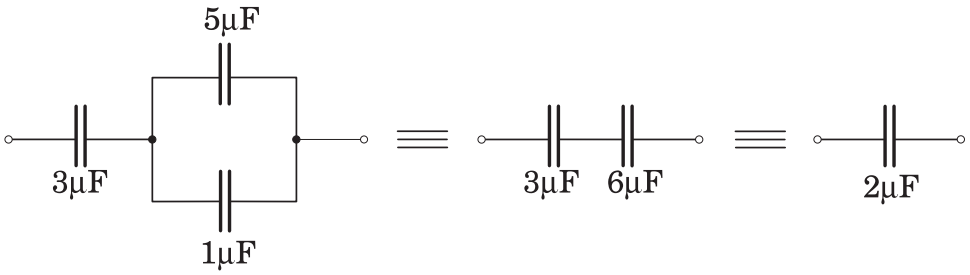
Energija na j-tem kondenzatorju je $Q^2/2C_j$, skupna pa je

$$W_\mathrm{e} = \sum_{j=1}^{m} W_{\mathrm{e}j} = \frac{Q^2}{2} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{C_j} = \frac{Q^2}{2C_\mathrm{nad.}}$$

Z vidika vira je $C_\mathrm{nad.}$ tudi tu popoln (Q, U, W_e) ekvivalent k verigi kondenzatorjev.

Zgled 28.1

Vzemimo mešano vezavo; slika 28.3. Druga dva kondenzatorja sta vezana vz-



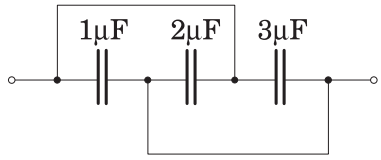
Slika 28.3: Primer mešane vezave treh kondenzatorjev.

poredno. Po enačbi 28.1 je njuna nadomestna kapacitivnost 6 μF. Če pa je k njej zaporedno še kondenzator 3 μF, dobimo (po enačbi 28.2) končno nadomestno kapacitivnost 2 μF. ♣ Bralec naj za vajo določi $C_\mathrm{nad.}$ za vezje s slike 28.4. ♣

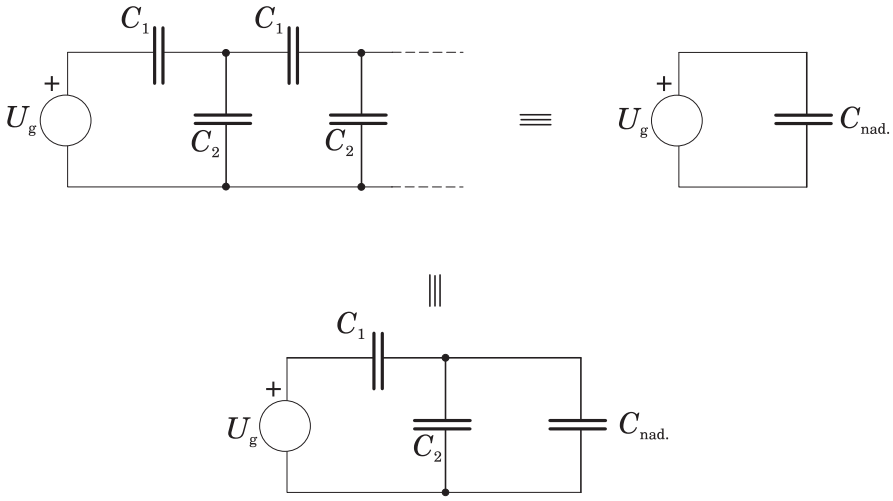
Zgled 28.2

Zanimiva je "neskončna" vzdolžnoprečna veriga kondenzatorjev s kapacitivnostmi C_1, C_2; slika 28.5. Veriga ima neko $C_\mathrm{nad.}$. Če pred verigo dodamo še en "periodični

[2]Tudi polje $\mathbf{E}$ nima v modelnem vezju koncetriranih elementov kaj "iskati", zato je potrebno integracijo polja vzdolž verige kondenzatorjev razumeti v smislu seštevanja napetosti.



Slika 28.4: "Čudna" povezava treh kondenzatorjev.



Slika 28.5: K nadomestni kapacitivnosti kondenzatorske verige.

člen" (četveropol), je veriga še vedno neskončna in njena nadomestna kapacitivnost bo še vedno $C_{\text{nad.}}$. To nas privede do ustreznega nadomestnega vezja. Po enačbah 28.1 in 28.2 sledi zveza

$$\frac{1}{C_{\text{nad.}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_{\text{nad.}}}$$

Po ureditvi dobimo kvadratno enačbo in njeno rešitev,

$$C_{\text{nad.}}^2 + C_2 C_{\text{nad.}} - C_1 C_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_{\text{nad.}} = \frac{\sqrt{1 + (4C_1/C_2)} - 1}{2} C_2$$

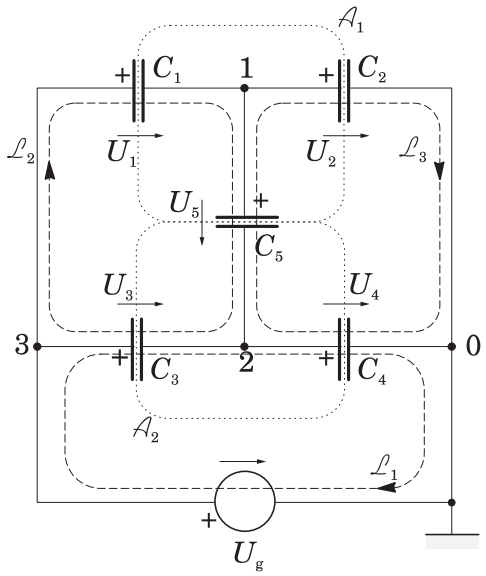
Pri $C_1 = C_2 = C$ je $C_{\text{nad.}} = (\sqrt{5} - 1)C/2$.

♣ Bralec naj določi zaporedje napetosti na prečnih in zaporedje napetosti na vzdolžnih kondenzatorjih. ♣

So pa tudi določene vezave kondenzatorjev, pri katerih si z enačbama 28.1 in 28.2 nimamo kaj dosti pomagati, vendar o tem kasneje.

Analiza kondenzatorskih vezij. Če imamo dano kondenzatorsko vezje, potem bomo pod pojmom analize takšnega vezja razumeli določitev (U, Q) razmer na vseh kondenzatorjih. S sistematiko analize električnih vezij nasploh se bomo v glavnem seznanili v okviru električnih vezij nespremenljivih tokov. Ker pa kondenzatorska vezja v elektrotehniki niso tako pogosta in aktualna, bomo v okviru njih podali le glavna teoretična izhodišča, ki nas privedejo do ustreznih enačb, katerih rešitve posredno dajejo iskane odgovore.

Pristop in metodiko reševanja kondenzatorskih vezij bomo najlažje predstavili na konkretnem vezju. Izberimo si mostično kondenzatorsko vezje, ki je na desnem delu ozemljeno in priključeno na napetostni vir z napetostjo U_g; slika 28.6. Ime "mostično"



Slika 28.6: K analizi kondenzatorskih vezij.

daje danemu vezju prečni kondenzator C_5. Takšno vezje je do te mere "muhasto", ker ne moremo preprosto (po enačbah 28.1 in 28.2) določiti niti nadomestne kapacitivnosti niti ne ugotoviti, koliko elektrine – ob elektritvi kondenzatorskega vezja – preteče skozi generator; ubrati moramo drugačno pot.

Najprej si izberimo polaritete na kondenzatorjih. Za vzdolžne kondenzatorje C_1 do C_4 izbira ni vprašljiva. Glede na polariteto vira bodo leve plošče imele presežek (+), desne pa presežek ustrezne (−) elektrine. Za kondenzator C_5 se "na slepo" odločimo za (+) polariteto zgornje plošče. Če bo račun pokazal, da je Q_5 negativen, bo pač dejanska polariteta obratna. To zadnje velja tudi povsem splošno. (Pri izbiri polaritet kondenzatorjev smo povsem "svobodni", tako da bi lahko tudi polaritete prvih štirih poljubno obračali.) Za začetek bomo vrisali tudi puščice za napetosti U_i na kondenzatorjih, ki pri izbranih polaritetah simbolizirajo smeri električnega polja $\mathbf{E}$ med ploščama kondenzatorjev. S puščico označimo tudi napetost vira U_g, kjer ta simbolizira smer električnega polja $\mathbf{E}$ v generatorju, ki je nasprotna smeri $\mathbf{E}_g$ (razdelek 23). Kasneje bomo eno od signifikacij (puščico ali polariteto) opuščali, ker se vsebinsko pač podvajata.

V vezju moramo določiti pet napetosti oz. pet elektrin. Potrebujemo torej pet enačb. Vprašajmo se: kako bi prišli do njih? Po priključitvi vira v vezje se napetosti na kondenzatorjih v sorazmerno kratkem času stacionirajo. Ob elektrenju je napetostni vir "prenesel" določeno količino elektrine z desnih plošč kondenzatorjev C_2 in C_4 na levi plošči kondenzatorjev C_1 in C_3. Ta količina elektrine je enaka ravno Q_1+Q_3 oz. $-(Q_2+Q_4)$. Nevtralni telesi, ki jih simbolizirata spojišči 1 in 2 (in galvansko spajata plošče sosednjih kondenzatorjev), ostajata tudi po naelektritvi nevtralni. Za ti dve telesi moremo pisati Gaussov

stavek za vektor $\mathbf{D}$ (enačba 20.3) za ploskvi $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_2$, ki telesi objemata; dobimo:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{A}_1} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} &= -Q_1 + Q_2 + Q_5 = 0\\ \oint_{\mathcal{A}_2} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} &= -Q_3 + Q_4 - Q_5 = 0\end{aligned}$$

Če enačbi smiselno preberemo, pomenita vsaka zase vsoto elektrin na nevtralnih telesih. Če ju seštejemo, dobimo: $-(Q_1+Q_3)+Q_2+Q_4 = 0$, kar je bila naša izhodiščna ugotovitev. Za splošno spojišče več kondenzatorjev bi pisali:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}(\pm)Q_j = 0} \tag{28.3}$$

kjer indeks j teče po kondenzatorjih, ki so spojeni v izbranem spojišču. Elektrini Q_j pripada v enačbi tisti predznak, ki ga ima polariteta objete plošče kondenzatorja. Enačba 28.3 je posebna oblika *I. Kirchhoffovega zakona*; več o tem zakonu kasneje (razdelek 35).

Ena temeljnih zakonitosti elektrostatičnega polja je zajeta v enačbi

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$$

in velja za vsakršno sklenjeno krivuljo (konturo) $\mathcal{L}$. Za naše vezje si izberimo tri konture: $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ in $\mathcal{L}_3$ – kot je to narisano. Krivuljni integrali polja bodo za njih po vrsti takšnile:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} &= U_3 + U_4 - U_\mathrm{g} = 0\\ \oint_{\mathcal{L}_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} &= U_1 + U_5 - U_3 = 0\\ \oint_{\mathcal{L}_3} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} &= U_2 - U_4 - U_5 = 0\end{aligned}$$

Če enačbe smiselno preberemo, potem vsaka zase pomeni vsoto napetosti v izbrani zanki. Za splošno zanko bi mogli pisati:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(\pm)U_i = 0} \tag{28.4}$$

kjer teče indeks i po koncentriranih elementih v zanki; napetost U_i ima predznak (+), če je ta v smeri obhoda, oz. predznak (−), če je njena smer v obratni smeri obhoda. Enačbo 28.4 imenujemo tudi *II. Kirchhoffov zakon*.

Dobljenih pet enačb tipa I. oz. II. Kirchhoffovega zakona bo ravno dovolj za naših pet neznanih napetosti (ali elektrin). Če upoštevamo relacijo $Q_i = C_iU_i$, dobimo iz petih "Kirchhoffovih enačb" sistem petih linearnih enačb za U_i ali za Q_i,

$$\begin{aligned}U_3 + U_4 &= U_\mathrm{g}\\ U_1 + U_5 - U_3 &= 0\\ U_2 - U_4 - U_5 &= 0\\ -C_1U_1 + C_2U_2 + C_5U_5 &= 0\\ -C_3U_3 + C_4U_4 - C_5U_5 &= 0\end{aligned} \qquad \text{(ali)} \qquad \begin{aligned}C_3^{-1}Q_3 + C_4^{-1}Q_4 &= U_\mathrm{g}\\ C_1^{-1}Q_1 + C_5^{-1}Q_5 - C_3^{-1}Q_3 &= 0\\ C_2^{-1}Q_2 - C_4^{-1}Q_4 - C_5^{-1}Q_5 &= 0\\ -Q_1 + Q_2 + Q_5 &= 0\\ -Q_3 + Q_4 - Q_5 &= 0\end{aligned}$$

Sistema enačb sta na izgled obsežna in že vnaprej "neprijetna" za reševanje. Poglejmo, ali je možna kakšna "bližnjica".

V vezju na sliki 28.6 zavzameta spojišči 1 in 2 gotovo neka potenciala do zemlje; naj sta to V_1 in V_2. Spojišče 3 ima potencial $V_3 = U_\mathrm{g}$ in spojišče 0 ima potencial $V_0 = 0$. Če bi V_1 in V_2 poznali (ali izmerili), bi napetosti na kondenzatorjih preprosto sledile: $U_1 = U_\mathrm{g} - V_1$, $U_2 = V_1$, $U_3 = U_\mathrm{g} - V_2$, $U_4 = V_2$ in $U_5 = V_1 - V_2$. Enako tudi elektrine: $Q_1 = C_1(U_\mathrm{g} - V_1)$, $Q_2 = C_2V_1$, $Q_3 = C_3(U_\mathrm{g} - V_2)$, $Q_4 = C_4V_2$ in $Q_5 = C_5(V_1 - V_2)$. Če te elektrine vstavimo v elektrinske enačbe (enačba 28.3), dobimo po ureditvi enačbi:

$$\begin{aligned}(C_1 + C_2 + C_5)V_1 - C_5V_2 &= C_1U_\mathrm{g}\\ -C_5V_1 + (C_3 + C_4 + C_5)V_2 &= C_3U_\mathrm{g}\end{aligned}$$

Sistem enačb je hitro rešljiv. Rešimo ga z eliminacijo ali z nasprotnimi koeficienti in dobimo:

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{C_1(C_3 + C_4 + C_5) + C_3C_5}{(C_1 + C_2 + C_5)(C_3 + C_4 + C_5) - C_5^2}\,U_\mathrm{g}\\ V_2 &= \frac{C_1C_5 + C_3(C_1 + C_2 + C_5)}{(C_1 + C_2 + C_5)(C_3 + C_4 + C_5) - C_5^2}\,U_\mathrm{g}\end{aligned}$$

Pri danih vrednostih kapacitivnosti izračunamo oba potenciala in s tem tudi napetosti in elektrine na kondenzatorjih. Tudi nadomestno kapacitivnost vezja dobimo enostavno:

$$C_\mathrm{nad.} = \frac{Q_1 + Q_3}{U_\mathrm{g}} = \frac{C_1(U_\mathrm{g} - V_1) + C_3(U_\mathrm{g} - V_2)}{U_\mathrm{g}}$$

Električna energija v vezju je (po enačbi 26.2)

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)U_\mathrm{g} = \frac{1}{2}C_\mathrm{nad.}U_\mathrm{g}^2$$

Ob navedenih enačbah moremo za W_e pisati tudi:

$$\begin{aligned}W_\mathrm{e} &= \frac{1}{2}((Q_1 + Q_3)U_\mathrm{g} + (-Q_1 + Q_2 + Q_5)V_1 + (-Q_3 + Q_4 - Q_5)V_2)\\ &= \frac{1}{2}(Q_1(U_\mathrm{g} - V_1) + Q_2V_1 + Q_3(U_\mathrm{g} - V_2) + Q_4V_2 + Q_5(V_1 - V_2))\\ &= \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{2}Q_iU_i = \sum_{i=1}^{5}W_{\mathrm{e}i}\end{aligned}$$

Energija v kondenzatorskem vezju je vsota energij v posameznih kondenzatorjih.

V opazovanem mostičnem vezju je zanimiva napetost $U_5 = V_1 - V_2$. Zanjo dobimo:

$$U_5 = \frac{C_1C_4 - C_2C_3}{(C_1 + C_2 + C_5)(C_3 + C_4 + C_5) - C_5^2}U_\mathrm{g}$$

Za mostično vezje rečemo, da je v ravnotežju, ko je $U_5 = 0$; to bo pa takrat, ko bo $C_1/C_2 = C_3/C_4$ oz., ko bosta razmerji kapacitivnosti v vzdolžnih vejah enaki. – Princip uravnoteženega mostišča (Wheatstonov mostič) je zelo uporaben pri mostičnih merilnih

metodah določevanja neznanega merjenca, ki se nahaja na enem od mest v vzdolžnih vejah; ničnі indikator je takrat v prečni veji.

Če je mostič v ravnotežju, element C_5 ne igra nobene vloge; moremo ga izločiti ali zamenjati z galvanskim spojem med spojiščema 1 in 2. Potenciala spojišč 1 in 2 sta takrat (enaka),

$$V_1 = V_2 = \frac{U_\mathrm{g}}{1 + C_2/C_1} = \frac{U_\mathrm{g}}{1 + C_4/C_3}$$

Zgled 28.3

Vzemimo mostično vezje iz slike 28.6 s podatki: $C_1 = 1\ \mu\mathrm{F}$, $C_2 = 3\ \mu\mathrm{F}$, $C_3 = 3\ \mu\mathrm{F}$, $C_4 = 5\ \mu\mathrm{F}$, $C_5 = 4\ \mu\mathrm{F}$ in $U_\mathrm{g} = 6$ kV. Enačbi za spojiščna potenciala sta:

$$8V_1 - 4V_2 = 6\,000 \qquad\qquad -4V_1 + 12V_2 = 18\,000$$

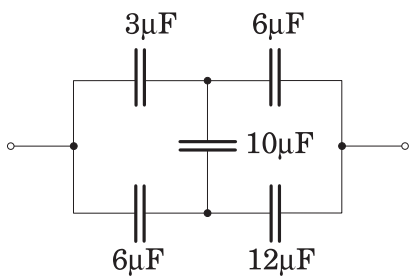
Rešitev je: $V_1 = 1.8$ kV, $V_2 = 2.1$ kV. Napetosti, elektrine in energije na kondenzatorjih dobimo iz navedenih enačb in so:

i	1	2	3	4	5
$C_i(\mu\mathrm{F})$	1	3	3	5	4
$U_i(k\mathrm{V})$	4.2	1.8	3.9	2.1	−0.3
$Q_i(m\mathrm{C})$	4.2	5.4	11.7	10.5	−1.2
$W_{\mathrm{e}i}(\mathrm{J})$	8.82	4.86	22.815	11.025	0.18

Celotna energija v kondenzatorjih je 47.7 J; nadomestna kapacitivnost je 2.65 μF.

Zgled 28.4

Izračunajmo nadomestno kapacitivnost uravnoteženega mostičnega vezja; slika 28.7. Ker je 3 : 6 = 6 : 12, je prečni kondenzator "odveč". Zgornja kondenzatorja imata



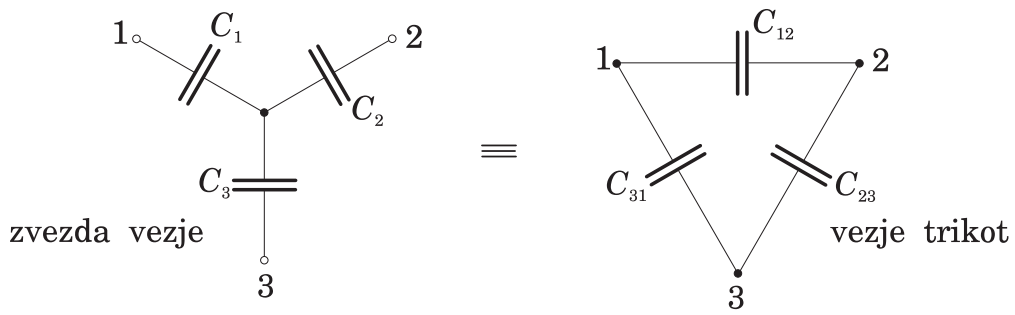
Slika 28.7: Primer uravnoteženega mostička.

nadomestno kapacitivnost 2 μF, spodnja dva pa 4 μF; skupna kapacitivnost je 6 μF. Če pa prečni kondenzator kratkostično premostimo (enakost potencialov), dobimo 9 μF zaporedno 18 μF, kar da na koncu spet 6 μF.

♣ Bralec naj reši naslednji nalogi: i) Šest enakih kondenzatojev je vezanih med oglišča tetraedra. Kolika je nadomestna kapacitivnost med sosednjima ogliščema? ii) Dvanajst enakih kondenzatorjev je vezanih med oglišča kocke. Kolikšne nadomestne kapacitivnosti so: a) med krajiščema robu, b) med krajiščema ploskovne diagonale in c) med krajiščema prostorske diagonale? ♣

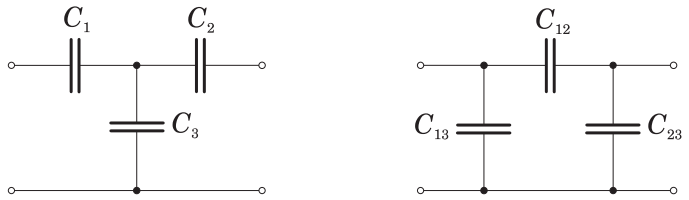
Ekvivalentnost vezja zvezda in vezja trikot. V primeru mostičnega vezja smo omenili, da z direktno uporabo formul 28.1 in 28.2 ne moremo izračunati nadomestne kapacitivnosti; težavo povzroča prečni kondenzator. V tem in podobnih primerih si moremo pomagati s t.i. pretvorbami (transformacijami) *zvezda-trikot* in *trikot-zvezda*.

V nadaljevanju bomo pokazali, da sta dve specifični vezji: zvezda vezje in vezje trikot, med seboj ekvivalentni, če so elementi obeh vezij v potrebni soodvisnosti; slika 28.8. Vezji imata imeni po oblikah, kot ju običajno rišemo. Za zvezda vezje se uporabljata



Slika 28.8: K ekvivalenci "zvezde" in "trikota".

tudi sinonima *-vezje Y* ali *vezje T*, za vezje trikot pa označbi *vezje* Δ ali *vezje* Π. V terminologiji električnih *četveropolov* pravimo levemu vezju *četveropol T*, desnemu pa *četveropol* Π ter ju rišemo kot štiripolno vezje, slika 28.9. Levemu paru sponk rečemo



Slika 28.9: Četveropola T in Π.

vhodni sponki, desnemu paru pa izhodni sponki četveropola.

Zvezda in trikot vezji si bosta ekvivalentni, če bodo nadomestne kapacitivnosti $C_{12\text{nad.}}$, $C_{23\text{nad.}}$ in $C_{31\text{nad.}}$ za obe vezji usklajeni. Za enakost $C_{12\text{nad.}}$ obeh vezij dobimo enačbo

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = C_{12} + \frac{C_{23}C_{31}}{C_{23}+C_{31}} = \frac{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}}{C_{23}+C_{31}}$$

Podobni enačbi dobimo tudi za enakost $C_{23\text{nad.}}$ in $C_{31\text{nad.}}$. Po ureditvi jih zapišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned}
\frac{C_1+C_2}{C_1C_2} &= \frac{C_{23}+C_{31}}{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}} \\
\frac{C_2+C_3}{C_2C_3} &= \frac{C_{31}+C_{12}}{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}} \\
\frac{C_3+C_1}{C_3C_1} &= \frac{C_{12}+C_{23}}{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}}
\end{aligned}$$

Povezujoče tri enačbe so nelinearne. Z nekaj spretnosti moremo izraziti kapacitivnosti enega s kapacitivnostmi drugega vezja. Če po dve enačbi seštejemo in odštejemo preostalo, dobimo po vrsti kapacitivnosti Y-vezja:

$$\boxed{\begin{aligned} C_1 &= \frac{C_{12}C_{23} + C_{23}C_{31} + C_{31}C_{12}}{C_{23}} \\ C_2 &= \frac{C_{12}C_{23} + C_{23}C_{31} + C_{31}C_{12}}{C_{31}} \\ C_3 &= \frac{C_{12}C_{23} + C_{23}C_{31} + C_{31}C_{12}}{C_{12}} \end{aligned}} \tag{28.5}$$

Med kapacitivnostmi velja očitna relacija:

$$C_1C_{23} = C_2C_{31} = C_3C_{12}$$

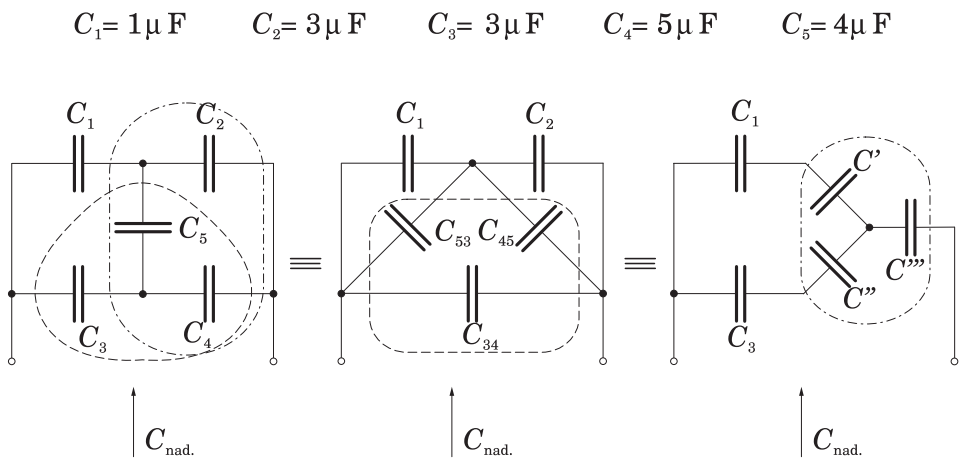
Če te odnose vnesemo po vrsti v enačbe 28.5, dobimo tudi kapacitivnosti Δ-vezja:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{12} &= \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{23} &= \frac{C_2C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{31} &= \frac{C_3C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \end{aligned}} \tag{28.6}$$

Pretvorbe so trivialne, če je eno ali drugo vezje simetrično. Naj so: $C_{12} = C_{23} = C_{31} = C$; po enačbah 28.5 je $C_1 = C_2 = C_3 = 3C$.

Zgled 28.5

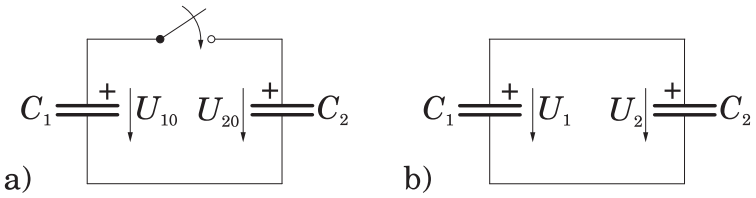
Vzemimo mostično vezje iz slike 28.6 s podatki iz zgleda 28.3; slika 28.10. S smiselno



Slika 28.10: Pretvorbe neuravnoteženega mostička.

zamenjavo indeksov dobimo (po enačbah 28.6): $C_{34} = (5/4)\ \mu$F, $C_{45} = (5/3)\ \mu$F, $C_{53} = 1\ \mu$F. Po enačbah 28.1 in 28.2 dobimo še $C_{\text{nad.}} = 53/20 = 2.65\ \mu$F, kar se ujema z rezultatom v zgledu 28.3. ♣ Bralec naj do nadomestne kapacitivnosti pride še z drugo nakazano možnostjo transformacije. ♣

Elektrenje kondenzatorjev z naelektrenim kondenzatorjem. Do sedaj smo kondenzatorsko vezje praviloma priključili na napetostni vir in določili (U, Q) razmere v vezju. Moremo pa kondenzator naelektriti z drugim naelektrenim kondenzatorjem; slika 28.11, skica a). Naj bo C_1 predhodno naelektren z elektrino Q_{10}. Napetost U_{10} na njem bo



Slika 28.11: Elektrina se porazdeli med dva kondenzatorja.

Q_{10}/C_1. Kondenzator C_2 naj bo predhodno prazen: $U_{20} = 0$, $Q_{20} = 0$. Po izredno kratkem prehodnem pojavu (po preklopu) se bodo razmere stacionirale, skica b), in del elektrine Q_{10} se bo preselil na drug kondenzator tako, da bo $U_1 = U_2$ oz.

$$Q_1 : C_1 = Q_2 : C_2 \qquad \text{in} \qquad Q_1 + Q_2 = Q_{10}$$

Iz obeh enačb dobimo:

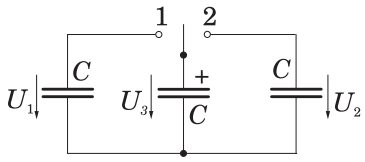
$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_{10} \qquad Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_{10} \qquad U_1 = U_2 = \frac{Q_{10}}{C_1 + C_2}$$

Pri takem elektrenju pride navidezno do energijskega defekta. Na začetku je bila akumulirana energija enaka $Q_{10}^2/2C_1$, na koncu pa je akumulirana energija le še $Q_{10}^2/2(C_1 + C_2)$. Na tem mestu še ne moremo dati zadovoljivega odgovora na vprašanje, kam se je "izgubila" energijska razlika? Odgovor tiči v samem prehodnem pojavu in pa v dejstvu, da je modelno kondenzatorsko vezje pač le modelno in kot tako v celoti ne modelira spoja dveh realnih kondenzatorjev; vendar o tem kasneje (razdelek 62). Ob vklopu stikala steče namreč po žicah med kondenzatorjema elektrina $(Q_{10} - Q_1)$ v obliki (aperiodičnega) tokovnega sunka. Ta tok povzroči v žicah toplotne izgube, ki so enake ravno omenjenemu "defektu" energije.

Zgled 28.6

Vzemimo tri enake kondenzatorje; slika 28.12. Srednji kondenzator predhodno naelektrimo z napetostnim virom napetosti U_{g}. V nadaljevanju začnemo s stikalom izmenoma preklapljati (komutirati) med položajema 1 in 2. V seriji preklopov se bosta krajna kondenzatorja elektrila, srednji pa se bo praznil. Električne razmere se bodo stacionirale, ko bodo vsi kondenzatorji imeli enake napetosti.

Poglejmo si zaporedja, ki pripadajo napetostim U_1, U_2 in U_3 po vsakem preklopu. Zaradi enakih kondenzatorjev se po vsakem preklopu elektrina na zadevnih kondenzatorjih razdeli na dva enaka dela; napetosti staknjenih kondenzatorjev postaneta enaki aritmetični sredini obeh napetosti pred stikom.



Slika 28.12: Elektrina se postopno porazdeli med tri kondenzatorje.

lega stikala	1	2	1	2	1	2	1	2
U_1/U_g	1/2	1/2	3/8	3/8	11/32	11/32	43/128	43/128
U_3/U_g	1/2	1/4	3/8	5/16	11/32	21/64	43/128	85/256
U_2/U_g	0	1/4	1/4	5/16	5/16	21/64	21/64	85/256

Razmerje $U_3/U_\mathrm{g} = u$ sledi zaporedju

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{2^{i+1}}$$

kjer je n število preklopov. ♣ Bralec naj preveri, da limitira (za $n \to \infty$) zaporedje $u_n \to 1/3$. ♣

Upoštevajoč, kako zaželeno bi bilo, če bi lahko moč s tako univerzalnim učinkom, kakor je elektrika, kar najbolj podredili računanju, in razmišljajoč o prednostih, ki jih pri reševanju mnogih težkih problemov predstavlja dejstvo, da osredotočimo pozornost le na tisto posebno funkcijo, od diferencialov katere so odvisne vse sile, ki delujejo na telesa sistema, namesto da obračamo pozornost na vsako silo posebej, sem poskušal odkriti neke splošne zveze, ki obstajajo med to funkcijo in količino elektrine v telesih, ki jo ustvarjajo.

Green

III. POGLAVJE

Časovno konstantno tokovno polje

29. Prevajanje elektrin v električnem polju

V elektrostatičnem polju (polju mirujočih elektrin) smo izhajali iz (bazičnega) Coulombovega zakona. Silo na elektrino δQ smo v tem polju opredelili z enačbo $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} = \delta Q\mathbf{E}$, kjer je bilo polje $\mathbf{E}$ povzročeno od ostalih elektrin, ki so v prostoru. Večkrat smo tudi miselno dopuščali, da se opazovana elektrina δQ giblje ali premakne zaradi te sile, nismo se pa posebej spraševali po načinu (mehanizmu) gibanja te elektrine – in elektrin nasploh – ter o korelaciji med načinom gibanja in vzročnim poljem.

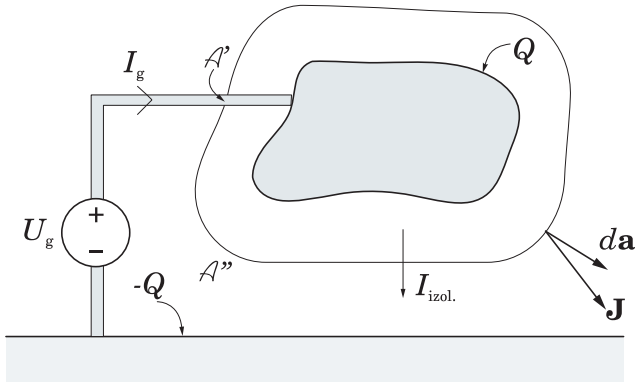
Ko smo v okviru energije elektrostatičnega polja (razdelek 26) opazovali proces razelektrenja, smo opozorili na postopen odliv presežne elektrine z enega na drugo telo skozi vmesni, deloma prevoden izolacijski medij. Takrat nas ni toliko zanimalo, kako se to razelektrenje časovno odvija – po kakšni časovni funkciji –, temveč samo dejstvo, da se kondenzator izprazni in da se prvotna akumulirana električna energija potroši za relativno ovirano potiskanje mobilnih nabojev skozi vmesni medij.

Če si med procesom razelektrenja izberemo poljubno kratek časovni interval δt, potem v tem času z enega telesa odide elektrina δQ in prav toliko elektrine (vendar ne iste) pride tudi na drugo telo. V smislu definicije pretoka elektrine, električnega toka (razdelek 5), teče v časovnem intervalu δt tok $i \doteq \delta Q/\delta t$. (Ker teče tok skozi izolator, mu lahko rečemo tudi izolacijski tok.) Tok $i(t)$ bo med razelektrenjem vse bolj usihal, saj bo preostanek presežnih elektrin na telesih vse manjši, manjša bo zato tudi napetost in polje $\mathbf{E}$, ki mobilne nosilce elektrine potiska v gibanje. Če pa hočemo, da se kondenzator ne bo izpraznil, moramo prevodni telesi kondenzatorja priključiti na napetostni vir; slika 29.1; ta vir bo odtekajočo elektrino vseskozi nadomeščal s "svežo", tako da bo presežna elektrina $\pm Q$ ostajala v iznosu konstantna. Po kontinuitetni enačbi bi za vektor $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, ki podaja gostoto izolacijskega toka in toka v dovodih, in za sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ zapisali enačbo

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}'} \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{A}''} \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = -\frac{dQ}{dt} = 0$$

Prvi sumand je enak $-I_\mathrm{g}$ (I_g – tok generatorja), drugi pa je $I_\mathrm{izol.}$ (izolacijski tok). Pišemo tudi: $-I_\mathrm{g} + I_\mathrm{izol.} = 0$.

V tem razmišljanju se nismo še v ničemer ozirali na izolacijske lastnosti vmesnega medija. Gotovo bo pri boljšem izolatorju izolacijski tok manjši – kakor tudi obratno. Za primer vakuuma bi bil ta nič. Kot vmesen medij si moremo torej misliti poljubno, bolj ali manj prevodno snov (plin, elektrolit, uporovni material, oglje itd.).



Slika 29.1: Da se telo ne razelektri, rabi trajen vir.

Ob tem preprostem razmisleku moremo izpostaviti nekaj ugotovitev:

1) za vzdrževanje elektrostatičnega (časovno konstantnega) polja, potrebujemo zunanje vire,

2) sopotno se pojavijo električni toki v žicah in izolatorjih; kratkomalo v vseh, za elektrine bolj ali manj vodljivih snoveh. Tem tokom pripada tokovna gostota, ki je (zaradi časovno konstantnih tokov) le krajevna funkcija, $\mathbf{J} = \mathbf{J}(T)$, in

3) v medijih, kjer teče električni tok, se (po Joulovem zakonu) sprošča toplotna energija, ki je zunanja (makroskopska) manifestacija (mikroskopskih) "trkov" mobilnih nosilcev elektrine z atomarno (molekularno) strukturo snovi.

Bolj kritičen vpogled v možna dogajanja v elektrostatičnem polju nas je privedel do nuje, da si podrobneje osvetlimo mehanizme prehajanja (prevajanja) mobilnih nosilcev elektrine v različnih snoveh: od dobrih prevodnikov (kovin), preko tekočin in plinov, do dobrih izolatorjev. V tem kontekstu nas bo prvenstveno zanimala korelacija med električnim poljem $\mathbf{E}$, ki mobilne nosilce elektrine potiska v gibanje, in tokovno gostoto $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ (gibajoče elektrine), ki je posledica delovanja električnih sil.

Pri študiju zakonitosti gibanja elektrin zaradi polja $\mathbf{E}$ bomo razlikovali dva tipa tokov: *konduktivni tok* in *konvektivni tok*; kasneje bomo k njima dodali še *polarizacijski tok*, ki se pojavi, ko se $\mathbf{E}$ časovno spreminja. Delitev je povsem umetna, kajti v vseh primerih gre za gibanje elektrin; razloček naredimo le zaradi različne narave gibanja. Za konduktivni tok, ki je v elektrotehniki najpogostejši, je značilno, da so nosilci toka mobilne elektrine (elektroni, ($\pm$) ioni) v sami snovi, ki se pod vplivom polja električnih sil gibljejo (prerivajo) skozi snov bolj ali manj ovirano. Takšnemu načinu prehajanja mobilnih nosilcev elektrine skozi snov rečemo tudi konduktivno prevajanje. O konvektivnem toku pa govorimo takrat, ko so nosilci elektrine vnešeni (izstreljeni, injicirani) v praviloma redek plin ali vakuum in se po prostoru, kjer je tudi polje $\mathbf{E}$, razmeroma neovirano gibljejo po zakonitostih enačbe $-\delta m\dot{\mathbf{v}} + \delta\mathbf{F}_{\mathrm{u}} + \delta Q\mathbf{E} = \mathbf{0}$. (Tipičen primer je gibanje elektronskega curka v katodni, odklonski cevi osciloskopa.)

Zelo pomemben sočasen pojav električnega toka je še t.i. *magnetno polje*. Magnetnim pojavom in magnetnim poljem bomo kasneje posvetili posebno poglavje, zato tu zaenkrat

o njih ne bomo nič govorili. Omenimo le to, da je pri časovno konstantnih tokih, o katerih bo pretežno tekla beseda v tem poglavju, tudi njihovo magnetno polje časovno konstantno; torej nimamo dodatnega pojava Faradayeve indukcije.

Pri Lorenztovi sili smo (v tretjem razdelku) zapisali, da je sila na elektrino δQ v splošnem enaka $\delta Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$; $\mathbf{v}$ je hitrost elektrine, $\mathbf{B}$ pa je vektor gostote magnetnega pretoka. Na tem mestu bomo "žal" morali vzeti na znanje, da je pri konduktivnem prevajanju člen $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ zanemarljiv glede na $\mathbf{E}$. Sila $\delta Q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ se v enosmernih tokokrogih manifestira navzven v t.i. *Hallovi napetosti*, ki se pojavi v prečni smeri na smer električnega toka v vodniku in kot takšna nima povratnega vpliva na gibanje elektronov v vodniku. Povsem drugače pa je z omenjenim členom pri konvektivnem toku; za te toke so magnetne sile praktično povsem primerljive z električnimi in imajo v elektrotehniki (in fiziki nasploh) obsežno vrsto aplikacij: magnetno odklanjanje – TV katodna cev, elektronski pospeševalniki, ... (razdelek 45).

30. Ohmov in Joulov zakon

Ohmov in Joulov zakon se nanašata predvsem na konduktivno prevajanje v kovinah, tekočinah in plinih, in še tu imata delno omejeno uporabno vrednost – na kar bomo opozorili ob primerni priliki. Najprej se bomo seznanili z Ohmovim zakonom na primeru prevajanja v kovinah ali drugih trdnih snoveh, kasneje pa bomo zakonitost razširili tudi na ostale vodljive snovi. Dogovorimo se še za označevanje konduktivnega toka in pripadajoče gostote. Če bi hoteli biti povsem dosledni, potem bi morali k i oz. $\mathbf{J}$ kot indeks dodati pripis konduktivni "kond."; torej: $i_{\text{kond.}}$, $\mathbf{J}_{\text{kond.}}$. K preglednosti ta pripis kaj prida ne bi prispeval – prej nasprotno –, zato se dogovorimo za opuščanje, v mislih pa bomo kljub vsemu imeli ravno ta(to) tok(gostoto).

Ohmov zakon. Izberimo si kako poljubno majhno območje v prevodniku, kjer je polje $\mathbf{E}$ lokalno homogeno in časovno konstantno. Nosilci električnega toka so mobilni elektroni iz prevodnega pasu z osnovnim nabojem $-e$ ($e \doteq 1.6\cdot 10^{-19}$ C). Za vsak prost elektron moremo napisati takole modelno gibalno enačbo:

$$-m_{\text{e}}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{F}_{\text{u}} - e\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

kjer m_{e} pomeni maso elektrona ($m_{\text{e}} \doteq 9.1\cdot 10^{-31}$ kg), $\mathbf{F}_{\text{u}}$ pa silo upora, s katero atomarna struktura snovi "zavira" prehajanje prostih elektronov med atomi.

Hitrost gibanja elektronov je sestavljena iz dveh delov. Prvi del hitrosti ($\mathbf{v}_{\text{k}}$) je v zvezi z energijskim stanjem prostih elektronov in je neodvisen od polja $\mathbf{E}$. Analiza teh hitrosti je povsem v domeni kvantne mehanike in se jo zgolj statistično vrednoti. Z makroskopskega vidika je časovno poprečje te hitrosti enako nič. Gibanje elektrona, ki pripada tej hitrosti, je tipično kaotično (neurejeno); prosti elektroni dosegajo med zaporednima "trkoma" hitrosti tudi do 10^6 m/s. Drugi del hitrosti ($\mathbf{v}_{\text{E}}$), ki se k tej superponira, pa je posledica delovanja Coulombove sile makroskopskega polja $\mathbf{E}$. V lokalno homogenem polju bi se elektron – zaradi samo te sile – gibal enakomerno pospešeno (prvi in tretji člen gibalne enačbe). Ker pa gibajoči elektroni "trkajo" v atomarno strukturo, je njihovo gibanje vseskozi ovirano (sila $\mathbf{F}_{\text{u}}$). Rezultat tega je, da se prosti elektroni – gledano statistično – gibljejo v lokalno homogenem polju v poprečju enakomerno, kar pomeni, da je časovno

poprečje $\dot{\mathbf{v}}_\mathrm{E}$ enako nič. (V modelnem smislu moremo to gibanje interpretirati z dinamiko padanja masnega delca skozi viskozno snov v gravitacijskem polju.)

Naslednja "kočljiva" kategorija v gibalni enačbi je sila upora $\mathbf{F}_\mathrm{u}$. Za to silo moremo – glede na Ohmov eksperimentalni zakon – privzeti, da je proporcionalna hitrosti $\mathbf{v}_\mathrm{E}$: $\mathbf{F}_\mathrm{u} = -k\mathbf{v}_\mathrm{E}$, kjer je k koeficient upora.

Od navedene gibalne enačbe (po vsem povedanem) očitno ne moremo pričakovati določenega kvantitativnega odgovora, temveč le kvalitativno osvetlitev prevajanja. Če gibalno enačbo v nadaljevanju delimo z m_e in nad njo napravimo časovno poprečje v inkrementu časa δt, dobimo

$$\overline{\dot{\mathbf{v}}}_\mathrm{E} + \frac{k}{m_\mathrm{e}}\overline{\mathbf{v}}_\mathrm{E} + \frac{e}{m_\mathrm{e}}\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$$

Za poprečno vrednost spremembe hitrosti smo ugotovili, da je nič, poprečna vrednost polja pa je enaka kar $\mathbf{E}$. Koeficient k/m_e dimenzijsko ustreza frekvenci in – v modelni sliki s "trki" – pomeni *frekvenco trkov* (f_t); recipročna vrednost $T_\mathrm{t} = 1/f_\mathrm{t}$ je t.i. *čas svobodnega preleta* med trkoma. Za kovine je T_t okrog 10^{-14} s, v plinih pa je ta okrog 10^{-9} s. Dalje moremo poprečno hitrost pisati tudi takole:

$$\overline{\mathbf{v}}_\mathrm{E} = -\frac{eT_\mathrm{t}}{m_\mathrm{e}}\mathbf{E} = -b\mathbf{E}$$

Koeficient b imenujemo mobilnost elektrona(ov); za kovine je mobilnost (gibljivost) reda 10^{-3} m^2/Vs.

V takšni makroskopski modelni shemi gibanja elektrona nam je očitno povsem zvodenela predstava o gibanju posameznega v množici prostih elektronov. Smiselno bo zato govoriti le o gibanju oblaka prostih elektronov. Naj je n gostota mobilnih elektronov v enoti volumna. V delčku volumna ($\delta\tilde{v}$) bo množina mobilne elektrine enaka $-ne\delta\tilde{v}$; pripadajoča prostorska gostota ρ_e bo zato $-ne$. Vsa ta elektrina se giblje s poprečno hitrostjo $\overline{\mathbf{v}}_\mathrm{E}$, ki jo (po enačbi 6.1) moremo izraziti s tokovno gostoto $\mathbf{J}$ in prostorsko gostoto ρ_e premikajočih nabojev: $\overline{\mathbf{v}}_\mathrm{E} = \mathbf{J}/\rho_\mathrm{e}$. Če to vnesemo v slednjo enačbo, dobimo:

$$\mathbf{J} = -\rho_\mathrm{e}\frac{eT_\mathrm{t}}{m_\mathrm{e}}\mathbf{E} = \frac{ne^2T_\mathrm{t}}{m_\mathrm{e}}\mathbf{E}$$

Enačba kaže, da je izzvana tokovna gostota $\mathbf{J}$ proporcionalna vzročni poljski jakosti $\mathbf{E}$. Sorazmernostna konstanta je t.i. *specifična električna prevodnost* γ. Enote zanjo so A/Vm oz. S/m (siemens[1]/meter). Zgornjo enačbo pišemo dalje kot

$$\boxed{\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}} \tag{30.1}$$

Ta enačba je t.i. *Ohmov zakon*[2] v "fizično majhni prostorninici"; v makroskopskem smislu je to tudi Ohmov zakon v splošni točki (T) znotraj prevodne snovi[3]; $\mathbf{J}(T) = \gamma\mathbf{E}(T)$.

[1]Werner Siemens (1816-1892), nemški izumitelj in tovarnar.

[2]Ohmov zakon smo navedli v zgodovinskem pregledu (razdelek 1). Če vzamemo odsek homogene žice konstantnega prereza S in dolžine l, potem je $E = U/l$ in $J = I/S$. Po enačbi 30.1 bi pisali: $I = \gamma(S/l)U$, in rekli, da je tok v žici premosorazmeren potencialni razliki med koncema žice, kar se ujema z dikcijo Ohmovega zakona.

[3]V smislu Lorentzove sile bi mogli polje $\mathbf{E}$ razširiti na $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} + (\mathbf{J}/\rho_\mathrm{e}) \times \mathbf{B}$ in pisati:

$$\mathbf{J} = \gamma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{\rho_\mathrm{e}} \times \mathbf{B}\right)$$

Dobljena (preprosta) relacija presega okvir modelske slike, ki smo jo zasledovali skozi izvajanje, in podaja zgolj kvalitativno odvisnost. Tudi specifična električna prevodnost, za katero dobimo iz opisanega modela izraz

$$\gamma = \frac{ne^2 T_\mathrm{t}}{m_\mathrm{e}}$$

nima uporabne kvantitativne teže, saj se izmerjena in izračunana prevodnost za posamezno snov v splošnem ne ujemata. Za baker (Cu) bi pri običajni (sobni) temperaturi in podatkih: $n = 8.4 \cdot 10^{28}/\mathrm{m}^3$, $T_\mathrm{t} = 10^{-14}$ s, za γ dobili $23.6 \cdot 10^6$ S/m; izmerjena vrednost pa je $56.5 \cdot 10^6$ S/m. Ima pa enačba vseeno določeno kvalitativno vrednost. Pove nam, da je prevodnost večja, če je v snovi več prostih (mobilnih) elektronov; tipična odlika dobrih prevodnikov (kovin) je ravno v velikem številu elektronov v prevodnem energijskem pasu. Čas svobodnega preleta T_t se občutno krajša z višanjem temperature; pri višjih temperaturah so namreč atomi v kristalni mreži "nemirnejši" (so v vzbujenem stanju), zato so trki pogostejši, upor je večji in γ je manjša. Prevodnost se manjša z maso gibajočega nosilca naboja; v tekočinah in plinih so to ($\pm$) ioni, ki so "okornejši" od elektronov.

Specifična prevodnost in specifična upornost. Specifična prevodnost je – poleg dielektričnosti – druga izrazito snovna kategorija. Določanje vrednosti specifične prevodnosti posameznih snovi je praviloma v empirični domeni. (Kasneje, ko bomo spoznali osnovne zakonitosti časovno konstantnega tokovnega polja, si ne bo težko zamisliti merilnega postopka, s katerim bi izbrani snovi izmerili specifično prevodnost.)

V praksi je poleg (ali namesto) specifične prevodnosti pogosto v rabi (tudi) *specifična električna upornost*[4] ρ, ki je prevodnosti recipročna: $\rho = 1/\gamma$. Enote za ρ so Ωm (Ω – ohm). Za specifično upornost (prevodnost) je značilno, da je izrazito temperaturno odvisna; pri večini elektrotehniških materialov se z višanjem temperature veča tudi specifična upornost. Meritve kažejo, da se v področju "normalnih" temperaturnih diferenc ($\pm 50°$C) povečuje ρ praktično linearno. Temperaturna odvisnost specifične upornosti se zato podaja z linearno enačbo

$$\rho(\vartheta) = \rho(\vartheta_0)(1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0))$$

kjer je α t.i. *temperaturni koeficient*; temperatura ϑ_0 je praviloma sobna temperatura ($\vartheta_0 = 20°$C). V tabeli 30.1 so navedene vrednosti specifičnih prevodnosti in upornosti za nekatere prevodnike, slabše prevodnike in izolatorje; pri boljših prevodnikih je podan še temperaturni koeficient[5].

Za kovine je značilno, da se pri občutno višjih temperaturah (tja do temperature tališča) specifična upornost progresivno povečuje in pri tališču skokovito poraste na okvirno dvojno vrednost. Druga skrajnost so ekstremno nizke temperature (nekaj kelvinov), kjer pride pri nekaterih kovinah in zlitinah do značilnega pojava *supraprevodnosti*.

Pri tehnično dosegljivih gostotah magnetnega polja (do nekaj teslov) se izkaže, da je $J/\gamma \gg JB/\rho_\mathrm{e}$, kar pomeni, da moremo vpliv magnetne gostote v Ohmovem zakonu zanemariti.

[4]Ta oznaka je bila do sedaj v rabi že v dveh svojstvih (koordinata, gostota elektrine), zato se je bomo v nadaljevanju izogibali.

[5]Glede temperaturnega koeficienta so tehnično zanimive zlitine, ki imajo ta koeficient čim manjši; pri grafitu in tudi oglju je ta celo negativen.

snov	γ(S/m)	$\rho(\Omega\mathrm{m})$	$\alpha(\mathrm{K}^{-1})$
srebro	$61.4 \cdot 10^6$	$0.0163 \cdot 10^{-6}$	0.00361
baker	$56.5 \cdot 10^6$	$0.0177 \cdot 10^{-6}$	0.0039
zlato	$41.0 \cdot 10^6$	$0.0244 \cdot 10^{-6}$	0.0034
aluminij	$35.4 \cdot 10^6$	$0.0288 \cdot 10^{-6}$	0.0041
jeklo	$(5-10) \cdot 10^6$	$(0.1-0.2) \cdot 10^{-6}$	0.0045
konstantan	$2.04 \cdot 10^6$	$0.49 \cdot 10^{-6}$	0.00003
grafit	$0.1 \cdot 10^6$	$10 \cdot 10^{-6}$	-0.0005
oglje	$0.0263 \cdot 10^6$	$38.0 \cdot 10^{-6}$	–
morska voda	$3-5$	$0.2-0.33$	–
germanij	2.3	0.43	–
silicij	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$2.56 \cdot 10^3$	–
voda	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^3$	–
zemlja	$10^{-5}-10^{-2}$	10^2-10^5	–
bakelit	$\sim 10^{-9}$	$\sim 10^9$	–
steklo	$\sim 10^{-12}$	$\sim 10^{12}$	–
guma	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{15}$	–
vosek	$\sim 10^{-17}$	$\sim 10^{17}$	–

Tabela 30.1: Specifične prevodnosti, upornosti in temperaturni koeficienti nekaterih snovi.

Specifična upornost se jim z zniževanjem temperature k 0 K ne zmanjšuje zvezno, ampak pade skokoma na nič. Mejna temperatura prehoda v supraprevodno stanje je za aluminij 1.2 K, za kositer je 3.7 K, za svinec je 7.2 K in za niobov nitrid (Nb_3Sn) je 18.1 K. (Pojav supraprevodnosti je tehnično gotovo zelo vabljiv in interesanten, vendar bo množična raba tega fenomena morala počakati na odkritja (predvsem cenenih) materialov s primerno visoko temperaturno mejo supraprevodnosti.)

Model prevajanja v trdih snoveh je smiselno prenosljiv tudi na tekočine in tehnično zanimive elektrolite. Njihova prevodnost je predvsem odvisna od odstotka koncentracije raztopine. Za 30% raztopino H_2SO_4 v vodi je specifična prevodnost 74 S/m; prevodnost pri nižjih in višjih koncentracijah je slabša.

Precej drugače je s prevodnostjo plinov. Tu je odnos med **J** in **E** izrazito nelinearen. Pri nizkih poljskih jakostih je Ohmov zakon še nekako uporaben. Z večanjem poljske jakosti pride do zasičenja toka; tok ne sledi več priraščanju polja. Pri še višjih jakostih pa pride zaradi trkov (v atome in molekule) do plazovite ionizacije plina in izdatnejšega prevajanja (neonske cevi). V ta okvir sodi tudi pojav t.i. *korone*, ki je izražen ob površini visokonapetostne daljnovodne vrvi. Posledica visoke poljske jakosti ob vrvi ($\sim$ MV/m) je prisilna ionizacija zraka, ki pospeši prevajanje zraka ob vrvi; pojavijo se dodatne (koronske) izgube prenosa električne energije. Problem korone se v dobršni meri ublaži s t.i. *snopastimi vodniki* (dvojčki, trojčki) – zgled 24.2.

Ohmov zakon v razširjeni obliki. Zakonitost Ohmovega zakona moremo razširiti tudi na generatorjevo substanco (razdelek 23), ki tudi ima določeno specifično prevodnost. Če

je generator obremenjen, kar pomeni, da skozi njega teče tok, deluje na elektrinico δQ v substanci vsota sil: $\mathbf{F}_\mathrm{g} + \mathbf{F}_\mathrm{e} = \delta Q(\mathbf{E}_\mathrm{g} + \mathbf{E})$. Tokovna gostota $\mathbf{J}$ je torej odvisna od vsote obeh polj. Pišemo $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}_\mathrm{rezultančni}$ oz.

$$\boxed{\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_\mathrm{g})} \tag{30.2}$$

Omenjeno enačbo imenujemo *Ohmov zakon v razširjeni obliki.*

Joulov zakon. Vrnimo se nazaj h gibalni enačbi. Izvirna vsebina Ohmovega zakona tiči v dejstvu, da se v lokalno homogenem polju gibljejo mobilne elektrine – v makroskopskem smislu – enakomerno, ali z drugimi besedami: električna sila in sila upora sta makroskopsko uravnoteženi. To tudi pomeni, da se delo električnih sil – za premikanje elektrine skozi volumen $\delta\tilde{v}$ – sproti pretvarja v notranjo (toplotno) energijo snovi v istem volumnu.

Vzemimo, da se v diferencialu časa (dt) oblak mobilne elektrine z gostoto ρ (v prostorninici $\delta\tilde{v}$) premakne za diferencial (poti) $d\mathbf{l} = \mathbf{v}\,dt$; $\mathbf{v}$ je hitrost oblaka. Diferencial dela električnih sil za ta premik je enak

$$dA_\mathrm{e} = \delta\mathbf{F}_\mathrm{e} \cdot d\mathbf{l} = (\rho\,\delta\tilde{v}\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{v}\,dt) = (\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\delta\tilde{v}\,dt = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})\,\delta\tilde{v}\,dt$$

To delo se v celoti pretvori v toplotno energijo (dW_t) v volumnu $\delta\tilde{v}$

$$dW_\mathrm{t} = dA_\mathrm{e} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})\,\delta\tilde{v}\,dt$$

Intenzivnost sproščanja toplote oz. moč δP_t v prostorninici $\delta\tilde{v}$ je enaka $dW_\mathrm{t}/dt = \delta P_\mathrm{t} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})\delta\tilde{v}$. Če prostorninico razumemo v limiti kot fizično majhno, potem bo produkt $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ pomenil gostoto intenzivnosti sproščanja toplotne energije oz. t.i. *gostoto moči*[6] (p_t); indeks "t" (toplotna) bomo opuščali in pisali:

$$\boxed{p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}} \tag{30.3}$$

Enote zanjo so VA/m^3 ali W/m^3 (W-watt). Dobljena enačba je *Joulov zakon* v točki prostora; $p(T) = \mathbf{J}(T) \cdot \mathbf{E}(T)$. Če v to enačbo vnesemo Ohmov zakon, dobimo še dve enakovredni formi Joulovega zakona,

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{J^2}{\gamma} = \gamma E^2$$

Intenzivnost sproščanja toplotne energije v danem območju $\mathcal{V}$, ali kratko *joulske izgube* (za "transport" elektrine), dobimo z integracijo

$$\boxed{P = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\,dv} \tag{30.4}$$

[6]Če tudi tu vpletemo Lorentzovo silo in polje $\mathbf{E}$ razširimo v $\mathbf{E} + (\mathbf{J}/\rho_\mathrm{e}) \times \mathbf{B} = \mathbf{f}_\mathrm{L}/\rho_\mathrm{e}$, dobimo za p izraz $\mathbf{J} \cdot \mathbf{f}_\mathrm{L}/\rho_\mathrm{e} = \mathbf{f}_\mathrm{L} \cdot \mathbf{v}$, ki je (zaradi psevdoskalarnega produkta) spet enak $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$

$$p = \mathbf{f}_\mathrm{L} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{J}}{\rho_\mathrm{e}}\right) \times \mathbf{B}\right) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

Joulov zakon ($p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$) očitno kaže na to, da je sproščena toplota neelektrična manifestacija delovanja elektromagnetne Lorentzove sile z gostoto moči $\mathbf{f}_\mathrm{L} \cdot \mathbf{v}$.

Ta zapis je tudi t.i. *Joulov zakon v integralni obliki*[7].

Razširjen Joulov zakon v integralni obliki. Tako kot Ohmov, bomo tudi Joulov zakon razširili na substanco napetostnega vira (ko je ta obremenjen; $J \neq 0$). Če v enačbi 30.3 za $\mathbf{E}$ pišemo razširjen Ohmov zakon ($\mathbf{E} = \mathbf{J}/\gamma_\mathrm{g} - \mathbf{E}_\mathrm{g}$) in integriramo po območju $\mathcal{V}_\mathrm{g}$ substance generatorja, dobimo:

$$\int_{\mathcal{V}_\mathrm{g}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, dv = \int_{\mathcal{V}_\mathrm{g}} \mathbf{J} \cdot (\frac{\mathbf{J}}{\gamma_\mathrm{g}} - \mathbf{E}_\mathrm{g})\, dv = \int_{\mathcal{V}_\mathrm{g}} \frac{J^2}{\gamma_\mathrm{g}}\, dv - \int_{\mathcal{V}_\mathrm{g}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{g}\, dv$$

ali

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}_\mathrm{g}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{g}\, dv = \int_{\mathcal{V}_\mathrm{g}} \frac{J^2}{\gamma_\mathrm{g}}\, dv - \int_{\mathcal{V}_\mathrm{g}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, dv} \tag{30.5}$$

Enačba je t.i. *razširjen Joulov zakon v integralni obliki* in razkriva močnostno bilanco. Člen na levi strani pomeni (po analogiji z enačbo 30.4) moč zunanjih, neelektričnih sil za "transport" (razdvajanje) elektrin v generatorjevi substanci; rečemo ji tudi moč generatorja (P_g). Prvi člen na desni pomeni joulsko izgubno moč zaradi prehajanja elektrin skozi substanco; rečemo ji tudi joulska ali ohmska izgubna moč generatorja ($P_\mathrm{izg.}$). Drugi člen na desni strani je potem $P_\mathrm{g} - P_\mathrm{izg.}$, torej moč (v časovnem integralu pa energija), ki območje vira zapušča in se v njegovi zunanjosti ali akumulira v obliki električne (in magnetne) energije ali pa pretvori v toplotne izgube; kako in v kolikšnem sorazmernostnem deležu, pa je seveda odvisno od snovno-geometrijskih konfiguracij zunanjega prostora.

Zgled 30.1

Vzemimo bakren vodnik dolžine $l = 100$ m in prereza $S = 200$ mm^2, vzdolž katerega teče enosmerni tok $I = 800$ A. Ostali podatki za Cu so še: $\gamma = 56.10^6$ S/m, $n = 8.4 \cdot 10^{28}$ elekt./m^3.

Tokovna gostota $J = I/S = 4$ A/mm^2, poljska jakost $E = J/\gamma = 71.4$ mV/m, poprečna hitrost (mobilnega elektronskega oblaka v Cu) $v = J/n|e| = 298$ μm/s, gostota joulske izgubne moči $p = J^2/\gamma = 286$ kW/m^3, izgubna moč na celotnem odseku vodnika je $P = pSl = 5.71$ kW. V enem dnevu je poraba električne energije 137 kWh; pri ceni npr. 5 SIT/kWh znese strošek 686 SIT.

Ohmov in Joulov zakon v časovno spremenljivem električnem polju. Če se spet povrnemo nazaj h gibalni enačbi in k izsledkom obeh zakonov, smo pri razmislekih vseskozi vztrajali in ostajali v območju lokalno homogenega in časovno konstantnega polja. Pa vzemimo, da bi električno polje $\mathbf{E}$ (hipotetično seveda) ob času t_0 v trenutku usahnilo. Gibalna enačba za $\mathbf{v}_\mathrm{E}$ bi bila

$$m_\mathrm{e}\dot{\mathbf{v}}_\mathrm{E} + k\mathbf{v}_\mathrm{E} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{v}}_\mathrm{E} + \frac{\mathbf{v}_\mathrm{E}}{T_\mathrm{t}} = \mathbf{0}$$

[7] Če vzamemo kos žice dolžine l, prereza S in specifične prevodnosti γ, vzdolž katere teče tok I konstantne gostote $J = I/S$, dobimo za P izraz $(J^2/\gamma)Sl = (l/\gamma S)I^2$. Dobljeno se ujema z dikcijo Joulovega zakona v razdelku 1.

njena rešitev bi bila eksponencialna funkcija

$$\mathbf{v}_{\mathrm{E}}(t) = \mathbf{v}_{\mathrm{E}}(t_0)e^{-(t-t_0)/T_{\mathrm{t}}}$$

Zaradi ekstremno kratkih časov $T_{\mathrm{t}}(\sim 10^{-14}$ s) bi hitrost $\mathbf{v}_{\mathrm{E}}$ v "hipu" usahnila na nič. Ali drugače: če bi se polje v trenutku t_0 zmanjšalo le na polovico, bi se tudi hitrost $\mathbf{v}_{\mathrm{E}}$ v "trenutku" razpolovila. Iz tega moremo zaključiti, da se hitrost $\mathbf{v}_{\mathrm{E}}$ dejansko hipno prilagaja spremembam jakosti polja $\mathbf{E}$ oz., da hitrost $\mathbf{v}_{\mathrm{E}}(t)$ "sinhrono" sledi spremembi polja $\mathbf{E}(t)$ v dani točki prostora. Če hitrost $\mathbf{v}_{\mathrm{E}}(t)$ (oz. njeno poprečje $\overline{\mathbf{v}}_{\mathrm{E}}$ v kratkem časovnem intervalu δt) navežemo na tokovno gostoto, dobimo Ohmov zakon v identični formi

$$\boxed{\mathbf{J}(T,t) = \gamma\mathbf{E}(T,t)} \tag{30.6}$$

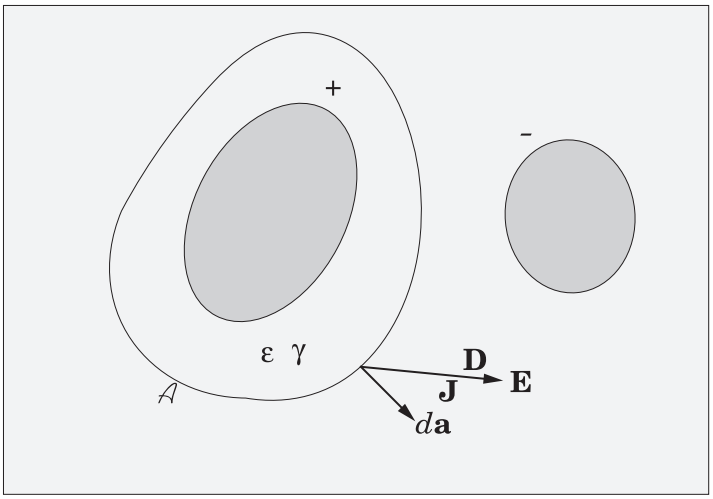
in prav tako Joulov zakon

$$\boxed{p(T,t) = \mathbf{J}(T,t)\cdot\mathbf{E}(T,t)} \tag{30.7}$$

Izvedeni relaciji Ohmovega in Joulovega zakona veljata torej v vsaki točki, vsak trenutek. Podobno posplošitev moremo smiselno prenesti tudi na razširjen Ohmov in Joulov zakon.

Zgled 30.2

Naj ima naelektren kondenzator med prevodnima telesoma homogen izolator z dielektričnostjo ε in izolacijsko (izgubno) prevodnostjo γ; slika 30.1. Večkrat smo



Slika 30.1: Vsak naelektren kondenzator se slej ko prej izprazni.

že ugotovili, da bi se tak kondenzator naravno razelektril (izpraznil). Vzemimo, da je ob času $t = t_0$ elektrina na njem $\pm Q_0$, napetost med telesoma pa U_0; $Q_0 = CU_0$. Za nek kasnejši čas ($t > t_0$) moremo za sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ zapisati kontinuitetno enačbo: $i(t) = -dQ(t)/dt$. V integralni obliki bi to enačbo (pri $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ in $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$) pisali takole:

$$i(t) = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J}(T,t)\cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt}\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D}(T,t)\cdot d\mathbf{a} = -\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{d}{dt}\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J}(T,t)\cdot d\mathbf{a} = -\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{di(t)}{dt}$$

Združitev začetka in konca nam da preprosto diferencialno enačbo za tok,

$$\frac{di}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon} i = 0 \qquad \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{\gamma}{\varepsilon}\, dt$$

Levo in desno stran enačbe integriramo in dobimo

$$\ln \frac{i}{K} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} t \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = K e^{-(\gamma/\varepsilon)t}$$

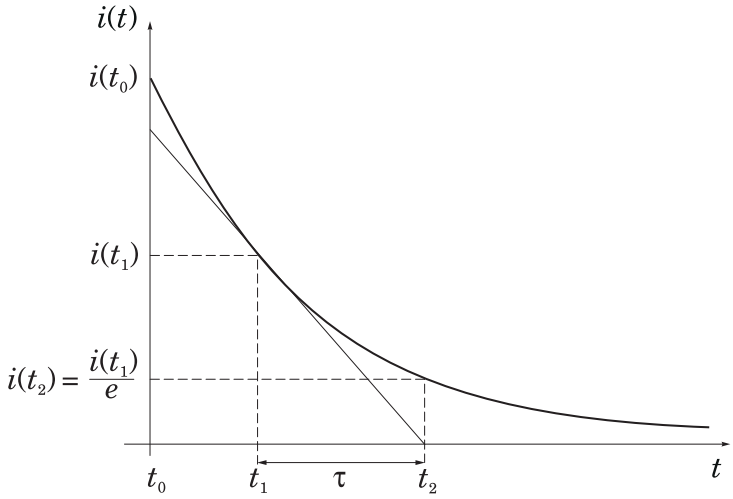
Integracijska konstanta K je zaenkrat še neznana; vemo pa, da je integral toka $i(t)$ od t_0 do neskončnosti (dokler se kondenzator ne izprazni) enak začetni elektrini Q_0,

$$Q_0 = \int_{t_0}^{\infty} i(t)\, dt = K \int_{t_0}^{\infty} e^{-(\gamma/\varepsilon)t}\, dt = K \frac{\varepsilon}{\gamma} e^{-(\gamma/\varepsilon)t_0}$$

Od tu sledi konstanta in končno tudi tok,

$$i(t) = \frac{\gamma}{\varepsilon} Q_0 e^{-(\gamma/\varepsilon)(t-t_0)} = \frac{Q_0}{\tau} e^{-(t-t_0)/\tau} \qquad t \geq t_0$$

Izolacijski tok usiha eksponencialno s časovno konstanto (praznenja) $\tau = \varepsilon/\gamma$ od začetne vrednosti $i(t_0) = Q_0/\tau$ proti nič; slika 30.2. Časovna konstanta ustreza



Slika 30.2: Časovni potek praznilnega toka.

času, ko tok usahne na $(1/e)$ začetne vrednosti; grafično jo ponazarja odsek tangente na abscisni osi.

Tako kot se manjša tok, se manjša tudi tokovna gostota v vsaki točki izolatorja,

$$\mathbf{J}(T,t) = \mathbf{J}(T,t_0) e^{-(t-t_0)/\tau}$$

in podobno tudi vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$. Izračunajmo gostoto joulske energije v točki T:

$$w_{\mathrm{t}} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{J^2}{\gamma}\, dt = \frac{J^2(T,t_0)}{\gamma} \int_{t_0}^{\infty} e^{-2(t-t_0)/\tau}\, dt = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{J^2(T,t_0)}{\gamma^2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2(T,t_0)$$

Vidimo, da je gostota sproščene toplotne (joulske) energije v splošni točki v izolatorju enaka prvotno akumulirani gostoti električne energije v tej točki. Energija,

ki je bila v polju, ostaja med praznenjem na istem mestu, vendar v drugi obliki. Seveda pa ta ugotovitev velja le v primeru, če je izolator enovit (homogen). Če bi bil izolator dvoslojen, bi se akumulirana električna energija z enega mesta delno selila v izgube na drugem mestu.

Če vzamemo kondenzator z dielektričnostjo $\varepsilon = 2.5\varepsilon_0$ in izgubno prevodnostjo $\gamma = 10^{-15}$ S/m, dobimo za $\tau = 22\,000$ s (= 6.1 h). Takemu kondenzatorju bi napetost usahnila na 90% začetne po času 2230 s (= 39 min.), na 10% začetne pa po času 50 900 s (= 14.1 h).

Hipotetično moremo vzeti, da je vmesni prostor boljši prevodnik. Pri oglju ($\gamma = 0.0263 \cdot 10^6$ S/m) je $\tau = \varepsilon_0/\gamma = 3.36 \cdot 10^{-16}$ s. Z vidika elektrostatičnega polja je bil vmesni prostor (oglje) ob t_0 polariziran. Ko vir (zunanje polje) izključimo, se ta očitno hipno depolarizira. Iz tega moremo sklepati, da se tudi polarizacija prevodnika, ki ga vnesemo v elektrostatično polje, izvrši hipno. To dejstvo, ki smo ga v razdelku 18 privzeli, se tu številsko le še potrjuje.

31. Časovno konstantno tokovno polje

Če se ozremo nazaj – posebno še v 29. razdelek –, smo z opisom posledic elektrostatičnega polja v realnih izolatorjih (nekako skozi "priprta vrata") dotaknili električnega toka, tokovne gostote $\mathbf{J}$ oz. *tokovnega polja*. S praktičnega in teoretičnega vidika moremo govoriti o določeni pogojenosti med električnim poljem, ki ga določata vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$, in tokovnim poljem, ki ga določata vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{J}$. Lahko bi kratkomalo rekli, da ni enega brez drugega. Poleg tega smo tudi uvideli, da je za vzdrževanje časovno konstantnega električnega in tokovnega polja potrebna stalna in aktivna prisotnost vsaj enega ali pa tudi več virov.

S prisotnostjo toka v izolatorjih in prevodnikih se je delno omajal tudi temeljni aksiom elektrostatičnega polja: da je električno polje v prevodnikih enako nič (na to dejstvo smo se v elektrostatičnem polju večkrat koristno opirali); prav zato bo potrebno – temu primerno – delno korigirati tudi izsledke o idealiziranem elektrostatičnem polju.

Za začetek si poglejmo temeljne enačbe, ki jih bo potrebno upoštevati v tem novem, kombiniranem električnem in tokovnem polju. Časovno konstantno tokovno polje smo v razdelku 8 opredelili s pomočjo enačbe, ki govori o ohranitvi elektrin in ugotovili dvoje: da je pri časovno konstantnih tokih pretok elektrin skozi poljubno sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ vedno enak nič, kar matematično zapišemo z enačbo

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0} \tag{31.1}$$

in da je presežna elektrina ρ le krajevna funkcija ($\rho = \rho(T)$), kar je enako, kot v elektrostatičnem polju. Enačbo 31.1 bi prebrali tudi takole: vsota tokov, ki določeno območje prostora zapuščajo, je v istem trenutku enaka tudi vsoti tokov, ki v to območje vstopajo.

Z matematičnega in splošno fizikalnega vidika moremo zgornjo enačbo interpretirati tudi v smislu (ne)izvornosti. Izvornost takšnega tokovnega polja je v vseh točkah prostora enaka nič, kar kaže tudi očitna limita

$$\lim_{\delta v \to 0} \frac{\oint_{\delta\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}}{\delta v} = 0$$

Enosmernemu tokovnemu polju zato rečemo, da je neizvorno ali brezizvorno.

Tokovno polje $\mathbf{J}$ moremo, podobno kot električni pretok vektorja $\mathbf{D}$ (razdelek 21), ponazoriti s pretočnicami (pretočnimi cevkami), katerih ograje so tokovnice, na katerih je vektor $\mathbf{J}$ tangencialen. Tudi tu rišemo pretočne cevke praviloma tako, da je pretok elektrin (električni tok) v vseh cevkah enak. Splošno sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ (v enačbi 31.1) določena pretočna cevka potemtakem "prebode" ali ničkrat ali dvakrat ali ... itd.

Glede na ugotovitev, da – v časovno konstantnem tokovnem polju – obdržijo presežne elektrine identičen "status", kot so ga imele v elektrostatiki ($\partial\rho/\partial t = 0$), bo tudi njim pripadajoče električno polje imelo enake zakonitosti, kot smo jih spoznali v elektrostatiki. Polje $\mathbf{E}$ bo še naprej nevrtinčno,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

in temu polju bo na enak način prirejena funkcija skalarnega električnega potenciala $V = V(T)$ z zvezama:

$$V(T_1) - V(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad \mathbf{E} = -\mathbf{n}\frac{\partial V}{\partial n}$$

Po Ohmovem zakonu pripada električnemu polju tokovna gostota

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\mathrm{g}}) & \text{v substanci generatorja} \\ \gamma\mathbf{E} & \text{drugod} \end{cases}$$

in gostota električnega pretoka $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ v izolatorju. Tudi Gaussov stavek za vektor $\mathbf{D}$ ostaja nespremenjen:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{not. (prosti)}} = \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{(prosti)}}\, dv$$

Če objema ploskev $\mathcal{A}$ območje s konstantnima snovnima parametroma γ in ε, moremo integral vektorja $\mathbf{D}$ v območju $E_{\mathrm{g}} = 0$ pisati kot

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

Po enačbi 31.1 je desni integral enak nič, kar pomeni, da v območju snovne homogenosti (ε in γ konstantna), v kateri velja Ohmov zakon, ne moremo pričakovati presežne elektrine; ρ je tam enak nič.

To ugotovitev moremo utemeljiti tudi drugače. Vzemimo, da bi v telesu s snovnima parametroma ε in γ, kjer velja Ohmov zakon, bila ob času $t = t_0$ hipotetično porazdeljena prosta elektrina s prostorsko gostoto $\rho(T, t_0)$. Za poljuben volumen $\mathcal{V}$ znotraj tega telesa bi enačbo 7.3 pisali takole:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \int_{\mathcal{V}} \rho\, dv = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv$$

ali tudi

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0$$

Dobljena enačba velja za vsak, tudi najmanjši volumen, kar pomeni, da mora biti integrant v vsaki točki telesa enak nič,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\rho = 0$$

Homogena enačba ima spet značilno eksponencialno rešitev (kot smo jo srečali že v prejšnjem razdelku):

$$\rho(T,t) = \rho(T,t_0)e^{-(\gamma/\varepsilon)(t-t_0)} \qquad t \geq t_0$$

Iz izraza vidimo, da bi katerakoli prostorska porazdelitev elektrine v telesu prej ali slej "izzvenela". Ker pa je elektrina "neuničljiva", je edina možnost, da se ta – z začetno porazdelitvijo $\rho(T,t_0)$ – "preseli" na rob (ograjo) telesa, ki ga opredeljujeta snovna parametra ε in γ. Iz vsega tega moremo zaključiti, da se bo v časovno konstantnih električno-tokovnih poljih nahajala presežna elektrina le ob mejah snovi – v obliki ploskovne elektrine z gostoto σ.

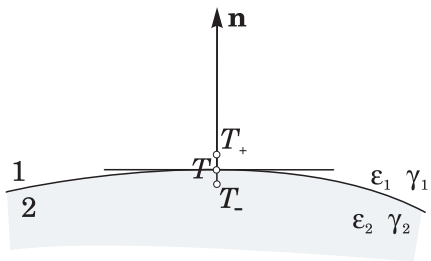
Po vsem povedanem smo razumljivo v določeni zadregi, saj ne vemo, kako bi pristopili k sistematičnemu reševanju novega, kombiniranega tokovnega in električnega polja; komu dati prednost in zakaj? Zastavljene naloge se bomo lotili postopoma tako, da bomo začeli z geometrijsko in vsebinsko preprostejšimi konfiguracijami, ki jih bomo v nadaljevanju smiselno nadgrajevali. Pri tem bo odločujočega pomena razumevanje zakonitosti tokovnega in električnega polja na mejah snovi z različnimi prevodniškimi lastnostmi.

32. Mejni pogoji v tokovnem polju

Temeljna zakonitost časovno konstantnega tokovnega polja je zajeta v enačbi 31.1,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Veljati mora povsod, torej tudi na meji dveh snovi, ki imata različna snovna parametra ε in γ; slika 32.1. Razmislek bo tu povsem identičen tistemu, ki smo ga v razdelku 22.



Slika 32.1: Ob meji dveh medijev.

napravili za vektor $\mathbf{D}$. Če za sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ izberemo plašč valjčka, ki delno seže v zgornjo in delno v spodnjo snov (slika 22.2), dobimo – po analogiji med tukajšnjim in tamkajšnjim ploskovnim integralom – za normalno komponento tokovne gostote skoraj identičen, vendar homogen mejni pogoj,

$$\boxed{J_n(T_+) - J_n(T_-) = 0} \tag{32.1}$$

ki ga v vektorski obliki zapišemo kot

$$\boxed{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}(T_+)-\mathbf{J}(T_-))=0} \tag{32.1a}$$

Mejni pogoj bi prebrali: v časovno konstantnem tokovnem polju prestopa normalna komponenta tokovne gostote mejo dveh snovi zvezno.

Osnovni zakonitosti vektorjev **E** in **D** sta v časovno konstantnem tokovnem polju enaki kot v elektrostatičnem polju,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0 \qquad\qquad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a}=Q_{\text{not. (prosti)}}$$

zato sta tudi mejna pogoja zanju povsem enaka že izpeljanima v razdelku 22 (enačbi 22.1 in 22.2):

$$E_t(T_+)-E_t(T_-)=0 \qquad\qquad D_n(T_+)-D_n(T_-)=\sigma(T)$$

kjer pomeni σ ploskovno gostoto presežne (proste) elektrine na meji med obema snovema.

Zanimivo je napraviti še dve kombinaciji mejnih pogojev:

a) pogoj za **E** polje je $E_t(T_+)=E_t(T_-)$. Če ga delimo z pogojem za **J** polje v obliki $J_n(T_+)=J_{\mathrm{n}}(T_-)$, kjer upoštevamo še Ohmov zakon, $\gamma_1 E_n(T_+)=\gamma_2 E_n(T_-)$, dobimo zakonitost (pre)loma tokovnega polja:

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

kjer sta α_1 in α_2 kota med smerjo normale mejne ploskve in tokovnicami v obeh snoveh ob meji (slika 22.4),

b) v pogoju za polje **D** upoštevamo snovni relaciji $D_n=\varepsilon E_n$ in $E_n=J_n/\gamma$ ter za $J_n(T_+)=J_n(T_-)$ pišemo kar $J_n(T)$, saj je komponenta J_n tam zvezna; dobimo:

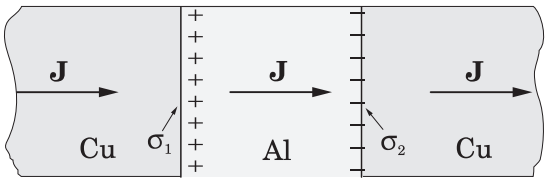
$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\right)J_n(T)=\sigma(T)$$

Z izjemo primera $\varepsilon_1/\gamma_1=\varepsilon_2/\gamma_2$ imamo ob prehajanju toka iz ene v drugo snov opraviti s ploskovno oblogo presežne elektrine.

V luči naštetih mejnih pogojev si oglejmo nekaj karakterističnih primerov, ki osvetljujejo električno in tokovno polje na stiku različnih snovi.

1) Tokovno polje vstopa pravokotno na mejo dveh snovi. Vzemimo Cu žico konstantnega prereza, ki ima na nekem mestu vložek Al žice enakega prereza; slika 32.2. Električni tok skozi odseke Cu, Al in Cu bo enak in tudi gostota **J** bo (zaradi enakih prerezov) po odsekih enaka. Če smernik normale (iz slike 32.1) usmerimo v smeri gostote **J**, dobimo na levem spoju (Cu-Al), po enačbi iz točke b), ploskovno elektrino

$$\sigma_1=\varepsilon_0\left(\frac{1}{\gamma_{\mathrm{Al}}}-\frac{1}{\gamma_{\mathrm{Cu}}}\right)J>0$$



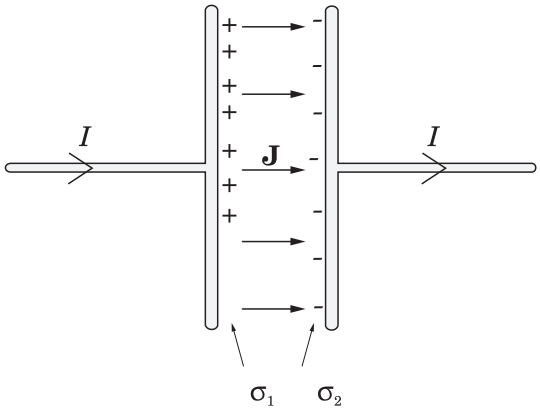
Slika 32.2: Al vložek v Cu žici.

ki je zaradi $\gamma_{\mathrm{Al}} < \gamma_{\mathrm{Cu}}$ pozitivna, na desnem spoju (Al-Cu) pa ima

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\gamma_{\mathrm{Cu}}} - \frac{1}{\gamma_{\mathrm{Al}}} \right) J < 0$$

negativno vrednost. Pri $\gamma_{\mathrm{Cu}} = 56 \cdot 10^6$ S/m in $\gamma_{\mathrm{Al}} = 35 \cdot 10^6$ S/m ter $J = 1$ A/mm^2 dobimo za ploskovni elektrini vrednosti $\pm 9.5 \cdot 10^{-14}$ C/m^2.

Temu soroden primer je prehod izolacijskega toka iz plošče kondenzatorja v izolator in naprej v drugo ploščo kondenzatorja; slika 32.3. Če upoštevamo, da je γ_{p} (plošč) veliko



Slika 32.3: Meja prevodnik-izolator.

večji od γ_{i} (izolatorja), dobimo pri ε_{i} (izolatorja) za oblogi elektrin odnos

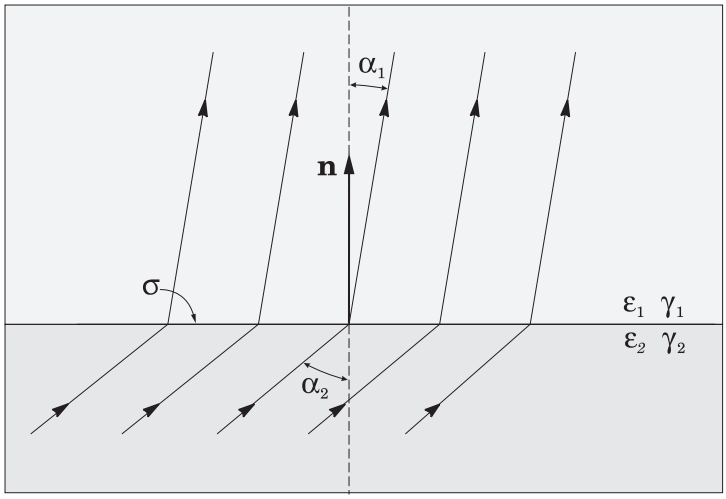
$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{\varepsilon_{\mathrm{i}}}{\gamma_{\mathrm{i}}} J$$

Ker pa je $J/\gamma_{\mathrm{i}} = E$ (poljska jakost v izolatorju), je ploskovna elektrina $\sigma_1 = \varepsilon_{\mathrm{i}} E$, kar je poznan rezultat iz elektrostatike.

2) Tokovno polje vstopa poševno na mejo dveh snovi. Začnimo s splošnim primerom, ko je $\gamma_1 < \gamma_2$, in je bližnja okolica prehoda tako lokalna, da jo moremo razumeti kot ravno, polje pa kot lokalno homogeno; slika 32.4. Na meji veljata enačbi izpod točk a) in b):

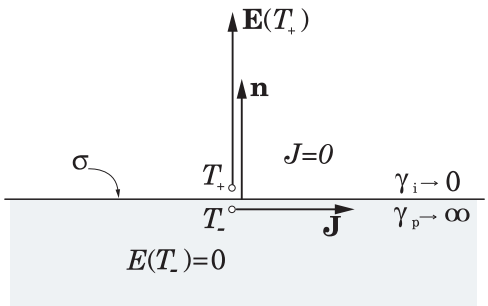
$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \qquad \sigma = \left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \right) J_n$$

Zaradi $\gamma_1 < \gamma_2$, bo $\alpha_1 < \alpha_2$, predznak obloge σ pa je odvisen še od relacije med ε_1 in ε_2.



Slika 32.4: Lom tokovnega polja na meji.

Zasledujmo ekstremen primer, ko je prvi prostor dober izolator (γ_i), drugi prostor pa dober prevodnik (γ_p). Relacija med prevodnostima je očitna: $\gamma_\mathrm{i} \ll \gamma_\mathrm{p}$. Iz tabele prevodnosti raznih snovi (v razdelku 30) je $\gamma_\mathrm{i}/\gamma_\mathrm{p} \sim 10^{-20}$. Takšnemu primeru bi ustrezala skrajna možnost iz slike 32.4, ko gre $\alpha_2 \to \pi/2$ in $\alpha_1 \to 0$. V "idealiziranem" primeru meje perfektnega prevodnika ($\gamma_\mathrm{p} \to \infty$) in perfektnega izolatorja ($\gamma_\mathrm{i} \to 0$) bi bil α_1 nič, α_2 pa $\pi/2$. Takrat bi bil $\mathbf{J}$ v prevodniku čisto vzporeden z mejo, E v prevodniku bi bil nič, površina prevodnika bi bila ekvipotencialka, $\mathbf{E}$ v izolatorju bi bil ob površini prevodnika le v normalni smeri (in enak $\mathbf{n}\sigma/\varepsilon_\mathrm{i}$) in J bi bil tam nič; slika 32.5. V izolatorju bi bilo polje



Slika 32.5: Idealizirana meja prevodnik-izolator.

čisto elektrostatično in določeno z vektorjema $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$, v prevodniku pa čisto tokovno in določeno z vektorjem $\mathbf{J}$. Idealiziran primer je prvotno kombinirano polje očitno razdvojil na dve separirani polji, ki ju moremo povsem ločeno tudi reševati. Kako postopamo v elektrostatičnem polju, smo obširno govorili v poglavju o elektrostatiki, o reševanju tokovnega polja pa bo tekla beseda kasneje.

V realnih primerih je razmerje $\gamma_\mathrm{i}/\gamma_\mathrm{p}$ očividno ekstremno majhno, zato lahko predvidevamo, da bodo tudi generalni zaključki za takšno mejo – z manjšimi korekturami seveda – zelo blizu zaključkom, ki smo jih dognali za idealizirano mejo. Vzemimo, da je tik nad mejo (v izolatorju) normalna komponenta polja $\mathbf{E}$ enaka $E_n(T_+)$ in da je tangencialna komponenta polja $\mathbf{J}$ tik pod mejo (v prevodniku) enaka $J_t(T_-)$. Če uporabimo Ohmov

zakon ($\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$) in upoštevamo zvezen prehod E_t, dobimo

$$E_t(T_+) = E_t(T_-) = \frac{J_t(T_-)}{\gamma_\mathrm{p}}$$

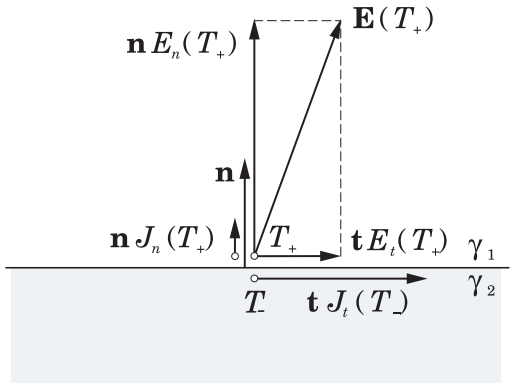
ter upoštevamo še zvezen prehod J_n, imamo

$$J_n(T_+) = J_n(T_-) = \gamma_\mathrm{i} E_n(T_+)$$

Pri tokovnih gostotah, ki so v Cu navzgor omejene nekako s 4 A/mm^2 (zaradi normalnega odvajanja joulskih izgub – konvekcija), bi bil (pri $\gamma_\mathrm{Cu} = 56 \cdot 10^6$ S/m) $E_t(T_+)$ v izolatorju le 71.4 mV/m.

Maksimalna poljska jakost v izolatorju je omejena s prebojno trdnostjo, ki sega v razred nekaj MV/m. Vzemimo, da je $E_n(T_+) = 1$ MV/m, potem dobimo pri $\gamma_\mathrm{i} = 10^{-12}$ S/m za $J_n(T_+)$ vrednost 10^{-12} A/mm^2.

Očitno velja: $E_t(T_+) \ll E_n(T_+)$ in $J_n(T_-) \ll J_t(T_-)$, ali tudi: $\alpha_1 \simeq 0$, $\alpha_2 \simeq \pi/2$. Iz številskega primera vidimo sledeče: $J(T_-) \simeq J_t(T_-)$ in $E(T_+) \simeq E_n(T_+)$. Realni odnosi vektorjev $\mathbf{J}$ in $\mathbf{E}$ kažejo na očitno skladnost z idealiziranim primerom iz slike 32.5. Teh minimalnih nians v merilu sploh ne moremo narisati, zato se moramo poslužiti močno karikirane upodobitve; slika 32.6.



Slika 32.6: Ob meji realnega prevodnika in realnega izolatorja.

Iz tega nazornega številskega primera moremo izvleči nekaj daljnosežnih ugotovitev:

1) električni tok, ki teče vzdolž prevodnika (vodnika, žice), ima v prevodniku, tik ob meji z izolatorjem, (praktično) le tangencialno komponento ($J_n(T_-) \ll J_t(T_-)$), kar pomeni, da tok le zanemarljivo izstopa iz prevodnika; mejo izolator-prevodnik moremo razumeti kot ograjo pretočne cevke toka v prevodniku ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(T_-) \simeq 0$), in

2) poljska jakost v prevodniku ob površini je v korelaciji s tokovno gostoto v prevodniku na tistem mestu ($E_t(T_-) = J_t(T_-)/\gamma_2$) in je enaka tudi tik nad površino (v izolatorju); v realnih razmerah je glede na $E_n(T_+)$ praktično zanemarljiva. Dejanska posledica te vzdolžne komponente poljske jakosti je ta, da vektor $\mathbf{E}(T_+)$ – tik nad površino prevodnika – ni pravokoten na mejo, temveč "rahlo" nagnjen v smeri toka v prevodniku. Električni potencial površine prevodnika ni konstanten, temveč

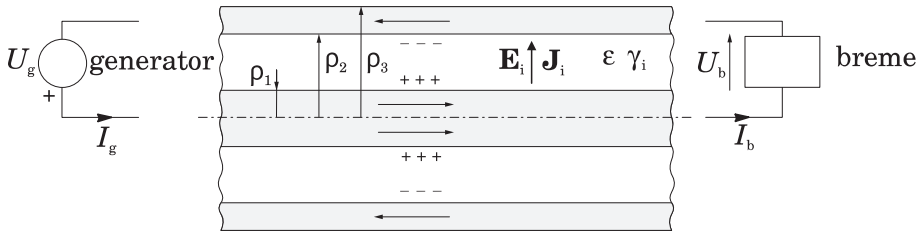
rahlo upada vzdolž smeri toka. Upadek potenciala vzdolž toka v prevodniku med površinskima točkama T_1 in T_2 imenujemo tudi *padec napetosti*; zanj pišemo:

$$\delta U_{12} = V(T_1) - V(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{T_1}^{T_2} E_t \cdot dl$$

V prejšnjem številskem primeru bi bil padec napetosti na dolžini vodnika $l = 100$ m enak 7.14 V. V praktični elektrotehniki (razen redkih izjem) težimo praviloma k temu, da je E_t čim manjša, da so potem tudi izgube v prevodniku čim manjše, zato ji včasih dodamo pridevnik "parazitna" – torej vzdolžna ali parazitna poljska jakost.

Zgled 32.1

Vzemimo energetski enožilni koaksialni kabel (dolžine $l = 1$ km s polmerom žile $\rho_1 = 1$ cm in polmeroma plašča $\rho_2 = 2.4$ cm in $\rho_3 = 2.6$ cm), ki povezuje enosmerni generator z napetostjo $U_\mathrm{g} = 1$ kV (na začetku) in ohmsko breme (na koncu), ki naj potrebuje tok $I_\mathrm{b} = 200$ A. Žila in plašč naj sta bakrena ($\gamma_\mathrm{Cu} = 56 \cdot 10^6$ S/m), izolacijska masa pa naj ima $\varepsilon_r = 2.5$ in specifično prevodnost $\gamma_\mathrm{i} = 10^{-11}$ S/m; slika 32.7. Prerez žile kabla je $S_1 = \pi\rho_1^2 = 314$ mm^2, prerez plašča kabla pa



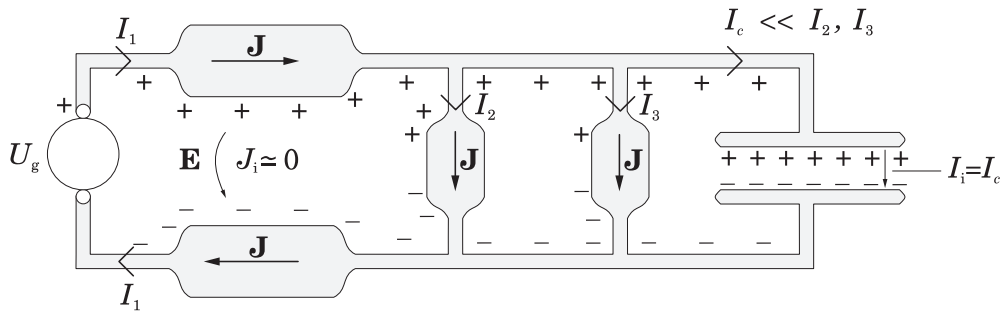
Slika 32.7: Izgubni tok v koaksialni liniji.

je $S_2 = \pi(\rho_3^2 - \rho_2^2) = 314$ mm^2. Če privzamemo, da je izolacijski tok zanemarljiv, potem je gostota J v žili in plašču enaka $I_\mathrm{b}/S_1 = 0.637$ A/mm^2. Vzdolžna parazitna poljska jakost v žili in plašču je $J/\gamma_\mathrm{Cu} = 0.0114$ V/m. Padec napetosti na žili je enak padcu napetosti na plašču; $\delta U = 2(El) = 22.8$ V. Napetost na bremenu bo zato za toliko manjša; $U_\mathrm{b} = U_\mathrm{g} - \delta U = 977$ V oz. za $\sim 2.3\%$ manjša od generatorjeve. Zavedajoč se napake, moremo smatrati, da je med žilo in plaščem napetost $\sim U_\mathrm{g} = 1$ kV. Poljska jakost med žilo in plaščem je (po zgledu 18.2) enaka

$$E_\rho = \frac{U_\mathrm{g}}{\rho \ln(\rho_2/\rho_1)} \qquad \rho_1 < \rho < \rho_2$$

Na površini notranje žile je $E_\rho(\rho_1) = 114$ kV/m, kar je očitno več kot parazitna jakost v žili in plašču. Gostota izolacijskega toka tik ob žili je po Ohmovem zakonu enaka $J_\rho(\rho_1) = \gamma_\mathrm{i} E_\rho(\rho_1) = 1.14$ μA/m^2. Celoten izolacijski tok iz žile je $I_\mathrm{i} = 2\pi\rho_1 l J_\rho(\rho_1) = 71.7$ μA, kar pomeni, da je vstopni tok v kabel (tok I_g generatorja) večji za izolacijski tok; $I_\mathrm{g} = I_\mathrm{b} + I_\mathrm{i} \simeq I_\mathrm{b}$.

Ta preprost številski zgled le še potrjuje vsebino zaključnih dveh točk, v kateri smo strnili razmisleke o mejnih pogojih ob meji prevodnik-izolator.



Slika 32.8: Tokovna struktura že kaže na modelno vezje.

Zaključimo lahko: v galvanskih povezavah enosmernega napetostnega vira s prevodnimi telesi (katerih specifična prevodnost je velika glede na okoliško izolacijsko snov) tvorijo – vsi združno – konduktivne poti električnega toka, vzdolž katerih se tok količinsko ohranja – primankljaj zaradi izolacijskega toka je zanemarljiv; slika 32.8. Konfiguracija prevodnika(ov) in generatorja (na sliki) predstavlja v bistvu že primer *enosmernega električnega vezja* oz. električnega vezja nespremenljivih tokov; takim vezjem bomo posvetili celotno naslednje poglavje. Morda si tu zapomnimo le to, da so enosmerna električna vezja le (in samo) poseben primer tokovnega polja.

Tok generatorja (I_1) se vzdolž prevodnika ohranja; na zgornjem razvejišču se razcepi na I_2, I_3 in izolacijski tok kondenzatorja ($I_c = I_\mathrm{i}$), na spodnjem spojišču pa se spet združijo v I_1 skozi generator. Izolacijski toki so glede na vzdolžne toke v prevodniških poteh praktično zanemarljivi; na površini prevodnikov so presežne elektrine, ki v izolatorju ustvarjajo elektrostatično polje $\mathbf{E}$, slednje pa tudi gostoto $\mathbf{J}_\mathrm{i}$ izolacijskega toka.

V takšnih razmerah dobi tokovno polje v prevodnikih očitno prednost pred elektrostatičnim poljem v izolatorju. Za izračun tokovnega polja (v konkretnih primerih) izhajamo iz osnovnih zakonitosti tega polja, ki ju opredeljujeta karakteristična integralna zapisa za vektorja $\mathbf{J}$ in $\mathbf{E}$,

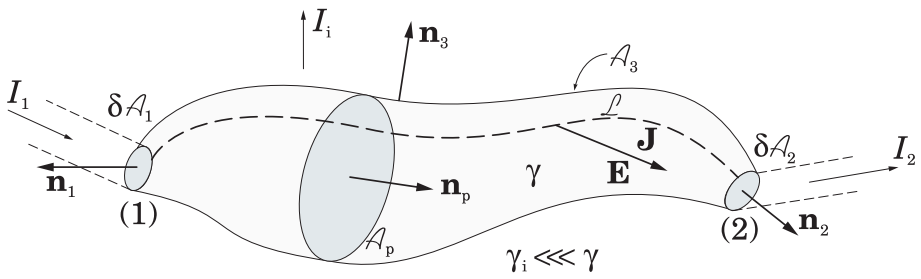
$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0 \qquad\qquad \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

s pripadajočima pogojema o zveznosti J_n in E_t na meji dveh snovi, in iz Ohmovega zakona v splošni, razširjeni obliki.

33. Električna upornost (prevodnost) in izgubna moč

Vzemimo odsek poljubno oblikovanega prevodnika s specifično prevodnostjo γ, vzdolž katerega teče tok z gostoto $\mathbf{J}$; slika 33.1. S črtkanima deloma na začetku in koncu opazovanega prevodnika smo označili žici (vodnika), po katerih "prihaja" oz. "odhaja" električni tok. Priključni ploskvici $\delta\mathcal{A}_1$ in $\delta\mathcal{A}_2$ naj sta tako majhni, da moremo smatrati (integral) $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ med splošnima točkama na ploskvici $\delta\mathcal{A}_1$ (ali $\delta\mathcal{A}_2$) kot zanemarljivo majhnega. To z drugimi besedami pomeni, da sta električna potenciala na ploskvicah $\delta\mathcal{A}_1$ in $\delta\mathcal{A}_2$ praktično konstantna; naj sta to V_1 in V_2. Plašč ($\mathcal{A}_3$) in priključni ploskvici ($\delta\mathcal{A}_1$, $\delta\mathcal{A}_2$) tvorijo sklenjeno ploskev ($\mathcal{A}$). Zanjo moremo zapisati enačbo 31.1 kot

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\delta\mathcal{A}_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}_1 + \oint_{\delta\mathcal{A}_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}_2 + \oint_{\mathcal{A}_3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}_3 = 0$$



Slika 33.1: Segment prevodnika – upor(nik).

Prvi sumand je enak $-I_1$, drugi je enak I_2 in tretji sumand je enak izolacijskemu toku I_i skozi plašč. Če je $\gamma_i \ll \gamma$, potem je (po ugotovitvah prejšnjega razdelka) ta člen zanemarljiv proti I_1 in I_2, kar da: $-I_1 + I_2 = 0$ oz.

$$I_1 = I_2 = I$$

Dobljen rezultat pomeni, da je vstopni tok enak izstopnemu oz. enak toku I vzdolž prevodnika skozi vsako prerezno ploskev $\mathcal{A}_p$:

$$I = \int_{\mathcal{A}_p} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}_p$$

Plašč ($\mathcal{A}_3$) moremo potemtakem razumeti kot ograjo pretočne cevke s tokom I. Pretok tokovne gostote $\mathbf{J}$ skozi to cevko lahko ponazorimo še z več tanjšimi pretočnimi cevkami s toki δI v njih.

Potencialna razlika med vstopnim (1) in izstopnim (2) mestom je enaka napetosti $U = U_{12}$ in je določena s krivuljnim integralom polja $\mathbf{E}$ vzdolž prevodnika,

$$U = U_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Pri tem pa je integral neodvisen od poti $\mathcal{L}$ med koncema, kar je odlika vektorja $\mathbf{E}$ v časovno konstantnem polju.

Za prevoden odsek, vzdolž katerega teče enosmerni tok, je značilen ali karakterističen odnos med napetostjo med koncema (U) in vzdolžnim tokom (I). Pri linearnih snoveh (takšnih torej, pri katerih je specifična prevodnost γ neodvisna od jakosti polja), je ta odnos trivialen. Namreč, če je napetost U k-krat večja, sta k-krat večja tudi $\mathbf{E}$ in $\mathbf{J}$, s tem pa je k-krat večji tudi tok I. Razmerje U/I se ohranja – je neodvisno od faktorja k. Prevodnemu odseku na sliki 33.1 pripada potemtakem (pri dani geometriji in specifični prevodnosti) konstantno razmerje U/I, ki ga imenujemo *električna upornost*; označujemo jo z R in zanjo pišemo:

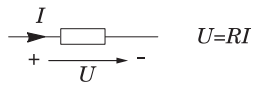
$$\boxed{R = \frac{U}{I}} \tag{33.1}$$

Enota upornosti je Ω (ohm); $\Omega = \mathrm{V/A}$. Pogosto je v rabi tudi recipročno razmerje, ki ga imenujemo *električna prevodnost*; označujemo jo z G in pišemo:

$$\boxed{G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}} \tag{33.1b}$$

Enota zanjo je S (siemens); S = A/V. Linearno soodvisnost med tokom in napetostjo imenujemo tudi *Ohmov zakon integralnih količin* (integralnih pač zato, ker je U integral vektorja $\mathbf{E}$ in je I integral gostote $\mathbf{J}$). Tok skozi prevoden odsek lahko zapišemo kot $I = GU = G(V_1 - V_2)$ in beremo: električni tok skozi odsek prevodnika je premosorazmeren potencialni razliki med koncema.

V smislu električnih vezij priredimo splošnemu prevodnemu odseku (iz slike 33.1) koncentriran element – *upor*, ki ga označimo s simbolom, kot na sliki 33.2, ob katerem napišemo vrednost upornosti (prevodnosti), ali pa jo le označimo s splošno vrednostjo R (ali G). Kadar tak element nastopa v kontekstu električnega vezja, mu označimo še smer toka in (ali) smer (polariteto) padca napetosti U; slika 33.2.



Slika 33.2: Simbol upora – dogovorjene oznake.

Zgled 33.1

Izračunajmo upornost Cu vodnika, prereza $S = 2.5$ mm^2, dolžine $l = 100$ m in prevodnosti $\gamma_{\mathrm{Cu}} = 56.10^6$ S/m, če teče vzdolž njega električni tok I. Tokovna gostota J bo enakomerno porazdeljena po prerezu in enaka I/S. Poljska jakost E vzdolž žice bo $J/\gamma_{\mathrm{Cu}} = I/\gamma_{\mathrm{Cu}}S$ in potencialna razlika U med koncema bo $El = Il/\gamma_{\mathrm{Cu}}S$. Upornost R bo $U/I = l/\gamma_{\mathrm{Cu}}S = 0.715\ \Omega$ in prevodnost G bo 1.4 S. Vidimo, da se upornost povečuje z dolžino in manjša z večanjem prereza. Praktično uporaben podatek za vodnik (žico) je tudi upornost na tekoči meter; $r = R/l = 7.15$ mΩ/m.

Iz definicije električne upornosti prevodnega odseka s konstantno specifično prevodnostjo (upornostjo), in iz zgleda, je razvidno, da je v takem primeru električna upornost povsem snovno-geometrijsko pogojena. Če zapišemo

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_{\mathcal{A}_{\mathrm{p}}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\int_{\mathcal{L}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}}{\int_{\mathcal{A}_{\mathrm{p}}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}_{\mathrm{p}}}$$

je to očitno, saj kvocient integralov ni občutljiv na linearno transformacijo $\mathbf{J} \to k\mathbf{J}$.

Zgled 33.2

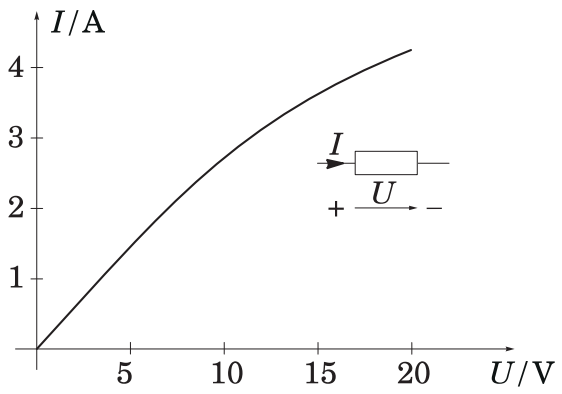
Izolacija koaksialnega kabla ima specifično prevodnost $\gamma_{\mathrm{i}} = 10^{-11}$ S/m. Radija izolacije sta $\rho_1 = 1$ mm in $\rho_2 = 2.4$ mm, dolžina l bodi 100 m. Pri napetosti U je radialna električna poljska jakost med žilama enaka $U/\rho \ln(\rho_2/\rho_1)$, tokovna gostota je $\gamma_{\mathrm{i}} U/\rho \ln(\rho_2/\rho_1)$ in izolacijski tok (skozi koncentričen plašč valja s površino $2\pi\rho l$) je $2\pi\gamma_{\mathrm{i}} lU/\ln(\rho_2/\rho_1)$. Izolacijska prevodnost $G_{\mathrm{i}} = 2\pi\gamma_{\mathrm{i}} l/\ln(\rho_2/\rho_1) = 7.16$ nS, izolacijska upornost pa je 140 MΩ. Praktično zanimiv podatek je izolacijska prevodnost tekočega metra kabla; $g_{\mathrm{i}} = G_{\mathrm{i}}/l = 71.6$ pS/m.

Pri obravnavi prevajanja v kovinah smo opozorili na temperaturno odvisnost specifične upornosti (prevodnosti). Če je temperatura v celotnem prevodniku enaka, je tudi specifična prevodnost enaka, kar pomeni, da se temperaturna zakonitost specifične upornosti (razdelek 29) prenese tudi na upornost R. Takrat pišemo:

$$R(\vartheta) = R(\vartheta_0)(1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0))$$

kjer je α temperaturni koeficient za izhodiščno temperaturo $\vartheta_0 = 20°$ C, $R(\vartheta_0)$ in $R(\vartheta)$ pa sta upornosti pri izhodiščni oz. obratovalni temperaturi. (Navitju transformatorja (motorja) se pri delovni temperaturi 75° C ($\alpha_{\mathrm{Cu}} = 0.0039\ \mathrm{K}^{-1}$) poveča upornost za 21.5% glede na izhodiščno.)

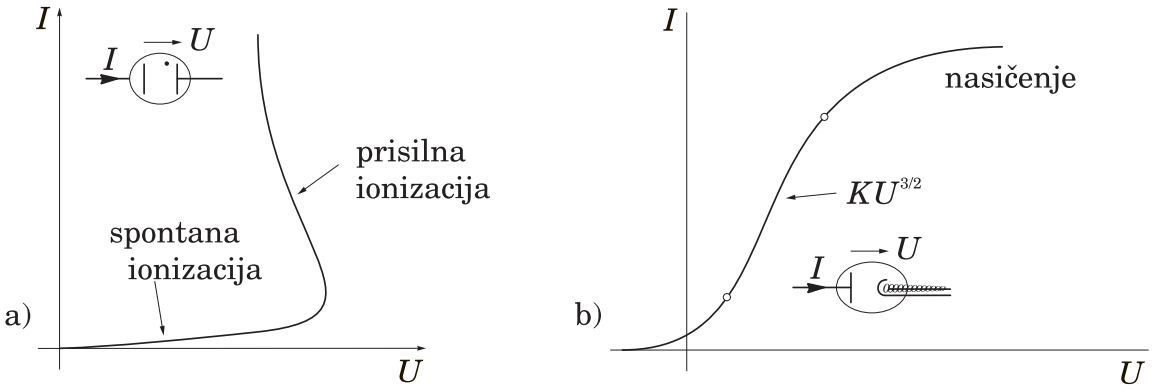
Nelinearna upornost. Seveda pa preprost račun v pretežni meri odpove, če je temperatura neenakomerna po prevodniku. Računanje upornosti (prevodnosti) je v takih primerih praviloma zahtevno in je iz praktično-tehničnega vidika primerneje upornost izmeriti z ustrezno merilno metodo. Najenostavnejša je t.i. *U-I metoda*, pri kateri merimo padec napetosti med koncema prevodnika z V-metrom in tok skozi prevodnik z A-metrom. Napetostno-tokovna odvisnost je v omenjenem primeru praviloma nelinearna, saj je temperaturna nehomogenost pogojena tudi z joulskimi izgubami (J^2/γ) v notranjosti prevodnika in z odvajanjem sproščene toplote v okolico. V takih primerih pravimo, da Ohmov zakon (enačba 33.1) ne velja; zamenja ga nelinearna odvisnost, ki jo formalno zapišemo kot $I = I(U)$ ali kot $U = U(I)$ in jo običajno podajamo v (U, I) diagramu; slika 33.3.



Slika 33.3: Nelinearna (U, I) karakteristika upora.

In tudi nasploh srečamo v elektrotehniki kopico prevodniških in še posebej polprevodniških elementov, ki imajo izrazito nelinearno (U, I) karakteristiko. Naštejmo le nekaj primerov: tlivka, fluorescentna cev in električni oblok imajo nelinearno karakteristiko zaradi dodatne ali prisilne ionizacije plina (zraka) – in s tem boljše vodljivosti –, do katere prihaja pri povišani poljski jakosti (napetosti); slika 33.4, skica a). Nelinearno (U, I) karakteristiko ima tudi vakuumska dioda. Iz segrevane katode izstopajo elektroni, ki jih pozitivna anoda privlačuje nase. Ob določenih poenostavitvah se za tok skozi diodo dobi približna zakonitost: $I \simeq KU^{3/2}$, kjer je U napetost med anodo in katodo. Pri izdatnem povečevanju (anodne) napetosti omenjena zakonitost ne velja več, ker število

izstopajočih elektronov ne sledi povečevanju napetosti; tok diode doseže zasičenje. Pri obratni polariteti napetosti (na diodi) ta preprečuje prehod emitiranih elektronov iz katode na anodo, zato tok v diodi ugasne; slika 33.4, skica b).

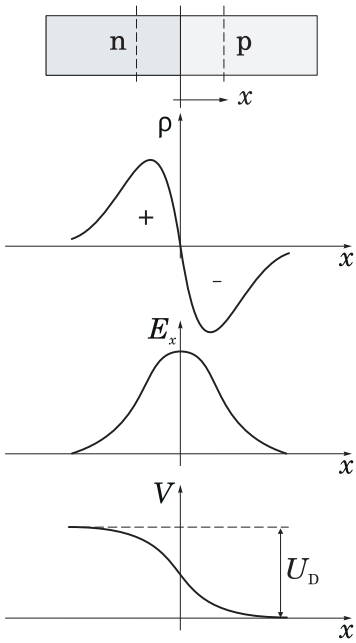


Slika 33.4: (U, I) karakteristiki: a) tlivke in b) vakuumske diode.

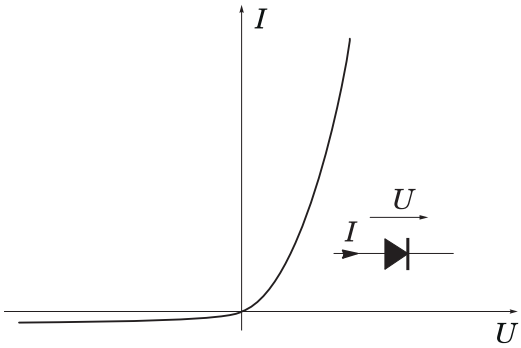
Povsem drugačno ozadje nelinearnosti srečamo pri t.i. polprevodniških elementih (dioda, Zener dioda, transistor, tiristor, FET transistor, ...), ki so v današnji elektrotehniki praktično nepogrešljivi. Osnova teh elementov sta germanij (Ge) ali silicij (Si), ki sta dopirana z donorsko primesjo (npr. petvalentnega arzena (As)) ali akceptorsko primesjo (npr. trivalentnega indija (In)). V prvem primeru so večinski nosilci električnega toka v polprevodniku elektroni (polprevodnik tipa n), v drugem primeru pa t.i. vrzeli (polprevodnik tipa p). Mehanizem prehajanja večinskih nosilcev je difuzijski – od mesta z višjo k mestu z nižjo koncentracijo. Za najosnovnejši spoj polprevodnikov n- in p-tipa (diodo) je značilno, da pride na stiku do prestopa elektronov iz n- v p-tip, kar ima za posledico porušitev ravnotežja koncentracije prostorske gostote nabojev; slika 33.5. Ob spoju se pojavi električna poljska jakost (E_x) oz. difuzijska napetost (U_D) v smeri od n- k p-tipu, ki preprečuje nadaljnjo difuzijo; ob spoju se vzpostavi t.i. zaporna bariera. Če se na n-p spoj priključi zunanji napetostni vir enake polaritete kot je difuzijska napetost, se pas zaporne bariere širi; tak element se obnaša kot kondenzator z napetostno spremenljivo kapacitivnostjo, katere vrednost z rastočo napetostjo upada. Pri obratni polariteti zunanje napetosti se zaporni pas oži in pri nekaj desetinkah volta postane n-p spoj sorazmerno dobro vodljiv. Odvisnost med tokom in napetostjo na diodi se da (pri majhnih napetostih) aproksimirati z izrazom $I = I_0(e^{-U/U_0} - 1)$, kjer pomeni: I_0 zaporni tok ($\sim 10\ \mu$A) oz. tok manjšinskih nosilcev, U_0 pa termično napetost ($U_0 = kT/e$; $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konstanta, T je absolutna temperatura in e je osnovni električni naboj); slika 33.6. Pri sobni temperaturi je $U_0 \simeq 25$ mV.

Ob elementih z nelinearno (U, I) karakteristiko se nasploh ne bomo spuščali v tehnološko problematiko, ki je sorazmerno zahtevna in presega okvir teh osnov. Pa tudi sicer je pripadajoča (U, I) karakteristika danega nelinearnega elementa večinoma v empirični domeni; na podlagi meritev je podana z diagramom. Prav zato jo bomo kasneje kot takšno tudi vključevali v reševanje preprostih električnih vezij, ki bodo vsebovala kak nelinearen element.

Ob nelinearnem uporovnem elementu omenimo (povsem splošno) še pojma statične in dinamične upornosti (prevodnosti). Statična upornost (R_s) je določena s kvocientom



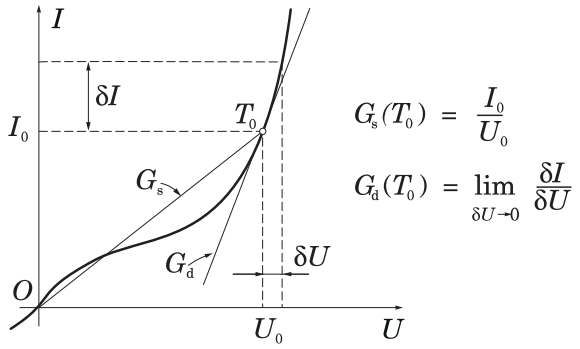
Slika 33.5: Ponazoritev porazdelitve elektrin, polja in potenciala ob n-p spoju.



Slika 33.6: (U, I) karakteristika polprevodniške diode.

napetosti in toka na elementu ($R_\mathrm{s} = U/I$), dinamična upornost (R_d) pa je določena kot limita kvocienta $\delta U/\delta I$, ko gre $\delta I \to 0$. Obe upornosti (prevodnosti) sta funkcijsko odvisni od toka oz. napetosti in sta v (U, I) diagramu v splošnem od točke do točke drugačni; slika 33.7. Statična prevodnost je sorazmerna naklonu zveznice $\overline{OT_0}$, dinamična prevodnost pa naklonu tangente na krivuljo v točki T_0.

Izgubna moč. Za tok I v kosu prevodnika (iz slike 33.1) smo ugotovili, da ga moremo predstaviti s snopom pretočnih cevk s toki δI_i v njih. Naj je teh cevk toliko, da moremo vsako od njih razumeti kot tanko tokovno nit. Izgubna moč v kratkem odseku $\delta\mathbf{l}$ splošne tokovne niti je (po enačbi 30.4) enaka $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})(\delta\mathbf{a}_i \cdot \delta\mathbf{l})$. Vsi štirje vektorji so na splošnem mestu v niti kolinearni (vzporedni), zato moremo produkt pisati kot $(\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{a}_i)(\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{l}) = \delta I_i \delta U$. Če seštejemo vse takšne produkte vzdolž izbrane tokovne niti, dobimo sproščeno toplotno moč $\delta I_i U$ v niti, kjer je U napetost vzdolž niti, ki je skupna tudi vsem ostalim nitim. Po enačbi 33.1a moremo tej niti prirediti prevodnost δG_i s kvocientom $\delta I_i/U$.



Slika 33.7: K interpretaciji statične in dinamične prevodnosti.

Celotna izgubna moč je potem vsota po vseh nitih ($i = 1, 2, ..., n$),

$$P = U \sum_{i=1}^{n} \delta I_i = U^2 \sum_{i=1}^{n} \delta G_i$$

V limiti, ko gre število niti proti neskončnosti, njih prerezi pa proti nič, dobimo za moč izraz UI, ki ga z upoštevanjem Ohmovega zakona integralnih količin pišemo takole:

$$\boxed{P = UI = GU^2 = RI^2} \tag{33.2}$$

Dobljen izraz predstavlja *Joulov zakon integralnih količin*. Z isto limito dobimo še celotno prevodnost G prevodnega odseka, ki je integral diferencialnih prevodnosti po vseh vzporednih tokovnih nitkah,

$$G = \frac{P}{U^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta G_i = \int_{\text{preko niti}} dG$$

Tu smo razmislek oprli na vzporedno ležeče tokovne niti. Povsem ekvivalentno pa moremo tokovno polje v prevodnem odseku (iz slike 33.1) ponazoriti s skico ekvipotencialnih ploskev, ki si sledijo po prerezu prevodnika kot prerezne ploskve od začetka (1) do konca (2). Naj je potencialna razlika med sosednjima ekvipotencialkama enaka δU_j; $j = 1, 2, ..., m$. Njihova vsota je enaka celotni napetosti: $\sum_{j=1}^{m} \delta U_j = U$. Če leže ekvipotencialke dovolj gosto, potem je sproščena moč med ekvipotencialkama s potencialno razliko δU_j enaka integralu

$$\int_{\mathcal{A}_j} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})(d\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{l}_j)$$

zaradi kolinearnosti vektorjev pa je enaka tudi

$$(\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{l}_j) \int_{\mathcal{A}_j} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = I\delta U_j$$

Po enačbi 33.1 moremo j-ti rezini prirediti upornost δR_j s kvocientom $\delta U_j/I$. Celotna moč v prevodniku je potem vsota:

$$P = I \sum_{j=1}^{m} \delta U_j = I^2 \sum_{j=1}^{m} \delta R_j$$

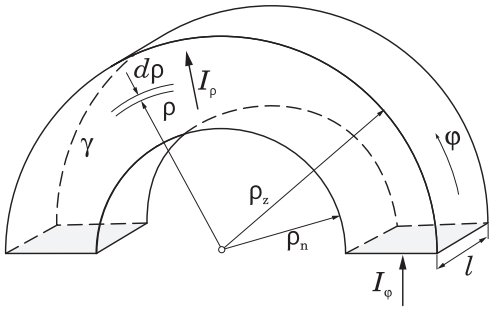
V limiti, ko gre število ekvipotencialk oz. zaporednih rezin proti neskončnosti, debelina slednjih pa proti nič, dobimo za celotno moč spet izraz 33.2 ($P = UI$), po Ohmovem zakonu pa še: $P = GU^2 = RI^2$. Celotna upornost se v tej limiti kaže kot integral zaporednih diferencialnih upornosti rezin vzdolž toka,

$$R = \frac{P}{I^2} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \delta R_j = \int_{\text{po rezinah}} dR$$

V primeru nelinearnega upora moremo razmislek o celotni moči ponovno graditi na močeh v pretočnih cevkah ali na močeh v rezinah med ekvipotencialkami in obakrat dobimo za P produkt UI, ki ga moremo izraziti tudi kot $G_\mathrm{s}U^2 = R_\mathrm{s}I^2$. Pri nelinearnem elementu z (U, I) karakteristiko iz slike 33.7 bi v točki T_0 za izgubno moč P_0 dobili U_0I_0, kar ustreza "ploščini" pravokotnika s stranicama U_0 in I_0.

Zgled 33.3

Za polkrožno oblikovan prevodnik s prevodnostjo γ izračunajmo upornost (prevodnost) za tok v radialni in za tok v krožni smeri; slika 33.8.



Slika 33.8: Polkrožni uporovni segment.

1) Radialna smer toka (I_ρ). Pri tem razumemo, da teče tok skozi polkrožne plasti s prerezi $\pi\rho l$ in debelinami $d\rho$. Tokovna gostota ob notranjem radiju je $I_\rho/\pi\rho_\mathrm{n}l$, ob zunanjem radiju je $I_\rho/\pi\rho_\mathrm{z}l$, na splošnem radiju pa je $I_\rho/\pi\rho l$. Diferencial napetosti dU_ρ na splošni plasti je $(I_\rho/\pi\rho l)(d\rho/\gamma)$ in diferencialna upornost dR_ρ te plasti je $dU_\rho/I_\rho = d\rho/\pi\gamma l\rho$. Ker si te plasti slede zaporedno, bo celotna upornost integral,

$$R_\rho = \int_{\rho_\mathrm{n}}^{\rho_\mathrm{z}} \frac{d\rho}{\pi\gamma l\rho} = \frac{\ln(\rho_\mathrm{z}/\rho_\mathrm{n})}{\pi\gamma l}$$

2) Krožna smer toka (I_φ). Če privzamemo, da je vstopna ploskev na potencialu V_1, izstopna pa na potencialu V_2 ($V_1 - V_2 = U$), potem bosta $\mathbf{J}$ in $\mathbf{E}$ v krožni (φ) smeri. Na notranjem radiju bo J_φ enak $\gamma U/\pi\rho_\mathrm{n}$, na zunanjem bo $\gamma U/\pi\rho_\mathrm{z}$ in nekje vmes bo enak $\gamma U/\pi\rho$. Diferencial toka dI_φ vzdolž polkrožne rezine bo enak $(\gamma U/\pi\rho)ld\rho$. Te polkrožne rezine so za krožni tok nanizane vzporedno; njihova diferencialna prevodnost dG_φ je $dI_\varphi/U = \gamma ld\rho/\pi\rho$. Celotna prevodnost podkve v krožni smeri bo integral,

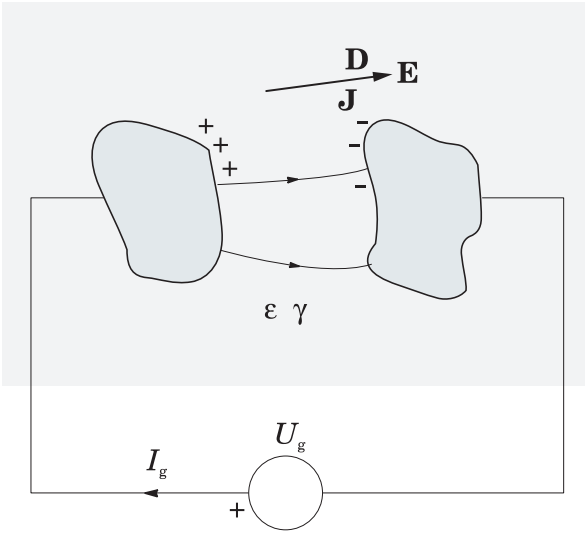
$$G_\varphi = \int_{\rho_\mathrm{n}}^{\rho_\mathrm{z}} \frac{\gamma l d\rho}{\pi\rho} = \frac{\gamma l}{\pi} \ln(\rho_\mathrm{z}/\rho_\mathrm{n})$$

in upornost R_φ bo enaka $\pi/\gamma l \ln(\rho_\mathrm{z}/\rho_\mathrm{n})$.

34. Dualnost električnega in tokovnega polja

Pri računanju upornosti (prevodnosti) prevodnih odsekov smo – vsaj na tem matematičnem nivoju – sila omejeni, tako da si niti najmanj ne moremo privoščiti izračuna upornosti poljubno oblikovane uporovne mase iz slike 33.1. V posebnih primerih, kot sta npr. računanje izolacijske upornosti in računanje ozemljitvenih upornosti ozemljil, si moremo v dobršni meri pomagati z dualnostjo med električnim in tokovnim poljem.

Vzemimo kondenzator (dve prevodni telesi), ki je priključen na vir enosmerne napetosti U_g. Vmesni prostor naj je homogen in linearen, z dielektričnostjo ε in izolacijsko prevodnostjo γ; slika 34.1. Ker pa je prevodnost teles veliko večja od izolacijske prevodnosti



Slika 34.1: K dualnosti **D** in **J** polja.

izolatorja, bodo razmere ob površinah prevodnikov identične elektrostatičnim; površini teles bosta ekvipotencialki in polje **E** bo v izolatorju porazdeljeno po zakonitostih elektrostatičnega polja. Zaradi linearnosti izolatorja bosta pretočni polji vektorjev **D** in **J** povsem dualni: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ in $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ oz. $\mathbf{J} = (\gamma/\varepsilon)\mathbf{D}$. Tudi pretočne cevke, s katerimi bi upodabljali obe pretočni polji, bi se povsem ujemale. Če je električni pretok vektorja **D** v določeni cevki enak $\delta\phi_e$, bi bil električni tok vektorja **J** v tej cevki enak $\delta I = (\gamma/\varepsilon)\delta\phi_e$. Ko bi sešteli električne pretoke v vseh cevkah, bi dobili celoten električni pretok ϕ_e med telesoma, in ko bi sešteli električne toke v vseh cevkah, bi dobili izolacijski tok I skozi dielektrik. Med obema pretokoma bi spet veljala zveza: $I = (\gamma/\varepsilon)\phi_e$. Pri označeni polariteti generatorja bi bil I enak toku generatorja I_g, pretok ϕ_e pa količini elektrine Q na levem telesu. Zvezo bi dalje pisali: $I_g = (\gamma/\varepsilon)Q$. Ker pa je $Q = CU_g$, C je kapacitivnost kondenzatorja, in je $I_g = GU_g$ (G je izgubna prevodnost izolacije), bi po krajšanju z U_g dobili identiteto

$$\boxed{\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}} \tag{34.1}$$

ki podaja zvezo med kapacitivnostjo in izgubno prevodnostjo kondenzatorja s homogenim dielektrikom. Uporabnost zveze je preprosta: če za nek kondenzator poznamo izraz za kapacitivnost, ki se v linearnih razmerah izraža v obliki $C = \varepsilon k$, potem dobimo izgubno

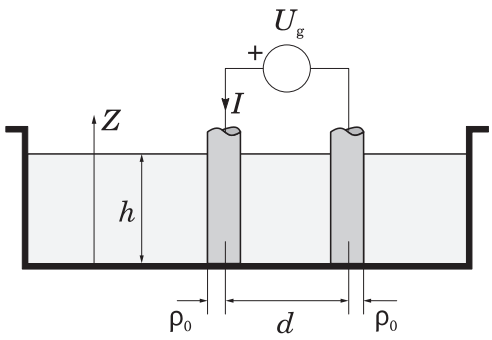
prevodnost tako, da v tej enačbi zamenjamo ε z γ ($G = \gamma k$), pri tem pa je faktor k pogojen le še z geometrijo kondenzatorja.

Zgled 34.1

Kapacitivnost koaksialnega kabla na tekoči meter je $2\pi\varepsilon/\ln(\rho_z/\rho_n)$. Če uveljavimo zvezo 34.1, je izgubna prevodnost na tekoči meter tega kabla enaka $2\pi\gamma/\ln(\rho_z/\rho_n)$; $k = 2\pi/\ln(\rho_z/\rho_n)$ – zgled 33.2.

Zgled 34.2

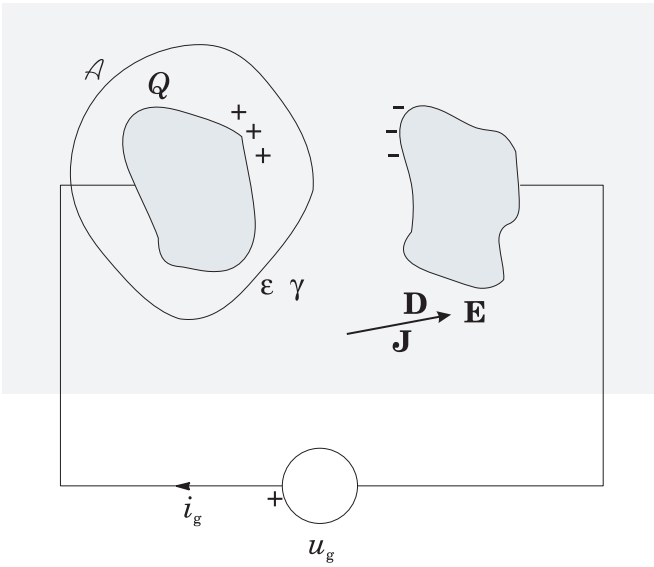
V razsežno plastično kad nalijemo vode ($\gamma = 10^{-3}$ S/m) do višine $h = 10$ cm in vanjo potopimo dve kovinski valjasti elektrodi polmera $\rho_0 = 5$ mm na medosni razdalji $d = 26$ mm, ki ju priključimo na vir napetosti $U_g = 200$ V; slika 34.2. Električni



Slika 34.2: Elektrodno segrevanje tekočine.

tok med elektrodama bo tekel izključno skozi vodo in bo ujet med gladino in dnom posode. Zaradi navpične postavitve elektrod bo tokovna gostota v vodi neodvisna od koordinate z. Vektor gostote $\mathbf{J}$ električnega toka skozi vodo bo zato povsem identično porazdeljen, kot je porazdeljen vektor $\mathbf{D}$ v okolici zračnega dvovoda (slika 18.15). Ker pa je kapacitivnost (c) zračnega dvovoda na dolžinski meter enaka $\pi\varepsilon/\ln((d/2 + \sqrt{(d/2)^2 - \rho_0^2})/\rho_0)$, bo po enačbi 34.1 prevodnost (G) vode med elektrodama takšnale: $G = (c\gamma/\varepsilon)h$ oz. $G = \pi\gamma h/\ln((d/2 + \sqrt{(d/2)^2 - \rho_0^2})/\rho_0)$. Pri danih podatkih bo $G = 195$ μS. Tok (I) skozi vodo bo $GU_g = 39$ mA, toplotne izgube P v vodi pa bodo $GU^2 = 7.8$ W. Izgubna moč je sicer majhna, če pa v vodo dodamo ščepec soli, bodo k boljši vodljivosti vode pripomogli še ioni raztopljene soli. Pri segrevanju morske vode ($\gamma \simeq 3$ S/m) bi bile izgube že nekaj deset kW (23.4 kW).

Nadomestno vezje realnega kondenzatorja. V elektrostatiki smo razmere na kondenzatorju opredelili z elektrinsko-napetostno relacijo; v časovno konstantnem tokovnem polju pa smo temu pridružili še njegov izgubni (izolacijski) tok. To z drugimi besedami tudi pomeni, da realen kondenzator ni le kondenzator, marveč tudi upor hkrati. Ponovimo sliko 34.1 in privzemimo, da napetostni vir ni časovno konstanten ($U_g \to u_g$); slika 34.3.



Slika 34.3: Realen kondenzator ni le "čisti" kondenzator.

Za sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ moremo zakon o ohranitvi elektrine pisati kot

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dQ}{dt}$$

Tok elektrin, ki pretakajo ploskev, je sestavljen iz toka i_g v dovodu (ta tok vstopa) in izolacijskega toka $i_{\text{izol.}}$ (ta tok izstopa). Sklenjen integral bo dal tole:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = i_{\text{izol.}} - i_g \qquad \Rightarrow \qquad i_{\text{izol.}} - i_g = -\frac{dQ}{dt}$$

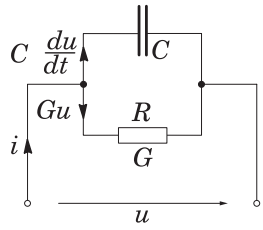
Po Ohmovem zakonu moremo izolacijski tok pisati kot Gu_g, elektrino na kondenzatorju pa kot Cu_g. Izhodiščna enačba je: $Cdu_g/dt + Gu_g = i_g$. Ker pa je u_g hkrati tudi napetost u na kondenzatorju, in je i_g obenem tudi skupen tok i v realen kondenzator, lahko enačbo zapišemo tudi kot

$$C\frac{du}{dt} + Gu = i$$

Ta govori, da je skupen tok kondenzatorja sestavljen iz toka elektrenja idealnega (čistega) kondenzatorja (Cdu/dt - zgled 30.2) ter izgubnega toka (Gu). V tem duhu moremo realnemu kondenzatorju "prirediti" ekvivalentno ali nadomestno RC vezje koncetriranih elementov; slika 34.4.

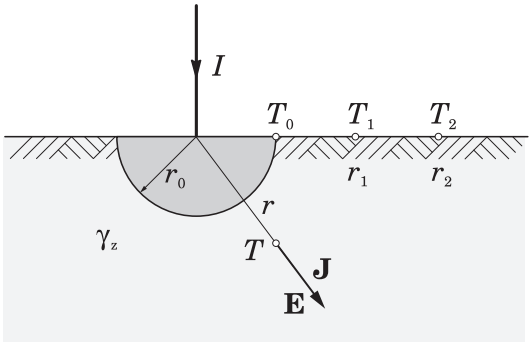
V primerih, ko je realen kondenzator (kot element) vključen v določeno časovno spremenljivo vzbujano električno vezje, moremo izgubni tok večinoma resda zanemariti, kljub vsemu pa ostaja relevantno še vprašanje kvalitete kondenzatorja, ki korelira z odnosom med čistim kondenzatorskim tokom in izgubnim tokom – vendar o tem kasneje (razdelek 69).

Ozemljitvene upornosti (ozemljil). V razdelku 18 smo govorili o ozemljevanju. Tam se nam – z elektrostatičnega vidika – nasploh ni postavljalo še kako pomembno vprašanje



Slika 34.4: Nadomestno vezje kondenzatorja.

kakovosti ozemljitve. Da bi predočili osnovno problematiko ozemljevanja, si za začetek poglejmo (zelo preprosto) polkrožno ozemljilo, ki s tehničnega vidika sicer ni praktično, je pa matematično enostavno in nazorno opisljivo; slika 34.5. Zamislimo si v zemljo zakopano



Slika 34.5: Polkrožno ozemljilo.

kovinsko polkroglo (ozemljilo) ali (še enostavneje) kar polkrogelno lupino. V ozemljilo naj teče tok[1] I. Ta bo v zemljo (s specifično prevodnostjo γ_z) prehajal radialno in enakomerno v vse smeri. V zemlji bo J_r upadal s površino hemisfere ($2\pi r^2$); $J_r(r) = I/2\pi r^2$. Po Ohmovem zakonu bo tej gostoti ustrezala električna poljska jakost $E_r(r) = I/2\pi\gamma_z r^2$. Na površini zemlje se bo med točkama T_1 in T_2 pojavila potencialna diferenca ali t.i. *napetost koraka* (U_{12}):

$$U_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{2\pi\gamma_z} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\gamma_z} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Samo ozemljilo (polkrogla) bo na potencialu $V_{\text{ozemljila}}$ do "neskončne" okolice,

$$V_{\text{ozemljila}} = \int_{T_0}^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{2\pi\gamma_z r_0}$$

S kvocientom potenciala ozemljila in ozemljilnega toka je definirana ozemljitvena upornost ($R_{\text{oz.}}$) ozemljila. Za polkrožno ozemljilo bo

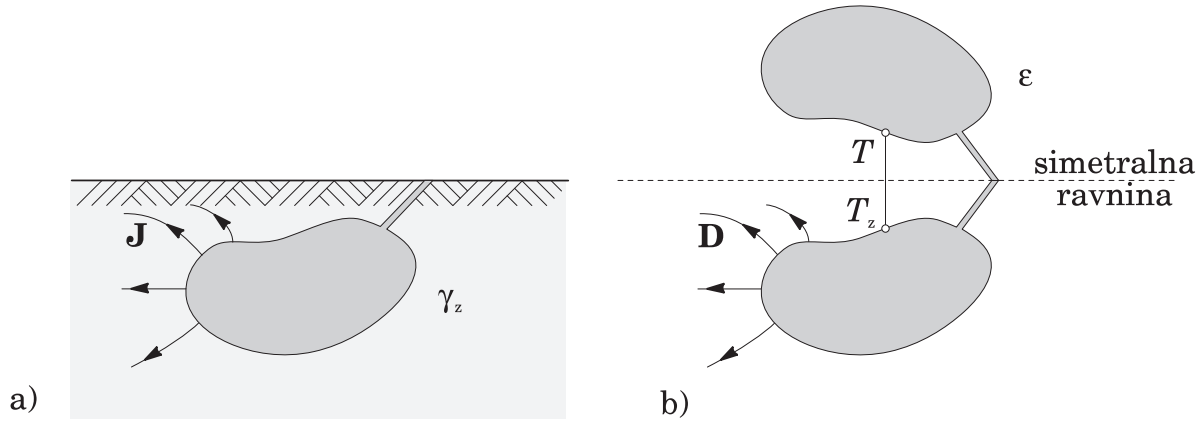
$$R_{\text{oz.}} = \frac{V_{\text{ozemljila}}}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma_z r_0}$$

[1]Ozemljilni toki največkrat niso časovno konstantni. Najpogosteje se ti toki pojavljajo v energetskih sistemih ob raznih okvarah, preklopih in napakah. Oblike teh tokovnih udarov ali sunkov – kot jim rečemo – so tipično aperiodične narave; kratek in strm porast, ki mu sledi počasno usihanje. Kot drug pogost vzrok tokovnih udarov so t.i. atmosferske razelektritve (strela); tok strele doseže največjo vrednost (do nekaj 10 kA) v nekaj μs in nato v nekaj ms usahne; elektrinska množina razelektritve je nekaj coulombov.

Pri $I = 10$ A, $\gamma_z = 3 \cdot 10^{-3}$ S/m in $r_0 = 0.5$ m, $r_1 = 2$ m ter $r_2 = 2.5$ m dobimo: napetost koraka je 53 V, potencial ozemljila je 1060 V in upornost ozemljila je 106 Ω. Pri tolikšnem toku bi bilo takšno ozemljilo – za naprave, ki jih ščitimo (ozemljujemo), in za ljudi v bližini ozemljila – prej dodatna nevarnost, kot pa zaščita. Iz preprostih enačb je razvidno, da bo ozemljevanje kakovostnejše, če bo ozemljitvena upornost čim manjša. To pa dosežemo le na dva načina: i) da si za ozemljevanje izbiramo – če je le mogoče – teren s čim večjo specifično prevodnostjo oz. čim manjšo specifično upornostjo, slednja se giblje od 50 Ωm (močvirnat teren) do 10 000 Ωm (skalnat teren), in ii) da izvedemo ozemljilo s čim večjo in s čim bolj razvejano geometrijo. Kot bolj kakovostna se smatrajo ozemljila, ki imajo ozemljitveno upornost manjšo od 5 Ω; ozemljitvena upornost 1 Ω je lahko včasih že huda zahteva.

V luči analogije med električnim in tokovnim poljem moremo ozemljitveno upornost polkrožnega ozemljila dobiti tudi takole. Kapacitivnost krogle do neskončne okolice smo v elektrostatiki izvedli in dobili: $C = 4\pi\varepsilon r_0$. Če kroglo miselno razdelimo na hemisferi, dobimo dva vzporedna kondenzatorja, ki imata kapacitivnosti (enaki) $C_{1/2} = C/2 = 2\pi\varepsilon r_0$. Po dualni zvezi (enačba 34.1) pripada potemtakem polkrožnemu ozemljilu ozemljitvena upornost $R_{\text{oz.}} = \varepsilon/\gamma_z C_{1/2} = 1/2\pi\gamma_z r_0$ – kar se ujema tudi z našim izvajanjem.

Razširimo sedaj metodo podobnosti na splošno ozemljilo (prevodno kovinsko telo), ki ga zakopljemo v zemljo. Vzemimo poljubno oblikovano prevodno telo, ki ima izvodilo do površine zemlje; slika 34.6, skica a). Ozemljilu na levi strani priredimo dualen elektro-



Slika 34.6: Ozemljilu je prirejen problem naelektritve simetričnega telesa.

statičen problem naelektrenega simetričnega prevodnega telesa v homogenem dielektriku; skica b). Elektrina Q na simetričnem prevodnem telesu bo gotovo porazdeljena simetrično: $\sigma(T_z) = \sigma(T)$. Na vsakem od teles bo elektrina polovična: $Q_{1/2} = Q/2$. Simetrično prevodno telo bo imelo določeno kapacitivnost C do "neskončne" okolice, vsaka polovica pa ustrezno polovično kapacitivnost $C_{1/2} = C/2$. Zaradi simetrično porazdeljene elektrine bosta vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ na simetralni ravnini tangencialna, kar pomeni, da bo ta ravnina ograja določenih pretočnih cevk. Povsem identična ugotovitev velja tudi za tokovno polje na skici a). Zemlja je veliko boljši prevodnik kot zrak nad njo, zato te meje tokovna gostota $\mathbf{J}$ ne bo pretakala, temveč se ji bo le tangencialno približala.

Za tokovno polje ($\mathbf{J}$) v zemlji in za električno polje ($\mathbf{D}$) pod simetralno ravnino veljajo naslednje sorodnosti:

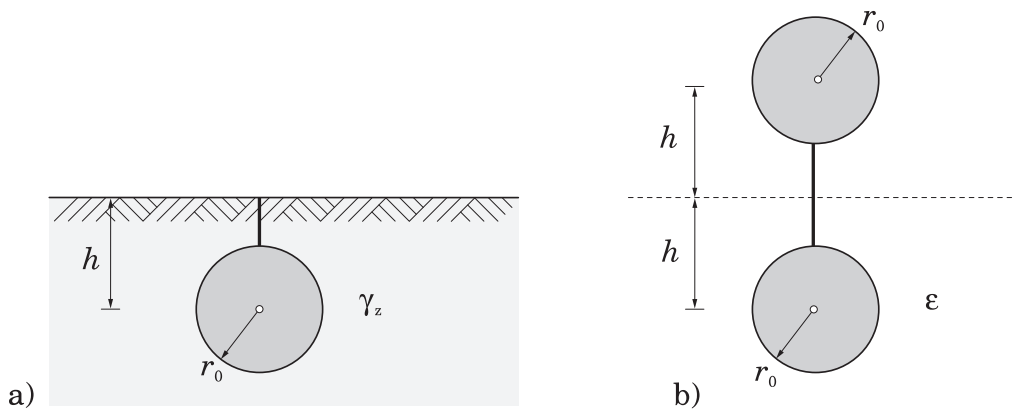
1. za poljubno konturo $\mathcal{L}$ v snovi z γ_z oz. v snovi z ε velja: $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$,
2. površina ozemljila in površina simetričnega telesa sta ekvipotencialki; potencial v neskončnosti je nič,
3. v primeru a) je tokovno polje $\mathbf{J} = \gamma_z \mathbf{E}$, v primeru b) pa je električno polje $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$,
4. na površini zemlje (skica a)) je $J_n = 0$ in na simetralni ravnini (skica b)) je $D_n = 0$.

Iz teh identičnih relacij za tokovno in električno polje sledi očividen sklep: obe polji bosta povsem dualni. Ko elektrostatičen problem rešimo, zamenjamo le še ε z γ_z in dobimo relacije v tokovnem polju; ob enaki zamenjavi dobimo iz kapacitivnosti $C_{1/2}$ tudi $R_{\text{oz.}}^{-1}$ oz.

$$\boxed{R_{\text{oz.}} = \frac{\varepsilon}{\gamma_z C_{1/2}}} \tag{34.2}$$

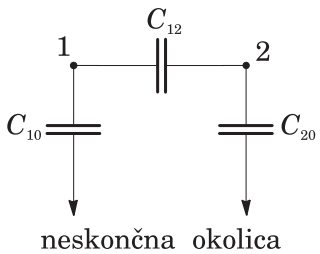
Zgled 34.3

Krogelno ozemljilo; slika 34.7. Zamislimo si, da v zemljo zakopljemo kovinsko kroglo polmera r_0 do globine h. Dualen elektrostatičen problem sta dve galvansko spojeni



Slika 34.7: Krogla v zemlji in dve galvansko povezani krogli v izolatorju.

krogli. Delne kapacitivnosti dveh krogel (iskrišča) smo računali v zgledu 25.7 in dobili izraze za $C_{10} = C_{20}$ in C_{12} ter tudi ustrezno nadomestno kondenzatorsko vezje; slika 34.8. Če v nadomestnem vezju spojimo točki 1 in 2, dobimo kapacitivnost obeh

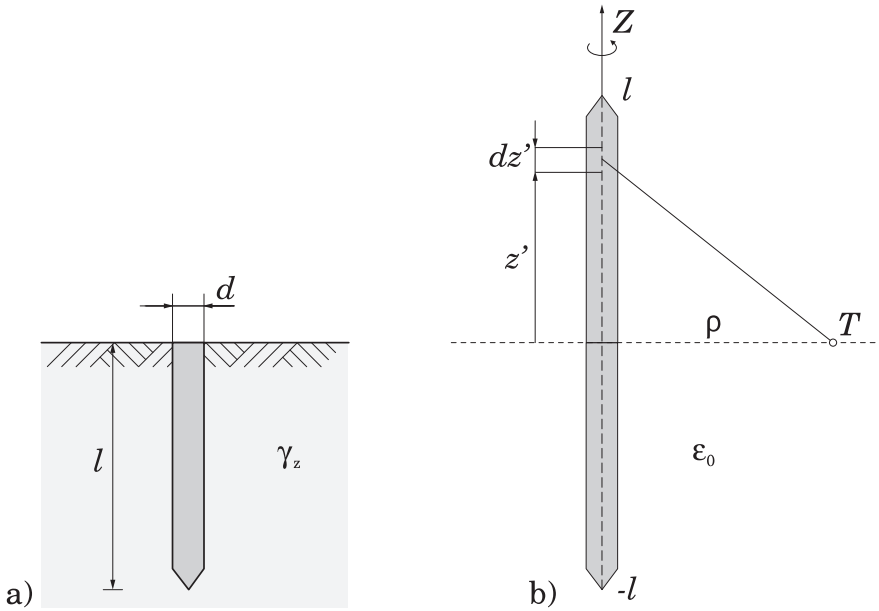


Slika 34.8: Modelno kondenzatorsko vezje dveh krogel.

krogel do neskončne okolice: $C = 2C_{10}$. Kapacitivnost $C_{1/2}$ je dalje kar C_{10}, iz nje pa tudi ozemljitvena upornost krogelnega ozemljila: $R_{\text{oz.}} = \varepsilon/\gamma_{\text{z}} C_{10}$. Če je $r_0 \ll h$, potem je postopek neskončnega zrcaljenja skoraj nepotreben. Za $R_{\text{oz.}}$ dobimo izraz $1/4\pi\gamma_{\text{z}} r_0$.

Zgled 34.4

Paličasto ozemljilo; slika 34.9. V zemljo zabijemo okroglo kovinsko palico ali cev dolžine l in debeline d. Dualen elektrostatičen problem bi bila naelektrena pal-



Slika 34.9: Paličasto ozemljilo in naelektrena palica.

ica dolžine $2l$. Ta primer analitično sicer ni rešljiv, moremo pa si v dobršni meri pomagati z aproksimacijo, da je elektrina v osrednjem delu palice enakomerno porazdeljena, kar pomeni, da efekt izriva elektrine ob krajišči zanemarjamo. Računsko bomo smatrali, da je električno polje v okolici palice takšno kot od naelektrene daljice (Zgled 11.2). V točki T na simetralni ravnini bo (po enačbi 15.2) potencial $V(T) = V(\rho)$ enak integralu prispevkov diferencialnih elektrin $dQ(z') = (Q/2l)\,dz'$,

$$V(\rho) = \frac{Q/2l}{4\pi\varepsilon_0}\, 2\int_0^l \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

Pri substituciji $z' = \rho \sinh\xi$ ($dz' = \rho\cosh\xi\, d\xi$) je

$$V(\rho) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\text{Arsinh}(\frac{l}{\rho}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho}$$

Če "gremo" s točko T na površino ($2\rho = d \ll l$), dobimo za potencial palice tole aproksimacijo:

$$V_{\text{palice}} \doteq \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{4l}{d}$$

za polovično kapacitivnost pa izraz

$$C_{1/2} \doteq \frac{Q/2}{V_{\text{palice}}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(4l/d)}$$

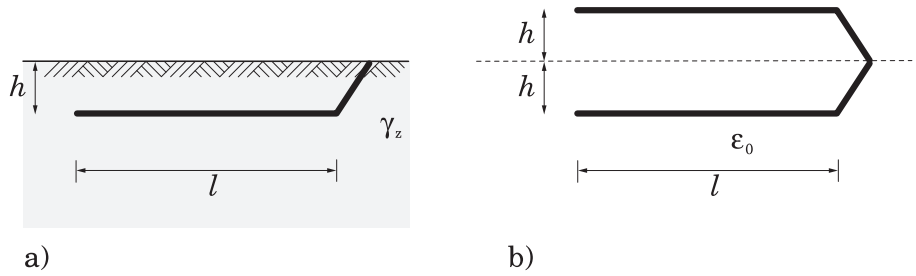
Po enačbi 34.2 bo

$$R_{\text{oz.}} \doteq \frac{\ln(4l/d)}{2\pi\gamma_{\text{z}} l}$$

Pri $l = 1$ m, $d = 2$ cm in $\gamma_{\text{z}} = 5$ mS/m je $R_{\text{oz.}} = 168\ \Omega$.

Zgled 34.5

Tračno ozemljilo; slika 34.10. Pri tračnem ozemljilu se valjanec pravokotnega pre-



Slika 34.10: Tračno ozemljilo in naelektrena trakova.

seka S in dolžine l zakoplje v zemljo na globino h. Dualen elektrostatični problem sta dva simetrična trakova. Trakoma bomo priredili ekvivalentni okrogli palici debeline $d = 2\sqrt{S/\pi}$. Če je $d \ll h \ll l$, moremo vezi med trakoma na skici b) zanemariti in dobimo primer dveh vzporednih naelektrenih palic, ki jih bomo rešili s superpozicijo polja dveh naelektrenih daljic. Če uporabimo izraz za potencial ene daljice (v prejšnjem zgledu) in smiselno zamenjamo oznake, dobimo po superponiranju obeh potencialnih prispevkov potencial ene od palic (trakov),

$$V_{\text{traku}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left(\ln\frac{l+\sqrt{l^2+d^2}}{d} + \ln\frac{l+\sqrt{l^2+(4h)^2}}{4h}\right)$$

kjer je Q elektrina na enem traku. Ko upoštevamo relacijo $d \ll h \ll l$, dobimo:

$$V_{\text{traku}} \doteq \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l \ln(l^2/hd)}$$

Polovična kapacitivnost $C_{1/2}$ bo $Q/V_{\text{traku}} = 2\pi\varepsilon_0 l/\ln(l^2/hd)$. S tem bo

$$R_{\text{oz.}} = \frac{\ln(l^2/hd)}{2\pi\gamma_{\text{z}} l}$$

Za valjanec 5×25 mm, dolžine $l = 20$ m, ki ga zakopljemo v globino $h = 0.5$ m, dobimo pri $\gamma_{\text{z}} = 5$ mS/m za ozemljitveno upornost 18.7 Ω.

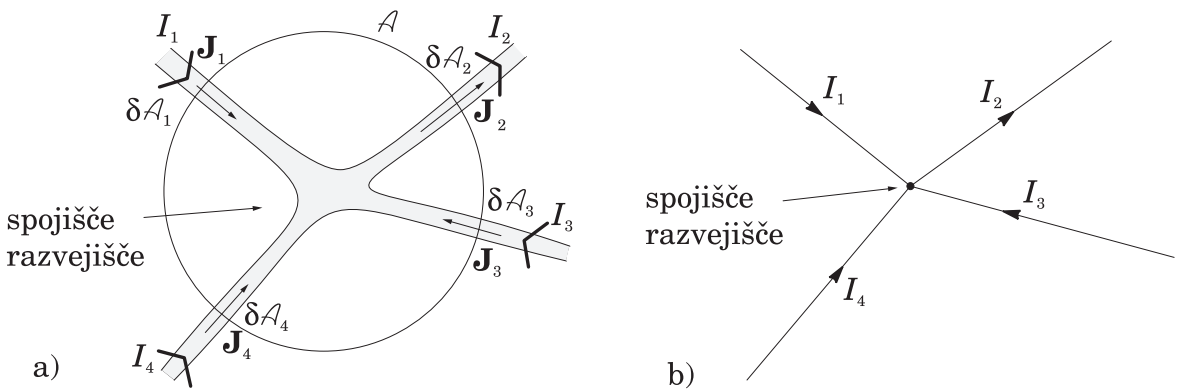
Ozemljitveno upornost moremo še zmanjšati, če radialno razpeljemo več trakov; dobimo zvezdasto ozemljilo, pri tem pa se ozemljitvena upornost ne manjša obratnosorazmerno s številom trakov, temveč limitira proti ozemljitveni upornosti krožne

plošče. Ocena upornosti takšnega ozemljila je nekoliko zahtevnejša, zato podajamo le rezultat, ki je približen: $R_{\text{oz.}} = 1/4\gamma_{\text{z}}\rho_{\text{plošče}}$; $\rho_{\text{plošče}}$ je radij plošče. Enačba je uporabna tudi za kvadratno ali pravokotno mrežasto ozemljilo, ki je izvedeno z vzdolžno in povprek prepredenimi trakovi. Če je mreža razsežnosti 20×20 m in so trakovi razmeroma na gosto (na 1 m), je radij ekvivalentne plošče 11.3 m; $R_{\text{oz.}}$ bo pri $\gamma_{\text{z}} = 5$ mS/m enaka 4.4 Ω.

35. Kirchhoffova zakona

V elektrotehniki se s tokovnim poljem najpogosteje srečujemo v t.i. *električnih vezjih.* V mislih imamo enega ali več enosmernih virov (generatorjev), ki jih povežemo med seboj z razvejano mrežo prevodnikov. V razdelku 32 smo ugotovili, da smemo tokovno polje v prevodnikih smatrati kot prednostno in da moremo posameznim prevodnim odsekom prirediti ekvivalentne koncentrirane elemente, na katerih utegnemo napetostne, tokovne in močnostne razmere opredeliti na nivoju integralnih odnosov. V nadaljevanju bomo poskušali v tem "slogu" preanalizirati neko splošno konfiguracijo mreže razvejanih prevodnikov in enosmernih generatorjev. Pri tem delu se bomo vseskozi opirali na I. in II. Kirchhoffov zakon, ki nista nič drugega kot prirejena zapisa dveh fundamentalnih zakonitosti: prvič, neizvornosti časovno konstantnega tokovnega polja ($\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$), in drugič, potencialnosti električnega polja ($\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$) v časovno konstantnem tokovnem polju.

I. Kirchhoffov zakon. Oglejmo si poljubno razvejišče (spojišče) prevodnikov; slika 35.1. Ob upoštevanju dejstva, da je električni tok gostote $\mathbf{J}$ praktično izključno v no-



Slika 35.1: Spojišče (razvejišče) tokov.

tranjosti prevodnikov, moremo za konfiguracijo spojišča na skici a) pisati brezizvornost enosmernega toka kot vsoto,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\delta\mathcal{A}_i} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{a}_i = 0$$

saj se integracija prevede le na preseke ploskve $\mathcal{A}$ s prevodniki; torej na $\delta\mathcal{A}_1$, $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{A}_3$ in $\delta\mathcal{A}_4$. Ker pa je diferencial ploskve $\mathcal{A}$ usmerjen po dogovoru navzven, bodo sumandi v vsoti pozitivni tam, kjer se smer gostote podpira s smerjo ploskvice ($\mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{a}_i > 0$) in

negativni tam, kjer si ti smeri nasprotujeta ($\mathbf{J}_j \cdot d\mathbf{a}_j < 0$). V našem primeru se pri gostoti $\mathbf{J}_2$ smeri podpirata, drugje pa ne. Za zgornjo vsoto dobimo:

$$\sum_{i=1}^{4} \int_{\delta\mathcal{A}_i} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{a}_i = -I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

Če je I_1 pritekajoč, potem je $(-I_1)$ odtekajoč tok. Dobljeno enačbo moremo zato pisati dalje tudi kot

$$(-I_1) + I_2 + (-I_3) + (-I_4) = 0$$

in reči: vsota vseh odtekajočih tokov iz spojišča (razvejišča) je vedno enaka nič; ali pa jo pišemo kot

$$I_1 + (-I_2) + I_3 + I_4 = 0$$

in rečemo: vsota vseh pritekajočih tokov v spojišče (razvejišče) je enaka nič.

V smislu prehoda (transformacije) z nivoja polja na nivo koncentriranih elementov, bomo skici a) priredili skico b), kjer se bodo *veje* s toki I_1, I_2, I_3 in I_4 spajale (razvejale) v stičišču, *spojišču* (razvejišču).

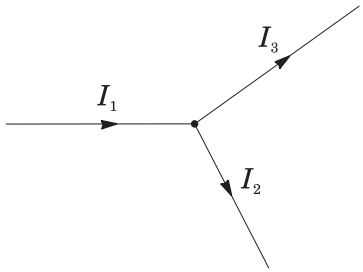
Za splošno spojišče n-vej bomo t.i. *I. Kirchhoffov zakon* zapisali takole:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (\pm) I_i = 0} \tag{35.1}$$

Predznak (+) bo pri tokih, ki odtekajo, in predznak (−) bo pri tokih, ki pritekajo.

Zgled 35.1

Dano je razvejišče treh vej; slika 35.2. Izmerili smo toka I_1 in I_2: $I_1 = 3$ A, $I_2 = 4$ A.



Slika 35.2: Spojišče treh tokov.

Če zapišemo vse tri toke kot izstopajoče, dobimo (po enačbi 35.1) tole:

$$(-I_1) + I_2 + I_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_3 = -I_1 + I_2 = -1 \text{ A}$$

Tok I_3 je označen kot izstopajoč in ima vrednost −1 A, kar pomeni, da dejanski tok te veje teče v spojišče.

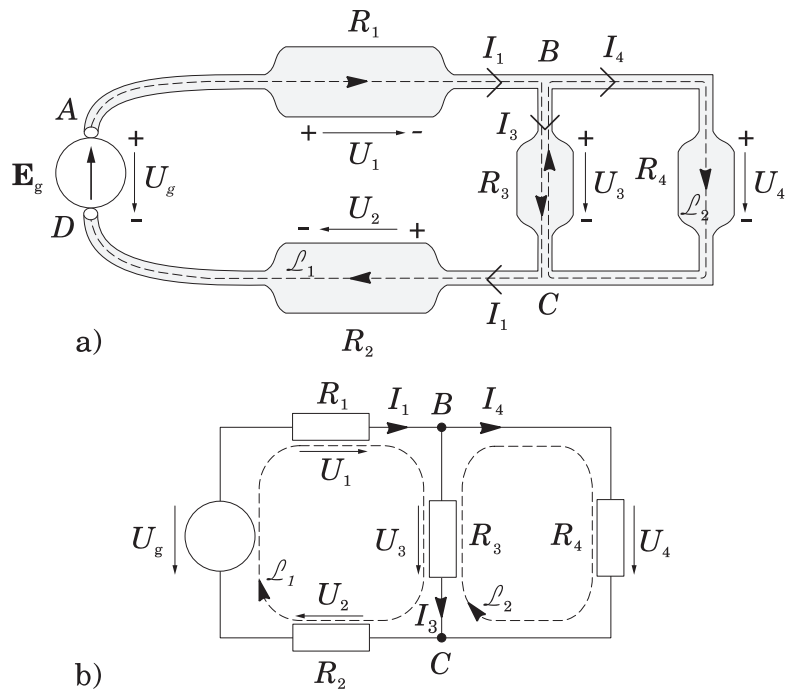
Že ob tem zgledu si zapomnimo naslednje. Ko bomo reševali kompleksnejša električna vezja, običajo ne bomo vnaprej poznali dejanskih smeri tokov; njih smeri si bomo v

začetku poljubno izbrali, račun pa bo na koncu (glede na predznak) dokončno opredelil njihove dejanske smeri.

II. Kirchhoffov zakon. Ta zakon izhaja iz potencialnosti električnega polja v časovno konstantnem tokovnem polju. Za vektor $\mathbf{E}$ mora – za katerokoli konturo $\mathcal{L}$ – vedno veljati enačba

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Vzemimo preprosto prevodniško mrežo z enim napetostnim generatorjem; slika 35.3, skica a). Glede na ugotovitve iz razdelka 32 je smiselno, da sklenjene konture $\mathcal{L}$ izbiramo skozi



Slika 35.3: Tokovna struktura in modelno električno vezje.

območja z dominantnim tokovnim poljem. Kot dve takšni sta na sliki vrisani konturi $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$. Napetostni vir bomo zaenkrat smatrali še kot idealen. V smislu razširjenega Ohmovega zakona ($\mathbf{J} = \gamma_{\mathrm{g}}(\mathbf{E}_{\mathrm{g}} + \mathbf{E})$) bomo razumeli, da je specifična upornost generatorjeve substance zelo visoka ($\gamma_{\mathrm{g}} \to \infty$), kar pomeni, da je – pri omejenih tokovnih gostotah – vsota $\mathbf{E}_{\mathrm{g}} + \mathbf{E}$ v generatorjevi substanci enaka nič; tam polje $\mathbf{E}$ ustreza elektrostatičnemu polju razdvojenih nabojev med sponkama generatorja.

Poglejmo, v kaj se reducira zapis krivuljnega integrala po konturi (*zanki*) $\mathcal{L}_1$. Integracija polja $\mathbf{E}$ od (+) sponke generatorja (A) do zgornjega razvejišča (B) da napetost U_1, od zgornjega (B) do spodnjega razvejišča (C) da integral napetost U_3, od spodnjega razvejišča (C) do (−) sponke generatorja (D) da integral napetost U_2, in končno, od (−) sponke (D) – po generatorju – do (+) sponke (A) da integral vrednost $-U_{\mathrm{g}}$. Pišemo lahko:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\
&= U_{\mathrm{AB}} + U_{\mathrm{BC}} + U_{\mathrm{CD}} - \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} \mathbf{E}_{\mathrm{g}} \cdot d\mathbf{l} = U_1 + U_3 + U_2 - U_{\mathrm{g}} = 0
\end{aligned}$$

Pri integraciji polja $\mathbf{E}$ po konturi (zanki) $\mathcal{L}_2$ dobimo – začenši od spojišča B v desno – za integral od B do C po desni veji napetost U_4, pri integraciji od C do B po srednji veji pa napetost $-U_3$. Pišemo lahko:

$$\oint_{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U_4 - U_3 = 0$$

Tako prvi kot drugi sklenjeni integral moremo enotno pojasniti. Krivuljni integral vektorja električne poljske jakosti po sklenjeni konturi – skozi segmente tokovnega polja – se prevede v vsoto delnih napetosti na teh segmentih v smeri obhoda; v tem smislu zapišemo

$$\begin{aligned} &\text{za} \quad \mathcal{L}_1 \quad : \quad U_1 + U_3 + U_2 + (-U_{\mathrm{g}}) = 0 \quad \text{in} \\ &\text{za} \quad \mathcal{L}_2 \quad : \quad U_4 + (-U_3) = 0 \end{aligned}$$

Dani konfiguraciji tokovnega polja iz skice a) pripada (v tem smislu) na skici b) ustrezno električno vezje koncentriranih elementov. Ko v takšnem vezju izberemo smeri vejnih tokov in njim pripadajoče smeri padcev napetosti na uporih, moremo zgornji napetostni enačbi (za konturi $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$) zapisati povsem direktno.

V splošnem električnem vezju istosmernega toka moremo potemtakem za vsako sklenjeno konturo $\mathcal{L}$, ki v smeri obhoda zajame m delnih napetosti, napisati t.i. *II. Kirchhoffov zakon* kot

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} (\pm) U_j = 0} \tag{35.2}$$

pri tem pa je smer obhoda poljubna – v desno ali v levo. Predznak (+) imajo napetosti, katerih smeri se ujemajo s smerjo obhoda, v nasprotnem imajo predznak (−).

Zgled 35.2

Vzemimo konfiguracijo enosmernega vezja s slike 35.3. Naj je napetost $U_{\mathrm{g}} = 110$ V, vsi upori so linearni z vrednostmi: $R_1 = R_2 = 2.5\Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$ in $R_4 = 40\ \Omega$. Za spojišče B zapišemo tokovno enačbo (35.1),

$$\mathrm{B} \quad : \quad -I_1 + I_3 + I_4 = 0$$

Do predznaka enako enačbo bi dobili za spojišče C ($I_1 - I_3 - I_4 = 0$), zato si z njo nimamo kaj pomagati. Zapišimo še napetostni enačbi za označeni zanki $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$ ter upoštevajmo linearnost uporov: $U_1 = R_1 I_1 = 2.5 I_1$, $U_2 = R_2 I_1 = 2.5 I_1$, $U_3 = R_3 I_3 = 20 I_3$ in $U_4 = 40 I_4$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \quad &: \quad 5I_1 + 20I_3 - 110 = 0 \\ \mathcal{L}_2 \quad &: \quad -20I_3 + 40I_4 = 0 \end{aligned}$$

Če iz tokovne enačbe izrazimo I_1 in ga vstavimo v zančno enačbo pod $\mathcal{L}_1$, dobimo dve enačbi z neznankama I_3 in I_4:

$$\begin{aligned} 25I_3 + 5I_4 &= 110 \\ -20I_3 + 40I_4 &= 0 \end{aligned}$$

Iz obeh enačb izluščimo brez težav rešitvi za I_3 in I_4: $I_3 = 4$ A, $I_4 = 2$ A, iz enačbe pod B pa še $I_1 = 6$ A. Padci napetosti na uporih so: $U_1 = 15$ V, $U_2 = 15$ V, $U_3 = 80$ V in $U_4 = 80$ V; skladnost rešitev z enačbami pod B, $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$ je očitna.

Glede na to, da električni pojavi niso pojavi med telesi na daljavo, ampak se kažejo preko medija (snovi), ki zapolnjuje prostor med telesi, moramo sklepati, da mora biti ta vmesna snov v stanju neke vrste napetosti, stresa... Vzdolž silnic obstaja neka napetost, pravokotno nanjo pa tlak... Zdaj lahko storimo korak naprej in oblikujemo idejo o električni polarizaciji dielektričnega medija... Elementarni del telesa je polariziran, ko ima na dveh konceh enako velike, a nasprotno polarizirane lastnosti... Lahko si mislimo, da električna polarizacija obstoji v tem, kar lahko imenujemo električni odmik. Električni odmik je rezultat elektromotorne jakosti. Ko elektromotorna sila deluje na prevodno snov, v njej povzroči tok; če pa je medij izolator ali dielektrik, tok ne more (več) teči skozi snov, toda znotraj medija je elektrina "odmaknjena" v smeri elektromotorne jakosti. Stopnja tega odmika pa je odvisna od elektromotorne jakosti... Količina oz. velikost odmika je merljiva s količino elektrine, ki prečka enoto površine v času, ko odmik naraste z nič na neko trenutno vrednost... Analogija med učinkom elektromotorne jakosti, ki povzroča električni odmik, in običajno mehansko silo, ki povzroča odmik oz. raztezek telesa, je tako očitna, da sem si drznil razmerje med elektromotorno jakostjo in pripadajočim odmikom imenovati koeficient električne elastičnosti medija... Električni odmik je številčno enak jakosti, pomnoženi s $K/4\pi$, kjer je K specifična induktivna kapaciteta dielektrika.

Maxwell

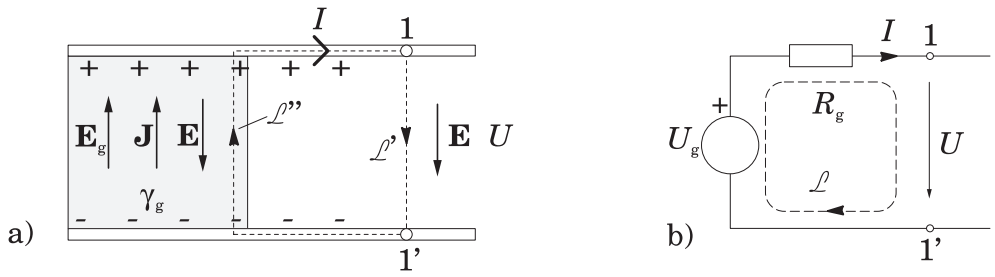
IV. POGLAVJE

Enosmerna električna vezja

36. Elementi enosmernih električnih vezij

Elemente enosmernih električnih vezij delimo na aktivne in pasivne. Med aktivne sodijo neodvisni in odvisni napetostni in tokovni viri, med pasivne pa spadajo uporovni elementi.

Napetostni vir. Ta vir smo že večkrat srečali, vendar bi o njem, kot gradniku enosmernih vezij, kazalo spregovoriti še nekaj besed. Pri elektrenju kondenzatorja(ev) v elektrostatiki nas nasploh ni zanimal tok skozi vir. Zadovoljili smo se s končnim stanjem, ko se elektrenje zaključi in je napetost na priključenem kondenzatorskem vezju enaka napetosti vira. Kasneje, v okviru Joulovega zakona, smo videli, da se pri stalni obremenjenosti vira sprošča v njem samem določena izgubna moč, ki je posledica dejstva, da je tudi generatorjeva substanca iz snovi s končno specifično prevodnostjo γ_g. Iz te ugotovitve neposredno sledi, da moremo napetostnemu viru prirediti določeno upornost, ki bo pokazatelj izgubnosti realnega napetostnega vira. Razmere si oglejmo na poenostavljeni shemi, ki jo ponazarja skica a) na sliki 36.1. Preostali del tokokroga, desno od sponke vira, skozi katerega se tok generatorja zaključuje, nas ta trenutek ne bo zanimal, zato ga tudi ne bomo risali.



Slika 36.1: Obremenjen napetostni vir in modelno vezje koncentriranih elementov.

Za krivuljni integral vektorja električne poljske jakosti $\mathbf{E}$ – po katerikoli sklenjeni poti – vemo, da je v časovno konstantnih razmerah vedno enak nič. Kot sklenjeno pot si izberimo konturo $\mathcal{L}$, ki je po skici a) sestavljena iz dveh delov: iz poti $\mathcal{L}'$ med sponkama 1 in 1' (po zunanjosti vira) in iz poti $\mathcal{L}''$ med sponkama 1' in 1 (po notranjosti vira). Krivuljno integracijo vektorja $\mathbf{E}$ bomo dalje pisali kot vsoto,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{1\,\mathcal{L}'\,1'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{1'\,\mathcal{L}''\,1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Prvi integral je napetost U med sponkama 1 in 1'. V drugem integralu izrazimo $\mathbf{E}$ po razširjenem Ohmovem zakonu z razliko $(\mathbf{J}/\gamma_\mathrm{g}) - \mathbf{E}_\mathrm{g}$; zanj dobimo:

$$\int_{1'\,\mathcal{L}''\,1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{1'\,\mathcal{L}''\,1} \frac{\mathbf{J}}{\gamma_\mathrm{g}}\cdot d\mathbf{l} - \int_{1'\,\mathcal{L}''\,1} \mathbf{E}_\mathrm{g}\cdot d\mathbf{l}$$

Integral gonilne poljske jakosti $\mathbf{E}_\mathrm{g}$ že poznamo: enak je napetosti U_g. Pri prvi integraciji pa (zaradi enostavnosti) vzemimo, da je območje substance generatorja kar kvader z višino l_g in prerezom S_g, kjer bodi tokovno polje $\mathbf{J}$ homogeno po prerezu. S to poenostavitvijo moremo integral preprosto izraziti,

$$\int_{1'\,\mathcal{L}''\,1} \frac{\mathbf{J}}{\gamma_\mathrm{g}}\cdot d\mathbf{l} = \frac{Jl_\mathrm{g}}{\gamma_\mathrm{g}} = \frac{l_\mathrm{g}}{\gamma_\mathrm{g}S_\mathrm{g}}I$$

in ga razumeti kot padec napetosti na višini kvadra, ki ima upornost $R_\mathrm{g} = l_\mathrm{g}/\gamma_\mathrm{g}S_\mathrm{g}$. Končno nam preostane le še združitev sumandov, da je

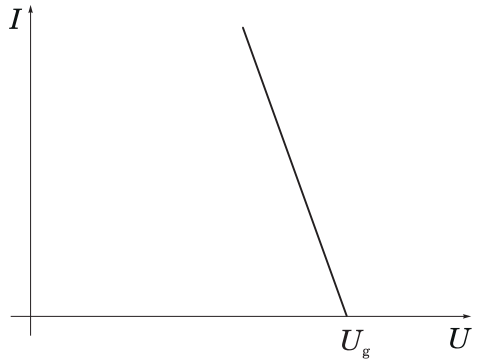
$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = U + R_\mathrm{g}I - U_\mathrm{g} = 0$$

Če sedaj enačbo za vir iz skice a) preberemo v duhu II. Kirchhoffovega zakona (vsota vseh na napetosti v smeri obhoda po sklenjeni zanki je nič), potem moremo tej enačbi oz. takšnemu viru prirediti ustrezno ekvivalentno ali nadomestno električno vezje, kot ga kaže skica b). Napetostno enačbo – levo od sponk – pišemo dalje v obliki

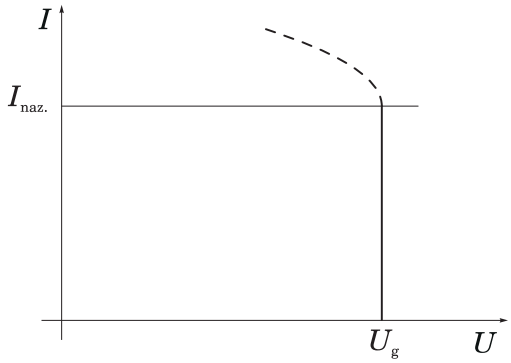
$$\boxed{U = U_\mathrm{g} - R_\mathrm{g}I} \tag{36.1}$$

To je tudi t.i. enačba realnega *napetostnega vira*. Količini U in I sta t.i. izhodni količini vira, obenem pa sta tudi vhodni količini v električno vezje, ki je na ta vir priključeno. Iz enačbe je razvidno, da je U_g napetost med sponkama vira, ko je ta neobremenjen ($I = 0$). Rečemo tudi: U_g je *napetost odprtih sponk*. Upornost R_g je *notranja (ali nadomestna) upornost generatorja*, ki ustreza upornosti generatorjevega dela tokokroga med sponkama 1 in 1', ko bi bila gonilna poljska jakost $\mathbf{E}_\mathrm{g}$ deaktivirana oz., ko bi bila $U_\mathrm{g} = 0$. Seveda pa te upornosti praviloma ne računamo, kot smo to napravili pri poenostavljeni shemi generatorjeve substance, ampak jo za določen vir posredno izmerimo. Če je notranja upornost konstantna (neodvisna od obremenjenosti vira), potem pravimo, da je vir *lienaren*, v nasprotnem pa, da je *nelinearen*.

Enačbo napetostnega vira podajamo po potrebi tudi v (U, I) diagramu. Enačbi 36.1 pripada (pri $R_\mathrm{g} = konst.$) v diagramu odsek premice v prvem kvadrantu; slika 36.2. Če iz enačbe izrazimo tok, $I = U_\mathrm{g}/R_\mathrm{g} - U/R_\mathrm{g} = G_\mathrm{g}U_\mathrm{g} - G_\mathrm{g}U$, potem naklonu premice ustreza negativni odvod, $G_\mathrm{g} = -dI/dU$, kjer je G_g nadomestna prevodnost vira med sponkama 1 in 1'. O dobrem napetostnem viru govorimo takrat, ko je napetost med sponkama kar najmanj odvisna od toka, torej, ko je premica kar najbolj strma: $G_\mathrm{g} \to \infty$, $R_\mathrm{g} \to 0$. Za napetostni vir pravimo, da je idealen, če je notranja upornost enaka nič. Temu idealu se izredno približajo stabilizirani usmerniki, ki s primernim elektronskim vezjem zagotavljajo konstantno napetost na sponkah do določenega nazivnega toka ($I_\mathrm{naz.}$), pri večjih tokih (obremenitvah) pa se napetost med sponkama običajno začne hitro "sesedati"; slika



Slika 36.2: Karakteristika linearnega napetostnega vira.



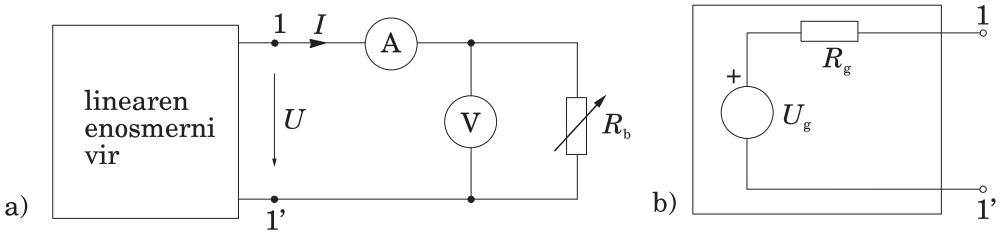
Slika 36.3: Karakteristika stabiliziranega napetostnega vira.

36.3. Napetostno-tokovno analizo napetostnega vira lahko zaključimo z ugotovitvijo: realnemu napetostnemu viru moremo prirediti ekvivalentno ali nadomestno električno vezje, ki ga oblikuje zaporedna vezava idealnega napetostnega vira z napetostjo U_g in upornika upornosti R_g; če je vir linearen, mu v (U, I) diagramu pripada premica, v nasprotnem pa ga določa nelinearna (U, I) odvisnost. Elementa nadomestnega vezja (generator in upor) sta formalno ločeno narisana, dejansko – fizično – sta namreč nedeljiva.

Zgled 36.1

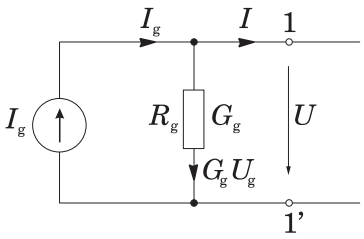
Realnemu, linearnemu napetostnemu viru, slika 36.4, skica a), želimo določiti ekvivalentno električno vezje, skica b). V ta namen na vir priključimo spremenjiv upor R_b, na katerem merimo napetost z V-metrom in tok z A-metrom. Naj ima A-meter zanemarljivo upornost, V-meter pa zanemarljivo prevodnost. Pri upornosti (R_b1) smo na sponkah namerili: $U_1 = 95$ V in $I_1 = 10$ A, pri spremenjeni upornosti (R_b2) pa smo izmerili: $U_2 = 90$ V, $I_2 = 20$ A. Če obe meritvi vstavimo v enačbo 36.1, dobimo: $U_\mathrm{g} - 10R_\mathrm{g} = 95$ in $U_\mathrm{g} - 20R_\mathrm{g} = 90$. Iz obeh enačb izračunamo nato iskana elementa na skici b), $U_\mathrm{g} = 100$ V in $R_\mathrm{g} = 0.5\ \Omega$. Napetost odprtih sponk je 100 V, notranja upornost vira pa je 0.5 Ω.

Tokovni vir. Enačbo realnega napetostnega vira, ki je za primer linearnega vira linearna funkcija, lahko pišemo tudi kot $I = G_\mathrm{g}U_\mathrm{g} - G_\mathrm{g}U$. Po I. Kirchhoffovem zakonu moremo



Slika 36.4: Merjenje karakteristike linearnega vira in pripadajoče ekvivalentno vezje.

enačbo interpretirati tudi takole: tok preko sponk vira je enak toku neodvisnega tokovnega vira $I_g = G_g U_g$, ki je zmanjšan za izgubni tok, ta pa je premosorazmeren napetosti med sponkama vira. Opisano interpretacijo enačbe vira podaja slika 36.5, kjer je v levi veji naznačen neodvisen tokovni vir, ki iz spodnjega spojišča "srka", v zgornjega pa "potiska" konstanten tok I_g, upornost R_g (prevodnost G_g) pa odvaja manjkajoči del toka ($G_g U$) izpred sponk vira.



Slika 36.5: Modelno vezje tokovnega vira.

Če se za trenutek povrnemo k napetostnemu viru, smo tam izhajali iz razširjenega Ohmovega zakona, $\mathbf{J} = \gamma_g(\mathbf{E}_g + \mathbf{E})$, kjer nam je integral $\mathbf{E}_g$ vzdolž notranjosti vira določal napetost U_g. Če v enačbi za $\gamma_g \mathbf{E}_g$ pišemo $\mathbf{J}_g$, potem je $\mathbf{J} = \mathbf{J}_g + \gamma_g \mathbf{E}$, kjer pomeni $\mathbf{J}_g$ tokovno gostoto, ki bi jo izzvala gonilna poljska jakost v generatorjevi substanci. Ker pa je polje $\mathbf{E}$ znotraj substance usmerjeno v obratni smeri kot $\mathbf{E}_g$, je $J < J_g$, s tem pa je tudi skupen tok I iz vira manjši od notranjega, generatorskega toka I_g.

Seveda tudi v tem primeru ni težko uvideti, da pomeni R_g (ali G_g) notranjo upornost (prevodnost) vira med sponkama 1 in 1'. Če enačbo $\mathbf{J} = \mathbf{J}_g + \gamma_g \mathbf{E}$ integriramo po prerezu substance vira (skica a), slika 36.1),

$$\int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{J}_g \cdot d\mathbf{a} + \gamma_g \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

in za $\mathbf{E}$ privzamemo homogeno porazdelitev v nasprotni smeri gostote $\mathbf{J}$, in je $E = U/l_g$, dobimo:

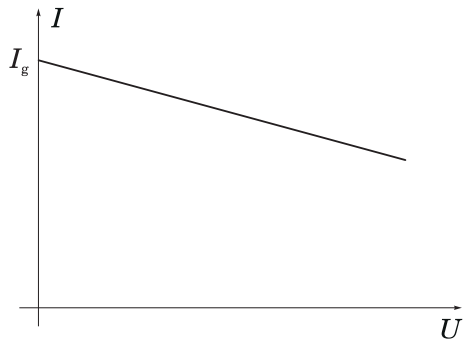
$$I = I_g - \gamma_g \frac{S_g}{l_g} U = I_g - G_g U$$

Enačbo enosmernega vira kot *tokovnega vira* moremo potemtakem pisati dalje kot

$$\boxed{I = I_g - G_g U} \tag{36.2}$$

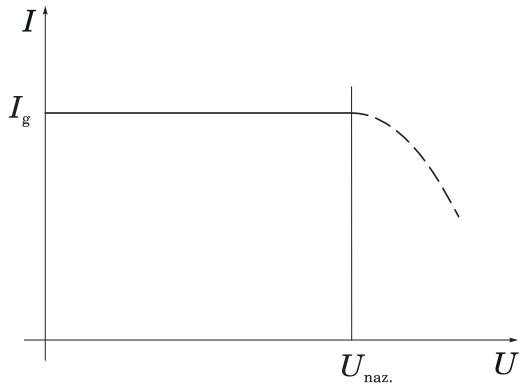
V enačbi pomenita I in U spet izhodni količini na sponkah vira, I_g in G_g pa sta parametra tega vira, ki ga v ustreznem ekvivalentnem ali nadomestnem vezju predstavimo z

vzporedno kombinacijo neodvisnega tokovnega vira s tokom I_g in upora s prevodnostjo G_g. Če je pri danem realnem enosmernem viru notranja prevodnost G_g konstantna (neodvisna od obremenjenosti vira), potem pravimo, da je vir linearen in mu zato v (U, I) diagramu pripada odsek premice v prvem kvadrantu; slika 36.6.



Slika 36.6: Karakteristika linearnega tokovnega vira.

Jakost neodvisnega tokovnega vira ustreza (po enačbi 36.2) toku skozi sponke vira, ko bi bile te kratko staknjene ($U = 0$); rečemo mu tudi *tok kratkega stika*. O dobrem tokovnem viru govorimo takrat, ko je tok skozi sponke vira kar najmanj odvisen od napetosti med sponkama, torej, ko je G_g čim manjši oz., ko je (U, I) karakteristika položna. O idealnem tokovnem viru pa govorimo takrat, ko gre $G_g \to 0$ oz., ko gre $R_g \to \infty$. Tudi takšnemu idealiziranemu viru se močno približajo ustrezna elektronska vezja, ki imajo izhodni tok stabiliziran do določene nazivne napetosti ($U_{\text{naz.}}$), od tam dalje pa izhodni tok ponavadi sorazmeroma hitro "usiha"; slika 36.7.

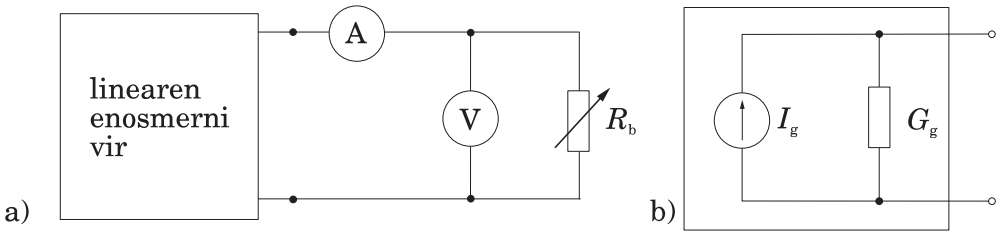


Slika 36.7: Karakteristika stabiliziranega tokovnega vira.

Če izvzamemo primer idealiziranega enosmernega vira, potem moremo vsakemu realnemu linearnemu viru prirediti dve povsem enakovredni ekvivalentni nadomestni vezji: i) v zaporedni vezavi neodvisnega napetostnega vira in notranje upornosti in ii) v vzporedni vezavi neodvisnega tokovnega vira in notranje prevodnosti. Iz primerjave enačb 36.1 in 36.2 vidimo, da velja med U_g, I_g in R_g preprosta zveza: $U_g = R_g I_g$.

Zgled 36.2

Vzemimo kar številski primer iz prejšnjega zgleda. Če vstavimo podatke v enačbo 36.2, dobimo enačbi: $I_g - 95G_g = 10$ in $I_g - 90G_g = 20$. Rešitev je $I_g = 200$ A in $G_g = 2$ S; slika 36.8.

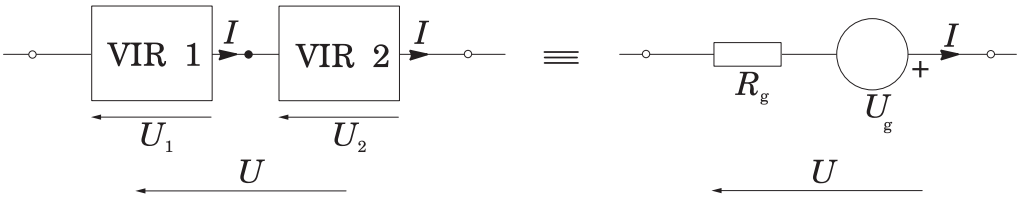


Slika 36.8: Linearnemu viru pripada ekvivalenten tokovni vir.

Izjema nastopi v primeru idealnega napetostnega ($R_g = 0$) ali idealnega tokovnega vira ($G_g = 0$). Ta dva vira sta izključujoča. Idealnega tokovnega vira ne moremo pretvoriti v napetostnega, kot tudi ne obratno. In še dalje: idealni tokovni vir ne "prenese" odprtih sponk in idealni napetostni vir ne "prenese" kratkega stika.

Vezave enosmernih virov. V električnih vezjih večkrat nastopi slučaj, ko je več virov vezanih vzporedno, zaporedno ali pa mešano. Takrat se je smiselno vprašati po parametrih ekvivalentnega vira, ki bo imel (U, I) karakteristiko identično oni, ki jo ima kombinirano vezje virov. Omenjen primer bo dovolj nazorno predočen že, če si ogledamo le vzporedno in zaporedno vezavo dveh virov.

1) Zaporedna vezava virov; slika 36.9. Pri zaporedni vezavi je tok I skupen skozi

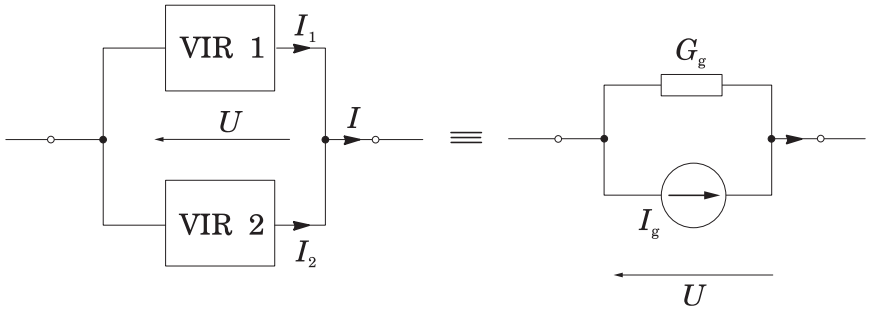


Slika 36.9: Zaporedna vezava linearnih virov in ekvivalenten vir.

sponki obeh virov, zato je enačbo obeh virov smiselno zapisati v obliki 36.1 kot: $U_1 = U_{g1} - R_{g1}I$, $U_2 = U_{g2} - R_{g2}I$. Po II. Kirchhoffovem zakonu bo napetost U združenega vira enaka vsoti posameznih: $U = U_1 + U_2 = (U_{g1} + U_{g2}) - (R_{g1} + R_{g2})I = U_g - R_gI$. Očitno bosta parametra združenega vira enaka vsotam: $U_g = U_{g1} + U_{g2}$ in $R_g = R_{g1} + R_{g2}$.

2) Vzporedna vezava virov; slika 36.10. Pri vzporedni vezavi bo napetost U očitno skupna med sponkama obeh virov. Enačbi virov je zato smiselno pisati v obliki 36.2 kot: $I_1 = I_{g1} - G_{g1}U$, $I_2 = I_{g2} - G_{g2}U$. Po I. Kirchhoffovem zakonu je tok I združenega vira enak vsoti: $I = I_1 + I_2 = (I_{g1} + I_{g2}) - (G_{g1} + G_{g2})U = I_g - G_gU$. Parametra združenega vira bosta spet določali vsoti: $I_g = I_{g1} + I_{g2}$ in $G_g = G_{g1} + G_{g2}$.

Zgled 36.3



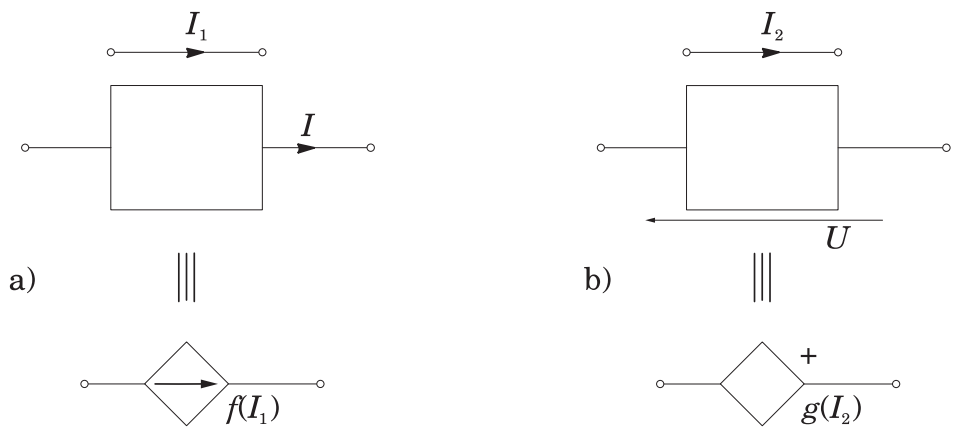
Slika 36.10: Vzporedna vezava linearnih virov in ekvivalenten vir.

Pet enakih baterij z napetostmi $U'_g = 1.5$ V in upornosti $R'_g = 0.1\ \Omega$ vežemo enkrat vzporedno in drugič zaporedno. V prvem primeru je $I'_g = 15$ A in $G'_g = 10$ S, kar pomeni, da je $I_g = 5 \cdot 15 = 75$ A in $G_g = 5 \cdot 10 = 50$ S. Napetost odprtih sponk bo $I_g/G_g = 1.5$ V in notranja upornost bo $0.02\ \Omega$. Dobili smo napetostni vir, ki ima strmejšo (ugodnejšo) karakteristiko pri enaki napetosti odprtih sponk.

V primeru zaporedne vezave petih baterij je skupna napetost $U_g = 5 \cdot 1.5 = 75$ V in skupna upornost $R_g = 5 \cdot 0.1 = 0.5\ \Omega$. Dobimo vir z višjo napetostjo, vendar s položnejšo karakteristiko.

V primeru idealnih virov je fizikalno smiselna le zaporedna vezava napetostnih virov in vzporedna vezava tokovnih virov, in dalje: smiselna je še zaporedna vezava enakih tokovnih virov ali vzporedna vezava enakih napetostnih virov.

Odvisni krmiljeni viri. Določena električna vezja imajo to lastnost, da sta napetost med ustreznima sponkama ali pa tok skozi ustrezni sponki odvisna od določene električne količine (toka ali napetosti) v preostalem delu kompleksnejšega električnega vezja. V tem primeru nadomestimo takšno vezje z ekvivalentnim virom, ob katerem zapišemo odgovarjajočo odvisnost; slika 36.11. V primerih a) in b) iz slike 36.11 sta tok oz. napetost



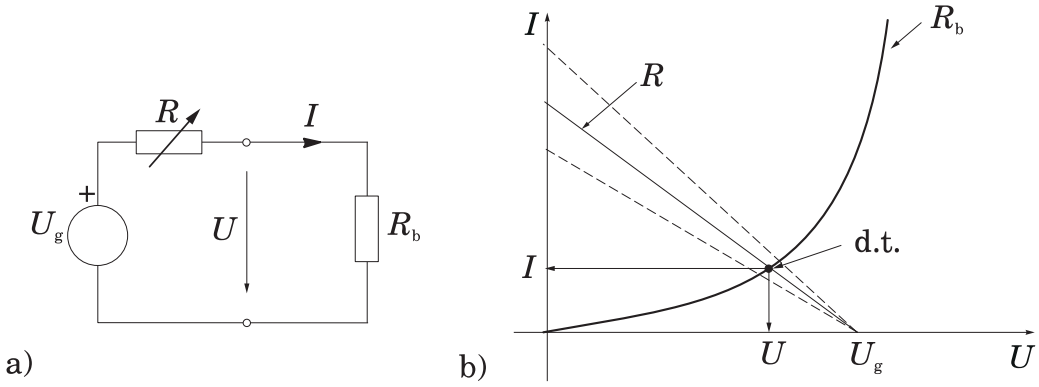
Slika 36.11: Označevanje krmiljenih virov.

dvopolnega vezja odvisna od toka v neki tretji veji, moreta pa biti odvisna tudi od določene tretje napetosti v preostalem delu kompleksnejšega vezja. Na nivoju osnov se s takšnimi

viri sicer ne bomo ukvarjali (ker je to pač vezano na predhoden študij lastnosti funkcijskih vezij), bomo pa jih še kdaj kasneje omenjali – vendar bo to bolj v smislu določenih interpretacij.

Upor. O električni upornosti in prevodnosti smo obširno govorili v razdelku 33, kjer smo pasivni element opredelili z vrednostjo upornosti (prevodnosti), če je element linearen, oz. z (U, I) karakteristiko, če je napetostno-tokovna odvisnost zapletenejša – nelinearna. V okviru osnov se bomo v glavnem ukvarjali z vezji z linearnimi upori, na katerih (U, I) razmere opišemo s preprosto relacijo Ohmovega zakona ($U = RI$).

Grafično reševanje. Kljub zožitvi tematskega okvira pa bi si vseeno – vsaj okvirno – ogledali nazorno grafično metodo analize preprostega vezja z enim nelinearnim elementom. Kot primer vzemimo nelinearen upor z dano (U, I) karakteristiko, ki ga preko spremenljivega predupora R priključimo na idealen napetostni vir z napetostjo U_g; slika 36.12, skica a). Levo od sponk sta predupor in napetostni vir. Po razmišljanjih o napetostnem



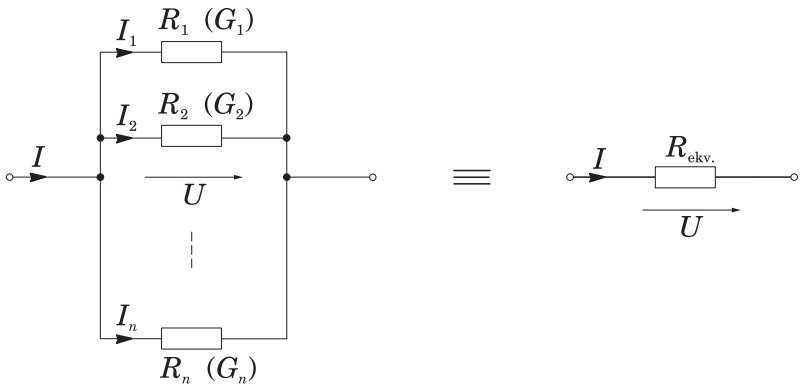
Slika 36.12: Grafična rešitev nelinearnega tokokroga.

viru moremo levi del vezja razumeti kot realen napetostni vir s spremenljivo notranjo upornostjo. Karakteristika tega vira je polna premica na skici b). Če predupor spreminjamo, se nagib karakteristike spreminja od ene do druge črtkane daljice. V skrajnem primeru, ko bi se upornost R spreminjala od nič do neskončnosti, bi se nagib karakteristike levega dela vezja spreminjal od navpičnice proti vodoravnici. Po enačbi 36.1 bi levi del vezja popisali z izrazom $U = U_g - RI$. Nelinearen bremenski upor ima z R_b označeno karakteristiko, ki bi jo formalno pisali kot $I = R_b(U) = f(U)$ – kot funkcijsko odvisnost. Ko vnesemo slednjo enačbo v prejšnjo, dobimo: $U = U_g - Rf(U)$. Če funkcija $f(U)$ ni ravno preprosta, bo analitična rešitev "odmaknjena". Na voljo nam ostane ustrezno numerično približevanje. Še bolj enostavno pa bo, če presečišče obeh karakteristik kar odčitamo grafično. Skupna točka je na sliki označena kot d.t. (delovna točka) z absciso U (napetost na sponkah) in z ordinato I (tok skozi sponki). Iz (U, I) diagrama je tudi enostavno razbrati, kako bi se selilo presečišče (d.t.), če bi upornost R spreminjali v skrajnih mejah.

Vezave uporov. V okviru kondenzatorskih vezij (v razdelku 28) smo se seznanili z mogočimi načini vezav kondenzatorjev. Tu, pri različnih vezavah uporov, bomo videli,

da so relacije analogne, le s to razliko, da vlogo kapacitivnosti prevzamejo prevodnosti uporov, vlogo nabojev pa toki.

1) Vzporedna vezava uporov; slika 36.13. Po I. Kirchhoffovem zakonu je vstopni tok



Slika 36.13: Vzporedna vezava uporov in ekvivalentna upornost.

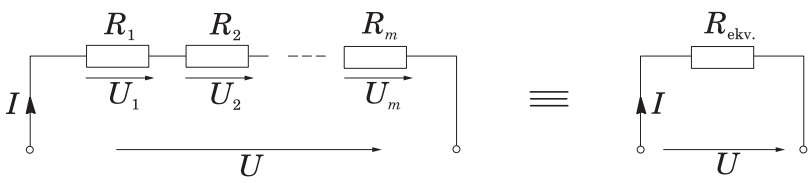
I enak vsoti $\sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} G_i U = U \sum_{i=1}^{n} G_i$. Ekvivalentna prevodnost $G_{\text{ekv.}} = I/U$ je tako vsota posameznih,

$$\boxed{G_{\text{ekv.}} = \sum_{i=1}^{n} G_i} \tag{36.3}$$

Ekvivalentna upornost $R_{\text{ekv.}} = 1/G_{\text{ekv.}}$ pa je z ostalimi upornostmi v tejle relaciji:

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{ekv.}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \tag{36.3a}$$

2) Zaporedna vezava uporov; slika 36.14. Tok I je skupen, napetosti na posameznih



Slika 36.14: Zaporedna vezava uporov in ekvivalentna upornost.

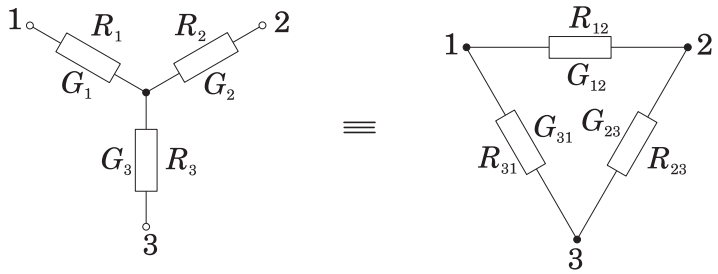
uporih pa so: $U_j = R_j I$; $j = 1, 2, ..., m$. Po II. Kirchhoffovem zakonu je skupna napetost U vsota posameznih padcev napetosti: $U = \sum_{j=1}^{m} U_j = I \sum_{j=1}^{m} R_j$. Ekvivalentna upornost $R_{\text{ekv.}}$ je dalje kvocient U/I oz.

$$\boxed{R_{\text{ekv.}} = \sum_{j=1}^{m} R_j} \tag{36.4}$$

če to izrazimo s prevodnostmi, pa imamo še:

$$\boxed{\frac{1}{G_{\text{ekv.}}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{G_j}} \tag{36.4a}$$

3) Mešana vezava. V primeru preprostih mešanih vezav uporabimo sukcesivno formuli za vzporedno in zaporedno vezavo; kot to narekuje konfiguracija dvopolnega uporovnega vezja. V primeru vpletenosti mostične konfiguracije, kot je bil to primer v kondenzatorskih vezjih, pa iščemo izhod v pretvorbi zvezda-trikot ali obratno; slika 36.15. Vezavi zvezda in



Slika 36.15: K ekvivalenci zvezde in trikot vezave uporov.

trikot si bosta enakovredni, če bodo ekvivalentne upornosti (prevodnosti) med sorodnima paroma sponk enake. Če zapišemo paroma izenačene prevodnosti $G_{12\text{nad.}}$, $G_{23\text{nad.}}$ in $G_{31\text{nad.}}$ obeh vezav, dobimo analogne zapise kot za kondenzatorski konfiguraciji; zamenjata se C in $G = 1/R$ (razdelek 28). Kot rešitev sistema enačb dobimo za upornosti v zvezdi naslednje relacije:

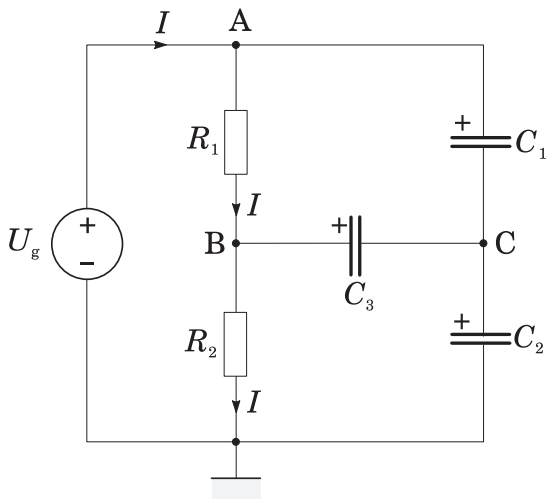
$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned}} \tag{36.5}$$

za upornosti v trikotu pa relacije:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} &= \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \end{aligned}} \tag{36.5b}$$

Kondenzatorji v enosmernem vezju. V enosmernih vezjih kondenzatorji praviloma ne nastopajo, če pa so že vključeni, potem v vejah s kondenzatorji toka ni, če seveda izolacijski tok zanemarimo – galvanska ločitev. Elektrine na kondenzatorjih določimo šele po predhodnem izračunu tokov v preostalih, aktivnih vejah.

Zgled 36.4



Slika 36.16: Enosmerno RC vezje.

Rešimo kombinirano RC mostično vezje s podatki: $U_g = 9$ V, $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $C_1 = 12\ \mu$F, $C_2 = 4\ \mu$F, $C_3 = 6\ \mu$F; slika 36.16. Tok je le v levi, uporovni veji. Izrazimo ga kot kvocient napetosti U_g in vsote (upornosti) $R_1 + R_2$: $I = 1$ A. Padec napetosti na uporu R_2 je $R_2 I = 4$ V; to je hkrati tudi potencial spojišča B: $V_B = 4$ V. Končno zapišemo še nevtralnost spojišča C: $-(U_g - V_C)C_1 - (V_B - V_C)C_3 + (V_C - 0)C_2 = 0$, iz česar izračunamo (potencial) $V_C = 6$ V. Napetosti na kondenzatorjih so po vrsti: 3 V, 6 V in -2 V, napetosti na uporih pa 5 V in 4 V.

37. Metode reševanja enosmernih linearnih vezij

Električna vezja so v elektrotehniki nasploh dominantno področje. Srečujemo jih praktično na vsakem koraku. Zasnova določenega električnega vezja je v prvi vrsti pogojena z želenimi cilji[1], ki jih pri razvijanju neke električne aparature zasledujemo. V primeru zahtevnejših elektromagnetnih struktur priredimo posameznim sestavnim enotam, kot so generatorji, motorji, transformatorji, daljnovodi, linije, antene, polprevodniški elementi itn., ustrezna nadomestna ali ekvivalentna električna vezja koncentriranih elementov, s katerimi modeliramo relevantna "dogajanja" in s pomočjo katerih tudi delamo analizo kompleksne električne naprave ali sistema.

Pri vsakršnem vezju je gotovo osrednja naloga najti poti in metode, ki nam omogočijo analizo (razčlenitev, razlago) "dogajanj" v vezju, na podlagi katerih moremo končno evalvirati zahtevane kriterije, ki naj jim dana naprava zadosti. Dobra in kvalitetna analiza vezja je hkrati tudi podlaga dobre sinteze (strnitve v celoto) vezja ali druge elektromagnetne naprave, ki bo v praktični realizaciji funkcijsko učinkovita.

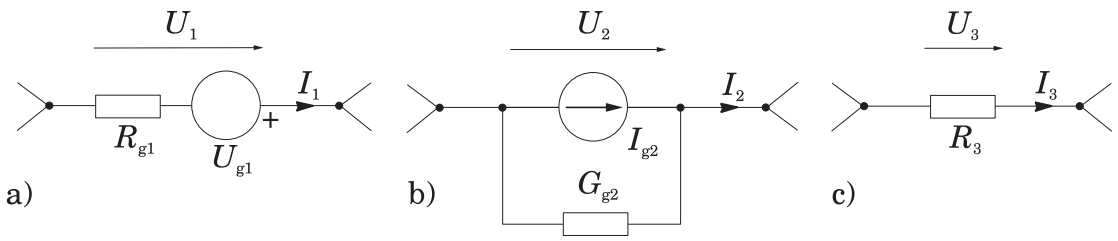
V okviru enosmernih električnih vezij, ki so matematično najmanj zahtevna, se bomo seznanili z nekaterimi osnovnimi metodami in stavki, ki nam omogočajo njihovo analizo; mnogo tega se bo dalo kasneje razširiti tudi na harmonično in časovno spremenljivo

[1] Vezje sámo more v praksi služiti npr. funkcijskemu preoblikovanju signalov (napetosti, toka): ojačevanje, usmerjanje, limitiranje, integriranje, diferenciranje, moduliranje, ... ali žičnemu in – posredno – brezžičnemu prenosu informacij (energije) ali drugo.

vzbujana električna vezja.

Pri metodah analize enosmernih vezij bomo dali osrednji akcent na računanje oz. izračun tokov in napetosti v celotnem vezju (ali pa le v delu vezja). Matematična orodja, ki jih bomo v okviru teh metod spoznali, bodo posredno ali neposredno omogočala tako evalvacijo postavljenih kriterijev (moč, izkoristek, slabljenje, prilagoditev, ...) kot tudi ponujala merila za izbiro elementov pri/ob sintezi vezij. V tem okviru se bomo seznanili: i) z *direktno Kirchhoffovo metodo*, ii) z *metodo spojiščnih potencialov* ter iii) z *metodo zančnih tokov*.

Vezje, veja, spojišče in graf. Električno vezje je *zvezje* (dvopolnih) *vej*, ki se stekajo (spajajo) v posamezna *spojišča (vozlišča)*. Splošna veja more vsebovati aktiven element (vir) ali le pasiven element (upor). Zaenkrat bomo v vezja vključevali le realne vire (končna notranja upornost oz. prevodnost), na koncu pa bomo spregovorili besedo dve še o vezjih z idealnimi viri. Splošna veja bo potemtakem mišljena v naslednjih treh različicah; slika 37.1. Skica a) podaja realen napetostni vir; vejo moremo razumeti tudi kot idealen

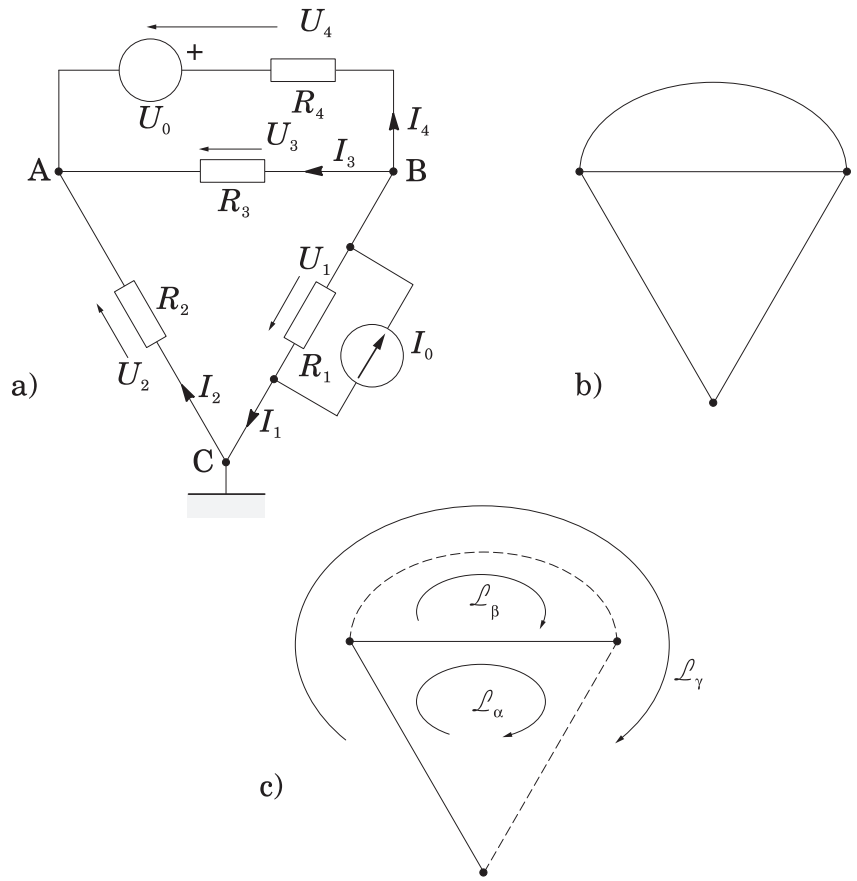


Slika 37.1: Tipične veje enosmernega vezja.

napetostni vir z zaporedno upornostjo. Če se kar splošno dogovorimo, da bomo vejni tok in vejno napetost označevali istosmerno, potem je po II. Kirchhoffovem zakonu zveza med U_1 in I_1 sledeča: $U_1 = R_{g1}I_1 - U_{g1}$. Iz zveze je razvidna enolična odvisnost med vejnim tokom I_1 in vejno napetostjo U_1 – če poznamo eno, poznamo tudi drugo. Na skici b) imamo realen tokovni vir; to vejo moremo razumeti tudi kot idealen tokovni vir z vzporedno prevodnostjo. Pri istosmerni označbi napetosti in toka veje moremo po I. Kirchhoffovem zakonu pisati zvezo: $I_2 = G_{g2}U_2 + I_{g2}$. Tudi tu sta vejni količini v enolični soodvisnosti. (Realni aktivni veji v primerih a) in b) moremo po potrebi tudi pretvoriti v ekvivalenten tokovni oz. napetostni vir.) Skica c) podaja pasiven element – upor. Napetostno-tokovno relacijo podaja Ohmov zakon: $U_3 = R_3I_3$.

Že iz teh preprostih vejnih relacij vidimo, da izgubimo soodvisnost med vejnim tokom in vejno napetostjo, če so upornosti R_{g1}, $R_{g2} = 1/G_{g2}$ in R_3 nič ali neskončno. V takem primeru je ena količina veje znana, druga pa bo šele, ko poznamo količine v preostalih vejah. V primeru c) je pri $R_3 = 0$ napetost $U_3 = 0$, tok I_3 pa bomo dobili šele iz ustrezne spojiščne enačbe. Kot že rečeno, se dajmo takim izjemam zaenkrat izogniti, ker pač nosijo določeno idealizirano konotacijo, ki v praksi nastopi le ob posameznih zanemaritvah ali poenostavitvah.

Kot primer zvezja vej si izberimo vezje s štirimi vejami in tremi spojišči; vrednosti koncentriranih elementov so sledeče: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 40\ \Omega$, $U_0 = 40$ V, $I_0 = 10$ A; slika 37.2, skica a). Vejni zasnovi vezja moremo prirediti *graf vezja*[2], skica



Slika 37.2: Enosmerno vezje; njegov graf in drevo.

b), ki grafično ponazarja povezave med vejami preko spojišč. Na skici c) je narisano eno od možnih *dreves vezja*, ki poveže vsa spojišča (polni črti) in ni pri tem nikjer sklenjeno. Preostale veje (prekinjene črte) imenujemo *vezi*. Graf in drevo vezja sta le pomagali, s katerima bomo v nadaljevanju lažje predočili določeno sistematiko, ki je pri tem potrebna; pri obsežnejših vezjih pa je ta nujna.

Vezje ima štiri veje; indeksirali jih bomo tako kot smo tudi upore v teh vejah. V vsaki od vej si bomo izbrali referenčne smeri tokov in napetosti (v isti smeri). Pri tej izbiri nam ni potrebno v ničemer razmišljati o polariteti generatorjev in verjetni smeri vejnih tokov; vejnemu toku ali vejni napetosti bo pravo smer določil predznak rešitve.

Naše vezje ima tri spojišča; označimo jih z A, B in C. Spojišče C je ozemljeno – potencial spojišča C je nič. Večina vezij v elektrotehniki je na ustreznem mestu ozemljenih; s tem se – povsem iz varnostnih razlogov – izognemo "plavajočim" potencialom, ki so posledica zunanjih motenj.

V smislu relacij, ki smo jih opredelili na možnih splošnih vejah vezja, moremo za naše

[2]Pri poglobljeni teoriji vezij se vpeljuje še t.i. *usmerjen graf vezja*, ki je podlaga za *incidenčno matriko*, ta pa osnova za sistematično matrično zapisovanje enačb vezja.

štiri veje zapisati naslednje zveze:

$$\begin{array}{lll} \text{1. veja} & I_1 = G_1U_1 - I_0 & U_1 = R_1I_0 + R_1I_1 \\ \text{2. veja} & I_2 = G_2U_2 & U_2 = R_2I_2 \\ \text{3. veja} & I_3 = G_3U_3 & U_3 = R_3I_3 \\ \text{4. veja} & I_4 = G_4U_4 - G_4U_0 & U_4 = R_4I_4 + U_0 \end{array} \tag{K1}$$

Izbrano vezje ima štiri veje. Za izračun vejnih tokov ali vejnih napetosti potrebujemo torej štiri enačbe. Potrebno število enačb dobimo tako, da zahtevamo veljavnost I. Kirchhoffovega zakona v vsakem spojišču in veljavnost II. Kirchhoffovega zakona v vsaki zanki danega vezja (razdelek 35).

Direktna Kirchhoffova metoda. Zapišimo I. Kirchhoffov zakon za vsa tri spojišča kot

$$\begin{array}{lrcl} \text{A}: & -I_2 - I_3 - I_4 & = & 0 \\ \text{B}: & I_1 + I_3 + I_4 & = & 0 \\ \text{C}: & -I_1 + I_2 & = & 0 \end{array}$$

Tok v ozemljitev ni možen, zato ga enačba C ne vsebuje. Možen bi bil le, če bi bilo vezje še na katerem drugem mestu ozemljeno (sklenjen krogotok), vendar se tej "praksi" – če je le mogoče – izogibamo. Ob teh treh enačbah velja opozoriti na njihovo linearno odvisnost; namreč, če enačbi pod A in B seštejemo, dobimo enačbo pod C do predznaka, kar pomeni, da je tretja enačba implicitno vsebovana že v prvih dveh (podobno je tudi enačba pod B že vsebovana v A in C ter enačba A v B in C). Katero od teh enačb bomo izločili, je prosta volja. Običajno se odločamo za črtanje enačbe ozemljenega spojišča; ostaneta

$$\begin{array}{lrcl} \text{A}: & I_2 + I_3 + I_4 & = & 0 \\ \text{B}: & I_1 + I_3 + I_4 & = & 0 \end{array} \tag{K2}$$

S tema enačbama je izčrpana I. Kirchhoffova zakonitost; zaključiti jo moremo z ugotovitvijo, ki velja tudi za splošno vezje z m-spojišči: v takšnem vezju zapišemo v izbranih $(m-1)$ spojiščih $(m-1)$ tokovnih enačb.

Graf, ki ima n-vej in m-spojišč, zajame v drevo $(m-1)$ vej. Ker pa smo s tokovnimi enačbami dobili $(m-1)$ enačb, skupno jih pa rabimo n (kolikor je vseh vej), potem bomo morali iz II. Kirchhoffovega zakona pridobiti še $n-(m-1)$ enačb, kar je ravno enako številu vezi, skica c).

V našem vezju je $n = 4$ in $m = 3$, kar pomeni, da je potrebno število napetostnih enačb enako $4 - (3 - 1) = 2$. Te enačbe dobimo na način, da v drevesu, skica c), koncipiramo sklenjeni *zanki* $\mathcal{L}_\alpha$ in $\mathcal{L}_\beta$ tako, da "gremo v obhod" po delu drevesa in vsakič uporabimo samo eno od vezi. Smiselno je tudi, da si oba obhoda izberemo v smeri urinega kazalca (ali pa oba v nasprotni smeri). II. Kirchhoffova zakonitost za obe sklenjeni poti da enačbi

$$\begin{array}{lrcl} \mathcal{L}_\alpha: & U_1 + U_2 - U_3 & = & 0 \\ \mathcal{L}_\beta: & U_3 - U_4 & = & 0 \end{array} \tag{K3}$$

Naznačen obhod $\mathcal{L}_\gamma$ bi dal enačbo $U_2 - U_4 + U_1 = 0$, ki je očitno že vsebovana v prvih dveh – če ju seštejemo. Označene vezi na skici c) nam torej ponujajo določen sistematičen izbor potrebnih napetostnih enačb. Tudi za napetostne enačbe moremo potegniti splošen

zaključek: sklenjene zanke si izbiramo tako, da vsakokrat uporabimo le eno od vezi. Pri obsežnih vezjih je ta napotek gotovo koristen; v nasprotnem bi se v množici zank hitro prikradla kakšna enačba, ki je že zajeta v predhodno zapisanih.

Če sedaj v napetostne enačbe (K3) vnesemo napetosti vej iz (K1) ter jih pridružimo tokovnim iz (K2), dobimo sistem štirih enačb za štiri vejne toke:

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 + I_4 &= 0 \\ I_1 + I_3 + I_4 &= 0 \\ R_1 I_0 + R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \\ R_3 I_3 - R_4 I_4 - U_0 &= 0 \end{aligned} \tag{K4}$$

Če vnesemo še podatke, dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 + I_4 &= 0 \\ I_1 + I_3 + I_4 &= 0 \\ I_1 + 2I_2 - 4I_3 &= -10 \\ I_3 - I_4 &= 1 \end{aligned}$$

Po krajšem računu dobimo: $I_1 = I_2 = -1.6$ A, $I_3 = 1.3$ A in $I_4 = 0.3$ A. Iz enačb (K1) pa še: $U_1 = 84$ V, $U_2 = -32$ V in $U_3 = U_4 = 52$ V.

Na podoben način dobimo tudi enačbe za vejne napetosti. Če vejne toke iz (K1) vnesemo v tokovne enačbe pod (K2) in njim pridružimo še enačbe pod (K3), dobimo:

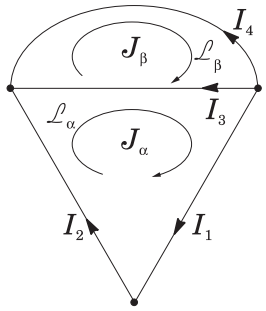
$$\begin{aligned} G_2 U_2 + G_3 U_3 + G_4 U_4 - G_4 U_0 &= 0 \\ G_1 U_1 - I_0 + G_3 U_3 + G_4 U_4 - G_4 U_0 &= 0 \\ U_1 + U_2 - U_3 &= 0 \\ U_3 - U_4 &= 0 \end{aligned} \tag{K5}$$

Ko vanje vstavimo podatke, imamo:

$$\begin{aligned} 2U_2 + U_3 + U_4 &= 40 \\ 4U_1 + U_3 + U_4 &= 440 \\ U_1 + U_2 - U_3 &= 0 \\ U_3 - U_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ko sistem enačb rešimo, izidejo vejne napetosti: $U_1 = 84$ V, $U_2 = -32$ V, $U_3 = U_4 = 52$ V, iz (K1) pa še vejni toki.

Metoda zančnih tokov. V začetku tega razdelka smo električno vezje predstavili kot zvezje vej, ki se spajajo v spojiščih. Pri takšni zasnovi pa določene veje tvorijo sklenjene zanke. Število originalnih zank, torej takšnih, ki niso morebitne zloženke že prejšnjih, smo jih pri n-vejah in m-spojiščih našteli $n - (m - 1)$. Če smo do sedaj vejo smatrali kot osnoven gradnik splošnega vezja, moremo tu napraviti kakovosten preskok in si predočiti, da je vezje sestavljeno iz več zank, ki imajo določene veje skupne. V tem smislu bi kazalo tudi vsaki zanki prirediti ekvivalenten *zančni tok* (J), ki bi bil v tisti veji, ki ni skupna nobeni drugi zanki, enak kar vejnemu toku, v veji pa, ki je skupna dvem (ali več) zankam, bi bil vejni tok ustrezna vsota/razlika sosednjih zančnih tokov.



Slika 37.3: Izbira zank v vezju.

Vzemimo vezje iz slike 37.2 in v pripadajoč graf, skica b), vrišimo izbrani zanki $\mathcal{L}_\alpha$ in $\mathcal{L}_\beta$ iz skice c); slika 37.3. Obema zankama priredimo zančna toka J_α in J_β, s katerima moremo – v smislu koncepta zančnih tokov – izraziti vse štiri vejne toke:

$$\begin{aligned} I_1 &= J_\alpha \\ I_2 &= J_\alpha \\ I_3 &= J_\beta - J_\alpha \\ I_4 &= -J_\beta \end{aligned} \tag{K6}$$

V nadaljevanju bo naša naloga: pridobiti potrebne enačbe, iz katerih bomo oba zančna toka izračunali. Pri tem se ponovno opremo na oba Kirchhoffova zakona (enačbe pod (K2) in (K3)). Vsak zančni tok, ki "pride" v spojišče, iz njega tudi "odide". Ali drugače, koncept zančnih tokov "a priori" zadošča I. Kirchhoffovemu zakonu, zato teh enačb nima smisla pisati. Povedano moremo tudi potrditi: če enačbe pod (K6) vnesemo v enačbi pod (K2), dobimo:

$$\begin{aligned} J_\alpha + (J_\beta - J_\alpha) - J_\beta &= 0 \\ J_\alpha + (J_\beta - J_\alpha) - J_\beta &= 0 \end{aligned}$$

Preostaneta nam še enačbi iz II. Kirchhoffovega zakona pod (K3). Če vanju vnesemo vejne napetosti iz enačb pod (K1) in upoštevamo relacije pod (K6), dobimo enačbi

$$\begin{aligned} R_1 I_0 + R_1 J_\alpha + R_2 J_\alpha - R_3(J_\beta - J_\alpha) &= 0 \\ R_3(J_\beta - J_\alpha) - (-R_4 J_\beta) - U_0 &= 0 \end{aligned}$$

ki po ureditvi rezultirata v sistem dveh linearnih enačb za neznana zančna toka,

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_3)J_\alpha - R_3 J_\beta &= -R_1 I_0 \\ -R_3 J_\alpha + (R_3 + R_4)J_\beta &= U_0 \end{aligned} \tag{K7}$$

Če vanju vnesemo podatke našega vezja, dobimo enačbi

$$\begin{aligned} 7J_\alpha - 4J_\beta &= -10 \\ -4J_\alpha + 8J_\beta &= 4 \end{aligned}$$

Pot do rešitve z nasprotnimi koeficienti je kratka: $J_\alpha = -1.6$ A in $J_\beta = -0.3$ A. Iz enačb pod (K6) sledijo vejni toki: $I_1 = I_2 = -1.6$ A, $I_3 = 1.3$ A in $I_4 = 0.3$ A, kar se ujema z rezultati po direktni poti.

S konceptom zančnih tokov je pot do končnega rezultata očitno krajša, saj se izognemo vsem tokovnim enačbam; dobimo manjši sistem enačb, ki je, če nič drugega, hitreje rešljiv.

Prednost te metode je tudi v tem, da je sistem enačb pod (K7) smiselno strukturiran in ga moremo razmeroma preprosto zapisati že brez predhodnih večjih priprav. V ta namen zapišimo enačbi v matrični obliki, kjer koeficienti enačb tvorijo matriko upornosti, zančna toka oblikujeta vektor neznanih vrednosti, oba vira pa sta zajeta v stolpcu znanih vrednosti,

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\alpha \\ J_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 I_0 \\ U_0 \end{bmatrix} \tag{K8}$$

Če se dogovorimo, da bodo vsi zančni toki izbrani v pozitivni (negativni) smeri, potem za elemente matrične enačbe veljajo naslednje značilnosti:

a) matrika koeficientov je simetrična; diagonalni členi predstavljajo vsote upornosti uporov v ustreznih zankah, izvendiagonalni členi predstavljajo negativne vsote/razlike upornosti uporov, ki so skupni ustreznima zankama (če zanki nimata skupnega upora, stoji na tistem mestu koeficient z vrednostjo nič),

b) če vse tokovne vire pretvorimo v ekvivalentne napetostne, potem stoje v stolpcu znanih vrednosti vsote napetostnih virov pripadajoče zanke; če se smer obhoda po zanki ujema s smerjo napetosti generatorja, potem je predznak te napetosti negativen, v nasprotnem je pozitiven.

V sistemu enačb pod (K8) je v prvem diagonalnem členu vsota upornosti zanke $\mathcal{L}_\alpha$; v njej so upori R_1, R_2 in R_3. Drugi diagonalni element je vsota upornosti v zanki $\mathcal{L}_\beta$; tam sta upora R_3 in R_4. Če v zanki $\mathcal{L}_\alpha$ pretvorimo tokovni vir v napetostnega, dobimo vir z napetostjo $I_0 R_1$, s polariteto (+) ob spojišču B, in zaporedno upornost R_1. Smer napetosti tega vira je vzdolž usmerjenosti zanke, zato stoji v desnem stolpcu zgoraj člen $-R_1 I_0$. Drugi element stolpca je napetost U_0, to pač zato, ker je smer obhoda zanke $\mathcal{L}_\beta$ nasprotna smeri napetosti tega generatorja.

Za naše vezje bi matrično enačbo pod (K8) zapisali številsko kot

$$\begin{bmatrix} 70 & -40 \\ -40 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\alpha \\ J_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Metoda spojiščnih potencialov. V časovno konstantnih tokovnih poljih - in enosmerna električna vezja so le poseben primer tega – velja potencialnost ($\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$). V takšnem primeru izrazimo napetost med poljubnima točkama kot razliko potencialov teh točk. Vejne napetosti v enosmernih vezjih moremo torej izraziti s potenciali vozlišč, ki so krajišča vej. Če ima splošno vezje m-spojišč in je eno od njih ozemljeno – potencialno definirano –, ostane še $(m-1)$ spojišč, katerim je potrebno izračunati potenciale; s tem so posredno (kot razlike) določene tudi vejne napetosti.

Vzemimo spet naše vezje s slike 37.2. Če je spojišče C ozemljeno ($V_\mathrm{C} = 0$ V), sta potencialno nedoločeni le še spojišči A in B. Označimo njuna potenciala z V_A in V_B.

Vejne napetosti so po vrsti:

$$\begin{aligned} U_1 &= V_\mathrm{B} - V_\mathrm{C} = V_\mathrm{B} \\ U_2 &= V_\mathrm{C} - V_\mathrm{A} = -V_\mathrm{A} \\ U_3 &= V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A} \\ U_4 &= V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A} \end{aligned} \tag{K9}$$

Enačbi po II. Kirchhoffovem zakonu (pod (K3)) sta – ob poljubnih vrednostih V_A in V_B – evidentno izpolnjeni,

$$\begin{aligned} V_\mathrm{B} + (-V_\mathrm{A}) - (V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) &= 0 \\ (V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) - (V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) &= 0 \end{aligned}$$

kar pomeni, da si z napetostnimi enačbami po II. Kirchhoffovem zakonu ne moremo tu nič pomagati. Ostanejo nam na voljo le še tokovne enačbe. Za naše vezje bomo v tokovni enačbi pod (K2) vstavili vejne toke pod (K1) in vejne napetosti izrazili s potencialoma pod (K9). Dobili bomo:

$$\begin{aligned} -(G_2 V_\mathrm{A}) + G_3(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) + G_4(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) - G_4 U_0 &= 0 \\ G_1 V_\mathrm{B} - I_0 + G_3(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) + G_4(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}) - G_4 U_0 &= 0 \end{aligned}$$

Če enačbi uredimo, dobimo sistem dveh linearnih enačb,

$$\begin{aligned} (G_2 + G_3 + G_4)V_\mathrm{A} - (G_3 + G_4)V_\mathrm{B} &= -G_4 U_0 \\ -(G_3 + G_4)V_\mathrm{A} + (G_1 + G_3 + G_4)V_\mathrm{B} &= I_0 + G_4 U_0 \end{aligned} \tag{K10}$$

Pri podatkih za naše vezje bo sistem enačb takle:

$$\begin{aligned} 2V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B} &= -20 \\ -V_\mathrm{A} + 3V_\mathrm{B} &= 220 \end{aligned}$$

Potenciala sta: $V_\mathrm{A} = 32$ V, $V_\mathrm{B} = 84$ V. Iz enačb pod (K9) dobimo še vejne napetosti: $U_1 = 84$ V, $U_2 = -32$ V, $U_3 = U_4 = 52$ V, ki se ujemajo tudi s predhodnimi rešitvami.

Tudi pri metodi spojiščnih potencialov vidimo, da je pot ustrezno krajša. Če je vezje obsežnejše je prihranek očiten, saj se sistem enačb reducira le na prosta (neozemljena) spojišča. Pa tudi v primeru, ko nobeno od spojišč ne bi bilo ozemljeno ali drugače potencialno definirano, si enega od njih izberemo in mu le računsko pripišemo potencial nič; končno ta izbira v ničemer ne poruši napetostno-tokovnih relacij v vezju.

Tudi metoda spojiščnih potencialov ima to prednost, da je pripadajoč sistem enačb smiselno strukturiran. Zapišimo enačbi pod (K10) v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} G_2 + G_3 + G_4 & -(G_3 + G_4) \\ -(G_3 + G_4) & G_1 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\mathrm{A} \\ V_\mathrm{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_4 U_0 \\ I_0 + G_4 U_0 \end{bmatrix} \tag{K11}$$

Koeficienti enačb tvorijo matriko prevodnosti, v neznanem stolpcu nastopata potenciala spojišč A in B in v desnem, znanem stolpcu nastopajo viri vezja. Matrična enačba ima naslednjo splošno strukturo:

a) matrika koeficientov je simetrična; diagonalni členi pomenijo vsote prevodnosti v vejah, ki se stekajo v določeno spojišče, izvendiagonalni členi so negativni in pomenijo vsote prevodnosti v vejah med ustreznima spojiščema (če spojišči nimata povezujoče veje, stoji na tistem mestu koeficient z vrednostjo nič),

b) če vse napetostne vire pretvorimo v ekvivalentne tokovne vire, potem stoje v stolpcu znanih vrednosti vsote tokovnih virov vej, ki se stekajo v to spojišče; če tokovni vir tok v spojišče daje, nastopa s pozitivno vrednostjo, v nasprotnem pa z negativno.

V sistemu enačb pod (K11) je vsota prevodnosti v vejah, ki se stekajo v spojišče A enaka vsoti $G_2+G_3+G_4$. Za spojišče B je ustrezna vsota enaka $G_1+G_3+G_4$. Med spojiščema A in B sta dve veji; vsota prevodnosti obeh vej je G_3+G_4, zato na izvendiagonalnih mestih matrike stoji $-(G_3+G_4)$. Če napetostni vir v četrti veji pretvorimo v ekvivalentnega tokovnega, potem dobimo vir s tokom G_4U_0 v smeri od spojišča A k spojišču B z vzporedno prevodnostjo G_4. S spojiščem A je neposredno povezan tokovni vir G_4U_0, ki tok iz spojišča "vleče", zato je prvi element desnega stolpca matrične enačbe $-G_4U_0$. V spojišče B "potiskata" svoja toka oba tokovna vira, zato je drugi element znanega vektorja enak $G_4U_0+I_0$.

Za naše vezje bi matrično enačbo pod (K11) številsko zapisali kot

$$\begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.05 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\mathrm{A}} \\ V_{\mathrm{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Analiza vezja z idealnimi elementi. Vezje, na katerem smo predstavili različne metode, je vsebovalo realne elemente, torej takšne, pri katerih je upornost ali prevodnost pasivnega elementa v veji končna in ne nič. Zapis potrebnih enačb pa se delno spremeni, če je kakšna od vej idealna. Takšne primere si bomo ogledali kar na našem vezju s slike 37.2, ko bomo: i) vzeli v četrti veji le idealen napetostni vir ($R_4=0$), ii) v prvi veji le idealen tokovni vir ($G_1=0$) in iii) upornost tretje veje enako nič ($R_3=0$).

i) $R_4=0$; slika 37.4, skica a). Pri metodi zančnih tokov ni težav. V enačbah pod (K7) dobimo enačbi:

$$\begin{aligned} 7J_\alpha - 4J_\beta &= -10 \\ -J_\alpha + J_\beta &= 1 \end{aligned}$$

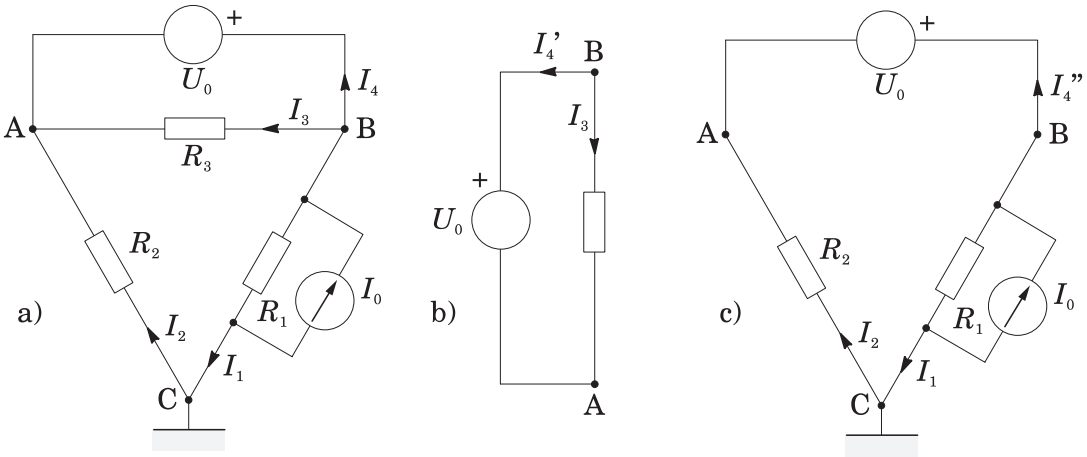
in z rešitvijo tudi zančna toka ter vejne toke:

$$J_\alpha = -2\ \mathrm{A} \qquad J_\beta = -1\ \mathrm{A}$$

$$I_1 = I_2 = -2\ \mathrm{A} \qquad I_3 = 1\ \mathrm{A} \qquad I_4 = 1\ \mathrm{A}$$

Enako postopamo tudi pri direktni metodi vejnih tokov – v sistemu enačb pod (K4) pišemo za $R_4=0$.

Težava nastane pri metodi vejnih napetosti in metodi spojiščnih potencialov, kjer nastopa G_4, ki gre $\to\infty$, če gre $R_4\to 0$, zato sistema enačb pod (K5) in (K10) za tako spremenjeno vezje nista več uporabna. Za nadaljnje reševanje po eni od teh metod je odločilnega pomena ugotovitev, da se je v delu vezja režim bistveno spremenil. Ta



Slika 37.4: Veja vsebuje idealen napetostni vir.

sprememba se nanaša predvsem na napetostni vir in njemu vzporeden upor R_3 v tretji veji. Tok I_3 v tej veji je povsem določen z napetostjo U_0 ($I_3 = G_3U_0 = 1$ A) in je neodvisen od razmer v preostalem vezju. Še več, upornost R_3 more biti večja ali manjša in se to ne bo v ničemer odrazilo v spodnjih dveh vejah, saj bo razlika $V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}$ vseskozi enaka U_0. Ta ugotovitev nas navaja na možnost, da vezje pod a) razdelimo na neodvisni vezji b) in c). V obeh vezjih nastopa napetostni vir U_0. Skozi njega teče v vezju b) tok $I_4' = -I_3 = -1$ A, v vezju c) pa tok I_4''. Skupen tok bo vsota; $I_4 = I_4' + I_4''$. Za končno rešitev vezja a) moramo rešiti še vezje c). Vzemimo metodo spojiščnih potencialov. Kot neznanka bodi potencial spojišča B. Po opisani metodi je enačba za potencial V_B naslednja

$$(G_1 + G_2)V_\mathrm{B} = I_0 + G_2U_0 \qquad \Rightarrow \qquad 15V_\mathrm{B} = 1200$$

Potencial $V_\mathrm{B} = 80$ V in potencial $V_\mathrm{A} = V_\mathrm{B} - U_0 = 40$ V. Toka I_1 in I_2 dobimo po enačbah teh vej pod (K1): $I_1 = -2$ A in $I_2 = -2$ A. Tok I_4'' pa je enak $-I_2$; $I_4'' = 2$ A. Končno je tok $I_4 = I_4' + I_4'' = 1$ A. Rezultat je očitno tak kot po metodi zančnih tokov.

O sistemu enačb za vejne napetosti pod (K5) smo rekli, da je zaradi $G_4 \to \infty$ neuporaben. Smiselno ga moremo "usposobiti", če namesto sumanda $G_4U_4 - G_4U_0$ obdržimo neznanko I_4 in namesto U_4 pišemo U_0. Na ta načim dobimo rešljiv sistem enačb za napetosti U_1, U_2 in U_3 ter tok I_4,

$$\begin{aligned} G_2U_2 + G_3U_3 + I_4 &= 0 \\ G_1U_1 - I_0 + G_3U_3 + I_4 &= 0 \\ U_1 + U_2 - U_3 &= 0 \\ U_3 - U_0 &= 0 \end{aligned}$$

ii) $G_1 = 0$; slika 37.5, skica a). Tu moremo ugotoviti, da pa pri metodi vejnih napetosti ali spojiščnih potencialov ne bo težav. V enačbah pod (K10) dobimo:

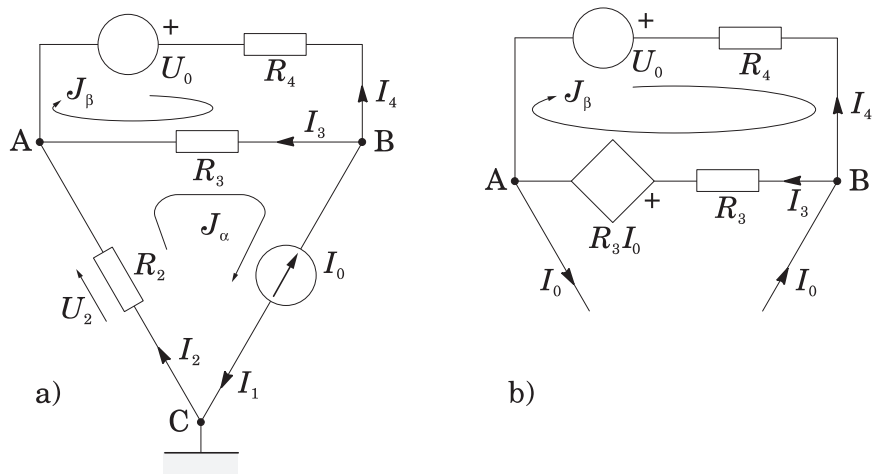
$$\begin{aligned} 2V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B} &= -20 \\ -V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B} &= 220 \end{aligned}$$

Rešitev da spojiščna potenciala in vejne toke:

$$V_{\mathrm{A}} = 200\ \mathrm{V} \qquad V_{\mathrm{B}} = 420\ \mathrm{V}$$

$$I_1 = -10\ \mathrm{A} \qquad I_2 = -10\ \mathrm{A} \qquad I_3 = 5.5\ \mathrm{A} \qquad I_4 = 4.5\ \mathrm{A}$$

Podobno postopamo tudi v enačbah pod (K5). Za uporabo ostalih dveh metod bo spet odločilna ugotovitev, da so se v delih vezja razmere spremenile. Zančni tok J_α je



Slika 37.5: Veja vsebuje idealen tokovni vir.

določen že s tokovnim virom I_0; $J_\alpha = -I_0 = I_1 = I_2 = -10$ A. Napetost na uporu R_2 je $U_2 = R_2 I_2 = -200$ V; potencial spojišča A je s tem že določen: $V_{\mathrm{A}} = -U_2 = 200$ V. Očitno zgornji del vezja (zanka $\mathcal{L}_\beta$) ne more v ničemer več spremeniti razmer v spodnjem delu (zanka $\mathcal{L}_\alpha$). Obratno pa zančni tok J_α ustvarja na uporu R_3 konstanten padec napetosti, ki ga moremo v zgornji zanki predstaviti kot odvisen vir z napetostjo $R_3 J_0$; shema b). Enačba za zančni tok J_β je po opisani metodi naslednja:

$$(R_3 + R_4)J_\beta = U_0 - R_3 J_0 \qquad \Rightarrow \qquad 2J_\beta = -9$$

Zančni tok $J_\beta = -4.5$ A. To je hkrati tudi tok $-I_4$, tok I_3 pa je določen s spojiščno enačbo v A ali B: $I_3 = I_0 - I_4 = 5.5$ A.

Tudi sistem enačb pod (K4) moremo z določenim popravkom "usposobiti": če za sumand $R_1 I_0 + R_1 I_1$ pišemo napetost U_1 te veje in za I_1 pišemo $-I_0$, dobimo sistem enačb za U_1, I_2, I_3 in I_4,

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 + I_4 &= 0 \\ -I_0 + I_3 + I_4 &= 0 \\ U_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \\ R_3 I_3 - R_4 I_4 - U_0 &= 0 \end{aligned}$$

iii) $R_3 = 0$. Zanki $\mathcal{L}_\alpha$ in $\mathcal{L}_\beta$ sta pri tem povsem avtonomni, kar je razvidno tudi iz enačbe pod (K7),

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)J_\alpha &= -R_1 I_0 \\ (R_3 + R_4)J_\beta &= U_0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} 3J_\alpha &= -10 \\ J_\beta &= 5 \end{aligned}$$

Zančna in vejni toki so:

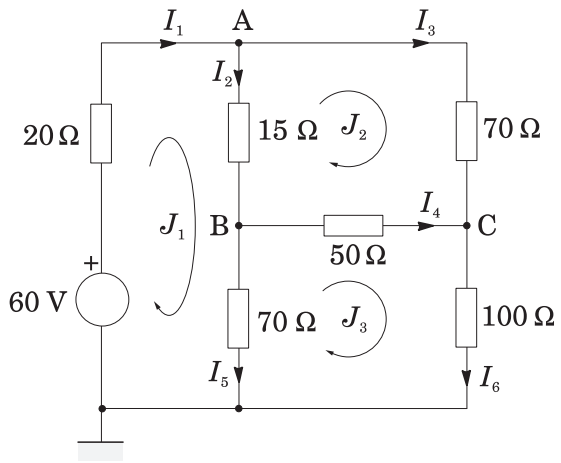
$$J_\alpha = -10/3 \text{ A} \qquad J_\beta = 5 \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 = -10/3 \text{ A} \qquad I_3 = 5/3 \text{ A} \qquad I_4 = -5 \text{ A}$$

Iz teh treh preprostih primerov moremo zaključiti: prvič, vezje, ki vsebuje realne vire in idealne napetostne vire, je preprosto rešljivo z metodo zančnih tokov, in drugič, vezje z realnimi viri in idealnimi tokovnimi viri je enostavno rešljivo z metodo spojiščnih potencialov. V vseh drugačnih konfiguracijah je potrebno analizo vezju smiselno prilagoditi.

Zgled 37.1

Izračunajmo toke I_1, I_2, ..., I_6 v mostičnem vezju; slika 37.6. Odločimo se za metodo



Slika 37.6: Primer analize mostičnega vezja.

zančnih tokov; v vezju si izberemo tri zanke z zančimi toki J_1, J_2 in J_3. Po opisani metodologiji zapišemo potrebne napetostne enačbe:

$$\begin{aligned}
(20+15+70)J_1 - 15J_2 - 70J_3 &= 60 \\
-15J_1 + (15+70+50)J_2 - 50J_3 &= 0 \\
-70J_1 - 50J_2 + (70+50+100)J_3 &= 0
\end{aligned}$$

Po krajšem računu dobimo: $J_1 = 0.8$ A, $J_2 = 0.2$ A in $J_3 = 0.3$ A; s tem pa tudi vejne toke: $I_1 = J_1 = 0.8$ A, $I_2 = J_1 - J_2 = 0.6$ A, $I_3 = J_2 = 0.2$ A, $I_4 = J_3 - J_2 = 0.1$ A, $I_5 = J_1 - J_3 = 0.5$ A in $I_6 = J_3 = 0.3$ A. S toki so določeni tudi potenciali spojišč: $V_\mathrm{A} = 60 - 20I_1 = 44$ V, $V_\mathrm{B} = 70I_5 = 35$ V in $V_\mathrm{C} = 100I_6 = 30$ V.

♣ Bralec naj vezje reši še z metodo spojiščnih potencialov. ♣

38. Stavki o enosmernih električnih vezjih

Pri analizi enosmernih električnih vezij si mnogokrat pomagamo z določenimi stavki (teoremi), ki veljajo v takšnih vezjih. V okviru tega si bomo ogledali: 1) *stavek superpozicije*,

2) *stavek o nadomestitvi*, 3) *Tellegenov stavek*, 4) *stavek Thévenina* in *stavek Nortona*, 5) *stavek maksimalne moči* in 6) *stavek recipročnosti*.

Stavek superpozicije. Ta stavek se nanaša na enosmerno linearno vezje, ki vsebuje dva ali več virov, in pravi naslednje: če enosmerno linearno vezje vsebuje več virov, potem je možno vejne toke, vejne napetosti, zančne toke ali spojiščne potenciale določiti (izračunati) s superpozicijo prispevkov vsakega od virov posebej, pri tem pa so vsi ostali viri deaktivirani; deaktiviran napetostni vir je vir brez napetosti, ki ga nadomestimo s kratkostično vezjo med sponkama, deaktiviran tokovni vir pa je vir brez toka, ki ga nadomestimo z odprtimi sponkami.

Pri opisanih metodah enosmernih linearnih vezij smo videli, da se vsaka od metod v končnem prevede v sistem linearnih enačb, v katerem nastopajo na desni strani neodvisni viri. Pa vzemimo, da imamo za dano vezje na voljo potrebne enačbe za izračun zančnih tokov. Zapišimo ta sistem kar v matrični obliki:

$$\mathbf{RJ} = \mathbf{U}_{\mathrm{g}}$$

kjer je $\mathbf{R}$ matrika upornostnih koeficientov, $\mathbf{J}$ je vektor iskanih zančnih tokov in $\mathbf{U}_{\mathrm{g}}$ je vektor neodvisnih napetostnih virov v zankah. Če vektor $\mathbf{U}_{\mathrm{g}}$ razstavimo na toliko sumandov, kolikor je virov v vezju, in to tako, da nastopa v vsakem sumandu le en vir, potem pišemo: $\mathbf{U}_{\mathrm{g}} = \mathbf{U}_{\mathrm{g}1} + \mathbf{U}_{\mathrm{g}2} + \cdots + \mathbf{U}_{\mathrm{g}n}$. Ko to vsoto vnesemo v zgornjo matrično enačbo in jo z leve pomnožimo z matriko $\mathbf{R}^{-1}$, ki je inverzna k $\mathbf{R}$, dobimo:

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{g}1} + \cdots + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{g}n}$$

Vsak od sumandov predstavlja vektor zančnih tokov, ki pripada določenemu viru,

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{g}i} \qquad\qquad i = 1,\, 2,\, ...,\, n$$

kar pomeni, da je vektor rezultirajočih zančnih tokov enak vsoti prispevkov posameznih virov, ali kratko: rezultirajoči zančni toki so enaki superponiranim delnim zančnim tokom. Iz zgornjega je tudi razvidno, da je za izračun vsakega delnega vektorja zančnih tokov vsakokrat odgovorna ista matrika $\mathbf{R}$,

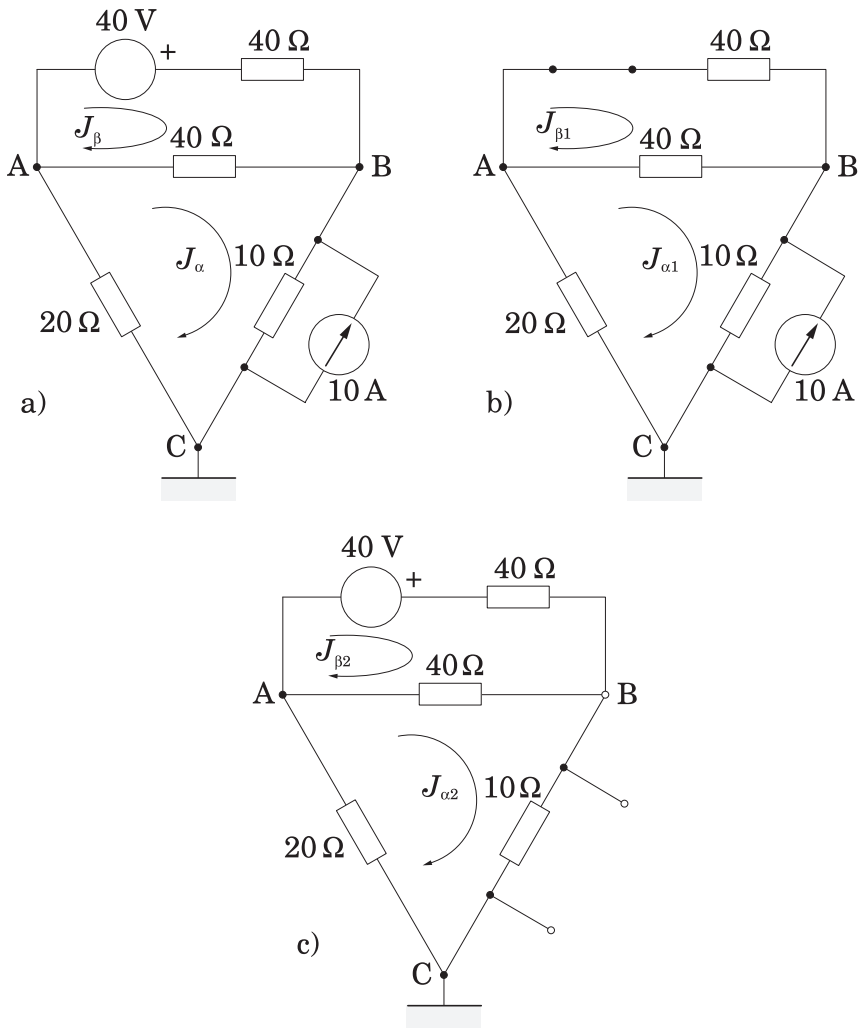
$$\mathbf{RJ}_i = \mathbf{U}_{\mathrm{g}i}$$

Ker pa je matrika $\mathbf{R}$ sestavljena iz upornosti v vejah, bo ta pri vsakem delnem izračunu nespremenjena, če bomo preostale napetostne vire smatrali deaktivirane oz. premoščene s kratkostično vezjo in če bomo preostale tokovne vire smatrali deaktivirane oz. zamenjane s prekinitvijo – odprtimi sponkami. ♣ Bralec lahko napravi podoben razmislek tudi z ostalimi tremi metodami, ki smo jih opisali v prehodnem razdelku. ♣

Zgled 38.1

Vzemimo vezje iz slike 37.2. V smislu superpozicije ga rešimo ločeno z vsakim virom; slika 38.1. Po metodi zančnih tokov dobimo za vezje b) sistem enačb

$$\begin{aligned} 70J_{\alpha 1} - 40J_{\beta 1} &= -100 \\ -40J_{\alpha 1} + 80J_{\beta 1} &= 0 \end{aligned}$$



Slika 38.1: Vezje moremo rešiti s superpozicijo.

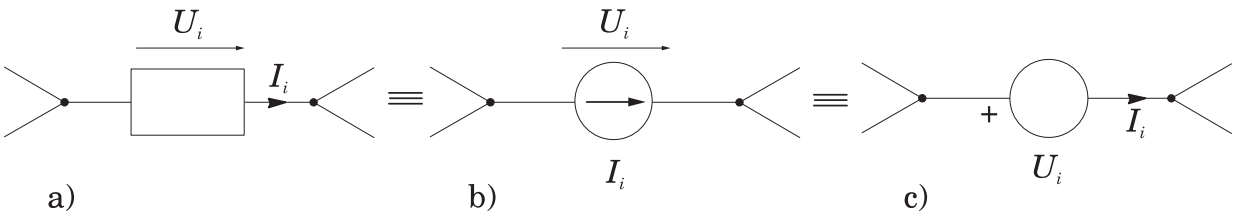
za vezje c) pa sistem enačb

$$\begin{aligned} 70J_{\alpha 2} - 40J_{\beta 2} &= 0 \\ -40J_{\alpha 2} + 80J_{\beta 2} &= 40 \end{aligned}$$

Rešitve so: $J_{\alpha 1} = -2$ A, $J_{\beta 1} = -1$ A in $J_{\alpha 2} = 0.4$ A, $J_{\beta 2} = 0.7$ A. Po superpoziciji je $J_\alpha = J_{\alpha 1} + J_{\alpha 2} = -1.6$ A in $J_\beta = J_{\beta 1} + J_{\beta 2} = -0.3$ A, kar se ujema z rezultatom iz prejšnjega razdelka.

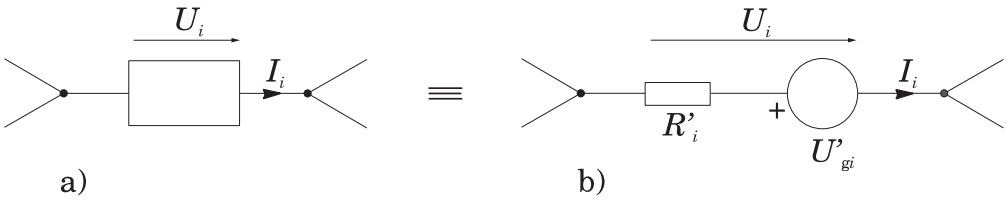
Stavek o nadomestitvi. Ta stavek pravi: če v danem enosmernem vezju v določeni (i-ti) veji poznamo vejno napetost (U_i) ali vejni tok (I_i), potem moremo to vejo nadomestiti z neodvisnim napetostnim virom (napetosti U_i) ali neodvisnim tokovnim virom (s tokom I_i) in se zaradi te zamenjave napetostno-tokovne razmere v preostalem vezju ne bodo v ničemer spremenile; slika 38.2.

Pokažimo ekvivalentnost zamenjave i-te veje z neodvisnim napetostnim virom. Za dano vezje moremo zapisati potrebne tokovne enačbe (v teh nastopajo toki vej) in po-



Slika 38.2: Ekvivalentne veje.

trebne napetostne enačbe (v njih nastopajo vejne napeosti). Če dopuščamo poseg (spremembo) v i-ti veji tako, da se zato v ostalih, torej v j-tih vejah ($j \neq i$) nič ne spremeni (U_j in I_j ostajajo nespremenjeni), potem je to – po Kirchhoffovih enačbah – možno le, če se tudi U_i in I_i ne spremenita. To pa pomeni, da moremo i-to vejo zamenjati s katerokoli, da ima le pri toku I_i (skozi vejo) napetost U_i (na veji). Naj je ta ekvivalentna veja realen napetostni vir; slika 38.3. Veji si bosta očitno ekvivalentni, če bosta R'_i in U'_{gi} izbrani



Slika 38.3: Ekvivalentni veji.

tako, da bo veljalo: $U_i = R'_i I_i + U'_{gi}$. Pri poljubnem R'_i je potrebna U'_{gi} kar $U_i - R'_i I_i$. Če pa izberemo $R'_i = 0$, je U'_{gi} preprosto U_i. In to smo končno želeli pokazati. ♣ Bralec naj soroden razmislek napravi za primer substituiranja i-te veje s tokovnim virom. ♣

Ob tem velja še poudariti, da stavek o nadomestitvi velja tudi za nelinearna vezja – saj tudi tam veljata oba Kirchhoffova zakona, kar je tudi edino, na kar smo se sklicevali.

Zgled 38.2

Ponovno se sklicujemo na vezje s slike 37.2. Tok v četrti veji smo izračunali ($I_4 = 0.3$ A). Zamenjajmo to vejo s tokovnim virom 0.3 A; slika 38.4. Po metodi spojiščnih potencialov dobimo:

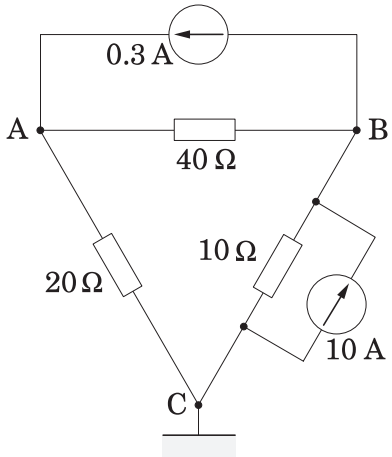
$$\left.\begin{aligned} 3V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B} &= 12 \\ -V_\mathrm{A} + 5V_\mathrm{B} &= 388 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} V_\mathrm{A} &= 32\ \mathrm{V} \\ V_\mathrm{B} &= 84\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

Ta rezultat se razvidno sklada tudi s predhodno izračunanim.

Tellegenov stavek. Osrednja vsebina tega stavka je močnostna bilanca enosmernega vezja[1]. Stavek Tellegena pravi: če v enosmernem vezju označimo vejne toke (I_i) in vejne napetosti (U_i) istosmiselno, in je teh vej n, potem velja

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} U_i I_i = 0} \tag{38.1}$$

[1]Na nivoju količin polja enosmernega toka ustreza temu stavek Poyntinga – to slednje pa že presega naš nivo.



Slika 38.4: Primer uporabe stavka o nadomestitvi.

Pokažimo za začetek veljavnost identitete, kasneje pa se bomo pomudili še ob vsebini stavka. Vsako od vejnih napetosti moremo izraziti kot razliko potencialov spojišč, med katerima je veja. Zapišimo to razliko na tale način: $U_i = V_j^{(i)} - V_k^{(i)}$, kjer indeksa j in k določata dve od m spojišč v vezju, med katera je vpeta i-ta veja (zgornji indeks). Razumljivo je $V_j^{(i)}$ za vsak indeks i enak potencialu spojišča j; $V_j^{(i)} = V_j$. Dalje moremo sumacijo $U_i I_i$ (po vseh vejah) zapisati kot

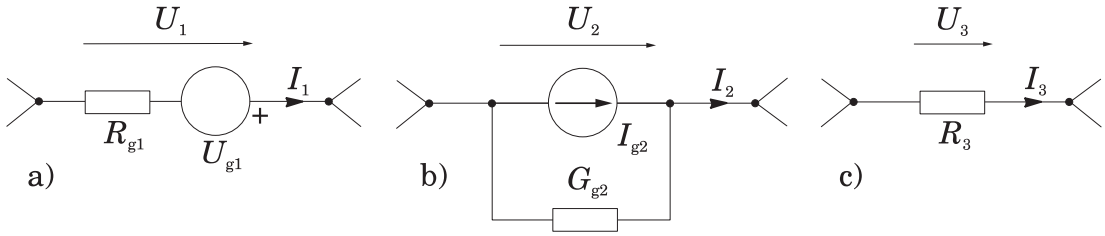
$$\sum_{i=1}^{n} U_i I_i = \sum_{i=1}^{n} (V_j^{(i)} - V_k^{(i)}) I_i$$

V tej vsoti se splošno (l-to) spojišče pojavi v vlogi prvega (pozitivnega) sumanda ($V_j^{(i)}$), če tok I_i iz njega odteka, in v vlogi drugega (negativnega) sumanda ($-V_k^{(i)}$), če tok I_i v njega doteka. Če v zgornji vsoti zberemo sumande, ki vsebujejo potencial V_l, dobimo

$$V_l\,(\text{vsota odtekajočih tokov iz spojišča } l \text{ minus vsota pritekajočih tokov v spojišče } l) \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots\ m$$

Po I. Kirchhoffovem zakonu spojišča l je razlika v oklepaju enaka nič – in identiteta 38.1 je dokazana.

Da bi Tellegenov stavek tudi vsebinsko osvetlili, si poglejmo še produkte $U_i I_i$ na treh splošnih vejah s slike 37.1; slika 38.5. Za vse tri veje so produkti sledeči:



Slika 38.5: Tri tipične veje za interpretacijo močnostne bilance vezja.

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad U_1 I_1 &= R_{\mathrm{g1}} I_1^2 - U_{\mathrm{g1}} I_1 \\
\text{b)}\quad U_2 I_2 &= G_{\mathrm{g2}} U_2^2 - (-U_2 I_{\mathrm{g2}}) \\
\text{c)}\quad U_3 I_3 &= R_3 I_3^2 = G_3 U_3^2
\end{aligned}$$

Kot pozitivni sumandi nastopajo joulske izgube v vejah. Člen $U_{\mathrm{g1}} I_1$ pomeni moč napetostnega vira v veji a) in člen $(-U_2 I_{\mathrm{g2}})$ pomeni moč tokovnega vira v veji b). Če je produkt $U_{\mathrm{g1}} I_1$ (oz. $-U_2 I_{\mathrm{g2}}$) pozitiven, potem pravimo, da vir obratuje v generatorskem režimu in v preostalo vezje oddaja energijo, v obratnem pa rečemo, da obratuje v porabniškem režimu in iz preostalega vezja prejema energijo.

Ko za dano vezje izvedemo produkte po 38.1 in jih seštejemo, dobimo kot pozitivne sumande vse joulske izgube na uporih in vse moči virov, ki obratujejo v porabniškem režimu, kot negativne sumande v vsoti pa dobimo moči virov v generatorskem režimu obratovanja. Ker pa je vsota sumandov nič, pomeni, da je v poljubnem vezju vsak trenutek vsota moči na porabnikih enaka vsoti moči generatorjev.

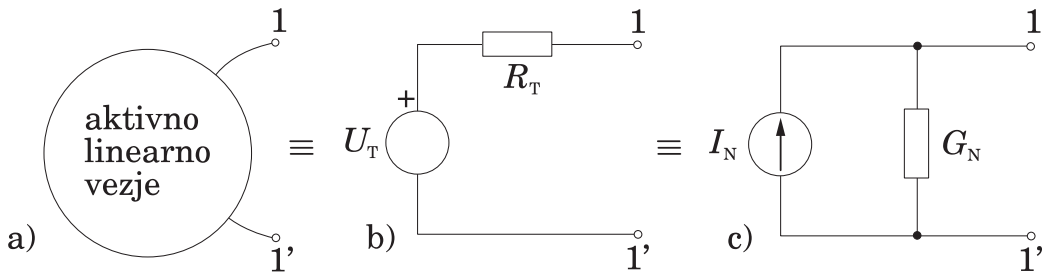
Zgled 38.3

Opredelimo močnostno bilanco vezja s slike 37.2. Za vejne napetosti smo dobili: $U_1 = 84$ V, $U_2 = -32$ V, $U_3 = U_4 = 52$ V, za vejne toke pa: $I_1 = I_2 = -1.6$ A, $I_3 = 1.3$ A in $I_4 = 0.3$ A. Potrdimo najprej identiteto 38.1:

$$\sum_{i=1}^{4} U_i I_i = -134.4 + 51.2 + 67.6 + 15.6 = 0$$

In še dalje; moči na uporih po vejah so: $G_1 U_1^2 = 705.6$ W, $R_2 I_2^2 = 51.2$ W, $R_3 I_3^2 = 67.6$ W, $R_4 I_4^2 = 3.6$ W. Tok I_4 teče v obratni smeri gonilne poljske jakosti napetostnega vira, zato je moč tega vira negativna: $P_{\mathrm{g4}} = -12$ W. Napetost na tokovnem viru je v obratni smeri kot je smer toka generatorja, zato je moč tega generatorja pozitivna: $P_{\mathrm{g1}} = 840$ W. Iz bilance sumandov je razvidno, da tokovni vir "pokriva" joulske izgube v celotnem vezju in še daje energijo napetostnemu viru. (Če bi bil napetostni vir akumulator, bi se v takšnem vezju polnil).

Stavek Thévenina in stavek Nortona. Ta dva stavka se nanašata na aktivno dvopolno linearno vezje, torej takšno, ki vsebuje aktivne linearne vire in pasivne linearne upore; slika 38.6, skica a). Stavek Thévenina pravi, da je možno aktivno linearno dvopolno



Slika 38.6: Aktivno dvopolno vezje in pripadajoči dve ekvivalentni vezji.

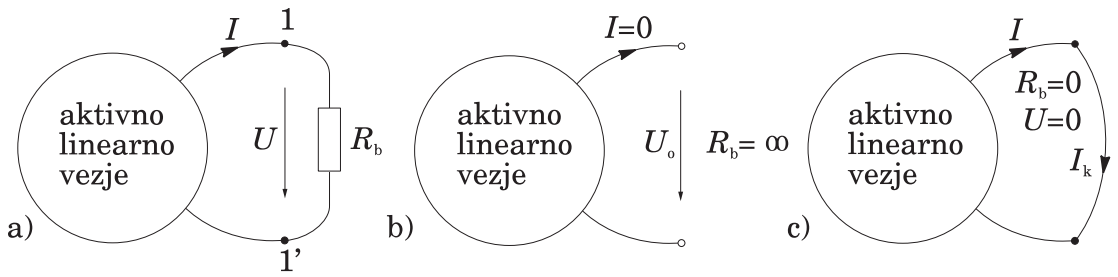
vezje ekvivalentno nadomestiti z realnim napetostnim virom (skica b)), kjer pomeni U_{T}

napetost med odprtima sponkama 1 in 1', R_T pa pomeni nadomestno (notranjo) upornost med sponkama 1 in 1', ko so neodvisni viri dvopolnega vezja deaktivirani. Stavek Nortona pa pravi, da je možno aktivno linearno dvopolno vezje ekvivalentno nadomestiti z realnim tokovnim virom, skica c), kjer pomeni I_N tok kratkega stika med sponkama 1 in 1', G_N pa pomeni nadomestno prevodnost dvopolnega vezja med sponkama 1 in 1', ko so neodvisni viri vezja deaktivirani.

Glede na ekvivalenco napetostnega in tokovnega vira (razdelek 36) velja med elementoma Théveninovega in Nortonovega vira še naslednja povezava

$$\boxed{R_\mathrm{T} = \frac{1}{G_\mathrm{N}} = \frac{U_\mathrm{T}}{I_\mathrm{N}}} \tag{38.2}$$

Zaradi sorodnosti obeh stavkov pokažimo njuno veljavnost kar hkrati. Vzemimo, da na aktivno dvopolno linearno vezje s skice a) priključimo poljuben upor (ki more biti tudi nelinearen); slika 38.7, skica a). Novonastalo vezje naj ima n-vej s toki I_1, I_2, ..., I_{n-1}, I in



Slika 38.7: Aktivno dvopolno vezje v treh tipičnih režimih obremenitve.

napetostmi U_1, U_2, ..., U_{n-1}, U. Če za to vezje napišemo potrebne tokovne in napetostne enačbe, bo teh n. V enačbah izrazimo vejne napetosti U_1 do U_{n-1} z vejnimi toki, vejno napetost U pa obdržimo kot neznanko. Na ta način dobimo n enačb, v katerih bo $n+1$ neznank: I_1, I_2, ..., I_{n-1}, I in U. Koeficienti teh enačb bodo konstante, saj je aktivno dvopolno linearno vezje linearno. Z metodo eliminacije moremo toke I_1 do I_{n-1} postopno izločati tako, da na koncu dobimo le eno enačbo z neznankama, ki še ostaneta – to sta I in U. Dobljena enačba je še vedno linearna in jo moremo zapisati v implicitni obliki kot

$$AI + BU + C = 0 \tag{T1}$$

Poleg te pa imamo še eno enačbo, ki je nismo nikjer uporabili in se nanaša na bremenski upor med sponkama 1 in 1'. Glede na dopuščeno nelinearnost tega upora, moremo odnos med U in I na njem formalno pisati kot

$$I = f(U) \tag{T2}$$

Za nadaljevanje razmišljanja je odločilnega pomena ugotovitev, da se konstante A, B in C v (T1) nanašajo izključno na aktivno linearno dvopolno vezje in da ta enačba urejuje (U, I) razmere levo od sponk 1, 1', medtem ko je enačba (T2) izključno v domeni bremenskega upora, ki more biti še povsem splošen, in določa (U, I) razmere desno od sponk 1, 1'. Če pa je temu tako, potem moremo s "spretno" izbiro bremenske upornosti

prepoznati vsebino konstant A, B in C. Bodi bremenska upornost z neskončno upornostjo (skica b)). Tok I bo nič in med sponkama 1 in 1' bo napetost (U_o) odprtih sponk. Po enačbi (T1) sledi

$$BU_o + C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = -\frac{C}{U_o} \tag{T3}$$

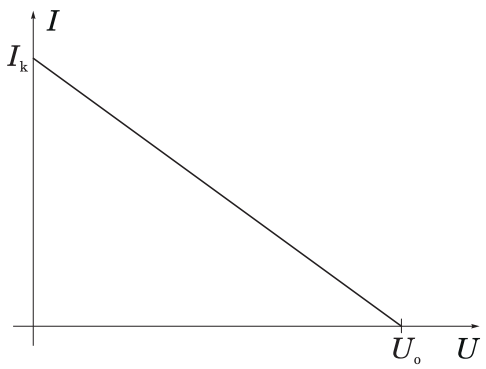
V drugo naj je bremenska upornost nič; skica c). Napetost U bo nič in preko sponk 1 in 1' bo tekel kratkostični tok I_k. Po enačbi (T1) sledi

$$AI_k + C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{C}{I_k} \tag{T4}$$

Če sedaj (T3) in (T4) vnesemo v (T1), dobimo zvezo

$$\frac{I}{I_k} + \frac{U}{U_o} = 1 \tag{T5}$$

To pa je natančno enačba enosmernega linearnega vira (slika 38.8), kjer sta I_k in U_o odseka na ordinati oz. abscisni osi. Če iz enačbe (T5) izrazimo U, dobimo:



Slika 38.8: Karakteristika aktivnega linearnega dvopola.

$$U = U_o - \frac{U_o}{I_k} I \tag{T6}$$

To pomeni, da moremo aktivno linearno dvopolno vezje ekvivalentno zamenjati z neodvisnim napetostnim virom napetosti $U_T = U_o$ in njemu zaporedno upornostjo $R_T = U_o/I_k$ – kot kaže skica b) na sliki 38.6. Če pa iz enačbe (T5) izrazimo tok I, dobimo:

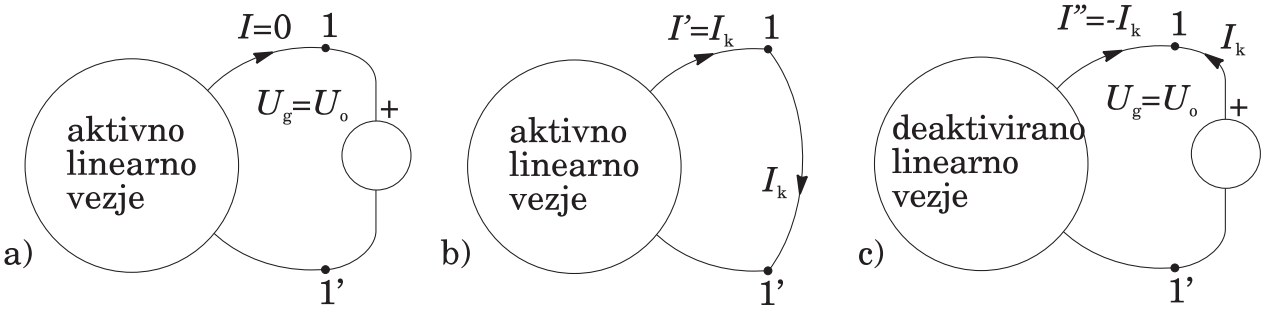
$$I = I_k - \frac{I_k}{U_o} U$$

kar pomeni, da moremo aktivno linearno dvopolno vezje ekvivalentno zamenjati z neodvisnim tokovnim virom s tokom $I_N = I_k$ in njemu vzporedno prevodnostjo $G_N = I_k/U_o$ – kot kaže skica c) na sliki 38.6.

V zgornjem primeru smo dobili t.i. *Théveninov vir*, v spodnjem pa t.i. *Nortonov vir*, ki sta ekvivalentna tako med seboj kot do aktivnega dvopolnega linearnega vezja med sponkama 1 in 1'; skica a) na sliki 38.6.

V nadaljevanju moramo le še pokazati, da upornosti $R_\mathrm{T} = 1/G_\mathrm{N}$ ustreza nadomestna (notranja) upornost dvopolnega linearnega vezja med 1 in 1', ko so vsi neodvisni notranji viri deaktivirani (neaktivni).

Vzemimo aktivno linearno vezje, ki je med sponkama 1 in 1' neobremenjeno; $I = 0$, $U = U_\mathrm{o}$. Po stavku o nadomestitvi moremo med 1 in 1' priključiti napetostni vir napetosti $U_\mathrm{g} = U_\mathrm{o}$ in se zaradi tega v vezju levo od sponk ne bo nič spremenilo, torej bo tudi tok skozi sponki 1 in 1' še vedno nič; slika 38.9, skica a). Po stavku o superpoziciji moremo



Slika 38.9: Superpozicija in notranja upornost aktivnega vezja.

tok I skozi sponki sestaviti iz dveh delov: $I = I' + I''$. Tok I' naj bo tok, ki ga določajo viri v aktivnem linearnem vezju pri deaktiviranem napetostnem viru, skica b), tok I'' pa naj določa le napetostni vir ($U_\mathrm{g} = U_\mathrm{o}$) pri deaktiviranih virih v dvopolnem linearnem vezju, skica c); ta se tokrat obnaša kot pasivno (uporovno) vezje. Na skici b) je I' očitno I_k, na skici c) pa mora zaradi $I = 0$, biti $I'' = -I_\mathrm{k}$. Tok $-I_\mathrm{k}$ teče iz vezja, tok I_k pa v vezje iz sponke (+) generatorja ($U_\mathrm{g} = U_\mathrm{o}$). Če pa pri napetosti U_o teče v neko pasivno vezje tok I_k, potem ima to vezje nadomestno upornost, ki je njun kvocient: $R_\mathrm{nad.} = U_\mathrm{o}/I_\mathrm{k}$. S tem smo pokazali tudi zadnji del Théveninovega oz. Nortonovega stavka: $R_\mathrm{T} = 1/G_\mathrm{N} = R_\mathrm{nad.}$

V praktični elektrotehniki je uporaba obeh stavkov sila pogosta; večkrat ju koristimo pri analizi (U, I) razmer v veji, ki vsebuje nelinearen element ali določen spremenljiv element, preostali del vezja pa je aktiven in linearen.

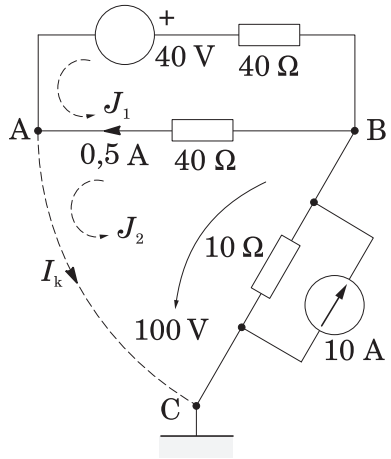
Zgled 38.4

Kot že večkrat, vzemimo tudi to pot vezje s slike 37.2, v katerem izvzemimo upor R_2; slika 38.10. Preostalemu vezju med spojiščema (sponkama) A in C določimo ekvivalentni Théveninov in Nortonov vir. Tokovni vir sklene svoj tok le preko upora 10 Ω. Potencial spojišča B je zato 100 V. Napetostni vir poganja tok v zgornji zanki in je enak 0.5 A. Potencial spojišča A je enak $-40 \cdot 0.5 + 100 = 80$ V. To je hkrati napetost odprtih sponk oz. U_T, $U_\mathrm{T} = 80$ V. Notranja upornost med sponkama A in C je pri deaktiviranih virih enaka $(40 \parallel 40) + 10 = 30$ Ω. Ekvivalentni Théveninov vir podaja skica a) na sliki 38.11.

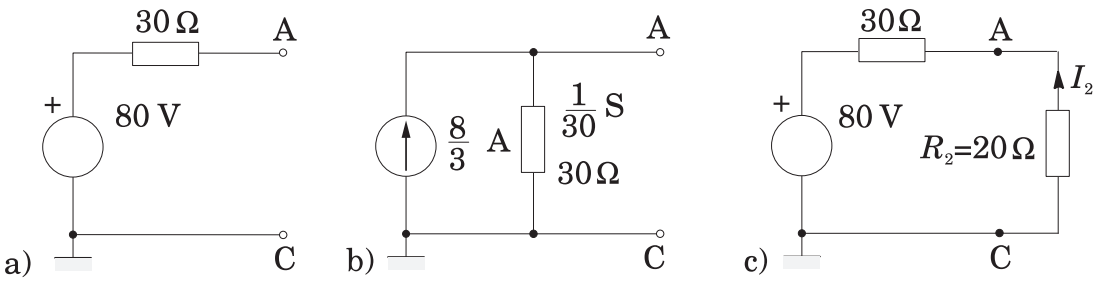
Nortonov vir moremo dobiti s sklicevanjem na ekvivalenco med njim in Théveninovim virom: $I_\mathrm{N} = 80/30 = (8/3)$ A in $G_\mathrm{N} = (1/30)$ S; skica b).

Moremo pa napraviti tudi kontrolo, in sicer tako, da pri kratkostični povezavi med A in C (črtkano na sliki 38.10) zapišemo potrebni enačbi za zančna toka J_1 in J_2

$$\begin{aligned} 80J_1 - 40J_2 &= -40 \\ -40J_1 + 50J_2 &= 100 \end{aligned}$$



Slika 38.10: Uporaba stavkov Thévenina ali Nortona.



Slika 38.11: Théveninov in Nortonov nadomestni vir v celoti zamenjata aktivno linearno dvopolno vezje.

Potrebujemo le rešitev za J_2, ki je kar iskani I_k: $J_2 = I_k = 8/3$ A.

Če sedaj na dobljeno ekvivalentno vezje priključimo upor $R_2 = 20\ \Omega$ (skica c)) iz vezja na sliki 37.2, dobimo tok I_2: $I_2 = -80/(30 + 20) = -1.6$ A, kar se ujema z rešitvijo za vejni tok te veje iz razdelka 37.

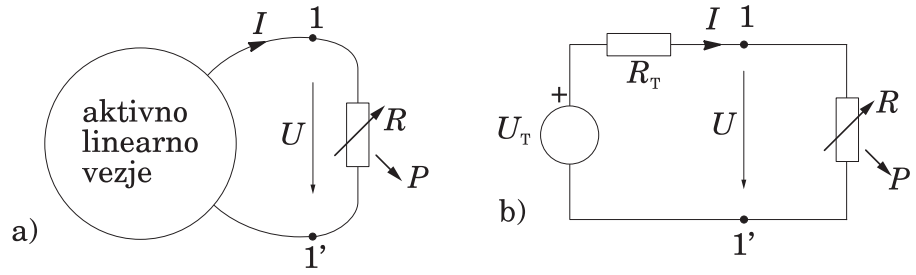
V drugem primeru, ko bi bil upor R_2 nelinearen, bi tok I_2 določili preprosto na grafičen način – kot je bilo to opisano v razdelku 36.

Stavek maksimalne moči. Ta stavek pravi naslednje: če na neko aktivno linearno dvopolno vezje priključimo upor, potem bo moč na njem največja takrat, ko bo njegova upornost enaka notranji (nadomestni) upornosti tega vezja med priključnima sponkama.

To bomo pokazali tako, da se bomo sklicevali npr. na Théveninov stavek in to aktivno dvopolno linearno vezje najprej zamenjali s Théveninovim virom in v nadaljevanju opazovali le še funkcijsko odvisnost moči P na priključenem uporu R, ko se ta spreminja; slika 38.12, skici a) in b). Moč na uporu R je določena s produktom UI,

$$P = UI = (U_\mathrm{T} - R_\mathrm{T} I)I$$

Če se spreminja upornost R, se spreminja tudi tok I skozi upor. Vprašajmo se: pri katerem toku bo moč največja? Pri $R = 0$ so $U = 0$, $I = U_\mathrm{T}/R_\mathrm{T}$ in $P = 0$, pri $R = \infty$



Slika 38.12: K maksimalni moči na bremenu.

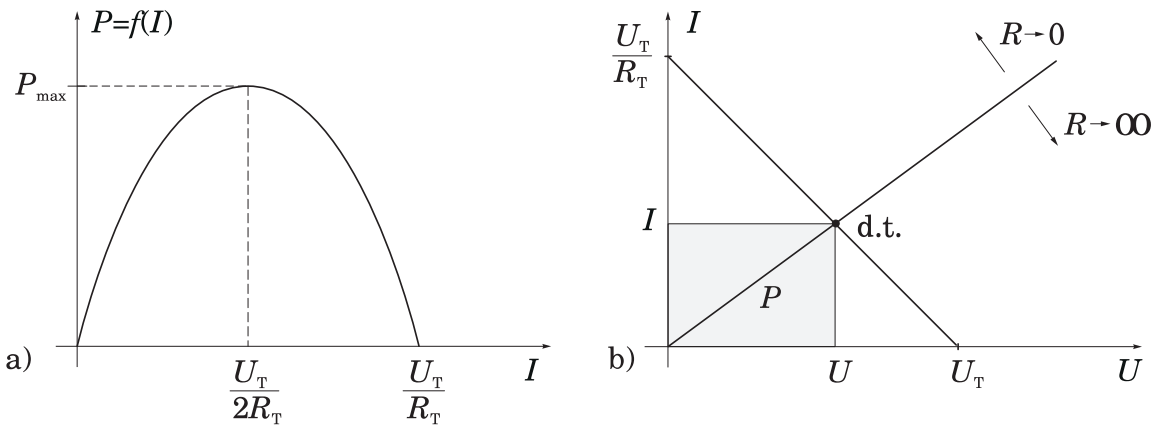
so $I = 0$, $U = U_\mathrm{T}$ in $P = 0$. Ker pa je $P = f(I)$ zvezna funkcija, bo med $I = 0$ in $I = U_\mathrm{T}/R_\mathrm{T}$ ekstrem funkcije $P = f(I)$. Odvajajmo moč po toku:

$$\frac{dP}{dI} = (U_\mathrm{T} - R_\mathrm{T}I) - R_\mathrm{T}I = U_\mathrm{T} - 2R_\mathrm{T}I$$

Odvod bo nič pri določenem toku I',

$$U_\mathrm{T} - 2R_\mathrm{T}I' = 0 \quad \Rightarrow \quad I' = \frac{U_\mathrm{T}}{2R_\mathrm{T}}$$

Tolikšen tok pa bo v vezju na skici b) tekel takrat, ko bo $R_\mathrm{T} + R = 2R_\mathrm{T}$ oz., ko bo $R = R_\mathrm{T}$. Napetost med sponkama bo takrat $U' = U_\mathrm{T} - R_\mathrm{T}I' = U_\mathrm{T}/2$ in bo enaka polovici napetosti odprtih sponk, tok I' pa bo polovica toka kratkega stika; $I' = U_\mathrm{T}/2R_\mathrm{T} = I_\mathrm{k}/2$. Moč na uporu R bo takrat $U_\mathrm{T}^2/4R_\mathrm{T}$ in bo to ustrezalo tudi maksimalni moči na uporu R, saj je $P = f(I)$ parabola z negativnim koeficientom pri kvadratičnem členu; slika 38.13, diagram a).



Slika 38.13: Bremenska moč v (I, P) in (U, I) diagramu.

Iskan odgovor bi mogli najti tudi v (U, I) diagramu; diagram b). Rešitev za U in I na bremenskem uporu sledi iz presečišča karakteristik vira in bremenskega upora. "Ploščina" šrafiranega pravokotnika ustreza moči na uporu R. Pravokotnik se stisne v trak pri skrajnih vrednostih te upornosti. Iskano maksimalno moč bi mogli formulirati z naslednjo geometrijsko nalogo: kateri včrtan pravokotnik v pravokotnem trikotniku bo imel največjo

ploščino? Bralec verjetno odgovor te naloge pozna; stranici pravokotnika morata biti enaki razpolovljenim katetam trikotnika. Na diagramu b) ustrezata temu $U_\mathrm{T}/2$ in $U_\mathrm{T}/2R_\mathrm{T}$ oz. $R = R_\mathrm{T}$.

S stavkom o maksimalni moči je v elektrotehniki tesno povezan pojem *prilagoditve*. Če je upornost bremena enaka notranji upornosti vira, potem pravimo, da je breme prilagojeno na vir.

Zgled 38.5

Oprimo se kar na prejšnji zgled in se vprašajmo: kolikšen bi naj bil upor med sponkama A in C, da bi bila moč na njem največja? Po vsem povedanem je odgovor na dlani: $R_2' = 30\ \Omega$, maksimalna moč na njem pa bi takrat bila $80^2/(4 \cdot 30) = 53.3$ W; pri $R_2 - 20\ \Omega$ je ta manjša in enaka 51.2 W.

Stavek recipročnosti. Stavek se nanaša na pasivno, linearno, štiripolno vezje, ki ima dva para sponk – naj sta to 1, 1' in 2, 2'; slika 38.14. Takšno vezje imenujemo kratko kar

Slika 38.14: Četveropol – štiripolno vezje.

četveropol. Z omenjeno konfiguracijo smo se srečali pri zvezda in trikot vezavi kondenzatorjev ali uporov.

Stavek o recipročnosti pravi: če med levima sponkama priključimo napetostni vir napetosti U_1' in bo skozi kratek stik desnih sponk tekel takrat tok I_2', in, če med desnima sponkama priključimo napetostni vir napetosti U_2'' in bo skozi kratek stik levih sponk tekel takrat tok I_1'', potem med temi količinami velja naslednja zveza: $U_1'/I_2' = U_2''/I_1''$.

Ali tudi drugače: če med levima sponkama priključimo tokovni vir s tokom I_1' in bo med odprtima desnima sponkama takrat napetost U_2', in, če med desnima sponkama priključimo tokovni vir s tokom I_2'' in bo med levima odprtima sponkama takrat napetost U_1'', potem med temi količinami velja naslednji odnos: $U_2'/I_1' = U_1''/I_2''$.

V prostem tekstu tudi rečemo: tako kot vpliva vhod na izhod, tako tudi izhod vpliva nazaj na vhod – *recipročnost*.

Za dokaz tega stavka vzemimo naše štiripolno vezje in mu na oba para sponk priključimo neodvisna vira napetosti U_g1 in U_g2; slika 38.15. Za dano vezje zapišimo potrebne enačbe za izračun zančnih tokov. Naj je teh n, vidna pa sta le $J_1 = I_1$ in $J_2 = -I_2$. Glede na opis metode zančnih tokov bo splošna enačba videti

$$\sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_j = \begin{cases} U_\mathrm{g1} & i = 1 \\ -U_\mathrm{g2} & i = 2 \\ 0 & i > 2 \end{cases}$$

Slika 38.15: Četveropol z napetostnima viroma na sponkah.

Koeficienti R_{ij} tvorijo simetrično matriko, $R_{ij} = R_{ji}$. Vse zančne toke moremo izračunati z metodo superpozicije. Naj so zančni toki $\{J_j^{(1)}\}$ povzročeni od prvega vira, zančni toki $\{J_j^{(2)}\}$ pa od drugega vira. Prve zančne toke dobimo kot rešitev sistema enačb

$$\sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_j^{(1)} = \begin{cases} U_{\mathrm{g1}} & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases} \tag{R1}$$

druge zančne toke pa kot rešitev sistema enačb

$$\sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_j^{(2)} = \begin{cases} -U_{\mathrm{g2}} & i = 2 \\ 0 & i \neq 2 \end{cases} \tag{R2}$$

Množimo enačbe pod (R1) po vrsti z zančnimi toki $\{J_i^{(2)}\}$ ter jih seštejemo; enako množimo enačbe pod (R2) po vrsti z zančnimi toki $\{J_i^{(1)}\}$ ter jih seštejemo; dobimo:

$$\sum_{i=1}^{n} J_i^{(2)} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_i^{(2)} J_j^{(1)} = U_{\mathrm{g1}} J_1^{(2)} = U_{\mathrm{g1}} I_1^{(2)}$$

in

$$\sum_{i=1}^{n} J_i^{(1)} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_i^{(1)} J_j^{(2)} = -U_{\mathrm{g2}} J_2^{(1)} = U_{\mathrm{g2}} I_2^{(1)}$$

Ker pa so koeficienti R_{ij} simetrični, sta dvojni vsoti identični; dobimo:

$$\frac{U_{\mathrm{g1}}}{I_2^{(1)}} = \frac{U_{\mathrm{g2}}}{I_1^{(2)}}$$

To pa je ravno relacija, ki smo jo hoteli pokazati. ♣ Bralec naj z uporabo metode spojiščnih potencialov pokaže veljavnost recipročnosti v primeru neodvisnih tokovnih virov med paroma sponk. ♣

39. Osnove pasivnih linearnih štiripolnih vezij

Sama teorija t.i. *četveropolov* je silno bogata in uporabna na vseh področjih elektrotehnike (od energetike, teorije električnih strojev, do elektronike, linij itn.). Štiripolno vezje[1] je

[1]Posplošitev dvopolnih ali štiripolnih vezij so t.i. *multipolna (večpolna) vezja*. Simbolno jih predstavimo s "škatlo", ki ima ustrezno število izvodov (sponk).

najpogosteje vezni člen med parom vhodnih in parom izhodnih sponk. Kot pri vezjih nasploh, nas tudi pri četveropolih prvenstveno zanimajo značilne relacije med napetostima in tokoma na vhodni oz. izhodni strani. Nadalje bi se osredotočili le na pasivne in linearne četveropole, torej takšne, ki vsebujejo linearne upore in nimajo notranjih virov; slika 38.14.

Za splošno pasivno linearno štiripolno vezje poskusimo ugotoviti povezave med napetostima in tokoma na parih sponk. V ta namen priključimo na para sponk vira s tokoma I_{g1} in I_{g2}; slika 39.1. Po stavku superpozicije moremo napetosti U_1 in U_2 izraziti

Slika 39.1: Četveropol s tokovnima viroma na sponkah.

z vsoto prispevkov obeh virov. Ker pa je vezje linearno, je prispevek določenega vira k določeni napetosti premosorazmeren s tem tokom; zaradi $I_1 = I_{g1}$ oz. $I_2 = I_{g2}$ je ta premosorazmeren tudi s tokom skozi sponki para. Pišemo:

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \\ U_2 &= R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \end{aligned}} \tag{39.1}$$

Sorazmernostni koeficienti dimenzijsko ustrezajo upornostim in so v celoti določeni z elementi znotraj četveropola. Enačbama zato tudi rečemo, da sta enačbi četveropola oz. *četveropolni enačbi*.

Gotovo bi se bilo zanimivo vprašati po določitvi upornostnih koeficientov, ne da bi pri tem vedeli za sestavo (zgradbo) štiripolnega vezja. To bi napravili takole: če bi na vhodnih sponkah imeli tokovni vir s tokom I_{g1} in bi merili vhodno napetost U_1 ter izhodno napetost U_2 pri odprtih sponkah na izhodu ($I_2 = 0$), bi po zgornjih enačbah dobili R_{11} in R_{21}:

$$R_{11} = \frac{U_1}{I_{g1}} \qquad R_{21} = \frac{U_2}{I_{g1}} \qquad \text{pri} \qquad I_2 = 0$$

Upornostni koeficient R_{11} očitno ustreza vhodni (nadomestni) upornosti v četveropol pri odprtem paru sponk na izhodu, koeficient R_{21} pa ustreza t.i. medsebojni upornosti oz. kvocientu, ki smo ga pisali pri stavku o recipročnosti. Preostala koeficienta dobimo tako, da vlogo vhoda in izhoda zamenjamo; dobili bi:

$$R_{12} = \frac{U_1}{I_{g2}} \qquad R_{22} = \frac{U_2}{I_{g2}} \qquad \text{pri} \qquad I_1 = 0$$

Koeficient R_{22} ustreza vhodni (nadomestni) upornosti z desne strani v četveropol pri odprtih sponkah na vhodu, medtem ko je R_{12} – po stavku recipročnosti – enaka R_{21}.

Zvezo med toki in napetostmi četveropola bi lahko zapisali tudi v matrični formi:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

ali kot

$$\boxed{\mathbf{U} = \mathbf{R}\,\mathbf{I}} \tag{39.1a}$$

kjer je matrika $\mathbf{R}$ t.i. *upornostna matrika* četveropola, ki je zaradi recipročnosti tudi simetrična.

Tako kot smo s četveropolnima enačbama 39.1 izrazili napetosti s tokoma, moremo tudi poljubni dve količini izraziti s preostalima. Vseh različnih kombinacij je šest, vendar od vseh omenimo le še dve, ki sta pogosto v rabi, to sta: izražava tokov z napetostmi (preko prevodnostne matrike) in izražava vhodnih količin z izhodnima (preko verižne matrike).

Če iz 39.1 izrazimo toka z napetostima, dobimo:

$$I_1 = \frac{R_{22}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} U_1 - \frac{R_{12}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} U_2 = G_{11}U_1 + G_{12}U_2$$

$$I_2 = -\frac{R_{12}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} U_1 + \frac{R_{11}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} U_2 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2$$

V matrični formi bi pisali:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

ali pa

$$\boxed{\mathbf{I} = \mathbf{G}\,\mathbf{U}} \tag{39.2}$$

Očitno je tudi *prevodnostna matrika* $\mathbf{G}$ simetrična, kar je spet povezano z linearnostjo četveropolnega vezja in veljavnostjo stavka recipročnosti. ♣ Bralec more sam ugotoviti, da G_{11} in G_{22} ustrezata nadomestni prevodnosti med dotičnima sponkama, ko je drug par sponk (to pot) kratko staknjen. Prevodnost $G_{12}(= G_{21})$ pa ustreza t.i. medsebojni prevodnosti med paroma sponk. ♣

Iz enačb 39.1 izrazimo na koncu še vhodni količini z izhodnima; dobimo:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{R_{11}}{R_{21}} U_2 - \left(\frac{R_{11}R_{22}}{R_{21}} - R_{12}\right) I_2 = aU_2 + b(-I_2) \\ I_1 &= \frac{1}{R_{21}} U_2 - \frac{R_{22}}{R_{21}} I_2 = cU_2 + d(-I_2) \end{aligned}$$

V matrični obliki bi pisali:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ (-I_2) \end{bmatrix}$$

ali pa

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{T}\,\mathbf{S}} \tag{39.3}$$

kjer sta **P** in **S** vektorja vhodnih (primarnih) oz. izhodnih (sekundarnih) količin. Matriko **T** imenujemo *verižna matrika*,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_{11}}{R_{21}} & \dfrac{R_{11}R_{22}}{R_{21}} - R_{21} \\ \dfrac{1}{R_{21}} & \dfrac{R_{22}}{R_{21}} \end{bmatrix}$$

pripadajoče elemente pa verižne parametre danega četveropola. Tok $(-I_2)$ je nasproten k toku I_2 in bi bil hkrati vstopni tok v drug četveropol – če bi ga verižno dodali k prvemu. Zaradi $R_{12} = R_{21}$ je determinanta matrike **T** enaka ena ($ad - bc = 1$), kar pomeni, da se v verižni matriki izkazuje stavek recipročnosti s prav to enačbo.

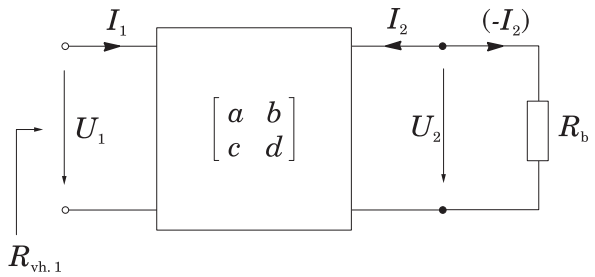
Tudi koeficiente verižne matrike danega četveropola moremo razmeroma preprosto določiti z meritvijo. Če na vhodno stran priključimo vir napetosti U_{g1} ter merimo vhodni tok I_1 in izhodno napetost U_2 pri odprtih sponkah na izhodu ($I_2 = 0$), dobimo a in c:

$$a = \frac{U_{g1}}{U_2} \qquad c = \frac{I_1}{U_2} \qquad \text{pri} \qquad I_2 = 0$$

In ko priključimo na vhod vir s tokom I_{g1} ter merimo vhodno napetost U_1 in izhodni tok I_2 pri kratko staknjenem izhodu ($U_2 = 0$), dobimo še b in d:

$$b = -\frac{U_1}{I_2} \qquad d = -\frac{I_{g1}}{I_2} \qquad \text{pri} \qquad U_2 = 0$$

Poznavanje verižnih parametrov četveropola se kaže kot prikladno tudi takrat, ko na izhod četveropola priključimo breme z upornostjo R_b in opazujemo, kako se ta preko četveropola transformira na vhodno stran; slika 39.2. Četveropolni enačbi sta:



Slika 39.2: Verižni parametri in transformacija bremena na vhod.

$$U_1 = aU_2 + b(-I_2)$$

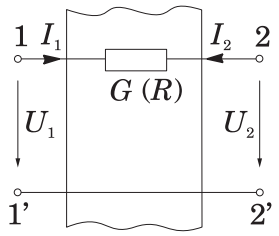
$$I_1 = cU_2 + d(-I_2)$$

Ker pa velja na izhodu še zveza $U_2 = R_b(-I_2)$, dobimo po vstavitvi te v zgornji enačbi za kvocient U_1/I_1 ravno vhodno upornost,

$$\boxed{R_{vh.1} = \frac{aR_b + b}{cR_b + d}} \tag{39.4}$$

Preslikava ali transformacija "izhoda" na "vhod" je značilna in jo bo bralec imel priliko še večkrat srečati.

Načelno so seveda te (in vse druge) izražave četveropolnih enačb med seboj enakovredne, kar pa še ne pomeni, da jih moremo za vsak četveropol tudi zapisati. Da takšno izjemo pokažemo, vzemimo preprost četveropol z enim samim uporom, slika 39.3. Po I.



Slika 39.3: Enostaven četveropol.

in II. Kirchhoffovem zakonu zapišemo enačbi:

$$I_1 + I_2 = 0 \qquad\qquad -U_1 + RI_1 + U_2 = 0$$

Po ureditvi dobimo:

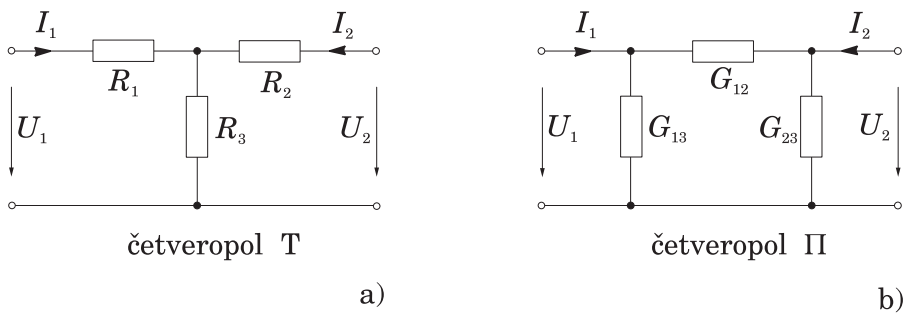
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Očitno moremo toka izraziti z napetostima, medtem ko obratno ne gre, saj je determinanta matrike prevodnosti enaka nič. Brez težav pa dobimo verižno izražavo četveropolnih enačb,

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ (-I_2) \end{bmatrix}$$

in determinanta matrike je res ena.

Četveropola T in Π. V elektrotehniki sta četveropola T in Π izredno pogosta, še posebno, kadar poljubnemu četveropolu izmerimo ali kako drugače določimo četveropolne parametre in mu v nadaljevanju priredimo ekvivalenten četveropol v eni od teh dveh konfiguracij; slika 39.4. Kirchhoffove enačbe za oba četveropola so:



Slika 39.4: Še enkrat o ekvivalenci T- in Π-vezja.

$$-U_1 + R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_2) = 0 \qquad\qquad -I_1 + G_{13}U_1 + G_{12}(U_1 - U_2) = 0$$

$$-U_2 + R_2 I_2 + R_3(I_1 + I_2) = 0 \qquad\qquad -I_2 + G_{23}U_2 + G_{12}(U_2 - U_1) = 0$$

Po ureditvi dobimo za četveropol T enačbo

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

za četveropol Π pa enačbo

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{12} + G_{13} & -G_{12} \\ -G_{12} & G_{12} + G_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Smiselno bi se bilo vprašati: kdaj bosta četveropola ekvivalentna? Ekvivalentna bosta očitno takrat, ko se bosta ujemala v četveropolnih enačbah. V ta namen izrazimo toka I_1 in I_2 v četveropolu T z napetostima U_1 in U_2; dobili bomo:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_1 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

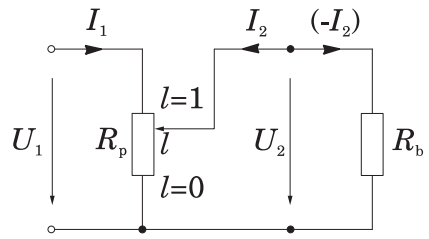
Po primerjavi teh koeficientov s koeficienti prevodnosti četveropola Π dobimo povezave:

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{1}{G_{12}} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{1}{G_{23}} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \\ R_{13} &= \frac{1}{G_{13}} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \end{aligned}$$

Relacije so povsem skladne s tistimi, ki smo jih spoznali pri zamenjavi zvezda vezave s trikotno (razdelek 36).

Zgled 39.1

Preprost primer četveropolnega vezja je potenciometrski delilnik napetosti, pri katerem s položajem drsnika izbiramo napetost na bremenu R_b; slika 39.5. Potencio-



Slika 39.5: Potenciometrski delilnik kot četveropol.

meter naj je linearen: da legi (l) drsnika proporcionalno ustreza delitev upornosti na spodnjo (lR_p) in zgornjo ($(1-l)R_\mathrm{p}$) upornost.

Če izhajamo iz T-četveropola ter pišemo: $R_1 = (1-l)R_\mathrm{p}$, $R_2 = 0$ in $R_3 = lR_\mathrm{p}$, dobimo:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_\mathrm{p}I_1 + lR_\mathrm{p}I_2 \\ U_2 &= lR_\mathrm{p}I_1 + lR_\mathrm{p}I_2 \end{aligned}$$

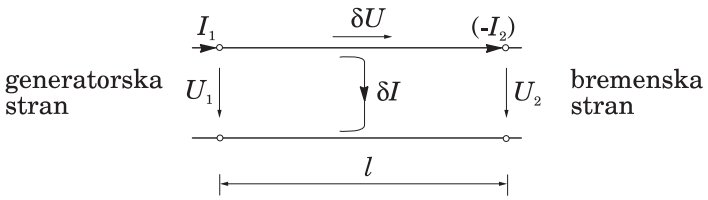
Nadalje naj nas zanima odvisnost razmerja U_2/U_1 od lege drsnika. Tvorimo razliko $lU_1 - U_2$; dobimo: $lU_1 - U_2 = l(l-1)R_\mathrm{p}I_2$. Ker pa je $(-I_2)$ enak tudi U_2/R_b, dobimo za iskano razmerje tole:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{l}{1 + l(1-l)(R_\mathrm{p}/R_\mathrm{b})}$$

Iz izraza vidimo, da bo razmerje med izhodno in vhodno napetostjo v dobri linearni korelaciji z lego drsnika le, če bo upornost potenciometra dosti manjša od bremenske upornosti R_b. Takrat je $U_2/U_1 \simeq l$.

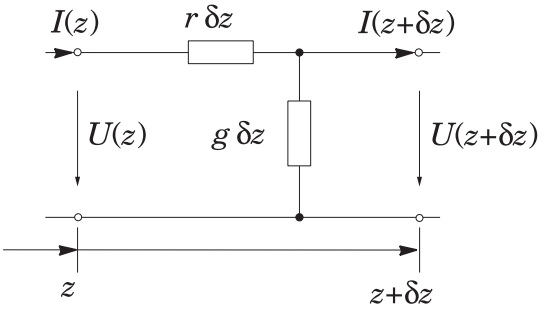
Zgled 39.2

Določimo četveropolni enačbi realnega izgubnega dvovoda dolžine l; slika 39.6.



Slika 39.6: Izgubna linija kot četveropol.

Realen dvovod ima določeno vzdolžno izgubno upornost, ki povzroča padec napetosti δU vzdolž voda, zato je napetost na izhodu gotovo manjša od vhodne napetosti, $\delta U = U_1 - U_2 > 0$. Tudi izolacija med žicama dvovoda ni idealna, zato je vzdolž voda stalno prisoten prečni (izolacijski) tok, ki se "vrne" k vhodu, predno bi "dospel" do izhoda, zato tok v žicah vzdolž voda stalno usiha, $\delta I = I_1 - (-I_2) > 0$. Posledica tega je, da se tako napetost med žicama kot tok v žicah vzdolž voda spreminjata (manjšata) in sta zato funkciji vzdolžne koordinate. Potemtakem bo smiselno zapisati napetostno-tokovni relaciji na kratkem segmentu dolžine δz vzdolž voda. Naj ima dvovod vzdolžno upornost na enoto dolžine (obeh žic) enako r in naj ima izolacija prečno prevodnost na enoto dolžine enako g. Odsek dvovoda dolžine δz moremo predstaviti s četveropolom, ki ima v vzdolžni veji upornost $r\delta z$, v prečni veji pa prevodnost $g\delta z$; slika 39.7. Tok in napetost sta sedaj funkciji vz-



Slika 39.7: Četveropol iz verige modelnih četveropolov.

dolžne (z) koordinate. Vstopni količini v segment dvovoda sta $U(z)$ in $I(z)$, izstopni

pa $U(z+dz)$ in $I(z+dz)$. Po Kirchhoffovih zakonih zapišemo:

$$\begin{aligned} -U(z) + rI(z)\delta z + U(z+\delta z) &= 0 \\ -I(z) + gU(z+\delta z)\delta z + I(z+\delta z) &= 0 \end{aligned}$$

Nadalje tvorimo kvocienta

$$\begin{aligned} -\frac{U(z+\delta z) - U(z)}{\delta z} &= rI(z) \\ -\frac{I(z+\delta z) - I(z)}{\delta z} &= gU(z+\delta z) \end{aligned}$$

V limiti, ko gre $\delta z \to 0$, preideta kvocienta v odvoda; dobimo:

$$-\frac{dU}{dz} = rI \qquad\qquad -\frac{dI}{dz} = gU$$

Intenzivnost upadanja napetosti je sorazmerna toku in intenzivnost upadanja toka je sorazmerna napetosti. Če drugo enačbo še enkrat odvajamo in jo vnesemo v prvo, dobimo še

$$\frac{d^2I}{dz^2} - rgI = 0$$

Prišli smo do diferencialne enačbe za tok[2] (za napetost je enačba podobna). Njena rešitev je takšna funkcija, katere drugi odvod je do predznaka sorazmeren njej sami. Iz matematike vemo, da imata to lastnost funkciji $\sinh\gamma z$ in $\cosh\gamma z$ (oz. funkciji $e^{\gamma z}$ in $e^{\gamma z}$), če je $\gamma^2 = rg$. Splošno rešitev zgornje enačbe bomo zapisali z linearno kombinacijo hiperboličnih funkcij (♣ z drugima dvema naj poskusi bralec sam ♣),

$$I(z) = A\sinh(\gamma z) + B\cosh(\gamma z)$$

kjer sta konstanti A in B zaenkrat še poljubni. Iz enačbe $dI/dz = -gU$ dobimo še splošno rešitev za napetost $U(z)$

$$U(z) = -A\eta\cosh(\gamma z) - B\eta\sinh(\gamma z)$$

kjer smo z η označili koren $\sqrt{r/g}$, ki dimenzijsko ustreza upornosti. Pa vzemimo, da sta tok $I(l)$ in napetost $U(l)$ na koncu dvovoda znana; pišemo:

$$\begin{aligned} U(l) &= -A\eta\cosh(\gamma l) - B\eta\sinh(\gamma l) \\ I(l) &= A\sinh(\gamma l) + B\cosh(\gamma l) \end{aligned}$$

Konstanti A in B sta od tu preprosto določljivi,

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\cosh(\gamma l)}{\eta}U(l) - \sinh(\gamma l)I(l) \\ B &= \frac{\sinh(\gamma l)}{\eta}U(l) + \cosh(\gamma l)I(l) \end{aligned}$$

Če to vnesemo v splošno rešitev za $I(z)$ in $U(z)$ ter postavimo $z = 0$, dobimo vhodni količini $U(0) = U_1$ in $I(0) = I_1$ izraženi z izhodnima $U(l) = U_2$ in $I(l) = (-I_2)$,

$$\begin{aligned} U_1 &= \cosh(\gamma l)U_2 + \eta\sinh(\gamma l)(-I_2) \\ I_1 &= \frac{\sinh(\gamma l)}{\eta}U_2 + \cosh(\gamma l)(-I_2) \end{aligned}$$

[2]Ta enačba je poseben primer telegrafske enačbe (razdelek 58), ko je $\partial/\partial t \equiv 0$ – enosmerne razmere.

ali

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & \eta \sinh(\gamma l) \\ \sinh(\gamma l)/\eta & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ (-I_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ (-I_2) \end{bmatrix}$$

Povsem razvidno je $ad - bc = 1$. Če je izgubna prevodnost g zanemarljivo majhna, potem velja: $\sinh(\gamma l) \simeq \gamma l$ in $\cosh(\gamma l) \simeq 1$. Za vhodni količini dobimo:

$$\begin{aligned} U_1 &\simeq U_2 + rl(-I_2) \\ I_1 &\simeq gU_2 + (-I_2) \end{aligned}$$

Ko idealiziramo in rečemo: $g = 0 \Rightarrow (-I_2) = I_1$ (izstopni tok je enak vstopnemu) in $U_2 = U_1 - rlI_1$ (izhodna napetost je za padec rlI_1 manjša od vhodne).

Ne morem si predstavljati drugače, kakor da na vsakem mestu, kjer najdemo silnice, obstaja neko fizikalno stanje ali učinkovanje, ki ima dovolj energije, da povzroči te pojave. Moj namen je, da v zvezi s tem razčistim vse špekulacije tako, da razčistim rezultate mehanike določenih stanj napetosti in gibanj v mediju, te rezultate pa potem primerjam z opaženimi magnetnimi in električnimi pojavi. Mehanske posledice takšne hipoteze bodo, upam, uporabne za tiste, ki smatrajo te pojave kot posledico vpliva medija.

Maxwell

V. POGLAVJE

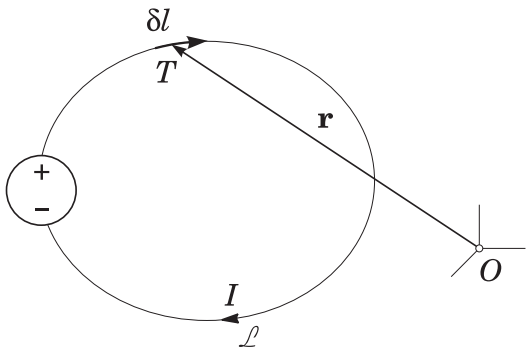
Magnetostatično polje

40. Ampèrov zakon magnetne sile

S tem razdelkom odpiramo (novo) poglavje, ki je neposredno vezano na časovno nespremenljive električne toke (o katerih je do sem tekla beseda) – to je tema o njim pridruženem *magnetostatičnem polju*[1].

Čeravno so bili določeni magnetni – enako kot električni – pojavi poznani že od antike (sile med trajnimi magneti), pa je sistematično proučevanje magnetike (magnetizma) doživelo svoj bliskovit razmah šele z Oerstedovim odkritjem interakcije med magnetno iglo (trajnim magnetom) in električnim tokom v galvanskem krogotoku (l. 1819/20). Sledila je izredna naglica: med magnetom in tokom v zanki deluje sila; tokovna zanka ima lastnosti trajnega magneta (in obratno); med toki deluje sila. Po seriji izvrstnih eksperimentov je André-Marie Ampère že leta 1820 prišel do matematične formulacije nove – magnetne – sile med dvema tokovnima elementoma.

Tokovni element. Za začetek vzemimo poljubno oblikovano tanko žico (zanko $\mathcal{L}$) in vir, ki vzdolž nje poganja istosmerni tok I. Zanko moremo razumeti kot niz kratkih odsekov $\delta\mathbf{l}$ (v limiti diferencialov $d\mathbf{l}$) vzdolž toka; vsakemu od njih pripada centralna točka T s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$; slika 40.1. Takim segmentom krogotoka pravimo tudi *tokovni*

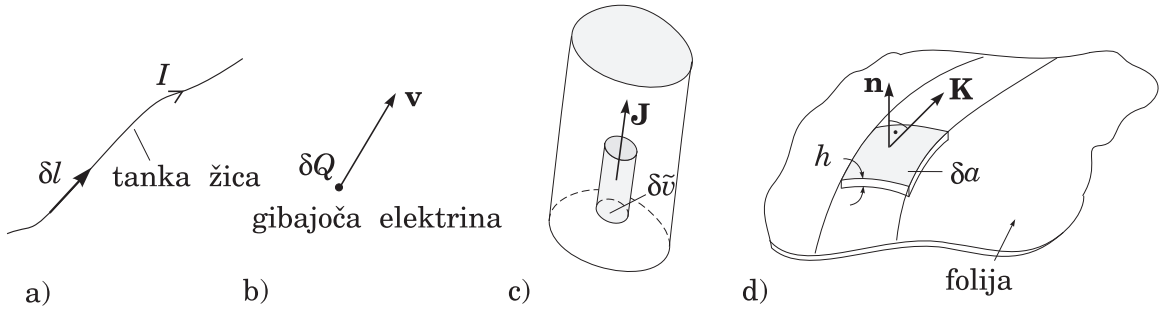


Slika 40.1: Tokovna zanka in tokovni element.

[1]Kasneje – in v nadaljevanju – bomo *magnetno polje* priredili tudi časovno "počasi" spremenljivim tokom; njihovo polje ima določene zakonitosti sorodne statičnemu, zato mu rečemu *kvazistatično magnetno polje*. O njem in njegovi nadgradnji – dinamičnem (elektromagnetnem) polju – bo govora v šestem poglavju.

elementi[2] in jim nadalje priredimo še jakost oz. moment s produktom $I\,\delta\mathbf{l}$ (oz. $I\,d\mathbf{l}$ v diferencialu).

Tu bomo izkoristili priliko in si ogledali še drugačne oblike tokovnih elementov, ki bodo prišli v poštev kasneje – pri popisovanju magnetnega polja poljubnih tokovnih struktur. Po definiciji električnega toka moremo tokovni element, skica a) na sliki 40.2, predstaviti kot elektrino δQ, ki v času δt "preteče" pot $\delta\mathbf{l}$ s hitrostjo $\mathbf{v} = \delta\mathbf{l}/\delta t$; torej: $I\delta\mathbf{l} = (\delta Q/\delta t)\mathbf{v}\delta t = \delta Q\mathbf{v}$. To pomeni, da je vsaka (točkasta) elektrina δQ, ki se giblje s



Slika 40.2: Različne prostorske konfiguracije tokovnih elementov.

hitrostjo $\mathbf{v}$, v bistvu tokovni element z momentom $\delta Q\mathbf{v}$; skica b). In dalje, če je δQ elektrinski oblak s prostorsko gostoto ρ v volumnu $\delta\tilde{v}$, potem je pripadajoč moment takšnega tokovnega elementa enak $\delta Q\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}\delta\tilde{v}$, kjer je $\rho\mathbf{v}$ enak tudi tokovni gostoti $\mathbf{J}$. To dalje pomeni, da je vsaka prostorninica $\delta\tilde{v}$ v tokovnem polju $\mathbf{J}$ tokovni element z momentom $\mathbf{J}\delta\tilde{v}$; skica c). Nazadnje si oglejmo še tokovni element toka vzdolž tankega traku (folije) debeline h; skica d). Tokovni element $\mathbf{J}\delta\tilde{v}$ bi v "rezinici" $\delta\tilde{v} = h\,\delta a$ pisali kot $\mathbf{J}h\,\delta a$. Produktu $\mathbf{J}h$ pravimo *gostota ploskovnega toka* in ga označujemo s $\mathbf{K}$; enota je A/m. Zanj se uporablja tudi termin *tokovna obloga*. Takšni oblogi pripada na segmentu δa tokovni element z momentom $\mathbf{K}\delta a$.

Zgled 40.1

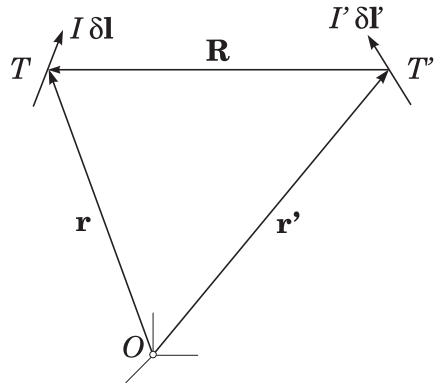
Naj vzdolž Al folije (debeline $h = 0,1$ mm in širine $a = 20$ mm) teče tok $I = 5$ A z enakomerno gostoto. Gostota J bo $I/ah = 2.5$ A/mm^2. Pripadajoč ploskovni tok bo $Jh = I/a = 250$ A/m. Ploskovnemu toku K rečemo tudi gostota toka na širino traku (ali folije).

Zaključimo: če smo za dosedanje potrebe študija električnega polja prirejali posameznim porazdelitvam elektrin zapise δQ, $\rho\,\delta\tilde{v}$, $\sigma\,\delta a$, ali $q\,\delta l$ (oz. dQ, $\rho\,d\tilde{v}$, $\sigma\,da$, ali $q\,dl$), ki smo jih razumeli kot množine elektrin na določenih mestih v prostoru, potem bomo pri spoznavanju magnetnega polja prirejali gibajočim elektrinam zapise $\delta Q\mathbf{v}$, $\mathbf{J}\,\delta\tilde{v}$, $\mathbf{K}\,\delta a$, ali $I\,\delta\mathbf{l}$ (oz. $dQ\mathbf{v}$, $\mathbf{J}\,d\tilde{v}$, $\mathbf{K}\,da$, ali $I\,d\mathbf{l}$), ki jih bomo razumeli kot momente tokovnih elementov

[2]Če bi tokovni element (segment $\delta\mathbf{l}$ s tokom I) "miselno izvzeli" iz krogotoka, bi – po kontinuitetni enačbi – tok na konceh segmenta gradil presežka elektrin $\pm Q$ ($I = dQ/dt$), ta pa točkasti dipol z momentom $\delta\mathbf{p} = Q\,\delta\mathbf{l}$. Ker pa je tok vzdolž zanke konstanten, tega kopičenja na konceh dejansko ni, saj se elektrina Q na koncu enega kompenzira z $-Q$ na začetku drugega segmenta itd. Ne velja pa to splošno. Tokovni element je gradnik krogotoka tudi pri spremenljivem toku, torej $i\,\delta\mathbf{l}$, in tudi pri toku, ki se vzdolž žice krajevno spreminja (žična antena). Takrat je $di/dl = dq/dt$.

dane tokovne strukture v prostoru; od zapisanih bomo uporabili pa pač tistega, ki bo priliki primeren.

Ampèrov zakon magnetne sile. Za matematično korekten zapis magnetne sile med dvema tokovnima elementoma si pripravimo splošno prostorsko konstelacijo; slika 40.3. Jakosti tokovnih elementov opredeljujeta momenta $I\,\delta\mathbf{l}$ in $I'\,\delta\mathbf{l}'$, njuni mesti v prostoru



Slika 40.3: Splošna lega dveh tokovnih elementov.

označujeta točki T in T' s krajevnima vektorjema $\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}'$, njuno relativno pozicijo pa določa distančni vektor $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Omenjena tokovna elementa sta segmenta istega ali pa dveh tujih si tokokrogov. Dogovorimo se še, da bomo takšne tokovne elemente zaznačevali[3] kot "kratke" dolžinske segmente ($\delta\mathbf{l}$), pripisali pa jim bomo pripadajoč moment $I\,\delta\mathbf{l}$. Kratko bomo rekli: tokovni element $I\,\delta\mathbf{l}$ v točki T.

Po Ampèrovih kvantitativnih in kvalitativnih eksperimentalnih ugotovitvah ter v smislu veljavnega sistema merskih enot zapišemo Ampèrovo (magnetno) silo $\delta\mathbf{F}_\mathrm{m}$ na tokovni element $I\,\delta\mathbf{l}$ v praznem prostoru (vakuumu) na tale način:

$$\boxed{\delta\mathbf{F}_\mathrm{m} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2}\, I\delta\mathbf{l} \times (I'\delta\mathbf{l}' \times \mathbf{R}/R)} \tag{40.1}$$

V izrazu je μ_0 permeabilnost praznega prostora, ki je v SI sistemu merskih enot izbrana konstanta z vrednostjo $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am. (Z njo je neposredno določena zveza med dielektričnostjo (ε_0) in svetlobno hitrostjo (c_0) v vakuumu: $\varepsilon_0\mu_0 c_0^2 = 1$ oz. $1/c_0^2\varepsilon_0 = 4\pi \cdot 10^7$ Vs/Am – razdelek 9.)

Izraz za Ampèrovo silo je že na pogled zapletenejši od zapisa Coulombove sile v elektrostatiki (enačba 9.1). Začetno "težavo" predstavja že dvojni vektorski produkt, saj ni "na hitro" razvidna niti velikost niti smer sile; osvetlitvi izraza bomo zato posvetili nekoliko več pozornosti.

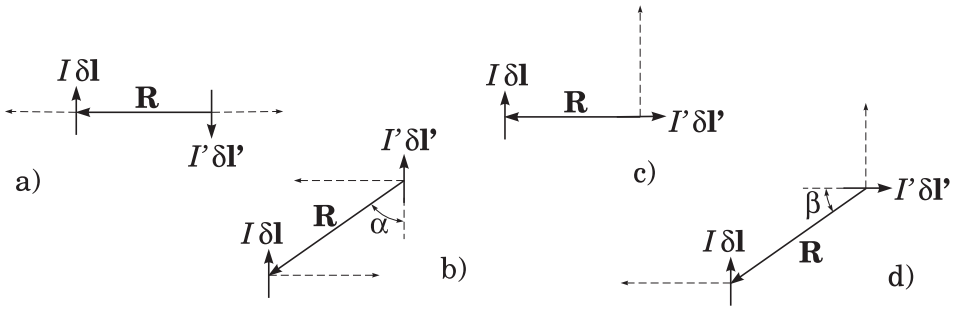
Če obrnemo vlogi tokovnih elementov in zamenjamo $\mathbf{R}$ z $\mathbf{R}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = -\mathbf{R}$, moremo zapisati tudi silo $\delta\mathbf{F}'_\mathrm{m}$ na tokovni element $I'\,\delta\mathbf{l}'$, in sicer:

$$\delta\mathbf{F}'_\mathrm{m} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2}\, I'\delta\mathbf{l}' \times (I\delta\mathbf{l} \times \mathbf{R}'/R)$$

[3]Ker ni potrebno, pa tudi v navadi ni, da bi moment tokovnega elementa vpeljevali kot novo količino, je zgornji dogovor neke vrste "odstopanje" od ustaljenega označevanja vektorjev. V nasprotnem bi bilo potrebno sliko 40.3 še dodatno grafično opremiti.

Če za hip označimo tri produktne vektorje (v enačbi 40.1) po vrsti z $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$, potem moremo po lastnostih dvojnega vektorskega množenja za $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ pisati razliko $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$. Pri sili $\delta\mathbf{F}'_{\mathrm{m}}$ bi potem za produkt $\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times(-\mathbf{c}))$ pisali razliko $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$. Iz obojega je povsem očitno, da sili $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ in $\delta\mathbf{F}'_{\mathrm{m}}$ nista vzajemni; ne skladata se niti po smeri niti po velikosti.

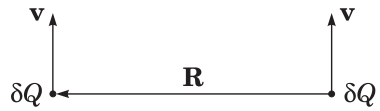
Iz izraza 40.1 je razvidno zaenkrat le to, da je sila vedno pravokotna na opazovani tokovni element (vektorski produkt) in da upada vplivnost s kvadratom oddaljenosti R – kot pri Coulombovem zakonu. Za lažjo slikovno predstavo si oglejmo nekaj konstelacij dveh tokovnih elementov ($I\,\delta\mathbf{l}$ in $I'\,\delta\mathbf{l}'$), ki ležita na ravnini papirja; slika 40.4. ♣ Bralec more iz lastnosti vektorskega produkta hitro ugotoviti smeri sil $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ in $\delta\mathbf{F}'_{\mathrm{m}}$;



Slika 40.4: Nekaj različnih konstelacij dveh koplanarnih tokovnih elementov; sile so označene črtkano.

pogledati je potrebno le smeri produktov $\delta\mathbf{l}\times(\delta\mathbf{l}'\times\mathbf{R})$ in $\delta\mathbf{l}'\times(\delta\mathbf{l}\times(-\mathbf{R}))$. ♣ Tako dobljene smeri so v primerih a), b), c) in d) tudi vrisane. V primeru a) sta tokovna elementa antiparalelna; sili sta odbojni in enako veliki ($\mu_0 II'\delta l\delta l'/4\pi R^2$); če bi desni tokovni element obrnili za 180° (tokovna elementa bi bila paralelna), bi bili sili privlačni. V primeru b) bi se z učinkovanjem sil težila elementa postaviti v skupno os; velikosti sil bi bili (enaki) $\mu_0 II'\delta l\delta l'\sin\alpha/4\pi R^2$. V primeru c) bi bila sila δF_{m} nič, sila $\delta F'_{\mathrm{m}}$ pa $\mu_0 II'\delta l\delta l'/4\pi R^2$. V primeru d) bi bili velikosti sil takili: $\delta F_{\mathrm{m}}=\mu_0 II'\delta l\delta l'\sin\beta/4\pi R^2$ in $\delta F'_{\mathrm{m}}=\mu_0 II'\delta l\delta l'\cos\beta/4\pi R^2$, ena do druge pa pravokotni. Iz vseh teh primerov je splošna nevzajemnost magnetne sile med dvema tokovnima elementoma povsem očitna.

Primerjava Coulombove in Ampèrove sile (prvič). Za osvetlitev te primerjave vzemimo dve enaki elektrini (δQ), ki se vzporedno gibljeta z enakima hitrostima ($\mathbf{v}$); slika 40.5. Gibajočima elektrinama pripadata enaka momenta ($\delta Q\mathbf{v}$). Po izrazu 40.1 in glede



Slika 40.5: Dve vzporedno gibajoči se elektrini.

na primer a) s prejšnje slike bo magnetna sila ($\delta\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$) privlačna, $\delta F_{\mathrm{m}}=\mu_0(\delta Q)^2v^2/4\pi R^2$, medtem ko bo Coulombova sila ($\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$) po izrazu 9.2 odbojna, $\delta F_{\mathrm{e}}=(\delta Q)^2/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Skupna sila ($\delta\mathbf{F}=\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}}+\delta\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$) bo odbojna, $\delta F=(\delta Q)^2(1-(v/c_0)^2)/4\pi\varepsilon_0 R^2>0$, njuno razmerje ($\delta F_{\mathrm{m}}/\delta F_{\mathrm{e}}$) pa bo enako $(v/c_0)^2$.

Rezultat nas verjetno do enake mere preseneča, saj smo iz prakse nekako "vajeni", da magnetne sile dominirajo nad električnimi (elektromotorji delujejo na principu magnetne sile). Glede na dobljeno razmerje bi se sili izdatneje kompenzirali šele v bližini svetlobne hitrosti, vendar bi bilo potrebno takrat v račun vplesti še izsledke Einsteinove specialne teorije relativnosti. K temu navideznemu "paradoksu" se bomo kasneje še vrnili; še posebno, ker vemo, da se elektroni (kot nosilci toka v prevodnikih) gibljejo z izredno majhnimi poprečnimi hitrostmi ($\sim$ nekaj deset μm/s).

Lorentzova transformacija Coulombove sile. Z izvajanem Lorentzovih transformacij, ki povezujejo krajevno-časovne koordinate inercialnega (enakomerno gibajočega) in mirujočega k.s., se tu ne bomo zadrževali; to tematiko najde bralec v učbenikih fizike. Navedli bomo zato le nekaj osnovnih relacij.

Vzemimo dva k.s.: i) mirujoč k.s. (S) s koordinatami x, y, z in t ter izhodiščem v O in ii) enakomerno gibajoč k.s. (S') s koordinatami x', y', z' in t' in izhodiščem v O', ki se giblje vzdolž X osi s hitrostjo u; $\mathbf{u} = \mathbf{e}_x u$. Če oba k.s. ob $t = t' = 0$ sovpadata, je kasnejša povezava med koordinatami sledeča:

$$\boxed{\begin{array}{lll} y' = y & x' = \kappa(x - ut) & \\ z' = z & t' = \kappa(t - ux/c_0^2) & \kappa = (1 - (u/c_0)^2)^{-1/2} \end{array}} \tag{R1}$$

kjer je κ–kontrakcijski faktor. Poleg transformacije koordinat se da izvesti tudi transformacije ostalih fizikalnih količin, kot so hitrost, masa, sila, itd. Naj je hitrost delca v mirujočem k.s. enaka $\mathbf{v}$ in naj je sila na ta delec – za opazovalca v gibajočem koordinatnem sistemu – označena z $\delta\mathbf{F}'$, potem je sila $\delta\mathbf{F}$ na ta delec – za opazovalca v mirujočem k.s. – določena s tole transformacijo:

$$\boxed{\delta\mathbf{F} = (\delta F'_x, \kappa\delta F'_y, \kappa\,\delta F'_z) + \kappa\frac{\mathbf{v}}{c_0} \times \left(\frac{\mathbf{e}_x u}{c_0} \times \delta\mathbf{F}'\right)} \tag{R2}$$

Navedeno transformacijo uporabimo sedaj za električno (Coulombovo) silo, in sicer takole. Vzemimo sistem mirujočih elektrin, ki je "natovorjen" na gibajočem k.s. (v S' mirujejo, v S pa se gibljejo s hitrostjo $\mathbf{u}$). V sistemu S' povzročajo te elektrine elektrostatično polje jakosti $\mathbf{E}'(x', y', z')$. V mirujočem k.s. vzemimo naboj δQ, ki se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$. Ob tem ponovimo, da je količina električnega naboja invariantna (razdelek 7). Za opazovalca v S' bo sila ($\delta\mathbf{F}'$) na elektrino δQ Coulombova, $\delta\mathbf{F}' = \delta Q\mathbf{E}'(x', y', z')$, medtem ko bo ta za opazovalca v S določena z zgornjo enačbo kot

$$\boxed{\delta\mathbf{F} = \delta Q\left((E'_x, \kappa E'_y, \kappa E'_z) + \kappa\frac{\mathbf{v}}{c_0} \times \left(\frac{\mathbf{e}_x u}{c_0} \times \mathbf{E}'\right)\right)} \tag{R3}$$

Poglejmo si najprej primer, ko je $v = 0$. Člen z dvojnim vektorskim množenjem odpade in ostane le

$$\delta\mathbf{F} = \delta Q(E'_x, \kappa E'_y, \kappa E'_z) = \delta Q\mathbf{E}$$

kjer pomeni polje $\mathbf{E}$ transformacijo polja $\mathbf{E}'$ v mirujoč k.s. Dobi se:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} E_x(x, y, z, t) & = & E'_x(x', y', z') \\ E_y(x, y, z, t) & = & \kappa E'_y(x', y', z') \\ E_z(x, y, z, t) & = & \kappa E'_z(x', y', z') \end{array}} \tag{R4}$$

Časovno konstantno električno polje $\mathbf{E}'$ se po (R1) transformira v časovno spremenljivo električno polje $\mathbf{E}$.

In kaj je v primeru, ko je $v \neq 0$. Za silo ($\delta\mathbf{F}$) bi pisali:

$$\delta\mathbf{F} = \delta Q\mathbf{E} + \delta Q\mathbf{v} \times \left(\mathbf{e}_x\frac{\kappa u}{c_0^2} \times \mathbf{E}'\right)$$

Izraz v oklepaju predstavlja svojsko transformacijo vektorja $\mathbf{E}'$ v mirujoč k.s. Ta vektor[4] označujemo z $\mathbf{B}$ in je odločilen le za elektrine, ki se v mirujočem sistemu gibajo; torej:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{e}_x \frac{\kappa u}{c_0^2} \times \mathbf{E}'} \tag{R5}$$

Glede na lastnost vektorskega množenja bo vektor $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ imel takšnele komponente:

$$\boxed{\begin{aligned} &B_x(x,y,z,t) = 0 \qquad B_y(x,y,z,t) = -\frac{\kappa u}{c_0^2} E'_z(x',y',z') \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad B_z(x,y,z,t) = \frac{\kappa u}{c_0^2} E'_y(x',y',z') \end{aligned}} \tag{R6}$$

Z upoštevanjem zvez pod (R4) in (R6) dobimo tudi obratne povezave:

$$E'_x = E_x \qquad E'_y = \kappa(E_y - uB_z) \qquad E'_z = \kappa(E_z + uB_y)$$

S stališča sile in opisanega je povsem razvidno, da pripada sistemu gibajočih elektrin dvoje polj. Prvo je električno polje ($\mathbf{E}$), drugo pa *magnetno polje* ($\mathbf{B}$), in šele njuno združno učinkovanje daje pravo silo na poskusni naboj δQ; zato pišemo:

$$\boxed{\delta\mathbf{F} = \delta Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})} \tag{R7}$$

V elektrotehniški praksi, kjer se elektrine gibajo relativno počasi ($u, v \ll c_0$), moremo kontrakcijski faktor opuščati in pisati:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}'(x',y',z') \qquad \mathbf{B}(x,y,z,t) = \frac{\mathbf{u}}{c_0^2} \times \mathbf{E}'(x',y',z')$$

kjer je $\mathbf{u}$ hitrost gibanja elektrin, ki povzročajo polje $\mathbf{E}'$.

Če bi (po enačbi R7) sedaj zapisali rezultančni sili med dvema elektrinama δQ in $\delta Q'$, ki se gibata s hitrostima $\mathbf{v}$ in $\mathbf{v}'$ v vakuumu, bi dobili naslednja izraza:

$$\delta\mathbf{F} = \delta Q \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\delta Q'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c_0^2 R^2} \delta Q \mathbf{v} \times (\delta Q' \mathbf{v}' \times \mathbf{R}/R)$$

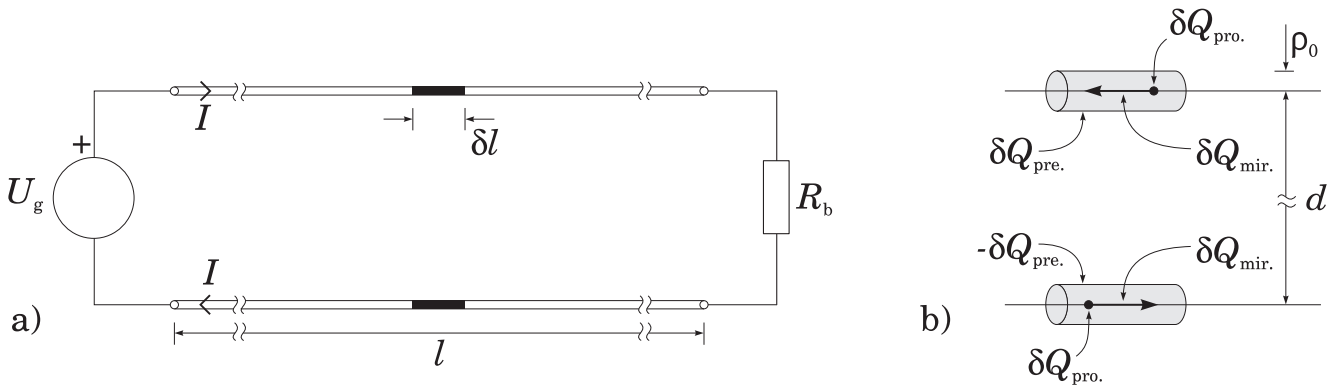
$$\delta\mathbf{F}' = \delta Q' \left(-\frac{\mathbf{R}}{R}\right) \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c_0^2 R^2} \delta Q' \mathbf{v}' \times (\delta Q \mathbf{v} \times (-\mathbf{R}/R))$$

V prvih sumandih prepoznamo Coulombovo električno silo, v drugih pa Ampèrovo magnetno silo. Njuno združno delovanje je t.i. Lorentzova sila (R7), ki smo jo zapisali že v samem uvodu – v 3. razdelku.

Primerjava Coulombove in Ampèrove sile (drugič). Pod identičnim (notranjim) naslovom smo opozorili na paradoks, ki se kaže v nekoliko nepričakovanem razmerju sil ($\delta F_\mathrm{m}/\delta F_\mathrm{e}$) med dvema gibajočima elektrinama.

Kot zgled si vzemimo primer napetostnega generatorja (U_g), ki preko dvovoda (d, ρ_0, l) napaja breme R_b; slika 40.6. Izberimo si dva nasprotiležeča tokovna elementa ($\pm I\,\delta\mathbf{l}$), ki sta na skici b) malo povečana. Za nadaljnjo diskusijo je bistveno razumevanje elektrinske "sestave" tokovnega elementa. V tokovnem elementu imamo prosto elektrino ($\delta Q_\mathrm{pro.}$), ki jo predstavljajo mobilni elektroni; ti se gibajo vzdolž žic oz. vzdolž tokovnega elementa; njihova smer gibanja je nasprotna smeri toka. Gibanju teh elektrin pripada moment $I\delta\mathbf{l} = \delta Q_\mathrm{pro.}\mathbf{v}_\mathrm{pro.}$. V tokovnem elementu imamo tudi mirujočo strukturo elektrin ($\delta Q_\mathrm{mir.}$), ki je

[4]Vektor $\mathbf{B}$ imenujemo vektor gostote magnetnega pretoka; v magnetiko je bil vpeljan z Biot-Savartovim zakonom – nekako 80 let pred izsledki specialne teorije relativnosti.



Slika 40.6: Sila med dvema tokovnima elementoma tokokroga.

v vsakem delčku volumna tokovenga elementa uravnotežena z mobilno (prosto) elektrino ($\delta Q_{\text{pro.}}$); pisati moremo: $\delta Q_{\text{pro.}} + \delta Q_{\text{mir.}} = 0$. Ti dve strukturi ne povzročata nikakršnega polja $\mathbf{E}$ v prostoru. Poleg teh dveh pa imamo na površinah tokovnih elementov še presežno elektrino ($\pm\delta Q_{\text{pre.}}$). Integralno polje $\mathbf{E}$ presežnih elektrin pa je zunaj žic takšno, kot ga poznamo že iz elektrostatike.

Iz tega opisa je povsem razvidno, da bo elektrina $\delta Q_{\text{pro.}}$ "odgovorna" za magnetno silo med tokovnima elementoma, elektrina $\delta Q_{\text{pre.}}$ pa za električno silo med njima. Zapišimo sedaj ti dve sili – "po Coulombu in Ampèru" – pri poenostavitvi $\rho_0 \ll d$. Coulombova električna sila bo privlačna,

$$\delta F_{\text{e}} = \frac{(\delta Q_{\text{pre.}})^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

Ampèrova magnetna sila pa bo odbojna,

$$\delta F_{\text{m}} = \frac{\mu_0(\delta Q_{\text{pro.}} v_{\text{pro.}})^2}{4\pi d^2}$$

Njuno razmerje bo:

$$\frac{\delta F_{\text{m}}}{\delta F_{\text{e}}} = \left(\frac{\delta Q_{\text{pro.}}}{\delta Q_{\text{pre.}}}\right)^2 \left(\frac{v_{\text{pro.}}}{c_0}\right)^2$$

Iz tega je razvidno, da razmerje sil ni več $(v/c_0)^2$, kot pri dveh naelektrenih delcih (slika 40.5), ampak je to odvisno tudi od razmerja posameznih relevantnih elektrinskih struktur v/na izbranih dveh tokovnih elementih.

Za samo evalvacijo dobljenega razmerja privzemimo, da je upornost žic zanemarljiva glede na R_{b}; s tem je tok $I \simeq U_{\text{g}}/R_{\text{b}}$. Za produkt $(\delta Q_{\text{pro.}} v_{\text{pro.}})^2 = (I\,\delta l)^2$ moremo pisati $(U_{\text{g}}\delta l/R_{\text{b}})^2$. Presežna elektrina ($\delta Q_{\text{pre.}}$) je določena iz elektrostatike s kapacitivnostjo (c) na dolžinsko enoto: $\delta Q_{\text{pre.}} = c\delta l U_{\text{g}}$. Razmerje sil je:

$$\frac{\delta F_{\text{m}}}{\delta F_{\text{e}}} = \frac{1}{(cc_0 R_{\text{b}})^2}$$

Če za c vstavimo približen izraz, $c = \pi\varepsilon_0/\ln(d/\rho_0)$, dobimo:

$$\frac{\delta F_\mathrm{m}}{\delta F_\mathrm{e}} = \left(\frac{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln\frac{d}{\rho_0}}{R_\mathrm{b}}\right)^2$$

Števec ulomka je pri $d/\rho_0 = 20$ približno 360 Ω, kar pomeni, da bosta obe sili uravnoteženi, ko bo $R_\mathrm{b} = 360\ \Omega$; pri manjših bremenskih upornostih bo prevladovala odbojna magnetna sila, pri večjih pa privlačna električna sila. Dobljeno razmerje pa ne velja le za oba opazovana tokovna elementa, ampak tudi za magnetno in električno silo med obema tokovodnikoma – v kar se bo bralec kasneje mogel tudi sam prepričati[5].

41. Vektor gostote magnetnega pretoka

Čeravno smo magnetno silo osvetlili z več vidikov, bomo v nadaljevanju izhajali iz prvobitnega Ampèrovega zapisa sile. Ta se nanaša (zaenkrat) na časovno konstantne – enosmerne ali nespremenljive – toke, ki so še vedno predmet naših študij. Ti so praviloma konduktivni toki v prevodnih galvanskih krogotokih, za katere velja brezizvornost; $\oint_\mathcal{A} \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = 0$.

Zapišimo še enkrat magnetno silo na tokovni element $I\delta\mathbf{l}$, ki se nahaja v bližini tokovnega elementa $I'\delta\mathbf{l}'$

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{m} = I\delta\mathbf{l}\times\left(\frac{\mu_0 I'\delta\mathbf{l}'\times\mathbf{R}}{4\pi R^3}\right)$$

Izraz v oklepaju je povsem neodvisen od tokovnega elementa $I\delta\mathbf{l}$; odvisen je le od elementa $I'\delta\mathbf{l}'$ in od prostorske konstelacije obeh tokovnih elementov, ki jo opredeljuje vektor $\mathbf{R}$. Mogli bi reči, da tokovnemu elementu $I'\delta\mathbf{l}'$ pripada v prostoru vektorsko polje

$$\frac{\mu_0 I'\delta\mathbf{l}'\times\mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

ki je v poljubni točki T okrog T' (pozicije elementa $I'\delta\mathbf{l}'$) povsem enoznačno opredeljeno in daje v nadaljevanju – po vektorskem množenju z elementom $I\delta\mathbf{l}$ – informacijo o magnetni sili na ta tokovni element. In še več: če že tu vpletemo Faradayev koncept gledanja na električne in magnetne pojave, potem ni srž problema v magnetni interakciji med tokovnima elementoma, ampak je srž v stanju prostora, ki ga "zaznamuje" (povzroči) prisotnost tokovnega elementa $I'\delta\mathbf{l}'$. Rekli bi, da je posebno stanje prostora svojsko in lastno temu tokovnemu elementu, ne glede na to, ali je tokovni element $I\delta\mathbf{l}$ prisoten ali pa ne. Pa tudi obratno: tudi tokovnemu elementu $I\delta\mathbf{l}$ pripada posebno stanje prostora; če element $I'\delta\mathbf{l}'$ kje je, ali pa ga ni. Njemu lastno stanje prostora popisuje – po zamenjavah – vektorsko polje[1]

$$\frac{\mu_0 I\delta\mathbf{l}\times\mathbf{R}'}{4\pi R^3}$$

[5]Trenutna obravnava sicer presega razlago izraza v števcu kvocienta sil. Tu povejmo le to, da je omenjen izraz značilen za dvovod in se imenuje *karakteristična upornost linije*; pa tudi koren $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ ima svoj pomen pri valovanju in se imenuje *valovna upornost* (v vakuumu); razdelek 58.

[1]Podobno smo postopali tudi pri uvajanju polja $\mathbf{E}$ in rekli: elektrini $\delta Q'$ pripada polje $\delta\mathbf{E}$ v točki T, neglede na to, ali se v T trenutno kaj nahaja.

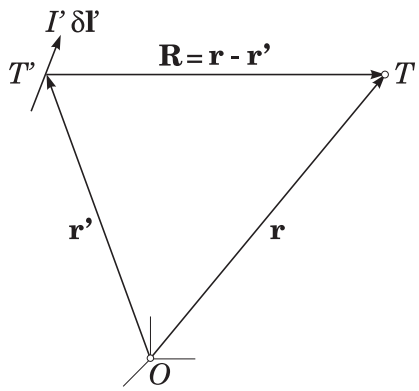
V nadaljevanju je magnetna sila le še stvar interakcije med vektorskim poljem in tokovnim elementom, ki se v tem polju "znajde".

Po vsem tem je povsem smiselno in na mestu študirati to novo polje, ki je lastno enemu ali pa množici (nizu) takšnih tokovnih elementov. Temu polju rečemo *magnetno polje*, okarakteriziral pa ga bo *vektor gostote magnetnega pretoka* **B**. Francoska fizika in Ampèrova sodobnika J.B. Biot in F. Savart sta splošnemu tokovnemu elementu prva[2] priredila takšno magnetno polje.

Biot-Savartov zakon. Njun zakon, ki tokovnemu elementu $I'\delta\mathbf{l}'$ (v točki T') priredi omenjen vektor gostote magnetnega pretoka $\delta\mathbf{B}$ (v splošni točki T), zapišemo z izrazom

$$\boxed{\delta\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 I'\delta\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}} \tag{41.1}$$

Pripadajoča merska enota je tesla, $T = \mathrm{Vs/m^2} = \mathrm{Wb/m^2}$. Prostorske razmere ponazarja slika 41.1.



Slika 41.1: Prostorska osvetlitev Biot-Savartove enačbe.

Če smo do sedaj večkrat "vlekli" vzporednico med Coulombovo in Ampèrovo silo, potem moremo kot vzporednico k Biot-Savartovemu zapisu navesti izraz za elektrostatično polje $\delta\mathbf{E}$ točkaste elektrine $\delta Q'$,

$$\delta\mathbf{E}(T) = \frac{\delta Q'\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Tako kot je bil slednji zapis iztočnica za elektrostatično polje elektrin, tako bo Biot-Savartov zakon iztočnica in osnova za opis, zapis, razpoznavanje (in prepoznavanje) magnetnega polja gibajočih elektrin. V začetnih razdelkih bo kar zajeten del razglabljanj namenjen magnetnemu polju v praznem prostoru (vakuumu) in šele kasneje se bomo ukvarjali s snovjo[3] v magnetnem polju.

[2]Že v uvodnem razdelku smo ju omenili in navedli, da se v zvezi s tem pojavljata v literaturi še imeni Ampèra in Laplacea.

[3]K sreči ima večina snovi (Cu, Al, Au, Ag, tekočine, plini, itd.) svojo permeabilnost praktično identično permeabilnosti praznega prostora; izjema so Fe, Co, Ni in še nekatere – razdelek 48.

Glede na to, da povzročitelj magnetnega polja ne bo le tok v tanki žici, ampak tudi tokovna gostota $\mathbf{J}$ ali ploskovni tok $\mathbf{K}$, bomo $I'\delta\mathbf{l}'$ po potrebi pisali kot $\mathbf{J}'\delta v'$ ali $\mathbf{K}'\delta a'$, pri prosto gibajoči elektrini pa kot $\delta Q'\mathbf{v}'$.

Po Ampèrovem zakonu in v smislu enačbe 41.1 bomo silo $\delta\mathbf{F}_\mathrm{m}$ na poljuben tokovni element $I\delta\mathbf{l}$, ki se nahaja v bližini drugega ($I'\delta\mathbf{l}'$), zapisali kot

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{m} = I\delta\mathbf{l} \times \delta\mathbf{B}(T)$$

Ker pa magnetno polje pripada vsakemu v nizu tokovnih elementov, ki sestavljajo neko "zapleteno" tokovno strukturo (tokokrog-e), bo potrebno njihova polja vektorsko sešteti tako, kot bi seštevali z njimi povzročene parcialne sile (razdelek 11). Rezultirajoče magnetno polje $\mathbf{B}$ bo torej vektorska vsota,

$$\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{(I'\delta\mathbf{l}')_i \times \mathbf{R}_i}{R_i^3} \qquad \mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$$

Če dolžine tokovnih elementov krajšamo v diferenciale, prehaja vsota z limito v integral, splošen $I'\,d\mathbf{l}'$ pa v diferencial $\mathbf{J}'\,dv'$, $\mathbf{K}'\,da'$ ali $I'\,d\mathbf{l}'$, pri tem pa teče integracija po vseh tokih ($I_\mathrm{cel.}$), ki so v prostoru. Pisali bomo:

$$\boxed{\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{(I_\mathrm{cel.})}\frac{\mathbf{J}(T') \times \mathbf{R}}{R^3}\,dv'} \tag{41.2}$$

Zapis imenujemo tudi integralni Biot-Savartov zakon. Kot vzporednica k njemu bi v elektrostatiki ustrezal izraz 11.2 oz. polje

$$\mathbf{E}(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q_\mathrm{cel.})}\frac{\mathbf{R}\rho(T')}{R^3}\,dv'$$

Ko pa je magnetno polje ($\mathbf{B}$) dane tokovne strukture (z integracijo 41.2) enkrat znano, je rezultančna magnetna sila na tokovni element $I\,\delta\mathbf{l}$ določena z vektorskim produktom

$$\boxed{\delta\mathbf{F}_\mathrm{m} = I\delta\mathbf{l} \times \mathbf{B}} \tag{41.3}$$

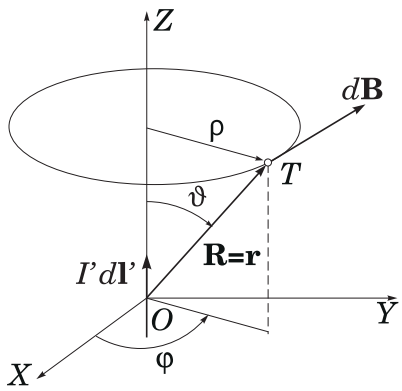
Če pišemo za $I\,\delta\mathbf{l}$ produkt $\delta Q\mathbf{v}$, dobimo še silo

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{m} = \delta Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ki je hkrati tudi drugi člen v znani Lorentzovi sili iz 3. razdelka.

Magnetno polje tokovnega elementa. Predno pa se lotimo konkretnih integracij (po enačbi 41.2), si oglejmo, kakšna polja bomo sploh integrirali, ali drugače: kakšno je magnetno polje elementarnega tokovnega elementa? Da bo matematični zapis čim bolj pregleden, si vzemimo tokovni element $I'd\mathbf{l}'$ v koordinatnem izhodišču[4]; usmerjen naj bo v smeri Z-osi; slika 41.2. Distančni vektor $\mathbf{R}$ bo v tem primeru kar krajevni vektor splošne

[4]Priredili bi mu lahko tudi elektrino dQ', ki se s hitrostjo v' giblje v z-smeri.



Slika 41.2: Magnetno polje tokovnega elementa v splošni točki.

točke T; $\mathbf{R} = \mathbf{r}$. Diferencial magnetne gostote ($d\mathbf{B}$) bo po enačbi 41.1 enak

$$d\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 I'\, d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

Ker sta vektorja $d\mathbf{l}'$ in $\mathbf{r}$ tangencialna na polravnini φ, kaže po desnem pravilu njun vektorski produkt ($d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}$) v smeri priraščanja koordinate φ; $d\mathbf{l}' \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_\varphi\, dl' r \sin\vartheta$. Ta iznos vektorskega produkta velja za vse točke na narisani krožnici z radijem $\rho (= r\sin\vartheta)$ okrog osi tokovnega elementa. Gostota $d\mathbf{B}$ bo zato v vseh točkah na krožnici v krožni, φ-smeri; $d\mathbf{B}(T) = \mathbf{e}_\varphi\, dB_\varphi(T)$ in

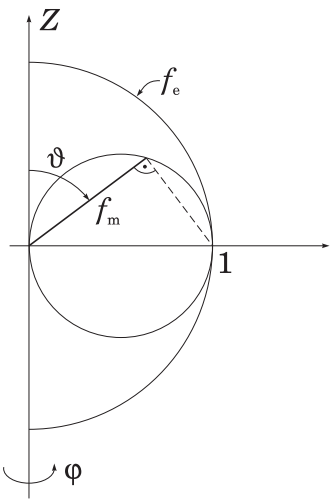
$$dB_\varphi(T) = \frac{\mu_0 I'\, dl'}{4\pi r^2} \sin\vartheta$$

Ob tem rezultatu si velja osvežiti spomin na električno polje točkaste elektrine dQ', ki bi jo postavili v koordinatno izhodišče (Zgled 11.1). Zanjo dobimo radialno polje,

$$dE_r(T) = \frac{dQ'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Iz slednjih dveh izrazov vidimo, da vplivnost točkovnega električnega ali magnetnega "vira" upada s kvadratom oddaljenosti in da je pri magnetnem polju še dodatna kotna odvisnost $f_\mathrm{m}(\vartheta) = \sin\vartheta$, ki je pri električnem polju ni; $f_\mathrm{e} = 1$. Rekli bi lahko, da je vplivnost električnega točkastega vira v okolico izotropna (enakovredna v vseh smereh), medtem ko je vplivnost magnetnega točkastega vira anizotropna (neenakovredna v posameznih smereh). Govorimo lahko o diagramu vplivnosti v posameznih smereh, ki jo podajata funkciji f_m in f_e; slika 41.3. Magnetno polje bo očitno najmočnejše v ekvatorialni ravnini tokovnega elementa ($\mu_0 I'\, dl'/4\pi r^2$), medtem ko bo v njegovi osi polje enako nič. Glede smeri obeh polj pa moremo reči, da je električno polje radialno, kot da izhaja iz mesta vira, medtem ko je magnetno polje tipično vrtinčno (cirkularno) okrog osi tokovnega elementa.

Opisan razloček med električnim in magnetnim poljem obeh elementarnih virov je značilen in se kot tak prenaša tudi na sumarno elektrostatično oz. magnetostatično polje. Za elektrostatično polje tudi rečemo, da je izvorno, medtem ko za magnetostatično polje

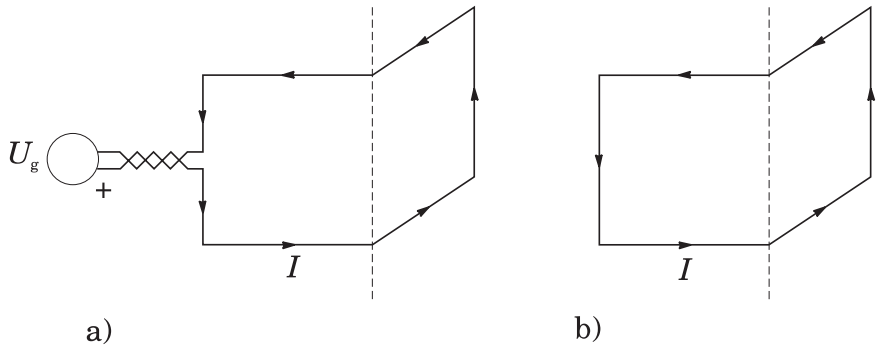


Slika 41.3: Diagrama kotnih zakonitosti f_m in f_e.

rečemo, da je vrtinčno. ♣ V nadaljevanju bo za bralca koristno, če bo ob primerih izračunavanja magnetnih polj posameznih tokovnih struktur osvežil tudi obliko in zakonitost elektrostatičnega polja; končno ima vsak odsek žice (tokovni element) tudi določen presežek elektrine na svoji površini. ♣

Zgled 41.1

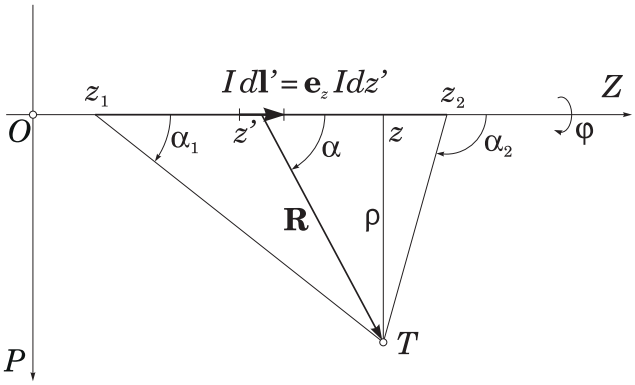
Vzemimo, da je kakšna tokovna zanka (iz žice zanemarljivega radija) konfigurirana v prostoru kot zaključen poligon odsekoma ravnih segmentov, ki vodijo enak (isti) tok I; slika 41.4. Vsak odsek zase bomo imenovali *tokovna daljica*. Na skici a)



Slika 41.4: Tokovna zanka kot prostorski poligon ravnih odsekov – tokovnih daljic.

smo narisali še vir (napetostni ali tokovni), ki preko gostega (cik-cak) prepletanja dovaja/odvaja tok v glavno poligonalno zanko. Če je prepletanje dovolj gosto, potem se toka v eno ali drugo stran "srečujeta" – v nasprotnih smereh – praktično na "istem" mestu, zato se njun prispevek k celotnemu magnetnemu polju okrog glavnega dela zanke praktično izniči. Prav zato bomo odsekoma ravno (ali katero drugo) tokovno zanko risali tako, kot kaže skica b); opuščali bomo priključni del z virom – obdržali bomo le oznako smeri toka.

Izračunajmo sedaj magnetno polje **B** tokovne daljice. Za lažje računanje postavimo k.s. tako, da leži ta v osi Z; slika 41.5.



Slika 41.5: Uporaba Biot-Savartovega zapisa pri tokovni daljici.

Po Biot-Savartovem zakonu bo

$$d\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 I\, d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I\, dz' \sin\alpha}{4\pi R^2} = \mathbf{e}_\varphi dB_\varphi(T)$$

Izrazimo R in dz' s koordinato ρ in integracijskim kotom α: $R = \rho/\sin\alpha$, $z - z' = \rho\cot\alpha$, $dz' = \rho\, d\alpha/\sin^2\alpha$. Diferencial polja bo

$$dB_\varphi(T) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\sin\alpha\, d\alpha$$

Z integriranjem po vseh tokovnih elementih, od z_1 do z_2 oz. od α_1 do α_2, dobimo

$$B_\varphi(T) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}[-\cos\alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

oz.

$$B_\varphi(T) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

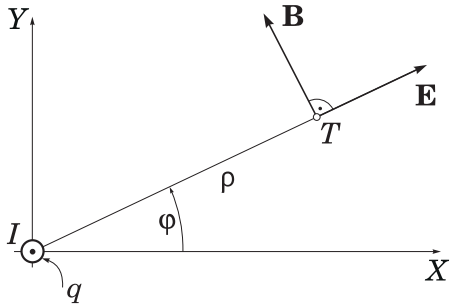
Ob tem izrazu je potrebno poudariti, da so tako smer polja kot relativni koordinati α_1 in α_2 ter oddaljenost ρ od osi daljice vezani na sliko 41.5, zato je (pri nadaljnji uporabi te formule) potrebno imeti to sliko vsekakor "pred očmi".

Magnetno polje tokovne daljice izkazuje spet vrtinčno naravo okrog osi. Če točko T zavrtimo po krožnici z radijem ρ okrog Z osi, bo polje v vseh točkah krožnice tangencialno nanjo in enako po iznosu.

Zgled 41.2

Oglejmo si magnetno polje *tokovne premice* (neskončnega ravnega tokovodnika) in magnetno polje v okolici dolgega dvovoda.

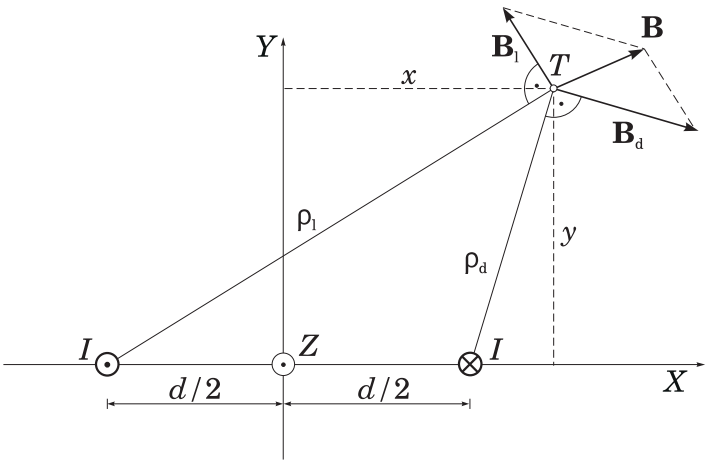
Magnetno polje $\mathbf{B}$ ravnega vodnika dobimo, če v enačbo za polje daljice vnesemo $\alpha_1 \to 0$ in $\alpha_2 \to \pi$; dobimo: $B_\varphi(\rho) = \mu_0 I/2\pi\rho$. Magnetno polje ima krožno smer okrog toka in upada s prvo potenco oddaljenosti od osi tokovodnika. Če ima vodnik presežek elektrine (q) na dolžinsko enoto, bosta vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ v okolici takšna, kot kaže slika 41.6. Vektorja sta si v vseh točkah v ravnini ($z =$ konst.) med seboj pravokotna. Električno polje ima radialno smer, $E_\rho = q/2\pi\varepsilon_0\rho$, magnetno polje



Slika 41.6: Električno in magnetno polje v okolici ravnega vodnika, ki vodi tok I in ima presežek elektrine q na dolžinsko enoto.

pa krožno smer (okrog toka), ki ustreza pozitivni smeri obhoda okrog toka (pravilo desnega vijaka).

Magnetno polje dveh tokovnih daljic (dolgega dvovoda) dobimo tako, da prispevka obeh tokov vektorsko seštejemo; slika 41.7. Levi vodnik povzroča polje $\mathbf{B}_\mathrm{l}$, desni pa



Slika 41.7: Vektor $\mathbf{B}$ v okolici dvovoda s tokom I.

polje $\mathbf{B}_\mathrm{d}$. Za komponenti rezultirajočega vektorja $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\mathrm{l} + \mathbf{B}_\mathrm{d}$ dobimo:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{y}{(x+d/2)^2+y^2} + \frac{y}{(x-d/2)^2+y^2}\right)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{x+d/2}{(x+d/2)^2+y^2} - \frac{x-d/2}{(x-d/2)^2+y^2}\right)$$

♣ Bralec more sam določiti tudi polje $\mathbf{E}$ v okolici dvovoda, ki povezuje generator z napetostjo U_g na eni strani, ter breme z upornostjo R_b na drugi strani; kot na sliki 40.6. Ugotovil bo, da sta si pri tankih žicah (zanemarljiva ekscentričnost) vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ v medprostoru pravokotna. ♣

Zgled 41.3

K definiciji enote električnega toka. Po enačbah iz prejšnjega zgleda je desni vodnik (slika 41.7) v magnetnem polju levega vodnika in obratno. Na mestu desnega

je $\mathbf{B}_\mathrm{l} = \mathbf{e}_y \mu_0 I/2\pi d$. Magnetna sila na diferencialni tokovni element drugega vodnika $(-\mathbf{e}_z I\, dz)$ je diferencialna,

$$d\mathbf{F}_\mathrm{m} = (-\mathbf{e}_z I\, dz) \times \mathbf{e}_y \mu_0 I/2\pi d = \mathbf{e}_x \mu_0 I^2\, dz/2\pi d$$

Kvocient $d\mathbf{F}_\mathrm{m}/dz$ ustreza sili na dolžinsko enoto ($\mathbf{f}_\mathrm{m}$) oz. sili na meter dolžine,

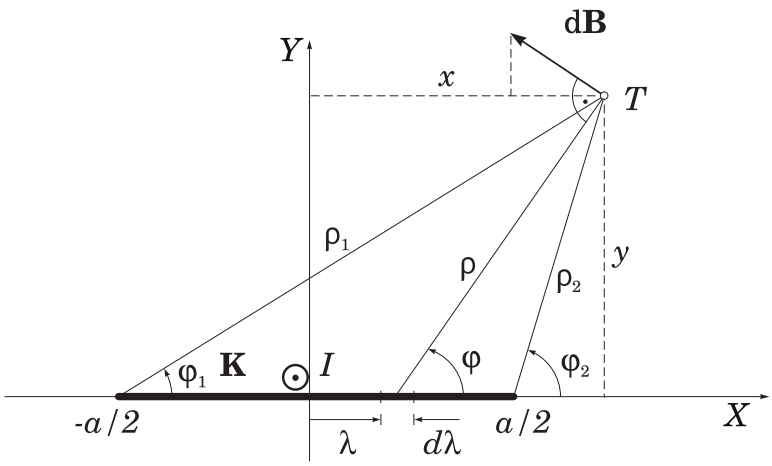
$$f_{\mathrm{m}x} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$$

Sila na desni vodnik je odbojna (v desno); enako tudi na levi vodnik (vendar v levo). Pri toku $I = 1$ A in $d = 1$ m je sila $f_{\mathrm{m}x}$ enaka $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.

Definicija ampèra. Enota za električni tok je ampère. Ampère je nespremenljivi električni tok, ki pri prehodu skozi dva premočrtna, vzporedna, neskončno dolga vodnika zanemarljivega krožnega prereza, postavljena v vakuum, v medsebojni razdalji enega metra, povzroča med njima silo $2 \cdot 10^{-7}$ newtona na meter dolžine.

Zgled 41.4

Izračunajmo magnetno polje v okolici tanke folije širine a, ki vodi ploskovni tok $\mathbf{K}$; $K_z = I/a$, če je I celoten tok; slika 41.8. Tračno folijo s tokom I moremo razumeti



Slika 41.8: Magnetno polje tračnega vodnika.

kot niz vzporedno "zloženih" tokovnih premic s toki $dI = K_z\, d\lambda$. V splošni točki $T(x, y)$ je diferencial $d\mathbf{B}$ – po iznosu – določljiv iz enačbe za polje tokovne premice (Zgled 41.2),

$$dB(x, y) = \frac{\mu_0 K_z\, d\lambda}{2\pi\rho}$$

Ima pa to polje svojo x in y komponento:

$$dB_x = -dB \sin\varphi = -\frac{\mu_0 K_z}{2\pi} \frac{y}{(x-\lambda)^2 + y^2}\, d\lambda$$

$$dB_y = dB \cos\varphi = \frac{\mu_0 K_z}{2\pi} \frac{x-\lambda}{(x-\lambda)^2 + y^2}\, d\lambda$$

Da dobimo rezultirajoči komponenti B_x in B_y, moramo integrirati po λ od $-a/2$ do $a/2$. Če rešimo najprej integrala, dobimo:

$$\begin{aligned}\int_{-a/2}^{a/2} \frac{y\,d\lambda}{(x-\lambda)^2+y^2} &= \left[-\arctan\frac{x-\lambda}{y}\right]_{-a/2}^{a/2} \\ &= \arctan\frac{x+a/2}{y} - \arctan\frac{x-a/2}{y} = \varphi_2 - \varphi_1\end{aligned}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \frac{(x-\lambda)\,d\lambda}{(x-\lambda)^2+y^2} = \left[-\ln\sqrt{(x-\lambda)^2+y^2}\right]_{-a/2}^{a/2} = \ln\sqrt{\frac{(x+a/2)^2+y^2}{(x-a/2)^2+y^2}} = \ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

s tem pa tudi obe komponenti:

$$B_x = \frac{\mu_0 K_z}{2\pi}(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad B_y = \frac{\mu_0 K_z}{2\pi}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Rezultat za obe komponenti se tu izraža z geometrijo med točko T in roboma traku.

V osrednjem delu ob traku ($\sqrt{x^2+y^2} \ll a$) je $\rho_1 \doteq \rho_2$ in $\varphi_1 - \varphi_2 \doteq \mp\pi$, zato je $B_y \doteq 0$, medtem ko je $B_x \doteq \mp\mu_0 K_z/2$; minus nad in plus pod trakom. V omenjeni coni je polje tik nad in tik pod trakom praktično homogeno. Približek za B_x velja tudi za druge točke tik ob traku ($|y| \ll a$), medtem ko B_y proti robu traku narašča: izraz matematično sicer izkazuje singularnost na robu, vendar je to posledica neupoštevanja debeline traku. Če bi upoštevali še to, bi za B_y na robu dobili omejeno funkcijo[5].

♣ Bralec naj premisli, kako je konfigurirano magnetno polje med dvema trakoma, ki sta eden vrh drugega in vodita enaka toka v nasprotnih smereh. Trakova predstavljata dvovod, med katerima je tudi električna napetost oz. polje **E**. Kako sta si smeri polj **E** in **B** v osrednjem delu med trakoma?

Bralec naj tudi izračuna silo na dolžinsko enoto med trakoma dvovoda, ki vodita nasproten tok in ležita eden poleg drugega z medsredinsko razdaljo d; $d > a$. ♣

[5]Za pravokoten vodnik širine a in višine b, ki je simetrično položen v prerezno (XY) ravnino in vodi tok I, se z dvojno integracijo dobi naslednji rezultat:

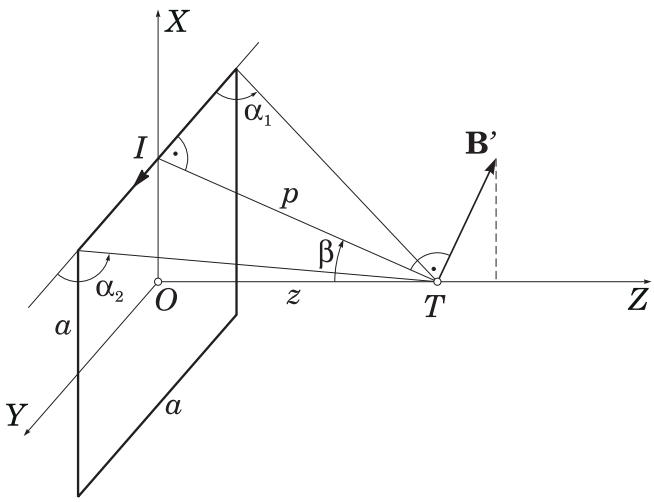
$$\begin{aligned}B_x &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi ab}\left(p_1\ln\frac{p_1^2+q_2^2}{p_1^2+q_1^2} + p_2\ln\frac{p_2^2+q_2^2}{p_2^2+q_1^2} - 2q_1\left(\arctan\frac{p_1}{q_1}+\arctan\frac{p_2}{q_1}\right)\right. \\ &\quad \left. +2q_2\left(\arctan\frac{p_1}{q_2}+\arctan\frac{p_2}{q_2}\right)\right) \\ B_y &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi ab}\left(q_1\ln\frac{p_1^2+q_1^2}{p_2^2+q_1^2} + q_2\ln\frac{p_1^2+q_2^2}{p_2^2+q_2^2} + 2p_1\left(\arctan\frac{q_1}{p_1}+\arctan\frac{q_2}{p_1}\right)\right. \\ &\quad \left. -2p_2\left(\arctan\frac{q_1}{p_2}+\arctan\frac{q_2}{p_2}\right)\right)\end{aligned}$$

kjer pomenijo:

$$p_1 = \frac{a}{2} - x \qquad p_2 = \frac{a}{2} + x \qquad q_1 = \frac{b}{2} - y \qquad q_2 = \frac{b}{2} + y$$

Zgled 41.5

Magnetno polje v osi kvadratne tokovne zanke s stranico a in tokom I. Zanko postavimo v (XY) ravnino – simetrično na Z-os; slika 41.9. Na sliki je skiciran



Slika 41.9: K magnetnemu polju v osi kvadratnega ovoja.

vektor gostote magnetnega pretoka ($\mathbf{B}'$) toka v zgornji stranici. Ta ima določeno x-komponento, ki se s prispevkom spodnje stranice kompenzira, medtem ko se z-komponenta s prispevkom spodnje sešteje (podvoji). Podobno se zgodi s poljem vertikalnih odsekov toka. Polje $\mathbf{B}$ ima v osi zato le z-komponento. Po izrazu za polje tokovne daljice iz zgleda 41.1 je

$$B_z(T) = \frac{\mu_0 I}{\pi p}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\sin\beta$$

Iz slike izrazimo geometrijo:

$$p = \sqrt{(a/2)^2 + z^2} \qquad \cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a/2}{\sqrt{a^2/2 + z^2}} \qquad \sin\beta = a/2p$$

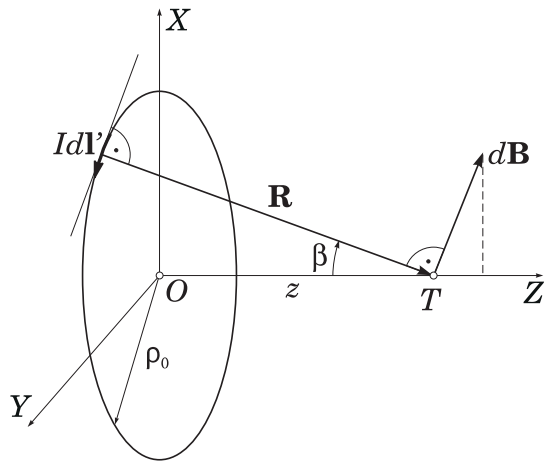
V osi je

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi}\frac{1}{((a/2)^2 + z^2)\sqrt{a^2/2 + z^2}}$$

V izhodišču je $B_z(0) = 2\sqrt{2}\mu_0 I/\pi a$. ♣ Bralec naj podobno napravi še za pravokoten ovoj (a, b) in naj izvede tudi formulo za $\mathbf{B}$ v poljubni točki $T(x, y, 0)$ v ravnini ovoja. ♣

Zgled 41.6

Magnetno polje v osi krožne tokovne zanke; slika 41.10. Vsi tokovni elementi na obodu zanke so pravokotni na distančne vektorje, ki kažejo k točki T. Absolutna



Slika 41.10: K magnetnemu polju krožne tokovne zanke polmera ρ_0.

vrednost vektorskega produkta $d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}$ ima zato poln iznos, $|d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}| = R\,dl'$. Radialne projekcije diferencialov $d\mathbf{B}$ se izničijo – ostane le z-komponenta. Diferencial dB_z je $\mu_0 I \sin\beta\, dl'/4\pi R^2$ in enak za vse tokovne elemente na obodu, zato je

$$B_z(T) = \frac{\mu_0 I \rho_0 \sin\beta}{2R^2}$$

Iz geometrije sta:

$$R = \sqrt{\rho_0^2 + z^2} \qquad \sin\beta = \rho_0/R$$

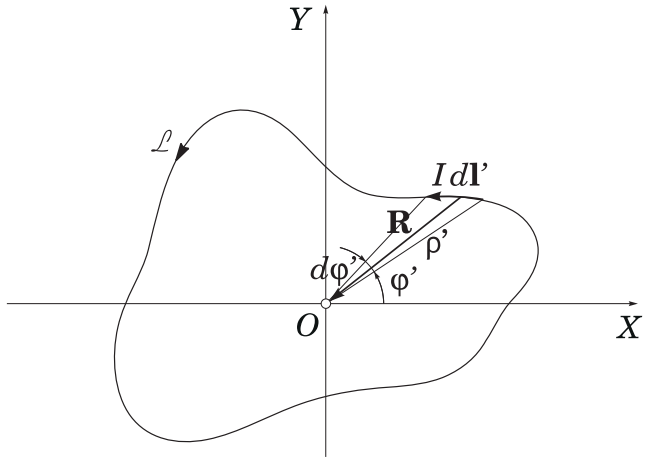
sledi

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I \rho_0^2}{2R^3} = \frac{\mu_0 I \rho_0^2}{2(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}}$$

V centru ovoja je $B_z(0) = \mu_0 I/2\rho_0$.

♣ Bralec more hitro ugotoviti, da bi podobno magnetno polje v osi povzročal tudi enak ovoj žice, ki bi bil naelektren z množino Q in se enakomerno vrtel okrog Z-osi. Pri frekvenci vrtenja f bi bila zgornja enačba za $B_z(z)$ identična, le da bi namesto toka I stal produkt Qf. ♣ Če pa bi na vrvici dolžine $l(l = \rho_0)$ naboj Q vrteli s frekvenco f, bi bilo časovno poprečje $\overline{B_z(z,t)}$ polja v osi spet določeno z zgornjo enačbo. Zaključimo lahko: krožeč naboj ima v svoji okolici magnetno polje, ki je v časovnem poprečju identično polju krožne tokovne zanke. In še dalje: "krožečemu" elektronu v atomarni strukturi pripada magnetno polje. Delcem v kvantni mehaniki pripadajo kvantna števila, ki opredeljujejo njihova energijska stanja. Eno teh je tudi spinsko število. Če bi spin (npr. elektrona) "razlagali"s klasično mehaniko, bi ga mogli primerjati z vrtenjem okrog lastne osi. Torej ima delec (elektron) – iz naslova spina – še dodatno magnentno polje. To dejstvo je pomembno pri razlagi pojava feromagnetizma, vendar o tem kasneje (razdelek 45).

Magnetno polje v ravnini (ravninske) tokovne zanke. Pod tem naslovom si bomo ogledali poseben primer, ko je kontura linijskega toka na ravnini (kot planarna zanka) in je tudi točka računanja magnetnega polja nekje na tej ravnini; naj je omenjena ravnina



Slika 41.11: Magnetno polje planarne tokovne zanke.

$z = 0$. Zaradi lažjega zapisovanja postavimo izhodišče k.s. kar v točko računanja polja; slika 41.11. Vzemimo, da poznamo pozicijo konture v vseh točkah na ravnini oz., da poznamo zapis konture $\mathcal{L}$ v polarnih koordinatah; $\rho = \rho(\varphi)$. Tokovni element $I d\mathbf{l}'$ pišemo takrat kot $I d\mathbf{l}' = I(d\rho', \rho'\, d\varphi', 0)$. Distančni vektor $\mathbf{R}$ je $(-\rho', 0, 0)$; vektorski produkt $d\mathbf{l} \times \mathbf{R}$ v Biot-Savartovem zakonu bo enak $(0, 0, (\rho')^2\, d\varphi')$. Diferencial gostote magnetnega pretoka bo imel v O le z-komponento,

$$dB_z(O) = \frac{\mu_0 I\, d\varphi'}{4\pi\rho'}$$

sumarno polje pa bo integral vzdolž tokovne zanke $\mathcal{L}$,

$$B_z(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \frac{d\varphi'}{\rho'(\varphi')}$$

♣ Bralec more hitro preveriti formulo za polje v centru krožne zanke. Kolikšno pa bi bilo magnetno polje v fokusu (gorišču) tokovne zanke v obliki elipse z osema a in b? ♣

Zgled 41.7

Izračunajmo magnetno polje v notranji točki krožne tokovne zanke; slika 41.12. Ekscentričnost točke računanja bodi e. Oddaljenost tokovnega elementa od izhodišča bomo sestavili iz dveh delov, $\rho' = \rho_1 + \rho_2$. Iz geometrije je razvidno, da je

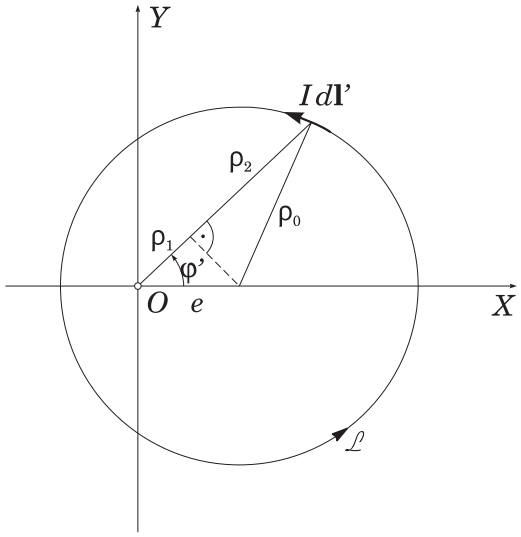
$$\rho' = e\cos\varphi' + \sqrt{\rho_0^2 - e^2\sin^2\varphi'}$$

Če to vnesemo v prirejeno Biot-Savartovo formulo, dobimo

$$B_z(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(\rho_0^2 - e^2)} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\rho_0^2 - e^2\sin^2\varphi'} - e\cos\varphi'\right) d\varphi'$$

Drugi sumand pri integraciji nič ne da, prvi integral pa da četrtino celotne vrednosti že na intervalu $[0, \pi/2]$. Pišemo:

$$B_z(O) = \frac{\mu_0 I \rho_0}{\pi(\rho_0^2 - e^2)} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{e}{\rho_0}\right)^2 \sin^2\varphi'}\, d\varphi'$$



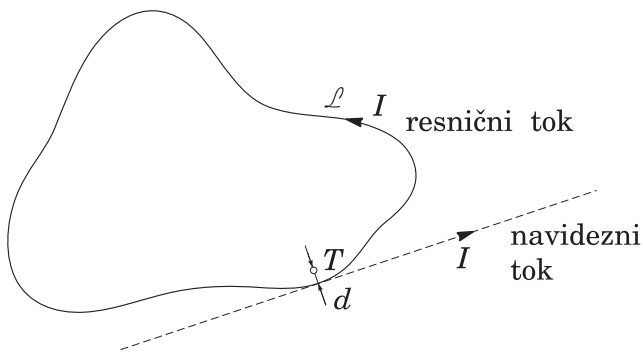
Slika 41.12: Magnetno polje v notranji točki ravnine krožne tokovne zanke.

Dobljen integral v splošnem analitično sicer ni rešljiv[6], ima pa lepo rešitev pri e/ρ_0 je 0 ali 1. Pri $e/\rho_0 = 0$ dobimo $\pi/2$, pri $e/\rho_0 = 1$ pa 1. Za vse vmesne vrednosti pada vrednost integrala lepo zložno od $\pi/2$ k 1.

Naj je točka računanja polja blizu oboda žice in od nje oddaljena za d; $d = \rho_0 - e \ll \rho_0$. Razmerje e/ρ_0 bo blizu ena in integral v izrazu za polje bo imel vrednost približno ena. Dalje bo

$$B_z(O) \doteq \frac{\mu_0 I \rho_0}{\pi(\rho_0^2 - e^2)} = \frac{\mu_0 I \rho_0}{\pi(\rho_0 + e)d} \doteq \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Dobljen rezultat je zanimiv. Magnetno polje v bližini tokovne zanke je takšno (tolikšno) kot od ravnega vodnika. Izkazano zakonitost moremo intuitivno razširiti na poljubno tokovno zanko in reči, da je magnetno polje v neposredni bližini žice identično polju ravnega linijskega toka, ki bi tekel vzdolž tangente na konturo $\mathcal{L}$; slika 41.13.

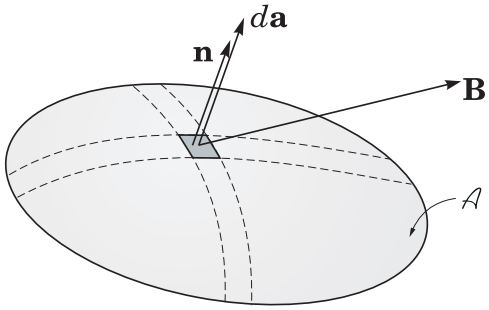


Slika 41.13: K aproksimaciji magnetnega polja v bližini tokovne zanke.

[6]Integral tipa $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \beta}\, d\beta$ se imenuje popolni eliptični integral II. vrste in se označuje z $E(m)$, kjer je m modul eliptičnega integrala. Definiran je za module med 0 in 1.

42. Magnetni pretok

Vektor gostote magnetnega pretoka $\mathbf{B}$ je (poleg $\mathbf{J}$ in $\mathbf{D}$) že tretji vektor, ki podaja pretočno polje. Iz razlogov, ki bodo aktualni kasneje (Faradayev zakon indukcije), bomo tudi tu vpeljali pojem pretoka; označili[1] ga bomo z ϕ in imenovali *magnetni pretok* oz. *magnetni fluks*. Definiran je kot pretok gostote $\mathbf{B}$ skozi orientirano ploskev $\mathcal{A}$ (z izbrano smerjo normale $\mathbf{n}$); slika 42.1.



Slika 42.1: K interpretaciji zapisa magnetnega pretoka.

$$\boxed{\phi_{\text{skozi}\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}} \tag{42.1}$$

Enota za magnetni pretok je Vs ali Wb (weber).

Kot smo omenili, je pretok vezan na orientirano ploskev v prostoru. Ako nas zanima magnetni pretok skozi ploskev v nasprotni smeri, je potrebno normalo $\mathbf{n}$ obrniti v $-\mathbf{n}$; številska vrednost pretoka bo nasprotnega predznaka.

Zgled 42.1

Izračunajmo magnetni pretok skozi pravokotno ploskev, ki leži vzporedno ob ravnem, dolgem vodniku, ki vodi tok I; slika 42.2. Zanima naj nas pretok skozi ploskev z normalo v y-smeri. Na šrafirani diferencialni površinici je $\mathbf{B}$ enak $\mathbf{e}_y \mu_0 I/2\pi x$, medtem ko je $d\mathbf{a}$ enak $\mathbf{e}_y l\, dx$. Diferencial pretoka skoznjo je $\mu_0 I l\, dx/2\pi x$. Z integracijo od x_1 do $x_1 + a$ dobimo

$$\phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{x_1 + a}{x_1}$$

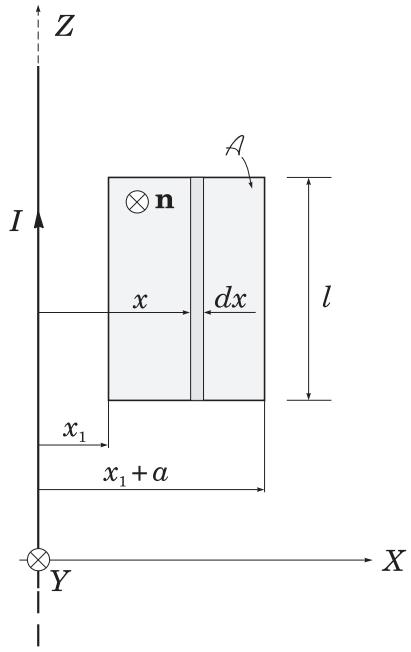
♣ Bralec naj poskusi izračunati pretok skozi krožno ploskev, ki bi ležala vzporedno ob ravnem tokovodniku; dobil bo:

$$\phi = \mu_0 I (\rho_1 - \sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2})$$

kjer je ρ_0 radij ploskve, ρ_1 pa pravokotna oddaljenost središča te od toka. ♣

Verjetno ni potrebno naglašati, da moremo tudi magnetni pretok (enako kot električni pretok ali električni tok) grafično predočiti z risanjem pretočnih cevk – običajno cevk z

[1] Če je ϕ magnetni pretok, potem bi smiselno k ϕ_{e}, tu morali pisati ϕ_{m}, vendar se pripis "m" praviloma opušča.



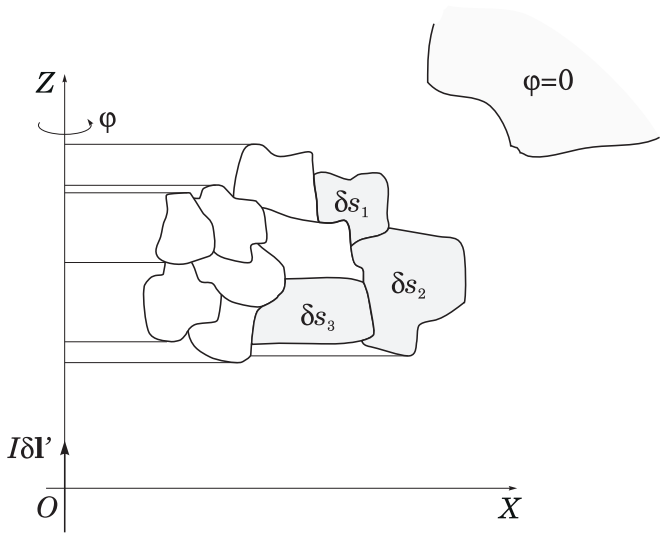
Slika 42.2: Pretok skozi pravokotno zanko ob ravnem tokovodniku.

enakim pretokom $\delta\phi$. Če se ozremo na magnetno polje ravnega tokovodnika (Zgled 42.1), potem so ograje cevk magnetnega pretoka koncentrični valji okrog vodnika. Iz zadnjega zgleda je povsem razvidno, da bo pretok med sosednjimi valji enak, če si bodo radiji teh sledili v geometrijskem zaporedju: $\rho_2 = k\rho_1$, $\rho_3 = k\rho_2$, ... Takrat bo pretok v cevkah na dolžinski meter $(\delta\phi/l)$ enak $\mu_0 I \ln k/2\pi$.

43. Neizvornost magnetnega polja

Razdelek bi mogli nasloviti tudi kot Gaussov stavek polja $\mathbf{B}$. Osrednje vprašanje bo: kolikšen je pretok vektorja $\mathbf{B}$ skozi sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ ali, kolikšen je (integral) $\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$? To karakteristiko polja bomo spoznali, če se bomo ozirali na oblikovanost magnetnega polja, ki je zajeta v Biot-Savartovem zakonu. Ker pa je polje $\mathbf{B}$ "zloženka" prispevkov tokovnih elementov $(I\delta\mathbf{l}')$, si poglejmo pretočni integral gostote $\delta\mathbf{B}$ takšnega elementa; $\oint_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = ?$

Za hip postavimo koordinatno izhodišče v ta, splošen tokovni element tako, da se os Z ujema s smerjo toka; slika 43.1. Za magnetno polje $(\delta\mathbf{B})$ tokovnega elementa smo ugotovili, da je – po smeri – krožno okrog njegove osi. Ograje pretočnih cevk so torej sestavljene iz krožnic okrog Z-osi. Če si v polravnini $\varphi = 0$ izberemo poljubno družino ploskvic $\{\delta s_i\}$, in jih zavrtimo okrog Z-osi, dobimo toroide, znotraj katerih je magnetni pretok "ujet" – se ohranja krožno okrog toroidov. Če v ta prostor, ki je v celoti zapolnjen z dotikajočimi toroidi (cevkami), vnesemo poljubno sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$, potem v območje, ki ga ta ploskev definira, določene cevke "vstopijo" in "izstopijo". Ker pa se magnetni pretok vzdolž cevk ohranja, pomeni, da tisti magnetni pretok, ki na enem mestu "vstopi" v območje, nekje na drugem mestu "izstopi". Ali še drugače: magnetni pretok, ki na določenih mestih v območje (z ograjo $\mathcal{A}$) vstopa, obenem, na drugih mestih, to območje



Slika 43.1: Toroidne cevke magnetnega pretoka tokovnega elementa.

zapušča.

Matematično bi to ugotovitev zapisali: $\oint_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$. Ker pa je bilo razmišljanje vezano na poljuben tokovni element, dobimo enak rezultat tudi za vsoto polj niza tokovnih elementov; sledi:

$$\oint_{\mathcal{A}} \left(\sum_i \delta\mathbf{B}_i \right) \cdot d\mathbf{a} = \sum_i \oint_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Sumacijo v zapisu moremo formalno limitirati v integracijo,

$$\lim_{i\to\infty} \sum_i \delta\mathbf{B}_i = \int d\mathbf{B} = \mathbf{B}$$

in imamo:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0} \tag{43.1}$$

Dobljena enačba je tudi t.i. *III. Maxwellova enačba* in je hkrati ena od štirih temeljnih Maxwellovih enačb elektromagnetnega polja. V prostem besednjaku bi jo brali: magnetno polje **B** je brezizvorno (neizvorno).

Na tem mestu se spomnimo IV. Maxwellove enačbe,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{prosti}}\, dv$$

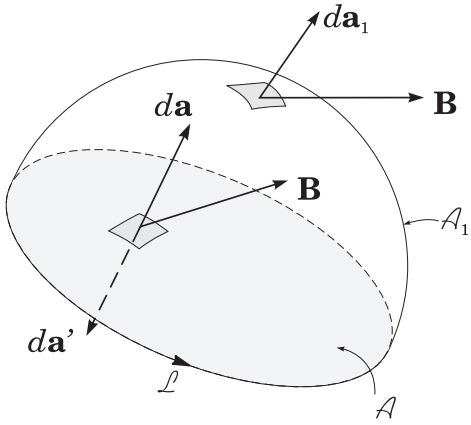
Ob njej smo ugotovili, da izvornosti vektorja **D** ustrezajo proste elektrine; tu pa moremo za vektor **B** ugotoviti, da adekvatnih magnetnih nabojev ("magnetin") nima – magnetin v smislu elektrin ni. Pa vendar bomo o magnetinah oz. o magnetnih nabojih še govorili, vendar bo to le v formalno-matematičnem smislu; na nivoju določene dualnosti (razdelek 50).

Ker velja relacija 43.1 za vsako ploskev (tudi najmanjšo), je očitno tudi

$$\lim_{\delta v\to 0} \frac{\oint_{\delta\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}}{\delta v} = 0$$

kar beremo: izvornost gostote **B** je v poljubni točki prostora vedno enaka nič.

Posledica neizvornosti magnetnega pretoka. V prostoru si zamislimo kako usmerjeno sklenjeno konturo $\mathcal{L}$, na katero "napnemo" dve opni – ploskvi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}_1$; slika 43.2. Čeravno ta trenutek dogovor o "pozitivnosti ploskve glede na konturo" ni toliko aktualen,



Slika 43.2: Pretok skozi dve opni, ki sta napeti na skupno konturo.

kot bo kasneje, se o tem vseeno dogovorimo že tu. Kot pozitivno smer normale na ploskvi, ki je napeta na usmerjeno konturo ($\mathcal{L}$), bomo razumeli tisto smer, ki jo – po desnem pravilu – dobimo, če se "miselno" zavrtimo vzdolž usmerjene 0konture. Pri obhodu kazalca na številčnici (v desno), bi pozitivna smer normale številčnice kazala v mehanizem ure. (Tudi vrtilna količina (ali navor) v mehaniki ustrezata temu dogovoru.)

Pozitivni smeri naših ploskev opredeljujeta izbrana reprezentanta ploskvic: $d\mathbf{a}$ in $d\mathbf{a}_1$. Magnetna pretoka (ϕ, ϕ_1) skozi obe opni (v pozitivni smeri) sta:

$$\phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \qquad\qquad \phi_1 = \int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1$$

Ker pa ploskvi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}_1$ tvorita zaključeno ploskev – določata območje prostora – moremo uporabiti lastnost brezizvornosti (enačba 43.1). Pišimo:

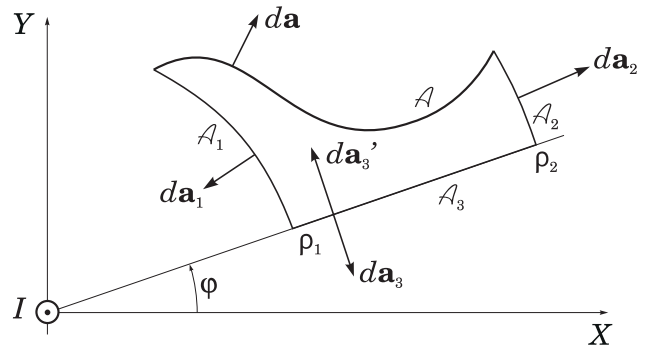
$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}' + \int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = -\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = 0$$

oz. $\phi_1 = \phi$. Rezultat bomo prebrali: magnetni pretok skozi katerokoli opno (ploskev), ki je napeta na (sklenjeno) konturo ($\mathcal{L}$), je neodvisen od oblike opne. Pri konkretnih izračunih magnetnega pretoka bomo zato za integracijsko ploskev izbrali takšno, pri kateri bo integracija "najlažje stekla". Celo še več. Kar naenkrat ni magnetni pretok več lasten ploskvi, ampak konturi (robu) ploskve; pisali bi lahko: $\phi_{\text{skozi}\mathcal{A}} = \phi_{\text{"skozi}\mathcal{L}\text{"}}$. Ta, nekako "višji pogled" – bi rekli –, pa je že v domeni nekega novega vektorja, ki ga na tem nivoju ne bomo spoznali, ker "žal" konceptualno presega okvire osnov elektromagnetike. Omenjen vektor je t.i. *magnetni vektorski potencial*[1] (označen je z **A** in ima enote Vs/m). Prav zaradi te omejitve bo naša obravnava magnetnih polj objektivno nekoliko "siromašnejša" – primerjalno na elektrostatično polje.

[1]Čisto in povsem neobvezno zapišimo, da je za dano tokovno strukturo moč potencial izračunati s tole

Zgled 43.1

Izračunajmo magnetni pretok skozi poljubno zvijugan trak dolžine l vzdolž ravnega tokovodnika; slika 43.3. Če ploskev traku dopolnimo z dvema trakoma ($\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_2$)



Slika 43.3: Magnetni pretok skozi zvijugan trak ob ravnem tokovodniku.

na krožnicah ρ_1 in ρ_2 ter s trakom $\mathcal{A}_3$ na polravnini $\varphi = konst.$, dobimo (v prerezu) sklenjeno ploskev. Pretok skozi vse štiri ploskve (trakove) je po enačbi 43.1 enak nič, $\phi + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$. Trakova $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_2$ sta izbrana tako, da je $\mathbf{B}$ na njiju tangencialen, zato ju ta ne pretaka, $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Dalje moremo pisati: $\phi = -\phi_3$ oz.

$$\phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\int_{\mathcal{A}_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_3 = \int_{\mathcal{A}_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_3'$$

Pretok skozi pravokotnik, ki leži vzporedno ob tokovodniku, pa smo v zgledu 42.1 že izračunali. Če enačbo smiselno prenesemo na oznake s slike 43.3, dobimo za iskan pretok skozi zvijugan trak tole izražavo:

$$\phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Rezultat je vsekakor vreden pozornosti. Za pretok skozi opazovan trak (ob ravnem tokovodniku) sta "odgovorni" le razdalji robov traku do vodnika.

Zgled 43.2

Za nalogo si postavimo določitev pretočnih cevk magnetnega pretoka v okolici dvovoda, zanemarljivega polmera žic, ki vodi tok I; slika 43.4. Ni težko uvideti, da ima magnetno polje na simetralni ravnini ($x = 0$) le y-komponento; to pomeni, da je ta ravnina lahko ograja ene od pretočnih cevk. Na sliki je vrisana sosednja

---

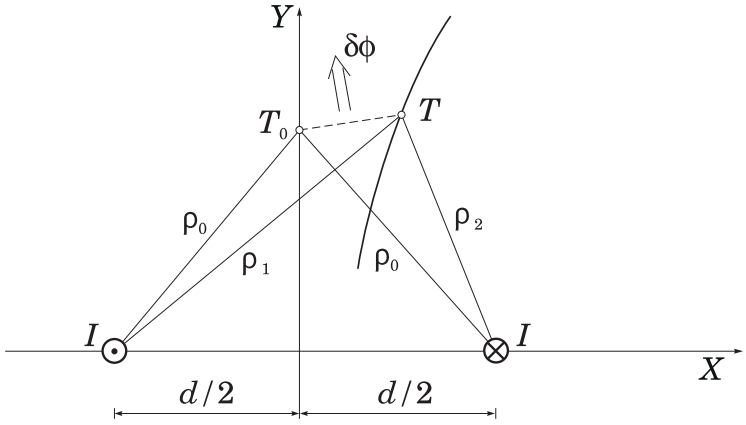
integracijo:

$$\mathbf{A}(T) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(I_{\text{cel.}})} \frac{\mathbf{J}(T')\, dv'}{R}$$

in da je $\mathbf{B}$ vrtinec ali rotor tega potenciala ($\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$) ter da je magnetni pretok (skozi pentljo $\mathcal{L}$) takle:

$$\phi_{\text{skozi}\mathcal{L}} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Tu deluje nabla operator ($\boldsymbol{\nabla}$) nad vektorjem $\mathbf{A}$ v smislu vektorskega produkta.



Slika 43.4: Magnetni pretok v okolici dvovoda zanemarljivega polmera žic.

ograja s splošno točko T. S pomočjo rezultata v prejšnjem zgledu moremo zapisati pretok skozi črtkan del med T_0 in T kot vsoto prispevkov levega in desnega toka,

$$\delta\phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{\rho_0}{\rho_2} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Od tu dobimo enačbo skicirane ograje pretočne cevke: $\rho_1/\rho_2 = k$. Takšno enačbo smo v elektrostatiki dobili za ekvipotencialke v okolici dveh premih ($\pm$) elektrin – dvovoda. Zaključimo lahko, da se pri dvovodu (zanemarljivih polmerov žic) sliki ekvipotencialk električnega potenciala in pretočnic magnetnega polja sovpadata. Ker pa je $\mathbf{E}$ pravokoten na ekvipotencialko, in je $\mathbf{B}$ tangencialen na ograji pretočne cevke, sledi: $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ – to smo omenili že v zgledu 41.2.

44. Vrtinčnost magnetnega polja

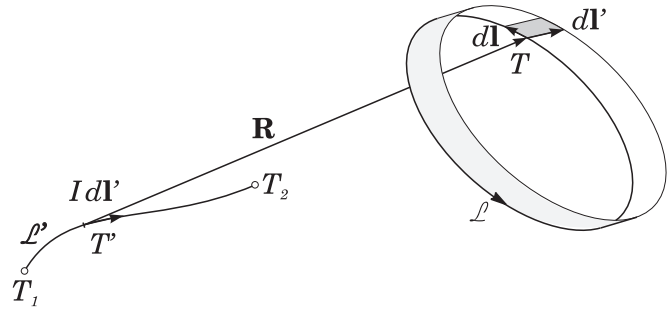
Temo bi lahko naslovili tudi kot Stokesov stavek vektorja $\mathbf{B}$. Večkrat smo že govorili o tem, da je magnetno polje vrtinčno (cirkularno) okrog osi tokovnega elementa. V tem razdelku bo naša naloga najti merilo vrtinčnosti vektorja $\mathbf{B}$ vzdolž in okrog poljubne sklenjene konture ($\mathcal{L}$) v prostoru. Kratkomalo, zanimal nas bo (integral) $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$. Spet se za hip spomnimo elektrostatike; tam smo ugotovili, da je vektor $\mathbf{E}$ nevrtinčne narave ($\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$); kaj pa $\mathbf{B}$?

Vzemimo poljuben odsek $\mathcal{L}'$ linijskega toka s tokom I, ki naj je zaenkrat še nesklenjen – razteza naj se med točkama T_1 in T_2 –, kasneje pa bomo linijski tok (oz. $\mathcal{L}'$) sklenili. V bližini tega toka si izberimo poljubno zanko $\mathcal{L}$, vzdolž katere bomo opazovali vrednost (integrala) $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$; slika 44.1. Vektor $\mathbf{B}$ v točki T na konturi $\mathcal{L}$ bo takle:

$$\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{T_1 \mathcal{L}' T_2} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

Če to vnesemo v krivuljni integral za $\mathbf{B}$, dobimo:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{T_1 \mathcal{L}' T_2} \oint_{\mathcal{L}} \frac{(d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{l}}{R^3}$$



Slika 44.1: Geometrijska interpretacija dvojne integracije (po $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}'$).

Zaenkrat naj nas zanima le podintegralska funkcija. Mešan produkt $(d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{l}$ moremo pisati tudi kot $(d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot \mathbf{R}$, celotno podintegralsko funkcijo pa kot

$$\frac{(d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot (\mathbf{R}/R)}{R^2}$$

Za geometrijsko interpretacijo tega izraza si pomagamo na sliki tako, da konturo $\mathcal{L}$ navidezno premaknemo za $d\mathbf{l}'$. Vektorski produkt $d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'$ pomeni diferencial ploskvice na traku okrog konture $\mathcal{L}$. Če to množimo s smernikom $(\mathbf{R}/R)$, dobimo vidni del te ploskvice iz točke T', in če slednjo delimo s kvadratom oddaljenosti (R^2), dobimo prostorski kot $d\Omega_{\text{ploskvice}}$, pod katerim vidimo ploskvico na traku iz točke T'. Če dalje, v smislu (integrala) $\oint_{\mathcal{L}}$, seštejemo vse te prostorske kote, dobimo prostorski kot traku $(d\Omega_{\text{traku}})$, ki ga vidimo iz točke T'. Pisali bi:

$$\int_{T_1\mathcal{L}'T_2} \oint_{\mathcal{L}} \frac{(d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \cdot (\mathbf{R}/R)}{R^2} = \int_{T_1\mathcal{L}'T_2} \oint_{\mathcal{L}} d\Omega_{\text{ploskvice}} = \int_{T_1\mathcal{L}'T_2} d\Omega_{\text{traku}}$$

Prostorski kot $d\Omega_{\text{traku}}$ se nanaša le še na integracijo vzdolž toka in pomeni spremembo prostorskega kota konture $\mathcal{L}$ (ali opne, ki je na to konturo napeta) – gledano iz točke T' –, ko se po konturi $\mathcal{L}'$ "premaknemo" za $d\mathbf{l}'$. Če začetni točki (T_1) ustreza prostorski kot Ω_1, končni točki (T_2) pa prostorski kot Ω_2 (slika 44.2), potem je

$$\int_{T_1\mathcal{L}'T_2} d\Omega_{\text{traku}} = \Omega_2 - \Omega_1$$

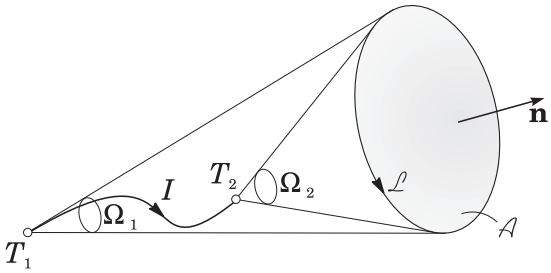
Krivuljni integral vektorja $\mathbf{B}$ je takle:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(\Omega_2 - \Omega_1)} \tag{V1}$$

Vrtinčnost magnetnega polja sklenjenih tokov. Zaenkrat je analizirani integral izpeljan za nesklenjeno tokovno nit. Poglejmo, kaj bo z vrednostjo integrala pri sklenjenem toku (sklenjeni konturi $\mathcal{L}'$); skice na sliki 44.3.

Skica a) je nadaljevanje slike 44.2; točka T_2 gre skozi opno zanke $\mathcal{L}$ in njen prostorski kot prekorači vrednost 2π. Komplementarni kot Ω_2' je $4\pi - \Omega_2$; s tem je

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \left(1 - \frac{\Omega_1 + \Omega_2'}{4\pi}\right)$$



Slika 44.2: Prostorska interpretacija (integrala) $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$.

Prostorski kot Ω_2' je kot, pod katerim vidimo ploskev $\mathcal{A}$ z normalo $-\mathbf{n}$. Če točko T_1 potisnemo v "levo neskončnost", točko T_2 pa v "desno neskončnost" (črtkano), objamemo z $\mathcal{L}$ "neskončen" linijski tok ($\Omega_1 \to 0, \Omega_2' \to 0$); integral dobi vrednost $\mu_0 I$.

Na skici b) sta točki T_3 in T_4 zelo blizu; kontura $\mathcal{L}'$ je že "skoraj" sklenjena. Prostorska kota Ω_3 in Ω_4' sta po iznosu praktično enaka, vendar različnega predznaka, saj se Ω_3 nanaša na normalo $\mathbf{n}$, medtem ko se Ω_4' nanaša na normalo $-\mathbf{n}$ šrafirane opne ($\mathcal{A}$) na konturi $\mathcal{L}$. V limiti, ko se T_3 in T_4 stakneta, dobimo

$$\lim_{T_4 \to T_3} \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\Omega_4' \to -\Omega_3} \mu_0 I \left(1 - \frac{\Omega_3 + \Omega_4'}{4\pi}\right) = \mu_0 I$$

Integral $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ je (do μ_0) sorazmeren toku I, ki prestopi opno v pozitivnem smislu. Če bi toku obrnili smer, bi bila vrednost integrala $-\mu_0 I$; takšen tok bi prestopil ploskev v negativni smeri.

Na skici c) imamo primer, ko točka T_6 ne prestopi opne in se njen kot ne dvigne čez 2π; točka T_6 ostaja na isti strani opne. Kota Ω_5 in Ω_6 sta v limiti $T_6 \to T_5$ enaka; zato je

$$\lim_{T_6 \to T_5} \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\Omega_6 \to \Omega_5} \mu_0 I \frac{\Omega_6 - \Omega_5}{4\pi} = 0$$

Tokovna zanka $\mathcal{L}'$ opne ne prestopi; opazovan integral ima vrednost nič.

Na skici d) imamo tri tokovne zanke s toki I_1, I_2 in I_3. Vsakemu od teh tokov pripada parcialno magnetno polje; $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ in $\mathbf{B}_3$. Glede na povedano bi imeli krivuljni integrali naslednje vrednosti:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_2 \qquad \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 I_3$$

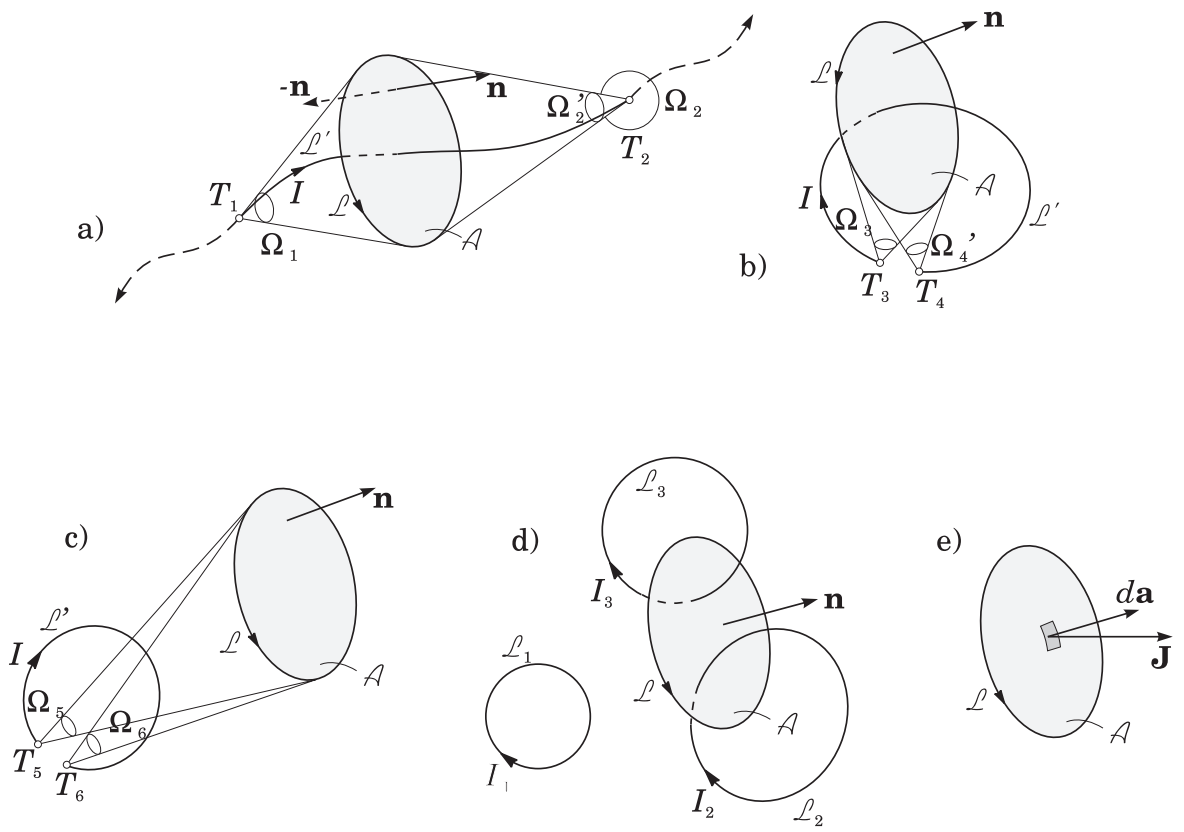
Za sumarno polje $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3$ bi dobili:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_2 + (-I_3))$$

Ob pogledu na skico d) bi enačbo prebrali: sklenjen krivuljni integral vektorja $\mathbf{B}$ je (do μ_0) sorazmeren vsoti tokov, ki opno zanke $\mathcal{L}$ prestopajo v pozitivnem smislu.

Slednji zapis bi mogli formalno razširiti na množico tokovnih zank, ki v prostoru generirajo polje $\mathbf{B}$. Pisali bi:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{j=1}^{n} (\pm) I_j = \mu_0 I_{\text{skozi } \mathcal{A}}} \tag{44.1}$$



Slika 44.3: Različne konstelacije tokov in zanke $\mathcal{L}$ v interpretaciji (integrala) $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$.

Pri tem pomeni n število le tistih tokovnih zank, ki jih kontura $\mathcal{L}$ objame; predznak (+) pripada tokom, ki opno na $\mathcal{L}$ prestopijo v pozitivnem smislu, predznak (−) pa tokom, ki prestopijo opno v negativnem smislu.

Od tu do splošne formule pa je le še korak. Vsaka sklenjena tokovna zanka more namreč "poosebljati" pretočno cevko splošnega brezizvornega tokovnega polja gostote $\mathbf{J}$, ki generira polje $\mathbf{B}$; skica e). Relevanten tok skozi konturo $\mathcal{L}$ bi zapisali kar z integracijo gostote $\mathbf{J}$ po izbrani opni $\mathcal{A}$ na $\mathcal{L}$,

$$I_{\text{skozi } \mathcal{A}} = I_{\text{“skozi } \mathcal{L}''} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

in za integral vrtinčnosti vektorja $\mathbf{B}$ bi dobili:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}} \tag{44.2}$$

Enačbo bomo brali: krivuljni integral vektorja $\mathbf{B}$ vzdolž sklenjene krivulje $\mathcal{L}$ je (do μ_0) sorazmeren vsoti tokov, ki (katerokoli) opno $\mathcal{A}$ (na konturi $\mathcal{L}$) prestopijo v pozitivnem smislu. Pri tem zapisu je odločilen prejšnji dogovor o smeri obhoda in pozitivnosti ploskve; kadar bomo zapisali enačbo 44.2, moramo imeti "pred očmi" skico e) na sliki 43.3. In še nekaj je treba poudariti. Enačba 44.2 velja zaenkrat samo za toke, ki so v naših galvanskih krogotokih konduktivno sklenjeni ($\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$). Kadar pa temu ne bo tako, se bomo oprli na enačbo (V1).

Zgled 44.1

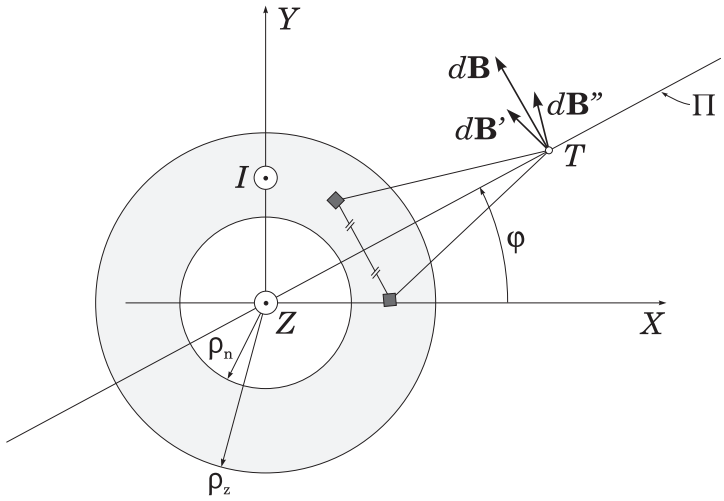
Za začetek preverimo enačbo 44.1 na polju ($\mathbf{B}$) ravnega tokovodnika. V zgledu 41.2 smo za tok I v osi Z določili polje $\mathbf{B}$ ob njem: $B_\varphi = \mu_0 I/2\pi\rho$. Če si za konturo $\mathcal{L}$ izberemo krožnico z radijem ρ okrog vodnika v φ-smeri, dobimo:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{(2\pi\rho)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B_\varphi = \mu_0 I$$

Desna stran očitno (do μ_0) ustreza toku, ki prestopa opno krožnice v pozitivni (z) smeri.

Zgled 44.2

Izračunajmo magnetno polje v in ob cevastem vodniku, ki vodi tok I z enakomerno gostoto po prerezu; slika 44.4. Če skozi točko T in os Z položimo ravnino Π, potem



Slika 44.4: Polje cevastega tokovodnika.

ta razdeli cev na dvoje. Tokovna nit v zgornji, in simetrična nit v spodnji polovici, generirata v točki T skupno polje $d\mathbf{B}$ v φ-smeri. Zaradi tega bo tudi sumarno polje toka (v cevi) imelo v celotni prerezni (XY) ravnini le φ-komponento; $\mathbf{B} = (0, B_\varphi, 0)$. Očitno je tudi, da bo B_φ (zaradi vzdolžne in krožne simetrije) neodvisen od φ in z koordinate; $B_\varphi = B_\varphi(\rho)$. Če si izberemo koncentrično krožno konturo z dolžino $2\pi\rho$ okrog osi Z, potem bo enačba 44.2 imela naslednje vrednosti:

$$\oint_{(2\pi\rho)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B_\varphi = \mu_0 \begin{cases} 0 & \rho \le \rho_\mathrm{n} \\ \dfrac{\rho^2 - \rho_\mathrm{n}^2}{\rho_\mathrm{z}^2 - \rho_\mathrm{n}^2} I & \rho_\mathrm{n} < \rho \le \rho_\mathrm{z} \\ I & \rho > \rho_\mathrm{z} \end{cases}$$

Če je $\rho < \rho_\mathrm{n}$, kontura ne objame nobenega toka, če je ρ v področju toka, objame le del tega toka (proporcionalno prerezu), če pa je ρ izven cevi, objame krožnica

celoten tok cevi. Pišemo:

$$B_\varphi = \begin{cases} 0 & \rho \le \rho_\mathrm{n} \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\left(\rho_\mathrm{z}^2 - \rho_\mathrm{n}^2\right)}\left(\rho - \dfrac{\rho_\mathrm{n}^2}{\rho}\right) & \rho_\mathrm{n} < \rho \le \rho_\mathrm{z} \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & \rho > \rho_\mathrm{z} \end{cases}$$

Magnetnega polja v votlem delu ni, v cevi progresivno narašča, zunaj pa upada tako, kot da bi bil ves tok združen v osi. Ni tudi težko videti, da je zlepek treh funkcij na spojih zvezen. ♣ Bralec naj si izriše potek $B_\varphi(\rho)$ in izračuna količino magnetnega pretoka v cevi (med $\rho = 0$ in $\rho = \rho_\mathrm{z}$) na dolžini l. ♣

Za konec vzemimo, da je vodnik polnega prereza; $\rho_\mathrm{n} = 0$, $\rho_\mathrm{z} = \rho_0$. Za gostoto B_φ dobimo:

$$B_\varphi = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho_0^2}\rho & \rho \le \rho_0 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

Polje znotraj linearno narašča od nič do vrednosti $\mu_0 I/2\pi\rho_0$, nato pa upada po hiperboli k nič.

♣ Bralec naj določi polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ v/ob elektronskem curku premera d in prostorske gostote ρ_e, ki se giblje s hitrostjo $\mathbf{v}$ vzdolž Z-osi. Kolikšna je volumska gostota Lorentzove sile ($\mathbf{f}_\mathrm{L} = \rho_\mathrm{e}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$) v curku?

Bralec naj izračuna porazdelitev gostote $\mathbf{B}$ v koaksialnem kablu, ki vodi tok I; polmeri žile in plašča so ρ_1, ρ_2 in ρ_3. Kot rezultat bo dobil:

$$B_\varphi = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1^2}\rho & \rho \le \rho_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & \rho_1 < \rho \le \rho_2 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\left(\rho_3^2 - \rho_2^2\right)}\left(\dfrac{\rho_3^2}{\rho} - \rho\right) & \rho_2 < \rho \le \rho_3 \\ 0 & \rho > \rho_3 \end{cases}$$

Izriše naj tudi funkcijski potek $B_\varphi(\rho)$.

Kolikšno bi bilo polje v votlem delu cevi (slika 44.4), če bi ta ne bil koncentričen, ampak ekscentričen? ♣

Zgled 44.3

Za poln krožni vodnik s tokom I in polmerom ρ_0 izračunajmo funkcijo pretoka $\psi(\rho)$, ki naj podaja količino magnetnega pretoka znotraj koncentričnega valja polmera ρ okrog Z-osi na dolžini l. Za izračun tega pretoka si kot pretočno ploskev izberemo

pravokotnik dolžine l in širine ρ, ki leži na polravnini $\varphi = konst.$ in se mu ena vzdolžna stranica ujema z Z-osjo. ♣ Sliko naj si izriše bralec. ♣ Iskana pretočna funkcija bo integral,

$$\psi(\rho) = \int_0^\rho B_\varphi(\rho')l\,d\rho'$$

Pri tem je $l\,d\rho'$ površina diferencialnega traku vzdolž vodnika, ρ' pa je mesto (lega) traku nekje med 0 in ρ. Za $B_\varphi(\rho')$ je potrebno vstaviti izraz za polje krožnega vodnika (prejšnji zgled), in sicer: če je $\rho < \rho_0$, integriramo izraz $\mu_0 Il\rho'/2\pi\rho_0^2$ od 0 do ρ, če pa je $\rho > \rho_0$, integriramo izraz $\mu_0 Il\rho'/2\pi\rho_0^2$ od 0 do ρ_0, izraz $\mu_0 Il/2\pi\rho'$ pa od ρ_0 do ρ; dobimo:

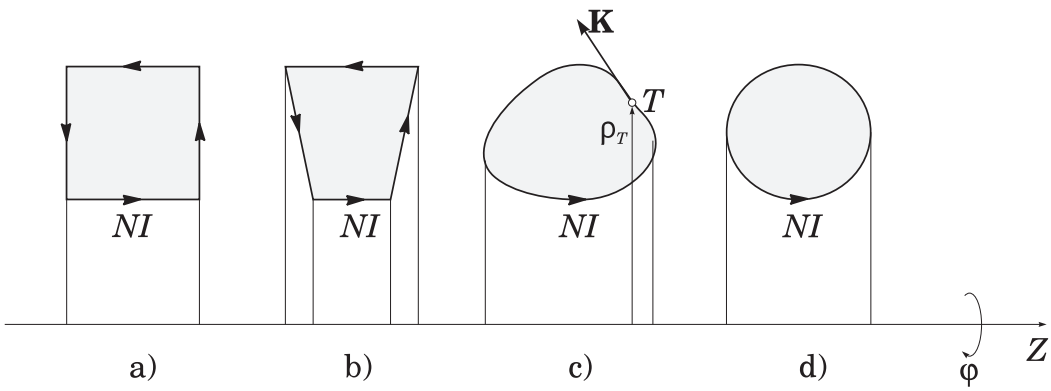
$$\psi(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 Il}{4\pi}\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^2 & \rho \le \rho_0 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{\rho}{\rho_0}\right) & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

♣ Bralec naj potek $\psi(\rho)$ izriše sam. V notranjem delu je potek paraboličen; na meji (ρ_0) se v zunanjost zvezno in gladko prevesi v logaritmičen potek. ♣

Dobljeno funkcijo si bomo poskusili vtisniti v spomin; prav nam bo prišla kasneje – pri računanju induktivnosti simetričnega dvovoda (razdelek 54).

Zgled 44.4

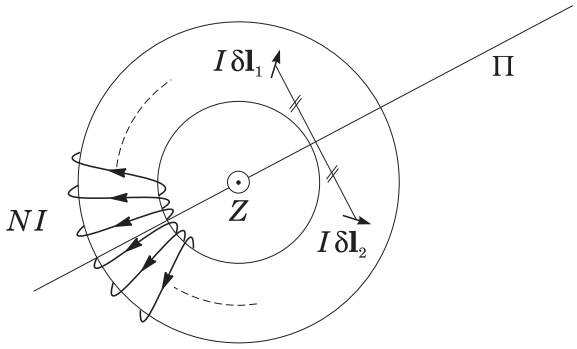
Magnetno polje zračnega toroidnega navitja. Vzemimo toroid poljubnega prereza; slika 44.5. Navitje na njem naj bo enakomerno in gosto po obodu; število ovojev



Slika 44.5: Različne oblike prerezov toroidnega navitja.

bodi N in naj vodijo tok I. S tem, ko smo rekli, da je navitje gosto in enakomerno porazdeljeno po obodu, moremo toke po obodu toroida razumeti tudi kot tokovno oblogo $\mathbf{K}$, ki "bi" tekla po "foliji". Takšna folija bi predstavljala en ovoj s tokom NI in gostoto $K = NI/2\pi\rho_T$.

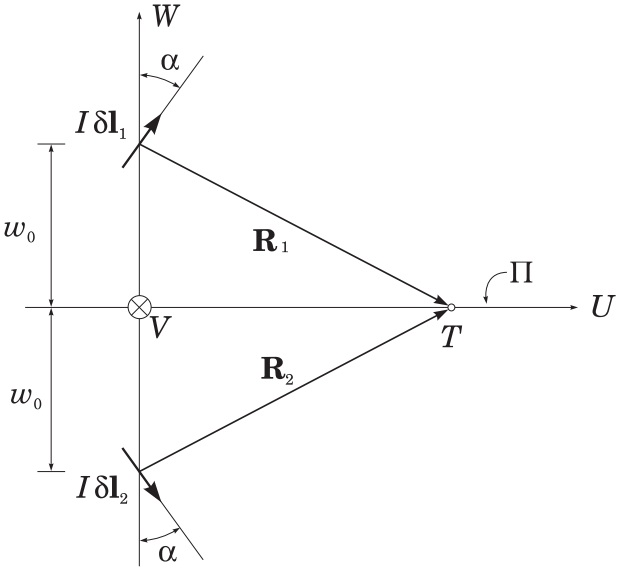
Vzemimo v precep enega od narisanih toroidov in ga predstavimo v aksialni perspektivi; slika 44.6. Razmišljanje bomo nadaljevali takole. "Prerežimo" toroidno navitje z ravnino Π na dva dela. Izberimo si dva reprezentanta tokovnih elementov, $I\delta\mathbf{l}_1$ in $I\delta\mathbf{l}_2$, ki ležita simetrično glede na prerezno ravnino. Celotno magnetno polje



Slika 44.6: Tokovni elementi na toroidnem navitju.

moremo – po superpoziciji – sestaviti iz prispevkov samih takšnih parov (dvojčkov). Za začetek si postavimo tole nalogo: ugotoviti želimo (le) smer magnetnega polja (tega dvojčka) na simetralni, Π-ravnini.

Za ta dvojček si izberimo nov koordinatni sistem, ki bo nanj prilagojen; slika 44.7. Ravnina (U, V) naj bo naša ravnina Π, os U pa naj bo postavljena tako, da tokovna



Slika 44.7: Pozicija tokovnih elementov glede na simetralno ravnino.

elementa ležita v (U, W) ravnini. Točka T je splošna točka na Π-ravnini in ima koordinate $(u, v, 0)$, odseka $\delta\mathbf{l}_1$ in $\delta\mathbf{l}_2$ sta po velikosti enaka, po smeri pa se razlikujeta: $\delta l_1 = \delta l_2 = \delta l$, $\delta\mathbf{l}_1 = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)\,\delta l$ in $\delta\mathbf{l}_2 = (\sin\alpha, 0, -\cos\alpha)\,\delta l$. Distančna vektorja $\mathbf{R}_1$ in $\mathbf{R}_2$ sta: $\mathbf{R}_1 = (u, v, -w_0)$, $\mathbf{R}_2 = (u, v, w_0)$ in $R_1 = R_2 = R$.

Po Biot-Savartovem zakonu (41.1) zapišimo $\delta\mathbf{B}$ v točki T:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{B}(T) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\Big((\delta\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_1) + (\delta\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_2)\Big)\\ &= \frac{\mu_0 I\delta l}{4\pi R^3}\Big((-v\cos\alpha, u\cos\alpha + w_0\sin\alpha, v\sin\alpha)\end{aligned}$$

$$+(v\cos\alpha, -u\cos\alpha - w_0\sin\alpha, v\sin\alpha)\Big)$$
$$= \frac{\mu_0 I\delta l}{2\pi R^3}(0,0,v\sin\alpha)$$

Očitno ima $\delta\mathbf{B}$ v točki T (na simetralni, Π-ravnini) le vertikalno projekcijo – normalno na ravnino Π. Glede na sliko 44.6 pa je to φ-smer okrog Z-osi. Zaključimo: magnetno polje toroidnega navitja ima samo φ-komponento, ki je zaradi simetrije neodvisna od kota φ; $\mathbf{B} = (0, B_\varphi, 0)$.

Izberimo si poljubno krožnico z radijem ρ okrog Z-osi na sliki 44.5. Po enačbi 44.2 bomo dobili:

$$\oint_{(2\pi\rho)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B_\varphi = \begin{cases} \mu_0 NI & \text{ko je krožnica znotraj toroida} \\ 0 & \text{ko je krožnica zunaj toroida} \end{cases}$$

Vsaka krožnica znotraj toroida objame vseh N ovojev s tokom I, medtem ko to ne "uspe" nobeni zunanji krožnici. Pišemo:

$$B_\varphi = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 IN}{2\pi\rho} & \text{za notranje točke totorida} \\ 0 & \text{za zunanje točke toroida} \end{cases}$$

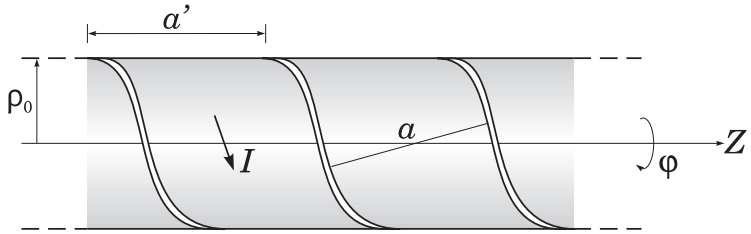
Rezultat za polje v notranjosti bi lahko komentirali s poljem ravnega tokovodnika vzdolž Z-osi s tokom NI. Magnetni pretok znotraj toroida pravokotnega prereza, skica a) na sliki 44.5, bi dobili po analogiji z zgledom 42.1; smiselno bi spremenili oznake in I zamenjali z NI.

Krajši komentar zahteva še rezultat za polje v zunanjosti toroida. Rezultat je presenetljivo "lep" in "žal" ni čisto resničen. Toroidno navitje je sicer gosto in enakomerno, v resnici pa spiralno – ovoji (zavoji) niso avtonomni, ampak prehajajo iz enega v drugega –, zato ima ekvivalenten ploskovni tok tudi manjšo krožno (K_φ) komponento, ki navzven rezultira tako, kot da bi tok I tekel še krožno okrog Z-osi. Polje zunaj toroida je zato takšno kot od niza diferencialnih krožnih ovojev po obodu toroida s skupnim tokom I (Zgled 41.6). Ker pa imajo toroidna navitja običajno veliko ovojev, moremo – v razmerju $1 : N$ – zunanje polje, glede na dominantno notranje, zanemariti.

Zgled 44.5

Kabli – posebno energetski – imajo oklop izveden iz spiralno navitega traku. Vprašajmo se po magnetnem polju toka, ki bi tekel po takšnem oklopu; slika 44.8. Širina traku bodi a in korak navijanja bodi a'. Med a, a' in ρ_0 velja geometrijska zveza: $(a')^{-2} + (2\pi\rho_0)^{-2} = a^{-2}$. Tok I v traku moremo predstaviti kot ploskovni tok $\mathbf{K}$ ($K = I/a$), ki ima dve komponenti: $K_\varphi = I/a'$, $K_z = I/2\pi\rho_0$. Komponenta K_z generira polje le zunaj oklopa, in sicer tako, kot da bi tok (I) tekel vzdolž osi kabla; ta tok interpretiramo kot tok v tanki cevi (Zgled 44.2).

Polje obloge K_φ pa določimo takole. Toroid na skici d), slika 44.5, ima tokovno oblogo $NI/2\pi\rho_T$. Če hkrati povečujemo NI in ρ_T, obliko prereza pa ohranjamo, dobimo v limiti neskončno dolgo (ravno) tuljavo s tokovno oblogo $N'I/l'$, kjer je N' število ovojev na dolžini l'. S povečevanjem radija toroida postaja polje znotraj

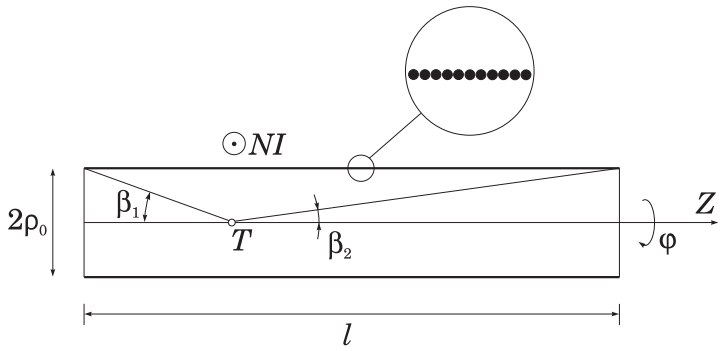


Slika 44.8: Tok v oklopu kabla.

vse bolj homogeno in enako $\mu_0 N' I/l'$. Ta tokovna obloga pa na sliki 44.8 ustreza ravno oblogi K_φ. Polje znotraj spiralnega trakastega oklopa bo zato v z-smeri; $B_z = \mu_0 K_\varphi$.

Zgled 44.6

Magnetno polje dolgega solenoida ($\rho_0 \ll l$) – ozke dolge tuljave z N ovoji tanke žice in tokom I; slika 44.9. Ob sliki 41.13 smo spoznali, da dajejo magnetnemu polju



Slika 44.9: Dolg solenoid.

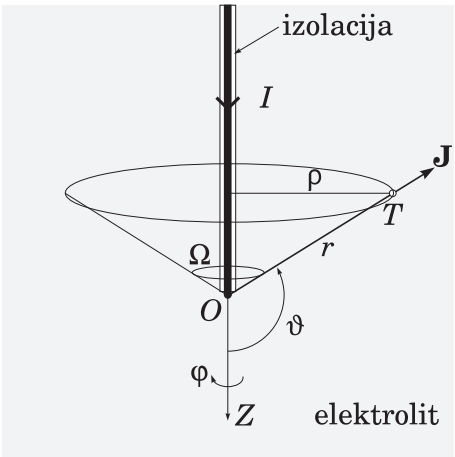
glavno karakteristiko najbližji tokovni elementi. Glede na izkušnje pri prejšnjem zgledu bo magnetno polje v centralnem delu znotraj solenoida (β_1 in $\beta_2 \ll \pi/2$) še vedno homogeno, $B_z \doteq \mu_0 NI/l$, zunaj pa takšno, kot od tokovne daljice (Zgled 41.1). ♣ Za polje v osi tuljave se dobi izražava:

$$B_z(T) = \frac{\mu_0 NI}{2l}(\cos\beta_1 + \cos\beta_2)$$

vendar naj do tega pride bralec sam; izhaja naj iz polja krožnega ovoja (Zgled 41.6) in sumacijo po ovojih naj v aproksimaciji zamenja z integracijo. ♣

Zgled 44.7

Magnetno polje radialnega sferičnega toka. Tu se bomo seznanili z navidez paradoksalno situacijo. Vzemimo ravno izolirano žico s tokom I, ki jo "pomočimo" globoko v prevoden elektrolit; slika 44.10. Bodi druga podobno izolirana žica, ki odvaja tok iz elektrolita, nekje daleč stran, tako da polja na opazovanem mestu praktično ne "moti". Tok (I), ki vstopi v raztopino, se bo v njej gotovo "razpršil" sferno simetrično v gostoto $\mathbf{J} = (J_r, 0, 0)$; $J_r = I/4\pi r^2$. Magnetno polje v splošni točki T



Slika 44.10: Vstop toka v raztopino.

zapišemo kot vsoto: $\mathbf{B}(T) = \mathbf{B}_I(T) + \mathbf{B}_J(T)$; prvi del polja povzroča tok v dovodu, drugi del pa radialni (sferični) tok z gostoto J_r. Polje $\mathbf{B}_I(T)$ poznamo že od tokovne daljice (Zgled 41.1): $B_{I\varphi}(T) = \mu_0 I(1 - \cos\vartheta)/4\pi\rho$.

Nadalje ugotovimo smer polja radialnega toka. Položimo skozi os Z in točko T ravnino Π. Glede na zgled 44.4 moremo v raztopini izbirati simetrične pare tokovnih elementov k ravnini Π (tako kot na slikah 44.6 in 44.7). Za vsak takšen par bi ugotovili, da ima polje v φ-smeri, kar pomeni, da ima to smer tudi celotno radialno tokovno polje, $\mathbf{B}_J = (0, B_{J\varphi}, 0)$, s tem pa ima to smer tudi razultirajoče polje $\mathbf{B}$; $\mathbf{B} = (0, B_\varphi, 0)$.

Uporabimo stavek vrtinčnosti (enačba 44.2) na konturi (krožnici) z radijem ρ; pišemo:

$$\oint_{(2\pi\rho)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho B_\varphi(T) = \mu_0 \left(I - \int_{(\pi\rho^2)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \right)$$

Krožno ploskev ($\pi\rho^2$) prestopa tok (I) žice v pozitivni smeri, medtem ko radialna gostota (J_r) prestopa to ploskev v nasprotni smeri. Količina slednjega toka pa (zaradi sferne simetrije) ustreza ravno prostorskemu kotu Ω, pod katerim se vidi krožna ploskev ($\pi\rho^2$) iz izhodišča (O). Ta kot je (po zgledu 2.11) izrazljiv s kotom ϑ, zato je

$$\int_{(\pi\rho)^2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \frac{I}{4\pi}\Omega = \frac{I}{2}\,(1 + \cos\vartheta)$$

S tem je

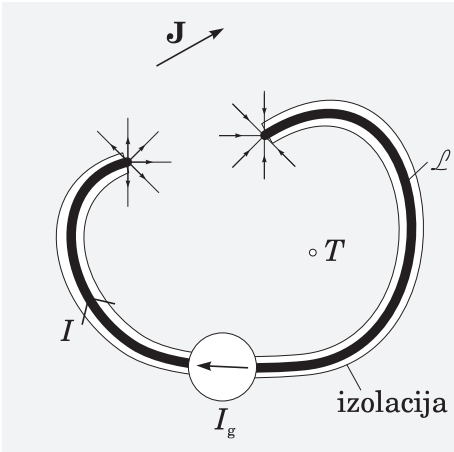
$$B_\varphi(T) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(1 - \cos\vartheta)$$

Dobljen rezultat pa je ravno $B_{I\varphi}(T)$, kar pomeni, da je $B_{J\varphi}(T) = 0$; radialno simetričen tok nima svojega magnetnega polja.

Potopljena izolirana žica bi bila lahko tudi kako drugače oblikovana, pa bi se tok v elektrolitu še vedno razdelil radialno simetrično. Za polje $\mathbf{B}$ v elektrolitu bi dobili: $\mathbf{B}(T) = \mathbf{B}_I(T); B_J(T) = 0$.

Če bi imeli v elektrolitu (ali drugi prevodni, razsežni in homogeni snovi) izolirano tokovno zanko prekinjeno, bi bilo magnetno polje v snovi določeno le s tokom v tej

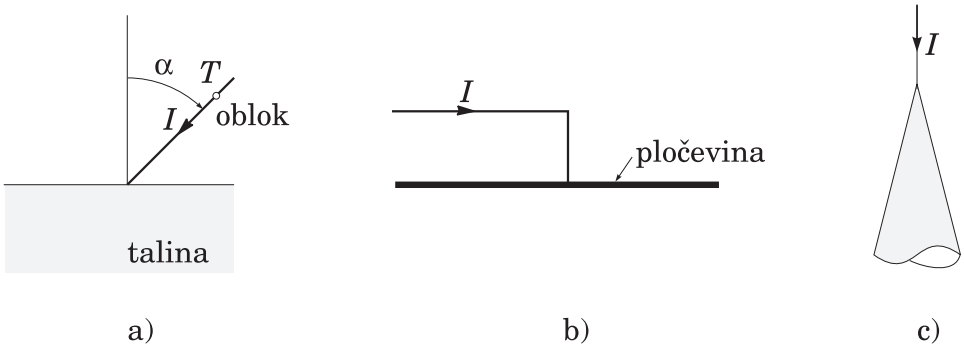
žici; slika 44.11. Za določitev polja **B** v splošni točki (T) v prevodni snovi, bi upora-



Slika 44.11: O magnetnem polju prekinjene izolirane tokovne zanke v prevodnem mediju.

bili integralni Biot-Savartov zakon in integracijo izvedli le po konturi ($\mathcal{L}$) izoliranega toka. ♣ Ob tem naj bralec premisli, kaj je z magnetnim poljem izolacijskega toka kondenzatorja, če je dielektrik homogen?

Na podlagi podobnih razmišljanj, kot smo jih izvedli v tem razdelku, naj poskusi bralec obdelati še nekaj sorodnih problemov; slika 44.12. Na skici a) vstopa elek-



Slika 44.12: Nekaj primerov radialnega toka.

trični oblok pod kotom (α) v talino (obločna peč). Določite diferencial magnetne sile v točki T. (Podoben problem je pri streli, ki "udari" v morje). Na skici b) je žica prispajkana na razsežno pločevino; tok (I) se po pločevini "razbeži" radialno kot ploskovni tok. Kako bi določili magnetno polje nad in pod pločevino? Na skici c) se tanka žica stožčasto debeli. Določite magnetno polje v in ob konusu! ♣

Vrtinčnost vektorja B. Vrtinčno naravo magnetnega polja podaja enačba 44.2; zapis se nanaša na poljubno sklenjeno konturo ($\mathcal{L}$) v magnetnem polju. Vprašajmo se po vrtinčenju v poljubno majhni zankici ($\delta\mathcal{L}$). Za lažjo predstavo naj bo to kar krožnica, opna ($\delta\mathcal{A}$) pa krožna ploskvica s površinico δa, normalo **n** in centralno točko T. Zaradi majhnih dimenzij bi integral (44.2) pisali takole:

$$\oint_{\delta\mathcal{L}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\delta\mathcal{A}} \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} \doteq \mu_0 \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}(T)\delta a = \mu_0 J_n(T)\delta a$$

Če ploskvico δa limitiramo proti nič, bi bila smiselna naslednja limita:

$$\lim_{\delta a \to 0} \frac{\oint_{\delta \mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\delta a} = \lim_{\delta a \to 0} \frac{\mu_0 \int_{\delta \mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}}{\delta a} = \mu_0 J_n(T)$$

Zapis bi prebrali: vrtinec vektorja $\mathbf{B}$ v smeri $\mathbf{n}$ je proporcionalen tokovni gostoti v tej smeri. Vrtinec vektorja je očitno vektorska kategorija, saj moremo za $\mathbf{n}$ izbirati po vrsti vektorje ortogonalne trojke: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ in $\mathbf{e}_3$. Na koncu bi rekli: vrtinec vektorja $\mathbf{B}$ v točki T je enak $\mu_0 \mathbf{J}(T)$.

45. Sile in delo magnetnega polja

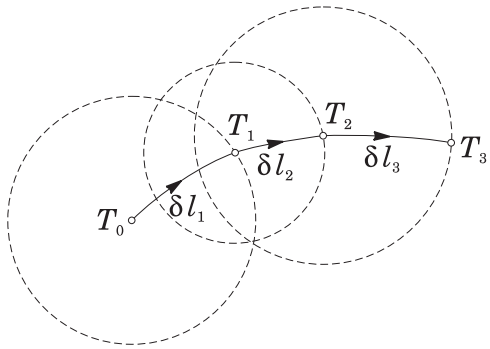
Že res, da smo se z magnetno silo srečali že v samem začetku poglavja o magnetiki, vendar kaj dlje od Ampèrovega zapisa stvar ni segla; nekatera od teh vprašanj so namreč vezana na lastnosti magnetnega polja, ki jih takrat še nismo poznali.

Naelektren delec v polju. Imejmo v praznem prostoru (vakuumu) znani porazdelitvi polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ kake časovno konstantne elektrinske in tokovne strukture (enosmernega vezja). Ob trenutku t_0 naj se v točki $T_0(\mathbf{r}_0)$ nahaja delec z maso δm in nabojem δQ in naj ima na tem mestu hitrost $\mathbf{v}_0$. Za vsak kasnejši trenutek $t \geq t_0$ moremo – s pomočjo Lorentzove sile – zapisati gibalno enačbo,

$$-\delta m \dot{\mathbf{v}} + \delta Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

Določanje nadaljnje trajektorije gibanja takšnega delca vsekakor ni enostavno opravilo, saj sta polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ lahko zahtevni prostorski funkciji, kar neobhodno terja vključitev numeričnih metod; problem dobi še dodatno dimenzijo, če sta polji časovno spremenljivi.

Zaiti v takšno splošnost, gotovo ne "utegne" biti naš namen, seznanitev z nekaterimi glavnimi obrisi pa že. Problem se že močno poenostavi, če opazujemo gibanje le v kratkem časovnem intervalu $\delta t_1 = t_1 - t_0$, ko delec uspe preteči kratko pot δl_1 in doseči točko $T_1(\mathbf{r}_1)$, kjer ima hitrost $\mathbf{v}_1$. Na tej kratki poti se delec očitno giblje v "lokalno homogenem polju", ki je približno $\mathbf{E}(T_0)$ oz. $\mathbf{B}(T_0)$. V naslednjem intervalu časa ($\delta t_2 = t_2 - t_1$) se giblje v lokalno homogenem polju, ki je približno $\mathbf{E}(T_1)$ in $\mathbf{B}(T_1)$. Pri tem preteče pot δl_2, doseže točko $T_2(\mathbf{r}_2)$ in ima tam hitrost $\mathbf{v}_2$. S tem postopkom moremo nadaljevati in tako slediti aproksimativni trajektoriji gibanja; slika 45.1. Na sliki smo s krogci označili cone privzete lokalne homogenosti polja ob vsakem naslednjem inkrementu časa.



Slika 45.1: Aproksimativna trajektorija gibanja naelektrenega delca.

Glede na povedano bi se v nadaljevanju posvetili le gibanju delca v homogenem polju, in še to nalogo bomo razdelili v dva dela: 1) gibanje delca v homogenem električnem polju in 2) gibanje delca v homogenem magnetnem polju.

1) Gibanje naelektrenega delca v homogenem električnem polju. Gibalna enačba je takrat:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\delta Q}{\delta m}\mathbf{E}$$

začetna pogoja (ob t_0) pa sta: $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ in $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$. Z eno integracijo dobimo hitrost,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + (t - t_0)\frac{\delta Q}{\delta m}\mathbf{E}$$

s še eno pa trajektorijo $\mathbf{r}(t)$,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)\mathbf{v}_0 + (t - t_0)^2\frac{\delta Q}{2\delta m}\mathbf{E}$$

Dobljeno gibanje je sestavljeno: v smeri začetne hitrosti je enakomerno, v smeri polja $\mathbf{E}$ pa je enakomerno pospešeno. (Če bi iskali vzporednico v gravitacijskem polju, potem temu gibanju ustreza poševni met; trajektorija je parabola.)

2) Gibanje naelektrenega delca v homogenem magnetnem polju. Gibalna enačba je sedaj:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\delta Q}{\delta m}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

začetna pogoja (ob t_0) pa naj sta spet: $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ in $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$.

Kot prvo: če je $v_0 = 0$, potem na delec ne deluje nikakršna magnetna sila, takšen delec še naprej miruje, zato bodi $v_0 \neq 0$. Glede na smer polja $\mathbf{B}$ razstavimo hitrost $\mathbf{v}$ na dve komponenti: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$. Prva je vzporedna z $\mathbf{B}$, druga pa je nanjo pravokotna. Pišimo:

$$\dot{\mathbf{v}}_\parallel + \dot{\mathbf{v}}_\perp = \frac{\delta Q}{\delta m}((\mathbf{v}_\parallel \times \mathbf{B}) + (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B})) = \frac{\delta Q}{\delta m}(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B})$$

Prvi vektorski produkt je nič, drugi pa je po smeri pravokoten tako na $\mathbf{B}$ kot na $\mathbf{v}_\perp$, zato sta:

$$\dot{\mathbf{v}}_\parallel = \mathbf{0} \qquad \dot{\mathbf{v}}_\perp = \frac{\delta Q}{\delta m}(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B})$$

Delni odgovor smo že dobili: hitrost delca se v smeri magnetnega polja ne spreminja: $v_\parallel(t) = v_\parallel(t_0)$. Dalje množimo drugo enačbo skalarno z $\mathbf{v}_\perp$,

$$\mathbf{v}_\perp \cdot \dot{\mathbf{v}}_\perp = \frac{\delta Q}{\delta m}(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}_\perp$$

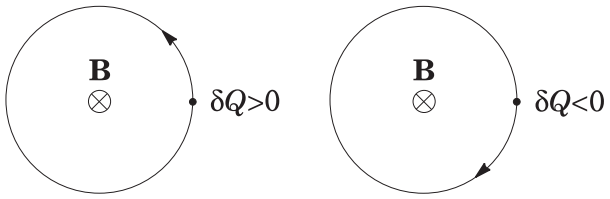
Zaradi mešanega produkta dobimo: $\mathbf{v}_\perp \cdot \dot{\mathbf{v}}_\perp = 0$; to moremo (razdelek 13) pisati dalje tudi kot

$$\frac{d}{dt}\left(v_\perp^2\right) = 0$$

Absolutna vrednost hitrosti $\mathbf{v}_\perp$ se ohranja, ohranja pa se tudi $v_\parallel$, kar pomeni, da se po iznosu ohranja tudi celotna hitrost: $v(t) = v(t_0)$. Magnetna sila je po iznosu očitno

konstantna in pravokotna na $\mathbf{B}$ in $\mathbf{v}_\perp$. Takšni sili pa v mehaniki ustreza enakomerno kroženje z radialnim pospeškom $\dot{\mathbf{v}}_\perp$.

Gibanje delca v homogenem magnetnem polju je torej spet sestavljeno; sestavljeno je iz enakomernega kroženja (okrog smeri polja $\mathbf{B}$) in enakomernega premočrtnega gibanja (v smeri polja $\mathbf{B}$) – trajektorija je spirala. Smer kroženja je odvisna od naelektritve delca: če je $\delta Q > 0$, potem kroži v levo, v nasprotnem v desno; slika 45.2. Magnetno polje očitno



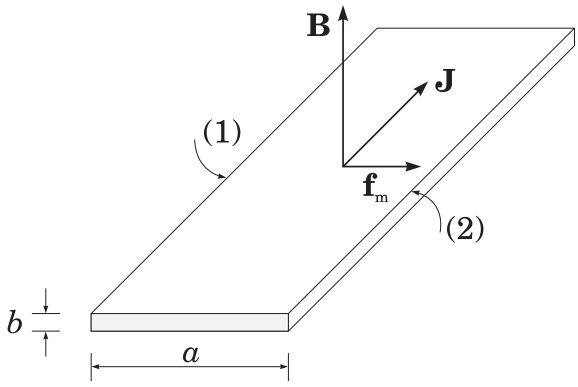
Slika 45.2: Smeri kroženja naelektrenega delca.

"izzove" kroženje; inducira se krožni tok, ki ustvarja tudi svoje magnetno polje, ki je na opni kroženja ravno nasprotno polju povzročitelja. Ta fenomen je podlaga za pojasnitev diamagnetnosti določenih snovi (razdelek 48).

Poglejmo si še radij in frekvenco kroženja: ker je radialni pospešek enak $\delta Q v_\perp B/\delta m$, je radij ($R$) kroženja enak $\delta m v_\perp/\delta Q B$, frekvenca ($f$) kroženja pa je $\delta Q B/2\pi\delta m$.

Če se vrnemo k sliki 45.1, potem je trajektorija gibanja v "kratkem" intervalu δt sestavljena iz enakomerno premočrtnega, enakomerno pospešenega in enakomerno krožečega gibanja. Tehničnih aplikacij Lorentzove sile na naelektren delec v $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ polju je veliko (npr. pospeševalniki); v elektrotehniki srečujemo to pri električnem in magnetnem odklanjanju elektronskega curka v katodni cevi.

Hallov pojav. Edwin Herbert Hall si je že leta 1879 omislil eksperiment, s katerim bi določil polariteto nosilcev električnega toka. Za opis pojava si zamislimo trak pravokotnega prereza $(a \times b)$, ki vodi tok I z enakomerno gostoto $\mathbf{J}$ in se nahaja v magnetnem polju $\mathbf{B}$. Zaradi nazornosti vzemimo, da je $\mathbf{J} \perp \mathbf{B}$; slika 45.3. Gostoti toka ($\mathbf{J}$) v prevodniku ustreza gibanje prostih nosilcev toka z gostoto ρ in hitrostjo $\mathbf{v}$.



Slika 45.3: Ilustracija Hallovega pojava.

Volumska gostota magnetne sile na te bi bila:

$$\mathbf{f}_\mathrm{m} = \lim_{\delta\tilde{v}\to 0} \frac{\delta \mathbf{F}_\mathrm{m}}{\delta\tilde{v}} = \rho\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

V primeru negativnih nosilcev, bi se na robu (1) pojavil presežek (+) elektrine, na robu (2) pa enak presežek (−) elektrine; v primeru pozitivnih nosilcev bi bilo ravno obratno. Na ta način razdvojena elektrina bi v traku generirala t.i. *Hallovo polje* ($\mathbf{E}_\mathrm{H}$) oz. *Hallovo napetost* ($U_\mathrm{H} = E_\mathrm{H} a$), ki bi vspostavila ravnotežje sil: $\rho(\mathbf{E}_\mathrm{H} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$, kar bi dalje pisali:

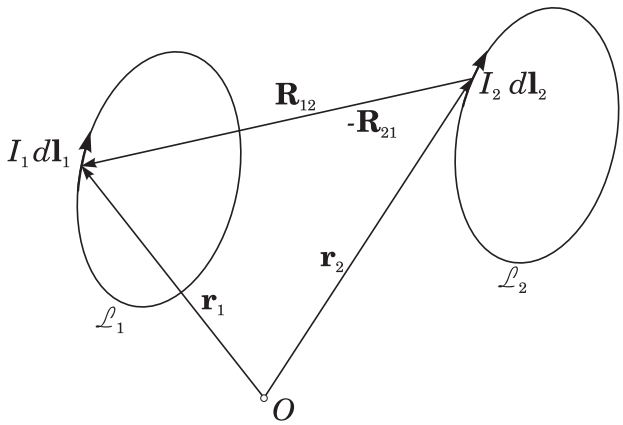
$$\mathbf{E}_\mathrm{H} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{J}}{\rho} \times \mathbf{B}$$

Seveda pa Hallov pojav le ni tako preprost, kot izgleda na prvi pogled. Meritve Hallove napetosti za različne prevodnike namreč kažejo, da tako polariteta kot velikost ne ustrezata zgornjim enačbam; izjema so nekatere enovalentne snovi (Li, Na, K, Cu, Ag, Cs, Au), kjer moremo govoriti le o kvalitativnem ujemanju meritve in računa. Običajno se Hallova napetost piše v obliki:

$$U_\mathrm{H} = -R_\mathrm{H} \frac{IB}{b}$$

kjer je R_H t.i. Hallova konstanta, ki se za različne snovi posredno določi z merjenjem U_H, I in B. Konstanta R_H je za Cu $-5.5 \cdot 10^{-11}$, za Ag je $-8.4 \cdot 10^{-11}$, za Al je $-4.0 \cdot 10^{-11}$, za Zn je $+10^{-10}$ in za Si je -10^{-9} m^3/C. Hallov element se uporablja pretežno v merilne namene – za merjenje gostote magnetnega polja.

Vzajemnost magnetnih sil med dvema togima tokovnima zankama. Vzemimo dve togi (čvrsti) tokovni zanki $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$ s tokoma I_1 in I_2; slika 45.4. Magnetno silo med



Slika 45.4: Sila med dvema tokovnima zankama.

dvema tokovnima elementoma (sosednjih si zank) določa Ampèrov zakon. Diferenciala sil na oba tokovna elementa sta:

$$d\mathbf{F}_\mathrm{m1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

$$d\mathbf{F}_\mathrm{m2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{21})}{R_{21}^3}$$

Celotno magnetno silo na prvo ali drugo zanko pa bi dobili z dvojno integracijo vzdolž obeh kontur:

$$\mathbf{F}_\mathrm{m1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}_1} \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}_1} \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{21})}{R_{21}^3}$$

Za dvojni vektorski produkt vektorjev $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ velja identiteta: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. V tem smislu preoblikujemo oba podintegralska produkta:

$$d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_{12}) = (d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{R}_{12})d\mathbf{l}_2 - (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{R}_{12}$$

$$d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{21}) = (d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{R}_{21})d\mathbf{l}_1 - (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{R}_{21}$$

Ker pa je $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}$, dobimo za vsoto sil izraz

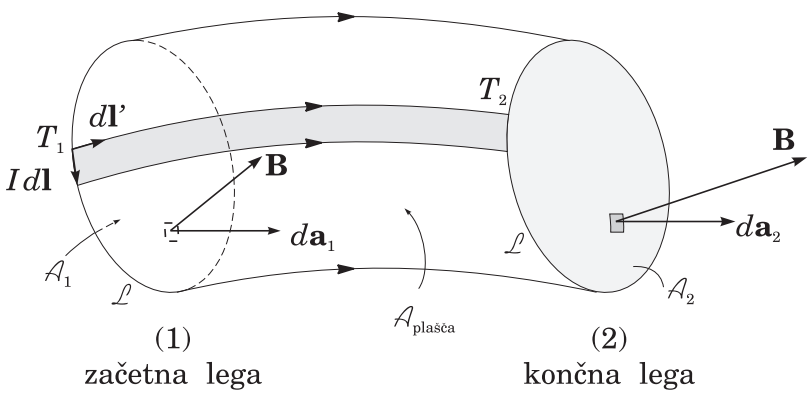
$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}1} + \mathbf{F}_{\mathrm{m}2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left(\oint_{\mathcal{L}_2} \left(\oint_{\mathcal{L}_1} \frac{\mathbf{R}_{12} \cdot d\mathbf{l}_1}{R_{12}^3} \right) d\mathbf{l}_2 - \oint_{\mathcal{L}_1} \left(\oint_{\mathcal{L}_2} \frac{\mathbf{R}_{21} \cdot d\mathbf{l}_2}{R_{21}^3} \right) d\mathbf{l}_1 \right)$$

Integrala v notranjih oklepajih smo srečali že v elektrostatiki – pri delu polja električnih sil (razdelek 13) – in ugotovili, da sta nič, iz česar sledi: $\mathbf{F}_{\mathrm{m}1} + \mathbf{F}_{\mathrm{m}2} = \mathbf{0}$ – medsebojni magnetni sili med togima tokovnima zankama sta vzajemni. ♣ Bralec more to lastnost magnetnih sil preveriti in potrditi na enostavnem primeru dveh vzporednih togih dvovodov. ♣

Delo magnetnih sil. Za dano tokovno strukturo privzemimo, da poznamo njej pripadajoče magnetno polje po celotnem prostoru; $\mathbf{B}(T)$ je znan. Nato vnesemo v ta prostor poljubno togo tokovno zanko ($\mathcal{L}$) s tokom I. Na vsak konturni element te zanke bo delovala diferencialna magnetna sila $d\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, na celotno zanko pa integralna sila

$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = I \oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Pa dopustimo, da se opazovana zanka – pod vplivom teh sil – premakne od neke začetne (1) do neke končne lege (2); slika 45.5. Pri tem premiku bo zanka ($\mathcal{L}$) po prostoru



Slika 45.5: Premik tokovne zanke v magnetnem polju.

"zarisala" navidezni plašč cevke ($\mathcal{A}_{\text{plašča}}$), ki tvori z opnama $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_2$ (v začetni in končni legi zanke $\mathcal{L}$) sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$.

Če za začetek zasledujemo le gibanje tokovnega elementa $Id\mathbf{l}$, potem se bo ta gibal po šrafiranem delu plašča od T_1 do T_2. Diferencial dela (dA_m) magnetne sile ($d\mathbf{F}_\mathrm{m}$) bo za omenjeni premik enak integralu,

$$dA_\mathrm{m} = I\int_{T_1}^{T_2}(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}' = I\int_{T_1}^{T_2}(d\mathbf{l}'\times d\mathbf{l})\cdot\mathbf{B}$$

kjer smo že tudi zamenjali vrstni red faktorjev v mešanem produktu. Produkt ($d\mathbf{l}'\times d\mathbf{l}$) ustreza diferencialu ploskvice na šrafiranem traku, ki (po smeri) kaže v notranjost cevke. Integral $\int_{T_1}^{T_2}(d\mathbf{l}'\times d\mathbf{l})\cdot\mathbf{B}$ je torej diferencial pretoka ($d\phi_\mathrm{plašča}$) skozi trak v cevko, oz. $dA_\mathrm{m} = Id\phi_\mathrm{plašča}$. Celotno delo A_m bomo dobili, ko bomo z integralom zajeli premike vseh konturnih elementov na zanki $\mathcal{L}$; dobili bomo:

$$A_\mathrm{m} = I\phi_\mathrm{plašča}$$

kjer $\phi_\mathrm{plašča}$ pomeni magnetni pretok vektorja $\mathbf{B}$ skozi plašč v notanjost navidezne cevke.

Po Gaussovem stavku vektorja $\mathbf{B}$ (enačba 43.1) je $\phi_\mathrm{plašča}$ enak razliki med magnetnim pretokom ϕ_2 skozi opno $\mathcal{A}_2$ in magnetnim pretokom ϕ_1 skozi opno $\mathcal{A}_1$ v označenih referenčnih smereh; na sliki 45.5 sta smeri ploskvic $d\mathbf{a}_1$ in $d\mathbf{a}_2$ že vrisani v dogovorjenem pozitivnem smislu glede na obhod po konturi $\mathcal{L}$ (v smeri toka I). Končno je

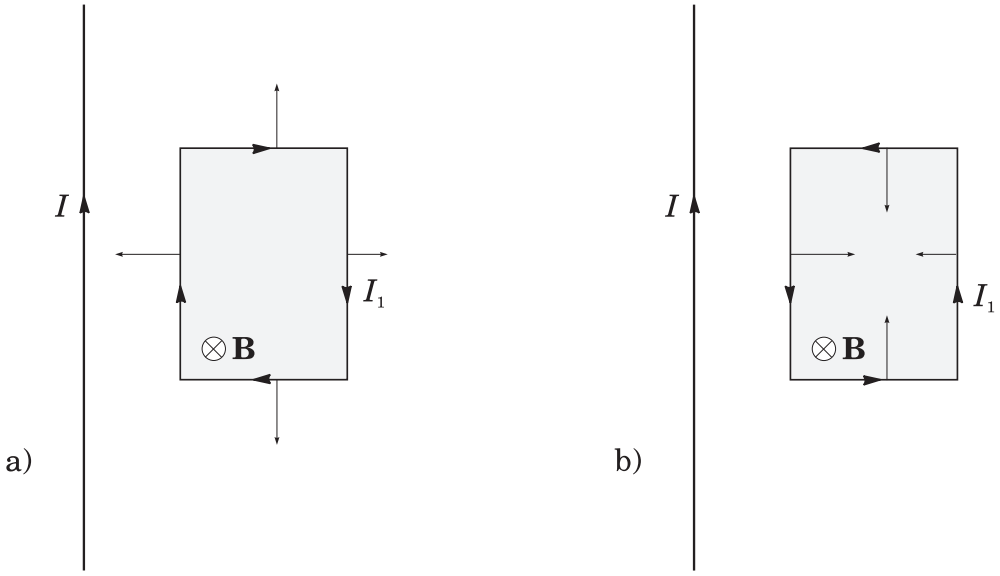
$$\boxed{A_\mathrm{m} = I(\phi_2 - \phi_1)} \tag{45.1}$$

Ker pa se je zanka gibala od lege (1) k legi (2) pod vplivom polja magnetni sil, je A_m očitno pozitiven ($\phi_2 > \phi_1$), kar pomeni, da se je zanka gibala tako, da se je pretok (v referenčni smeri) skozi zanko povečal. Dobljena ugotovitev je povsem splošna: če se tokovni zanki dopusti možnost premikanja, potem se bo ta postavila (premaknila) vedno tako, da se bo pretok v referenčni smeri skozi njo povečal.

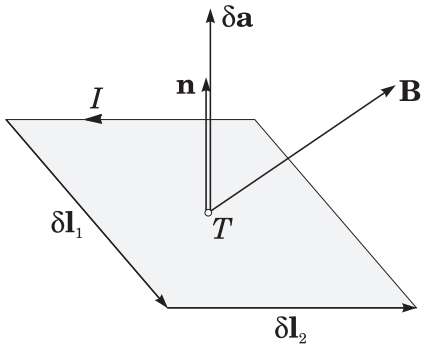
Zgled 45.1

Primer pravokotne tokovne zanke v bližini ravnega tokovodnika bomo analizirali kar opisno; slika 45.6. Magnetno polje ($\mathbf{B}$) ravnega tokovodnika s tokom I kaže v področju zanke v obeh primerih (po desnem pravilu) v list papirja. Glede na vektorski produkt ($I_1 d\mathbf{l}_1\times\mathbf{B}$) so vrisane smeri sil na vse stranice tokovne zanke. Vertikalni sili se v obeh primerih kompenzirata, horizontalni sili pa rezultirata v razliko, ki v primeru a) vleče zanko k vodniku, v primeru b) pa stran od vodnika. Referenčna smer pretoka v levi zanki je (glede na I_1) "v list"; ob približevanju se pretok od tokovodnika v zanki (v referenčni smeri) krepi. Referenčna smer pretoka v desni zanki je "iz lista"; ob oddaljevanju je pretok od tokovodnika (v referenčni smeri) vse manj negativen – torej se spet krepi. V obeh primerih smo dobili kvalitativno potrditev enačbe 45.1.

Navor na tokovno zanko v magnetnem polju. Zanimal nas bo navor magnetne sile na majhno tokovno zankico, ki naj je tako majhna, da smemo privzeti, da se celoten tokokrog zankice nahaja v lokalno homogenem polju gostote $\mathbf{B}$. Zaradi preprostosti naj



Slika 45.6: Tokovna zanka v polju ravnega tokovodnika.



Slika 45.7: Pravokotna tokovna zankica v magnetnem polju.

je zankica pravokotna[1], s stranicama δl_1 in δl_2; slika 45.7. V točki T bomo navor $\delta\mathbf{M}_\mathrm{m}$ zapisali kot vsoto navorov magnetnih sil na vse štiri odseke tokovne zanke:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{M}_\mathrm{m} &= \left(-\frac{\delta\mathbf{l}_2}{2}\right)\times(I\delta\mathbf{l}_1\times\mathbf{B})+\left(\frac{\delta\mathbf{l}_2}{2}\right)\times(-I\delta\mathbf{l}_1\times\mathbf{B})\\ &\quad+\left(\frac{\delta\mathbf{l}_1}{2}\right)\times(I\delta\mathbf{l}_2\times\mathbf{B})+\left(-\frac{\delta\mathbf{l}_1}{2}\right)\times(-I\delta\mathbf{l}_2\times\mathbf{B})\end{aligned}$$

Po združitvi dveh in dveh sumandov dobimo:

$$\delta\mathbf{M}_\mathrm{m} = I\left(\delta\mathbf{l}_1\times(\delta\mathbf{l}_2\times\mathbf{B})-\delta\mathbf{l}_2\times(\delta\mathbf{l}_1\times\mathbf{B})\right)$$

Glede na identiteto $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ razširimo $\delta\mathbf{M}_\mathrm{m}$ v štiri sumande; dva se okrajšata, preostala dva pa z isto identiteto spet združimo in dobimo:

$$\delta\mathbf{M}_\mathrm{m} = I(\delta\mathbf{l}_1\times\delta\mathbf{l}_2)\times\mathbf{B}$$

[1]♣ Podobno izvajanje bo bralec lahko sam napravil tudi za kako drugače oblikovano planarno zankico in bo prišel do enakih zaključkov. ♣

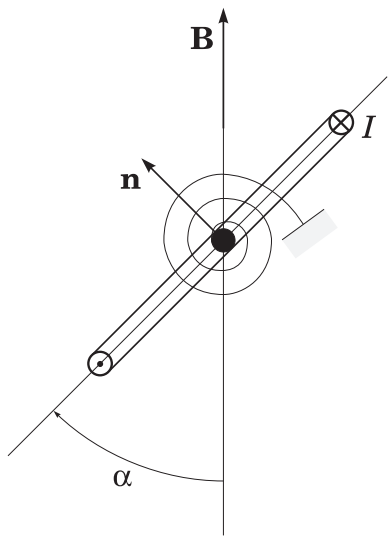
Produkt $\delta\mathbf{l}_1 \times \delta\mathbf{l}_2$ vsebinsko ustreza vektorju ploskvice $\delta\mathbf{a}$ v pozitivnem smislu glede na smer konturnega toka; navor $\delta\mathbf{M}_\mathrm{m}$ je tako:

$$\boxed{\delta\mathbf{M}_\mathrm{m} = I\delta\mathbf{a} \times \mathbf{B}} \tag{45.2}$$

Če bi bila tokovna zankica prosto vrtljiva okrog vrtišča T, potem bi navor $\delta\mathbf{M}_\mathrm{m}$ zavrtel zankico tako, da bi se njena normala postavila v smer polja $\mathbf{B}$. Takrat bi zankica "ujela" največji možen magnetni pretok ($\mathbf{n} \parallel \mathbf{B}$), kar je spet v skladu z enačbo 45.1. Še več: v magnetnem polju se tokovna zankica obrne vedno tako, da se njeno lastno magnetno polje "podpre" z zunanjim poljem.

Zgled 45.2

Navor na pravokotno tokovno zanko s stranicama l_1 in l_2 v homogenem magnetnem polju $\mathbf{B}$. Os vrtenja zanke naj bo pravokotna na smer polja, sama os z zanko pa bodi pripeta na spiralno vzmet z direkcijsko konstanto D, ki ima zavorni moment $M_\mathrm{z} = -D\alpha$; slika 45.8.



Slika 45.8: Tokovna zanka z zavorno vzmetjo v magnetnem polju.

Ravnotežno enačbo momentov bi zapisali:

$$-D\alpha + Il_1l_2B\cos\alpha = 0$$

Rešitev transcendentne enačbe po α dobimo preprosto kar grafično – kot presečišče funkcije $\cos\alpha$ s premico $D\alpha/Il_1l_2B$. ♣ Ustrezno sliko naj si bralec izriše sam. ♣

Magnetni dipol in magnetni dipolski moment. Za magnetno polje smo ugotovili, da ni izvorno, da magnetin ni (razdelek 43), zato zveni naslov ta hip še "nekam čudno". Hkrati pa dejstvo, da magnetin ni, pomeni le to, da ni možen magnetni dipol v smislu električnega – kot par magnetin –, ostaja pa odprto vprašanje, če je ta (v magnetiki) možen na kak drug način – morda s tokom? Resnično, videli bomo, da se da z določeno

redefinicijo tudi v magnetiki uvesti dipol in dipolski moment; pri tem se bomo opirali na nekatere formalno-matematične podobnosti, ki drugačen model dipola narekujejo in opravičujejo.

Začnimo pri električnem dipolu. V elektrostatiki, v razdelku 17, smo spoznali točkasti dipol in ugotovili, da v električnem polju deluje nanj navor (enačba 17.4). Navor $\delta\mathbf{M}_\mathrm{e}$ na dipol z momentom $\delta\mathbf{p}$ v polju $\mathbf{E}$ zapišimo še enkrat in mu "ob bok" postavimo navor $\delta\mathbf{M}_\mathrm{m}$, ki deluje na majhno tokovno zankico v magnetnem polju gostote $\mathbf{B}$ (enačba 45.2):

$$\delta\mathbf{M}_\mathrm{e} = \delta\mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad\qquad \delta\mathbf{M}_\mathrm{m} = I\,\delta\mathbf{a} \times \mathbf{B}$$

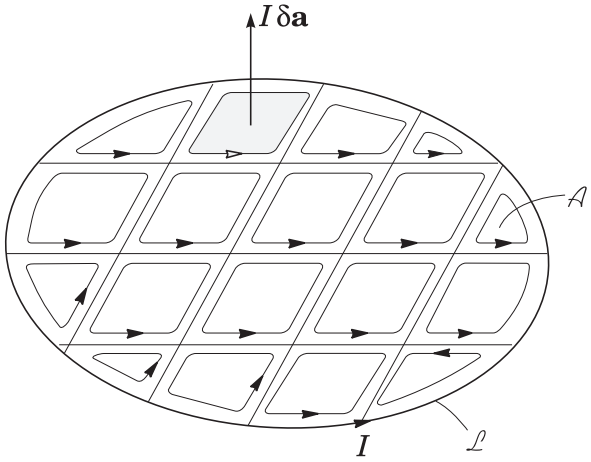
Enačbi sta si očitno matematično podobni (dualni). V prvi se polje $\mathbf{E}$ navezuje na električni sili, ki delujeta na elektrinici dipola, in v drugi se polje $\mathbf{B}$ navezuje na magnetne sile, ki delujejo na tokovne elemente po obodu majhne tokovne zankice. V smislu dualnih enačb moremo "majhno" tokovno zankico "krstiti" za *točkasti magnetni dipol* – točkasti pač zato, ker je zankica majhna in more biti stisnjena v točko – in ji prirediti t.i. *magnetni dipolski moment* s produktom $I\,\delta\mathbf{a}$. Ta moment označimo z $\delta\mathbf{m}$ in zanj pišemo:

$$\boxed{\delta\mathbf{m} = I\,\delta\mathbf{a}} \tag{45.3}$$

Enota momenta bo Am^2. Limitno moremo uvesti tudi pojem diferencialnega momenta ($d\mathbf{m}$) magnetnega točkastega dipola; pri tem moreta biti kot diferencialna razumljena ali tok (dI) ali ploskvica ($d\mathbf{a}$) ali pa oba. Navor na tokovno zankico z momentom $\delta\mathbf{m}$ bi pisali takole:

$$\boxed{\delta\mathbf{M}_\mathrm{m} = \delta\mathbf{m} \times \mathbf{B}} \tag{45.4}$$

Nadalje moremo – le formalno – tudi vsako tokovno zanko $(I, \mathcal{L})$ razumeti kot zloženko majhnih magnetnih dipolov; slika 45.9. Pri tem je ploskev $\mathcal{A}$ poljubno napeta opna na



Slika 45.9: Zloženka majhnih magnetnih dipolov.

konturi $\mathcal{L}$; pozitivno smer normale ploskve določa (spet) desno pravilo. Toki zankic spominjajo na zančne toke v kakem vezju; le s to razliko, da se tu zančni toki zankic na stičiščih ("vejah") kompenzirajo. Magnetno polje takšne tokovne zanke bi – po stavku superpozicije – mogli sestaviti kot vsoto prispevkov teh majhnih zankic, ki spominjajo na pravokotne ovoje iz zgleda 41.5 – vendar o tem še kasneje (razdelek 50).

Magnetni dipolski moment moremo torej prirediti vsaki "majhni" tokovni zanki. V zgledu 41.6 smo se spoznali s poljem krožnega toka. Za tamkajšnjo zanko bi bil magnetni dipolski moment $\mathbf{m}$ enak $\mathbf{e}_z \pi \rho_0^2 I$. Tudi elektrini δQ z maso $\delta m'$, ki kroži na radiju ρ_0, pripada moment v smeri kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$; $\delta\mathbf{m} = \delta Q \rho_0^2 \boldsymbol{\omega}/2$ (iz istega zgleda). Mogli bi jo izraziti tudi z vrtilno količino $\boldsymbol{\Gamma}$ ali vrtilnim vztrajnostnim momentom J,

$$\delta\mathbf{m} = \frac{\delta Q}{2\,\delta m'}\boldsymbol{\Gamma} = \frac{\delta Q}{2\,\delta m'} J\boldsymbol{\omega}$$

Tudi vsak "krožeč" elektron v atomski strukturi "tvori tokovno zanko". Po Bohrovem modelu atoma bi za krožeč elektron vodikovega atoma dobili naslednje: pri frekvenci kroženja $6.58 \cdot 10^{15}$ Hz bi za ekvivalenten tok dobili 1.06 mA, za pripadajoč dipolski moment pa vrednost $9.27 \cdot 10^{-24}$ Am^2.

V zgledu 41.6 smo omenili tudi že spin atomarnih delcev. Tako kot jim pripada spinska vrtilna količina, jim pripada tudi ustrezen dipolski moment, le s to razliko, da se v kvantni teoriji piše prejšnja zveza brez polovičke.

Pri analizi gibanja naelektrenega delca v magnetnem polju (v tem razdelku) smo ugotovili, da delec zakroži okrog magnetnega polja. Iz slike 45.2 moremo videti, da se pripadajoč magnetni dipolski moment inducira vedno obratno polju $\mathbf{B}$, ki to cirkulacijo izzove. Vektor kotne hitrosti bi zapisali $\boldsymbol{\omega} = -\delta Q\mathbf{B}/\delta m$.

Še nekoliko bolj se stvari zapletejo, če bi opazovali "krožeč" elektron v atomu, ki se nahaja v zunanjem magnetnem polju. Osnovnemu gibanju bi se superponiralo še kroženje – prečno na polje –, kar bi rezultiralo v precesijo. V poenostavljenem Bohrovem modelu se za kotno hitrost precesije dobi: $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{p} = e\mathbf{B}/2\,m_e$, kjer je e osnovni naboj, m_e pa njegova masa. To dodatno kroženje ustvarja dodaten magnetni moment z magnetnim poljem, ki je nasprotno zunanjemu polju $\mathbf{B}$; na ta fenomen se bomo sklicevali pri opisu diamagnetnih lastnosti določenih snovi (razdelek 48).

46. Snov v magnetnem polju

Do tu smo magnetno polje obravnavali v praznem prostoru (vakuumu – μ_0); pogojno smo dopuščali le prevodnike, ki vodijo konduktivne toke in nimajo – omembe vredno – izraženih magnetnih ali celo feromagnetnih lastnosti.

Predno se lotimo osrednje vsebine tega razdelka, moramo neizbežno poseči v zgodovino – do Ampèra. On je namreč že takrat postavil hipotezo, da je svojevrstno obnašanje določenih snovi (Fe,Ni,Co), oz. trajnih magnetov (tu je mišljena predvsem sila, ki deluje nanje v magnetnem polju), možno pojasniti in razlagati z majhnimi, internimi, mikroskopskimi toki, ki so v snovi že permanentno ali pa se pod vplivom polja v njej šele formirajo ali inducirajo. Danes vemo, da so ti notranji toki – rečemo jim tudi *Ampérovi* ali *toki megnetizacije* – v bistvu gibajoči elementarni delci atoma, ki jim pripadajo ustrezni dipolski momenti. Ampèrova hipoteza je bila gotovo izjemno daljnovidna, še posebno, če upoštevamo, da je začela kvantna fizika razkrivati neznanke v atomarnem svetu šele okroglih sto let kasneje.

Opis magnetnih lastnosti snovi bo v določenem smislu soroden opisu električnih lastnosti izolacijskih snovi v električnem polju; tam je slonel model na gostoti dipolskih momentov elementarnih (permanentnih ali induciranih) točkastih dipolov, tu pa se bomo

oprli na dipolske magnetne momente elementarnih Ampèrovih tokov. Določeno analogijo podpira končno tudi dualen zapis navora na en oz. drug dipol v ustreznem polju.

Gostota magnetnih dipolskih momentov. Vzemimo, da kos poljubnega materiala postavimo v magnetno polje. Notranji, Ampèrovi toki so permanentno prisotni ali pa se pod vplivom polja šele inducirajo. Po enačbi 45.2 se težijo permanentni dipoli postaviti v smer polja $\mathbf{B}$, medtem ko se inducirani dipoli formirajo v obratni smeri. Kljub vsemu: smer polja $\mathbf{B}$ pogojuje orientacijo dipolov. V majhnem volumnu (δv) snovi bi bilo smiselno govoriti: i) o vektorski vsoti teh dipolskih momentov, označimo to vsoto z $\delta\mathbf{m}$, in ii) o pripadajoči volumski gostoti momentov, označimo jo z $\mathbf{M}$. Gostota $\mathbf{M}$ bi formalno ustrezala limiti kvocienta:

$$\boxed{\mathbf{M} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{\delta \mathbf{m}}{\delta v}} \tag{46.1}$$

V nadaljevanju bomo za to gostoto uporabljali nov termin: govorili bomo o t.i. *vektorju magnetizacije*; enote zanj so A/m.

Za dielektrik v električnem polju smo rekli, da se polarizira (vektor $\mathbf{P}$), tu bomo rekli, da se magnetna snov magnetizira (vektor $\mathbf{M}$). Kasneje bomo sicer uvedli tudi vektor magnetne polarizacije ($\mathbf{I}$), vendar bo ta pogojno vezan na vpeljavo "magnetin".

Tu se trenutno tudi še ne moremo pogovoriti o korelaciji med vektorjema $\mathbf{M}$ in $\mathbf{B}$ – čeravno sta izrazito povezana –, saj se ne moremo fizično "vriniti" v snov in dipole kakorkoli "preštevati", bomo pa to opravili kasneje, po vpeljavi novega vektorja – vektorja magnetne poljske jakosti –, ki je direktneje merljiv; takrat bo tudi zveza med $\mathbf{M}$ in $\mathbf{B}$ jasnejša. V zvezi s tem bomo spoznali tri osnovne načine odzivanja snovi na magnetno polje; omenjali bomo diamagnetizem, paramagnetizem ter feromagnetizem – kot tehnično najzanimivejši pojav.

47. Vektor magnetne poljske jakosti

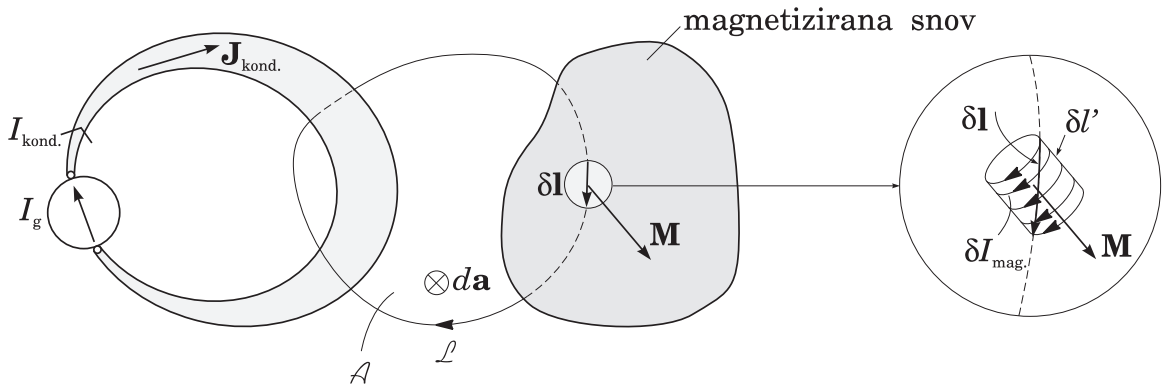
Vzemimo prazen prostor (μ_0), v njem pa kako tokovno strukturo (galvanski krogotok konduktivnega toka, $I_{\text{kond.}}$); magnetno polje tega toka označimo z $\mathbf{B}_0$. V to polje (v bližino tokokroga) "vnesimo" nato magnetizabilno snov (telo); slika 47.1. Zaradi učinka magnetne sile se bo snov (delno) magnetizirala. Pri tem trenutno ni važno, ali je bila snov že predhodno magnetizirana ali pa se je to zgodilo šele ob vnosu, pomembno je le to, da tudi orientirani (ali inducirani) dipoli (z volumsko gostoto momentov $\mathbf{M}$) ustvarjajo svoja magnetna polja in da ta rezultirajo v njihovo skupno polje $\mathbf{B}_{\text{m}}$, ki se vektorsko superponira k vzročnemu (primarnemu) polju $\mathbf{B}_0$. Ob tem pa velja izpostaviti, da posamezni dipol "ne loči" med poljema $\mathbf{B}_0$ in $\mathbf{B}_{\text{m}}$, ali drugače: končno stanje $(\mathbf{B}, \mathbf{M})$ v magnetizirani snovi je razultat medsebojno pogojene interakcije med rezultančnim poljem $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{m}}$ na eni in magnetizacijo $\mathbf{M}$ na drugi strani.

Magnetno polje $\mathbf{B}$ ima – ne glede na to, da ga povzročajo makro- in mikroskopski toki – povsem enake lastnosti, kot smo jih spoznali do sedaj; eni in drugi toki so namreč sklenjeni. To polje bo še vedno neizvorno ($\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$), njegova vrtinčnost ($\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$) pa bo (do μ_0) ustrezala vsoti vseh objetih makro- in mikroskopskih (lokalnih) tokov v

opredeljenem pozitivnem smislu; torej

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \;=\; \mu_0 \Big(\sum \text{ makroskopskih tokov} + \sum \text{ mikroskopskih tokov} \Big)_{\text{skozi opno na konturi } \mathcal{L} \text{ v pozitivnem smislu}}$$

Prvo sumacijo bomo izrazili s ploskovnim integralom tokovne gostote v galvanskem tokokrogu, zanjo bomo pisali $\mathbf{J}_{\text{kond.}}$, drugo sumacijo pa bomo poskušali navezati na vektor magnetizacije ($\mathbf{M}$), ki nosi informacijo o mikroskopskih (Ampèrovih) tokih. Splošno sklen-



Slika 47.1: Interpretacija krivuljnega integrala $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$.

jeno konturo $\mathcal{L}$ si izberimo tako, da delno poseže tudi v Ampèrove toke. V krogcu na sliki so mikroskopski Ampèrovi toki $\delta I_{\text{mag.}}$ modelno prikazani na valjčku, ki jih krivulja $\mathcal{L}$ na dolžini $\delta\mathbf{l}$ objame; tokovne zankice, ki leže levo in desno od $\mathcal{L}$, pa jih ta ne objame – ti toki zato ne "vstopajo" v opazovani integral.

Oglejmo si produkt $\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{l} = M\delta l'$. Absolutno magnetizacijo M moremo po definiciji izraziti s kvocientom seštevka dipolskih momentov tokov na valjčku in volumna valjčka. Osnovnica valjčka bodi δa: $M = \delta I_{\text{mag.}} \delta a / \delta a \delta l'$; s tem je $\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{l} = \delta I_{\text{mag.}}$. Če sedaj $\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{l}$ krčimo v diferencial $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$ in ga integriramo po sklenjeni konturi $\mathcal{L}$, dobimo številsko ravno vsoto vseh – v pozitivnem smislu – objetih Ampèrovih tokov,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{mag. v pozitivnem smislu}}$$

Tako kot je narisano, prestopa tudi makroskopski (konduktivni) tok $I_{\text{kond.}}$ ($\mathbf{J}_{\text{kond.}}$) opno na konturi $\mathcal{L}$ v pozitivnem smislu. Vrtinčnost vektorja $\mathbf{B}$ bo dalje:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{kond.}} \cdot d\mathbf{a} + \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

Kontura $\mathcal{L}$ je skupna integraciji $\mathbf{B}$-ja in $\mathbf{M}$-ja, zato ju združimo:

$$\oint_{\mathcal{L}} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{kond.}} \cdot d\mathbf{a}$$

Tu se nam očitno ponuja prilika, da se vektorja $\mathbf{M}$ (ki je vezan na nepoznano porazdelitev internih Ampèrovih tokov) "znebimo" in vpeljemo nov vektor, ki bo izključno

vezan na makroskopske – merljive toke. Nov vektor bomo imenovali *vektor magnetne poljske jakosti*; označili ga bomo s **H** in zanj pisali:

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}} \tag{47.1}$$

in še dalje:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{kond.}} \cdot d\mathbf{a}} \tag{47.2}$$

Enota za vektor **H** je enaka enoti za vektor magnetizacije – torej A/m.

Ime "poljska jakost" smo srečali v elektrostatiki pri vektorju **E**. Tam je bila beseda "jakost" v zvezi s silami v polju, tu pa vektor **H** nima tega pomena, saj so magnetne sile navezane na vektor **B**. Ime magnetna poljska jakost izhaja zato predvsem iz matematično podobnih zapisov lastnosti vektorskih polj **E** in **H** s sklenjenim krivuljnim integralom (enačbi 13.3 in 47.2) – teža je tu na tipu integrala in ne na njegovem iznosu.

Enačbo (47.2) imenujemo *Ampèrov*[1] *zakon toka*. Prebrali bi ga takole: sklenjen krivuljni integral vektorja magnetne poljske jakosti je enak pretoku konduktivnega toka skozi opno na konturi v pozitivnem smislu. Ta zakon bo ena ključnih relacij tako v magnetostatiki kot še tudi kasneje, pri kvazistatičnem (časovno "počasi" spremenljivem) polju, vendar bo takrat potrebno spregovoriti še o polarizacijskem toku (razdelek 52). V nadaljevanju bomo pripis "kond." (konduktivni) sicer opuščali, vendar bomo ob tem zakonu imeli "v mislih" natančno in samo ta tok. Podoben dogovor smo "sklenili" tudi v elektrostatiki ob enačbi 20.3a.

V vektorjih **B** in **H** imamo sedaj – nekako bi rekli – trdnejšo oporo. Vektor **B** je merljiv preko sile ali Hallove napetosti (kasneje bo merljiv tudi preko inducirane napetosti), vektor **H** pa je posredno "pripet" na makroskopske (konduktivne) toke, ki so – preko sile – spet merljivi. Na ta način se bo (preko enačbe 47.1) dalo kaj določnejšega reči tudi o magnetizaciji in dogajanjih v magnetizabilni snovi.

Vrtinčnost vektorjev H in M in tokovna gostota Ampèrovih tokov. O vrtinčnosti vektorja **B** smo na koncu 44. razdelka že govorili; dobili smo:

$$\lim_{\delta a \to 0} \frac{\oint_{\delta\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\delta a} = \mu_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(T) = \mu_0 J_n(T)$$

kjer je $J_n(T)$ pomenil normalno komponento gostote toka na ploskvici δa; pri tem je tokova gostota pripadala toku, ki je sklenjen ($\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$).

V tem razdelku smo tok ali gostoto toka formalno ločili v dva dela: i) v gostoto konduktivnega (makroskopskega) toka v naših tokovnih strukturah (tokokrogih), pisali smo jo kot $\mathbf{J}_{\text{kond.}}$, in ii) v gostoto Ampèrovih mikroskopskih, notranjih tokov, ki so prav tako sklenjeni (lokalne zankice), in bi jo lahko pisali kot $\mathbf{J}_{\text{mag.}}$. Vrtinčnost gostote **B** bi bila dalje

$$\lim_{\delta a \to 0} \frac{\oint_{\delta\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\delta a} = \mu_0 \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_{\text{kond.}}(T) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_{\text{mag.}}(T) \right)$$

Če v to enačbo (v krivuljni integral) vpletemo zvezo 47.1, dobimo še vrtinčnost obeh novih vektorjev (**M** in **H**):

$$\lim_{\delta a \to 0} \frac{\oint_{\delta\mathcal{L}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}}{\delta a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_{\text{mag.}}(T) \qquad \lim_{\delta a \to 0} \frac{\oint_{\delta\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\delta a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_{\text{kond.}}(T)$$

[1] Bralec verjetno opaža, da Ampèrovo ime vseskozi omenjamo; resnično, njegov prispevek k magnetiki je bil izjemen.

Enačbi bi brali: vrtinec vektorja $\mathbf{M}$ (oz. $\mathbf{H}$) v točki ustreza normalni komponenti gostote $\mathbf{J}_{\text{mag.}}$ (oz. $\mathbf{J}_{\text{kond.}}$) na tistem mestu.

Tu moremo napraviti še krajši "skok" v elektrostatiko. Na koncu 12. razdelka smo zapisali enačbo

$$\oint_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J}_{\text{cel.}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} = 0$$

kot nekakšno različico zakona o ohranitvi elektrine. Pribili smo, da velja za gostoto toka vseh – kakorkoli – gibajočih elektrin. Tu moremo ta stavek nekoliko omiliti; v gostoti $\mathbf{J}_{\text{cel.}}$ je $\mathbf{J}_{\text{mag.}}$ lahko vključen, ali pa tudi ne. Toki magnetizacije so sklenjeni in zanje vedno velja: $\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{mag.}} \cdot d\mathbf{a} = 0$; če lokalni Ampèrov tok "prebode" sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$, potem jo prebode vsaj dvakrat – ko "vstopi" in ko "izstopi".

48. Magnetne lastnosti snovi

V tem razdelku bo osrednji poudarek namenjen razjasnitvi korelacij med vektorji $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ in $\mathbf{H}$ za posamezne sklope tipičnih snovi; s tem v zvezi bomo opisali tri osnovne načine odziva (snovi) na magnetno polje, in sicer: diamagnetni, paramagnetni in feromagnetni način – kratkomalo, govorili bomo o dia-, para- in feromagnetizmu oz. o dia-, para- in feromagnetnih snoveh.

Okvirno sorodno temo smo srečali v elektrostatiki – ob korelacijah med vektorji $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$ in $\mathbf{D}$ (razdelek 20). Zveza $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$ se je tam – za večino izolacijskih snovi – preoblikovala v preprosto, linearno enačbo, ki je vektorje povezovala preko relativne dielektričnosti ali električne susceptibilnosti. Takšne snovi smo označili za homogene, linearne in izotropne; v nasprotnem je zveza med $\mathbf{E}$ in $\mathbf{P}$ (oz. $\mathbf{D}$) bolj zapletena in rezultira v nelinearne odnose, kjer sta vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ lahko tudi nevzporedna (anizotropnost).

Tokrat bomo vpeljali t.i *magnetno susceptibilnost*, ki bo opredeljevala zvezo med vektorjema $\mathbf{H}$ in $\mathbf{M}$ na tale način:

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_{\text{m}}\mathbf{H}} \tag{48.1}$$

pri tem pa bomo formalno preprost zapis razumeli v širšem smislu: če bo magnetik linearen, bo χ_{m} le sorazmernostni faktor; če bo snov nelinearna, bo susceptibilnost funkcijsko odvisna od jakosti ($\mathbf{H}$) ali gostote polja ($\mathbf{B}$); če pa bo snov anizotropna (različno sprejemljiva za magnetno polje v posameznih koordinatnih smereh), bo imela susceptibilnost tenzorski značaj.

Vstavimo slednjo enačbo v 47.1; dobimo:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_{\text{m}})\mathbf{H} = \mu_0\mu_{\text{r}}\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}} \tag{48.2}$$

ali tudi

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_{\text{m}}}{\mu_0(1 + \chi_{\text{m}})}\mathbf{B}$$

kjer je μ_{r}-*relativna permeabilnost* ($\mu_{\text{r}} = 1 + \chi_{\text{m}}$), μ pa je *permeabilnost* snovi ($\mu = \mu_0\mu_{\text{r}}$). Vse, kar smo pred tem rekli o χ_{m}, velja v primeru (ne)homogenih, (ne)linearnih in (an)izotropnih snovi tudi za μ oz. za enačbo $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$.

Enačbo 48.2 se včasih zapiše tudi v različici, ki spominja na zvezo med $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$ in $\mathbf{D}$ v električnem polju ($\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$), in sicer:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M} = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{I}} \tag{48.3}$$

kjer je **I** vektor t.i. *magnetne polarizacije* – s teslo (T) kot enoto. V stopnjevanju določene analogije bi vektor **I** ustrezal prostorski gostoti magnetnih dipolskih momentov "polarizabilnih magnetin", v tehnično-praktičnem smislu pa bo vektor polarizacije pomenil pri pogojno enakem **H**-ju prispevek snovi (Ampèrovih tokov) k rezultirajoči gostoti magnetnega polja.

Že tu velja pristaviti opombo – ki smo jo izpostavili tudi ob dielektričnosti (ε) in specifični električni prevodnosti (γ) –, da je tudi permeabilnost (μ) – kot tretja snovna lastnost – večinoma empirični podatek, ki ga pridobimo z meritvijo. Obstajajo seveda teoretične podlage, ki določen fenomen magnetizacije dovolj dobro pojasnijo v kvalitativnem, mnogo manj pa v kvantitativnem smislu.

V okviru magnetnih lastnosti snovi si bomo za začetek ogledali diamagnetizem in paramagnetizem, ki se izkazujeta kot dokaj linearna pojava, večjo pozornost pa bomo v nadaljevanju namenili feromagnetizmu, ki je v splošnem nelinearen, včasih pa tudi anizotropen pojav.

Diamagnetizem. Diamagnetne snovi so tiste, katerih atomi ne izkazujejo rezultančnega magnetnega dipolskega momenta; magnetni momenti, ki so posledica vrtilnih količin elektronov in spinov atomarnih delcev, se v atomu medsebojno kompenzirajo. Če je takšna snov izpostavljena zunanjemu magnetnemu polju, v njej ne more priti do reakcije (navora) v smislu enačbe 45.2. Zgodi pa se nekaj drugega. V razdelku 45 smo spoznali, da v prisotnosti magnetnega polja pridobi "krožeč" elektron v atomu še dodatno precesijsko kotno hitrost $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{p} = -e\mathbf{B}/2\,m_e$, ki rezultira v pripadajoč induciran magnetni dipolski moment $\mathbf{m} = -e^2R^2\mathbf{B}/4\,m_e$, kjer je R "radij" osnovnega "kroženja" okrog jedra. Upoštevajoč gostoto atomov v snovi, in število elektronov v atomu, se za susceptibilnost χ_m dobi okvirno vrednost -10^{-5}. Susceptibilnost je negativna, μ_r je za spoznanje manjši od ena in inducirani dipolski momenti so usmerjeni v obratni smeri polja; $\mathbf{M}\cdot\mathbf{B} < 0$.

Kar nekaj snovi izkazuje diamagnetne lastnosti, kot na primer: Cu, Au, Ag, Hg, H_2O in še nekatere druge. (Če bi kos kratke bakrene žičke postavili v magnetno polje, bi inducirani dipoli tvorili s poljem **B** navor, ki bi žičko postavil prečno na polje; od tu prefiks "dia" (diamagnetizem), ki v grščini pomeni poprek.)

Paramagnetizem. Kot paramagnetne označujemo tiste snovi, katerih atomi, ioni ali molekule že po naravi izkazujejo določeno neuravnoteženost dipolskih momentov elementarnih delcev. V makroskopskem smislu ti elementarni dipoli (v prostorninici δv) nimajo rezultančnega vektorja magnetizacije – med seboj se vektorsko kompenzirajo –, kar pomeni, da so znotraj snovi kaotično orientirani. Ako pa se takšna snov izpostavi zunanjemu magnetnemu polju **B**, potem pride do njihove delne orientacije v smeri polja (enačba 45.2) – do delne pač zato, ker sistematičnemu preusmerjanju nasprotuje termično gibanje atomov (ionov) ali molekul. Stopnja orientacije se z večanjem gostote **B** sicer povečuje, z višanjem temperature (T) pa (iz omenjenega razloga) upada. (K tako opredeljenemu pojavu paramagnetizma bi v električnem polju ustrezal pojav dipolske polarizacije).

Računski model – za oceno magnetne susceptibilnosti paramagnetikov – sloni na predpostavki, da so interakcije med sosednjimi permanentnimi dipoli zanemarljive, in na porazdelitveni funkciji $\exp(-W/kT)$, kjer je k Boltzmannova konstanta, T pa absolutna temperatura. Slednja funkcija ustreza verjetnosti, da ima v termodinamskem ravnotežju

delec potencialno energijo W. Po analogiji iz elektrostatike, kjer smo za električno potencialno energijo dipola dobili $-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$, bi za magnetno potencialno energijo magnetnega dipola pisali $-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}$, kar bi se nato vstavilo v porazdelitveno funkcijo. Daljše izvajanje tega sodi v fiziko; za χ_m se dobi izraz $\mu_0 n m^2/3kT$, kjer je n število dipolov (atomov)/m^3, m pa moment enega dipola. Tudi v tem primeru se za χ_m dobijo zanemarljivo majhne vrednosti; okrog $+10^{-5}$ – torej pozitivne.

Pri paramagnetnem odzivu se permanentni dipoli usmerijo v smeri polja; $\mathbf{M}\cdot\mathbf{B} > 0$. (Od tu je tudi prefiks "para" (paramagnetizem), ki v grščini pomeni vzporedno.) Tudi paramagnetnih snovi je kar nekaj, kot na primer: Al, Mn, Pl, O, zrak in druge. Zanimiva je tudi zakonitost $1/T$ v χ_m – to je P. Curie odkril pred samo teorijo paramagnetnosti. Pri paramagnetizmu je znan tudi pojav nasičenja, ki ustreza stanju, ko se v močnem zunanjem polju preusmerijo vsi dipoli.

Seveda pa se vsaka paramagnetna snov delno odzove tudi kot diamagnetna, tako da izmerjen μ_r $(= 1 + \chi_\mathrm{m})$ zajame oba fenomena. V tabeli 48.1 so podane okvirne vrednosti magnetne susceptibilnosti nekaterih dia- in paramagnetikov. O diamagnetikih in paramagnetikih si bomo v nadaljevanju zapomnili le to, da je njihova susceptibilnost praktično zanemarljiva, zato je zveza med $\mathbf{B}$ in $\mathbf{H}$ enostavno kar $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$.

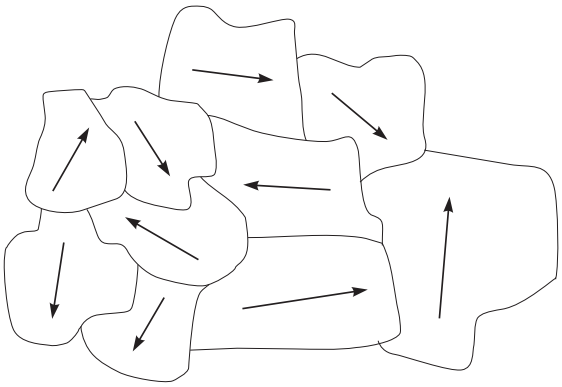
magnetna susceptibilnost $\chi_\mathrm{m} = \mu_\mathrm{r} - 1$			
diamagnetiki		paramagnetiki	
baker	$-9.4\cdot10^{-6}$	aluminij	$+2.2\cdot10^{-5}$
zlato	$-3.6\cdot10^{-5}$	platina	$+27\cdot10^{-5}$
srebro	$-2.5\cdot10^{-5}$	mangan	$+98\cdot10^{-5}$
živo srebro	$-3.2\cdot10^{-5}$	kisik	$+1.8\cdot10^{-6}$
voda	$-8.8\cdot10^{-5}$	zrak	$+3.6\cdot10^{-7}$

Tabela 48.1: Tipične vrednosti magnetne susceptibilnosti nekaterih dia- in paramagnetikov.

Feromagnetizem. Pojav feromagnetizma bi lahko označili (tudi) kot potencirano izražen paramagnetizem. Pri feromagnetnih snoveh kot so Fe (ferrum – od tu prefiks "fer"), Ni, Co (in njihove legure), in pri redkih elementih, kot sta gadolinij (Gd) in disprozij (Dy), je magnetna susceptibilnost izredno visoka – od nekaj sto do nekaj sto tisoč. Rekli bi lahko, da so te snovi ekstremno "dovzetne" za magnetno polje.

Čeravno so teoretične podlage za pojasnitev feromagnetizma zahtevnejše od onih pri paramagnetizmu, pa sta si pojava sorodna v tem, da je moč "krivca" visoke susceptibilnosti feromagnetikov iskati v – to pot – močno izraženih dipolskih momentih atomov. Iz izsledkov kvantne fizike danes vemo, da velikim magnetnim momentom atomov "botrujejo" neuravnoteženi magnetni momenti spinov elektronov na nepopolnjeni predzadnji lupini omenjenih elementov. Železo, nikel in kobalt stojijo v periodičnem sistemu na mestih 26, 27 in 28 in imajo na četrti lupini že po dva elektrona, medtem ko na tretji lupini manjkajo železu še štirje, niklju še trije in kobaltu manjkata še dva elektrona. Še

več; ne le da so rezultančni magnetni dipolski momenti atomov veliki, celo sosednji atomi v kristalni strukturi so grupirani v t.i. *magnetne domene* ali *območja*[1], znotraj katerih so momenti čvrsto istosmerno orientirani; slika 48.1. Velikosti teh magnetnih domen segajo



Slika 48.1: Orientacija magnetnih momentov znotraj domen.

od nekaj deset do nekaj sto mikronov – izjemoma dosegajo tudi centimetrski razred[2].

Resnično: če se površina feromagnetika gladko obrusi in se nanjo potrese finega železovega prahu, potem se pod mikroskopom opazi, da se delci razporedijo po konturah, ki označujejo ograje domen.

Če so magnetne domene v makroskopskem ravnotežju, potem kos feromagnetnega materiala navzven ne izkazuje rezultančnega magnetnega dipolskega momenta in zato tudi nima rezultančnega magnetnega polja. Seveda pa se razmere spremenijo, ko tak kos materiala izpostavimo zunanjemu magnetnemu polju; takrat pride do obračanja domen in trenja med njimi – kar se navzven manifestira v toploti. Vsako takšno magnetenje ali premagnetenje bo zato neizbežno povezano z energijskimi izgubami – vendar o tem kasneje (razdelek 55).

Proces magnetenja bomo opisali v treh značilnih fazah, ki si sledijo, če se gostota zunanjega magnetnega polja postopoma (od nič) povečuje.

1) Pri majhnih gostotah polja pride do premikov mej med domenami, in sicer tako, da se domene, ki s smerjo zunanjega polja oklepajo majhne kote, povečajo na račun sosednjih domen. V tem delu magnetenja je proces reverzibilen. Če zunanje polje tu "popusti", se tudi meje domen vrnejo v prvotno stanje.

2) Pri nadaljnjem povečevanju magnetnega polja prihaja do obračanja celih domen. To usmerjanje pa seveda ni "zvezno", ampak se odvija "sunkoma"; spremlja ga trenje med domenami (energijske izgube); proces je tipično ireverzibilen (neobrnljiv). Če zunanje polje v tej fazi magnetenja "popusti", se feromagnetni kos ne razmagneti, ampak zadrži del magnetizacije. Na koncu te faze so vse domene že več ali manj usmerjene vzdolž polja.

[1]Hipotezo o obstoju takih domen je že leta 1907 postavil P. Weiss in se te po njem imenujejo tudi *Weissove domene* oz. *Weissova območja*.

[2]Vzrok formiranja domen, kot tudi njihova velikost in število, so pogojeni s stanjem minimalne energije, ki ustreza ravnotežju med energijo magnetnega polja zunaj telesa in potrebno energijo, ki vzdržuje stene med domenami.

3) Nadaljnje povečevanje magnetne gostote izzove proces, ki je podoben začetnemu; pride do nekakšnega "stapljanja" (izginevanja) mej med sosednjimi domenami – momenti domen so dokončno usmerjeni. Ko feromagnetik doseže to točko, govorimo o nasičenju ali zasičenju; po domače bi rekli, da je feromagnetik "dal od sebe vse, kar je mogel". Magnetizacija doseže v nasičenju svoj maksimum. Če se zunanje magnetno polje še povečuje, to v ničemer več ne vpliva na stanje domen v feromagnetiku. V tretji fazi magnetenja je proces spet reverzibilen (obrnljiv); če magnetno polje "popusti", se stanje feromagnetika povrne nekako do magnetizacije, ki ustreza prehodu med drugo in tretjo fazo.

Pri feromagnetikih nas bo v nadaljevanju zanimal odnos med vektorji ($\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ in $\mathbf{H}$) magnetnega polja. Ti vektorji bodo razumljeni spet v makroskopskem smislu, le da bo makroskopskost tu mišljena precej bolj "širokogrudno". Če smo do sedaj smatrali naše vektorje polja kot poprečne vektorske količine v "fizično majhnem območju", ki je zajemalo na stotine in tisoče atomov, bomo v primeru feromagnetikov rekli podobno, le da bomo besedo atomi zamenjali z magnetnimi domenami; v poprečni domeni pa je okrog 10^{15} atomov.

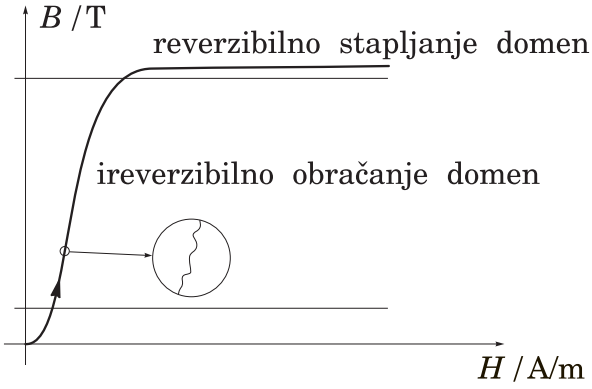
1) Začetna krivulja magnetenja – deviška krivulja. Opis posameznih faz magnetenja povsem očitno kaže na nelinearen odnos med magnetizacijo in magnetno gostoto; formalno bi ta odnos pisali kot $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$. V nadaljevanju nas bo predvsem zanimal feromagnetik, ki je – v širšem makroskopskem smislu – izotropen; torej takšen, ki nima makroskopsko izraženih prednostnih smeri. Vektorja $\mathbf{M}$ in $\mathbf{B}$ sta takrat vzporedna, med njima pa še vedno ostaja nelinearna povezava; $M = M(B)$. Ker pa direktno merjenje magnetizacije ni možno, bo slednjo soodvisnost (preko enačbe 47.1) primerneje prenesti na magnetno poljsko jakost; pisali bomo:

$$\boxed{H = \frac{B}{\mu_0} - M(B)} \tag{F1}$$

ali tudi: $H = H(B)$ ali $B = B(H)$. Izmerjena soodvisnost med B in H se (za magnetike nasploh) podaja v (H, B) diagramu; včasih pa tudi tabelarično, če to terja kak numeričen postopek.

Tu se ne bomo spuščali v merilne metode določanja (H, B) odvisnosti, ker to ni predmet osnov elektromagnetike, in tudi samo opravilo ni ravno trivialno. Pa vendar: zamislimo si navitje iz slike 44.5, ki je enakomerno gosto navito na feromagnetno toroidno jedro; presek toroida naj je pravokoten – kot na skici a). Zaradi rotacijske simetrije bo magnetno polje v feromagnetiku še vedno v krožni, φ-smeri (kot smo to ugotovili v zgledu 44.4). Če uporabimo Ampèrov zakon (47.2), bo $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ po krožnici znotraj feromagnetika dal ravno objeti tok: $2\pi\rho H_\varphi = NI$. Magnetna jakost ($H_\varphi = NI/2\pi\rho$) bo (do μ_0) podobna gostoti (B_φ) v zračni toroidni tuljavi. Da bi bile razmere v prerezni ravnini kar najbolj homogene, si zamislimo, da je višina prereza pravokotnika tako majhna, da feromagnetno jedro že spominja na tanek prstan s srednjim radijem ρ_0. Jakost H v jedru bo takrat kar $NI/2\pi\rho_0$. Odvisnost $B(H)$ se v nadaljevanju "posnema" tako, da se tok v navitju ali t.i. *magnetilni tok* (tudi tok magnetenja), postopno povečuje (sočasno se povečuje tudi H), obenem s tem pa se meri (n.pr. s Hallovo sondo) magnetna gostota B v jedru.

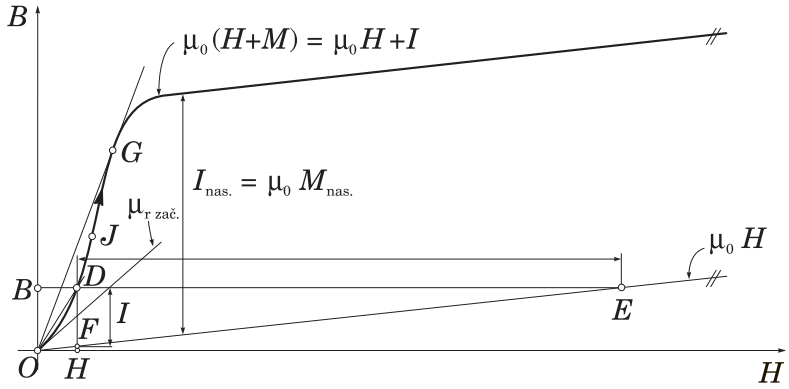
Prvi od diagramov soodvisnosti je t.i. *začetna magnetilna krivulja* (ali "deviška" krivulja); slika 48.2. Kot komentar k tej krivulji kar najbolj ustreza opisano "obnaša-



Slika 48.2: Začetna krivulja magnetenja.

nje" magnetnih domen ob povečevanju magnetne gostote v feromagnetiku. Za začetno fazo magnetenja je karakteristična reverzibilnost. V drugi fazi, v strmem delu, se domene sunkoma obračajo, kar se odraža tudi v nazobčenosti "magnetilke" (v krogcu). V zadnji fazi – fazi zasičenja – so domene v celoti orientirane. Magnetizacija doseže maksimum; po enačbi (F1) je $dB/dH = \mu_0$, kar pomeni, da je naklon magnetilke v zasičenju enak permeabilnosti vakuuma.

2) Gostota (B), jakost (H), magnetizacija (M) in polarizacija (I) v (H, B) diagramu. Za izotropen magnetik so relacije med količinami magnetnega polja sledeče: $B = \mu_0(H + M) = \mu_0 H + I$. Poglejmo, kako bi jih predstavili v (H, B) diagramu deviške krivulje; slika 48.3. Izberimo si točko D na magnetilki. Daljice z označenimi krajišči



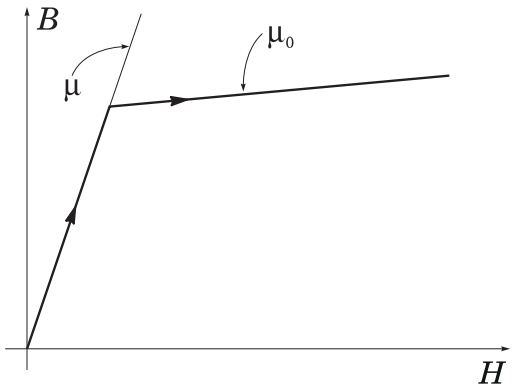
Slika 48.3: Količine B, H, M in I v deviški krivulji.

imajo naslednje pomene: 1) $\overline{OB}$-gostota B, 2) $\overline{OH}$-jakost H, 3) $\overline{DE}$-magnetizacija M in 4) $\overline{FD}$-polarizacija I. Polarizacija nasičenja ($I_{\text{nas.}}$) je za feromagnetike eden značilnih podatkov; pove pač, koliko je določen magnetik sposoben prispevati h končni gostoti. Čisto železo ima polarizacijo nasičenja pri 2.15 T; ostale legure imajo to običajno manjšo.

3) Relativna permeabilnost. Čeravno magnetenje ni linearno, moremo, po enačbi 48.2 vpeljati relativno permeabilnost kot kvocient $B/\mu_0 H$. Imenovali jo bomo statična

relativna permeabilnost (μ_{rs}). Produkt $\mu_0\mu_{\mathrm{rs}}$ ustreza (na sliki) naklonu daljice $\overline{OD}$. Največja statična permeabilnost bo v točki G. Dinamična relativna permeabilnost (μ_{rd}) je določena s strmino prirastka magnetilke, $\mu_{\mathrm{rd}} = dB/dH\mu_0$, in bo največja v prevojni točki (J). V izhodišču, na začetku magnetilke, sta μ_{rd} in μ_{rs} enaki in jo imenujemo začetna relativna permeabilnost ($\mu_{\mathrm{r\ zač.}}$). Ta je običajno okrog 10% največje relativne permeabilnosti.

Začetni del magnetilke (na sliki 48.3) je nekoliko karikirano narisan; spodnje koleno je namreč zelo kratko in hitro preide v najstrmejši del, ki je do zgornjega kolena praktično podoben premici skozi izhodišče. Statična in dinamična permeabilnost sta tam skorajda identični in konstantni. Ta del magnetilke je t.i. linearni del; ustreza mu relativna permeabilnost $\mu_{\mathrm{r}}(\mu_{\mathrm{r}} = \text{konst.})$, ki dosega vrednosti od nekaj tisoč do nekaj sto tisoč; pri transformatorski pločevini je μ_{r} okrog 10 000. Za določene hitre ocene razmer v magnetnih konfiguracijah uporabljamo aproksimativno magnetilko, ki jo tvorita dva linearna odseka; slika 48.4. Prvi, strmejši del je področje linearnega magnetenja, drugi, položni del pa



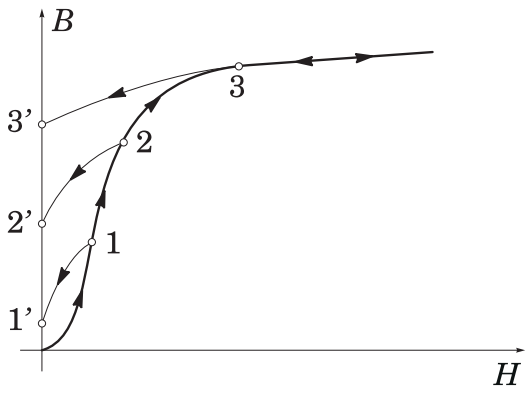
Slika 48.4: Poenostavljena magnetilka.

predstavlja zasičenje.

4) Curiejeva[3] temperatura. Nad t.i. *Couriejevo temperaturo* (T_{C}), ki je vsakemu feromagnetiku svojska, postanejo termične vibracije tako močne, da onemogočajo paralelno orientacijo dipolskih momentov sosednjih atomov; magnetik se nad T_{C} obnaša kot paramagnetna snov. Curiejeva temperatura za železo je 770° C, prehod iz feromagnetnosti v paramagnetnost pa je razmeroma strm (odsekan).

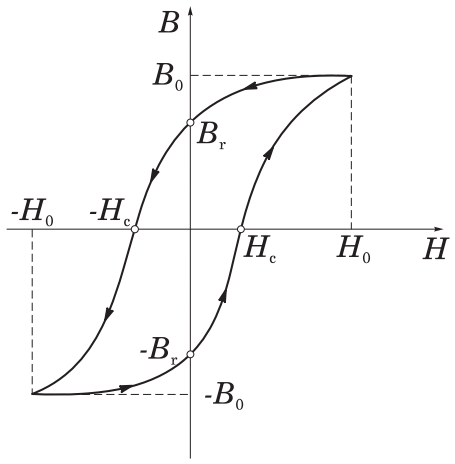
5) Remanentna gostota (B_{r}). To je gostota, ki jo feromagnetik zadrži, ko se magnetilni tok prekine oz., ko magnetna jakost "presahne". Po enačbi (F1) bi B_{r} ustrezala produktu $\mu_0 M_{\mathrm{irev.}}$, kjer je $M_{\mathrm{irev.}}$ tista ireverzibilna magnetizacija, ki se ne more samodejno relaksirati. Povsem razumljivo bo *remanentna gostota* odvisna od točke na magnetilki, kjer je zunanje polje presahnilo; slika 48.5. Najvišja remanentna gostota bo (razvidno) dosežena le takrat, ko bo feromagnetik prehodno "priveden" do področja nasičenja. Remanentne gostote so običajno okrog 50% magnetne polarizacije v nasičenju – lahko pa tudi več.

[3]Francoski fizik in kemik Pierre Curie (1859-1906).



Slika 48.5: Točke povratka so odvisne od mesta, kjer jakost polja presahne.

6) Histerezna zanka. Magnetenje feromagnetika je v splošnem ireverzibilen proces. Zavrtene domene se ob popustitvi magnetne jakosti (H) ne povrnejo v izhodiščno stanje; magnetilnemu toku je potrebo obrniti smer, da bi se domene preusmerile. Če si zamislimo, da se magnetna jakost izmenoma spreminja od H_0 do $-H_0$ ter od $-H_0$ do H_0, potem usmerjenost domen vseskozi fazno zaostaja (kasni). Kasnilna pentlja je v takem primeru simetrična. To fazno zaostajanje podaja v (H, B) diagramu t.i. *histerezna zanka* (ali "kasnilka"); slika 48.6. Označena točka (H_c) na abscisi se imenuje *koercitivna poljska*



Slika 48.6: Simetrična histerezna zanka.

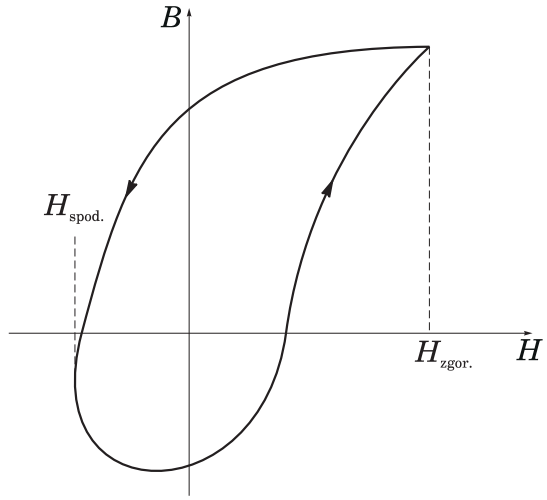
jakost; to je tista potrebna jakost magnetnega polja v nasprotni smeri, ki izniči učinek še preostale magnetizacije, da je rezultančni $B = 0$.

Glede na širino pentlje (po abscisi) ločimo feromagnetne materiale na trdo- in mehkomagnetne; trdomagnetni imajo koercitivne jakosti tudi do nekaj deset tisoč ampèrov/m, mehkomagnetni pa lahko celo manj od nekaj deset A/m. Če bi dve takšni histerezi risali v istem (H, B) diagramu, bi pentlja trdomagnetika spominjala že skoraj na pravokotnik ($2H_c \times 2B_r$), pentlja mehkomagnetika pa bi bila skoraj stisnjena v začetno magnetilko ("brez površine"). Kot bomo videli kasneje, je površina kasnilke v tesni zvezi s t.i. *histereznimi izgubami*. Trdomagnetiki so prikladni za trajne magnete, medtem ko so mehkomagnetiki primerni v izmeničnih tokokrogih; iz naslova histerezne pentlje gotovo ne bodo

energijsko "potratni".

Simetrične histerezne zanke se za nek feromagnetni material rišejo običajno v istem diagramu – le v zgornji polravnini ($B > 0$) ter pri različnih B_0 (npr. pri 1, 1.2, 1.4 T itn.).

Poleg simetričnih pentelj pa imamo možnost opazovati "malo kopico" nesimetričnih kasnilk. Namreč: če se H nesimetrično spreminja med $H_{\text{spod.}}$ in $H_{\text{zgor.}}$ (magnetilni tok ima določeno enosmerno komponento), se pentlja spremeni v asimetrično histerezo; slika 48.7.



Slika 48.7: Nesimetrična kasnilka.

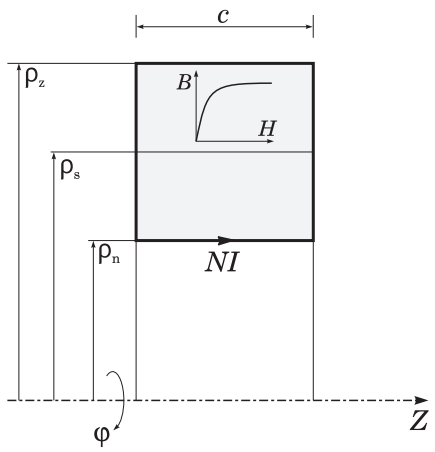
In še dalje: če so spremembe H-ja okrog kake centralne vrednosti majhne ($H_0 \pm \delta H$), potem je takšna tudi gostota ($B_0 \pm \delta B$). Izoblikuje se interna pentljica – skoraj kot elipsa – z nagibom $\delta B/\delta H$. Ta kvocient se imenuje inkrementalna permeabilnost ($\mu_0 \mu_{\text{r ink.}}$). ♣ Takšne razmere naj si bralec skicira sam. ♣

7) O antimagnetikih in ferimagnetikih. Nekateri materiali, kot železov oksid (FeO), imajo dipolske momente atomov sicer "poravnane" vzporedno, vendar z nasprotno usmerjenostjo. V magnetnem polju se obnašajo antimagnetno – tako pač, kot neferomagnetiki. Ferimagnetiki (feriti) imajo prav tako antiparalelno orientirane dipolske momente atomov, vendar – zaradi nesimetrije med posameznimi grupami atomov – še vedno formirajo magnetne domene. Polarizacija zasičenja je nekako petina tiste pri pravih feromagnetikih. Kljub temu so v tehniki visokih frekvenc praktično nepogrešljivi, saj jih odlikuje visoka specifična električna upornost, ki je zaradi vrtinčnih izgub (zadnji razdelek) naravnost dobrodošla; eden takšnih ferimagnetikov je Fe_3O_4.

8) (H, B) diagram in splošna točka v prostoru. Do tu smo opisovali razmere v "širokogrudni" makroskopski okolici - recimo vseeno kar v "točki". Ker pa je magnetno polje znotraj feromagnetika v splošnem nehomogeno, je potem povsem jasno, da "živi" vsaka točka svojo magnetiko in svojo kasnilko. Pri določenih kompleksnih magnetnih konfiguracijah je to dejstvo treba upoštevati; reševanje takšnega problema postane kaj hitro komplicirano, če ne že kar težko.

Zgled 48.1

Vzemimo toroidno navitje, ki je enakomerno gosto navito okrog feromagnetnega jedra iz transformatorske pločevine in ima pravokoten prerez; slika 44.5, skica a). Notranji radij (ρ_n) bodi 10 cm, zunanji (ρ_z) bodi 20 cm in širina toroida (c) bodi 10 cm; slika 48.8. Magnetilka pločevine je podana tabelarično. Začetni nagib mag-



Slika 48.8: Feromagnetno toroidno jedro z navitjem (v prerezu).

H(A/m)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
B(T)	0	0.5	0.77	0.93	1.01	1.06	1.12	1.15	1.17	1.19

Tabela 48.2: Magnetilka pločevine; tabelirane vrednosti magnetne jakosti in gostote.

netilke ustreza približno kvocientu $0.5/50 = 10^{-2}$, kar pomeni, da je relativna permeabilnost v spodnjem linearnejšem delu približno 8000 ($= 10^{-2}/\mu_0$). Vzemimo nadalje, da je magnetilni tok $I = 1.2$ A in da je število ovojev $N = 230$, izračunati pa želimo celoten magnetni pretok ϕ v feromagnetnem jedru.

V toroidnem jedru bo magnetni pretok določen z integralom

$$\phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

kjer bomo za ploskev $\mathcal{A}$ vzeli šrafirano kvadratno površino. Polje $\mathbf{B}$ in ploskvica $d\mathbf{a}$ sta takrat vzporedna, zato pišemo dalje:

$$\phi = \int_{\rho_\mathrm{n}}^{\rho_\mathrm{z}} Bc\, d\rho = c \int_{\rho_\mathrm{n}}^{\rho_\mathrm{z}} B(H)\, d\rho$$

Funkcijska odvisnost $B(H)$ je v našem primeru tabelarično podana, zato bomo tudi nakazano integracijo izvedli numerično – s približkom. Kot kvadraturno formulo si bomo izbrali razmeroma preprosto trapezno formulo, ki izgleda takole. Če je funkcija $f(x)$ poznana v ekvidistantnih točkah $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ in ima tam

vrednosti $y_0, y_1, .., y_n$, potem je približek (integrala) $\int_a^b f(x)\,dx$ po trapezni formuli naslednji:

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Vsebina trapezne formule je v tem, da se fukcijo $f(x)$ med vozelnimi točkami aproksimira z "zlepkom" odsekoma linearnih funkcij. Integracijo takšne funkcije predstavlja v nadaljevanju seštevanje ploščin ozkih trapezov (od tu ime trapezna formula).

Iskan približek pretoka bomo zato dalje pisali takole:

$$\phi^{(n)} \doteq c\frac{\rho_\mathrm{z} - \rho_\mathrm{n}}{2n}(B_0 + 2B_1 + \cdots + 2B_{n-1} + B_n)$$

kjer $B_0, B_1, ..., B_n$ pomenijo vrednosti gostote B v izbranih ekvidistantnih točkah. Za n si izberimo število 4; od tu dobimo ekvidistantne radije $\rho_0 = \rho_\mathrm{n} = 10$ cm, $\rho_1 = 12.5$ cm, $\rho_2 = 15$ cm, $\rho_3 = 17.5$ cm in $\rho_4 = \rho_\mathrm{z} = 20$ cm. V teh točkah izračunamo H po formuli $NI/2\pi\rho_i$, nato pa iz tabele z linearno interpolacijo določimo vrednosti B_i. Po zgornji formuli bi za $\phi^{(4)}$ dobili 11.08 mVs. Če pa bi v trapezno formulo

ρ_i(cm)	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0
H_i(A/m)	439	351	293	251	220
B_i(T)	1.186	1.150	1.112	1.061	1.030

Tabela 48.3: Vrednosti H_i in B_i.

vključili le tri točke, $\rho_\mathrm{n} = 10$ cm, $\rho_\mathrm{s} = 15$ cm, $\rho_\mathrm{z} = 20$ cm, bi (pri $n = 2$) za $\phi^{(2)}$ dobili 11.10 mVs. Še najhitreje pridemo do ocene za pretok, če vzamemo kar gostoto na srednjem radiju ($\rho_\mathrm{s} = 15$ cm) in to množimo s prerezom: $\phi_\mathrm{s} = B_\mathrm{s}(\rho_\mathrm{z} - \rho_\mathrm{n})c = 11.12$ mVs.

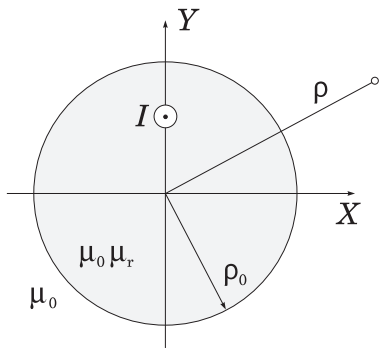
Iz številskega zgleda je razvidno, da bo tudi zadnja aproksimacija povsem zadostovala, če le B ne bo preveč asimetrično odstopal od B_s (v sredini toroida). Resnično: v nadaljevanju se bomo s to slednjo aproksimacijo nekako zadovoljili in bomo s tem v zvezi govorili o t.i. *srednji dolžini "magnetne poti"* (l_s). V našem primeru bi bila srednja dolžina magnetne poti enaka $2\pi\rho_\mathrm{s}$ (= 94.2 cm). Magnetno poljsko jakost bomo opredelili z jakostjo H_s na sredini toroida ($H_\mathrm{s} = NI/l_\mathrm{s}$), pripadajočo gostoto B_s pa bomo odčitali iz magnetilne krivulje ali pa določili iz podane tabele. Magnetni pretok bo s tem preprosto enak produktu gostote (B_s) in prereza toroida.

Drugače pa bomo postopali v primeru, ko bodo poljske jakosti toliko majhne, da bodo vse delovne točke ležale v začetnem, linearnem delu magnetilne krivulje. Takrat bomo odnos med H in B pisali kot $B = \mu_0\mu_\mathrm{r}H$, in pretok bo izrazljiv analitično:

$$\phi = c\int_{\rho_\mathrm{n}}^{\rho_\mathrm{z}} \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}NI}{2\pi\rho}\,d\rho = \frac{\mu_0\mu_\mathrm{r}NIc}{2\pi}\ln\frac{\rho_\mathrm{z}}{\rho_\mathrm{n}}$$

Zgled 48.2

Izračunajmo magnetno polje v in ob ravnem Fe vodniku, ki vodi tok I, ko privzamemo relativno permeabilnost železa kot konstantno; slika 48.9. Zaradi rotacijske



Slika 48.9: K polju toka v feromagnetiku.

simetrije bo magnetno polje še vedno v krožni smeri; $\mathbf{B} = (0, B_\varphi, 0)$, $\mathbf{H} = (0, H_\varphi, 0)$. Po enačbi 47.2 bomo za krožno zanko polmera ρ dobili:

$$\oint_{(2\pi\rho)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H_\varphi = \begin{cases} I\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^2 & \text{znotraj} \\ I & \text{zunaj} \end{cases}$$

Po relaciji $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ bosta obe polji naslednji:

$$H_\varphi(\rho) = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi\rho_0^2}\rho & \text{znotraj} \\ \dfrac{I}{2\pi\rho} & \text{zunaj} \end{cases} \qquad B_\varphi(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\mu_\mathrm{r} I}{2\pi\rho_0^2}\rho & \text{znotraj} \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & \text{zunaj} \end{cases}$$

Po analogiji z zgledom 44.3 bi za funkcijo pretoka $\psi(\rho)$ dobili:

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\mu_\mathrm{r} I l}{4\pi}\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^2 & \text{znotraj} \\ \dfrac{\mu_0 I l}{2\pi}\left(\dfrac{\mu_\mathrm{r}}{2} + \ln\dfrac{\rho}{\rho_0}\right) & \text{zunaj} \end{cases}$$

♣ Bralec naj si izriše poteke H_φ, B_φ in ψ. V čem je razlika med magnetnim poljem v/ob Cu ali Fe vodniku pri enakem toku? ♣

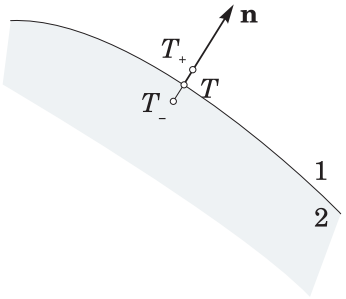
49. Mejni pogoji magnetnega polja

Že tretjič se srečujemo s temo o mejnih pogojih. O tem smo govorili že v elektrostatiki, ob vektorjih $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ in nato še v tokovnih poljih, ob vektorjih $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$. V magnetnem polju sta temeljni enačbi: a) brezizvornost magnetne gostote $\mathbf{B}$ (enačba 43.1) in b) vrtinčnost magnetne jakosti $\mathbf{H}$ (enačba 47.2):

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \qquad \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

To sta enačbi makroskopskih količin magnetnega polja in veljata (morata veljati) povsod, torej tudi na meji dveh različnih snovi (medijev, magnetikov).

Spet si bomo omislili mejno ploskev, ki razmejuje dve snovi; slika 49.1. V "igri"



Slika 49.1: Meja dveh snovi.

bodo tri mejne, poljubno blizu ležeče točke T_+, T in T_- in normala $\mathbf{n}$, ki bo dogovorno usmerjena v prostor z indeksom 1.

Mejni pogoj vektorja B. Če si kot sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ izberemo majhen valjček, ki delno seže v obe snovi, kot na sliki 22.2, dobimo (zaradi homogenosti enačbe $\oint_{\delta\mathcal{A}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = 0$) za $\mathbf{B}$ podoben homogen mejni pogoj kot za vektor $\mathbf{D}$ (brez σ na meji) ali vektor $\mathbf{J}$:

$$\boxed{B_n(T_+) - B_n(T_-) = 0} \tag{49.1}$$

ki ga v vektorski obliki zapišmo kot

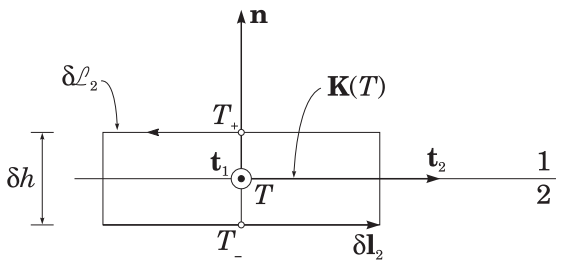
$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}(T_+) - \mathbf{B}(T_-)) = 0 \tag{49.1a}$$

Mejni pogoj beremo: normalna komponenta vektorja $\mathbf{B}$ prestopa mejo dveh snovi zvezno; $B_n(T_+) = B_n(T) = B_n(T_-)$.

Mejni pogoj vektorja H. Ta mejni pogoj bo nekoliko drugačen, kot smo ga srečali ob vektorju električne poljske jakosti v razdelkih 22 in 32. Kot prvo je vrtinčnost vektorja $\mathbf{H}$ v splošnem različna od nič, kot drugo pa bomo na meji dveh snovi dopuščali "tanko" tokovno oblogo $\mathbf{K}$, ki more biti tam le tangencialna. Kot tokovno oblogo bomo razumeli tok v tanki foliji ali naparjenem prevodniku (razdelek 40). Na prehodu dveh snovi si bomo spet zamislili majhno sklenjeno pravokotno konturo ($\delta h \times \delta l$), ki bo 1) imela lice pravokotnika obrnjeno v prvi tangentni smeri ($\mathbf{t}_1$) in 2) ko bo imela lice obrnjeno v drugi tangentni smeri ($\mathbf{t}_2$); slika 49.2. Trojka enotskih vektorjev $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ in $\mathbf{n}$ je ortogonalna v točki T v/na meji; $\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \mathbf{n}$. Narisana je le kontura $\delta\mathcal{L}_2$, konturo $\delta\mathcal{L}_1$ pa dobimo, ko to obrnemo v smer $\mathbf{t}_2$.

Če je δh majhen, potem je $H\delta h$ majhen kakor hočemo, δl pa si izberimo le toliko kratek, da moremo integral aproksimativno zamenjati s produktom. Zapišimo Ampèrov zakon toka za $\delta\mathcal{L}_2$:

$$\oint_{\delta\mathcal{L}_2} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} \doteq (\mathbf{H}(T_-)\cdot\mathbf{t}_2 - \mathbf{H}(T_+)\cdot\mathbf{t}_2)\delta l = \mathbf{t}_1\cdot\mathbf{K}(T)\delta l$$



Slika 49.2: Razmere na meji dveh snovi.

Podobno storimo še za zankico $\delta\mathcal{L}_1$ in dobimo:

$$\oint_{\delta\mathcal{L}_1} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} \doteq (\mathbf{H}(T_+)\cdot\mathbf{t}_1 - \mathbf{H}(T_-)\cdot\mathbf{t}_1)\delta l = \mathbf{t}_2\cdot\mathbf{K}(T)\delta l$$

Skalarne produkte zapišemo s projekcijami in imamo

$$\boxed{\begin{array}{rcl} H_{t2}(T_+) - H_{t2}(T_-) & = & -K_{t1}(T) \\ H_{t1}(T_+) - H_{t1}(T_-) & = & K_{t2}(T) \end{array}} \tag{49.2}$$

Če komponente (v lokalnem k.s.) spet združimo v vektorja

$$(H_{t1}, H_{t2}, H_n) = \mathbf{H} \qquad\qquad (K_{t1}, K_{t2}, 0) = \mathbf{K}$$

moremo slednji dve enačbi zapisati z eno vektorsko,

$$\boxed{\mathbf{n}\times(\mathbf{H}(T_+) - \mathbf{H}(T_-)) = \mathbf{K}} \tag{49.2a}$$

Dobljen mejni pogoj beremo: tangencialna komponenta vektorja magnetne poljske jakosti napravi na meji (s ploskovnim tokom) skok v velikosti ploskovnega toka, ki je pravokoten na tangencialno smer. Če na meji ni tokovne obloge, prehaja tangencialna komponenta vektorja **H** mejo zvezno. ♣ Bralec naj zgled 41.4 (polje tračnega vodnika) pokomentira v luči mejnih pogojev prehajanja vektorjev **B** in **H**; in podobno tudi pri zgledu 44.5. ♣

Dokaj pogost primer je meja magnetik-magnetik ali magnetik-zrak, ki je brez tokovne obloge ($K = 0$). Če privzamemo linearnost magnetika ($\mathbf{B} = \mu_0\mu_\mathrm{r}\mathbf{H}$), potem se mejna pogoja

$$B_n(T_+) - B_n(T_-) = 0 \qquad\qquad H_t(T_+) - H_t(T_-) = 0$$

preprosto združita v t.i. *zakonitost preloma magnetnega polja* (analogno kot pri električnem in tokovnem polju).

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{\mathrm{r}1}}{\mu_{\mathrm{r}2}}$$

Kota α_1 in α_2 sta spet kota, ki ju polje v zgornjem in v spodnjem prostoru oklepa s smerjo normale (**n**). (Razmerje tangensov kotov se v elektrostatičnem polju izraža z razmerjem dielektričnosti, v tokovnem polju z razmerjem prevodnosti, v magnetnem polju pa z razmerjem permeabilnosti.) ♣ Bralec naj se za hip ozre nazaj po snovi in si osvetli podobnosti, ki dualno veljajo tudi za prestop magnetnega polja. Ta analognost bo aktualna pri t.i. magnetnih vezjih (razdelek 51). ♣

50. Skalarni magnetni potencial

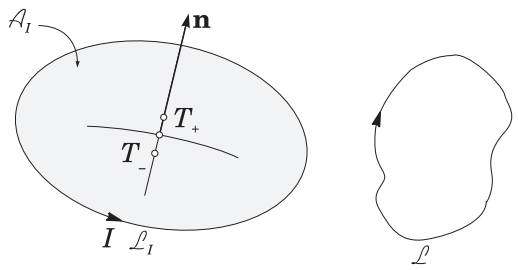
Prvi hip beseda potencial asociira na električni potencial v električnem polju, vendar povejmo že takoj, da bo potencial v magnetnem polju vpeljan zgolj in samo kot pomožna količina, ki ne bo imela nič skupnega s potencialno energijo, delom ali energijo. Energijsko obarvano vsebino ima le t.i. *vektorski magnetni potencial* ($\mathbf{A}$), o katerem – zaradi matematičnih ovir – na tem nivoju ne bomo govorili.

V čem je stvar. Če smo izven območja toka ($J = 0$) in so izbrane sklenjene konture ($\mathcal{L}$) takšne, da ne objamejo nobenega toka, potem je Ampèrov zakon toka (enačba 47.2) enostavno homogen,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0} \tag{50.1}$$

Rekli bi lahko: magnetna jakost je nevrtinčna izven toka in v konturah, ki toka ne objamejo; govorimo lahko o pogojni nevrtinčnosti.

Vzemimo neko splošno tokovno zanko in to pogojnost natančno opredelimo; slika 50.1. Na konturo $\mathcal{L}_I$ napnimo poljubno opno $\mathcal{A}_I$. Rekli bomo: magnetno polje zunaj toka



Slika 50.1: Interpretacija k definicijskemu območju skalarnega magnetnega potenciala.

tokovne zanke je nevrtinčno za vse konture $\mathcal{L}$, ki opne $\mathcal{A}_I$ ne prebodejo. Splošna točka je sedaj katerakoli točka zunaj toka; z gibanjem po prostoru pa smo omejeni le v toliko, da opne ne prestopamo – se je izogibamo. Od točke T_+, ki je tik nad opno, bomo prišli do spodnje točke T_- (tik pod opno) tako, da bomo "šli" okrog toka – torej ne po "bližnjici". V tako omejenem prostoru je $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ vedno nič.

Po analogiji iz elektrostatike, kjer je enačba $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ celo vedno veljala, vpeljemo v magnetiki t.i. *skalarni magnetni potencial* (V_m), ki bo v korelaciji s $\mathbf{H}$ tako kot je bil potencial V s poljem $\mathbf{E}$. V definicijskem območju skalarnega magnetnega potenciala bodo veljali naslednji dualni odnosi:

1) potencialni razliki ustreza krivuljni integral jakosti $\mathbf{H}$ po katerikoli "dovoljeni" poti,

$$\boxed{V_\mathrm{m}(T_1) - V_\mathrm{m}(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}} \tag{50.2}$$

2) razliki potencialov ustreza magnetna napetost Θ_{12} (ali $U_{\mathrm{m}12}$),

$$\boxed{\Theta_{12} = U_{\mathrm{m}12} = V_\mathrm{m}(T_1) - V_\mathrm{m}(T_2)} \tag{50.3}$$

3) izhodiščno ali referenčno mesto (točko R), kjer bo potencial V_m nič, si bomo prosto volili – za kaj bolj decidiranega nimamo fizikalne podlage. Potencial v točki T bo:

$$\boxed{V_\mathrm{m}(T) = \int_T^R \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}} \tag{50.4}$$

4) če bomo sklarano polje V_m poznali, bo $\mathbf{H}$ določen z odvodom v smeri normale na ekvipotencialko,

$$\boxed{\mathbf{H} = -\mathbf{n}\frac{\partial V_\mathrm{m}}{\partial n}} \tag{50.5}$$

♣ Po potrebi naj se bralec vrne na ustrezna mesta v elektrostatiki in si navedene zveze nekoliko "osveži". Bralec je verjetno tudi že pomislil na mersko enoto za ta potencial; enota bo ampère. ♣

Zgled 50.1

V zgledu 41.6 smo izračunali polje $\mathbf{B}$ v osi krožnega ovoja. Če je zanka v zraku, in feromagnetik ni prisoten, je poljska jakost v osi določena s

$$H_z(z) = \frac{B_z(z)}{\mu_0} = \frac{I\rho_0^2}{2(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}}$$

Dogovorimo se, da bo prepovedana opna ($\mathcal{A}_I$) kar krožna ploskev v ravnini ovoja s površino $\pi\rho_0^2$, potencial pa naj bo nič pri $z \to \infty$; slika 50.2. Po enačbi 50.4 bo potencial (za $z > 0$) kar tole:

$$V_\mathrm{m}(z) = \int_z^\infty H_z(z')\,dz' = \frac{I\rho_0^2}{2}\int_z^\infty \frac{dz'}{(\rho_0^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{\rho_0^2 + z^2}}\right)$$

Ulomek $z/(\rho_0^2+z^2)^{1/2}$ ustreza kosinusu ravninskega kota stožca, ki ga določa opna in točka na osi. Po zgledu 2.11 moremo zato izraz v oklepaju izraziti s prostorninskim kotom (Ω) omenjenega stožca. Potencial v točki $T(0,0,z)$ je dalje:

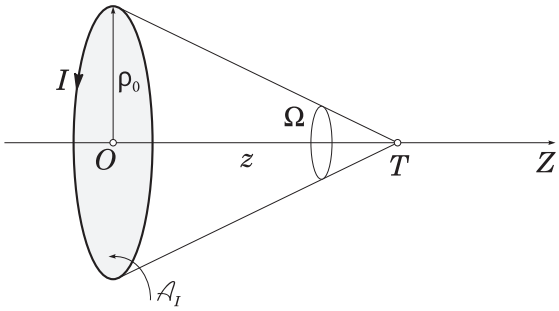
$$V_\mathrm{m}(z) = V_\mathrm{m}(T) = \frac{I}{4\pi}\Omega$$

Magnetni potencial je za $z \to \infty$ očitno nič; če pa gre $z \to 0^+$ je potencial tik nad opno enak $I/2$.

Poglejmo še, kaj je s točkami v osi, ki so na levi strani ovoja ($z < 0$). Polje v osi upada s tretjo potenco proti nič. Pričakovati je, da bo ta zakonitost ustrezala tudi izven osi, če smo res dovolj daleč od ovoja. Omislimo si polkrog z radijem z_0 ($z_0 \gg \rho_0$), ki seže od točke T_0 $(0,0,z_0)$ na desni strani, do točke T_0' $(0,0,-z_0)$ na levi strani ovoja. Za integral

$$\int_{T_0}^{T_0'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

vzdolž tega polkroga lahko rečemo, da je majhen kolikor hočemo, če je le z_0 dovolj velik; saj je H tam sorazmeren z_0^{-3}, dolžina poti pa je sorazmerna z_0. Iz tega sledi,



Slika 50.2: Geometrijska interpretacija potenciala v osi ovoja.

da je potencial V_m enak nič tudi v levi skrajni točki ($z \to -\infty$). Potencial na levi polosi ovoja bo (po enačbi 50.4) takle:

$$V_\mathrm{m}(z) = -\int_{-\infty}^{z} H_z(z')\,dz' = -\frac{I}{2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{\rho_0^2 + z^2}}\right) \qquad z < 0$$

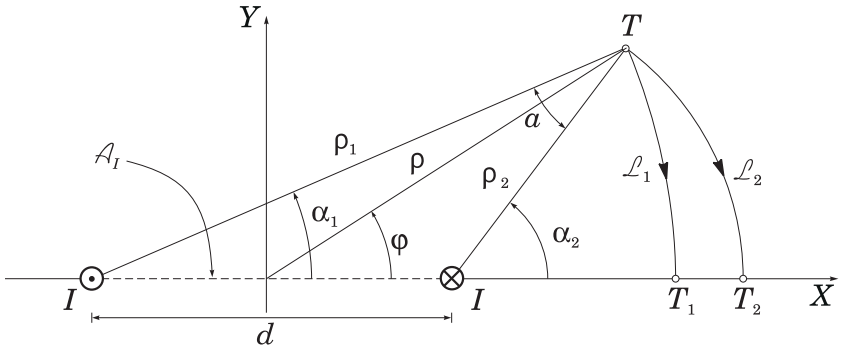
Ko gre z z leve strani proti 0^-, gre V_m proti $-I/2$. ♣ Bralec naj si nariše poteka $H_z(z)$ in $V_\mathrm{m}(z)$. ♣ Iz dobljenih izrazov vidimo, da je vpeljana opna ravno mesto nezveznosti skalarnega magnetnega potenciala; skok je enak I. Rezultat velja povsem splošno. Če se vrnemo na sliko 50.1 in napravimo integral

$$\int_{T_+}^{T_-} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = V_\mathrm{m}(T_+) - V_\mathrm{m}(T_-)$$

okrog toka, smo tok "skoraj" objeli v pozitivnem smislu; njegova vrednost je zato praktično enaka I.

Zgled 50.2

Izračunajmo skalarni potencial v okolici dvovoda, ki vodi tok I; slika 50.3. Kot



Slika 50.3: Skalarni potencial ob dvovodu.

opno $\mathcal{A}_I$ si izberimo trak širine d med vodnikoma. Na osi X (desno od desnega vodnika) ima magnetna poljska jakost le y komponento, zato je ta del osi gotovo ekvipotencialka. Izberimo si, da je ta del osi na potencialu nič, $V_\mathrm{m}(T_1) = V_\mathrm{m}(T_2) = 0$.

Potencial v točki T je:

$$V_{\mathrm{m}}(T) = \int_T^{T_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_T^{T_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

Polje $\mathbf{H}$ sestavimo kot vsoto polja ($\mathbf{H}_1$) levega in polja ($\mathbf{H}_2$) desnega vodnika,

$$V_{\mathrm{m}}(T) = \int_T^{T_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_T^{T_1} (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{l} = \int_{T\mathcal{L}_1T_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{T\mathcal{L}_2T_2} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l}$$

Pri tem smo si poti $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$ izbrali tako, da bo integracija čim preprostejša; poti sta kar krožna loka z radijema ρ_1 in ρ_2. Na poti $\mathcal{L}_2$ je $\mathbf{H}_2$ tangencialen in konstanten po iznosu, zato bo

$$\int_{T\mathcal{L}_2T_2} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{2\pi}\alpha_2$$

Zaradi obratne smeri polja $\mathbf{H}_1$ na poti $\mathcal{L}_1$ bo

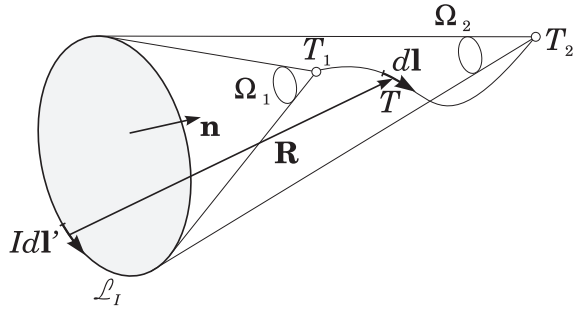
$$\int_{T\mathcal{L}_1T_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = -\frac{I}{2\pi}\alpha_1$$

Za potencial dobimo

$$V_{\mathrm{m}}(T) = \frac{I}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{I}{2\pi}\alpha$$

Rezultat je vsekakor zanimiv; potencial je sorazmeren ravninskemu kotu α, pod katerim se vidi dvovod iz točke T. ♣ Bralec naj skicira sliko ekvipotencialk; na kaj ta slika spominja? Določi naj tudi izraz za $V_{\mathrm{m}}(\rho, \varphi)$, ako je $d \ll \rho$; kolikšni sta komponenti H_ρ in H_φ? ♣

Skalarni magnetni potencial tokovne zanke. Vzemimo poljubno oblikovano tokovno zanko, ki se nahaja v praznem prostoru (μ_0); slika 50.4. Zanimala nas bo potencialna



Slika 50.4: Poljubno oblikovana tokovna zanka.

razlika med T_1 in T_2,

$$V_{\mathrm{m}}(T_1) - V_{\mathrm{m}}(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

V praznem prostoru bo zveza med $\mathbf{B}$ in $\mathbf{H}$ kar $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$. Po Biot-Savartovem zakonu bo $\mathbf{H}(T)$ določen z integralom,

$$\mathbf{H}(T) = \frac{I}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}_I} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

potencialna razlika pa z dvojnim integralom,

$$V_{\mathrm{m}}(T_1) - V_{\mathrm{m}}(T_2) = \frac{I}{4\pi}\int_{T_1}^{T_2}\oint_{\mathcal{L}_I}\frac{(d\mathbf{l}'\times\mathbf{R})\cdot d\mathbf{l}}{R^3} = \frac{I}{4\pi}\int_{T_1}^{T_2}\oint_{\mathcal{L}_I}\frac{(d\mathbf{l}\times(-\mathbf{R}))\cdot d\mathbf{l}'}{R^3}$$

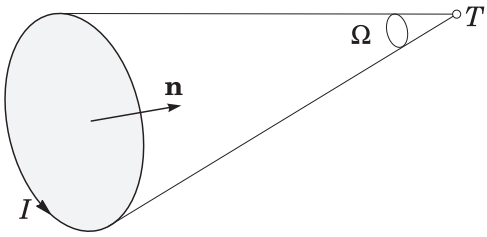
Takšno dvojno integracijo smo v razdelku 44 že srečali. Vlogi $d\mathbf{l}$ in $d\mathbf{l}'$ sta se zamenjali, enako tudi $\mathbf{R}$ in $(-\mathbf{R})$, zato moremo enačbo (V1) tu smiselno uporabiti:

$$V_{\mathrm{m}}(T_1) - V_{\mathrm{m}}(T_2) = \frac{I}{4\pi}((4\pi-\Omega_2)-(4\pi-\Omega_1)) = \frac{I}{4\pi}(\Omega_1-\Omega_2)$$

Razlika potencialov se izraža z razliko prostorskih kotov, zato moremo nastavek za potencial tvoriti v obliki

$$V_{\mathrm{m}}(T) = \frac{I}{4\pi}\Omega + C$$

kjer je C še poljubna konstanta; slika 50.5. Vzemimo, da je potencial v neskončnosti nič.



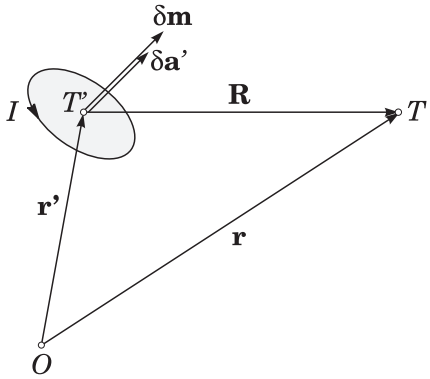
Slika 50.5: Interpretacija potenciala tokovne zanke.

Če "povlečemo" tja točko T, bo tam nič tudi Ω, kar pomeni, da mora biti konstanta C enaka nič,

$$\boxed{V_{\mathrm{m}}(T) = \frac{I}{4\pi}\Omega} \tag{50.6}$$

Rezultat je splošen, potrjujeta pa ga tudi posebna primera v zgledih iz tega razdelka.

Skalarni magnetni potencial magnetnega dipola. Naj je center majhne tokovne zankice – magnetnega dipola – z momentom $\delta\mathbf{m}$ v točki T'; slika 50.6. Če je R veliko večji od izmer zankice, bo prostorski

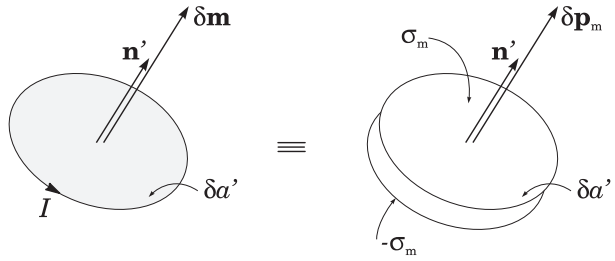


Slika 50.6: K potencialu tokovne zankice.

kot $\delta\Omega$ ustrezno majhen in približno enak $\delta\mathbf{a}' \cdot \mathbf{R}/R^3$. Potencial δV_m te zankice bo (po 50.6) v točki T enak $I\delta\mathbf{a}' \cdot \mathbf{R}/4\pi R^3$, oz.

$$\boxed{\delta V_\mathrm{m}(T) = \frac{\delta\mathbf{m}(T') \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3}} \tag{50.7}$$

Dobljen izraz pa po obliki povsem spominja na potencial točkastega električnega dipola (enačba 17.3). Poleg enačbe 45.4 (in analogne 17.4) je to slednje še dodaten argument, da majhno tokovno zankico imenujemo magnetni dipol. Če bi z dualnostjo še nekoliko nadaljevali, potem bi mogli zankico formalno modelirati[1] (nadomestiti) z dvojnim slojem "magnetin" na ploskvicah s površinama $\delta a'$; slika 50.7. Potencial $\delta V_\mathrm{m}(T)$ bi pisali:



Slika 50.7: Ekvivalentnost tokovne zankice in dvojnega sloja magnetin.

$$\delta V_\mathrm{m}(T) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{\delta\mathbf{p}_\mathrm{m}(T') \cdot \mathbf{R}}{R^3}$$

kjer bi $\delta\mathbf{p}_\mathrm{m}$ $(= \mu_0\delta\mathbf{m})$ pomenil dipolski moment magnetin. Po analogiji bi bila ustrezna gostota ploskovnega magnetnega dipola (τ_m) enaka produktu $\mu_0 I$. Pisali bi:

$$\delta V_\mathrm{m}(T) = \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}}{4\pi\mu_0 R^3}\tau_\mathrm{m}(T')\,\delta a'$$

Neko poljubno tokovno zanko je možno (v smislu slike 45.9) razumeti kot "zloženko" diferencialnih zankic z magnetnimi ploskovnimi dipolskimi momenti $\tau_\mathrm{m} = \mu_0 I$. Potencial takšne zanke bi dalje zapisali z integralom:

$$\boxed{V_\mathrm{m}(T) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\int_{\mathcal{A}} \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}}{R^3}\tau_\mathrm{m}(T')\,da'} \tag{50.8}$$

ki v opisani dualnosti korespondira z enačbo 18.2. Ker pa je τ_m za tokovno zanko konstanten, nam preostali podintegralski del da ravno prostorski kot Ω, pod katerim se zanko iz točke T vidi: $V_\mathrm{m}(T) = \tau_\mathrm{m}\Omega/4\pi\mu_0 = I\Omega/4\pi$ – kar spet ustreza enačbi 50.6.

Ta potencial ustreza formalno tudi potencialu dvojnega sloja magnetin. Tokovna zanka se obnaša kot dvojni sloj magnetin.

[1]Pri teoretičnih obravnavah v elektromagnetiki je tudi sicer močno uveljavljen koncept uvajanja t.i. nadomestnih, pomožnih ali ekvivalentnih virov. Ti so s samega računskega vidika izredno dobrodošli, prikladni ter uporabni, in ob ustrezni matematični podprtosti rezultirajo v povsem konkretne in otipljive parametre, ki so merljivi in preverljivi. Nekaj tega smo spoznali že v dosedanjih obravnavah. Lep primer so zrcalne elektrine v elektrostatiki; z njimi računamo, čeravno se zavedamo, da je njihova pozicija v prostoru le navidezna – figurirajo kot matematični ekvivalenti –, s pomočjo njih izračunana kapacitivnost pa je povsem otipljiv parameter. Dalje smo napetostni vir modelirali z ekvivalentno generatorsko poljsko jakostjo $\mathbf{E}_\mathrm{g}$, tokovni vir pa z generatorjevo gostoto toka $\mathbf{J}_\mathrm{g}$. Seznanili smo se z ekvivalenco tokovnega in napetostnega vira in dalje tudi z ekvivalenco aktivnih in pasivnih vezij.

Modeliranje je v elektrotehniki nasploh izredno bogato in razvejano, zato si nekega sodobnega inženirskega dela brez njega skoraj ne moremo več zamišljati. Končno je tudi celoten fizikalno-matematični model opisa elektromagnetnih pojavov, ki ga postopno spoznavamo, nek razvejan model, ki pa na koncu vseeno rezultira v povsem tehnične in otipljive kategorije.

51. Magnetna vezja

V magnetiki se že kar nekaj časa srečujemo s pojmi, termini in matematičnimi zapisi, ki spominjajo na prehojena poglavja o tokovnih in elektrostatičnih poljih. Kot analogni količini k gostoti $\mathbf{J}$ in toku I v enosmernih tokovnih poljih imamo v magnetnem polju gostoto $\mathbf{B}$ in pretok ϕ. Za obe gostoti je tipično, da sta brezizvorni oz., da je njun pretok skozi sklenjeno ploskev enak nič. K jakosti $\mathbf{E}$ analogna količina je v magnetiki jakost $\mathbf{H}$. Če za hip izvzamemo substanco generatorja, imamo k Ohmovemu zakonu ($\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$) v tokovnih poljih analogen "Ohmov zakon" ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) tudi v magnetiki; permeabilnost μ bo imela vlogo nekakšne "specifične magnetne prevodnosti". Izven območja toka smo v magnetiki uvedli skalarni magnetni potencial V_m, ki je z jakostjo $\mathbf{H}$ v podobni navezi, kot je v časovno konstantnem polju potencial V z jakostjo $\mathbf{E}$. Vpeljali smo tudi pojem magnetne napetosti Θ (U_m), ki je analogna k električni napetosti U. V tokovnem polju smo imeli napetostne (tokovne) vire, ki so poganjali toke skozi prevodnike, v magnetiki pa imamo magnetilne toke, ki generirajo magnetne pretoke in magnetno polje nasploh. Iz naštetega se – čeravno bežno – že nakazujejo določene vzporednice; ta hip resda še niso povsem izčiščene, vendar si jih velja prav zato podrobneje ogledati.

V razdelku 32 smo v okviru mejnih pogojev in zakonitosti preloma podrobneje razmišljali o meji izolator-prevodnik. Ugotovili smo, da je – zaradi visokega razmerja med prevodnostjo prevodnika in izgubno prevodnostjo izolatorja – glavnina toka v prevodnih konduktivnih povezavah. V nadaljevanju smo takšni tokovni strukturi v prevodnikih priredili ekvivalentno električno zvezje koncentriranih elementov (pasivnih in aktivnih), ki smo ga nato analizirali le še na nivoju integralnih količin (toka in napetosti).

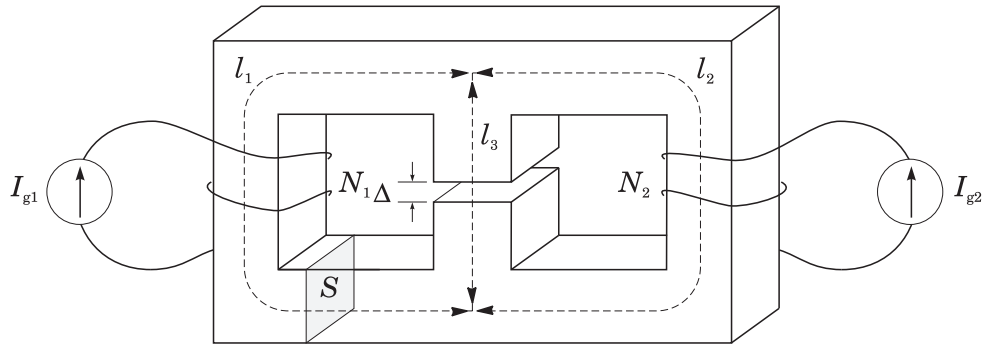
Postavlja se kar logično vprašanje: kako je s tem v magnetnih strukturah? Glede na dualen "Ohmov zakon" v magnetiki ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) moremo tudi tu govoriti o magnetno bolj ali manj prevodnih snoveh. Za feromagnetike ($\mu_r \gg 1$) bi lahko rekli, da so dobri magnetni prevodniki, medtem ko bi za ostale snovi ($\mu_\mathrm{r} \simeq 1$) rekli, da so magnetno slabši ali kar slabi prevodniki. Na/ob meji dveh magnetikov velja nadalje dualna zakonitost preloma, ki smo jo srečali v tokovnih poljih, kar pomeni, da bodo vse ugotovitve in zaključki, ki veljajo za mejo dobrega in slabega električnega prevodnika, veljali dualno tudi za mejo dobrega in slabega magnetnega prevodnika.

V tokovnem polju smo ugotovili: če tokovna gostota vstopa na mejo pravokotno, potem se ta preko meje ohranja, polje E_n pa napravi skok v razmerju specifičnih prevodnosti: $J_n(T_+) = J_n(T) = J_n(T_-)$, $E_n(T_+)/E_n(T_-) = \gamma_2/\gamma_1$; dualno bomo za mejo dveh magnetikov pisali: $B_n(T_+) = B_n(T) = B_n(T_-)$ in $H_n(T_+)/H_n(T_-) = \mu_2/\mu_1$. Druga važna ugotovitev v tokovnem polju se je nanašala na mejo izolator-prevodnik. Ugotovili smo, da v primeru, ko teče tok v prevodniku vzdolž meje, se tej tangencialno približa in minimalno oz. zanemarljivo izstopa v izolator. V idealiziranem primeru postane meja prevodnik-izolator ograja pretočnih cevk tokovnega polja v prevodniku; tokovno polje je takrat "ujeto" ob stene prevodnika. Podobno bo veljalo tudi za mejo slabega in dobrega magnetnega prevodnika. Magnetni pretok, ki bo vzpostavljen v dobrem magnetnem prevodniku, bo "ujet" med njegove stene in bo minimalno oz. zanemarljivo izstopal iz njega.

Vse povedano moremo sedaj strniti v ugotovitev: če bo neka magnetna struktura, ki jo sestavljajo feromagnetna telesa in navitja z magnetilnimi toki, koncipirana tako, da bodo jasno razvidne prednostne smeri "pretakanja" magnetnega polja vzdolž feromagnetnih

poti, potem bomo takšni magnetni strukturi (po analogiji) rekli *magnetno vezje*.

Kot nazoren zgled takšnega vezja si oglejmo primer tristebrnega feromagnetnega jedra, ki ima navitji na krajnih stebrih, na srednjem stebru pa ima minimalno zračno režo (varilni transformator); slika 51.1. Izbran (poseben) primer je še vedno sorazmerno dovolj splošen:



Slika 51.1: Tristebrno jedro z vzbujalnima navitjema, kot primer magnetnega vezja.

da bomo ob njem utegnili spoznati osnovne zakonitosti in problematiko t.i. magnetnih vezij.

Namenimo najprej besedo dve gradnikom podane magnetne strukture.

1) Navitji z N_1 in N_2 ovoji sta vzbujani s tokovnima viroma jakosti I_{g1} in I_{g2}; izbrali bi si lahko tudi napetostna vira, toka v navitjih pa bi bila takrat določena z upornostima navitij. Na sliki sta navitji simbolično narisani le z dvema ovojema; drugače pa je takšno navitje predhodno navito na zračnem tuljavniku v enem ali več slojih in nataknjeno na steber. Če feromagnetik ne bi bil prisoten, bi bilo njegovo magnetno polje podobno polju solenoida iz zgleda 44.6. Glede na označene smeri tokov v navitjih bi bilo (po desnem pravilu) polje levega navitja navzgor po stebru, polje desnega pa navzdol.

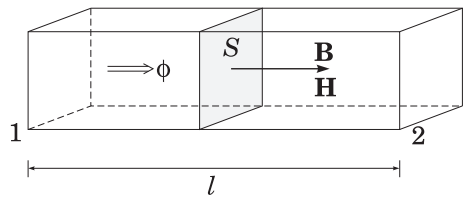
2) To generirano magnetno polje se v nadaljevanju "ujame" v dobro prevodne feromagnetne kanale, ki jih določa oblikovanost feromagnetnih poti in se – iz opisanih razlogov – vzdolž njih praktično ohranja. Primer iz slike je takšen, da so prerezi magnetnih "kanalov" enaki (S), mogli pa bi biti tudi različni. Naslednja poenostavitev bo v tem, da bomo shajali s srednjimi dolžinami magnetnih poti (l_1, l_2 in l_3); ta dobrodošla poenostavitev je opravičljiva, če so prerezne izmere (prereza S) majhne glede na dolžine magnetnih poti. Ali povedano drugače: pri poenostavljeni analizi magnetnega vezja se bomo "odpovedali" obravnavam nehomogenosti porazdelitve magnetnega polja po prerezu. Polji B in H v feromagnetiku bomo sprejemali kot poprečni količini vzdolž magnetne poti, medtem ko bo njun odnos v splošnem nelinearen in opredeljen z magnetilno krivuljo ali histerezno pentljo.

3) Običajen sopotnik magnetnih vezij je zračna reža, ki je v našem primeru na srednjem stebru. Nasploh se zračna reža javlja v dveh svojstvih. Lahko je neželena in se pojavlja ob zlaganju pločevine v jedro, rekli bi ji parazitna, in je kot takšna moteča, ali pa je pogojena z drugimi tehničnimi omejitvami, kot je to primer reže med statorjem in rotorjem vrtljivega stroja. More pa biti reža tudi hotena in spremenljiva; vse to pa v cilju doseganja določenih elektromagnetnih lastnosti celotne naprave (varilni transformator, spreminjanje induktivnosti in drugo). V magnetni strukturi ima zračna reža približno podoben učinek, kot če bi v električnem tokokrogu Cu žico prekinili in manjkajoči del zamenjali z nekaj

tisočkrat slabšim prevodnikom (npr. ogljem). Tokokrog bi bil še vedno sklenjen, vendar z visoko prehodno upornostjo.

Elementi magnetnega vezja. Tako kot pri običajnih električnih vezjih, ločimo tudi tu med pasivnimi in aktivnimi elementi; pasivni so *magnetni upori* s pripadajočimi magnetnimi upornostmi, aktivni pa so *magnetni generatorji* s pripadajočimi magnetnimi napetostmi.

1) Magnetni upor. Vzemimo kos magnetnega kanala dolžine l in prereza S, ki je iz feromagnetika z znano (H, B) karakteristiko; slika 51.2. Če privzamemo homogenost



Slika 51.2: Homogen kos feromagnetika.

polja vzdolž magnetne poti l od enega (1) do drugega (2) konca, potem je padec magnetne napetosti

$$\Theta = \Theta_{12} = V_{\mathrm{m}}(1) - V_{\mathrm{m}}(2) = \int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Hl$$

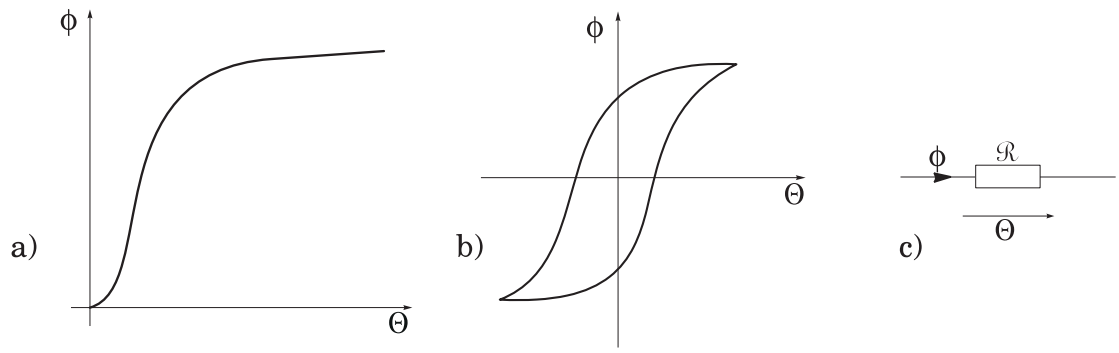
Magnetni pretok je

$$\phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = BS$$

Njun kvocient ustreza t.i. *magnetni upornosti* $\mathcal{R}$ oz. *magnetni prevodnosti* $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{G}} = \frac{Hl}{BS}$$

Zaradi nelinearne odvisnosti (H, B) je magnetna upornost (prevodnost) nelinearna in se jo, tako kot nelinearno električno upornost, podaja v ustreznem (Θ, ϕ) diagramu. Ker pa je zveza med H in Θ ter B in ϕ linearna, je zato (Θ, ϕ) diagram povsem identičen magnetilni krivulji oz. histerezni zanki v (H, B) diagramu (slika 51.3). Spremeniti je



Slika 51.3: a) magnetilna krivulja, b) histerezna zanka v (Θ, ϕ) diagramu, c) magnetni upor.

potrebno le merili. Če se delovna točka feromagnetika nahaja na magnetilni krivulji v podkolenskem delu, potem moremo krivuljo (H, B) linearizirati in pisati: $B = \mu_\mathrm{r}\mu_0 H = \mu H$. Magnetna upornost je takrat:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

Izraz (povsem) spominja na električno upornost ravnega homogenega prevodnika; vlogo specifične električne prevodnosti prevzema permeabilnost.

Na enak način moremo tudi zračni reži dolžine Δ (s slike 51.1) prirediti dualno magnetno upornost $\mathcal{R}_0$,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\Delta}{\mu_0 S}$$

kjer je μ_0 "specifična magnetna prevodnost" vakuuma.

Običajno so magnetne upornosti zračnih rež izrazito vredne upoštevanja. Če pišemo $\mathcal{R}$ kot

$$\mathcal{R} = \frac{l/\mu_\mathrm{r}}{\mu_0 S}$$

potem deluje ulomek l/μ_r kot ekvivalentna zračna špranja ($\Delta_\mathrm{ekv.}$). Če je v magnetni strukturi l/μ_r veliko manjši od resnične zračne špranje, potem moremo magnetne upornosti feromagnetnih kanalov proti slednjim zanemariti. Pri $\mu_\mathrm{r} = 1000$, $l = 0.5$ m in $\Delta = 1$ mm je to že skoraj upravičeno.

Seveda pa problem zračne reže ni tako preprost kot izgleda sama enačba. Magnetno polje se preko špranje ne navezuje iz enega na drug konec feromagnetika le po efektivnem prerezu reže, ampak se "razleze" tudi izven nje, tako da je ekvivalentni prerez ($S_\mathrm{ekv.}$) nekoliko večji od efektivnega ($S_\mathrm{ekv.} > S$). Če je prerez (S) pravokoten, s stranicama a in b, špranja Δ pa je od obeh veliko manjša, potem je $S_\mathrm{ekv.} \simeq (a+\Delta)(b+\Delta) \simeq S+\Delta(a+b)$. Na tem nivoju se ne moremo podrobno spuščati v problem t.i. *stresanega magnetnega polja* ob režah, ker so analitične aproksimacije s konformnimi preslikavami vendarle prezahtevne, kakšne numerične metode pa sploh. S tem v zvezi obstoja t.i. *Carterjev faktor*, ki podaja odvisnost upornosti med resnično in idealizirano zračno režo.

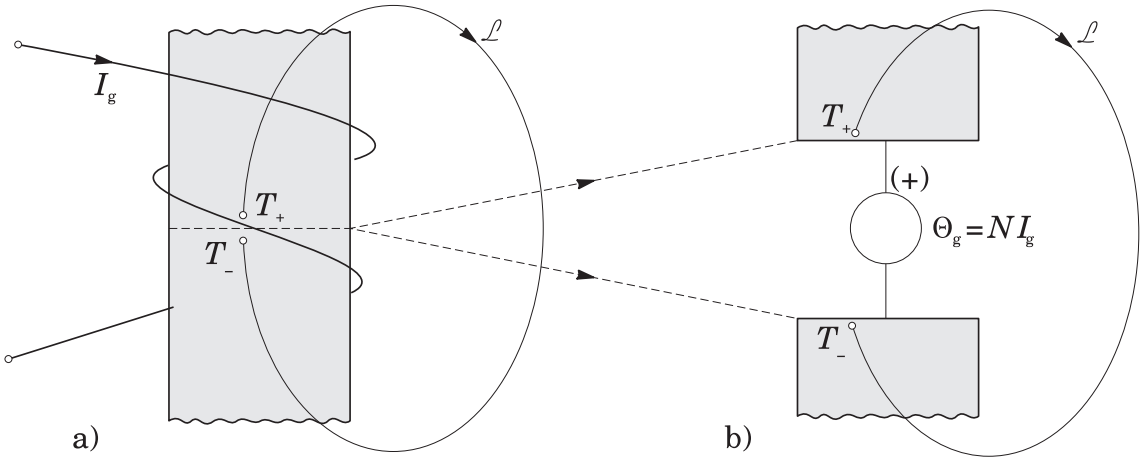
2) Generator magnetne napetosti. Oglejmo si segment stebra, na katerem je tuljavnik z N ovoji in tokom I; slika 51.4, skica a). V višini navitja vpeljimo opno (črtkano), ki bo zagotavljala enoličnost skalarnega magnetnega potenciala V_m. Po ugotovitvah iz prejšnjega razdelka napravi potencial na njej skok v velikosti (s krivuljo $\mathcal{L}$) objetega toka,

$$V_\mathrm{m}(T_+) - V_\mathrm{m}(T_-) = \int_{T_+\mathcal{L}T_-} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI_\mathrm{g}$$

Na tem mestu se moramo vrniti k razdelku 23, kjer smo spoznavali idealni električni napetostni vir. Pričujoč integral je primerljiv z tamkajšnjim

$$\int_{A\mathcal{L}_\mathrm{z}B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

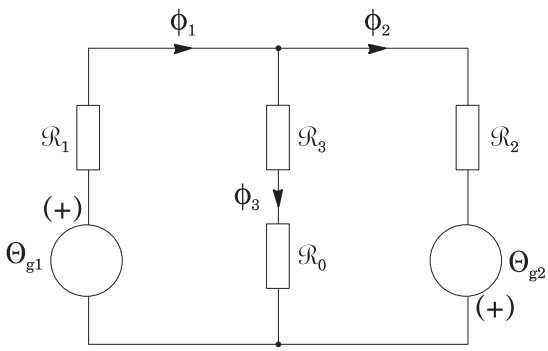
za katerega smo ugotovili, da je enak generatorjevi napetosti U_g (enačba 23.1). Na mestu opne moremo magnetilnemu navitju s tokom I_g – po analogiji – prirediti ekvivalenten idealni magnetni napetostni vir z napetostjo $\Theta_\mathrm{g} = NI_\mathrm{g}$ – kot kaže skica b). Oznako



Slika 51.4: Modeliranje magnetnega napetostnega vira.

polaritete bomo postavljali v oklepaj, saj fizikalno ni podprta z obstojem magnetin (slika 50.7), povedala nam bo le to, v katero smer (iz plusa ven) bo magnetilno navitje (pri označeni smeri magnetilnega toka I_g) generiralo svoj magnetni fluks.

Modelno magnetno vezje. Po tej pripravi lahko – za naš primer iz slike 51.1 – narišemo tudi že ustrezno modelno magnetno vezje koncentriranih elementov ; slika 51.5. Generatorski magnetni napetosti sta $\Theta_{g1} = N_1 I_{g1}$ in $\Theta_{g2} = N_2 I_{g2}$, magnetni upori $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$



Slika 51.5: Modelno magnetno vezje koncentriranih elementov.

in $\mathcal{R}_3$ predstavljajo magnetne upornosti vseh treh magnetnih poti dolžin l_1, l_2 in $l_3 - \Delta$, upornost $\mathcal{R}_0$ pa pripada magnetni upornosti zračne reže.

Analiza modelnega magnetnega vezja. Pri poznani magnetni strukturi (geometrija, magnetilne in histerezne krivulje, število ovojev in velikosti magnetilnih tokov) so komponente modelnega magnetnega vezja načelno poznane; v primeru linearnosti sistema so komponente številsko določene, v primeru nelinearnosti feromagnetika pa so pripadajoče upornosti podane v (Θ, ϕ) diagramu.

Vprašanja analize takšnega vezja se nanašajo predvsem na določanje magnetnih pretokov (v posameznih vejah) ali drugih količin, ki so z njimi v neposredni zvezi. Iztočnici vsakršne analize modelnega magnetnega vezja sta oba dualna Kirchhoffova zakona. Prvi

izhaja iz neizvornosti magnetnega polja; to pomeni, da je v spojišču, kjer se magnetni kanali (veje vezja) staknejo, vsota pretokov enaka nič,

$$\sum_i (\pm)\phi_i = 0$$

Če pretok (fluks) veje odteka iz spojišča, ima predznak (+), drugače (−). Po drugi strani pa magnetni kanali tvorijo veje in zanke, ki so sestavljene iz magnetnih uporov in navitjem prirejenih virov. Vsota vseh napetosti (vštevši generatorske) mora biti v vsaki zanki enaka nič,

$$\sum_j (\pm)\Theta_j = 0$$

Predzank (+) pripada napetostim v smeri obhoda, ostalim pa (−).

Metodika reševanja t.i. magnetnega vezja je v nadaljevanju takšna kot smo jo spoznali v okviru enosmernih vezij. Če je magnetno vezje linearno, "stečejo" zelo preprosto vse tam naštete metode (vejnih pretokov, vejnih magnetnih napetosti, zančnih pretokov in spojiščnih magnetnih potencialov); rezultirajo namreč v enostavno rešljive sisteme linearnih enačb. Po potrebi so na voljo tudi tam opisani teoremi, le s to razliko, da stavek Tellegena in stavek maksimalne moči v magnetnem vezju nimata fizikalne podprtosti; v magnetnih vezjih nimamo dualnega Joulovega zakona.

Zgled 51.1

Vzemimo magnetno strukturo s slike 51.1 s podatki: $\mu_\mathrm{r} = 8000$, $l_1 = l_2 = 0.9$ m, $l_3 = 0.3$ m, $\Delta = 1$ mm, $S = 50$ cm^2, $I_{\mathrm{g}1} = 0.15$ A, $N_1 = 200$, $I_{\mathrm{g}2} = 0.2$ A, $N_2 = 300$. Modelno vezje s slike 51.5 ima naslednje vrednosti elementov: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 3\mathcal{R}_3 = 18$ kA/Vs, $\mathcal{R}_0 = 160$ kA/Vs, $\Theta_{\mathrm{g}1} = 30$ A, $\Theta_{\mathrm{g}2} = 60$ A. Po metodi spojiščnih potencialov bi, pri simbolno "ozemljenem" spodnjem spojišču, za V'_m zgornjega spojišča pisali:

$$\left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_0}\right) V'_\mathrm{m} = \frac{\Theta_{\mathrm{g}1}}{\mathcal{R}_1} - \frac{\Theta_{\mathrm{g}2}}{\mathcal{R}_2}$$

oz.

$$\left(\frac{2}{18} + \frac{1}{166}\right) V'_\mathrm{m} = \frac{30 - 60}{18} \;\Rightarrow\; V'_\mathrm{m} = -14.2 \text{ A}$$

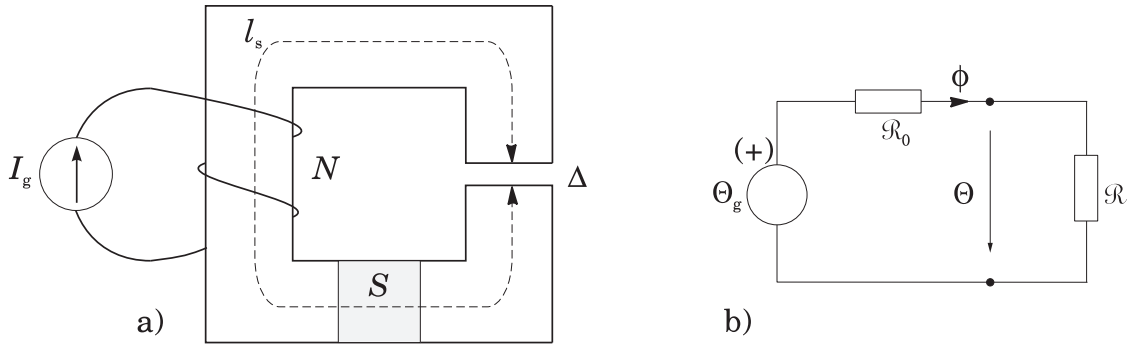
Pretoki bi bili:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= (\Theta_{\mathrm{g}1} - V'_\mathrm{m})/\mathcal{R}_1 = 2.46 \text{ mVs} \\
\phi_2 &= (V'_\mathrm{m} + \Theta_{\mathrm{g}2})/\mathcal{R}_2 = 2.54 \text{ mVs} \\
\phi_3 &= V'_\mathrm{m}/(\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_0) = -0.08 \text{ mVs}
\end{aligned}$$

Nelinearno magnetno vezje. Mnogo bolj zahtevna in tudi težavnejša pa je analiza nelinearnega magnetnega vezja. Za vsakim nelinearnim uporom ($\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ in $\mathcal{R}_3$) se skriva (Θ, ϕ) diagram z vso pestrostjo nelinearnih odvisnosti, ki so odvisne od predhodnega stanja feromagnetika. Omenimo le kot ilustracijo: če bi v magnetnem vezju vključili prvi tok pred drugim, bi bila rešitev drugačna, kot če bi ob enakem začetnem stanju magnetnega vezja vključili drugi tok pred prvim. Govora o kakršnikoli superpoziciji tu

ni več; problem je tipično "zrel" za iterativno numerično obdelavo – v kar se seveda ne moremo spuščati.

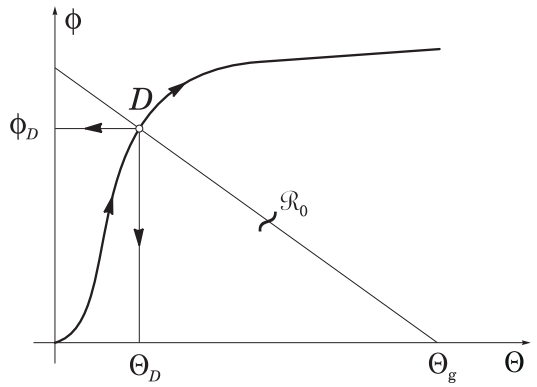
Kljub temu bomo tej problematiki namenili nekaj pozornosti. Ogledali si bomo preprosto grafično metodo za primer, ko ima magnetno vezje eno samo zanko, en sam pretok. Vzeli bomo magnetni krogotok z enim navitjem, z enovitim feromagnetikom in z zračno režo, slika 51.6, skica a), oz. prirejeno modelno vezje, skica b). Upor $\mathcal{R}_0$ pripada reži



Slika 51.6: a) Magnetna struktura in b) modelno vezje.

in je linearen, $\mathcal{R}_0 = \Delta/\mu_0 S$, upor $\mathcal{R}$ pa je podan z nelinearno karakteristiko v (Θ, ϕ) diagramu. Iz množice diagramov si bomo izbrali dva: začetno magnetilno krivuljo in simetrično histrezno pentljo. V prvem primeru naj se tok i_g povečuje počasi[1] od nič do končne vrednosti I_g, v drugem primeru pa naj se tok i_g "počasi" spreminja med skrajnima vrednostima $\pm I_g$; na primer po sinusnem časovnem zakonu.

1) Magnetenje po deviški krivulji. Na skici b) je napetostna enačba levo od "sponk" sledeča: $\Theta = \Theta_g - \mathcal{R}_0\phi$. Tej enačbi v (Θ, ϕ) diagramu ustreza premica z nagibom $-\mathcal{G}_0 = -1/\mathcal{R}_0$, ki jo vrišemo v diagram krivulje magnetenja; slika 51.7. Presečišče krivulj



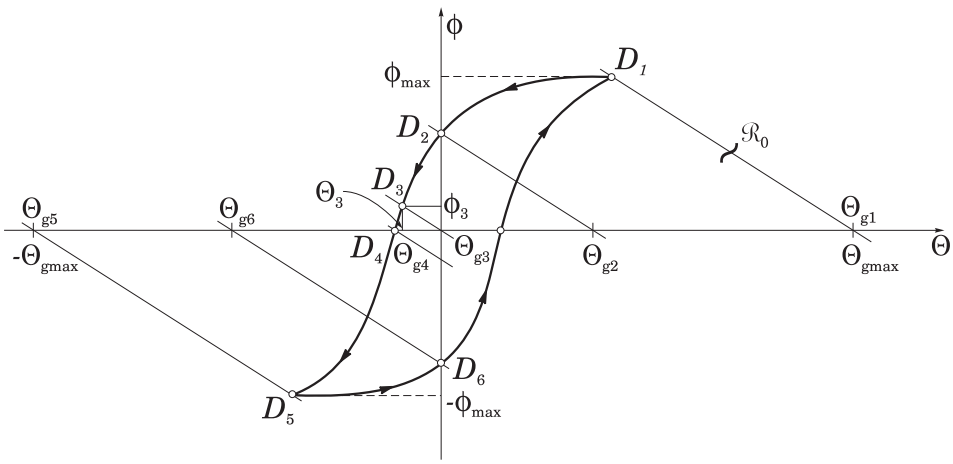
Slika 51.7: Grafična rešitev magnetnega kroga.

(D) določa ravno delovno točko oz. pretok ϕ_D v magnetnem krogu ter padec magnetne napetosti (Θ_D) na feromagnetiku in zračni reži $(\Theta_g - \Theta_D)$. Če se Θ_g oz. i_g povečuje, se

[1] S pojmom "počasnost" se hočemo izogniti pojavu elektromagnetne indukcije, ki bi opazovane procese še dodatno " zapletla" (več o tem v razdelku 53 in 55).

delovna točka seli v smeri puščice po magnetilki. Ker pa magnetenje feromagnetika ni reverzibilen proces, bi se pri zmanjševanju toka magnetenja delovna točka ne gibala nazaj po isti, ampak po drugi krivulji – ta pa je spet odvisna od maksimalne točke, ki jo je vezje doseglo (slika 48.5). ♣ Bralcu verjetno ne bo težko najti grafične rešitve za primer, ko bi iskali potrebno napetost Θ_g, da bi dosegli želen ϕ v magnetnem krogu. Premisli naj tudi, kako bi grafično reševanje potekalo v (H, B) diagramu? ♣

2) Magnetenje po simetrični histerezni pentlji. Za določen maksimalni magnetni pretok ϕ_{max} je histerezna pentlja določena – znana; slika 51.8. Če vzamemo, da je



Slika 51.8: Delovne točke na histerezni pentlji.

začetna točka opazovanja v D_1 (ko je bilo predhodno izvršenih že več komutacij toka magnetenja od $-I_g$ do I_g), potem se pri zniževanju Θ_g giblje delovna točka po hrbtni (zgornji) strani histereze do točke D_5, kjer doseže Θ_g skrajno (negativno) vrednost $-\Theta_{g\,max.}$. Pri povečevanju Θ_g se delovna točka giblje po spodnjem delu histerezne pentlje navzgor.

Zanimiva je točka D_3, ko je $\Theta_{g3} = 0$. Ta točka ustreza stanju, ko bi magnetilni tok izklopili. V magnetnem krogu bi – kljub odsotnosti toka – ostajal pretok ϕ_3, magnetna napetost na jedru bi bila negativna ($\Theta_3 < 0$); enako velika, vendar nasprotna napetost, pa bi bila na reži. Kaj to pomeni? Ker je Θ_g nič, je napetostna enačba homogena,

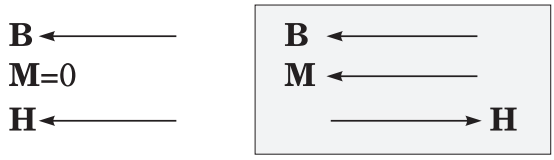
$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{\text{ferom.}} l_s + H_{\text{reže}} \Delta = \Theta_3 + \frac{B_{\text{reže}}}{\mu_0} \Delta = 0$$

Gostota polja v reži bi bila

$$B_{\text{reže}} = -\frac{\mu_0 \Theta_3}{\Delta} = -\frac{\mu_0 H_{\text{ferom.}} l_s}{\Delta}$$

kar bi ustrezalo delovni točki feromagnetnega jedra kot trajnega magneta, ki jo določa hrbtni del histerezne pentlje v (H, B) diagramu (v drugem kvadrantu) ter l_s in Δ. Zanimivo je tudi to, da je $H_{\text{ferom.}} < 0$; nasprotno pa je $H_{\text{reže}} > 0$.

Obratna predznaka komentiramo takole. Po enačbi $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ imajo vektorji magnetnega polja v in ob trajnem magnetu naslednje smeri; slika 51.9. Magnetno polje



Slika 51.9: Vektorji magnetnega polja v in ob trajnem magnetu.

B znotraj in zunaj namagnetene palice je podobno polju toka v dolgi tuljavi, povzročitelji polja pa so orientirane Ampèrove zankice s tokom okrog vektorja **M**.

♣ O grafičnih rešitvah z drugačnimi histereznimi pentljami (slika 48.7) naj bralec razmisli sam. ♣

Spremembe dimenzij v prvem in drugem Michelsonovem poskusu se mi vendarle ne zdijo tako nemogoče. Kaj določa velikost in obliko trdnega telesa? Jakost molekularnih sil, seveda. Karkoli bi spremenilo te sile, bi povzročilo tudi spremembo oblike in dimenzij telesa. Danes z dovolj veliko gotovostjo predpostavljamo, da električne in magnetne sile delujejo preko etra. Ni predrzno, če isto predpostavimo še za molekularne sile. Če pa je temu tako, potem je lahko še kako pomembno, ali zveznica med dvema materialnima točkama leži vzporedno ali pravokotno glede na smer njunega gibanja.

Lorentz

VI. POGLAVJE

Dinamično elektromagnetno polje

52. Uvod v elektrodinamiko

Področje elektrodinamike je nedeljivo povezano z dvema eminentnima fizikoma sredine XIX. stoletja, z Michaelom Faradayem in Jamesom Clerkom Maxwellom. Prvi se je proslavil z indukcijskim zakonom in "filozofijo" o električnem in magnetnem polju, drugi pa s "fantastično" intuitivno dopolnitvijo in strnitvijo temeljnih elektromagnetnih zakonitosti v konsistentno celoto.

V naših izvajanjih – kot je bilo že rečeno – sledimo obenem tudi zgodovinskemu toku dogodkov (izsledkov), tako da lahko elektrodinamiko razumemo kot nadgradnjo stacionarnih polj; v resnici pa je ravno obratno: stacionarna polja so le poseben primer splošnega elektromagnetnega polja. Končno tudi vsako stacionarno stanje dosežemo le po predhodnem dinamičnem prehodnem pojavu. V smislu zgodovinskih sledi obnovimo (v kratkem) prehojeno pot.

V elektrostatiki toka ni bilo ($J = 0$); v glavnem smo se srečevali s prostimi elektrinami, ki so bile – skoraj praviloma – presežne elektrine na površinah prevodnih teles, seznanili pa smo se tudi z vezanimi oz. polarizabilnimi elektrinami v dielektrikih. V izolatorju so se te – pod vplivom polja električnih sil – formirale v dipole s pripadajočo volumsko gostoto polarizacije $\mathbf{P}$. V nadaljevanju smo $\mathbf{P}$ navezali na vektor električnega pretoka ($\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$), ki je oslonjen izključno na proste elektrine, tiste torej, ki se morejo po prostoru makroskopsko gibati v obliki konduktivnega (v prevodnikih) ali konvektivnega toka (npr. kot curek elektronov).

V časovno konstantnem tokovnem polju ($\partial/\partial t \equiv 0$) se je pokazalo, da "igrata" glavno vlogo tokovna gostota $\mathbf{J}$ in polje $\mathbf{E}$ v prevodnikih; sopotno z njim se v izolatorju "razvije" tudi električno polje ($\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$ in $\mathbf{D}$), po celotnem prostoru pa še magnetno polje ($\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$). Za električno polje površina prevodnika sicer ni več ekvipotencialka, proste presežne elektrine pa še vedno ostajajo na površinah teles kot časovno konstantno porazdeljene; slednje velja tudi za vezano polarizabilno elektrino. Reakcijo magnetika v magnetnem polju smo opisali z mikroskopskimi Ampèrovimi toki in k njim prirejenim vektorjem magnetizacije $\mathbf{M}$. V nadaljevanju smo vektorja $\mathbf{B}$ in $\mathbf{M}$ strnili v vektor magnetne poljske jakosti ($\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$), ki je bil – kot tak – izključno vezan na sklenjene makroskopske toke (tokovne strukture) v konduktivnih povezavah.

Ni težko predvidevati, da se bo v dinamičnem – časovno spremenljivem – polju moralo verjetno marsikaj radikalno spremeniti. V osmem razdelku smo časovno spremenljivo –

torej dinamično – polje opredelili s stanjem povzročiteljev (elektrin in tokov), ki jih veže splošen ohranitveni zakon,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv$$

Če sedaj dopustimo skrajno možnost, da se tok skozi sklenjeno ploskev časovno spreminja, torej $i(t)$ in $\mathbf{J}(T,t)$, s tem pa se spreminja tudi – do sedaj stalna – porazdelitev elektrin, torej $\rho(T,t)$, potem bodo tudi naša vektorska polja – ki so bila do tu časovno konstantna – nekako "oživela": $\mathbf{E}(T,t)$, $\mathbf{P}(T,t)$, $\mathbf{D}(T,t)$, $\mathbf{B}(T,t)$, $\mathbf{M}(T,t)$, $\mathbf{H}(T,t)$. Vrsta do sedaj poznanih korelacij bo resda ostala nespremenjena, nekatere med njimi pa bodo potrebne določenih "revizij" in popravkov.

Snovne lastnosti v časovno spremenljivem polju. Snovne lastnosti se nanašajo na makroskopsko obnašanje snovi v električnem in magnetnem polju. Glede električnega polja ($\mathbf{E}$) smo snovi razvrstili med prevodnike in izolatorje, glede magnetnega polja ($\mathbf{B}$) pa na magnetne (feromagnetne) in nemagnetne (vse dia- in paramagnetne) snovi. Modelna slika mikroskopskih dogajanj je vedno slonela na opazovanju učinka Coulombove ali Ampèrove sile na delce v atomarni (kristalni) ali molekularni zgradbi. Tako meritve kot teoretični modeli (pa) kažejo, da se "atomarni in molekularni svet" sorazmerno hitro odzivata na spremembe polja $\mathbf{E}$ oz. $\mathbf{B}$. Rekli bi lahko, da je čas prilagoditve mikroskopskega sveta na zunanje spremembe kratek, če že ne kar hipen; če se spomnimo le na relaksacijski čas (10^{-14} s) pri prevodnikih – v okviru Ohmovega zakona. Resnično: v prevodnikih velja Ohmov zakon praktično za poljubne časovne oblike polja, kar smo takrat tudi izpostavili, $\mathbf{J}(T,t) = \gamma \mathbf{E}(T,t)$.

Nekoliko drugače je z dielektričnostjo izolatorjev. "Najokornejša" je dipolska polarizacija, ki je vezana na obračanje in premikanje dipolskih molekul, najbolj "gibka" pa je elektronska polarizacija. Dinamične lastnosti izolatorjev se običajno podajajo v odvisnosti od frekvence harmonično vzbujanega polja, $E(t) = E_0 \cos \omega t$, $\omega = 2\pi f$, E_0-amplituda, f-frekvenca. Dielektričnost je največja v nizkofrekvenčnem področju. V mikrovalovnem področju kot prva "odpove" dipolska polarizacija – molekule ne sledijo več hitrim spremembam – v infrardečem področju "odpove" ionska in v ultravioletnem odpoveduje še elektronska polarizacija. Poleg tega nastopi pri izolatorjih še en moment: pojavijo se t.i. *dielektrične izgube*, ki so posledica dodatnega nihanja nabitih delcev okrog ravnovesne lege, kar se manifestira v povečani notranji energiji. Tem izgubam moremo predpisati frekvenčno odvisno specifično električno prevodnost $\gamma(\omega)$. Celotne prevodnostno-dielektrične lastnosti izolatorjev se običajno podajajo s t.i. *tangensom izgubnega kota* δ: $\tan \delta(\omega) = \gamma(\omega)/\omega\varepsilon(\omega)$.

O magnetikih v izmeničnem polju bomo še govorili (beseda bo tekla o histereznih in vrtinčnih izgubah), vendar se moramo predhodno seznaniti s Faradayevo indukcijo. Sicer pa prihaja – tudi pri magnetikih v izmeničnem polju – še do dodatnih efektov (npr. frekvenčno odvisne magnetizacije), ki za splošno elektrotehniko niso zanimivi, sama obravnava pa sodi izključno v kvantno fiziko.

Za našo nadaljnjo pot bomo nakazano problematiko snovnih parametrov ε, γ in μ "zaobšli" – smatrali jih bomo kot frekvenčno neodvisne – pri tem pa ta privzetek ne bo šel v ničemer na škodo opisa zakonitosti dinamičnega polja.

Polarizacijski tok. V časovno spremenljivem električnem polju se praktično "sočasno"

s poljem $\mathbf{E}$ spreminja tudi vektor polarizacije $\mathbf{P}$. Če polarizaciji $\mathbf{P}$ v prostorninici δv priredimo točkasti dipol z momentom $\delta\mathbf{p} = \mathbf{P}\delta v = \delta Q_{\text{pol.}}\mathbf{d}$, potem se v spremenljivem polju $\mathbf{E}$ (sočasno z njim) spreminja tudi razmak $\mathbf{d}$ med raznoimenskima elektrinama ($\pm\delta Q_{\text{pol.}}$). Če se vektor $\mathbf{E}$ spreminja izmenjaje med $\mathbf{E}_0$ in $-\mathbf{E}_0$, potem se med $\mathbf{d}_0$ in $-\mathbf{d}_0$ spreminja $\mathbf{d}$ in med $\delta\mathbf{p}_0$ in $-\delta\mathbf{p}_0$ tudi moment $\delta\mathbf{p}$. Elektrini $\pm\delta Q_{\text{pol.}}$ se lokalno premikata s hitrostima $\pm\dot{\mathbf{d}}/2$ (v nasprotnih smereh) in ustvarjata mikroskopski tok ($\delta i_{\text{pol.}}$) polariziranih elektrin. Pa vzemimo, da vsako od modelnih elektrin smatramo kot oblaka z gostotama $\pm\rho_{\text{pol.}}$ v prostorninici δv. Po enačbi 6.1 bi *gostota polarizacijskega toka*[1] $\mathbf{J}_{\text{pol.}}$ bila:

$$\mathbf{J}_{\text{pol.}} = \rho_{\text{pol.}}\frac{\dot{\mathbf{d}}}{2} + (-\rho_{\text{pol.}})\left(-\frac{\dot{\mathbf{d}}}{2}\right) = \rho_{\text{pol.}}\dot{\mathbf{d}}$$

Ker pa je $\rho_{\text{pol.}}$ enak $\delta Q_{\text{pol.}}/\delta v$, je

$$\boxed{\mathbf{J}_{\text{pol.}} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}} \tag{52.1}$$

kjer smo navaden odvod že zamenjali s parcialnim, saj je $\mathbf{P}$ v splošnem krajevno-časovna funkcija.

Ta – polarizacijski – tok pa ni v ničemer "slabši" od konduktivnega toka v žicah, še več: če so časovne spremembe periodične, tudi prosta elektrina v prevodniku nikamor ne "pride" – le niha okrog "izhodiščne" lege. Če smo v prejšnjem poglavju govorili, da konduktivnemu in konvektivnemu toku ter toku magnetizacije pripada magnetno polje, potem pripada tudi toku $i_{\text{pol.}}$ to polje (razdelek 56).

S polarizacijskim tokom smo torej spoznali še "zadnjega" v sistematični razvrstitvi tokov, o čemer smo govorili že v 6. in 7. razdelku. Če jih ponovimo še enkrat, ločimo: i) konduktivni tok ($i_{\text{kond.}}$) v prevodnikih (in slabih izolatorjih), ii) konvektivni tok ($i_{\text{konv.}}$) v plinih (in vakuumu), iii) Ampèrove toke magnetizacije ($i_{\text{mag.}}$) v magnetikih (feromagnetikih) in iv) polarizacijske toke ($i_{\text{pol.}}$) v izolatorjih (dielektrikih)[2].

Če so časovne spremembe teh tokov "relativno počasne", potem moremo za določitev njim pripadajočega magnetnega polja – posredno ali neposredno – uporabljati Biot-Savartov zakon. Vprašanje, ki se ob tem postavlja, je prav ta relativna počasnost oz., kaj smatrati kot relativno počasno?

---

[1] V razdelku 17 smo definirali gostoto električnega momenta $\mathbf{P}$ kakršnihkoli (vezanih ali prostih) elektrin; $\mathbf{P} = \rho\mathbf{r}$. Če se oblak elektrin z gostoto ρ giblje, je odvod krajevnega vektorja $\mathbf{r}$ ravno hitrost $\mathbf{v}$. Po enačbi 6.1 bi gostota toka $\rho\mathbf{v}$ premikajočega oblaka bila ravno $\partial\mathbf{P}/\partial t$, kar je vsebinsko isto kot (52.1).

Do polarizacijskega toka lahko pridemo tudi na tale način. V 20. razdelku smo pri vpeljevanju vektorja $\mathbf{D}$ ugotovili, da je

$$-\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P}\cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{pol. znotraj } \mathcal{A}}$$

Če je električno polje časovno spremenljivo, potem vezane elektrine tik ob ograji $\mathcal{A}$ le-to lokalno prestopajo. Po ohranitvenem zakonu je tok $i_{\text{pol.}}$, ki s ploskvijo $\mathcal{A}$ ograjeno območje zapušča, enak upadku vezane elektrine znotaj $\mathcal{A}$:

$$i_{\text{pol.}} = -\frac{dQ_{\text{pol. znotraj}\mathcal{A}}}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P}\cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{\text{pol.}}\cdot d\mathbf{a}$$

kar spet korespondira z relacijo 52.1.

[2] Ob tem pa le pripomnimo, da je delitev povsem umetna, kajti v vsakem primeru gre za gibanje elektrin, razloček je le v načinu njihove (ne)vpetosti v atomarni zgradbi snovi.

Kvazistatično polje[3]**.** Tu bomo dogodke nekoliko prehitevali, pa vendar. Vsakdo iz fizike ve, da se kakršnakoli motnja ali vpliv – od enega na drugo mesto – v prostoru ne "prenese" trenutno, ampak s hitrostjo, ki je manjša ali kvečjemu enaka svetlobni. (Kasneje bomo videli, da velja ta omejitev tudi za elektromagnetne vplive.)

V dani tokovni strukturi (vezju) privzemimo, da se porazdelitve elektrin in tokov časovno spreminjajo. Posamezni količini naj pripada nek (diskreten ali zvezen) frekvenčni spekter . Naj je f_m zgornja frekvenca v spektru, od katere dalje niso (vse višje) več omembe vredne. Če je tako, potem je s kvazistatičnostjo takole: če so prostorske razsežnosti omenjenih struktur majhne v primerjavi z $\lambda_\mathrm{m} = c/f_\mathrm{m}$ (c-svetlobna hitrost, λ_m-valovna dolžina), potem moremo njim prirediti t.i. *kvazistatično magnetno polje* z uporabo Biot-Savartovega zakona. Enak kriterij velja tudi za uporabo Coulombove zakonitosti električnega polja v izolatorju; govorimo o *kvazistatičnem električnem polju*.

Če je kriterij kvazistatičnosti zagotovljen, potem so izrazi za pripadajoča polja identični že izvedenim, le da do sedaj časovno konstantne količine zamenjamo s časovno spremenljivimi.

Vzemimo primer koaksialnega kabla, ki vodi tok $i(t)$; med žilo in plaščem bodi napetost $u(t)$, radija žile in plašča naj sta ρ_n in ρ_z. V izolatorju sta polji $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$ določeni s prečnima komponentama:

$$E_\rho(\rho,t) = \frac{u(t)}{\ln\dfrac{\rho_\mathrm{z}}{\rho_\mathrm{n}}}\,\frac{1}{\rho} \qquad\qquad B_\varphi(\rho,t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi\rho}$$

podobno je tudi s potencialom: $V(\rho,t) = u(t)\ln(\rho_\mathrm{z}/\rho)/\ln(\rho_\mathrm{z}/\rho_\mathrm{n})$. Poglejmo še, kaj je s polarizacijskim tokom, če je izolator z dielektričnostjo ε_r:

$$J_{\mathrm{pol.}\rho}(\rho,t) = \frac{\partial P_\rho}{\partial t} = (\varepsilon_\mathrm{r}-1)\varepsilon_0\frac{\partial E_\rho}{\partial t} = \frac{(\varepsilon_\mathrm{r}-1)\varepsilon_0}{\rho\ln\dfrac{\rho_\mathrm{z}}{\rho_\mathrm{n}}}\,\frac{du(t)}{dt}$$

Vzemimo, da je napetost $u(t)$ harmonična, z amplitudo U, s frekvenco f in krožno frekvenco $\omega = 2\pi f$: $u(t) = U\sin\omega t$. Gostota toka bo:

$$J_{\mathrm{pol.}\rho}(\rho,t) = \frac{\omega(\varepsilon_\mathrm{r}-1)\varepsilon_0 U}{\rho\ln\dfrac{\rho_\mathrm{z}}{\rho_\mathrm{n}}}\cos\omega t$$

Na dolžini enega metra kabla bo polarizacijski tok ustrezal izrazu

$$\omega\frac{2\pi(\varepsilon_\mathrm{r}-1)\varepsilon_0}{\ln\dfrac{\rho_\mathrm{z}}{\rho_\mathrm{n}}}\,U\cos\omega t = \omega c\frac{\varepsilon_\mathrm{r}-1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\,U\cos\omega t$$

Kapacitivnosti kablov (c) so reda nekaj deset do nekaj sto pF/m; pri $\omega = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$ in napetost U nekaj voltov je amplituda polarizacijskega toka reda nekaj deset ali sto μA.

[3]Vprašanje kvazistatičnosti pa le ni tako preprosto, kot je tu v kratkem "odpravljeno". Podrobnejše razmišljanje zahteva namreč nekoliko več matematičnega orodja kot pa ga je trenutno (na tem nivoju) na voljo.

Za kak energetski kabel, ki ima toke reda kA in napetosti nekaj kV (pri $f = 50$ Hz), polarizacijski tok praktično ni upoštevanja vreden; magnetno polje je v izključni domeni konduktivnega toka v žilah.

Nekoliko drugače je v primeru, ko je v zanki (veji) toka $i(t)$ kondenzator. Zaradi preprostosti in nazornosti vzemimo kar ploščni kondenzator $(S, d, \varepsilon_\mathrm{r})$. Po ohranitveni enačbi bo elektrina $Q(t)$ na plošči, do katere teče tok, z njim v naslednji relaciji: $i(t) = dQ(t)/dt$, oz. $i(t) = Cdu(t)/dt$. ♣ Bralec bo s kratkim računom preveril, da je $i_\mathrm{pol.}(t) = (\varepsilon_\mathrm{r}-1)i(t)/\varepsilon_\mathrm{r}$. ♣ Polarizacijski tok moremo modelirati kot kratek tokovni element $i_\mathrm{pol.}d$, ki pri majhni razdalji med ploščama ne pomeni bistvenega prispevka k integraciji po celotni zanki toka $i(t)$. Spet lahko rečemo, da je magnetno polje v izrecni domeni konduktivnega toka v zanki, zato ga bomo računali tako, kot da konduktivni tok ne bi bil prekinjen.

V področju kvazistatičnosti bomo zato Ampèrov zakon toka uporabljali "praktično" brez zadržkov; pisali bomo:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum \text{konduktivnih tokov skozi opno } \mathcal{A} \text{ na pentlji } \mathcal{L}$$

V vsoti na desni bomo polarizacijske toke v izolatorju zanemarili, konduktivne toke v zankah pa bomo, navkljub morebitni kondenzatorski prekinitvi, smatrali kot sklenjene.

S tem slednjim – Ampèrovim zakonom toka namreč – pa smo "zadeli" v témo in "zagonetko", ki jo je prvi razvozlal J. C. Maxwell; Ampèrov zakon toka se namreč nanaša na sklenjene konduktivne toke, splošni električni toki pa vobče niso takšni (o tem bo govora v razdelku 56).

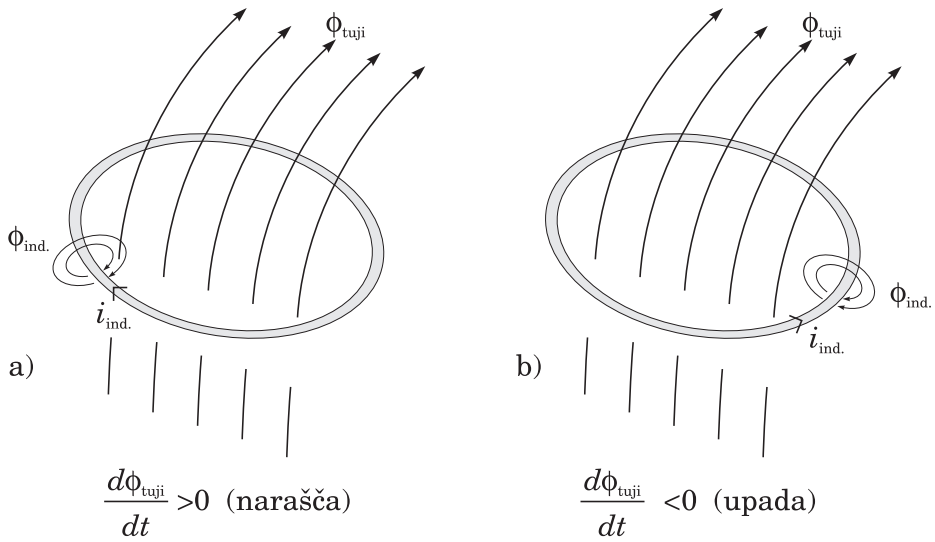
53. Faradayev zakon indukcije

M. Faradaya je okupiralo naslednje vprašanje: električno polje $\mathbf{E}$ ustvarja preko gostote $\mathbf{J}$ magnetno polje $\mathbf{B}$ – kaj pa obratno? Resnično, leta 1831 je ugotovil, da se v sklenjeni prevodni (konduktivni) zanki *inducira* električni tok, če se magnetno polje bližnje (tuje) tokovne strukture časovno spreminja. Ugotovil je tudi, da je jakost induciranega toka v zanki sorazmerna časovni spremembi tujega fluksa skozi zanko, in še dalje, da pri tem ni pomembno, kako se ta časovna sprememba doseže: ali s časovnim spreminjanjem toka v bližnji tokovni strukturi (vklop ali izklop tokokroga) ali pa z gibanjem (premikanjem, vrtenjem) zanke npr. v časovno konstantnem magnetnem polju tako, da se pri tem količina s konturo (zanko) objetega fluksa časovno spreminja. V zanki se inducirani tok pojavi prav tako tudi v primeru, ko vlogo bližnjega tokokroga prevzame trajen magnet s svojim magnetnim poljem in se ta in zanka med seboj relativno premikata.

Istega leta je Faraday izdelal tudi enosmerni generator, ki je baziral na njegovem odkritju. Izvedel ga je z bakrenim diskom, ki se je vrtel med poloma trajnega magneta. V galvanskem krogotoku, ki je bil vpet med osjo in obodom diska, je tak generator poganjal stalen istosmerni električni tok. To ga je navajalo na misel, da se v disku pojavi t.i. *elektromotorna sila*, ki (kot generatorska napetost v enosmernih tokokrogih) poganja tok v krogotoku (Zgled 53.4). Omenjeno elektromotorno silo imenujemo tudi *inducirana napetost* ($u_\mathrm{ind.}$), njen posledični tok pa *induciarni tok* ($i_\mathrm{ind.}$).

Leta 1834 je ruski fizik Emil H. Lenz podal navodilo za določitev smeri induciranega toka (napetosti) v zanki: induciran tok v zanki se vzpostavi vedno tako, da se magnetni

fluks ($\phi_{\text{ind.}}$) tega induciranega toka upira časovni spremembi vzročnega fluksa (ϕ_{tuji}) v zanki; slika 53.1.

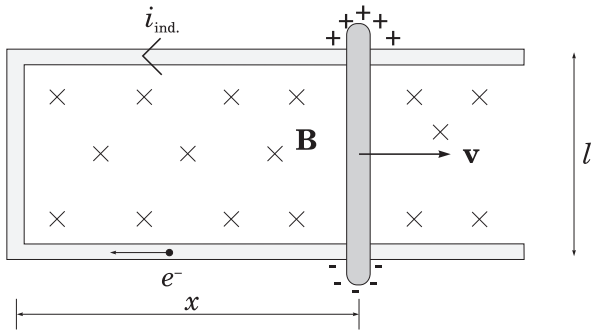


Slika 53.1: Smer induciranega toka v primeru priraščanja ali upadanja tujega fluksa označene smeri.

Naslednje spoznanje o (elektromagnetni) indukciji se navezuje na pojav t.i. *samoindukcije*, ki sta ga neodvisno drug od drugega zaznala tako Faraday (na Otoku, l. 1834) kot Joseph Henry (preko Atlantika, že l. 1832). Ugotovila sta namreč, da se inducirana napetost ne pojavi le kot posledica časovne spremembe tujega magnetnega pretoka v zanki, pač pa tudi kot posledica časovne spremembe magnetnega pretoka toka lastne zanke. Kratkomalo: inducirana napetost v zanki je posledica časovne spremembe celotnega (rezultančnega) fluksa v zanki.

Inducirana napetost. Leta 1845 je nemški fizik F. Neumann (1798-1895) vse eksperimentalne ugotovitve o indukciji strnil v zaključek: če se skozi sklenjeno zanko magnetni fluks ϕ časovno spreminja, potem se v zanki inducira napetost ($u_{\text{ind.}}$), ki je sorazmerna časovni spremembi fluksa ($d\phi/dt$), po smeri pa ustreza Lenzovemu pravilu (upiranja). Kasneje se je pokazalo, da nista $u_{\text{ind.}}$ in $d\phi/dt$ le sorazmerna, ampak tudi enaka po absolutnem iznosu.

Nemalo avtorjev prične obravnavo elektromagnetne indukcije drugače, kot se je ta fenomen zgodovinsko odvijal. Razmislek poteka na način, ki je soroden Hallovemu pojavu. Tam se nosilci toka gibajo v magnetnem polju in deluje na njih magnetna sila $\delta\mathbf{F}_{\text{m}} = \delta Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Povsem enakovredno bi premikanje nosilcev dosegli z gibanjem npr. kovinske palice, ki bi jo "mehanska roka" premikala v magnetnem polju; slika 53.2. Na proste elektrone bi v palici delovala sila $-e(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, ki bi jih potiskala na spodnji konec palice in naprej po okviru proti zgornjemu koncu; v zanki bi se (pojavil) induciral električni tok ($i_{\text{ind.}}$) v nasprotni smeri. Produktu $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ bi mogli prirediti ekvivalentno razdvajalno inducirano poljsko jakost $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$, ki bi v palici kazala navzgor in bi imela enako funkcijo kot $\mathbf{E}_{\text{g}}$ pri napetostnem viru. Napetost takšnega vira bi bila (pri narisanih pravokotnih razmerah) enaka vBl; v smislu inducirane (elektromotorne) sile bi to napetost poimenivali kot inducirano napetost ($u_{\text{ind.}}$). Na gibajočo palico bi delovala tudi magnetna Ampèrova sila ($i_{\text{ind.}}Bl$); ta bi učinkovala zaviralno; zunanja sila bi morala opravljati delo, da bi vzdrževala "oživljen" električni krogotok.



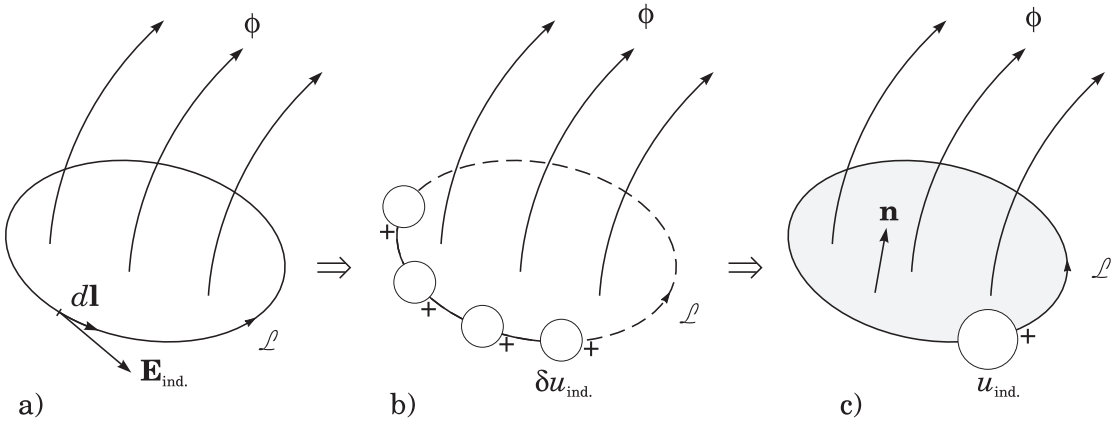
Slika 53.2: Drsenje palice po kovinskih vodilih prečno na smer magnetnega polja.

Za konec tega vložka pa le še ena interpretacija. Z gibanjem palice se magnetni fluks (ϕ) v zanki povečuje sorazmerno s hitrostjo. V intervalu δt je $\delta\phi = vBl\,\delta t = u_{\text{ind.}}\,\delta t$; iznos inducirane napetosti ustreza "hitrosti" spreminjanja fluksa v zanki.

Inducirana napetost ($u_{\text{ind.}}$) je generirana napetost, ki jo moremo predstaviti s pripadajočo *inducirano (generirano) poljsko jakostjo* ($\mathbf{E}_{\text{ind.}}$) in bo v induciranem polju imela podobno vlogo kot generatorska jakost $\mathbf{E}_{\text{g}}$ v napetostnem viru. Trenutno o inducirani jakosti ne vemo skoraj nič, vemo le to, da je njen krivuljni integral po sklenjeni konturi (zanke) $\mathcal{L}$ enak $u_{\text{ind.}}$,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l} = u_{\text{ind.}}} \tag{53.1}$$

Ta generatorska poljska jakost gotovo ni skoncentrirana le na enem segmentu tokokroga, ampak je porazdeljena po celotni konturi; na diferencialu konture ($\mathcal{L}$) moremo govoriti o diferencialu napetosti $du_{\text{ind.}} = \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l}$. Celotno inducirano napetost bi mogli predstaviti z nizom (zaporednih) parcialnih generatorjev z napetostmi $\delta u_{\text{ind.}}$ ali pa kot enega samega – koncentriranega; slika 53.3. Tako označen vir bi generiral induciran tok v smeri obhoda



Slika 53.3: Modeliranje inducirane napetosti s koncentriranim generatorjem.

po konturi $\mathcal{L}$.

Da bi Faradayev zakon matematično korektno zapisali, si glede na smer obhoda izberemo pozitivno smer normale ($\mathbf{n}$) opne $\mathcal{A}$, ki je napeta nanjo. Opna more biti katerakoli –

to smo ugotovili v razdelku 43. Fluks ϕ skozi opno (zanko) bi zapisali:

$$\phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Po dikciji Faradayeve indukcije (da se inducirano polje upira spremembi) in glede na desno pravilo določitve pozitivnosti smeri ploskve glede na obhod po njenem robu, skica c), bi odnos med $u_{\text{ind.}}$ in ϕ, oz. odnos med $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ in $\mathbf{B}$, zapisali takole:

$$\boxed{u_{\text{ind.}} = -\frac{d\phi}{dt}} \tag{53.2}$$

ali

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}} \tag{53.2a}$$

Preverimo! Na skici c) bo induciran tok stekel v smeri obhoda, če bo $u_{\text{ind.}} > 0$, kar po enačbi 53.2 pomeni, da bo to takrat, ko bo fluks v narisani smeri usihal ($d\phi/dt < 0$), induciran fluks pa se bo tej spremembi očitno upiral; skica b) na sliki 53.1. V nasprotnem, ko bi se fluks v zanki krepil ($d\phi/dt > 0$), bi po enačbi 53.2 bila $u_{\text{ind.}} < 0$; induciran tok bi stekel v obratni smeri in s svojim poljem spet "zaviral" spremembo zadevnega fluksa; skica a) na sliki 53.1.

Zgled 53.1

Imejmo homogeno magnetno polje gostote $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, ki se harmonično spreminja: $B_z(t) = B_{z0} \cos \omega t$. V to polje – v ravnino $z = 0$ – vnesemo tanek kovinski obroč polmera ρ_0. Obroč bo zajel fluks $\phi(t) = \pi\rho_0^2 B_{z0} \cos \omega t$. Po enačbi 53.2 bo $u_{\text{ind.}} = \omega\pi\rho_0^2 B_{z0} \sin \omega t$. Tudi inducirana napetost bo harmonična – z amplitudo $U_{\text{ind.}} = \omega\pi\rho_0^2 B_{z0}$.

Vzemimo: $f = 1$ kHz, $B_{z0} = 1$ mT in $\rho_0 = 10$ cm; dobimo: $U_{\text{ind.}} \doteq 0.2$ V. Če bi bila upornost obroča 1 Ω, bi tekel v njem tok $i_{\text{ind.}} = I_{\text{ind.}} \sin \omega t$ z amplitudo $I_{\text{ind.}} \doteq 200$ mA. Ta tok bi tik ob žici debeline npr. 1 mm ustvarjal gostoto 80 μT, v centru ovoja pa ~ 1 μT, kar v primerjavi z B_{z0} ne pomeni veliko – zanemarljiva samoindukcija. Zaradi očitne rotacijske simetrije bi $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ imel le φ-komponento: $E_{\text{ind.}\varphi} = u_{\text{ind.}}/2\pi\rho_0 \doteq 0.318 \sin \omega t$ V/m.

♣ Bralec naj premisli, kako bi bilo z inducirano napetostjo, če bi bilo polje časovno konstantno (in homogeno), zanka pa bi se vrtela s frekvenco f okrog (simetralne) osi, ki bi bila pravokotna na $\mathbf{B}$. Je kakšna podobnost? Je kakšna razlika? ♣

Druga Maxwellova enačba. Zaenkrat govorimo o inducirani napetosti in inducirani poljski jakosti. Ta pa ni edina; k njej moremo imeti superponirano še kakršnokoli poljsko jakost kvazistatičnega polja prostih (presežnih) ali vezanih elektrin; da bi se razlikovali, označimo slednjo z $\mathbf{E}_{\text{sta.}}$. Celotno električno polje $\mathbf{E}$ je s tem njuna vektorska vsota: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{sta.}} + \mathbf{E}_{\text{ind.}}$. Coulombovo polje elektrin pa ima to lastnost, da je njen sklenjen krivuljni integral vedno enak nič,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{sta.}} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Če to združimo z enačbo 53.2a, dobimo

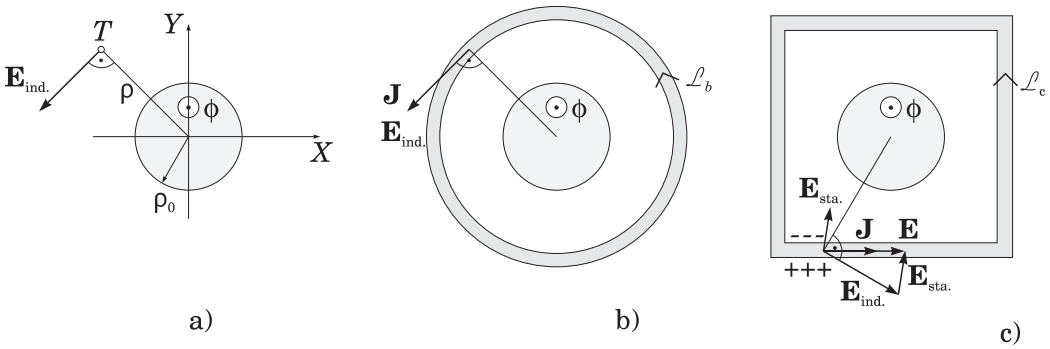
$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}} \tag{53.3}$$

Slednja je t.i. *II. Maxwellova enačba*, ki v bistvu zajema Faradayev izsledek. Avtorstvo Maxwella je prvenstveno v tem, da jo je on kot prvi zapisal v tej obliki, in v tem, da jo je uvrstil med "svoje" štiri temeljne zakone elektromagnetnega polja.

♣ Bralec sedaj verjetno že opaža razliko med lastnostjo krivuljnega integrala $\mathbf{E}_{\text{sta.}}$ oz. $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$. Prvo polje je vedno nevrtinčno, $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{sta.}} \cdot d\mathbf{l} = 0$, novo – inducirano – polje pa je praviloma vrtinčno, $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. ♣ To enačbo moremo sprejeti kot temeljno posplošitev lastnosti polja $\mathbf{E}$, ki je bilo do Faradaya zaznamovano kot nevrtinčno, v časovno spremenljivem polju pa postane v splošnem vrtinčno.

Inducirano elektrostatično polje. Rezultirajoče polje $\mathbf{E}$ je torej enako vsoti $\mathbf{E}_{\text{sta.}} + \mathbf{E}_{\text{ind.}}$. Če se prevodnik nahaja v takšnem polju, bo tokovna gostota $\mathbf{J}$ enaka $\gamma(\mathbf{E}_{\text{sta.}} + \mathbf{E}_{\text{ind.}})$. Zapis je soroden razširjenemu Ohmovemu zakonu, kjer vlogo $\mathbf{E}_{\text{g}}$ prevzema $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$, pri tem pa je o $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ znano le to, kolikšen je njen integral ($u_{\text{ind.}}$); tudi pri $\mathbf{E}_{\text{g}}$ nismo vedeli kaj več od tega. Krenimo v to smer postopoma!

Vzemimo feromagnetni steber krožnega prereza, znotraj katerega magnetni fluks enakomerne gostote harmonično niha, $\phi(t) = \phi_0 \cos \omega t$; slika 53.4. Po enačbi 53.2 bi za $u_{\text{ind.}}$



Slika 53.4: $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ v okolici "cilindričnega" fluksa.

na krožni koncentrični konturi polmera ρ dobili:

$$u_{\text{ind.}}(t) = u_{\text{ind.}} = -\frac{d}{dt} \int_{(\pi\rho^2)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \begin{cases} -\dfrac{d}{dt} \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \phi_0 \cos \omega t & \rho < \rho_0 \\[2ex] -\dfrac{d}{dt} \phi_0 \cos \omega t & \rho \geq \rho_0 \end{cases}$$

oz.

$$u_{\text{ind.}} = \begin{cases} \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \omega \phi_0 \sin \omega t & \rho < \rho_0 \\[2ex] \omega \phi_0 \sin \omega t & \rho \geq \rho_0 \end{cases}$$

Zaradi rotacijske simetrije bo $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ imel le φ-komponento,

$$E_{\text{ind.}\varphi} = \frac{u_{\text{ind.}}}{2\pi\rho} = \begin{cases} \dfrac{\omega\phi_0}{2\pi\rho_0^2}\,\rho\sin\omega t & \rho < \rho_0 \\[2ex] \dfrac{\omega\phi_0}{2\pi\rho}\,\sin\omega t & \rho \geq \rho_0 \end{cases}$$

Radialna odvisnost nas močno spominja na porazdelitev magnetnega polja v/ob vodniku polnega krožnega prereza; znotraj narašča linearno, zunaj pa upada kot $1/\rho$.

Večkrat smo že rekli, da o obliki polja $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ ne moremo kaj veliko reči; gotovo pa je nekaj: čeravno inducirano napetost zaznamo (izmerimo) tako, da fluks objamemo s prevodno konturo (in merimo tok), pa polje $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ ne more biti odvisno od konture; to je imanentno le spremenljivemu magnetnemu polju.

Oklenimo steber s krožno koncentrično konturo, skica b), in nato še s kvadratno konturo, skica c). Induciran tok nima druge "izbire", kot da teče vzdolž konture ovoja. Pri krožni zanki "problema" ne bo. Za $\mathbf{J}$ pišimo $\gamma(\mathbf{E}_{\text{sta.}} + \mathbf{E}_{\text{ind.}})$. Zaradi rotacijske simetrije bi moral biti $E_{\text{sta.}\varphi}$ enak po celotnem obodu, kar bi pomenilo, da je $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\text{sta.}} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$; to pa ne more biti, saj statično polje ni takšno $\Rightarrow$ $E_{\text{sta.}\varphi} = 0$ in $J_\varphi = \gamma E_{\text{ind.}\varphi}$.

Drugače je v primeru konture $\mathcal{L}_c$ na skici c). Inducirano polje je krožnosimetrično, in $\mathbf{J}$ je vzdolž konture; to pomeni, da mora biti v tej smeri tudi vsota $\mathbf{E}_{\text{sta.}} + \mathbf{E}_{\text{ind.}}$. Statično polje mora biti na vsakem mestu konture tolikšno, da bo polje $\mathbf{E}$ (kot vsota) tangencialno po obodu. Pojavi se vprašanje, od kje to polje, saj ni nikjer potrebnih presežnih elektrin. Resda jih ni, se pa (zaradi $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$) zato prosti elektroni iz prevodnika razporedijo po površini vodnika tako, da je sumarno polje v prevodniku tangencialno – v smeri toka. Problematika spominja na polarizacijo prevodnika v zunanjem elektrostatičnem polju (razdelek 18); tam so se proste elektrine porazdelile tako, da je bilo polje znotraj nič, tu pa se bodo tako, da bo izpolnjen Ohmov zakon: $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} = \gamma(\mathbf{E}_{\text{sta.}} + \mathbf{E}_{\text{ind.}})$. Za situacijo, kot je prikazana na skici c), bodo – ob opazovani točki v vodniku – na zunanji strani ovoja presežki (+), na notranji pa presežki (−) elektrine.

Ta preprost primer kaže na naslednje. Elektrostatično polje v induciranih poljih ni nujno določeno samo z elektrinami, ki bi bile kot "dodatek", ki bi ga "postavili" k osnovni nalogi, ampak se v dinamičnih razmerah to polje – posredno z $\mathbf{E}_{\text{ind.}}$ – izzove. ♣ Bralec naj v zvezi s tem premisli, kaj bi se v primeru s skice b) zgodilo, če bi ob krožni ovoj prinesli točkasto elektrino; ali bi se tok v ovoju spremenil; kako bi se prosta elektrina obroča influirala na površini; in kaj bi bilo, če bi bil obroč že sam po sebi naelektren? ♣

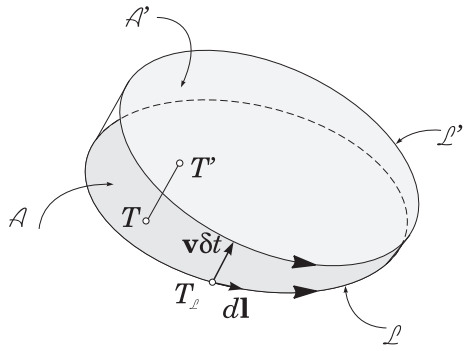
Transformatorska in gibalna inducirana napetost. Enačba $u_{\text{ind.}} = -d\phi/dt$ je splošna in se nanaša na kakršnokoli spremembo magnetnega pretoka v zanki – pa četudi je ta časovna sprememba dosežena z relativnim gibanjem zanke glede na magnetno polje. V zvezi s tem bomo ločili dva načina induciranja: i) *transformatorski način*, pri katerem fizične strukture mirujejo in se gostota $\mathbf{B}$ časovno spreminja, in ii) *gibalni način*, pri katerem se oblika in/ali lega fizičnih struktur spreminja. Enega in drugega načina induciranja sta se omenjena termina "prijela" pač zato, ker sta transformator in generator (ali motor) dve klasični tehnični aplikaciji, ki bazirata na Faradayevi zakonitosti.

Srž nakazanega razločka sloni na razčlenitvi časovnega odvoda ploskovega integrala $\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$, ko se kontura $\mathcal{L}$, na katero je opna $\mathcal{A}$ napeta, relativno giblje glede na ostalo

fizično strukturo. Kontura $\mathcal{L}$ in opna $\mathcal{A}$ bosta potemtakem časovni funkciji; $\mathcal{L}(t)$ in $\mathcal{A}(t)$. Zanimal nas bo torej odvod

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}(t)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$$

pri čemer naj sta kontura $\mathcal{L}$ in opna $\mathcal{A}$ poznana v vsakem trenutku, in prav tako tudi polje $\mathbf{B}$. Izberimo si dva zaporedna trenutka t in $t' = t + \delta t$, ko ima kontura obliko $\mathcal{L}$ oz. $\mathcal{L}'$ in opna obliko $\mathcal{A}$ oz. $\mathcal{A}'$; inkrement časa δt pa naj je dovolj kratek in primeren za kasnejše limitiranje proti nič; slika 53.5. V času δt se vsak diferencial $d\mathbf{l}$ konture $\mathcal{L}$



Slika 53.5: Inkrementalen premik konture $\mathcal{L}$ v magnetnem polju.

premakne s svojo hitrostjo $\mathbf{v}$ v novo lego – opiše pot $\mathbf{v}\delta t$ –, s tem pa se tudi prvotna opna premakne v novo lego (ali $T \to T'$). Do iskanega časovnega odvoda bomo prišli z limito:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}(t)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left(\int_{\mathcal{A}'} \mathbf{B}(T',t')\cdot d\mathbf{a}' - \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}(T,t)\cdot d\mathbf{a}\right)$$

kjer smo z $\mathbf{B}(T',t')$ oz. $\mathbf{B}(T,t)$ označili vektorsko polje na novi oz. predhodni opni, pozitivna smer ploskve pa je izbrana po desnem pravilu (glede na $\mathcal{L}$ oz. $\mathcal{L}'$). Pri kratkem inkrementu δt moremo vektor $\mathbf{B}(T',t')$ pisati podobno kot $y(x+h)$ pri majhnem h: $y(x+h) \doteq y(x) + hy'(x)$; torej:

$$\mathbf{B}(T',t') \doteq \mathbf{B}(T',t) + \delta t\frac{\partial \mathbf{B}(T',t)}{\partial t}$$

Ko to vnesemo v zgornjo razliko in opravimo limito drugega sumanda, dobimo:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}(t)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} + \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left(\int_{\mathcal{A}'} \mathbf{B}(T',t)\cdot d\mathbf{a}' - \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}(T,t)\cdot d\mathbf{a}\right)$$

Diferenca v oklepaju pomeni razliko pretokov vektorja $\mathbf{B}$ skozi $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{A}$ ob času t. Ker pa je magnetno polje neizvorno in ker opni $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ ter ozka sled konture $\mathcal{L}$ (ki se premakne za $\mathbf{v}\delta t$ in postane $\mathcal{L}'$) tvorijo sklenjeno ploskev, je omenjena razlika enaka ravno pretoku $\delta\phi$ skozi ozek pas širine $\mathbf{v}\delta t$ v ograjeno območje:

$$\delta\phi \doteq \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B}(T_{\mathcal{L}},t)\cdot(\mathbf{v}\delta t\times d\mathbf{l})$$

V limitnem postopku se δt okrajša, mešan produkt $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})$ pa pišemo v drugačnem vrstnem redu, kot $-(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$. Za opazovan časovni odvod dobimo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} - \oint_{\mathcal{L}(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

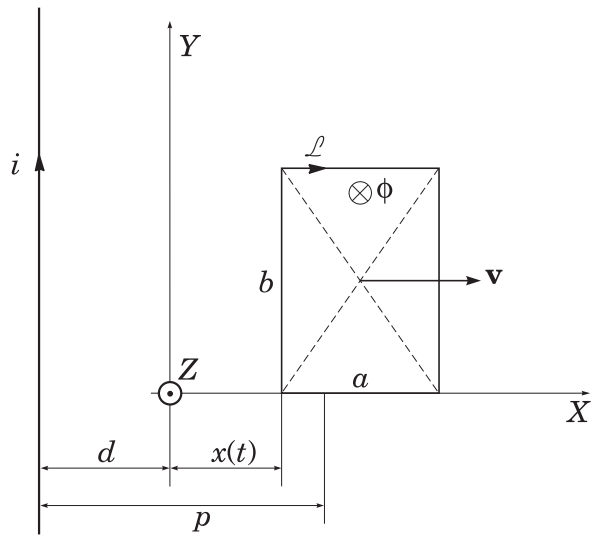
za inducirano napetost pa izraz

$$\boxed{u_{\text{ind.}} = -\int_{\mathcal{A}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \oint_{\mathcal{L}(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}} \tag{53.4}$$

Prvi člen je t.i. *transformatorska inducirana napetost*, drugi pa t.i. *gibalna inducirana napetost*. V primeru mirujočih fizičnih struktur nastopa le prvi člen, v primeru gibanja v časovno konstantnem magnetnem polju nastopa le drugi člen, v splošnem pa pač oba hkrati.

Zgled 53.2

Vzemimo raven vodnik, ki vodi harmonični tok $i = I \cos \omega t$, v bližini njega pa pravokotno zanko $(a \times b)$, ki se od njega oddaljuje s hitrostjo $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$; slika 53.6. Naj je zanka ob $t = 0$ z levim bokom v osi Y; $x(0) = 0$. Magnetni pretok



Slika 53.6: Inducirana napetost v pravokotni zanki, ki se giblje v časovno spemenljivem polju.

skozi zanko že znamo zapisati:

$$\phi(t) = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{d + a + x}{d + x}$$

Če upoštevamo časovno zakonitost toka in relacijo $\dot{x} = v_x$, dobimo:

$$u_{\text{ind.}} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega \mu_0 b I}{2\pi} \ln \frac{d + a + x}{d + x} \sin \omega t + \frac{\mu_0 v_x b I}{2\pi} \left(\frac{1}{d + x} - \frac{1}{d + a + x} \right) \cos \omega t$$

Prvi člen izvira iz časovne spremembe toka v vodniku oz. iz časovne spremembe njemu pripadajoče gostote $\mathbf{B}$ (transformatorska napetost), drugi člen pa prihaja

od gibanja zanke (gibalna napetost). Če bi ω limitirali proti nič – enosmeren tok ($i = I$) –, bi bila inducirana napetost le

$$\frac{\mu_0 v_x b I}{2\pi}\left(\frac{1}{d+x} - \frac{1}{d+a+x}\right)$$

V nasprotnem, ko bi bila hitrost nič ($x(t) = x_0$), bi bila inducirana napetost enaka

$$\frac{\omega\mu_0 b I}{2\pi}\ln\frac{d+a+x_0}{d+x_0}\sin\omega t$$

Uberimo še drugačno pot in izračunajmo oba prispevka k inducirani napetosti po enačbi 53.4. Gostota $\mathbf{B}$ je v območju zanke podana z znanim izrazom – s tem pa tudi odvod:

$$B_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi p}\cos\omega t \qquad \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\omega\mu_0 I}{2\pi p}\sin\omega t$$

Za transformatorski del inducirane napetosti dobimo:

$$-\int_{\mathcal{A}(t)}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} = \int_{d+x}^{d+a+x}\frac{\omega\mu_0 b I}{2\pi p}\sin\omega t\,dp = \frac{\omega\mu_0 b I}{2\pi}\ln\frac{d+a+x}{d+x}\sin\omega t$$

In še: produkt $\mathbf{v}\times\mathbf{B} = (v_x, 0, 0)\times(0, 0, B_z) = (0, -v_x B_z, 0)$ predstavlja vektorsko polje v negativni y-smeri. Prispevek k krivuljnemu integralu bo zato od nič različen le na obeh navpičnih stranicah pravokotnika:

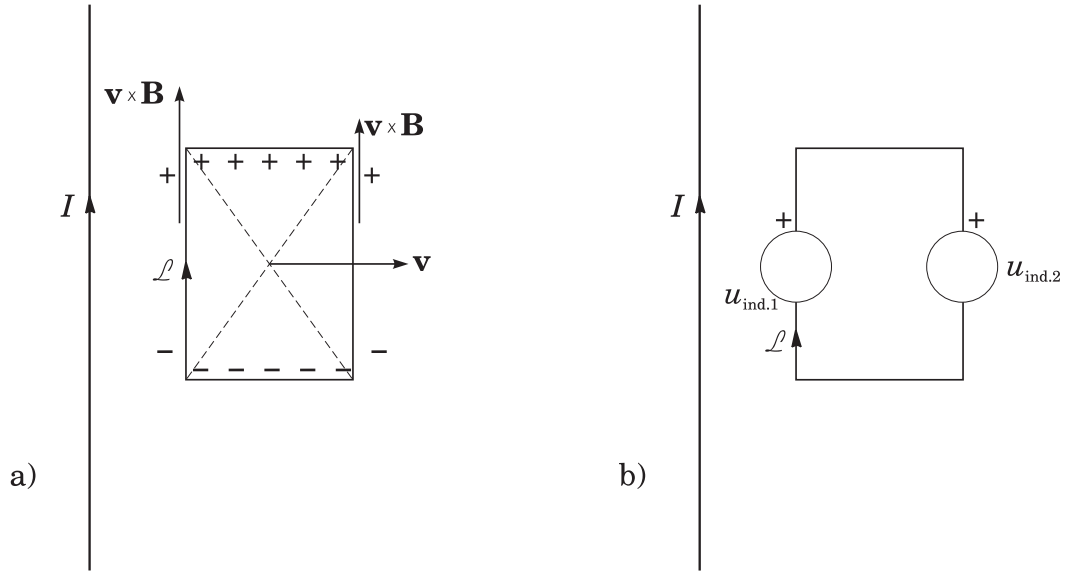
$$\oint_{\mathcal{L}(t)}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}(t)}(0, -v_x B_z, 0)\cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 v_x b I}{2\pi}\left(\frac{1}{d+x} - \frac{1}{d+a+x}\right)\cos\omega t$$

Člen $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. V gibalni inducirani napetosti pritegne pozornost že sam vektorski produkt; poznamo ga iz Lorentzove sile, pa tudi iz Hallove napetosti. Izposodimo si kar geometrijo iz zadnjega zgleda. Če je pravokotna kontura $\mathcal{L}$ prevoden (žičnat) okvir, potem so v materialu prosti elektroni, ki se skupaj z zanko gibajo s hitrostjo $\mathbf{v}$. Na njih deluje Lorentzova sila $-e(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, ki (glede na označene smeri) vleče elektrone na spodnji del pravokotnika, na zgornjem delu pa ostaja presežek (+) elektrin; slika 53.7. Razslojitev elektrin (polarizacija ovoja) je hipna in se tudi hipno prilagaja glede na produkt $(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, razdvojene elektrine pa povzročajo tudi svoje lastno elektrostatično polje $\mathbf{E}_{\text{sta.}}$ tako, da je v okviru tokovna gostota $\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E}_{\text{stat.}} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$ na vseh mestih tangentna vzdolž oboda. Razslojitev elektrin se odvija po navpičnih stranicah okvira z razdvajalno poljsko jakostjo $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ v navpični smeri (ima podobno vlogo kot $\mathbf{E}_{\text{g}}$ v substanci napetostnega vira). Vsaki od pokončnih stranic moremo prirediti svoj napetostni vir, skica b), z napetostima:

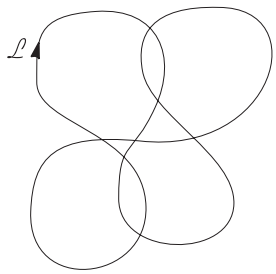
$$u_{\text{ind.}\,1} = \frac{\mu_0 v_x b I}{2\pi(d+x)} \qquad u_{\text{ind.}\,2} = \frac{\mu_0 v_x b I}{2\pi(d+a+x)}$$

Skupna inducirana napetost v zanki je tako razlika: $u_{\text{ind.}} = u_{\text{ind.}\,1} - u_{\text{ind.}\,2}$. Če bi bilo polje $\mathbf{B}$ homogeno in časovno konstantno, bi bili obe napetosti enaki, skupna pa bi bila nič; toka v okviru ne bi bilo. To slednje velja tudi za kakorkoli oblikovan okvir.

Magnetni sklep. Do tu smo se s pojavom inducirane napetosti seznanjali in ukvarjali na primerih preprostih zank, ki so bile krožne ali pravokotne oblike; pri tem tudi opna



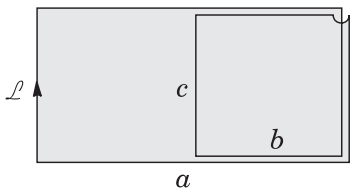
Slika 53.7: Oddaljevanje pravokotnega prevodnega ovoja od ravnega tokovodnika.



Slika 53.8: Splošna sklenjena pentlja $\mathcal{L}$ v magnetnem polju.

oz. napeta ploskev $\mathcal{A}$ ni bila nič kaj zapletena – praviloma je bila mišljena kot planarna. Vse drugače pa verjetno bo, če bo pentlja $\mathcal{L}$ kaka poljubno zvijugana sklenjena prostorska kontura; slika 53.8. Ni težko uvideti, da bo verjetno "naporno" izračunati magnetni fluks skozi njo, saj ne vemo, kaj vzeti za opno $\mathcal{A}$.

Do odgovora se bomo dokopali postopoma. Za začetek vzemimo še sorazmerno enostavno planarno pravokotno pentljo; slika 53.9. Z narisano pentljo objamemo fluks v



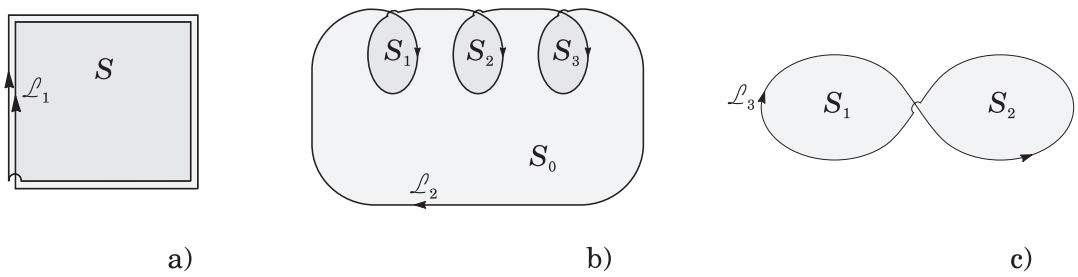
Slika 53.9: Planarna pentlja dveh pravokotnikov: $(a \times c)$ in $(b \times c)$.

pravokotniku $b \times c$ dvakrat, v pravokotniku $(a - b) \times c$ pa enkrat; ali drugače: v pravokotniku $b \times c$ enkrat in v pravokotniku $a \times c$ enkrat. Vsota s konturo $\mathcal{L}$ objetega fluksa je v

obeh primerih enaka. Tej vsoti rečemo *magnetni sklep*; označimo ga s ψ in pišemo:

$$\psi_{\text{zanke } \mathcal{L}} = \phi_{a\times c} + \phi_{b\times c} = \phi_{(a-b)\times c} + 2\phi_{b\times c}$$

Na podben način zapišimo magnetne sklepe še za nekaj drugih planarno oblikovanih zank; slika 53.10. V posameznih treh primerih bi magnetni sklepi bili:



Slika 53.10: Tri planarne pentlje.

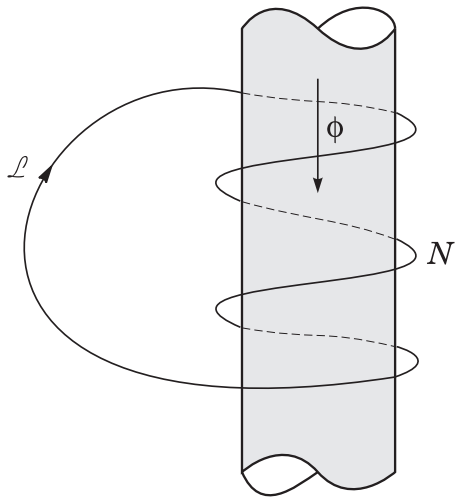
a) $\psi_{\text{zanke } \mathcal{L}_1} = 2\phi_{\text{skozi } S}$

b) $\psi_{\text{zanke } \mathcal{L}_2} = \phi_{\text{skozi } S_0} + 2\left(\phi_{\text{skozi } S_1} + \phi_{\text{skozi } S_2} + \phi_{\text{skozi } S_3}\right)$

c) $\psi_{\text{zanke } \mathcal{L}_3} = \phi_{\text{skozi } S_1} - \phi_{\text{skozi } S_2}$

S tem bi bila inducirana napetost v vsaki od zank enaka $-d\psi/dt$ oz. enaka negativni časovni spremembi objetega magnetnega pretoka ali – po novem – magnetnega sklepa.

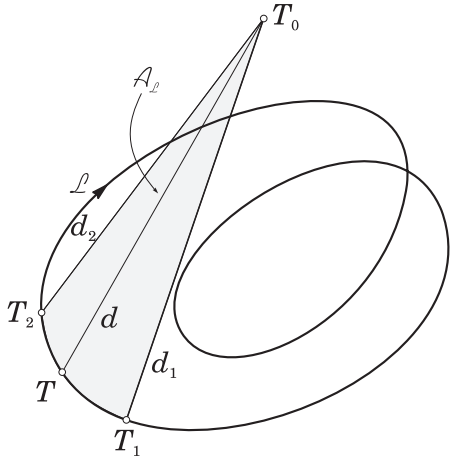
Tehnično zanimiv je primer navitja z N ovoji okrog stebra feromagnetnega jedra, ki objema fluks ϕ v jedru; slika 53.11. Na sliki so skicirani trije zavoji; isti fluks navitje



Slika 53.11: Sklenjeno navitje okrog feromagnetnega stebra.

3-krat objame, v primeru N ovojev pa N-krat. Magnetni sklep ψ takšnega navitja bi bil $N\phi$, inducirana napetost v pentlji $\mathcal{L}$ pa: $u_{\text{ind.}} = -d\psi/dt = -Nd\phi/dt$.

Po tem uvodu poskusimo najti odgovor na začetno vprašanje: kaj vzeti kot ploskev $\mathcal{A}$ neke splošne pentlje $\mathcal{L}$ v prostoru. Že pri enostavni zanki (ovoju) je bilo open neskončno mnogo, kar pomeni, da tudi tu ne bo odgovor enoličen. Zaradi enostavnosti vzemimo pentljo z dvema "zavojema"; slika 53.12. Izberimo si poljubno točko T_0 ("vrtišče") in



Slika 53.12: Ploskev magnetnega sklepa.

točko T_1 na pentlji; če ju povežemo, dobimo razdaljo d_1. Nato krenemo od T_1 proti T_2 in vseskozi vlečemo povezave $\overline{TT_0} = d$; povezave "zarisujejo" plašč stožčaste oblike oz. ploskev, ki je napeta med T_0 in točkami na konturi $\mathcal{L}$. Takšen plašč seveda na nekem mestu "prereže" samega sebe in se na koncu zveže z začetno povezavo d_1. ♣ Bralec naj pentljo s slike 53.12 nariše na papir, točko T_0 pa dvigne nadenj in si s pomočjo nitke med T_0 in T na obodu $\mathcal{L}$ (ki ni nujno, da je napeta) predstavi takšno ploskev ter določi tudi mesto, kjer ploskev sama sebe "prestopi". ♣ Na takšen ali podoben način pridobljena ploskev $\mathcal{A}_\mathcal{L}$ (splošne konture $\mathcal{L}$) je ploskev našega magnetnega sklepa, za katerega bomo pisali:

$$\boxed{\psi_{\text{skozi } \mathcal{L}} = \int_{\mathcal{A}_\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}} \tag{53.5}$$

in inducirana napetost vzdolž konture bo

$$\boxed{u_{\text{ind.}} = -\frac{d\psi_{\text{skozi } \mathcal{L}}}{dt}} \tag{53.6}$$

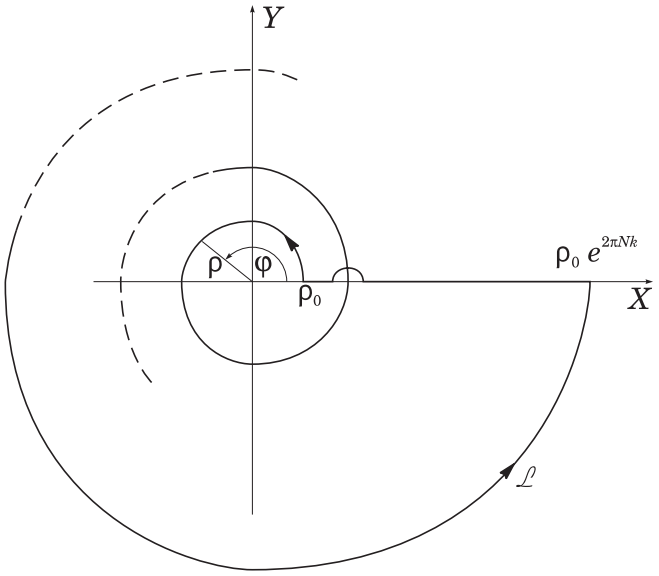
Zgled 53.3

Izračunajmo inducirano napetost v spiralni zanki, ki je podana z enačbo $\rho(\varphi) = \rho_0 e^{k\varphi}$ in v (XY) ravnini napravi N zavojev, če v z-smeri magnetno polje harmonično niha ($B_z = B_{z0} \cos \omega t$); slika 53.13. Postavimo vrtišče spiralne ploskve v izhodišče. V smislu vijačne ploskve s slike 53.12 bi bila površina S te ploskve integral,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi N} \rho^2 \, d\varphi = \frac{\rho_0^2}{2} \int_0^{2\pi N} e^{2k\varphi} \, d\varphi = \frac{\rho_0^2}{4k} \left(e^{4\pi N k} - 1 \right)$$

S tem bi dobili magnetni sklep $\psi = B_z S$; inducirana napetost v pentlji $\mathcal{L}$ bi bila:

$$u_{\text{ind.}} = \frac{\omega \rho_0^2}{4k} \left(e^{4\pi N k} - 1 \right) B_{z0} \sin \omega t$$

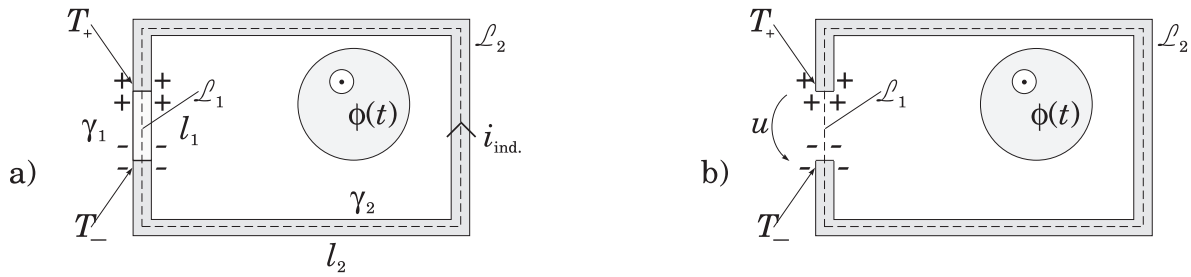


Slika 53.13: Eksponencialna spirala z N ovoji.

Če gre $k \to 0$ (ovoji "skoraj sovpadajo"), je $u_{\text{ind.}} = N\omega\pi\rho_0^2 B_{z0} \sin\omega t$ (Zgled 53.1).
♣ Bralec naj inducirano napetost izrazi za primer Arhimedove spirale ($\rho = k\varphi$) z N ovoji. ♣

Pojav indukcije v nesklenjenih (prevodnih) konturah. Do tu smo se ukvarjali s smerjo in velikostjo inducirane napetosti v sklenjeni zanki. Poraja pa se vprašanje: kaj je s pojavom indukcije v nesklenjenih pentljah ali prevodnih konturah; kako tam določiti inducirano napetost? Povejmo že kar na začetku, da na tem nivoju ne bomo uspeli najti povsem adekvatnega odgovora (težava je v omejitvah uporabljanja potrebnih matematičnih orodij); pa vendar, nekaj se bo dalo kljub vsemu doreči.

Za začetek si bomo osvetlili pojav indukcije v "rahlo" odprti (prekinjeni) prevodni konturi. Bodi sklenjena kontura, ki objame feromagnetni steber s fluksom $\phi(t)$, pravokotna prevodna zanka, ki je "zložena" iz dveh segmentov: krajšega, dolžine l_1 in nizke specifične prevodnosti γ_1, ter daljšega, dolžine l_2 in visoke specifične prevodnosti γ_2; slika 53.14, skica a); upornosti odsekov naj sta R_1 in R_2. Po enačbi 53.2 bo referenčna smer induci-



Slika 53.14: Inducirana napetost v odprti konturi.

ranega toka takšna, kot je to označeno na skici. Če efekt samoindukcije zanemarimo,

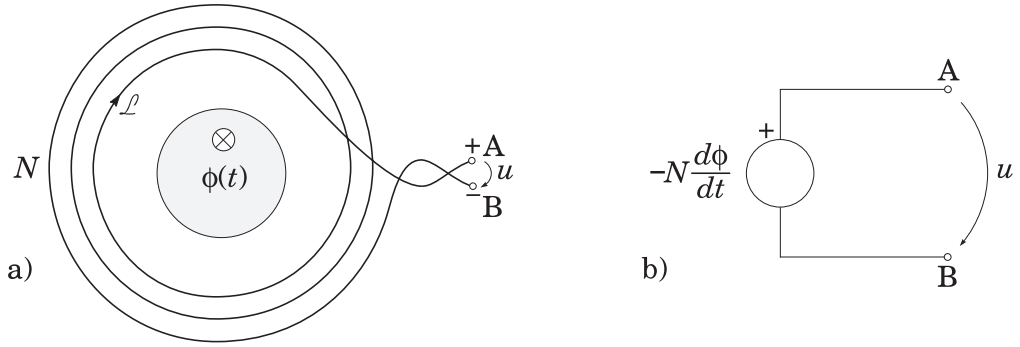
bo $i_{\text{ind.}} = u_{\text{ind.}}/(R_1 + R_2) = (-d\phi/dt)/(R_1 + R_2)$. V razdelku 32 smo ugotovili, da se pri prehajanju tokovne gostote iz enega v drug prevodnik pojavi presežek elektrine: (+) elektrina pri prehodu iz boljšega v slabši prevodnik in (−) elektrina v obratnem primeru. Tokovna gostota bo v obeh segmentih po iznosu enaka: $\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$. Če je $\gamma_1 \ll \gamma_2$, potem je $E_2 \ll E_1$. Inducirano napetost v zanki zapišimo z vsoto:

$$u_{\text{ind.}} = \int_{T_-\mathcal{L}_2T_+} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{T_+\mathcal{L}_1T_-} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}$$

V skrajnem primeru, ko je $\gamma_1 \doteq 0$ (prekinitev), je $E_2 \doteq 0$ in napetost u med T_+ in T_- na prekinitvi, na skici b), je "ravno" $u_{\text{ind.}}$:

$$u = \int_{T_+\mathcal{L}_1T_-} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} \doteq u_{\text{ind.}}$$

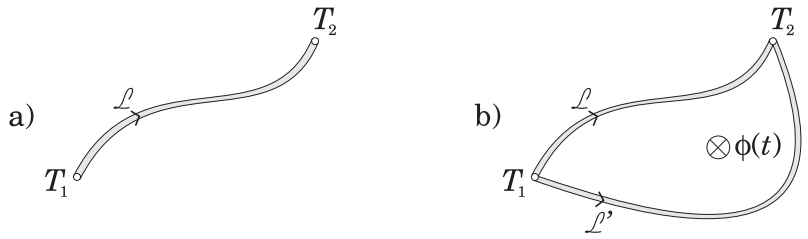
Na osnovi razmer s skic a) in b) moremo preprosto določiti polariteto inducirane napetosti na odprtem delu sponk razklenjenega navitja, slika 53.15, skica a), in to tako, da sledimo pozitivni smeri obhoda ($\mathcal{L}$) okrog referenčne smeri fluksa. Skica b) podaja ekvivalenten



Slika 53.15: Navitje okrog stebra in njemu pripadajoč vir.

neobremenjen[1] napetostni vir, ki pripada z navitjem ovitemu fluksu.

Mnogo težji primer pa je, ko je prevodna kontura $\mathcal{L}$ med T_1 in T_2 močno odprta; slika 53.16, skica a); dopustimo tudi možnost, da se lahko giblje (ali "zvija") v prostoru. Zanimal nas bo integral inducirane električne poljske jakosti med T_1 in T_2 vzdolž splošne



Slika 53.16: Nesklenjena in sklenjena kontura v magnetnem polju.

[1]Kompletno modelno vezje bi dobili, če bi upoštevali še upornost navitja in pa efekt samoindukcije, ko bi takšen vir obremenili.

konture $\mathcal{L}$,

$$u_{\text{ind.}} = \int_{T_1\mathcal{L}T_2} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l}$$

Ta bo za konturo $\mathcal{L}'$, skica b), gotovo drugačen,

$$u'_{\text{ind.}} = \int_{T_1\mathcal{L}'T_2} \mathbf{E}_{\text{ind.}} \cdot d\mathbf{l}$$

saj odseka $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}'$ tvorita sklenjeno zanko in zanjo velja indukcijski zakon: $u_{\text{ind.}} - u'_{\text{ind.}} = -d\phi/dt$. Za inducirane napetosti – po različnih poteh med dvema točkama – znamo torej opredeliti le njihove razlike, ne pa tudi njihovih polnih iznosov.

Tu smo očitno prišli do "točke", ko je izhodiščna Faradayeva zakonitost ($u_{\text{ind.}} = -d\phi/dt$) skoraj izčrpana; ne daje nam namreč popolnega vpogleda v inducirano električno poljsko jakost, ki jo potrebujemo za zgornji integral med T_1 in T_2. Da bi to plat osvetlili, zapišimo še enkrat enačbo 53.4,

$$u_{\text{ind.}} = -\int_{\mathcal{A}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \oint_{\mathcal{L}(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

ki se nanaša na splošno sklenjeno gibajočo konturo $\mathcal{L}$ v magnetnem polju.

Če bi bilo magnetno polje časovno konstantno, bi imeli opraviti le z gibalno inducirano napetostjo,

$$(u_{\text{ind.}})_{\text{gib.}} = \oint_{\mathcal{L}(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Tu je inducirano električno polje povsem razvidno:

$$(\mathbf{E}_{\text{ind.}})_{\text{gib.}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Torej, če se prevodna kontura $\mathcal{L}$ v prostoru giblje (zvija), se na njej pojavi inducirano polje $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Na segmentu $d\mathbf{l}$ vzdolž konture $\mathcal{L}$ se generira diferencial inducirane napetosti, $(du_{\text{ind.}})_{\text{gib.}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$, in med točkama T_1 in T_2 bo iskana inducirana napetost enaka integralu,

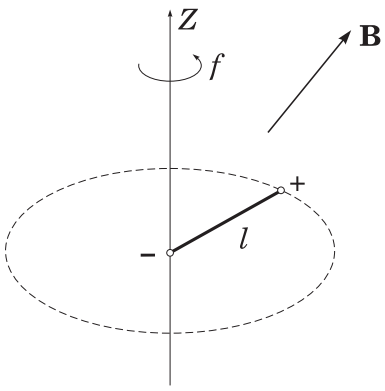
$$(u_{\text{ind.}})_{\text{gib.}} = \int_{T_1\mathcal{L}T_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Glede na razmišljanja ob sliki 53.14 bo referenčna (+) polariteta v točki T_2, (−) polariteta pa v točki T_1.

Zgled 53.4

Oglejmo si Faradayev enosmerni generator. Priti želimo do gibalne inducirane napetosti v prevodni palici dolžine l, ki kroži s frekvenco f v homogenem, časovno konstantnem magnetnem polju; slika 53.17. Diferencial palice $d\mathbf{l} = (d\rho, 0, 0)$ kroži na razdalji ρ z obodno hitrostjo $\mathbf{v} = (0, 2\pi f\rho, 0)$. Diferencial inducirane napetosti je tam takle: $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = (0, 0, 2\pi f\rho\, d\rho) \cdot \mathbf{B} = 2\pi f B_z \rho\, d\rho$. Očitno je za inducirano napetost v palici "odgovorna" le komponenta polja $\mathbf{B}$, ki je pravokotna na ravnino kroženja – torej B_z. Z integracijo od nič do l dobimo:

$$(u_{\text{ind.}})_{\text{gib.}} = 2\pi f B_z \int_0^l \rho\, d\rho = f\pi l^2 B_z$$



Slika 53.17: Krožeča palica v homogenem magnetnem polju.

Med centrom in obodom je inducirana napetost časovno konstantna – enosmerna. Če bi bilo palic več (pahljača), bi se v vsaki od njih inducirala enaka napetost. Z zgoščanjem vrtečih se palic pridemo do krožečega diska s površino $S = \pi l^2$. Inducirana napetost med centrom in obodom bo fSB_z. Produkt SB_z je tudi magnetni fluks ϕ, ki "prebada" disk; $(u_{\text{ind.}})_{\text{gib.}} = f\phi$. ♣ Bralec naj podobno izvajanje napravi za krožeč kolobar z radijema a in b. ♣

Preostane nam še najtežavnejši del: $(\mathbf{E}_{\text{ind.}})_{\text{transf.}}$ oz. transformatorski del inducirane napetosti

$$(u_{\text{ind.}})_{\text{transf.}} = -\int_{\mathcal{A}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Z nekoliko več matematike (Stokesov izrek) se da pokazati, da je ploskovni integral možno prevesti v konturnega po robu ploskve,

$$(u_{\text{ind.}})_{\text{transf.}} = -\oint_{\mathcal{L}(t)} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$$

kjer je $\mathbf{A}$ vektorski magnetni potencial. Tega vektorja se na tem nivoju (zaradi omenjenih razlogov) izogibamo, njegov negativen časovni odvod[2] pa je ravno iskana transformatorska inducirana jakost,

$$(\mathbf{E}_{\text{ind.}})_{\text{transf.}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Skupna inducirana poljska jakost bi bila s tem vsota obeh,

$$\mathbf{E}_{\text{ind.}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

sumarno električno polje $\mathbf{E}$ pa dobimo, ko prištejemo še statično polje: $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/\partial t + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_{\text{sta.}}$.

Vsakršno poglabljanje v tej smeri absolutno presega zastavljene okvire. O inducirani poljski jakosti, kot vektorskem polju, v nadaljevanju eksplicitno ne bomo govorili; operirali bomo le z njenim krivuljnim integralom po (običajno) sklenjeni konturi.

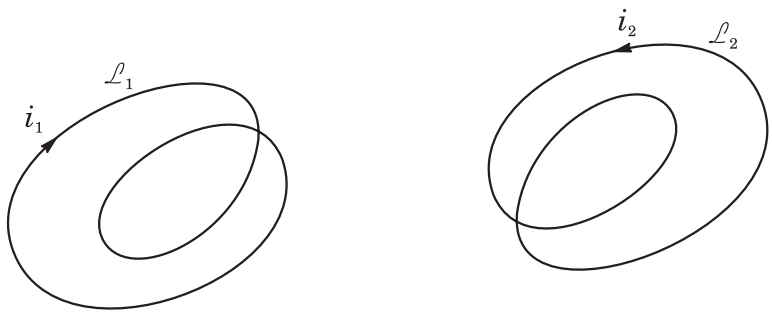
[2]V razdelku 43 smo pod črto zapisali izraz za $\mathbf{A}$ znane tokovne strukture. Če je izpolnjen pogoj kvazistatičnosti, potem je

$$(\mathbf{E}_{\text{ind.}})_{\text{transf.}}(T,t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(i_{\text{cel.}})} \frac{\partial \mathbf{J}(T',t)}{\partial t} \frac{dv'}{R}$$

54. Medsebojna in lastna induktivnost

Faradayev zakon indukcije (v najbolj splošni obliki) pravi, da je inducirana napetost v sklenjeni konturi enaka negativni časovni spremembi magnetnega sklepa skozi njo; $u_{\text{ind.}} = -d\psi/dt$. V tem razdelku nas bo zanimal zapis te inducirane napetosti v togih in mirujočih prevodnih zankah, ki so prostorsko poljubno postavljene, magnetne lastnosti medija pa so linearne (odnos med $\mathbf{B}$ in $\mathbf{H}$ je linearen); to pomeni, da je prostor s permeabilnostjo μ_0 oz., da je morebitnim feromagnetnim telesom prirejena linearna krivulja magnetenja (zanemarljiva histerezna pentlja) z nagibom $\mu = \mu_0\mu_{\text{r}}$ v (H, B) diagramu. Pod takimi pogoji je magnetno polje $\mathbf{B}$ (ali $\mathbf{H}$) premosorazmerno toku, ki to polje povzroča.

Vzemimo v prostoru dve zanki ($\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$) s tokoma i_1 in i_2; slika 54.1; smeri obhodov po zankah naj se ujemata z označenima referenčnima smerema tokov. Magnetno polje v



Slika 54.1: Dve magnetno sklopljeni zanki.

poljubni točki prostora je določeno z vsoto: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, kjer je $\mathbf{B}_1$ polje prvega, $\mathbf{B}_2$ pa je polje drugega toka. Ker je prostor linearen, je gostota $\mathbf{B}_1$ premosorazmerna toku i_1, gostota $\mathbf{B}_2$ pa toku i_2. Magnetni sklep (ψ_1) prve zanke je potemtakem integral gostot $\mathbf{B}_1$ in $\mathbf{B}_2$ skozi vijačno ploskev $\mathcal{A}_1$, ki je napeta na konturo $\mathcal{L}_1$ (orientacija ploskve mora biti pozitivna glede na obhod),

$$\psi_1 = \int_{\mathcal{A}_1} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{a}_1 = \psi_1^{(1)} + \psi_1^{(2)}$$

Sklep ψ_1 smo razdelili v dva: prvi del je prispevek lastnega toka (i_1), drugi je prispevek sosednjega toka (i_2). Podobno storimo še za sklep ψ_2:

$$\psi_2 = \int_{\mathcal{A}_2} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \cdot d\mathbf{a}_2 = \int_{\mathcal{A}_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 + \int_{\mathcal{A}_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{a}_2 = \psi_2^{(1)} + \psi_2^{(2)}$$

V vseh štirih delnih magnetnih sklepih pomeni spodnji indeks indeks zanke, kjer sklep pišemo, zgornji indeks (v oklepaju) pa pomeni indeks toka, ki generira ta delni sklep. Pod pogoji linearnosti sta sklepa $\psi_1^{(1)}$ in $\psi_2^{(1)}$ sorazmerna toku i_1, sklepa $\psi_1^{(2)}$ in $\psi_2^{(2)}$ pa toku i_2. V tem smislu bomo opredelili štiri koeficiente:

$$L_{11} = \frac{\psi_1^{(1)}}{i_1} \qquad L_{22} = \frac{\psi_2^{(2)}}{i_2} \qquad L_{12} = \frac{\psi_1^{(2)}}{i_2} \qquad L_{21} = \frac{\psi_2^{(1)}}{i_1}$$

Prva dva sta lastna koeficienta zank, druga dva pa medsebojna.

Sedaj verjetno ne bo težko teh pojmov razširiti na n magnetno povezanih zank. Magnetni sklep j-te zanke bi pisali kot vsoto,

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{n} \psi_j^{(k)}$$

medsebojne ali lastne koeficiente magnetnega sklepa pa bi pisali kot

$$L_{jk} = \frac{\psi_j^{(k)}}{i_k} \qquad \begin{array}{ll} j = k & \text{lastni} \\ j \neq k & \text{medsebojni} \end{array}$$

Lastnih koeficientov je toliko kot zank, torej n, medsebojnih pa je $n(n-1)$. (Kasneje bomo ugotovili, da sta medsebojna koeficienta obrnjenih indeksov enaka ($L_{jk} = L_{kj}$) – dejansko jih je torej le $n(n-1)/2$.)

S tako definiranimi koeficienti bi magnetni sklep ψ_j zapisali kot linearno kombinacijo tokov,

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{n} \psi_j^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} L_{jk} i_k$$

Po enačbi 53.6 bi inducirano napetost v j-ti zanki zapisali kot

$$(u_{\text{ind.}})_j = -\sum_{k=1}^{n} L_{jk} \frac{di_k}{dt}$$

Iz slednjega zapisa je povsem razvidno, da je člen

$$-L_{jk} \frac{di_k}{dt}$$

prispevek k-tega toka k inducirani napetosti v j-ti zanki in je L_{jk} ustrezen koeficient indukcije; v nadaljevanju ga bomo imenovali *lastna induktivnost*, če bo $j = k$, in *medsebojna induktivnost*, če bo $j \neq k$. Ena ali druga induktivnost bo nadalje definirana s kvocientom:

$$\boxed{L_{jk} = \frac{\psi_j^{(k)}}{i_k}} \tag{54.1}$$

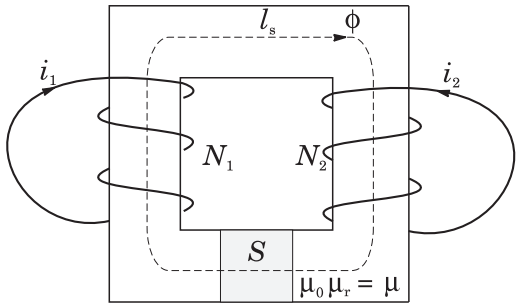
oz. kot normiran magnetni sklep j-te zanke zaradi toka v k-ti zanki; enota za induktivnost je Vs/A=H (henry).

Zgled 54.1

Vzemimo dve navitji na skupnem feromagnetnem jedru; to jedro "kanalizira" magnetno polje prvega navitja "v celoti" tudi skozi drugo navitje in obratno; slika 54.2. Pri označenih smereh tokov (glede na razdelek 51) se magnetni napetosti $N_1 i_1$ in $N_2 i_2$ podpirata. Magnetni fluks ϕ v jedru bo:

$$\phi = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\mathcal{R}}$$

kjer je $\mathcal{R}$ magnetna upornost jedra; $\mathcal{R} = l_s/\mu S$.



Slika 54.2: Navitje na feromagnetnem jedru.

Magnetna sklepa ψ_1 in ψ_2 bosta: $\psi_1 = N_1\phi$, $\psi_2 = N_2\phi$, oz.

$$\psi_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_2 \qquad \psi_2 = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

Posamezni sumandi pomenijo po vrsti delne sklepe $\psi_1^{(1)}$, $\psi_1^{(2)}$, $\psi_2^{(1)}$ in $\psi_2^{(2)}$. Po enačbi 54.1 so:

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \qquad L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} \qquad L_{12} = L_{21} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}$$

Lastni induktivnosti sta sorazmerni kvadratu števila ovojev, medsebojni pa sta si enaki in sorazmerni produktu števila ovojev; velja tudi: $L_{12} = \sqrt{L_{11} L_{22}}$.

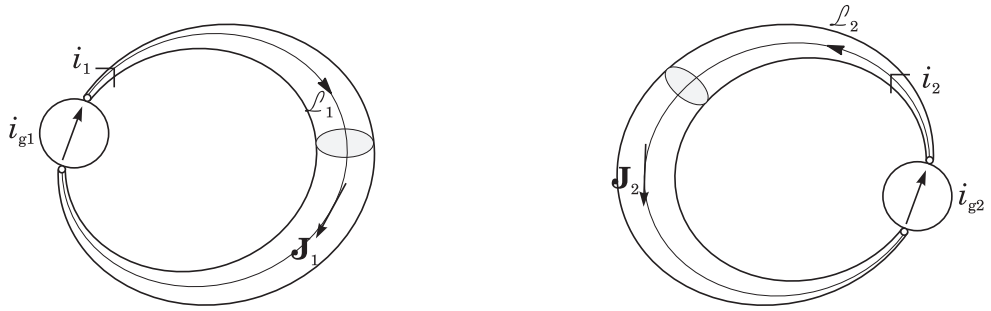
Opazovan primer je do neke mere idealiziran, saj sloni račun na predpostavki, da je celoten magnetni pretok samo v feromagnetnem kanalu, kar dejansko ni povsem res; vendar pa so to že podrobnosti, v katere se na tem nivoju ne moremo povsem korektno opuščati.

Za konec si oglejmo številski zgled: $N_1 = 30$, $N_2 = 40$, $l_s = 0.5$ m, $S = 30$ cm^2, $\mu_r = 1000$. Magnetna upornost $\mathcal{R}$ je 133 kA/Vs, induktivnosti pa so: $L_{11} = 6.8$ mH, $L_{22} = 12.1$ mH, $L_{12} = 9.0$ mH.

Dileme in težave pri določanju induktivnosti. Do tu navidezno izgleda, da z računanjem induktivnosti ne bo težav: izračunamo delni magnetni sklep in ga delimo s tokom – vendar "žal" ni tako preprosto. V čem je težava?

S samo prevodno konturo, skozi katero smo zapisovali magnetni pretok (ali sklep), se do tu nismo posebej ukvarjali. Ne da bi to eksplicitno izpostavljali, smo jo razumeli kot tanko žico, ki je v prostoru oblikovana v splošno pentljo (zanko $\mathcal{L}$), in tudi tok vzdolž nje smo matematično razumeli kot linijski tok. Povsem očitno je, da bodo vsa dosedanja razglabljanja o indukciji in induktivnostih – praktično in tehnično – povsem ustrezna, če bodo prerezne izmere žic majhne glede na geometrijo same pentlje (konture $\mathcal{L}$), zatakne pa se, če temu ni tako.

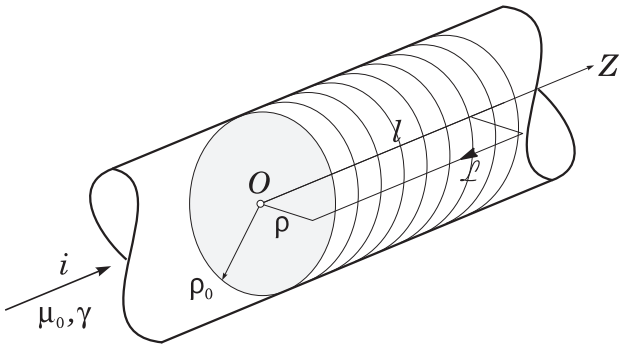
Vzemimo dve tokovni zanki relativno "debelejših" prerezov; slika 54.3. V takšnem primeru se porodi dvoje pomislekov: prvič, ali sploh vemo, kakšna je porazdelitev gostote toka po prerezu žic, če poznamo le sumarno vrednost toka (tok namreč ni več časovno konstanten in zanj ne veljajo zakonitosti porazdelitve enosmernega toka), in drugič, kaj vzeti za magnetni pretok prve zanke skozi drugo (ali druge skozi prvo) ter kaj vzeti za



Slika 54.3: Dve zanki relativno "debelih" prerezov.

magnetni pretok lastnega toka v lastni zanki; kar naenkrat sta namreč zanki $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$ neopredeljeni. Praktik bi se verjetno odločil: vzemimo tisto "srednjo"; resnica je resda "blizu" tega, povsem pa vendarle ne.

Pojdimo po vrsti in si kot prvo osvetlimo pomislek glede porazdelitve tokovne gostote v "debelem" vodniku. Okrog tega smo na tem nivoju matematično sila omejeni, zato si bomo problematiko (okvirno) osvetlili le na vodniku krožnega prereza; slika 54.4.



Slika 54.4: K porazdelitvi toka v vodniku krožnega prereza.

V praktični elektrotehniki imajo toki (napetosti) pogostokrat harmonično časovno zakonitost; odločimo se zanjo tudi tu: $i = I\cos\omega t$. Zaradi časovno spremenljivega toka bo tudi magnetno polje spremenljivo in pojavila se bo inducirana napetost, ki bo s svojo inducirano električno poljsko jakostjo (po Ohmovem zakonu) vplivala na porazdelitev toka po prerezu.

Razmišljanje pričnimo takole: naj bo v začetnem približku tok i porazdeljen enakomerno po prerezu z gostoto $J_z^{(0)} = i/\pi\rho_0^2$. Ta gostota bo v vodniku generirala magnetno polje $B_\varphi^{(0)} = \mu_0 J_z^{(0)}\rho/2$. V narisani pravokotni zanki $\mathcal{L}$ bo magnetni pretok $\phi^{(0)}$ (po zgledu 44.3) enak $\mu_0 l J_z^{(0)}\rho^2/4$. Inducirana napetost v zanki bo njegov negativni odvod,

$$u_{\text{ind.}}^{(0)} = -\frac{d\phi^{(0)}}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{\mu_0 l}{4\pi}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 I\cos\omega t = \frac{\omega\mu_0 l}{4\pi}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 I\sin\omega t$$

Inducirana električna poljska jakost bo očitno v z-smeri in jo moremo iz $u_{\text{ind.}}^{(0)}$ določiti do

funkcije $C^{(0)}(t)$ natančno:

$$E^{(0)}_{\text{ind. } z} = C^{(0)} - \frac{\omega\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 I \sin\omega t$$

To inducirano polje bi ustvarilo dodatno tokovno gostoto $J_z^{(1)}$,

$$J_z^{(1)} = \gamma E^{(0)}_{\text{ind. } z} = \gamma C^{(0)} - \frac{\omega\mu_0\gamma}{4\pi}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 I \sin\omega t$$

ki sumarnega toka i ne spremeni – ga le prerazpodeli –, zato mora biti pretok gostote $J_z^{(1)}$ po prerezu nič; od tu dobimo $C^{(0)}$:

$$2\pi\int_0^{\rho_0} J_z^{(1)}\rho\, d\rho = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_0^2}{2}C^{(0)} - \frac{\omega\mu_0\rho_0^2}{16\pi} I \sin\omega t = 0$$

Popravljena tokovna gostota je vsota:

$$J_z^{(0)} + J_z^{(1)} = \left(\frac{I}{\pi\rho_0^2}\right)\cos\omega t + \left(\frac{\omega\mu_0\gamma\rho_0^2}{8}\left(1 - 2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right)\frac{I}{\pi\rho_0^2}\right)\sin\omega t$$

Izraza pred harmoničnima funkcijama sta amplitudi gostot začetnega približka in kasnejšega popravka. Njuno razmerje je v najslabšem primeru enako $\omega\mu_0\gamma\rho_0^2/8$. Če je $\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\rho_0 \ll 1$, je popravek začetne gostote praktično neomembe vreden. V nasprotnem bi bilo potrebno novo usklajevanje z $J_z^{(2)}$, $J_z^{(3)}$, ...

Poglobljeni izračuni – ki sem ne sodijo – kažejo, da je že pri $\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\rho_0 < 0.5$ povsem korektno smatrati tokovno gostoto kot krajevno konstanto po prerezu. Vzemimo številski zgled: $f = 50$ Hz, $\gamma_{\text{Cu}} = 56 \cdot 10^6$ S/m, $\rho_0 = 3$ mm, $\sqrt{\omega\mu_0\gamma_{\text{Cu}}}\rho_0 = 0.45$; smo torej znotraj zgornjega kriterija.

Tu načeta problematika je v praktični elektrotehniki mnogokrat aktualna in vredna upoštevanja; ob tem je mišljen t.i. *kožni efekt*, ki je sopoten pojav pri vodenju izmeničnih tokov. Takšni toki – še posebno toki visokih frekvenc – se po prerezu vodnika razporede izrazito neenakomerno: ob površini prereza je gostota večja kot v sredini (od tu tudi ime kožni (skin) efekt). Praktična posledica izriva toka ob površino je povečanje joulskih izgub oz. ekvivalentne ohmske upornosti vodnika. Za našo rabo bodi o tem dovolj. V nadaljevanju se bomo omejili na "električno tanke" vodnike, torej takšne, pri katerih je kožni efekt neizrazit in se more tokovna gostota smatrati kot enakomerna po prerezu; v nasprotnem bo točnost računa pač nekoliko "trpela".

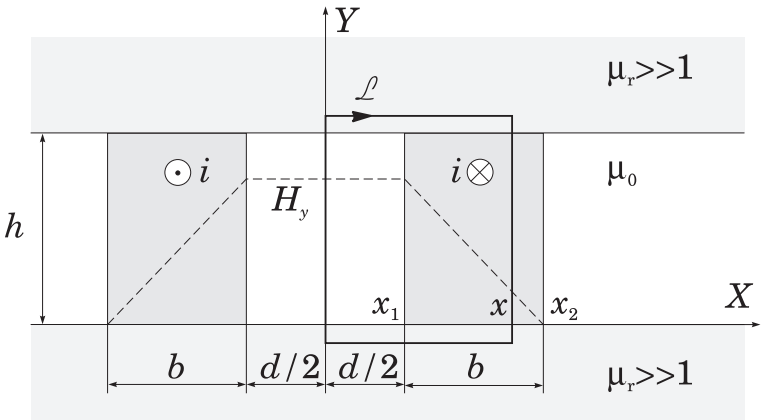
In kaj reči o drugi dilemi: o pravšnji izbiri konture vzdolž debelega vodnika. Ne bomo se odločili ne za konturo po notranjem ne za konturo po zunanjem obodu, pa tudi za ono "po sredini" ne – odločili se bomo za poprečje pretokov skozi vse možne konture. Namesto ϕ oz. ψ bomo v zanki "debelega" vodnika izračunali poprečje pretokov, torej $\langle\phi\rangle$ oz. poprečje sklepov, torej $\langle\psi\rangle$. Enačbo 54.1 bomo pisali

$$\boxed{L_{jk} = \frac{\langle\psi_j^{(k)}\rangle}{i_k}} \tag{54.1a}$$

Sama odločitev na tem mestu ni "stoodstotno osnovana", vendar se bo kasneje – ob razgovoru o energiji magnetnega polja – potrdila kot pravilna.

Zgled 54.2

Izračunajmo induktivnost dvovoda dveh Cu vodnikov pravokotnega prereza, ki sta z zgornje in spodnje strani stisnjena s feromagnetikoma visoke permeabilnosti; slika 54.5. Špranja med feromagnetikoma, znotraj katere leži tudi dvovod, figurira kot



Slika 54.5: Med feromagnetika stisnjen simetričen dvovod in potek polja H_y v vmesnem prostoru.

razsežna zračna reža.

Če je μ_r velik, je padec magnetne napetosti po magnetiku zanemarljiv; polje H v magnetiku je praktično nič – glavnina tega polja je v reži. Iz zakonitosti preloma magnetnega polja je moč sklepati, da bo polje iz reže v magnetik vstopalo (izstopalo) pravokotno (v $\pm y$–smeri); vektor $\mathbf{H}$ bo tam imel le y–komponento: $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$. Zaradi simetrije bo $H_y(-x) = H_y(x)$. Za narisano pentljo $\mathcal{L}$ dobimo po Ampèrovem zakonu naslednje:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_y(0) - H_y(x))h = \begin{cases} 0 & |x| \leq x_1 \\ \dfrac{i}{b}(x - x_1) & x_1 < |x| \leq x_2 \\ i & |x| > x_2 \end{cases}$$

Magnetno polje obeh tokov se bo v območju $|x| > x_2$ kompenziralo, zato bo to področje brez polja; $H_y(|x| > x_2) = 0$. Iz tega in zgornjega neposredno sledi

$$H_y(x) = \begin{cases} \dfrac{i}{h} & |x| \leq x_1 \\ \dfrac{i}{hb}(x_2 - x) & x_1 < |x| \leq x_2 \\ 0 & |x| > x_2 \end{cases}$$

kar kaže tudi črtkan grafikon na sliki.

Po tem uvodu izračunajmo magnetni pretok v simetrični pravokotni zanki širine $2x_\mathrm{s}$ ($x_1 < x_\mathrm{s} < x_2$) in dolžine l vzdolž dvovoda, označimo ga s $\phi(x_\mathrm{s})$:

$$\phi(x_\mathrm{s}) = 2\mu_0 l \int_0^{x_\mathrm{s}} H_y(x)\, dx = \frac{\mu_0 i l}{hb} \left(b(2x_1 + b) - (x_2 - x_\mathrm{s})^2 \right)$$

Končno izračunajmo še poprečen pretok $\langle\phi\rangle$:

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{b}\int_{x_1}^{x_2} \phi(x_\mathrm{s})\,dx_\mathrm{s} = 2\frac{\mu_0 i l}{h}\left(x_1 + \frac{b}{3}\right) = \frac{\mu_0 i l}{h}\left(d + \frac{2b}{3}\right)$$

s tem pa tudi induktivnost,

$$L = \frac{\langle\phi\rangle}{i} = \frac{\mu_0 l}{h}\left(d + \frac{2b}{3}\right)$$

Dobljen rezultat je dovolj dober približek tudi v primeru, ko sta b in d dosti manjša od h in v bližini ni feromagnetnih sten – tračni dvovod.

Sedaj lahko tudi testiramo, kaj bi dobili za induktivnost, če bi vzeli pretok v najožji zanki ($d \times l$):

$$\frac{\phi(x_1)}{i} = \frac{\mu_0 l}{h} d$$

ali pa pretok v najširši zanki ($(d + 2b) \times l$):

$$\frac{\phi(x_2)}{i} = \frac{\mu_0 l}{h}(d + b)$$

Zgled 54.3

Izračunajmo induktivnost koaksialnega kabla. V zgledu 44.2 smo podali postopek za določitev magnetnega polja v kablu. Rezultat za $B_\varphi(\rho)$ ponovimo:

$$B_\varphi = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i}{2\pi\rho_1^2}\rho & \rho \le \rho_1 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 i}{2\pi\rho} & \rho_1 < \rho \le \rho_2 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 i}{2\pi\left(\rho_3^2 - \rho_2^2\right)}\left(\dfrac{\rho_3^2}{\rho} - \rho\right) & \rho_2 < \rho \le \rho_3 \end{cases}$$

(Zunaj je polje enako nič.) Kot splošno zanko vzemimo pravokotnik vzdolž kabla dolžine l, ki ima eno vzdolžno stranico na radiju ρ_n (v notranji žili), drugo pa na radiju ρ_z (v zunanji žili – plašču). Pretok v takšni zanki je določen z integralom,

$$\phi(\rho_\mathrm{n}, \rho_\mathrm{z}) = l\int_{\rho_\mathrm{n}}^{\rho_\mathrm{z}} B_\varphi\,d\rho$$

Če to izračunamo, dobimo:

$$\phi(\rho_\mathrm{n}, \rho_\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 i l}{2\pi}\left(\frac{\rho_1^2 - \rho_\mathrm{n}^2}{2\rho_1^2} + \ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\left(\rho_3^2 \ln\frac{\rho_\mathrm{z}}{\rho_2} - \frac{\rho_\mathrm{z}^2 - \rho_2^2}{2}\right)\right)$$

Ker pa je notranja stranica zanke kjerkoli v prerezu žile in zunanja stranica zanke tudi kjerkoli v prerezu plašča kabla, je potrebno za poprečen pretok $\langle\phi\rangle$ vzeti poprečje pretokov $\phi(\rho_\mathrm{n}, \rho_\mathrm{z})$, ko lokaciji stranic na radijih ρ_n in ρ_z "pretečeta" vsaka svoj prerez; pišemo:

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{\pi^2\rho_1^2(\rho_3^2 - \rho_2^2)}\int_{\rho_2}^{\rho_3}\left(\int_0^{\rho_1} \phi(\rho_\mathrm{n}, \rho_\mathrm{z}) 2\pi\rho_\mathrm{n}\,d\rho_\mathrm{n}\right) 2\pi\rho_\mathrm{z}\,d\rho_\mathrm{z}$$

Z notranjo integracijo dobimo

$$\langle\phi\rangle = \frac{2\mu_0 il}{\pi\rho_1^2(\rho_3^2-\rho_2^2)}\int_{\rho_2}^{\rho_3}\left(\frac{\rho_1^2}{8}+\frac{\rho_1^2}{2}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{\rho_1^2}{2(\rho_3^2-\rho_2^2)}\left(\rho_3^2\ln\frac{\rho_z}{\rho_2}-\frac{\rho_z^2-\rho_2^2}{2}\right)\right)\rho_z\,d\rho_z$$

Ko opravimo še z drugo, in poprečen pretok delimo s tokom, dobimo induktivnost kabla,

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{\rho_3^2}{2(\rho_3^2-\rho_2^2)}+\frac{\rho_3^4}{(\rho_3^2-\rho_2^2)^2}\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)$$

Pričakovali bi, da bo izraz za induktivnost preprostejši – če se spomnimo na kapacitivnost ($C = 2\pi\varepsilon_0 l/\ln(\rho_2/\rho_1)$). V čem je drugačnost? Elektrostatično polje določajo presežne elektrine, ki so izključno na površini prevodnika, in tudi njihovo polje je v zunanjosti. Magnetno polje je v tem drugačno: viri (toki) so vzdolž prevodnikov in magnetno polje je tako zunaj kot znotraj njih.

♣ Bralcu je prepuščeno, da si ogleda primer, ko je debelina stene plašča zanemarljiva ($\rho_2 \simeq \rho_3$); postopati je potrebno po l'Hospitalu; za L se dobi:

$$L \doteq \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\frac{1}{4}+\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \quad ♣$$

V začetku tega podnaslova (Dileme in težave pri ...) smo omenili kožni pojav, ki je izrazit pri visokih frekvencah. Resnično: tok žile se takrat "seli" ob površino, tok plašča pa ob notranji rob. Magnetno polje je takrat praktično le v izolatorju, zanemarljivo malo pa ga je v prevodniku. Zanka fluksa je takrat praktično med radijema ρ_1 in ρ_2, kar pomeni, da je

$$\phi \doteq \frac{\mu_0 il}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

in induktivnost (imenujemo jo tudi zunanja) je takrat:

$$L \doteq \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Pri visokofrekvenčnih vzbujanjih je karakterističen podatek voda t.i. *karakteristična upornost*, ki je takrat določena z razmerjem $\sqrt{L/C}$. Za primer kabla bi karakteristična upornost (R_k) bila:

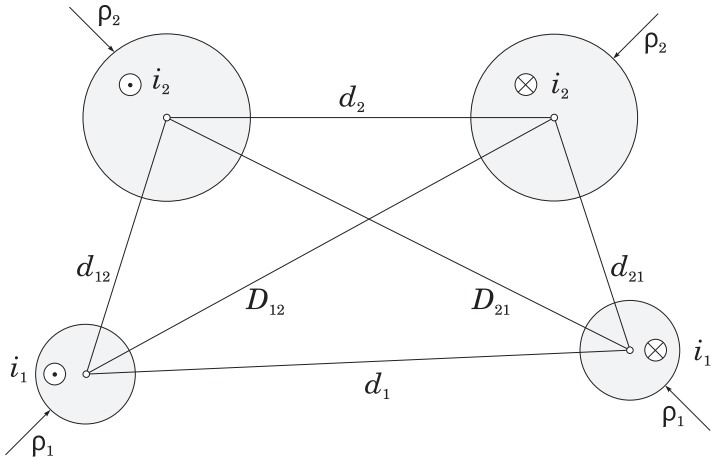
$$R_\mathrm{k} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Koren $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ je t.i. *valovna upornost* in je za vakuum približno 120π (oz. 377 Ω) – nekaj več o tem kasneje (razdelek 58).

Induktivnost kabla zaključimo s številskim zgledom: $\rho_2/\rho_1 = e$, induktivnost/m je 200 nH/m, kapacitivnost/m je 55.6 pF/m in R_k je 60 Ω.

Zgled 54.4

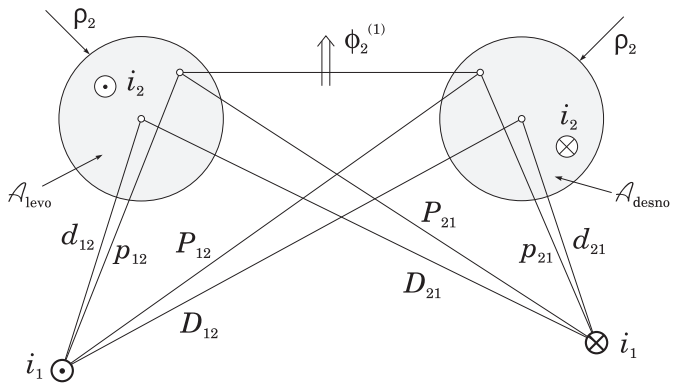
Oglejmo si še primer dveh vzporednih dvovodov; slika 54.6. Geometriji ρ_i in d_i podajata lastno geometrijo obeh dvovodov, geometriji d_{ij} in D_{ij} pa njuno medsebojno lego v prostoru. Dvovoda bodita dolžine l in na krajeh zaključena (npr. z ustreznima viroma in upornostima); razumemo ju kot dve dolgi vzporedni pravokotni tokovni zanki.



Slika 54.6: K induktivnostim dvovodov.

Pri tej nalogi nas bodo zanimale obe lastni in obe medsebojni induktivnosti. Debeline žic bomo smatrali kot "električno tanke" ($\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\rho < 0.5$), tokovne gostote po prerezih pa kot enakomerne. Izračunajmo najprej medsebojno induktivnost $L_{21} = \langle\phi_2^{(1)}\rangle/i_1$.

Magnetno polje prvega dvovoda poznamo v vseh točkah: v zunanjosti je določeno kot polje dveh linijskih tokov v oseh vodnikov. V zgledu 43.1 smo izvedli tudi pretok skozi njemu vzporedno pravokotno zanko. V našem primeru bo pravokotna zanka ležala z vzdolžnima stranicama znotraj drugega dvovoda, v prereznem delu obeh žic; slika 54.7. Pretok $\phi_2^{(1)}$ skozi eno od takšnih splošnih zank bomo zapisali (po



Slika 54.7: Geometrija k računanju medsebojne induktivnosti.

zgledu 43.1) kot vsoto:

$$\phi_2^{(1)} = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi}\ln\frac{P_{12}}{p_{12}} + \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi}\ln\frac{P_{21}}{p_{21}}$$

Podobnih zank je po prerezu neskončno: če fiksiramo desno stranico, se more leva "sprehajati" po celotnem prerezu ($\pi\rho_2^2$) – in obratno. Kot poprečni pretok bomo razumeli potemtakem tole:

$$\langle\phi_2^{(1)}\rangle = \frac{1}{(\pi\rho_2^2)^2}\int_{\mathcal{A}_{\text{levi}}}\left(\int_{\mathcal{A}_{\text{desni}}}\phi_2^{(1)}\,da\right)da$$

Izraz za $\phi_2^{(1)}$ moremo pisati kot vsoto (razliko) štirih sorodnih sumandov:

$$\phi_2^{(1)} = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \left(\ln P_{12} + \ln P_{21} - \ln p_{12} - \ln p_{21}\right)$$

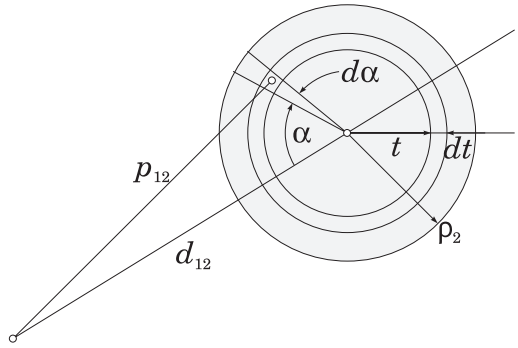
Če – in ko – uspemo priti do poprečja za en sumand, so vsi ostali s tem že določeni. Oglejmo si integracijo člena z $\ln p_{12}$:

$$Int. = \frac{1}{(\pi\rho_2^2)^2} \int_{\mathcal{A}_{\text{levi}}} \left(\int_{\mathcal{A}_{\text{desni}}} \ln p_{12}\, da \right) da$$

Funkcija $\ln p_{12}$ se pri integraciji po desnem vodniku obnaša kot konstanta, zato je ta integracija trivialna; ostane:

$$Int. = \frac{1}{\pi\rho_2^2} \int_{\mathcal{A}_{\text{levi}}} \ln p_{12}\, da$$

Ostane še integracija $\ln p_{12}$ po celotnem prerezu levega vodnika drugega dvovoda; integrirati je potrebno po vseh koncentričnih kolobarjih debelin $d\rho$ okrog osi; slika 54.8. Diferencial prereza zapišemo kot $da = t\, dt\, d\alpha$,



Slika 54.8: K integraciji logaritma po krožni površini.

$$Int. = \frac{1}{\pi\rho_2^2} \int_0^{\rho_2} \left(\int_0^{2\pi} \ln p_{12}\, d\alpha \right) t\, dt$$

Podintegralsko funkcijo oz. p_{12} izrazimo s kosinusnim stavkom:

$$p_{12}^2 = d_{12}^2 + t^2 - 2d_{12} t \cos\alpha = d_{12}^2 \left(1 - 2\frac{t}{d_{12}} \cos\alpha + \left(\frac{t}{d_{12}}\right)^2 \right)$$

s tem je

$$\ln p_{12} = \ln d_{12} + \frac{1}{2} \ln(1 - 2k\cos\alpha + k^2)$$

kjer je $k = t/d_{12} < 1$. Nadalje bomo zadnji logaritem pisali kot vsoto:

$$\ln\left(1 - 2k\cos\alpha + k^2\right) = \ln\left(1 - ke^{i\alpha}\right)\left(1 - ke^{-i\alpha}\right) = \ln\left(1 - ke^{i\alpha}\right) + \ln\left(1 - ke^{-i\alpha}\right)$$

kjer je i imaginarna enota, $i^2 + 1 = 0$. Za oba sumanda uporabimo razvoj logaritma v Taylorjevo neskončno vrsto; imamo:

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad |x| < 1$$

in

$$\ln p_{12} = \ln d_{12} - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n}e^{i\alpha n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n}e^{-i\alpha n}\right)$$

po združitvi vsot pa še:

$$\ln p_{12} = \ln d_{12} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n}\cos n\alpha$$

Integral $\ln p_{12}$ po kotu α od nič do 2π je tako le:

$$\int_0^{2\pi} \ln p_{12}\, d\alpha = 2\pi \ln d_{12}$$

in

$$Int. = \frac{1}{\pi\rho_2^2}\int_0^{\rho_2} 2\pi \ln d_{12}\; t\, dt = \ln d_{12}$$

Očitno se poprečje logaritma splošne razdalje p_{12} prevede v funkcijsko vrednost $\ln p_{12}$ v osi vodnika. Poprečni pretok $\langle\phi_2^{(1)}\rangle$ je takle:

$$\langle\phi_2^{(1)}\rangle = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi}\ln\frac{D_{12}D_{21}}{d_{12}d_{21}}$$

s tem pa je določena tudi medsebojna induktivnost,

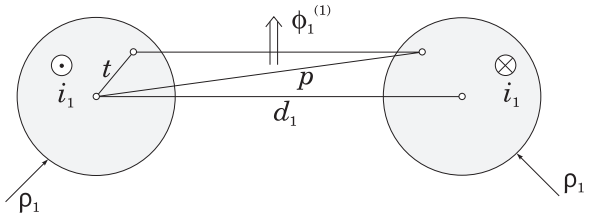
$$L_{21} = \frac{\langle\phi_2^{(1)}\rangle}{i_1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{D_{12}D_{21}}{d_{12}d_{21}}$$

Če rezultat interpretiramo, potem induktivnost L_{21} ustreza normiranemu pretoku spodnjega dvovoda med osema zgornjega dvovoda. Velja pa tudi obratno: L_{12} bo normiran pretok zgornjega dvovoda med osema spodnjega dvovoda. S pomočjo slike 54.6 zapišemo to kot

$$L_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{D_{21}D_{12}}{d_{21}d_{12}}$$

Očitno sta medsebojni induktivnosti enaki: $L_{12} = L_{21}$.

Preostaneta nam še obe lastni induktivnosti; oglejmo si prvo!; slika 54.9. Pretok



Slika 54.9: K lastni induktivnosti dvovoda.

$\phi_1^{(1)}$ skozi splošno zanko lahko zapišemo kot vsoto prispevkov levega in desnega toka. Zaradi veljavnosti superpozicije je dovolj, če izračunamo poprečje pretoka od npr. levega vodnika in množimo z dve,

$$\langle\phi_1^{(1)}\rangle = \frac{2}{(\pi\rho_1^2)^2}\int_{\mathcal{A}_{\text{levi}}}\left(\int_{\mathcal{A}_{\text{desni}}}\left(\phi_1^{(1)}\right)_{\text{levega}} da\right) da$$

Po zgledu 44.3 je pretok $(\phi_1^{(1)})_{\text{levega}}$ skozi zanko, ki jo opredeljujeta razdalji t in p, enak razliki:

$$\left(\phi_1^{(1)}\right)_{\text{levega}} = \psi(p) - \psi(t) = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{p}{\rho_1}\right) - \frac{\mu_0 i_1 l}{4\pi\rho_1^2}t^2$$

Pri integraciji po desnem vodniku je t konstanten, integracija $\ln p$ po prerezu pa se spet izraža z medosno razdaljo d_1; dobimo

$$\langle\phi_1^{(1)}\rangle = \frac{2}{(\pi\rho_1^2)^2}\int_{\mathcal{A}_{\text{levi}}}\left(\frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi}\pi\rho_1^2\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{d_1}{\rho_1}\right) - \frac{\mu_0 i_1 l}{4\pi\rho_1^2}\pi\rho_1^2 t^2\right) da$$

ko integriramo še po levem, pišemo za da spet $2\pi t\,dt$ in dobimo

$$\langle\phi_1^{(1)}\rangle = \frac{\mu_0 i_1 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d_1}{\rho_1}\right)$$

S tem je lastna induktivnost L_{11} $\left(= \langle\phi_1^{(1)}\rangle/i_1\right)$ že določena,

$$L_{11} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d_1}{\rho_1}\right)$$

in enako tudi še druga,

$$L_{22} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d_2}{\rho_2}\right)$$

Zanimiv je primer, ko se vodnika polmera ρ skoraj dotikata ($d \simeq 2\rho$). Magnetni pretok v špranji je sicer enak nič, induktivnost pa (kljub temu) "je",

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln 2\right)$$

in je ~ 377 nH/m. Druga skrajnost pa je, ko sta žici zelo narazen ($d \gg \rho$),

$$L \doteq \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{\rho}$$

Pri $d/\rho = 20$ je približna vrednost 1.2 μH/m, prava pa 1.3 μH/m. Odstopanje nikakor ni tako majhno ($\sim 8\%$). Res pa je še nekaj drugega: ko je frekvenca toka visoka, in je kožni efekt izražen, je glavnina toka ob površini, s tem pa je tudi magnetni pretok praktično le še v zunanjosti žic. V takem primeru je zgornji približek že skoraj korekten. Če dodamo k temu še približek za kapacitivnost,

$$C \doteq \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln(d/\rho)}$$

dobimo za karakteristično upornost tole:

$$R_{\text{k}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln\frac{d}{\rho}$$

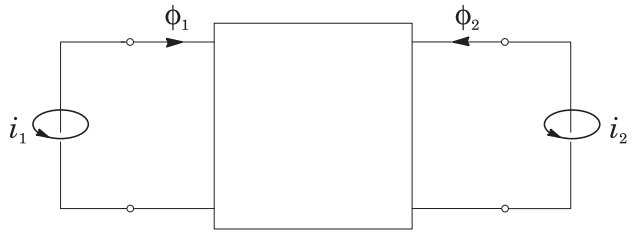
Ob prejšnjih podatkih je $R_{\text{k}} \doteq 360\ \Omega$.

♣ Po vsem tem uporabljenem orodju ne bo bralcu težko pokazati, da je induktivnost dvovoda, ki bi imel eno žico polmera ρ_1, drugo polmera ρ_2 in medosno razdaljo d, določena z

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\right) \quad ♣$$

Vzajemnost medsebojnih induktivnosti. Vzajemnost smo že omenjali, pa tudi dosedanji računi so to potrjevali. Pokažimo to lastnost splošno, seveda, če je prostor magnetenja linearen.

Zamislimo si dve prevodni zanki s tokoma i_1 in i_2. Skupno magnetno polje $\mathbf{B}$ moremo – vsaj vizuelno – predstaviti z večjim ali manjšim številom pretočnih cevk, znotraj katerih se pretok ohranja. Glede na modeliranje magnetnih vezij (razdelek 51), moremo vsak del pretočnice razumeti kot vejo magnetnega vezja s pre(tokom) ϕ_p; vsaki od njih moremo prirediti tudi magnetno upornost $\mathcal{R}_p$. Če zanka toka objame takšno pretočnico, moremo v to vejo "vgraditi" vir magnetne napetosti Θ_gp. Od obeh tokovnih zank in vmesnega linearnega prostora dobimo kar naenkrat magnetno vezje. Pretočnice skozi prvo ali drugo tokovno zanko združimo v ϕ_1 in ϕ_2, vse druge veje "vezja", ki se tokovnih zank ne tičejo, pa "damo" v pasivni "magnetni četveropol"; slika 54.10. Po stavku o recipročnosti iz



Slika 54.10: Recipročnost v linearnem magnetnem vezju.

razdelka 38 bi pisali:

$$\frac{\phi_1^{(2)}}{i_2} = \frac{\phi_2^{(1)}}{i_1}$$

in brali: razmerje med posledico v eni in vzrokom v drugi zanki je stalnica. In kaj je v primeru več zavojev toka na eni in drugi strani četveropola? Ti zavoji niso ovoji, le pentlja toka je svojsko oblikovana in na koncu v sebe sklenjena. Pa tudi magnetni pretok skozi več zavojev je le pretok (sklep) skozi spiralno ploskev, ki je sicer prostorsko zamotana, vendar še vedno ploskev; takšen pretok smo (zaradi razločka) označili s ψ. Recipročnost moremo tako "podaljšati" in pisati:

$$\frac{\psi_1^{(2)}}{i_2} = \frac{\psi_2^{(1)}}{i_1}$$

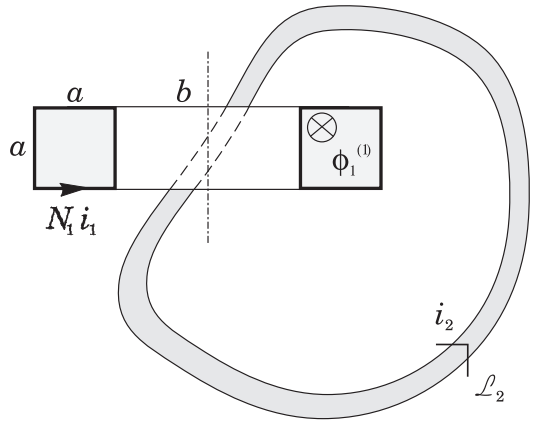
Dogovor o poprečnem pretoku in sklepu še vedno velja, tako da moremo k definiciji med-

sebojne induktivnosti dodati še lepo lastnost linearnih sistemov – vzajemnost[1] namreč,

$$\boxed{L_{ji} = L_{ij}} \tag{54.2}$$

Zgled 54.5

Izračunajmo medsebojno induktivnost toroidnega navitja in tokovne zanke skozi njo; slika 54.11. Katero od medsebojnih izračunamo, je vseeno, saj velja vzajemnost.



Slika 54.11: Toroidna tuljava in zanka.

Očitno bi imeli veliko težav, če bi hoteli izračunati L_{12}, saj je $\mathcal{L}_2$ neka nedefinirana pentlja. Nalogo obrnimo: izračunajmo L_{21}. Magnetni pretok toroidnega navitja je znan,

$$\phi_1^{(1)} = \frac{\mu_0 N_1 i_1 a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}$$

Ta pretok gre v celoti skozi drugo zanko, vendar v negativni smeri glede na njen obhod; $\phi_2^{(1)} = -\phi_1^{(1)}$. Dalje je

$$L_{21} = -\frac{\mu_0 N_1 a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}$$

[1]Kot neobvezno dodajmo k vzajemnosti tole. Vektorski potencial ene zanke na mestu druge je določen z integralom,

$$\mathbf{A}_1(T_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}_1} \frac{i_1\, d\mathbf{l}_1}{R_{12}}$$

magnetni sklep v drugi zanki pa je njegov krivuljni integral,

$$\psi_2^{(1)} = \oint_{\mathcal{L}_2} \mathbf{A}_1(T_2) \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}_1} \oint_{\mathcal{L}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R_{12}}$$

Simetrična oblika dvojne integracije daje zvezo: $\psi_2^{(1)}/i_1 = \psi_1^{(2)}/i_2$. Nakazana integracija je tudi iztočnica za določanje lastnih in medsebojnih induktivnosti odprtih kontur,

$$L_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}_1} \int_{\mathcal{L}_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_{1'}}{R_{11'}} \qquad L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}_1} \int_{\mathcal{L}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R_{12}}$$

na primer daljic – kratkomalo segmentov.

Naj nas negativni predznak ne moti; ako bi nas zanimala inducirana napetost v toroidni tuljavi,

$$u_{\text{ind.1}} = -\left(L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt}\right)$$

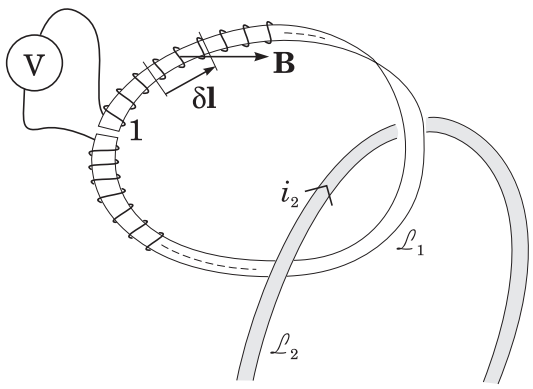
in bi kot L_{12} vstavili negativno vrednost, bi dobili pravilno inducirano napetost; za L_{11} bi (jasno) pisali

$$L_{11} = \frac{\mu_0 N_1^2 a}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}$$

O samem predznaku bomo še govorili, vendar moremo že tu ugotoviti tole: če se referenčna smer magnetnega pretoka v zanki ujema s smerjo magnetnega polja sosednje zanke, bo medsebojna induktivnost pozitivna, v nasprotnem pa negativna. V zgledu 54.4 smo analizirali dva dvovoda. Če bi referenčno smer toka v enem od dvovodov obrnili, bi bila medsebojna induktivnost negativna (zamenjala bi se D in d).

Zgled 54.6

Rogowskega tuljavica. Je posebne vrste tuljava, ki služi merjenju toka objetega vodnika; slika 54.12. Osnova te tuljavice je tanek (usnjen) jermen (prereza S), ki



Slika 54.12: Tuljava Rogowskega.

je gosto in enakomerno ovit z žico; gostota ovojev/m bodi N'. Na segmentu $\delta\mathbf{l}$ je število ovojev $N'\delta l$. Vsi ovoji so na tem mestu v praktično enakem polju $\mathbf{B}_2$ (toka i_2), zato se na tem segmentu inducira napetost

$$\delta u_{\text{ind.1}} = -\frac{d}{dt}N'\delta l\mathbf{B}_2\cdot\frac{\delta\mathbf{l}}{\delta l}S = -\frac{d}{dt}N'S\mu_0\mathbf{H}_2\cdot\delta\mathbf{l}$$

Celotno inducirano napetost bi dobili s seštevanjem oz. integracijo,

$$u_{\text{ind.1}} = -N'S\mu_0\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{L}_1}\mathbf{H}_2\cdot d\mathbf{l}$$

ker pa je kontura $\mathcal{L}_1$ sklenjena, je po Ampèrovem zakonu integral po $\mathcal{L}_1$ enak objetemu toku; sledi:

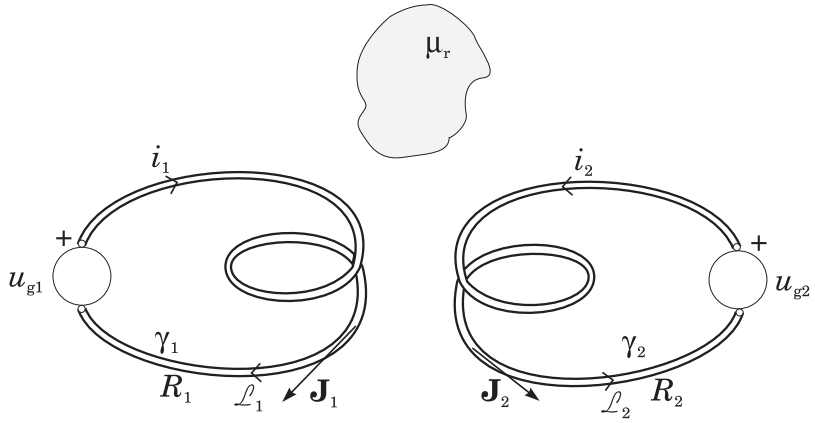
$$u_{\text{ind.1}} = -N'S\mu_0\frac{di_2}{dt}$$

Konstanta pred odvodom je ravno medsebojna induktivnost L_{12} $(= N'S\mu_0)$. Naj je $i_2 = I\cos\omega t$; inducirana napetost bo harmonična,

$$u_{\text{ind.1}} = \omega L_{12} I \sin\omega t$$

amplituda te napetosti na V-metru (visoke upornosti) pa bo enaka $\omega\mu_0 N'SI$.

Tuljava (zanka) kot gradnik električnih vezij. Čas je, da prevodnim zankam s pripadajočimi induktivnostmi – kot indukcijskimi koeficienti – priredimo ekvivalentne elemente električnih vezij, katere bomo v nadaljevanju "obvladovali" le še z integralnimi količinami – toki in napetostmi. Vzemimo zaenkrat dve prevodni zanki (navitji) z znanimi induktivnostmi, upornosti zank naj sta R_1 in R_2, prereza žic naj ustrezata električni tankosti; zanki naj sta vzbujani z viroma napetosti u_{g1} in u_{g2}; slika 54.13.



Slika 54.13: Dve magnetno sklopljeni zanki v magnetno linearni sredini.

V eni ali drugi zanki je gostota toka ($\mathbf{J}$) določena z razširjenim Ohmovim zakonom,

$$\mathbf{J}_1 = \gamma_1(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{g1}}) \qquad \mathbf{J}_2 = \gamma_2(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{g2}})$$

kjer sta $\mathbf{E}_{\text{g1}}$ in $\mathbf{E}_{\text{g2}}$ gonilni jakosti obeh virov. Po indukcijskem zakonu bomo integral električne poljske jakosti vzdolž zanke[2] pisali kot:

$$\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}_1} \left(\frac{\mathbf{J}_1}{\gamma_1} - \mathbf{E}_{\text{g1}}\right)\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\psi_1}{dt}$$

Krivuljni integral $\mathbf{J}_1/\gamma_1$ da ravno $R_1 i_1$ (to poznamo še iz časovno konstantnih polj), krivuljni integral $\mathbf{E}_{\text{g1}}$ pa da u_{g1}; podobno je tudi z integracijo v drugi zanki. Po ureditvi dobimo:

$$-u_{\text{g1}} + R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = 0 \qquad -u_{\text{g2}} + R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = 0$$

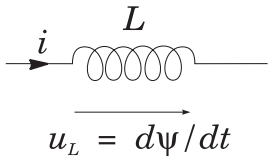
[2]Tu bi za $\mathcal{L}_1$ lahko vzeli katerokoli zanko znotraj "električno" tanke žice; takrat bi inducirano napetost pisali kot $-d\langle\psi_1\rangle/dt$.

Eno ali drugo enačbo beremo (II. Kirchhoffov zakon): napetost vira je enaka vsoti napetosti (padcev napetosti) v smeri toka. Člen Ri je padec napetosti zaradi izgubne upornosti zanke, člen $d\psi/dt$ pa je padec napetosti zaradi časovne spremembe magnetnega sklepa v zanki; trenutna polariteta te napetosti ni vezana le na trenutno smer toka v zanki, ampak je odvisna od obeh tokov (oz. njunih odvodov) in ustreznih induktivnosti.

Če lastni induktivnosti (L) priredimo koncentriran element – tuljavo (simbol zanjo je na sliki 54.14), moremo padec napetosti na njej (v smeri toka) pisati kot odvod

$$\boxed{u_L = \frac{d\psi}{dt}} \tag{54.3}$$

(Enačbo smiselno dopolnjujeta referenčni oznaki toka in napetosti na sliki.)

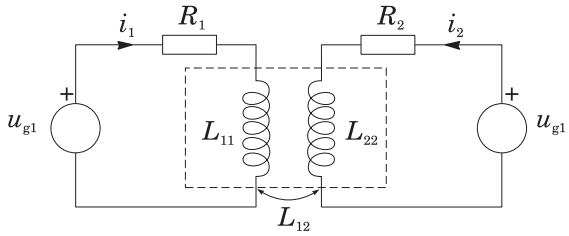


Slika 54.14: Tuljava kot koncentriran element.

Če je v elektromagnetni strukturi več (n) tokovnih zank, potem priredimo vsaki od njih pripadajoč koncentriran element – tuljavo – z induktivnostjo L_{jj}, napetost na njej pa zapišemo kot vsoto,

$$u_{Lj} = \frac{d\psi_j}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\psi_j^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} L_{jk}\frac{di_k}{dt}$$

K splošni konstelaciji dveh zank s slike 54.13 moremo potemtakem prirediti električno vezje koncentriranih elementov; slika 54.15. Vezje tvorita dva – galvansko ločena –



Slika 54.15: Modelno vezje sklopljenih tokokrogov.

tokokroga, ki ju oblikujeta oba vira in upora, ki pripadata upornostim zank, ter dve tuljavi, katerih induktivnosti ustrezata lastnim induktivnostim zank in sta lastni le prvi oz. le drugi zanki.

Medsebojnim induktivnostim v takšnem modelnem vezju sicer ne priredimo adekvatnih koncentriranih elementov, ju pa upoštevamo pri zapisu napetosti vzdolž obeh zank (oz. na koncentriranih elementih); bomo pa kasneje spoznali še drugačno modelno električno vezje, pri katerem bomo ravno medsebojni induktivnosti priredili koncentriran element –

lastnim pa ne (razdelek 67). (Predstavljeno modelno vezje ohranja tudi izvorno galvansko ločitev obeh tokokrogov s slike 15.12.)

Modelno vezje s slike 54.15 v elektrotehniki pogosto srečujemo – še posebno magnetno povezavo v označenem okvirju –, kot na primer pri transformatorju, pri sklopljenih nihajnih krogih, pri modeliranju električnih strojev (motorjev, generatorjev), pri oscilatorju, pri študiju motenj v informacijskih vodih in podobno.

Posplošitev na več zank od tu dalje ni več težka. Vsaki zanki pripada v modelnem vezju svoj tokokrog, ki vsebuje zaporedno kombinacijo upora (upornost zanke) in tuljave (lastna induktivnost). Zanke imajo lastne vire, lahko pa so nekatere tudi brez njih. V splošni (j-ti) zanki je napetostna enačba takšnale:

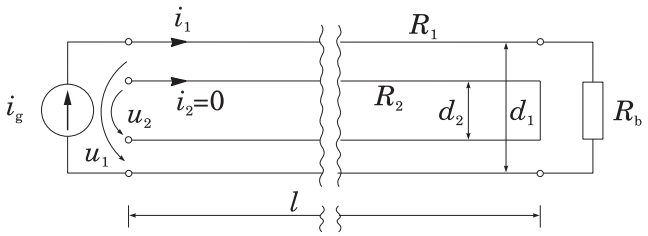
$$-u_{\mathrm{g}j} + R_j i_j + \sum_{k=1}^{n} L_{jk} \frac{di_k}{dt} = 0$$

Z matematičnega vidika je vsaka napetostna enačba diferencialna. (Običajno računamo toke v zankah; ti pa se nahajajo pod znakom odvoda – zato diferencialna.) Ker pa je takšnih enačb več, imamo opraviti s sistemom (linearnih – koeficienti so konstante) diferencialnih enačb; reševanju teh se bomo posvetili v zadnjem poglavju.

In kje srečamo tako pestro magnetno povezanost? Daljnovod je že takšen; vsak fazni vodnik tvori z zemljo (kot povratnim vodnikom) elementarno zanko. Običajni trifazni daljnovod ima tri fazne vodnike (tri zanke – tri lastne induktivnosti) in šest medsebojnih induktivnosti. Če pa je daljnovod dvosistemski, je prvih šest, drugih pa že trideset (s tem, da sta paroma dve medsebojni enaki). V razdelku 23 smo govorili o delnih kapacitivnostih, kar pomeni, da moremo večvodniški sistem modelirati z razvejanim električnim vezjem uporov, tuljav in kondenzatorjev, s čimer zajamemo vse elektromagnetne povezave med vodniki. Analiza takšnih sistemov se v končnem prevede na reševanje adekvatnih napetostno-tokovnih enačb.

Zgled 54.7

Oglejmo si primer dveh vzporednih dvovodov: prvi je vzbujan s tokom i_{g}, drugi pa je enostransko odprt ($i_2 = 0$); slika 54.16. Podatki so: $l = 1$ km, $d_1 = 40$ cm,



Slika 54.16: Dva magnetno sklopljena dvovoda.

$d_2 = 20$ cm (drugi dvovod leži simetrično v prvem), polmer žic $\rho_0 = 1$ mm, $\gamma_{\mathrm{Cu}} = 56.10^6$ S/m, $i_{\mathrm{g}} = I_{\mathrm{g}} \cos \omega t$, $I_{\mathrm{g}} = 2$ A, $\omega = 10^4 \pi$ s^{-1}, $R_{\mathrm{b}} = 100\ \Omega$.

Pri električno kratkih vodih ($l \ll c/f$) in nizkih napetostih se pokaže, da je dovolj, če zanki modeliramo brez kondenzatorjev. Upornosti in induktivnosti so:

$$R_1 = R_2 = \frac{2l}{\gamma_{\mathrm{Cu}} \pi \rho_0^2} = 11.4\ \Omega \qquad L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{(d_1 + d_2)/2}{(d_1 - d_2)/2} = 0.44\ \mathrm{mH}$$

$$L_{11} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d_1}{\rho_0}\right) = 2.50 \text{ mH} \qquad L_{22} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d_2}{\rho_0}\right) = 2.22 \text{ mH}$$

Napetost u_1 bo:

$$u_1 = (R_1 + R_\mathrm{b})i_1 + L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} = (R_1 + R_\mathrm{b})i_\mathrm{g} + L_{11}\frac{di_\mathrm{g}}{dt}$$

napetost u_2 pa:

$$u_2 = R_2 i_2 + L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} = L_{21}\frac{di_\mathrm{g}}{dt}$$

V enačbi vnesemo tok i_g in dobimo obe napetosti:

$$u_1 = (R_1 + R_\mathrm{b})I_\mathrm{g}\cos\omega t - \omega L_{11} I_\mathrm{g}\sin\omega t \qquad u_2 = -\omega L_{21} I_\mathrm{g}\sin\omega t$$

V odprtem dvovodu niha napetost med sponkama harmonično; amplituda nihanja je $\omega L_{21} I_\mathrm{g} = 27.6$ V.

Tudi napetost na vhodu v prvi dvovod niha harmonično. Člena s $\cos\omega t$ in $\sin\omega t$ združimo, $a\cos x - b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x + \arctan b/a)$, in dobimo:

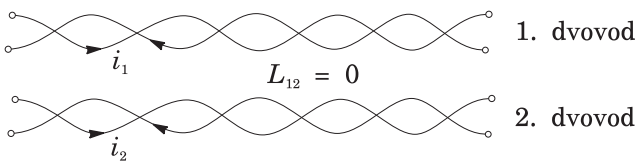
$$u_1 = \sqrt{(R_1 + R_\mathrm{b})^2 + (\omega L_{11})^2}\, I_\mathrm{g}\cos\left(\omega t + \arctan\frac{\omega L_{11}}{R_1 + R_\mathrm{b}}\right)$$

Amplituda vhodne napetosti je $\sqrt{(R_1 + R_\mathrm{b})^2 + (\omega L_{11})^2}\, I_\mathrm{g} = 272.6$ V, amplituda napetosti na bremenu pa je $R_\mathrm{b} I_\mathrm{g} = 200$ V.

Sklopni faktor. V magnetnih povezavah vpeljujemo t.i. *sklopni faktor* k, ki govori o "čvrstosti" oz. stopnji magnetne povezanosti med dvema zankama (navitjema, tuljavama). Sklopni faktor k_{ij} med i-to in j-to zanko je definiran kot

$$\boxed{k_{ij}^2 = \frac{\psi_i^{(j)}\psi_j^{(i)}}{\psi_i^{(i)}\psi_j^{(j)}}} \tag{54.4}$$

glede na definicijo induktivnosti pa je enak tudi razmerju $|L_{ij}|/\sqrt{L_{ii}L_{jj}}$. Faktor sklopa je nenegativen in bo očitno nič, ko bo $L_{ij} = 0$. Takrat pravimo, da sta zanki magnetno nepovezani; L_{ij} pa bo nič le, če bo magnetni sklep (pretok) ene zanke skozi drugo enak nič. To je aktualno takrat, kadar hočemo, da se en tokokrog (preko medsebojne induktivnosti) ne "meša" v drugega. V telefoniji dosežemo to tako, da para žic med seboj prepletamo; slika 54.17. Spet v drugem primeru pa želimo, da je sklop čim boljši (popolnejši); npr.



Slika 54.17: Magnetno nepovezana dvovoda.

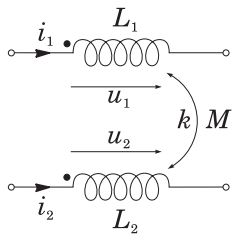
transformator. Očitno bo sklop med zankama "idealen" takrat, ko bo magnetni pretok

ene zanke v celoti dosegel tudi drugo. Ta ideal se v dobršni meri doseže z navitjema na skupnem feromagnetnem jedru, ki pretok enega navitja optimalno posreduje tudi skozi drugo. V zgledu 54.1 smo za medsebojno induktivnost (L_{12}) idealno povezanih navitij dobili geometrijsko sredino med L_{11} in L_{22}; faktor sklopa je takrat ena. To je teoretična zgornja meja, drugače pa je k nekje med nič in ena. V zvezi s tem se včasih govori tudi o t.i. *faktorju stresanja* ($\sigma = 1 - k^2$), ki, za razliko od k, govori o stopnji nepovezanosti med zankama. Ime "stresanje" pač zato, ker se del pretoka ene zanke "otrese", predno zajame drugo zanko in je kot tak zanjo "irelevanten".

V elektrotehniški praksi je sklop dveh tuljav izredno pogost, zato je v zvezi s tem ustaljen naslednji dogovor. Če imata tuljavi (zanki) lastni induktivnosti L_1 in L_2 in je med njima sklopni faktor k, potem je njuna medsebojna induktivnost (označuje se z M) določena kot

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \qquad\qquad M > 0$$

Da se pa "informacija" o predznaku medsebojne induktivnosti (po definiciji je lahko ≥ 0 ali < 0), ki ga določata izbrani referenčni smeri obhodov in geometrija zank, ne bi izgubila, opremimo obe tuljavi s pikama; slika 54.18. Dogovor je takle: če toka "tečeta" v piko,



Slika 54.18: K dogovoru o označevanju sklopljenih tuljav.

potem se magnetni pretok prve (druge) tuljave skozi drugo (prvo) podpira s poljem druge (prve) tuljave. Kratko tudi rečemo: magnetna pretoka se podpirata.

Obe napetosti na tuljavah takrat pišemo kot vsoti:

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad\qquad u_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

Kaj to pomeni? Ko bomo analizirali dano vezje, ki vsebuje tudi sklopljeni tuljavi (ki bosta označeni s pikama), bomo smeri tokov v obeh vejah, ki vsebujeta ti tuljavi, izbrali – to pa smemo – "v piko". Napetosti na obeh tuljavah bomo nato – brez pomišljanja – pisali kot vsoti, račun sam pa bo resnični smeri obeh tokov postavil na "pravi mesti".

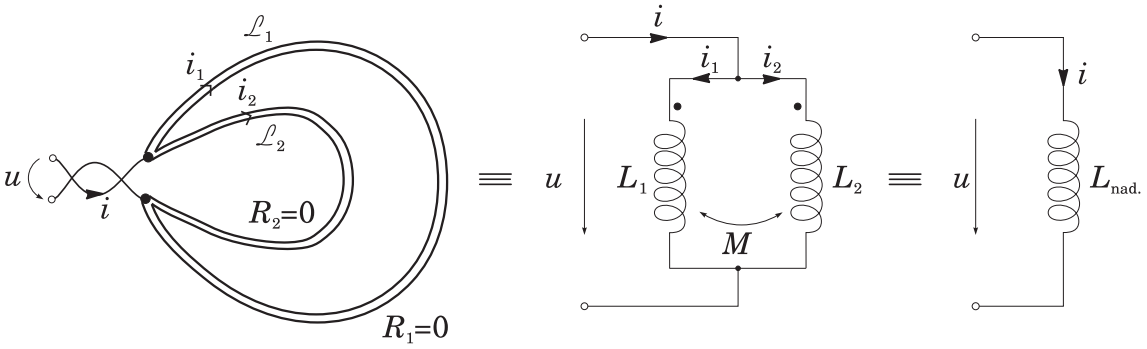
Zgled 54.8

Izračunajmo nadomestno induktivnost dveh vzporednih, magnetno sklopljenih brezizgubnih tuljav; slika 54.19. Integral $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ vzdolž konture $\mathcal{L}_1$ in nazaj preko $\mathcal{L}_2$ da tole:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\gamma}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\psi_2}{dt}$$

Ker pa sta tuljavi brezizgubni ($\gamma \to \infty$), sledi: $d\psi_1/dt = d\psi_2/dt$ oz. $u_1 = u_2 = u = d\psi_1/dt = d\psi_2/dt$. Zapišimo obe napetosti, odvod di/dt pa označimo kot i'; dobimo:

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 i_1' + M i_2' = u$$



Slika 54.19: Dve vzporedni sklopljeni tuljavi.

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = Mi_1' + L_2 i_2' = u$$

Iz enačb izrazimo oba odvoda,

$$i_1' = \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2} u \qquad i_2' = \frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2} u$$

Upoštevamo še I. Kirchhoffov zakon, $i_1 + i_2 = i$ oz. $i_1' + i_2' = i'$, pa dobimo:

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} i' = L_{\text{nad.}} i' \qquad L_{\text{nad.}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

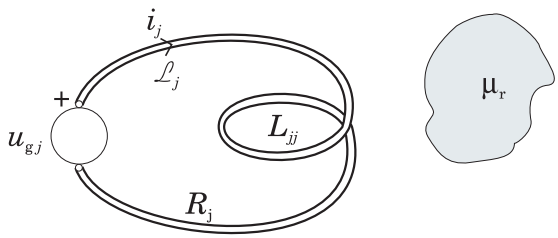
♣ Bralec naj določi $L_{\text{nad.}}$ pri $L_1 = L_2 = L$; in še: kolikšne so nadomestne induktivnosti pri obrnjenih pikah ter pri obeh zaporednih vezavah magnetno sklopljenih tuljav? ♣

55. Energija magnetnega polja

Vrnimo se spet nekoliko nazaj. Prisotnost magnetnega polja detektiramo z Ampèrovo silo ali s Faradayevo indukcijo. Kot splošen okvir moremo sprejeti ugotovitev, da se prisotnost magnetnega polja manifestira v opravljenem delu: ali se zaradi magnetnih sil premakne zanka toka v prostoru ali pa se zaradi elektromotornih sil inducira v zanki tok in se po Joulovem zakonu sprošča toplotna energija. Po vsem tem je magnetno polje očitno energijsko akumulabilen sistem. Vprašanja okrog tega so "jasna": kolikšna je ta energija, od česa je odvisna, kje je te več in kje manj, kako jo shranimo in koliko se je more vrniti (reverzibilnost, ireverzibilnost), itd?

Če smo začetna razmišljanja o gradnji električnega polja v elektrostatiki vezali na nek abstrakten vnos elektrin v opazovan prostor (brez eksplicitnega električnega vira), potem si kaj takega pri tokih in njim lastnem magnetnem polju težko predstavljamo, zato bodo vsa tovrstna razmišljanja vezana na vire, ki posredno vzbujajo toke v zankah. Vprašanj je kar nekaj – začnimo z manj "trdovratnimi".

Magnetna energija linearnih sistemov. Imejmo v prostoru n-zank, ki so vzbujane z viri znanih napetosti $u_{\text{g}j}$. Vsaki zanki pripada upornost R_j in induktivnost L_{jj}, magnetne povezave med njimi pa podajajo medsebojne induktivnosti L_{jk}; v prostoru prisotni



Slika 55.1: Splošna, j-ta zanka v linearni sredini.

magnetiki so linearni. Splošno (j-to) zanko kaže slika 55.1. Napetostno enačbo te zanke zapišemo kot

$$u_{gj} = R_j i_j + \frac{d\psi_j}{dt} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Množimo jo z lastnim tokom in zmnožek integrirajmo po času, od t_1 do kasnejšega trenutka t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} u_g i_j \, dt = R_j \int_{t_1}^{t_2} i_j^2 \, dt + \int_{t_1}^{t_2} i_j \frac{d\psi_j}{dt} \, dt$$

Levi člen enačbe je delo $A_{gj}(t_1, t_2)$ j-tega vira od t_1 do t_2, produkt $u_{gj} i_j$ pa je trenutna moč vira. V danem intervalu časa more A_{gj} zavzeti vse končne vrednosti; tudi negativne – takrat je generator v t.i. porabniškem režimu. Prvi člen z desne strani so t.i. joulske izgube, ki se kot toplota sproščajo v j-ti zanki – so pozitivne, $W_{tj}(t_1, t_2) > 0$. Zadnji člen zapišimo krajše:

$$\int_{t_1}^{t_2} i_j \frac{d\psi_j}{dt} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} i_j d\psi_j = \int_{\psi_j(t_1)}^{\psi_j(t_2)} i_j d\psi_j$$

kjer se časovna integracija formalno prenese na sklep med obema trenutkoma. Glede na vsebino A_{gj} in W_{tj} se bo slednji integral očitno "tikal" magnetnega polja. Da bi dobili celovito energijsko bilanco magnetno sklopljenih tokokrogov, moramo opisano postoriti za vseh n-zank in vložke generatorjev sešteti; dobimo:

$$A_g(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{n} A_{gj}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{n} R_j \int_{t_1}^{t_2} i_j^2 \, dt + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} i_j \, d\psi_j$$

Prva vsota na desni je pomensko razvidna; to so kratkomalo celotne joulske izgube v vseh n zankah med t_1 in t_2; $W_t(t_1, t_2)$. In kaj je z drugo vsoto? Magnetni sklep ψ_j zapišimo kot vsoto delnih sklepov ($\psi_j^{(k)} = L_{jk} i_k$), pa dobimo

$$A_g(t_1, t_2) = W_t(t_1, t_2) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L_{jk} \int_{t_1}^{t_2} i_j \, di_k$$

Oglejmo si splošen sumand in ga integrirajmo "per-partes":

$$\begin{aligned} L_{jk} \int_{t_1}^{t_2} i_j \, di_k &= L_{jk} \left[i_j i_k \right]_{t_1}^{t_2} - L_{jk} \int_{t_1}^{t_2} i_k \, di_j \\ &= \left[i_j \psi_j^{(k)} \right]_{t_1}^{t_2} - L_{kj} \int_{t_1}^{t_2} i_k \, di_j \end{aligned}$$

Dvojna vsota daje:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}\int_{t_1}^{t_2} i_j\,di_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[i_j\psi_j^{(k)}\right]_{t_1}^{t_2} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{kj}\int_{t_1}^{t_2} i_k\,di_j$$

Obe krajni dvojni sumaciji sta enaki – le vrstni red seštevanja je obrnjen –, zato je

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}\int_{t_1}^{t_2} i_j\,di_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[i_j\psi_j\right]_{t_1}^{t_2}$$

Energijska bilanca je s tem določena:

$$A_{\mathrm{g}}(t_1,t_2) = W_{\mathrm{t}}(t_1,t_2) + \left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} i_j\psi_j\right]_{t_1}^{t_2}$$

Da bi energijski sumand v oglatem oklepaju lažje prepoznali, zasledujmo naslednji razmislek. Vzemimo kot začetni trenutek $t = 0$, do katerega so vse zanke še brez toka, $i_j(0^-) = 0$, in ob katerem vse vire (ti naj so enosmerni) hkrati vključimo; $u_{\mathrm{g}j}(t \geq 0) = U_{\mathrm{g}j}$. V zankah se bodo pojavili toki določenih časovnih oblik; kakšnih oblik so, nas naj trenutno ne zanima. Energijsko bilanco med 0 in t bomo pisali takole:

$$A_{\mathrm{g}}(0,t) = W_{\mathrm{t}}(0,t) + \left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} i_j\psi_j\right]_{0}^{t}$$

Funkciji A_{g} in W_{t} sta zvezni; v nasprotnem bi bila moč neskončna – kar je nefizikalno. Zvezne funkcije pa so tudi toki in sklepi; v nasprotnem bi bila $u_{\mathrm{g}j}$, ki je $R_j i_j + d\psi_j/dt$, lahko kje neomejena – kar spet ni fizikalno. Od tu sledi, da ob $t = 0$ začno vsi toki svoj časovni potek iz vrednosti nič, saj so bili pred tem – po vstopni predpostavki – vsi nič; torej $i_j(0^+) = 0$.

Preselimo se v drugo časovno skrajnost: t je "velik". Kaj je to malo ali veliko, je relativno, gotovo pa je nekaj: po "naravi stvari" bodo toki v zankah vse bolj "podobni" enosmernim – končno bodo postali konstantni. Dogovorimo se, da ta trenutek označimo s t_0. Magnetno polje se bo umirilo (ustalilo), členi $d\psi_j/dt$ v izhodiščnih napetostnih enačbah bodo nič in j-ta napetostna enačba bo takrat kar $U_{\mathrm{g}j} = R_j I_j$, kjer smo z I_j označili končno vrednost toka i_j. Energijski vložek virov do časa t_0 bo vsota,

$$A_{\mathrm{g}}(0,t_0) = W_{\mathrm{t}}(0,t_0) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j\psi_j$$

v vsakem naslednjem trenutku pa bo $A_{\mathrm{g}}(t_0,t) = W_{\mathrm{t}}(t_0,t)$; vsi viri bodo obratovali s konstantnimi močmi ($U_j I_j = R_j I_j^2$), ki bodo enake intenzivnostim sproščanja toplote v posameznih zankah.

Slednja enačba očitno kaže na to, da so do časa t_0 viri vložili več, kot se je na uporih pretvorilo v toploto, in da je ta razlika za $t > t_0$ vseskozi enaka,

$$A_{\mathrm{g}}(0,t) - W_{\mathrm{t}}(0,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j\psi_j$$

Razlika je determinirana s toki in magnetnimi sklepi – torej z magnetnim poljem. Vse tako kaže, da se je ta del energijskega vložka "vgradil" v vzpostavljeno magnetno polje.

Vzemimo zdaj nek nov, poznejši trenutek $t_1 > t_0$, ko vse vire hkrati "ugasnemo" (naj je njihova notranja upornost enaka nič); $u_{\mathrm{g}j}(t > t_1) = 0$. Energijsko bilanco bi za $t > t_1$ pisali:

$$A_{\mathrm{g}}(t_1, t) = \sum_{j=1}^{n} R_j \int_{t_1}^{t_2} i_j^2 \, dt + \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} i_j \psi_j \right]_{t_1}^{t} = 0$$

Energijski vložek virov bi bil od t_1 dalje enak nič. Iz enakih razlogov – kot pri vklopu – se tudi sedaj toki ne bodo "utegnili" hipno spremeniti; toki bodo od t_1 dalje zvezne funkcije ($i_j(t_1^+) = I_j$) in bodo tudi še naprej tekli po zakonitostih novih napetostnih enačb,

$$R_j i_j + \frac{d\psi_j}{dt} = 0 \qquad j = 1, 2, ..., n$$

ter bodo še naprej povzročali sproščanje toplote na uporih. Ti toki ne bodo tekli v nedogled, saj je akumulacija $A_{\mathrm{g}}(0, t_0) - W_{\mathrm{t}}(0, t_0)$ končna. Po "naravi stvari" bodo v (nekem) dovolj poznem času (t_2) vsi toki spet enaki nič; $i_j(t_2) = 0$. Energijsko bilanco med t_1 in t_2 bomo pisali:

$$W_{\mathrm{t}}(t_1, t_2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} I_j \psi_j = 0$$

Enačbo bi prebrali: ves energijski presežek ($A_{\mathrm{g}}(0, t_0) - W_{\mathrm{t}}(0, t_0)$), ki so ga viri ob vklopnem prehodnem pojavu $(0, t_0)$ vgradili v sistem tokovnih zank, se je ob izklopnem prehodnem pojavu (t_1, t_2) v celoti pretvoril v toploto v zankah. V času od t_0 do t_1 je bila v sistemu vseskozi akumulirana t.i. *magnetna energija*

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} I_j \psi_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L_{jk} I_j I_k$$

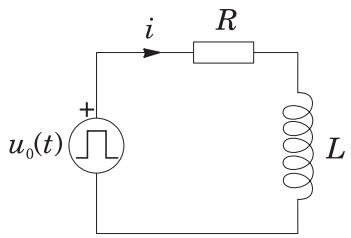
Ker pa se tako akumulacija (shranjevanje) kot njeno "kopnenje" nista izvršila hipno, lahko rečemo, da je bila določena magnetna energija $W_{\mathrm{m}}(t)$ v sistemu prisotna tudi med obema prehodnima pojavoma, in bila enaka

$$\boxed{W_{\mathrm{m}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} i_j \psi_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L_{jk} i_j i_k} \tag{55.1}$$

Prvotno energijsko bilanco med splošnima zaporednima trenutkoma t_1 in t_2 bi sedaj pisali takole:

$$A_{\mathrm{g}}(t_1, t_2) = W_{\mathrm{t}}(t_1, t_2) + W_{\mathrm{m}}(t_2) - W_{\mathrm{m}}(t_1)$$

in jo prebrali: energijski vložek virov – v sistem magnetno sklopljenih tokokrogov – se delno pretvori v toploto, delno pa se porabi za gradnjo magnetnega polja; in še dalje: magnetenje linearnega sistema je reverzibilen proces – tisti del energije, ki se porabi za magnetenje prostora (oz. za gradnjo magnetnega polja), se (ob primernih pogojih) more v celoti dobiti "nazaj".



Slika 55.2: Impulzna vzbuditev tokovne zanke z induktivnostjo L in upornostjo R.

Zgled 55.1

Oglejmo si vzbuditev ene same tokovne zanke z napetostnim impulzom "jakosti" U_0 v dolžini trajanja $T_{\text{imp.}}$; slika 55.2. Začetek impulza bodi ob $t = 0$. Napetostna enačba za $t \in [0, T_{\text{imp.}}]$ je

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U_0$$

Rešitev za tok bomo iskali v obliki vsote: $i = i_{\text{p}} + i_{\text{h}}$. Prvi del ($i_{\text{p}}$) imenujemo (tudi) partikularna rešitev, in je vezana na desno stran enačbe. Ker pa je U_0 konstanta, je pričakovati, da bo $i_{\text{p}} = U_0/R$. Ostaja še drugi, homogeni del rešitve; ta ni vezan na desno stran enačbe – vzame se, kot da je ta nič: $Li'_{\text{h}} + Ri_{\text{h}} = 0$. Takšno enačbo smo že srečali. Reši jo vsaka funkcija oblike $A\exp(-Rt/L)$, kjer je A še poljubna konstanta. Nastavek za tok i je

$$i = \frac{U_0}{R} + Ae^{-Rt/L}$$

in v celoti ustreza napetostni enačbi. Najti je potrebno le še primerno vrednost konstante A. Vemo, da je tok i zvezna funkcija in da je ta ob 0^+ enak nič,

$$i(0^+) = \frac{U_0}{R} + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{U_0}{R}$$

Tok je s tem znan,

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

V intervalu $[0, T_{\text{imp.}}]$ eksponencialno narašča in ob času $t = T_{\text{imp.}}$ doseže vrednost

$$i(T_{\text{imp.}}) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-RT_{\text{imp.}}/L}\right)$$

Če je $T_{\text{imp.}} \gg L/R$, je $i(T_{\text{imp.}}) \doteq U_0/R$ – tok je čisto enosmeren in časovno konstanten. Kvocient L/R dimenzijsko ustreza času in se imenuje časovna konstanta RL tokokroga; $\tau = L/R$. V času te konstante naraste tok i na $(1 - e^{-1})$ polne vrednosti; torej na 63%, v času petih časovnih konstant pa že na 99.3%. Vzemimo, da je $T_{\text{imp.}} \gg \tau$. Tok je praktično že časovno ustaljen in akumulirana energija magnetnega polja (55.1) je takrat kar

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2}L\left(\frac{U_0}{R}\right)^2$$

Po koncu impulza je napetostna enačba zanke drugačna,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Enačba je homogena in nastavek za rešitev je le

$$Be^{-Rt/L} = Be^{-t/\tau}$$

Ker pa je tok zvezna funkcija, mora biti $i(T^+_{\text{imp.}}) = i(T_{\text{imp.}}) = U_0/R$; dobimo:

$$Be^{-T_{\text{imp.}}/\tau} = \frac{U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{U_0}{R} e^{T_{\text{imp.}}/\tau}$$

s tem je

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-(t-T_{\text{imp.}})/\tau} \qquad t > T_{\text{imp.}}$$

Tok eksponencialno upada proti nič. Po času $t - T_{\text{imp.}} = \tau$ pade na 36% izhodiščne vrednosti, po petih časovnih konstantah pa že na 0.7% izhodiščne vrednosti. Izračunajmo še toplotne izgube na uporu (R) v času upadanja toka – do $t \to \infty$:

$$W_{\text{t}}(T_{\text{imp.}}, \infty) = R \int_{T_{\text{imp.}}}^{\infty} i^2 \, dt = \frac{U_0^2}{R} \int_{T_{\text{imp.}}}^{\infty} e^{-2(t-T_{\text{imp.}})/\tau} \, dt = \frac{1}{2} L \left(\frac{U_0}{R} \right)^2$$

Vidimo, da so te enake ravno predhodno akumulirani magnetni energiji. ♣ Bralec naj si nariše časovne poteke $i(t)$, $u_R = Ri$, $u_L = Ldi/dt$, $W_{\text{t}}(0,t)$, $A_{\text{g}}(0,t)$ in $W_{\text{m}}(t)$ za čase od nič do "neskončnosti". ♣

Zgled 55.2

Skozi dve navitji na skupnem feromagnetnem jedru tečeta enosmerna toka tako, da si magnetna pretoka nasprotujeta; faktor sklopa k je 0.98, $L_1 = 10$ H, $L_2 = 40$ H, $I_1 = 10$ A, $I_2 = 20$ A. Kolikšna je akumulirana magnetna energija? Po enačbi 55.1 je

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2} \left(L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 - 2M I_1 I_2 \right)$$

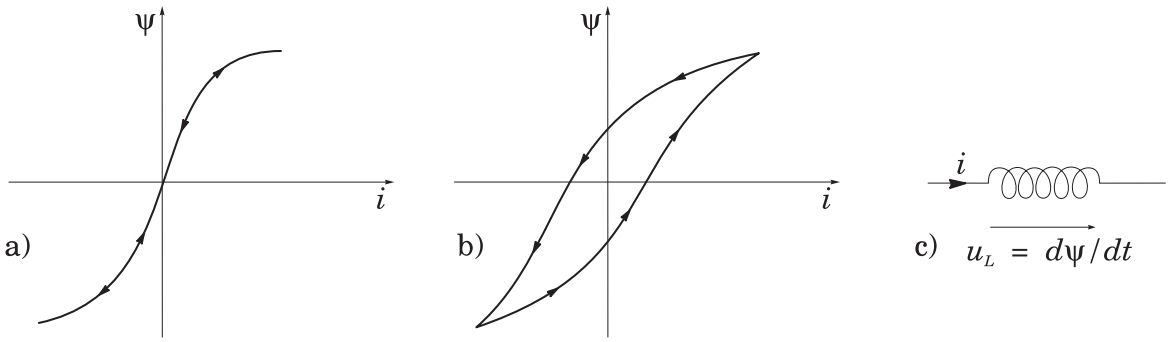
kjer je $M = 0.98\sqrt{L_1 L_2} = 19.6$ H, minus pa zato, ker si magnetna pretoka obeh tokov nasprotujeta (odštevata). Končno je $W_{\text{m}} = 4.58$ kJ.

Tokovno-napetostne in energijske razmere v nelinearnih magnetnih strukturah. Tipičen primer je navitje na feromagnetnem jedru z izrazito nelinearno krivuljo magnetenja in povrhu vsega še z ožjo ali širšo histerezno pentljo. Stvari se še neprimerno bolj zapletejo, če je navitij (in vzbujalnih tokov) več, feromagnetno jedro pa je povrh tega še večsteberno.

Faradayev zakon indukcije sicer še vedno velja ($u_{\text{ind.}} = -d\psi/dt$), le s to razliko, da med magnetilnimi toki in magnetnimi sklepi ne veljajo več linearni odnosi. Še več: magnetnega sklepa j-te zanke (ψ_j) ne moremo več razstaviti v vsoto parcialnih prispevkov ($\psi_j^{(k)}$). Pišemo lahko kvečjemu: $\psi_j = \psi_j(i_1, i_2, ..., i_n)$, in še tu ni ψ_j določen le s trenutnimi vrednostmi tokov, ampak je odvisen od celotnega njihovega "historiata". Problematika je očitno izrazito nelinearna in sodi v področje nelinearnih fizikalnih problemov, ki so praviloma težki in do določene mere obvladljivi šele s primernimi – računalniško podprtimi – numeričnimi metodami.

Da pa bi se problematike nelinearnih magnetnih struktur kljub vsemu – vsaj delno – dotaknili, si oglejmo najpreprostejši sistem: eno magnetilno navitje na nelinearnem

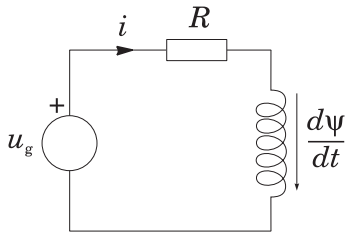
feromagnetnem jedru, kjer bi magnetni sklep pisali kot $\psi = \psi(i)$. Če v jedru računamo s srednjo dolžino magnetne poti (l_s) in enakomernim prerezom (S), je odnos med H in B ter i in ψ identičen. Načelno nezahtevna primera sta: i) ko je histerezna pentlja zanemarljivo ozka in moremo sklep $\psi(i)$ zapisati kot nelinearno, vendar enolično funkcijo toka, in ii) ko je vzbujanje periodično in drsi delovna točka (i, ψ) po histerezni pentlji (dvolična funkcija); slika 55.3. Če je takšna tuljava (dušilka) v sklopu električnega vezja,



Slika 55.3: a) Zanemarljivo ozka in b) široka histerezna pentlja; c) nelinearen koncentriran element.

potem zanjo še vedno velja enačba 54.3 ($u_L = d\psi/dt$), ki posredno opredeljuje odnos med tokom in napetostjo na njej, skica c), le da elementu ne moremo prirediti induktivnosti. Pri zanemarljivi histerezi, na skici a), bi sicer lahko zapisali $\psi(i)$ kot $L(i)i$, kjer bi bila induktivnost funkcija toka, vendar si s tem nadalje nimamo kaj pomagati, pri histerezi, skica b), pa odpove tudi ta formalnost.

Na identičen način, kot v začetku razdelka, bomo tudi tu opazovali napetostne in energijske razmere, slika 55.4, kjer bo R spet ohmska upornost navitja. Napetostna



Slika 55.4: Nelinearna dušilka v tokokrogu.

enačba bo tale:

$$-u_g + Ri + \frac{d\psi}{dt} = 0$$

Po množenju s tokom i, $u_g i = Ri^2 + i d\psi/dt$, pomeni $u_g i$ trenutno moč vira, Ri^2 trenutno moč sproščanja toplotne energije na uporu in $i d\psi/dt$ trenutno intenzivnost vlaganja energije v magnetenje feromagnetnega jedra. Če energijsko bilanco opisujemo med dvema zaporednima trenutkoma, dobimo

$$A_g(t_1, t_2) = W_t(t_1, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} i\, d\psi$$

Drugi sumand na desni bomo tokrat pisali kot $W_{\text{mag.}}(t_2) - W_{\text{mag.}}(t_1)$, vendar s to razliko, da $W_{\text{mag.}}(t)$ ne bo pomenil trenutne energije magnetnega polja, ampak energijski vložek za magnetenje jedra od $t = 0$ do časa t. Pisali bomo:

$$\boxed{W_{\text{mag.}}(t) = \int_0^t i\, d\psi} \tag{55.2}$$

Zapisana integracija pomeni limitirano seštevanje prispevkov $i\delta\psi$, ko sledimo delovni točki od $t = 0$ do trenutka t; v integraciji (55.2) je zajet ves historiat magnetenja od 0 do t. S tem je

$$\int_{t_1}^{t_2} i\, d\psi = W_{\text{mag.}}(t_2) - W_{\text{mag.}}(t_1)$$

Kot prvo si oglejmo magnetenje feromagnetnega jedra z zanemarljivo ozko histerezno zanko s skice a) na sliki 55.3. Funkcijsko odvisnost $\psi(i)$ podaja liha funkcija; $\psi(-i) = \psi(i)$. Na vsebini ne bomo nič izgubili, če si kot (i, ψ) odvisnost izberemo preprosto analitično funkcijo; bodi $\psi(i) = K\sqrt[3]{i}$, kjer konstanta K dimenzijsko in količinsko usklajuje enačbo. Napetost u_{g} naj bo harmonična ($u_{\text{g}} = U_{\text{g}} \cos \omega t$), upornost R pa zanemarljiva. Za $d\psi/dt$ oz. ψ dobimo:

$$\frac{d\psi}{dt} = U_{\text{g}} \cos \omega t$$

po integraciji pa

$$\psi(t) - \psi(0) = \frac{U_{\text{g}}}{\omega} \sin \omega t$$

Vzemimo še, da je ob $t = 0$ sklep $\psi(0) = 0$ (kar ustreza začetku magnetenja iz izhodišča); s tem je

$$\psi(t) = \frac{U_{\text{g}}}{\omega} \sin \omega t$$

Iz privzete magnetilne krivulje je

$$i = (\psi/K)^3 = \left(\frac{U_{\text{g}}}{\omega K} \sin \omega t\right)^3$$

Zaradi $\sin^3 x = (3 \sin x - \sin 3x)/4$ je tok

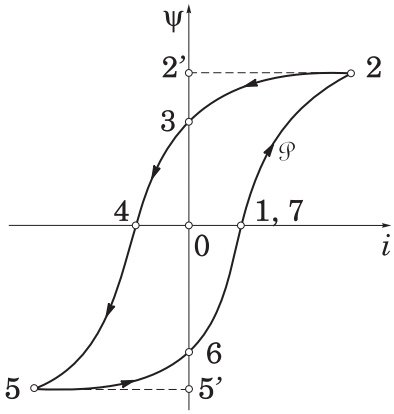
$$i = \frac{3}{4}\left(\frac{U_{\text{g}}}{\omega K}\right)^3 \sin \omega t - \frac{1}{4}\left(\frac{U_{\text{g}}}{\omega K}\right)^3 \sin 3\omega t = I_1 \sin \omega t - I_3 \sin 3\omega t$$

Rezultat je vsekakor zanimiv. Če dušilko vzbujamo z napetostjo frekvence 50 Hz, bo tok sestavljen iz toka s 50 Hz in toka s 150 Hz. Rezultat moremo posplošiti v ugotovitev: če bomo nelinearno dušilko vzbujali s frekvenco f, se bodo v toku skozi njo pojavili še višji lihi harmoniki s frekvencami $3f, 5f, \ldots$. Pri splošni lihi odvisnosti $\psi(i)$ dobimo (pri $u_{\text{g}} = U_{\text{g}} \cos \omega t$) za vstopni tok vsoto:

$$i = I_1 \sin \omega t \pm I_3 \sin 3\omega t \pm I_5 \sin 5\omega t \pm \cdots$$

Trenutna moč magnetenja ($i d\psi/dt$) je vsota,

$$U_{\text{g}} I_1 \cos \omega t \sin \omega t \pm U_{\text{g}} I_3 \cos \omega t \sin 3\omega t \pm U_{\text{g}} I_5 \cos \omega t \sin 5\omega t \pm \cdots$$



Slika 55.5: Selitev delovne točke pri periodičnem vzbujanju.

njeno časovno poprečje v eni periodi pa je vedno nič.

Vse drugače pa je pri magnetenju jedra z "izraženo" histerezno pentljo; slika 55.5. Indeksaciji točk naj ustrezajo tudi zaporedni trenutki $t_1, t_2, ..., t_7$. Poglejmo, kaj moremo reči o integralih

$$\int_{t_j}^{t_k} i\, d\psi = W_{\text{mag.}}(t_k) - W_{\text{mag.}}(t_j)$$

ko se pri periodičnem spreminjanju napetosti $(d\psi/dt)$ sklep spreminja med vrednostima $\psi(t_2)$ in $\psi(t_5)$, tok pa med vrednostima $i(t_2)$ in $i(t_5)$.

Če je točka 1 (t_1) začetna, potem je energijski vložek do 2 (t_2) naslednji:

$$W_{\text{mag.}}(t_2) - W_{\text{mag.}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} i\, d\psi$$

ki glede na (i, ψ) diagram ustreza ploščini lika med točkami $(0, 1, 2, 2')$. Od 2 do 3 je integral

$$\int_{t_2}^{t_3} i\, d\psi$$

negativen in ustreza ploščini lika med $(2, 2', 3)$; od 3 do 5 je integral spet pozitiven (tok je negativen, sklep se manjša) in ustreza ploščini lika med $(3, 4, 5, 5', 0)$; od 5 do 6 je integral spet negativen (tok je negativen, sklep se veča) in ustreza ploščini lika med $(5, 5', 6)$, od 6 do 7 je integral spet pozitiven in ustreza ploščini lika med $(6, 7, 0)$. Po vsem tem moremo zaključiti, da je vložena energija v magnetenje v eni periodi (med 1 in 7 po pentlji $\mathcal{P}$) enaka razliki oz. integralu

$$W_{\text{mag.}}(t_7) - W_{\text{mag.}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_7} i\, d\psi = \oint_{\mathcal{P}} i\, d\psi$$

kjer smo s krogcem na integralu simbolično zaznačili en obhod po histerezni pentlji; to na (i, ψ) diagramu ustreza površini histerezne pentlje, ki jo karakterizirajo značilne točke $(1, 2, ..., 7)$. Če je f frekvenca vzbujanja, potem se delovna točka "sprehodi" po pentlji f-krat; pripadajoča poprečna moč *histereznih izgub* $(P_{\text{hist.}})$ je s tem tole:

$$\boxed{P_{\text{hist.}} = f \oint_{\mathcal{P}} i\, d\psi} \tag{55.3}$$

Računi pokažejo, da so pri 50 Hz te izgube v transformatorski pločevini pod 1 W/kg.

Ob opazovanem primeru je potrebno naglasiti nekaj zaključkov:

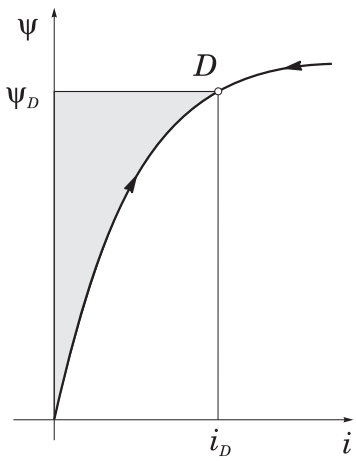
1) pri periodičnem napetostnem vzbujanju feromagnetnega jedra z izraženo histerezno zanko se (prav tako) pojavijo toki višjih harmonikov; teh tu nismo posebej analizirali,

2) pojavijo se dodatne histerezne izgube, ki se navzven manifestirajo v obliki toplote – vložena energija se porabi za obračanje domen v feromagnetiku; velikost teh izgub ustreza produktu frekvence in površine histerezne pentlje v (i, ψ) diagramu,

3) proces premagnetenja je ireverzibilen; energijski vložek se pri trdomagnetnih materialih praktično v celoti porabi za samo premagnetenje; le majhen del, ki ustreza ploščini $(2, 2', 3)$, se vrne v vir; neprimerno več se je vrne pri mehkomagnetnih materialih, kjer je ta ploščina večja,

4) omenjen del je tudi tisti del energije magnetenja, ki je reverzibilen,

5) v idealiziranem primeru, ko je točka 3 (remanentni magnetizem) v izhodišču, se – kljub nelinearnosti – vsa energija magnetenja povrne k viru; v takšnem primeru rečemo, da ima vzbujena nelinearna magnetna struktura akumulirano magnetno energijo
$$W_{\mathrm{m}}(t) = \int_0^t i\, d\psi = \int_0^{\psi_D} i\, d\psi$$
ki v (i, ψ) diagramu, pri delovni točki (i_D, ψ_D), ustreza površini lika $(0, i_D, \psi_D)$ ob ordinati; slika 55.6.



Slika 55.6: Interpretacija k akumulirani magnetni energiji reverzibilnega magnetenja.

♣ Bralec naj si nariše kako simetrično histerezno pentljo, (i, ψ) diagram, privzame naj harmonično napetostno vzbujanje in nato po točkah odčitava trenutne vrednosti tokov ter to vnese v časovna diagrama $u(t) = d\psi(t)/dt$ in $i(t)$; opazuje naj tudi produkt ui ter določi njegovo časovno poprečje. ♣

Gostota magnetne energije. Do tu smo se ukvarjali z (integralnim) iznosom: i) akumulirane energije v linearnih in reverzibilnih nelinearnih strukturah, označili smo jo z W_{m}, in ii) z iznosom porabljene energije za magnetenje v ireverzibilnih strukturah, označili smo jo z $W_{\mathrm{mag.}}$.

V neobrnljivih procesih se je energija magnetenja povsem očitno vgradila v vsak segment magnetizirane snovi – Weissove domene so se obračale povsod tam, kjer je magnetno polje. Povsem na mestu bo torej govoriti o prostorski gostoti energije magnetenja. Pa tudi sicer, četudi je snov linearna, se bo energija vgradila v vsak segment prostora – gotovo več tam, kjer je magnetno polje močnejše.

Prav nič ne bomo izgubili na splošnosti, če ostanemo kar pri nelinearni magnetni strukturi; v mislih imejmo nelinearno magnetno jedro, ki je ovito z nekaj zavoji toka. Energija, ki jo zunanji vir vloži v magnetenje od $t = 0$ do t, je enaka integralu,

$$W_{\mathrm{mag.}}(t) = \int_0^t i\, d\psi$$

Magnetno polje oz. vektorja $\mathbf{B}$ in $\mathbf{H}$ moremo okvirno opredeliti ob vsakem trenutku. Vzemimo, da magnetno gostoto $\mathbf{B}$ predstavimo s pretočnimi cevkami poljubno majhnih pretokov $\delta\phi_k$. Naj je $\delta\mathbf{a}_k$ prerezna ploskev pretočne cevke; pretok $\delta\phi_k$ zapišemo kot $\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{a}_k$, in se vzdolž cevke ohranja. Ta pretočna cevka pa vijačno ploskev tokovne zanke nekajkrat prebode; naj je to p_k-krat. Delček magnetnega sklepa $\delta\psi_k$ te cevke je tako $p_k\delta\phi_k$. Sedaj pa $W_{\mathrm{mag.}}(t)$ zapišimo za vse delčke magnetnih sklepov

$$W_{\mathrm{mag.}}(t) = \int_0^t i\, d\psi \doteq \int_0^t i\, d\left[\sum_{k=1}^n p_k\, \delta\phi_k\right] = \sum_{k=1}^n \int_0^t p_k i\, d(\delta\phi_k)$$

Sumacija se tiče vseh pretočnih cevk; v limiti bomo n povečevali proti ∞. V k-ti pretočnici moremo produkt $p_k i$ pisati po Ampèrovem zakonu, $\delta\phi_k$ pa obdržimo kot produkt,

$$p_k i = \oint_{\mathcal{L}_k} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}_k \qquad\qquad \delta\phi_k = \mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{a}_k$$

kjer pomeni $\mathcal{L}_k$ konturo vzdolž k-te pretočnice, $\delta\mathbf{a}_k$ pa kako prerezno ploskev te pretočnice. S tem je

$$W_{\mathrm{mag.}}(t) \doteq \sum_{k=1}^n \int_0^t \left(\oint_{\mathcal{L}_k} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}_k\right)(d_t\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{a}_k)$$

(Z difrencialom d_t zaznamujemo diferencial časovne spremembe gostote $\mathbf{B}$ v splošni točki.) Vektorji $\mathbf{B}$, $\delta\mathbf{a}_k$ in $d\mathbf{l}_k$ so vzdolž pretočnice kolinearni, zato smemo za $(\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}_k)(d_t\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{a}_k)$ pisati $(\mathbf{H}\cdot d_t\mathbf{B})(d\mathbf{l}_k\cdot\delta\mathbf{a}_k)$, kjer pomeni produkt $d\mathbf{l}_k\cdot\delta\mathbf{a}_k$ diferencial volumna dv_k znotraj k-te pretočnice ($\delta\mathcal{V}_k$); s tem je

$$W_{\mathrm{mag.}}(t) \doteq \sum_{k=1}^n \int_{\delta\mathcal{V}_k} \left(\int_0^t \mathbf{H}\cdot d_t\mathbf{B}\right) dv_k$$

Če na koncu izvedemo limito sumacij po pretočnih cevkah, dobimo kot rezultat volumski integral po prostoru,

$$\boxed{W_{\mathrm{mag.}}(t) = \int_{\mathcal{V}} \left(\int_0^t \mathbf{H}\cdot d_t\mathbf{B}\right) dv} \tag{55.4}$$

S tem pa smo prišli tudi do *gostote energije magnetenja* ($w_{\text{mag.}}(t)$),

$$\boxed{w_{\text{mag.}}(t) = \int_0^t \mathbf{H} \cdot d_t\mathbf{B}} \tag{55.5}$$

Časovna integracija je vsebinsko enaka kot v (55.2) le, da je tu mišljeno časovno zasledovanje produkta $\mathbf{H} \cdot d_t\mathbf{B}$ v točki prostora od začetnega ($t = 0$) do nekega kasnejšega časa ($t > 0$).

Če je prostor magnetno izotropen ($\mathbf{B} \parallel \mathbf{H}$), pišemo:

$$w_{\text{mag.}}(t) = \int_0^t H\, d_t B$$

Gostota histereznih izgub ustreza to pot površini histerezne zanke v (H, B) diagramu. Če v enostavnem feromagnetnem krogu računamo z l_s in S, kjer je $l_s S$ volumen jedra, so histrezne izgube določene z močjo

$$P_{\text{hist.}} = S l_s f \oint_{\mathcal{P}} H\, d_t B$$

Napravimo kratek račun: naj je gostota B_{r} (remanentna) 1 T in jakost H_{c} (koercitivna) 20 A/m. Če bi smatrali histerezno zanko kot pravokotno ($2H_{\text{c}} \times 2B_{\text{r}}$), bi za površino dobili 80 J/m^3. Specifična masa železa je 7800 kg/m^3, frekvenca pa naj je 50 Hz. Za $P_{\text{hist.}}$/kg dobimo $80 \cdot 50/7800 = 0.51$ W/kg.

Če ima prostor magnetenja zanemarljivo histerezno zanko, potem je gostota $W_{\text{mag.}}(t)$ že kar akumulirana (povrnljiva) gostota magnetne energije,

$$w_{\text{m}}(t) = \int_0^t H\, d_t B$$

če pa je prostor še linearen ($B = \mu H$), potem je integral enak

$$w_{\text{m}}(t) = \frac{B^2(t)}{2\mu} = \frac{\mu H^2(t)}{2}$$

Gostoto akumulirane magnetne energije v linearnem prostoru zapišemo tudi kot

$$\boxed{w_{\text{m}} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2}} \tag{55.6}$$

celotno akumulirano energijo pa dobimo z volumskim integralom te. ♣ Bralec naj v zvezi s tem določi energijo magnetenja, ki je potrebna, da magnetno nelinearno jedro (l_s, S) z zračno režo (Δ) namagnetimo po deviški krivulji do točke, ko bo v reži gostota 1 T; geometrijski podatki in magnetilna krivulja naj so pri tem smiselno izbrani. ♣

Induktivnost kot energijski koeficient. V prejšnjem razdelku smo obširno govorili o induktivnosti kot koeficientu inducirane napetosti v linearnih magnetnih strukturah – ko je izpolnjen pogoj električne tankosti žic. Z induktivnostmi se je izražala tudi sumarna akumulirana magnetna energija; zanjo smo dobili:

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L_{jk} i_j i_k \tag{Z1}$$

Po novem pa moremo magnetno energijo zapisati tudi kot integral gostote,

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\int_\mathcal{V} \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dv$$

Upoštevajmo, da $\mathbf{B}$ oz. $\mathbf{H}$ povzroča n-tokov in da ju moremo (po superpoziciji) pisati kot vsoti:

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{B}_j \qquad\qquad \mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{H}_k$$

To vnesemo v integral,

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_\mathcal{V}\mathbf{B}_j\cdot\mathbf{H}_k\,dv$$

in iz primerjave z (Z1) sledijo induktivnosti

$$\boxed{L_{jk} = \frac{1}{i_j i_k}\int_\mathcal{V}\mathbf{B}_j\cdot\mathbf{H}_k\,dv} \tag{55.7}$$

Enačba očitno razkriva vzajemnost, saj je $\mathbf{B}_j\cdot\mathbf{H}_k = \mu\mathbf{H}_j\cdot\mathbf{H}_k$; torej $L_{kj} = L_{jk}$.

Zapis je sicer enostaven, v praktičnih primerih pa zna biti integracija sila "nerodna". Integriranje se do neke mere olajša s spretno izbiro integracijskih območij. V zgornjem zapisu je včasih ugodno integrirati po pretočnicah vektorja $\mathbf{B}_j$.

♣ Dan je snop n vzporednih vodnikov različnih polmerov $\{\rho_j\}$ in medosnih razdalj $\{d_{jk}\}$; sistem je tokovno zaključen ($\sum_{j=1}^{n} i_j = 0$). Bralec naj pokaže, da je shranjena magnetna energija na dolžini l določena z izrazom

$$W_\mathrm{m} = -\frac{\mu_0 l}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} i_j i_k \ln D_{jk} \qquad D_{jk} = \begin{cases} d_{jk} & j\neq k \\ e^{-1/4}\rho_j & j = k\end{cases}$$

Negativni predznak ni pomota. Ali (in kdaj) velja kaj podobnega tudi za električno energijo v takšnem sistemu? ♣

Zgled 55.3

Izračunajmo induktivnost koaksialnega kabla še preko energije magnetnega polja. Pri značilnih treh radijih kabla (ρ_1, ρ_2 in ρ_3) so gostote energij v posameznih območjih znane:

$$2w_\mathrm{m} = H^2\mu_0 = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i^2}{(2\pi\rho_1^2)^2}\rho^2 & \rho\le\rho_1 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 i^2}{(2\pi\rho)^2} & \rho_1<\rho\le\rho_2 \\[2ex] \dfrac{\mu_0 i^2}{\left(2\pi(\rho_3^2-\rho_2^2)\right)^2}\left(\dfrac{\rho_3^4}{\rho^2} - 2\rho_3^2 + \rho^2\right) & \rho_2<\rho<\rho_3 \end{cases}$$

Induktivnost (L) kabla je nadalje enaka $2W_\mathrm{m}/i^2 = \int_\mathcal{V}\mu_0 H^2\,dv/i^2$. Formalno bomo ločili tri integracije: po žili ($\mathcal{V}_1$), izolatorju ($\mathcal{V}_2$) in plašču ($\mathcal{V}_3$) ter pisali:

$$L = \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{i^2}\int_{\mathcal{V}_j}\mu_0 H^2\,dv$$

Kot diferencial volumna bomo vzeli cev polmera ρ in diferencialne debeline $d\rho$ ter dolžine l; $dv = 2\pi\rho l\, d\rho$. Integracije nam po vrsti dajo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i^2}\int_{\mathcal{V}_1} \mu_0 H^2\, dv &= \frac{\mu_0 l}{8\pi} \\
\frac{1}{i^2}\int_{\mathcal{V}_2} \mu_0 H^2\, dv &= \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \\
\frac{1}{i^2}\int_{\mathcal{V}_3} \mu_0 H^2\, dv &= \frac{\mu_0 l}{8\pi}\left(-1 - \frac{2\rho_3^2}{\rho_3^2-\rho_2^2} + \left(\frac{2\rho_3^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)^2 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)
\end{aligned}$$

Če jih seštejemo, dobimo ravno rezultat iz prejšnjega razdelka. Prvi člen imenujemo včasih tudi notranja induktivnost žile, drugega zunanja induktivnost in tretjega notranja induktivnost plašča. Delitev je povsem umetna, saj ne more eksistirati ena brez drugih; poimenovanji (notranja, zunanja) se nanašata bolj na integracijska območja, po katerih smo gostoto integrirali.

Gibalni procesi v magnetnem polju. Do tu smo vseskozi opazovali dogajanja v mirujočih magnetnih strukturah – zanke tokov in ostala telesa so mirovala. V nadaljevanju bomo postopali drugače. Opazujmo najprej linearen sistem, kjer dopuščamo možnost, da se pod vplivom magnetnih sil ($\mathbf{F}_\mathrm{m}$) ena od zank premakne za $\delta\mathbf{l}$ pri tem pa se tokovi i_j naj ne spremenijo. Energijsko bilanco v kratkem intervalu časa δt, v katerem se premik izvrši, bi pisali:

$$\delta A_\mathrm{g} = \delta W_\mathrm{t} + \mathbf{F}_\mathrm{m}\cdot\delta\mathbf{l} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} i_j\,\delta\psi_j$$

kjer smo z $\delta\psi_j$ označili spremembo sklepa zaradi premika $\delta\mathbf{l}$. Energijski vložek virov se razdeli na tri dele: na joulske izgube, na delo za premik in na spremembo magnetne energije. Ker pa se joulske izgube neposredno ne tičejo ne energije polja, ne samega premika, lahko rečemo, da je dejanski vložek v magnetna "dogajanja" enak $\delta A_\mathrm{g} - \delta W_\mathrm{t}$.

V predhodnih izvajanjih smo $\delta A_\mathrm{g} - \delta W_\mathrm{t}$ razumeli kot energijski vložek v magnetenje prostora. Ker pa vir "nič ne ve", ali se v strukturi dogajajo kakšni premiki, je diferenca $\delta A_\mathrm{g} - \delta W_\mathrm{t}$ tolikšna, kot smo jo spoznali na začetku razdelka,

$$\delta A_\mathrm{g} - \delta W_\mathrm{t} = \sum_{j=1}^{n}\int_t^{t+\delta t} i_j\, d\psi_j \doteq \sum_{j=1}^{n} i_j\,\delta\psi_j$$

oz. enaka dvakratni spremembi magnetne energije. Če slednji enačbi združimo, dobimo še

$$\mathbf{F}_\mathrm{m}\cdot\delta\mathbf{l} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} i_j\,\delta\psi_j = \delta W_\mathrm{m}$$

Komponente sile $\mathbf{F}_\mathrm{m}$ dobimo, ko si za $\delta\mathbf{l}$ po vrsti izbiramo premike v smeri posameznih koordinatnih osi. V kartezijevem k.s. dobimo:

$$\boxed{\mathbf{F}_\mathrm{m} = \left(\frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial x}, \frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial y}, \frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial z}\right)} \tag{55.8}$$

Zgled 55.4

Vzemimo simetričen dvovod z izmerami d, ρ_0 in l, ki z virom tvori zanko s tokom i. Magnetna energija sistema je

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{d}{\rho_0}\right)i^2$$

Med žicama deluje razdvajalna sila, ki je (po 55.8) enaka spremembi magnetne energije zaradi spremembe oddaljenosti. Po odvajanju na d dobimo

$$F_{\mathrm{m}d} = \frac{\mu_0 l i^2}{2\pi d}$$

kar je ravno Ampèrova sila med dvema ravnima vodnikoma dvovoda. Iz samega primera tudi vidimo intencijo magnetne sile: ta deluje v smislu povečanja induktivnosti.

Zgled 55.5

Zanimiv je tudi primer dveh togih zank z induktivnostima L_{11} in L_{22} ter medsebojno induktivnostjo L_{12}. Če dopuščamo možnost, da se druga zanka premakne glede na prvo (da se torej spremeni medsebojna induktivnost), potem je pri

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + L_{12}i_1 i_2$$

sila $\mathbf{F}_\mathrm{m}$ kar

$$\mathbf{F}_\mathrm{m} = \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial x}, \frac{\partial L_{12}}{\partial y}, \frac{\partial L_{12}}{\partial z}\right) i_1 i_2$$

♣ Bralec naj vzame npr. primer dveh vzporednih dvovodov in določi silo na enega od njiju. ♣

In kaj je z gibalnimi procesi v avtonomnih magnetnih strukturah – takšnih brez virov? Srečamo jih pri trajnih magnetih. Problem je sicer nelinearen, vendar, če privzamemo, da zaradi večkratnega združevanja ali razdruževanja magnetkov ostajajo njune magnetne lastnosti nespremenjene (da je magnetni fluks trajnega magneta konstanten), potem moremo napraviti naslednji razmislek. Vsak magnet zase ima okrog sebe določeno magnetno polje, torej tudi energijo. Naj sta to $W_{\mathrm{m}1}$ in $W_{\mathrm{m}2}$. Ko ju zbližamo, je skupno magnetno polje vektorska vsota; pri tem pa se spremeni tudi magnetna energija W_m, ki ni kar preprosto vsota, ampak je odvisna od njune medsebojne lege. Gotovo pa je nekaj: ker je sistem avtonomen, je $\mathbf{F}_\mathrm{m} \cdot \delta\mathbf{l} + \delta W_\mathrm{m} = 0$ in (še naprej)

$$\boxed{\mathbf{F}_\mathrm{m} = \left(-\frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial x}, -\frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial y}, -\frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial z}\right)} \tag{55.9}$$

Če si zamislimo dva paličasta trajna magneta, potem imata vsak zase ob vstopnem in izstopnem koncu največjo koncentracijo magnetnega polja. Koncentracija magnetne energije je izrazita torej na štirih mestih. Ko pa se istosmiselno združita, je ta koncentracija le še na začetku prve in na koncu druge palice – skupna energija se s tem zmanjša.

Ploskovne sile na mejah linearnih magnetnih snovi. Zamislimo si linearno feromagnetno jedro (l_s, S) z zračno režo (Δ). Magnetna energija polja bo pri toku i in številu ovojev N naslednja:

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{N^2}{2\mathcal{R}}i^2$$

kjer je $\mathcal{R}$ magnetna upornost magnetnega krogotoka,

$$\mathcal{R} = \frac{l_s}{\mu_r\mu_0 S} + \frac{\Delta}{\mu_0 S}$$

Če dopuščamo možnost, da se reža spremeni za diferencial $d\Delta$ (da je to kotva priteznega magneta), potem bo magnetna sila enaka $dW_\mathrm{m}/d\Delta$ oz.

$$F_{\mathrm{m}\Delta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{Ni}{\mathcal{R}}\right)^2 \frac{d\mathcal{R}}{d\Delta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{Ni}{\mathcal{R}}\right)^2 \frac{1}{\mu_0 S} = -\frac{\phi^2}{2\mu_0 S} = -\frac{B^2}{2\mu_0}S$$

Negativni predznak pomeni, da deluje sila v smislu zmanjševanja špranje Δ – je torej pritezna. Ta bo enaka produktu gostote energije v reži in efektivnega prereza reže. Sila na ploskovno enoto oz. pritisk bo enak ravno gostoti energije. Če pri dvižnih magnetih dosežemo v zračni reži (nepopoln naleg ali plast rje) gostoto 1.5 T, je pritisk približno 90 kN/m^2. Kvadratni meter takšne reže drži težo 9 ton.

Z (mnogo) več matematičnega orodja se da pokazati, da delujejo na meji dveh magnetnih snovi s permeabilnostima μ_1 in μ_2 ploskovne sile z gostoto

$$\boxed{f_{\mathrm{m}n} = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)\left(H_t^2 + \frac{B_n^2}{\mu_1\mu_2}\right)} \tag{55.10}$$

in so usmerjene iz prostora z večjo v prostor z manjšo permeabilnostjo. Če se ob tej enačbi vrnemo k feromagnetnemu jedru s špranjo Δ, potem na prehodu iz jedra v režo $(\mu_2 = \mu \gg \mu_1 = \mu_0)$ ni tangencialne komponente polja. Za ploskovno silo dobimo:

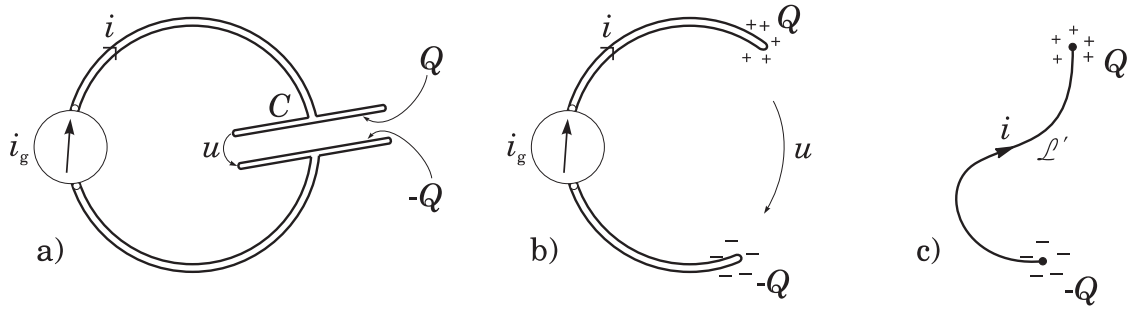
$$f_{\mathrm{m}n} = \frac{B_n^2}{2\mu_0}$$

kar nam je dal tudi prejšnji račun.

56. Razširjen Ampèrov zakon toka

Že v razdelku 52 smo napovedali, da bo druga pomembna tema poglavja o elektrodinamiki posvečena posplošitvi Ampèrovega zakona na konduktivne in druge, sicer nesklenjene toke. V zadnjih treh poglavjih smo se tej problematki začasno izognili s privzetkom, da naj so konduktivne zanke tokov galvansko zaključene, če pa so že prekinjene (kondenzator), naj je manjkajoči tokovni element do sklenjene zanke tako kratek, da se to pri izračunu polja **B** – kot da prekinitve ne bi bilo – skoraj nič ne pozna.

Vrtinčnost vektorja B odprte tokovne niti. Pa začnimo kar s takšno zanko; slika 56.1. Vanjo vključimo tokovni vir (mogli bi tudi napetostnega), ki je znane časovne



Slika 56.1: Galvansko odprti konduktivni toki.

funkcijske odvisnosti. Po ohranitvenem zakonu bo časovni prirastek (odvod) elektrine Q, skica a), enak vstopnemu toku $i = i_g$; $dQ/dt = i$. Naj je ob $t = 0$ kondenzator prazen; v vsakem kasnejšem času bo na njem elektrina $\pm Q$, s tem pa tudi napetost u med ploščama,

$$Q(t) = \int_0^t i(t')\,dt' \qquad\qquad u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt$$

Elektrino in napetost določa integral toka. Vzemimo, da je $i_g = I_g \cos\omega t$, potem je $Q(t) = \omega^{-1} I_g \sin\omega t$ in $u(t) = (\omega C)^{-1} I_g \sin\omega t$. Napetost med ploščama niha z amplitudo $I_g/\omega C$ po sinusni zakonitosti kota ωt. Pri $I_g = 1\ \mu$A, $\omega = 1$ MHz in $C = 20$ pF je amplituda napetosti 50 mV. Na skici b) sta plošči reducirani na oba konca žic. Kapacitivnost bo tu gotovo manjša, amplituda napetosti pa ustrezno večja. Tudi presežna elektrina ($\pm Q$) ne bo pri tem le na samih koncih žice, temveč jo bo nekaj tudi vzdolž zgornjega in spodnjega kraka. Kako je ta elektrina porazdeljena po obeh krakih, nas ta trenutek ne bo nič zanimalo; privzamemo lahko, da je njena glavnina ob koncih. Model odprte tokovne niti kaže skica c); s stališča virov si jo moremo zamisliti kot tokovno nit ($\mathcal{L}'$) s tokom i, ki ima na koncéh dve točkasti elektrini $\pm Q$ nasprotnih predznakov; označbe smeri toka in elektrin korespondirajo z matematično formulacijo ohranitvenega zakona.

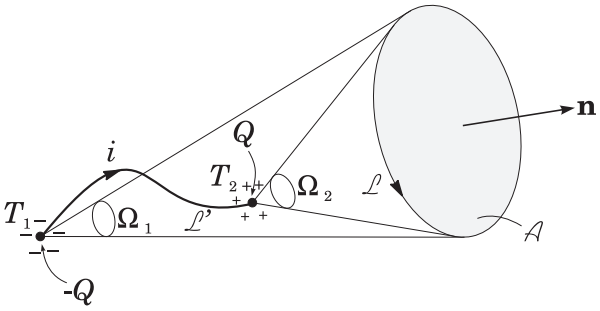
Pa vzemimo, da je časovno spreminjanje toka (elektrine) v okvirih kvazistatičnosti – torej relativno počasno in da je okoliški prostor prazen (μ_0, ε_0). Za določitev magnetnega polja tokovne niti moremo uporabiti Biot-Savartov zakon in pisati:

$$\mathbf{B}(T) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{L}'} \frac{i\,d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

Vrniti se moramo v razdelek 44. Tam smo opazovali (integral) $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ (vrtinčnost vektorja $\mathbf{B}$) magnetnega polja odseka toka. Če tamkajšnji I zamenjamo z i, dobimo:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}(\Omega_2 - \Omega_1)$$

kjer sta Ω_1 in Ω_2 prostorska kota, pod katerima se vidi ploskev $\mathcal{A}$ (ki je napeta na pentljo $\mathcal{L}$) iz začetne in končne točke tokovne niti; slika 56.2. Zapis enačbe in pripadajoča skica sta neločljivo povezana; prostorski kot Ω je kot lijaka, ki ga opredeljujeta točka (vrh lijaka) in usmerjena pentlja $\mathcal{L}$. Če se tokovna nit podaljša skozi opno $\mathcal{A}$, potem kot Ω_2 preseže vrednost 2π in gre – pri nadaljnjem podaljševanju niti – k 4π; osvežiti velja skice na sliki 44.3.



Slika 56.2: K vrtinčnosti vektorja **B** tokovne niti (prvič).

Za narisano konstelacijo poglejmo, kako bi vrtinčnost izrazili še drugače. Za i pišemo dQ/dt, kar da:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \frac{d}{dt}\left(Q\frac{\Omega_2}{4\pi} - Q\frac{\Omega_1}{4\pi}\right)$$

Elektrino in kot smo namenoma združili. Točkasta elektrina Q, ki je v točki T_2, ustvarja okrog sebe električno polje $\mathbf{E}_{\text{od } Q}$, ki je radialno simetrično. Pretok tega polja skozi ploskev $\mathcal{A}$ pa je (razdelek 12) sorazmeren ravno prostorninskemu kotu Ω_2. Pišemo:

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E}_{\text{od } Q} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega_2$$

Točkasta elektrina $-Q$ v točki T_1 ima tudi svoje polje $\mathbf{E}_{\text{od } -Q}$, ki pri teh oznakah pretaka ploskev v nasprotni smeri. Pišemo:

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E}_{\text{od } -Q} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega_1$$

Ko enačbi seštejemo (in množimo z ε_0) ter za vsoto jakosti pišemo $\mathbf{E}$, dobimo:

$$\varepsilon_0 \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{E}_{\text{od } Q} + \mathbf{E}_{\text{od } -Q}) \cdot d\mathbf{a} = \varepsilon_0 \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{4\pi}\Omega_2 - \frac{Q}{4\pi}\Omega_1$$

S tem je

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

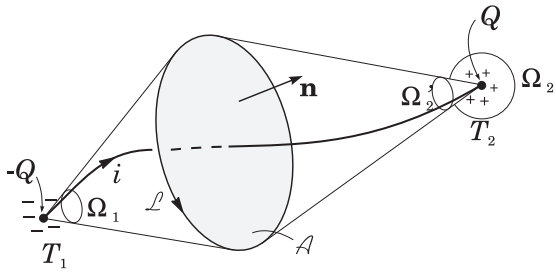
Vrtinčnost je proporcionalna časovni spremembi pretoka vektorja $\varepsilon_0\mathbf{E}$ skozi opno na konturi $\mathcal{L}$.

Poglejmo še konstelacijo, ko tokovna nit prebada opno; slika 56.3. Kot Ω_2 je sedaj $4\pi - \Omega_2'$ in vrtinčnost je

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(i - \frac{d}{dt}\left(Q\frac{\Omega_1}{4\pi} + Q\frac{\Omega_2'}{4\pi}\right)\right)$$

Elektrini na koncih povzročata električno polje $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{od } Q} + \mathbf{E}_{\text{od } -Q}$. Pri oznakah na sliki pretakata obe polji ploskev $\mathcal{A}$ v negativni smeri; prvi proporcionalno Ω_2', drugi proporcionalno Ω_1, kar da:

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\Omega_1 + \Omega_2')$$



Slika 56.3: K vrtinčnosti vektorja **B** tokovne niti (drugič).

S tem je

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(i + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right)$$

iz česar ugotavljamo, da je vrtinčnost proporcionalna vsoti konduktivnega toka, ki opno prestopi in časovni spremembi pretoka vektorja $\varepsilon_0\mathbf{E}$, ki ga s tokom i "nanešena elektrina" ustvarja.

Iz opazovanja teh dveh vrtinčnosti ni težko potegniti splošnega zaključka. Če imamo v prostoru več odprtih tokovnih niti (nekatere so lahko tudi zaprte – sklenjene)[1], potem je vrtinčnost vektorja $\mathbf{B}/\mu_0$ po pentlji $\mathcal{L}$ enaka vsoti tokov skozi opno $\mathcal{A}$ (napeto v pozitivnem smislu na $\mathcal{L}$) in časovni spremembi pretoka vektorja $\varepsilon_0\mathbf{E}$ skozi to ploskev; pri tem pa se vektor $\mathbf{E}$ nanaša na polje elektrin, ki jih ti toki donašajo ali odnašajo. Povedano bomo zapisali takole:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = \sum \text{tokov skozi opno } \mathcal{A} \text{ na } \mathcal{L} + \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}} \qquad \text{(M1)}$$

kjer smo časovni odvod prenesli pod integral kot parcialni odvod.

Posplošitev vrtinčnosti polja B na vse toke. Tukajšnja izvajanja so se nanašala na splošno, odprto tokovno nit konduktivnega toka. Ob tem se neizbežno postavlja vprašanje: kaj je z vrtinčnostjo magnetnega polja ostalih tokov (konvektivnega toka, polarizacijskega toka in tokov magnetizacije)? Mikroskopski Ampèrovi toki so – v smislu modelnih mikroskopskih tokovnih zankic – v svojem bistvu sklenjeni toki, in njihov prispevek k vrtinčnosti že poznamo (razdelek 47). Drugačno naravo pa izkazujeta konvektivni ($i_{\text{konv.}}$) in polarizacijski ($i_{\text{pol.}}$) tok, ki sta v splošnem nesklenjena – podobno kot zgoraj opisana tokovna nit.

Z njima v zvezi sta zelo pomembni eksperimentalni ugotovitvi ameriškega fizika Henryja Rowlanda (1848-1901) in ruskega fizika Aleksandra Eichenwalda (1863-1944). Prvi je že leta 1876 ugotovil, da povzroča gibajoča elektrina kvalitativno in kvantitativno enako

[1] Če je tokovna nit sklenjena, potem se na njunih koncih nakopičena presežka $\pm Q$ kompenzirata in je njuno polje $\mathbf{E}_{\text{od } Q} + \mathbf{E}_{\text{od } -Q}$ enako nič; s tem je nič tudi $\partial\mathbf{E}/\partial t$ in od enačbe M1 ostane le

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = \sum \text{tokov skozi opno } \mathcal{A} \text{ na } \mathcal{L}$$

kar smo zapisali že z enačbo 44.1 (v zadevnem razdelku).

magnetno polje kot konduktivni tok v žicah, kar z drugimi besedami pomeni, da moremo za njegovo evalvacijo uporabljati Biot-Savartov zakon in za pripadajoči tokovni element pisati $i_{\text{konv.}}\, d\mathbf{l}$. (Eksperiment je izvedel z naelektrenim rotirajočim diskom in mu izmeril magnetno gostoto, ki je bila stotisočkrat šibkejša kot zemeljsko magnetno polje; ta ima gostoto $\sim 5 \cdot 10^{-5}$ T.)

Drugi (Eichenwald) pa je leta 1903 eksperimentalno potrdil Lorentzovo hipotezo, da povzroča magnetno polje po enakih zakonitostih tudi polarizirana elektrina v dielektrikih, če se ta z gibanjem dielektrika giblje ali pa mikroskopsko niha okrog "izhodiščne lege" in ji pripada gostota polarizacijskega toka $\mathbf{J}_{\text{pol.}} = \partial\mathbf{P}/\partial t$ (razdelek 52). (Eksperiment je izvedel zelo podobno kot Rowland, le da je bil tu v gibanju rotirajoč polariziran dielektrični disk, s katerim vred so se gibale tudi lokalno razslojene vezane elektrine[2].)

Po vsem tem je očitno naslednje: če pripada tudi ostalim tokom (konvektivnemu, polarizacijskemu in Ampèrovim tokom) kvantitativno in kvalitativno enako magnetno polje kot konduktivnemu toku, potem moremo vrtinčnost vektorja $\mathbf{B}$ v enačbi M1 smiselno razširiti na vse toke, ki opno $\mathcal{A}$ na konturi $\mathcal{L}$ prestopajo v pozitivnem smislu. Pisali bomo:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = \overbrace{\sum \text{vseh tokov skozi opno } \mathcal{A} \text{ na } \mathcal{L}}^{i_{\text{cel. skozi } \mathcal{A}}} + \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}} \tag{M2}$$

pri tem pa bomo razširjeno vsoto tokov razumeli v smislu $i_{\text{cel. skozi } \mathcal{A}}$ in zanj pisali:

$$i_{\text{cel. skozi } \mathcal{A}} = (i_{\text{kond.}} + i_{\text{konv.}} + i_{\text{pol.}} + i_{\text{mag.}})_{\text{skozi } \mathcal{A}}$$

Prvi, drugi in tretji tok moremo izraziti tudi s ploskovnim integralom gostot $\mathbf{J}_{\text{kond.}}$, $\mathbf{J}_{\text{konv.}}$ in $\mathbf{J}_{\text{pol.}} = \partial\mathbf{P}/\partial t$ po ploskvi $\mathcal{A}$, medtem ko zadnjega izrazimo – tako kot v razdelku 47 – s krivuljnim integralom vektorja magnetizacije po konturi $\mathcal{L}$. Po vstavitvi v M2 sledi tale zapis:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J}_{\text{kond.}} + \mathbf{J}_{\text{konv.}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}} \tag{56.1}$$

O dobljeni enačbi[3] bi lahko rekli, da povezuje vrtinčnost vektorja $\mathbf{B}$ na pentlji $\mathcal{L}$ s pretoki elektrin (s toki) in pretokom polja $\varepsilon_0 \partial\mathbf{E}/\partial t$ skozi splošno opno $\mathcal{A}$ na $\mathcal{L}$.

I. Maxwellova enačba. V elektrostatiki smo definirali vektor $\mathbf{D}$ kot $\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$, v magnetiki pa vektor $\mathbf{H}$ kot $\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$. Če združimo še $\mathbf{J}_{\text{kond.}}$ in $\mathbf{J}_{\text{konv.}}$ v $\mathbf{J}$ prostih ali mobilnih elektrin, dobimo t.i. *I. Maxwellovo enačbo*:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}} \tag{56.2}$$

[2]S tem eksperimentom je bila še enkrat ovržena predpostavka o etru kot univerzalnem mediju. Tako Maxwell kot kasneje Hertz, in še nekateri, so na prelomu stoletja namreč smatrali, da polarizacijski tok eksisitra tudi v etru (z dielektričnostjo ε_0) z gostoto $\partial(\varepsilon_0\mathbf{E})/\partial t$ in da ima skupen premikalni tok (kot so ga imenovali) gostoto $\partial(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P})/\partial t = \partial\mathbf{D}/\partial t$.

[3]Čeravno smo do enačbe prišli s pomočjo izvajanj, ki so bila oprta na Biot-Savartov in Coulombov zakon (oba sta namreč uporabljiva le v kvazistatičnih razmerah) ter na kontinuitetno enačbo (ki je splošen aksiom), pa je relacija splošnejša in te okvire presega.

Glede na Ampèrov zakon toka iz razdelka 47 je sprememba v dvojem: i) tokovna gostota $\mathbf{J}$ pomeni sedaj gostoto vseh makroskopskih pretokov elektrin (konduktivnih gostot v prevodnikih in konvektivnih gostot v plinih) in ii) v pretočnem integralu se pojavi dodaten člen $\partial\mathbf{D}/\partial t$, ki dimenzijsko ustreza gostoti toka in eksistira povsod tam, kjer se polje $\mathbf{D}$ časovno spreminja. V elektromagnetno teorijo je ta člen prvi vpeljal angleški fizik James Clerk Maxwell; poimenoval ga je kot *gostota premikalnega toka* (1. razdelek). (V slovenski elektrotehniški terminologiji se za ta tok uporablja ime *poljski tok* ($i_{\text{polj.}}$) – z gostoto $\mathbf{J}_{\text{polj.}} = \partial\mathbf{D}/\partial t$.)

Maxwell – "resnici na ljubo" – ni prišel do svojega izvirnega prispevka (torej do $\partial\mathbf{D}/\partial t$) po tej ali kakšni drugi sorodni poti. Mnenja, kakšne hipoteze in razmišljanja so Maxwella (v sredini prejšnjega stoletja) navajala na popravek Ampèrovega zakona toka, so še danes deljena.

1) Gotovo pa je res, da je bil Maxwell pod močnim vplivom Michaela Faradaya, njegovih eksperimentalnih podvigov in njegovega siceršnjega razumevanja elektromagnetnih pojavov. Faraday je prvi prelomil s takrat močno nemško šolo, ki je elektromagnetno silo razlagala kot vpliv na daljavo. Spregovoril je o polju – vpeljal termin polja – in dotedanje razumevanje interakcij med elektrinami (in toki) postavil na nivo interakcij med elektrino (tokom) in adekvatnim električnim (magnetnim) poljem – to je končno tudi vsebina Lorentzove sile.

2) Za časa Maxwella – in še tudi do preloma stoletja (do Lorentza in Einsteina) – je v fiziki "vladal" eter kot "nevidni" medij, ki naj bi skupaj z Zemljo tvoril materialno celoto, zato je bil člen $\partial\mathbf{D}/\partial t$ razumljen kot tok lokalno gibajočih vezanih elektrin v snovi ali/in etru. Maxwell je vsoto $\mathbf{J}+\partial\mathbf{D}/\partial t$ poimenoval kot *polni tok* (celotni tok), ki je vsota konduktivnega toka (v prevodnikih) in premikalnega toka (v izolatorjih).

3) Maxwell je prvi zapisal Faradayev indukcijski zakon v obliki, ki je danes poznana (s časovno spremembo vektorja $\mathbf{B}$). Ampèrov zakon do takrat takšnega člena na desni strani enačbe ni imel. Možna hipoteza je, da je člen $\partial\mathbf{D}/\partial t$ dobil svoje mesto v "želji" po simetriranju enačb Ampèra in Faradaya.

4) Kakorkoli že, Maxwell je obe enačbi (svojo, z $\partial\mathbf{D}/\partial t$, in Faradayjevo, z $\partial\mathbf{B}/\partial t$) združil in dobil valovno enačbo. (Ta pa je bila v drugih disciplinah fizike že poznana.) Kot rezultat je dobil valovno funkcijo, ki bi se širila približno s svetlobno hitrostjo (kolikor je bila takrat pač točno izmerjena). Postavil je hipotezo: svetloba je elektromagnetno valovanje – čeravno ni imel za to nobenega otipljivega eksperimentalnega dokaza.

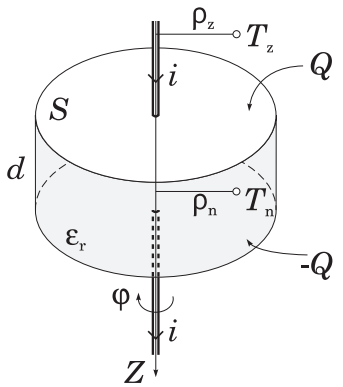
5) Maxwell ni doživel svojega triumfa; po njegovi smrti je leta 1888 Hertz napravil oscilator in elektromagnetne valove detektiral – energija se je "odlepila" od fiksne "tokovno vibrirajoče" strukture.

6) "Prišel" je Thomson z odkritjem elektrona, Lorentz s svojimi transformacijami, "padel" je eter in Einstein ugotavlja, da Maxwellove enačbe vsemu navkljub "držijo".

7) S kvantno in moderno fiziko so se v marsičem potrdile hipoteze Franklina, Ampèra, Faradaya, Maxwella in drugih, postavile pa so se tudi meje uporabnosti Maxwellove elektromagnetne teorije, ki je t.i. makroskopska teorija: ta teorija ne velja za območja, ki so "fizično premajhna", in ne velja za intervale časa, ki so "fizično prekratki".

Zgled 56.1

Oglejmo si že kar klasičen primer interpretacije razširjenega Ampèrovega zakona – ploščni kondenzator. Plošči naj sta krožni s površino S in razmakom d; vmes naj je dielektrik enakih izmer z dielektričnostjo $\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}$. Dotekajoč (odtekajoč) tok kondenzatorja bodi i; slika 56.4. Razmak d naj je (glede na $\sqrt{S}$) majhen, tako da



Slika 56.4: Magnetno polje v izolatorju kondenzatorja s krožnima ploščama.

moremo privzeti homogeno električno polje v izolatorju. Gostota $\mathbf{D}$ bo v izolatorju po iznosu Q/S, kjer je Q elektrina na dotekajoči plošči ($-Q$ je na odtekajoči); zveza med i in Q je $i = dQ/dt$. V izolatorju si izberimo točko T_n, ki je od osi kondenzatorja oddaljena za ρ_n. Zaradi rotacijske simetrije bo $\mathbf{H}$ imel le φ-komponento in bo na krožnici z radijem ρ_n imel konstantno vrednost. Po enačbi 56.2 bo to krožnico prestopal le poljski tok; pišemo:

$$2\pi\rho_\mathrm{n}H_\varphi(T_\mathrm{n}) = \pi\rho_\mathrm{n}^2\frac{dD_z}{dt} = \frac{\pi\rho_\mathrm{n}^2}{S}\frac{dQ}{dt} = \frac{\pi\rho_\mathrm{n}^2}{S}i$$

in še

$$H_\varphi(T_\mathrm{n}) = \frac{i}{2S}\rho_\mathrm{n}$$

Za točko (T_z) zunaj kondenzatorja pa pripadajočo krožnico pretaka le tok i, zato je (po enačbi 56.2)

$$2\pi\rho_\mathrm{z}H_\varphi(T_\mathrm{z}) = i \qquad H_\varphi(T_\mathrm{z}) = \frac{i}{2\pi\rho_\mathrm{z}}$$

Izraz za izolator spominja na zakonitost polja v vodniku polnega krožnega prereza (polje narašča linearno od osi k robu), izraz izven plošč pa že poznamo.

♣ V energetiki je poznan pojem polnilnega toka, ko je daljnovodna vrv enostransko odprta. Kolikšen je ta tok pri $l = 100$ km, $h = 20$ m, $\rho_0 = 1.8$ cm, $U = 400$ kV in 50 Hz. Kje je – in kolikšen je – poljski tok? ♣

57. Enačbe elektromagnetnega polja

Jedro enačb elektromagnetnega polja tvorijo t.i. *štiri Maxwellove enačbe*. V svoji znameniti knjigi, A treatise on electricity and magnetism, v katero je J.C. Maxwell strnil svoje poglede na elektromagnetiko, vseh teh enačb sicer ni eksplicitno napisal, izpostavil pa je zato dvanajst temeljnih enačb, ki jih je označil s črkami od A do L – za razliko od drugih, ki jih je oštevilčeval. Maxwellovi nasledniki – predvsem Hertz, Lorentz in Heaviside – so nato njegove zapise matematično "izčistili" do oblik, ki jih uporabljamo tudi danes. Ob tem pa velja pripomniti, da se te enačbe običajno pišejo za mirujoče strukture: to so takšne, pri katerih relevantni objekti – relativno drug na drugega – mirujejo. Tokovna gostota $\mathbf{J}$ je v takšnem primeru mišljena kot gostota konduktivnega in konvektivnega toka, gostota elektrine ρ pa kot gostota proste elektrine, ki je po kontinuitetni enačbi vezana na omenjeni gostoti tokov.

I. Maxwellova enačba – razširjen Ampèrov zakon. To smo spoznali v prejšnjem razdeku kot zadnjo,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}} \tag{I}$$

Enačba pravi, da je vrtinčnost vektorja magnetne poljske jakosti na pentlji $\mathcal{L}$ enaka pretoku konduktivnega in konvektivnega ter premikalnega (poljskega) toka – ali tudi polnega toka – skozi opno $\mathcal{A}$, ki je na $\mathcal{L}$ napeta in orientirana v pozitivnem smislu.

II. Maxwellova enačba – Faradayev zakon indukcije. Za mirujočo strukturo je to tranformatorski del pri elektromagnetni indukciji,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}} \tag{II}$$

Vrtinčnost vektorja električne poljske jakosti na pentji $\mathcal{L}$ je enaka negativnemu pretoku časovne spremembe vektorja gostote magnetnega pretoka skozi opno $\mathcal{A}$, ki je na $\mathcal{L}$ napeta in orientirana v pozitivnem smislu.

III. Maxwellova enačba – Gaussov stavek magnetnega polja. Enačba govori o neizvornosti magnetnega polja,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0} \tag{III}$$

Pretok vektorja gostote magnetnega polja skozi sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ je vedno nič.

IV. Maxwellova enačba – Gaussov stavek električnega polja. Električno polje je izvorno,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv} \tag{IV}$$

Pretok vektorja gostote električnega pretoka skozi sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ (navzven) je enak množini objete proste elektrine.

Lorentzova sila. Preko te sile se prepoznavajo učinki elektromagnetnega polja,

$$\boxed{\delta \mathbf{F}_{\mathrm{L}} = \delta Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})} \tag{V}$$

Na električno nabit delec deluje v elektromagnetnem polju sila, ki je odvisna še od jakosti električnega polja, gostote magnetnega polja in od hitrosti samega delca.

Kontinuitetna enačba. V sebi združuje zakon o ohranitvi elektrine,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv} \tag{VI}$$

Pretok vektorja gostote makroskopskega električnega toka (navzven) skozi sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ je v vsakem trenutku enak časovnemu pojemku množine proste elektrine znotraj $\mathcal{A}$ (v $\mathcal{V}$).

Joulov zakon. Pri vzdrževanju konduktivnih tokov v prevodnikih se sprošča toplotna energija. V odsotnosti neelektričnih potisnih sil ($E_{\mathrm{g}} = 0$) je gostota pripadajoče moči enaka

$$\boxed{p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}} \tag{VII}$$

Energija elektrenja. Za vzpostavitev električnega polja je potrebno v sistem vložiti določeno množino energije. Pripadajoča gostota vložene energije elektrenja od časa $t = 0$ do t je

$$\boxed{w_{\mathrm{elek.}}(t) = \int_0^t \mathbf{E} \cdot d_t\mathbf{D}} \tag{VIII}$$

Če je proces elektrenja reverzibilen, govorimo o akumulirani električni energiji. V linearnih sistemih je gostota te energije enaka

$$\boxed{w_{\mathrm{e}} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}} \tag{VIIIa}$$

Energija magnetenja. Za vzpostavitev magnetnega polja je potrebno v sistem vložiti določeno količino energije. Gostota energijskega vložka od $t = 0$ do časa t je

$$\boxed{w_{\mathrm{mag.}}(t) = \int_0^t \mathbf{H} \cdot d_t\mathbf{B}} \tag{IX}$$

V primeru, da je magnetenje reverzibilno, govorimo o akumulirani magnetni energiji. V linearnem sistemu je gostota te energije enaka

$$\boxed{w_{\mathrm{m}} = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}} \tag{IXa}$$

Snovne lastnosti. S stališča celotne elektromagnetne teorije je to gotovo najtrši "oreh". Njihovo proučevanje je v izključni domeni kvantne fizike – na teoretični ravni – in empiričnih merjenj – na praktični ravni. S tem v zvezi je tudi kopica nelinearnih fenomenov

in določene od njih je potrebno v praktični elektrotehniki vsekakor upoštevati; na nekatere smo skozi pričujoča izvajanja opozarjali, podrobne informacije pa bo bralec našel v ustrezni literaturi.

K sreči pa stvar le ni toliko zapletena. V veliki večini praktičnih elektromagnetnih problemov se izkaže, da so snovne lastnosti (pod določenimi pogoji) linearne ali pa jih je možno linearizirati. V takšnih primerih operiramo s tremi snovnimi parametri: specifična električna prevodnost (γ), dielektričnost (ε) in permeabilnost (μ).

Pod takšnimi pogoji velja v prevodnikih Ohmov zakon,

$$\boxed{\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}} \tag{X}$$

ki smo ga v območju, kjer delujejo neelektrične potisne sile, razširili z gonilno električno poljsko jakostjo $\mathbf{E}_{\mathrm{g}}$,

$$\boxed{\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\mathrm{g}})} \tag{Xa}$$

V pogojih linearnosti velja v izolatorjih (dielektrikih) zveza

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}} \tag{XI}$$

v magnetikih pa zveza

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \tag{XII}$$

Še najbolj groba poenostavitev je zajeta v zadnji enačbi; v feromagnetnih strukturah je potrebno pričujočo zvezo navezati na ustrezne magnetilne krivulje v (H, B) diagramu.

Sekundarni viri v snoveh. Za celovito in pravilno sliko ne smemo "pozabiti" na sekundarne vire v izolatorjih in magnetikih, ki jih izzove električno oz. magnetno polje. V dielektrikih so to dipoli – lokalno polarizirane vezane elektrine –, ki jih popisujemo z vektorjem polarizacije $\mathbf{P}$. Z njim je definiran vektor gostote električnega pretoka $\mathbf{D}$,

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \tag{XIII}$$

ki se po enačbi (IV) navezuje le še na prosto elektrino.

V magnetikih so sekundarni viri lokalne Ampèrove tokovne zankice, magnetni dipoli, katerih gostoto popisujemo z vektorjem magnetizacije $\mathbf{M}$. S tem vektorjem je definiran vektor magnetne poljske jakosti $\mathbf{H}$,

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}} \tag{XIV}$$

ki se po enačbi (I) navezuje le še na polni tok.

Čeravno teh sekundarnih virov vnaprej ne poznamo, saj so posledica polja $\mathbf{E}$ in polja $\mathbf{B}$, jih včasih formalno privzamemo kot znane. V takšnem primeru se spremeni le oblika I. in IV. Maxwellove enačbe,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} + \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \varepsilon_0 \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}} \tag{Ia}$$

$$\boxed{\varepsilon_0 \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv - \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}} \tag{IVa}$$

kjer pomeni $\mathbf{J}$ še vedno gostoto konduktivnega in konvektivnega toka in ρ še vedno gostoto proste elektrine, ki je z $\mathbf{J}$ povezana preko enačbe VI. V takem primeru sta ρ in $\mathbf{J}$ *primarna vira*, $\mathbf{P}$, $\partial\mathbf{P}/\partial t$ in $\mathbf{M}$ pa so t.i. *sekundarni viri*. V takšnem zapisu razumemo prostor kot prazen z dielektričnostjo ε_0 in permeabilnostjo μ_0. Na ti dve obliki zapisa I. in IV. Maxwellove enačbe bo bralec pogosteje naletel v učbenikih fizike. S tema enačbama hočejo avtorji akcentirati udeleženost tako makroskopskih kot mikroskopskih virov pri kreiranju elektromagnetnega polja.

Dopolnilna enačba pri gibanju[1]**.** V okviru Faradayeve indukcije smo se s tem že srečali. Če se kontura, v kateri pišemo inducirano napetost, giblje, potem je razširitev sledeča:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathcal{A}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \oint_{\mathcal{L}(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}} \tag{IIa}$$

Člen $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ je t.i. gibalna inducirana električna poljska jakost. Tako razširjena enačba je aktualna npr. pri obravnavi vrtljivih električnih strojev.

Prisotnost konvektivnih tokov. Tem tokom tu žal nismo posvečali posebne pozornosti, čeravno jih srečujemo tudi v elektrotehniki (elektromagnetno odklanjanje, vakuumske elektronke, elektronska mikroskopija, atmosferske razelektritve in drugo). Problematika je vsekakor specialna in presega okvire klasičnih osnov.

58. Osnove elektromagnetnega valovanja in difuzije

To področje elektromagnetike je zelo bogato in matematično sorazmeroma zahtevno. V ta sklop sodi problematika razširjanja valov, anten, valovodov, linij itd. Bralec se bo z vrsto teh zadev imel priliko spoznati še kasneje, na tem osnovnem nivoju pa bi se seznanili le z grobimi obrisi.

V elektrotehniki se najpogosteje srečujemo s harmoničnimi vzbujanji, pri katerih so – ob privzeti linearnosti – tudi naši vektorji elektromagnetnega polja harmonični; npr. $E = E_0 \cos \omega t$. V linearni snovi bi Maxwellov polni tok zapisali kot

$$J + \frac{\partial D}{\partial t} = \gamma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \gamma E_0 \cos \omega t - \omega \varepsilon E_0 \sin \omega t$$

Očitno je γE_0 amplituda konduktivnega toka, medtem ko je $\omega \varepsilon E_0$ amplituda poljskega toka; njuno razmerje je $\gamma/\omega\varepsilon$. Običajno imamo opraviti z dvema skrajnostima: ali je snov dober izolator ali pa dober prevodnik. Pri izolatorju je $\gamma \sim 10^{-14}$ S/m, pri prevodniku pa $\sim 10^7$ S/m. Pri frekvencah od nekaj hertzov, pa do visokih frekvenc je razmerje $\gamma/\omega\varepsilon$ za prevodnike očitno v korist konduktivnega toka, za izolatorje pa v korist poljskega toka, kar pomeni, da bodo tudi lastnosti elektromagnetnega polja v teh snoveh bistveno drugačne[1].

[1] Več o Maxwellovih enačbah v gibajočih sistemih bo bralec uspel najti v ustreznih specialnih učbenikih fizike.

[1] Zadevo bi lahko tudi obrnili in rekli: če je za dano snov $\gamma \gg \omega\varepsilon$, potem je ta prevodnik, v nasprotnem ($\gamma \ll \omega\varepsilon$) je snov izolator.

V dobrem izolatorju moremo I. Maxwellovo enačbo brez bistvenih zadržkov pisati v obliki

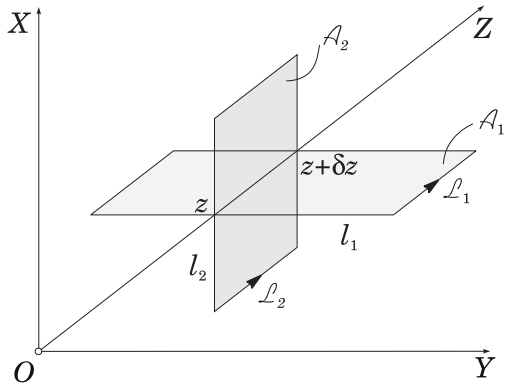
$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

medtem ko jo bomo v prevodniku zapisali kot

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

Ob tem ostajajo vse ostale enačbe nespremenjene.

Homogeno ravninsko valovanje v brezizgubni snovi. To valovanje je sicer najenostavnejše in matematično nezahtevno, vendar ga orisujejo vse tiste glavne karakteristike, ki so svojske tudi bolj zamotanim valovanjem; z njim se srečamo že v primerni oddaljenosti od antene. Za homogeno ravninsko valovanje je značilno, da sta vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ med seboj pravokotna in kot takšna ležita tangencialno na ravnini, ki je pravokotna na smer širjenja valovanja ter se na tej ravnini krajevno ne spreminjata. Izberimo si, da ležita vektorja na ravnini(nah) $z =$ konst. Polje $\mathbf{E}$ naj ima le x-komponento, polje $\mathbf{H}$ pa le y-komponento; $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$, $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$. Na poljubnem mestu (z) si izberimo dve pravokotni konturi $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}_2$, ki imata eno stranico vzdolž koordinate z dolgo δz (v limiti jo bomo krajšali proti nič), drugi stranici pa naj sta l_1 oz. l_2; slika 58.1. Prostor naj je



Slika 58.1: Dve pravokotni zanki vzdolž osi z.

homogen, z dielektričnostjo ε in permeabilnostjo μ; prevodnost $\gamma = 0$.

Izhajali bomo iz dveh izhodiščnih enačb (I. in II. Maxwellove enačbe):

$$\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \qquad \oint_{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathcal{A}_2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

in ju zapisali za obe narisani zanki v aproksimativni obliki. Za krivuljna integrala dobimo:

$$\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \doteq (H_y(z,t) - H_y(z+\delta z, t))\, l_1 \qquad \oint_{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \doteq (E_x(z+\delta z, t) - E_x(z,t))\, l_2$$

za ploskovna integrala pa:

$$\int_{\mathcal{A}_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \doteq \varepsilon \frac{\partial E_x(z+\delta z/2, t)}{\partial t} \delta z l_1 \qquad -\int_{\mathcal{A}_2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \doteq -\mu \frac{\partial H_y(z+\delta z/2, t)}{\partial t} \delta z l_2$$

Ko v smislu izhodiščnih enačb zapise združimo, se stranici l_1 in l_2 okrajšata. Nato enačbi delimo z δz in δz limitiramo proti nič; dobimo zvezi:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

ki predstavljata dve sklopljeni enačbi za obe komponenti poljskih jakosti. Če odvajamo prvo (drugo) na z in drugo (prvo) na t, dobimo po združitvi dve t.i. *valovni enačbi*:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Produkt $\mu\varepsilon$ označimo kot $1/v^2$, kjer ustreza v hitrosti. Izberimo si drugo enačbo[2],

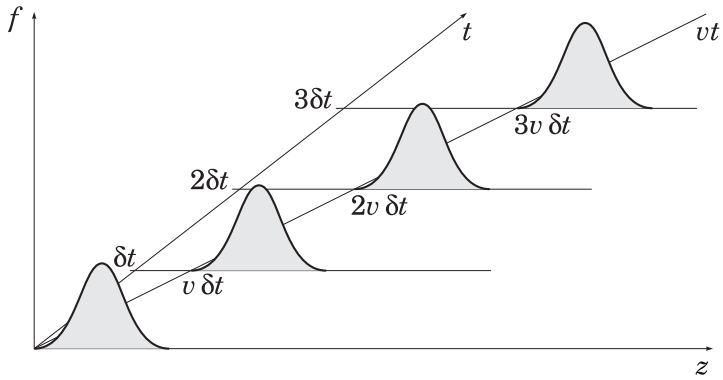
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

in poglejmo, kaj je z njeno rešitvijo. Ni namen, da se spuščamo v podrobnosti reševanja takšne enačbe, hitro pa se namreč da preveriti, da jo reši vsaka dvakrat odvedljiva funkcija, ki ima argument oblike $t \pm z/v$. Naj sta f in g takšni funkciji; torej:

$$E_x(z,t) = f(t - z/v) + g(t + z/v)$$

Preverimo rešljivost enačbe z $f(t - z/v)$. Druga odvoda na z in t sta: $\partial^2 f/\partial z^2 = f''/v^2$, $\partial^2 f/\partial t^2 = f''$, kjer smo z f'' označili drugi odvod funkcije f; funkcija f enačbo očitno reši. Podobno preverimo tudi za funkcijo g.

V splošni rešitvi za E_x je zanimiva krajevno-časovna interpretacija obeh funkcij; vzemimo prvo. Funkcija f ima ob t na mestu z določeno vrednost. V nekem kasnejšem času $(t + \delta t)$ bo na nekem drugem mestu $(z + \delta z)$ imela enako vrednost, če bo $\delta z = v\delta t$. To z drugimi besedami pomeni, da se ob priraščanju časa določena funkcijska vrednost "pomika" v smeri Z-osi s hitrostjo v; slika 58.2. Če ob časih $t, t+\delta t, t+2\delta t, \ldots$ napravimo



Slika 58.2: Potovanje valovne fronte v z-smeri.

krajevne "posnetke", so si ti povsem podobni, le zamaknjeni so vsakič v desno za razdaljo

[2]To je hiperbolična parcialna diferencialna enačba drugega reda; več o tem more čitatelj najti v ustrezni knjigi višje matematike; npr. I. Vidav: Višja matematika III.

$v\delta t$. Formalno-matematično izgleda tako kot pri funkciji ene spremenljivke, npr. $h(x)$, ko koordinatni sistem postopno pomikamo v levo s transformacijo $x \to x - n\delta x$.

Podoben premislek bi napravili tudi za funkcijo g, ki ima argument $t + z/v$. Zanjo bi ugotovili, da se ob priraščanju časa enaka funkcijska vrednost te "pomika" s hitrostjo v v smeri zmanjševanja koordinate z. Iz omenjenih razlogov rečemo funkciji $f(t - z/v)$ naprej potujoča fronta (val), funkciji $g(t + z/v)$ pa nazaj potujoča fronta.

V nadaljevanju ostanimo le pri prvem valu in pišimo: $E_x(z,t) = f(t - z/v)$. Privzemimo harmonično časovno spreminjanje polja E_x; pri $z = 0$ naj je to spreminjanje podano z enačbo $E_x(0,t) = E_{x0} \sin \omega t$. Pišemo:

$$E_x(z,t) = f(t - z/v) \qquad \Longrightarrow \qquad E_x(0,t) = f(t) = E_{x0} \sin \omega t$$

S tem je funkcija $f(t)$ znana, funkcijo $f(t - z/v)$ pa dobimo, ko v argumentu ωt zamenjamo t s $t - z/v$

$$E_x(z,t) = E_{x0} \sin \omega(t - z/v) = E_{x0} \sin(\omega t - \omega z/v)$$

Konstanto ω/v imenujemo *konstanta širjenja* in jo označujemo z β. Če ob času t_1 napravimo krajevni posnetek, dobimo $E_x(z,t_1) = E_{x0} \sin(\omega t_1 - \beta z)$, ki je periodična funkcija koordinate z s periodo λ, $\beta\lambda = 2\pi$ oz. $\lambda = 2\pi/\beta = v/(\omega/2\pi)$, in ustreza dolžini sinusnega vala.

In kaj je z magnetnim poljem? Dobimo ga iz ene od parcialnih enačb. Iz enačbe $\partial E_x/\partial z = -\mu \partial H_y/\partial t$ dobimo H_y tako, da E_x odvajamo na z in integriramo na t:

$$H_y = \frac{\beta}{\omega\mu} E_{x0} \sin(\omega t - \beta z) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{x0} \sin(\omega t - \beta z) = H_{y0} \sin(\omega t - \beta z)$$

Ugotovimo lahko, da sta E_x in H_y sofazni funkciji in imata razmerje amplitud podano s korenom, $E_{x0}/H_{y0} = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, ki se imenuje *valovna upornost* oz. *valovna impedanca.* Za prazen prostor (μ_0, ε_0) bi zanjo dobili $120\pi \doteq 377\ \Omega$; zanimivo je, da je razmerje amplitud frekvenčno neodvisno.

Difuzija ravninskega polja v prevodniku. V prevodniku je poljski tok zanemarljiv glede na konduktivnega. Izhodiščni enačbi bosta:

$$\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \qquad\qquad \oint_{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathcal{A}_2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Oslonimo se spet na sliko 58.1 in na obe ravninski komponenti polj (E_x in H_y); snov naj je homogena, s prevodnostjo γ in permeabilnostjo μ. Razlika je le v zapisu prve enačbe na pravokotni zanki $\mathcal{L}_1$,

$$(H_y(z,t) - H_y(z + \delta z, t))\, l_1 \doteq \gamma E_x(z + \delta z/2, t) \delta z l_1$$

Po limitiranju ($\delta z \to 0$) dobimo parcialno diferencialno enačbo, kateri pridružimo še drugo (nespremenjeno):

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x \qquad\qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

Ko odvajamo prvo na z in upoštevamo drugo, ali, ko odvajamo drugo na z in prvo na t ter ju združimo, dobimo spet dve podobni si enačbi:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \mu\gamma\frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\gamma\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

Tudi tu se ne moremo spuščati v podrobno reševanje; za harmonično vzbujano polje se kot primeren nastavek za rešitev izkaže funkcija oblike

$$H_y(z,t) = H_{y0}e^{pz}\sin(\omega t + qz)$$

kjer lahko vlogo sinusne prevzame tudi kosinusna funkcija. Naša naloga bo tu določiti le primerni konstanti p in q. V ta namen odvajamo nastavek dvakrat na z in enkrat na t:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} &= H_{y0}(p^2 - q^2)e^{pz}\sin(\omega t + qz) + 2H_{y0}pqe^{pz}\cos(\omega t + qz)\\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= H_{y0}\omega e^{pz}\cos(\omega t + qz)\end{aligned}$$

ter to vnesemo v parcialno diferencialno enačbo za H_y. Iz primerjav koeficientov pri "sinusih" in "kosinusih" dobimo:

$$p^2 = q^2 \qquad 2pq = \omega\mu\gamma$$

Odločimo se za možnost $p = q$ (možnost $p = -q$ ne prinaša kvalitativnih novosti); dobimo:

$$p = q = \pm\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \pm\frac{1}{\delta} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

Rešitev za H_y je s tem določena:

$$H_y(z,t) = H_{y0}e^{\pm z/\delta}\sin(\omega t \pm z/\delta)$$

Harmonični del rešitve kaže na enaka obnašanja kot v primeru brezizgubne snovi (oddaljujoče in približevalno polje), rešitev kot celota pa izkazuje eksponencialno dušenje v smeri pomikanja fronte. V izražavi pomeni δ t.i. *globino prodiranja* (vdorno globino), ki pove, na kateri razdalji "usahne" jakost polja za faktor $1/e$. Pri $\omega = 1$ MHz, $\gamma_{\mathrm{Cu}} = 56.10^6$ S/m in $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am je $\delta = 170$ μm; pri $\omega = 100$ MHz je δ le še 17 μm, pri omrežni frekvenci ($f = 50$ Hz) pa je $\delta = 9.5$ mm.

Poglejmo še polje E_x; dobimo ga iz enačbe $-\partial H_y/\partial z = \gamma E_x$:

$$E_x(z,t) = \mp\frac{1}{\gamma\delta}H_{y0}e^{\pm z/\delta}\left(\sin(\omega t \pm z/\delta) + \cos(\omega t \pm z/\delta)\right)$$

Če harmonični funkciji združimo ($\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$), dobimo

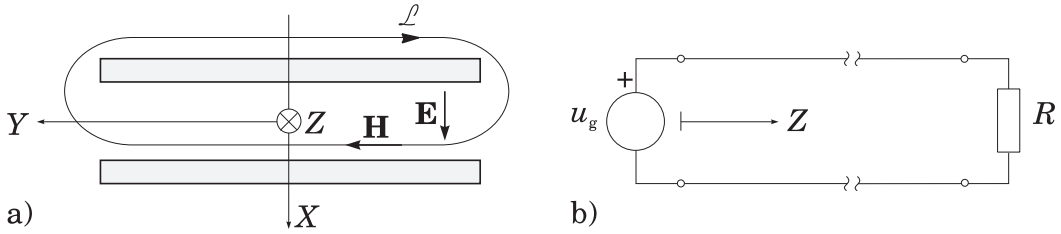
$$E_x(z,t) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}H_{y0}e^{\pm z/\delta}\sin(\omega t + \pi/4 - z/\delta)$$

Ugotovimo lahko, da sta si E_x in H_y fazno premaknjena za $\pi/4$, da obe polji sorodno, eksponencialno usihata in da je razmerje amplitud enako korenu $\sqrt{\omega\mu/\gamma}$. Pri bakru in $\omega =$ 1 MHz bi to razmerje bilo 150 $\mu\Omega$. Obnašanje komponent polja (v smeri napredovanja) fizikalno ustreza difuziji (penetraciji, pronicanju) z dušenjem (slabljenjem) $\exp(-z/\delta)$.

Fenomen valovanja in difuzije sta v elektrotehniki praviloma sopotna pojava in ju srečujemo tako pri daljnovodnem prenosu energije kot pri prenosu informacij po linijah, valovodih ali preko antenskih sistemov. Vsakršno poglabljanje v tej smeri presega postavljene okvire; namen je bil le ta, da se v grobih obrisih predstavi fenomen elektromagnetnega valovanja, ki je postal praktično in teoretično aktualen z vpeljavo Maxwellovega poljskega toka $\partial\mathbf{D}/\partial t$, in fenomen difuzije, ki postavlja vlogo prevodnika v drugačno luč, kot smo bili tega vajeni v stacionarnih in časovno počasi spremenljivih poljih.

Zgled 58.1

Kot ilustracijo povedanega si oglejmo linijo dveh trakov, ki sta na eni strani vzbujana s harmoničnim virom napetosti $u_\mathrm{g} = U_\mathrm{g} \sin\omega t$, na drugem koncu pa sta zaključena s primerno ohmsko upornostjo (primerna je tista, ki zagotavlja, da na vodu ni povratnega valovanja); slika 58.3. Širina trakov bodi a, debelina trakov naj je b in



Slika 58.3: a) Prerezana slika tračnega dvovoda in b) ustrezno električno vezje.

razmak med njima bodi d; velja naj še, da je $d \ll a$. Ob tem pogoju bo vektor $\mathbf{E}$ imel le x–komponento. Podobno bo (zaradi tokov v obeh trakovih) imelo polje $\mathbf{H}$ le y–komponento.

V vmesnem prostoru med trakoma sta si vektorja pravokotna in krajevno konstantna. Zapisali ju bomo kot povezani si komponenti ravninskega valovanja:

$$E_x(z,t) = E_{x0}\sin(\omega t - \beta z) \qquad H_y(z,t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{x0}\sin(\omega t - \beta z)$$

kjer je $E_{x0} = U_\mathrm{g}/d$.

Tako kot se spreminja E_x vzdolž trakov, se spreminja tudi napetost med trakoma (saj je napetost njen integral), in enako se spreminja tudi tok vzdolž trakov (saj je integral polja $\mathbf{H}$ po pentlji $\mathcal{L}$, ki objame tok, enak temu toku):

$$u(z,t) = E_{x0}d\sin(\omega t - \beta z) \qquad i(z,t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{x0}a\sin(\omega t - \beta z)$$

Kvocient med amplitudo napetosti in amplitudo toka je $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}(d/a)$, kar ustreza tudi razmerju $\sqrt{l/c}$, kjer sta l in c induktivnost in kapacitivnost dvovoda na meter dolžine; $l = \mu_0 d/a$, $c = \varepsilon_0 a/d$. Omenjen kvocient je t.i. *karakteristična upornost*

dvovoda (R_k). Pokaže se: če je R na koncu dvovoda enak R_k, potem med trakoma ni povratnega valovanja – je samo napredujoče valovanje.

S poglobljeno teoretično obravnavo se pokaže, da je za prenos energije od vira k bremenu odločilen produkt[3] $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, ki dimenzijsko ustreza W/m^2, fizikalno pa pomeni gostoto moči, ki se v vmesnem prostoru prenaša od generatorja k bremenu. Omenjen produkt ima vektorski značaj; smer vektorskega produkta pomeni ravno smer širjenja valovanja (energije). V našem zgledu je to z–smer. Če gostoto moči množimo s prerezom ($a \times d$), dobimo

$$E_{x0}^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} ad \sin^2(\omega t - \beta z)$$

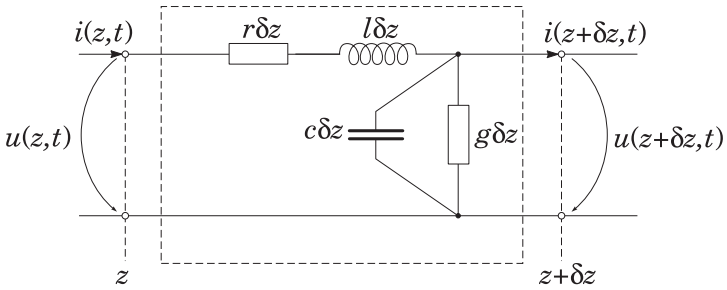
kar je hkrati enako tudi produktu ui.

Poleg valovnega pa imamo v trakih tudi difuzni pojav. Vzdolž trakov teče tok z gostoto $J_z = \gamma E_z$, kjer je E_z vzdolžna poljska jakost v trakih. Ob notranjih stenah tvori ta z jakostjo H_y ravninsko polje, ki (po zakonitostih difuzije) usiha eksponencialno v globino trakov. Če je $\delta \ll b$, potem na nekaj vdornih globinah ni več ne polja H_y ne polja E_z in ne tokovne gostote; tok teče le še ob notranjih stenah trakov. Produkt $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ teh dveh difuznih polj je (ob zgornjem in ob spodnjem traku) usmerjen v trak in pomeni gostoto moči, ki "pronica" v trakova in se navzven manifestira v toploti oz. joulskih izgubah.

Povsem dovolj bo, če si ob tem zgledu zapomnimo le eno – to pa je bistveno: električna energija se med virom in bremenom prenaša po vmesnem prostoru med vodnikoma; vodniki so le "usmerjevalci" te energije in za to svojo vlogo "pobirajo ceno" – joulske izgube.

Telegrafska enačba. Komentiran zgled (58.1) je zgolj ilustracija valovanja in difuzije na (tračni) liniji. Dejanske razmere se sicer resda zelo približajo opisanemu – ne pa povsem. Rekli smo, da del moči vzdolž vodov "pronica" vanju, kar pomeni, da ravninski val med trakoma tudi rahlo usiha (slabi). Usiha pa tudi zato, ker medij med trakoma ni idealen (kot smo privzeli), ampak ima neko izgubno prečno prevodnost.

Da bi vse te pomankljivosti zajeli, moramo pristopiti drugače. Homogen dvovod (v geometrijskem in snovnem smislu) okarakterizirajo štirje parametri: c – kapacitivnost/m, l – induktivnost/m, r – vzdolžna upornost/m, in g – prečna prevodnost/m. V smislu teh parametrov moramo kratek odsek (δz) dvovoda modelirati s četveropolom štirih koncetriranih elementov; slika 58.4



Slika 58.4: Modelni četveropol kratkega odseka izgubne (realne) linije (dvovoda).

[3]Produkt $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ se v teoriji elektromagnetike imenuje Poyntingov vektor, ki je označen z $\mathbf{S}$.

Po I. in II. Kirchhoffovem zakonu dobimo tili dve enačbi:

$$-u(z,t) + \left(ri(z,t) + l\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \right) \delta z + u(z+\delta z,t) = 0$$

$$-i(z,t) + \left(gu(z+\delta z,t) + c\frac{\partial u(z+\delta z,t)}{\partial t} \right) \delta z + i(z+\delta z,t) = 0$$

Ko tvorimo diferenco napetosti in diferenco toka med vhodno in izhodno stranjo in obe delimo z δz ter δz limitiramo proti nič, dobimo enačbi za $u(z,t) = u$ in $i(z,t) = i$:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = ri + l\frac{\partial i}{\partial t} \qquad\qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = gu + c\frac{\partial u}{\partial t}$$

Če prvo odvajamo na z ter vanjo vnesemo drugo in drugo odvajano na t, dobimo t.i. *telegrafsko enačbo*[4]:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + lc\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (rc + gl)\frac{\partial u}{\partial t} + rgu = 0$$

(In podobno tudi za tok i.) Z reševanjem te enačbe se ne mislimo nič ukvarjati, čeravno se pri harmoničnem vzbujanju in uporabi $j\omega$-metode silno poenostavi[5]. Omenimo morda le tole: če je $\partial/\partial t \equiv 0$ (enosmerne razmere), je enačba takšna, kot v zgledu 39.2, če pa je linija brezizgubna (idealna), bo enačba identična kot za E_x v neizgubnem mediju; začetek razdelka.

[4]Enačba je parcialna diferencialna enačba. O takšnih enačbah bo čitatelj slišal kaj več pri višji matematiki.

[5]♣ Radovedni bralec bo (na osnovi razdelkov 63 in 64) postoril tale korak: za $u(z,t)$ bo uvedel kompleksor $\underline{U}(z)$ in za $\partial/\partial t$ (ali $\partial^2/\partial t^2$) bo pisal $j\omega$ (ali $-\omega^2$) – in pot nadaljeval. ♣

Na voljo imamo le malo dokazov, izvirajočih iz poskusov, v zvezi z neposrednim elektromagnetnim učinkom tokov, ki nastanejo v dielektrikih zaradi spremembe električnega odmika. Toda skrajne težave, ki se pojavijo, ko želimo zakone elektromagnetizma uskladiti z obstojem nezaključenih tokov, so eden izmed razlogov, zakaj moramo priznati obstoj prehodnih tokov zaradi spremembe odmika. Pomembnost teh tokov se bo pokazala, ko bomo obravnavali elektromagnetno teorijo svetlobe.

Maxwell

VII. POGLAVJE

Električna vezja spremenljivih tokov

59. Uvod v linearna električna vezja

S pojmom električnega vezja – kot posebnega primera splošne elektromagnetne strukture – smo se skozi dosedanja izvajanja že večkrat srečevali. Seznanili smo se s tremi tipičnimi koncentriranimi gradniki: kondenzatorjem, uporom in tuljavo; prvi je zmožen zadržati električno energijo, na drugem se sprošča toplotna energija in tretji je zmožen zadržati magnetno energijo. Spoznali smo tudi dva osnovna vira električnih vezij (napetostni in tokovni generator); vir s svojo časovno obliko napetosti oz. toka ključno determinira obnašanje vezja. Skozi posamezna poglavja smo se določenih parcialnih vprašanj na to temo celo lotevali, vendar bolj v kontekstu obravnavane tematike; neprimerno več pozornosti pa smo namenili vezjem enosmernega toka. Nekako v tem slogu naj bi izzveneli tudi sledeči razdelki, ki bodo pripravili osnove za analizo časovno spremenljivo vzbujanih električnih vezij. V ta uvodni del sodijo tudi nekateri splošni in ne nepomembni okviri.

1) Najpogosteje se z električnim vezjem srečujemo na t.i. fizični ravni, ko omenjene elemente povežemo v določeno funkcijsko celoto – da služi določenemu namenu. Ti elementi so fizični (realni) in nasploh niso idealni, kar pomeni, da upor, kondenzator ali tuljava niso dejansko samo to, za kar so deklarirani, ampak izkazujejo tudi določene "parazitne" lastnosti. Žičnat "upor" ni le upor, ampak ima (zaradi navijanja) tudi določeno parazitno induktivnost in medovojno kapacitivnost; slednji prideta do izraza pri "hitrih" časovnih spremembah toka (napetosti). "Tuljava" ni le tuljava, ampak ima tudi izgubno upornost in parazitno medovojno kapacitivnost. Če je tuljava s feromagnetnim jedrom, imamo opraviti z nelinearnostjo in še z dodatnimi histereznimi in vrtinčnimi izgubami v jedru, ki se navzven kažejo kot povečana ohmska upornost. In tudi "kondenzator" ni le kondenzator, ampak ima določen izolacijski tok, kateremu se – pri visokih frekvencah – pridružijo še dodatne dielektrične izgube. V vsakem od naštetih primerov moremo govoriti o t.i. *kvaliteti* pasivnega elementa. Prav iz teh razlogov včasih (in po potrebi) priredimo elementu pripadajoče nadomestno vezje, ki k osrednji karakteristiki elementa pridružuje tudi parazitne (kvarne, neželene) lastnosti.

2) Z električnim vezjem se srečujemo tudi na t.i. modelni ravni, ko določeni elektromagnetni strukturi (transformator, motor, linija, daljnovod itd.) priredimo ekvivalentno (modelno) električno vezje koncentriranih elementov. Pot do modelnega vezja

(žal) običajno ni tako preprosta, kot bi si želeli. V mnogih primerih se je potrebno poglobiti v reševanje Maxwellovih enačb, ki nas posredno privedejo do modelnega vezja. Že preprost primer ravne žice, ki vodi harmonični tok, nas pripelje do modelnega vezja upora in tuljave, od katerih sta frekvenčno odvisni tako upornost kot induktivnost.

3) Kot odločujoče omenimo še kriterij kvazistatičnosti, na katerega smo opozarjali že v uvodu v prejšnje poglavje. Če so fizične izmere vezja (ali elektromagnetne strukture) relativno majhne glede na valovno dolžino oz., ko ni potrebno upoštevati zakasnitvenih efektov, potem moremo opazovan sistem obravnavati na nivoju koncentriranih elementov (R, L in C) in pripadajočih integralnih količin polja (tokov in napetosti); podrobnejše poglabljanje v tej smeri žal presega postavljen nivo in že posega v temeljitejši študij elektromagnetnih polj.

4) Področje splošnih električnih vezij je v elektrotehniki nasploh bogato in izredno razvejano, tako da se bo posameznik s to tematiko še pogosto in predvsem poglobljeno srečeval v kasnejšem študiju; seznanil se bo z raznimi analitičnimi in numeričnimi metodami reševanja splošnih (linearnih in nelinearnih) električnih vezij. Na tem nivoju bomo problematiko tematsko zožili le na linearna vezja, ki so harmonično vzbujana, na samem začetku pa bomo krajšo pozornost namenili še obnašanju linearnih vezij ob preklopnih situacijah.

5) Dogovorimo se še, da bodo naši koncentrirani elementi idelani – "čisti" elementi; kasneje, ko bomo že nekaj več vedeli o lastnostih vezij s čistimi elementi, pa bomo nekaj osnovnega dorekli tudi o realnih elementih (razdelek 69).

60. Elementi linearnih električnih vezij

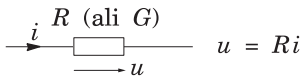
Kot pri vezjih istosmernih tokov delimo tudi tu elemente (gradnike) med pasivne in aktivne. Od pasivnih bomo v "naša" vezja vključevali le linearne upore, kondenzatorje in tuljave (te morejo biti tudi magnetno povezane), od aktivnih elementov pa bomo uporabljali le neodvisne tokovne in napetostne generatorje, katerim bomo poznali njihove časovne funkcijske oblike – pisali bomo: $i_{\mathrm{g}}(t)$ ali $u_{\mathrm{g}}(t)$. Realnemu električnemu viru pripada ustrezno nadomestno vezje, ki vključuje neodvisne vire in pasivne elemente; če so slednji linearni, pravimo, da je tudi vir linearen.

V nadaljevanju si bomo kot prvo ogledali napetostno-tokovne in močnostno-energijske razmere na treh osnovnih pasivnih elementih.

Upor. Na njem nam (u, i) razmere opredeljuje Ohmov zakon $u = Ri$ oz. $i = Gu$, kjer sta R in G njegova upornost oz. prevodnost. V idealiziranih razmerah sledi napetost (tok) na uporu proporcionalno toku (napetosti). Čeravno je to trivialno, izpostavimo že tu, da je ta (u, i) relacija linearna.

O linearnosti funkcijske relacije govorimo nasploh takrat, ko velja superpozicija in homogenost. Če sta količini f in g funkcijsko enolično povezani, da f_1 pripada g_1 ter da f_2 pripada g_2, potem je funkcijska zveza linearna, če – pri poljubnih konstantah a in b – količini $af_1 + bf_2$ pripada količina $ag_1 + bg_2$; Ohmov zakon to lastnost očitno ima.

V električnih vezjih upor dogovorno označujemo in po potrebi opremimo z referenčnima smerema toka in napetosti (v isto smer); slika 60.1.



Slika 60.1: Upor in pripadajoče oznake.

Zvezo med tokom in napetostjo pišemo:

$$\boxed{u = Ri} \tag{60.1}$$

ali kot

$$\boxed{i = Gu} \tag{60.1a}$$

Mnogo nazaj smo že tudi ugotovili, da trenutni moči p_t na uporu ustreza produkt,

$$\boxed{p_\mathrm{t} = ui} \tag{60.2}$$

ki ga po potrebi zapišemo tudi kot Ri^2 ali kot Gu^2. Količino sproščene toplotne energije $W_\mathrm{t}(t_1, t_2)$ ali joulskih izgub med trenutkoma t_1 in t_2 da integral,

$$\boxed{W_\mathrm{t}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p_\mathrm{t}\, dt} \tag{60.3}$$

Izpostaviti je potrebno še primer, ko je tok (napetost) periodična funkcija, $i(t+T) = i(t)$, kjer je T perioda. V takšnem primeru vpeljemo še količino P – *poprečno moč* v eni periodi –,

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p_\mathrm{t}(t')\, dt'} \tag{60.4}$$

Če za p_t pišemo Ri^2 ali Gu^2, dobimo še

$$P = R\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} i^2(t')\, dt'\right) = G\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} u^2(t')\, dt'\right)$$

Poprečju kvadrata toka (napetosti) rečemo tudi kvadrat *efektivne vrednosti* toka (napetosti); zapišemo ga kot I_ef^2 (ali U_ef^2) in velja:

$$\boxed{I_\mathrm{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} i^2(t')\, dt'} \qquad U_\mathrm{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} u^2(t')\, dt'}} \tag{60.5}$$

ali

$$\boxed{P = RI_\mathrm{ef}^2 = GU_\mathrm{ef}^2} \tag{60.6}$$

Efektivna vrednost periodičnega toka (napetosti) je tista ekvivalentna enosmerna vrednost toka (napetosti), ki bi na istem uporu povzročala enako moč kot jo povzroča periodični tok (napetost).

Pri periodičnih tokih (napetostih) je včasih zanimiva tudi srednja ali poprečna vrednost toka (napetosti). Srednja vrednost je določena s sorodnim integralom kot poprečna moč (60.4)

$$\boxed{I_{\mathrm{sr}} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i(t')\,dt' \qquad U_{\mathrm{sr}} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u(t')\,dt'} \tag{60.7}$$

Zgled 60.1

Vzemimo upor $R = 10\ \Omega$, skozi katerega teče polnovalno usmerjen tok $i(t) = I|\sin(100\pi t)|$, $I = 10$ A. Perioda tega toka je $T = 10$ ms, frekvenca $f = 100$ Hz. Na uporu je napetost $u = Ri = U|\sin(100\pi t)|$, $U = RI$. Za srednjo vrednost toka dobimo

$$I_{\mathrm{sr}} = \frac{1}{10^{-2}}\int_0^{10^{-2}} I\sin(100\pi t')\,dt' = \frac{2}{\pi}I \doteq 0.637I = 6.37\ \mathrm{A}$$

in na podoben način dobimo tudi srednjo vrednost napetosti: $U_{\mathrm{sr}} = (2/\pi)U \doteq 63.7$ V. Trenutna moč p_{t} je $Ri^2 = RI^2\sin^2(100\pi t)$. Kvadrat sinusa razstavimo na konstantni in nihajoči del,

$$p_{\mathrm{t}} = RI^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(200\pi t)\right)$$

Poprečna moč P je po enačbi 60.4 očitno enaka $RI^2/2 = 500$ W, ustrezni efektivni vrednosti pa sta:

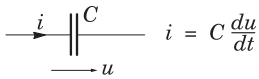
$$I_{\mathrm{ef}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-2}}\int_0^{10^{-2}} I^2\sin^2(100\pi t')\,dt'} = \frac{I}{\sqrt{2}} \doteq 7.07\ \mathrm{A}$$

in $U_{\mathrm{ef}} = U/\sqrt{2} = 70,7$ V. ♣ Bralec naj si v časovnem diagramu izriše u, i in p_{t} ter označi vrednosti I_{sr}, U_{sr}, I_{ef}, U_{ef} in P. Podoben postopek naj bralec opravi še za pulzirajoč tok (vlak pravokotnih impulzov) z dolžino impulza T_1 in dolžino pavze T_2, ki teče skozi upor z upornostjo R in ima višino impulzov enako I_0. ♣

Kondenzator. Po ohranitvenem zakonu je časovni odvod elektrine Q na plošči kondenzatorja, kamor doteka tok i, enak prav temu toku, $dQ/dt = i$, kar – preko kapacitivnosti C – izrazimo tudi z napetostjo med ploščama,

$$\boxed{i = C\frac{du}{dt}} \tag{60.8}$$

Enačba korespondira z oznakami na sliki 60.2. Operacija odvajanja povezuje napetost s



Slika 60.2: Kondenzator in pripadajoče oznake.

tokom; zanjo pa tudi vemo, da je linearna. Večkrat je interesantna tudi obratna povezava. V ta namen množimo z dt in integriramo od t_1 do t_2; dobimo:

$$\boxed{u(t_2) - u(t_1) = \frac{1}{C}\int_{t_1}^{t_2} i\,dt} \tag{60.8a}$$

Razlika napetosti je proporcionalna množini elektrine, ki med trenutkoma t_1 in t_2 "dospe" na referenčno ploščo (in z druge odteče). Vidimo, da sta tok in napetost na kondenzatorju v diferencialnem oz. integralnem odnosu. Tok je sorazmeren odvodu napetosti, sprememba napetosti pa je sorazmerna integralu toka. Ta zveza je v električnih vezjih zanimiva pri simulaciji odvoda ali integrala kake neelektrične količine, ki ji priredimo tok (ali napetost). Razvidno je še nekaj: glede na fizikalno omejenost toka in napetosti, je napetost na kondenzatorju vedno zvezna funkcija – integral omejene funkcije je zvezna funkcija.

Shranjeno (akumulirano) električno energijo v polju kondenzatorja že poznamo; odvisna je od kapacitivnosti in kvadrata trenutne napetosti,

$$\boxed{W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}Cu^2} \tag{60.9}$$

Forma je kvadratna in tudi fizikalno vedno nenegativna. Trenutna moč dotekanja te energije v kondenzator je $p_\mathrm{e} = dW_\mathrm{e}/dt = Cu\,du/dt$. Po enačbi 60.8 je moč

$$\boxed{p_\mathrm{e} = ui} \tag{60.10}$$

torej enaka produktu trenutnih vrednosti toka in napetosti na kondenzatorju. Moč je pozitivna (energija doteka), ko sta u in i enakega predznaka, in je negativna (energija odteka), ko sta u in i nasprotnega predznaka. Rečemo tudi, da je v prvem primeru kondenzator v porabniškem, v drugem pa v generatorskem režimu.

Zgled 60.2

Tok na kondenzator $C = 100$ pF naj priteka v zaporednih impulzih (z dolžino $T_1 = 1$ μs in s pavzo dolžine $T_2 = 3$ μs) z jakostjo $I_0 = 10$ μA; ob trenutku $t = 0$ naj je kondenzator prazen (brez napetosti). V času prvega impulza bo napetost na njem naraščala linearno,

$$u^{(1)}(t) = \frac{1}{C}\int_0^{t<T_1} I_0\,dt = \frac{I_0}{C}t$$

Ob nastopu pavze bo napetost na kondenzatorju $(I_0/C)T_1 = 0.1$ V in se bo zadržala za celotno trajanje prve pavze (saj toka ni; $du/dt = 0$). Za čas drugega impulza bo napetost na njem

$$u^{(2)}(t) = \frac{I_0}{C}T_1 + \frac{1}{C}\int_{T_1+T_2}^{t<2T_1+T_2} I_0\,dt = \frac{I_0}{C}T_1 + \frac{I_0}{C}(t - T_1 - T_2) = \frac{I_0}{C}(t - T_2)$$

Sedaj že lahko zapišemo, kako bo z napetostjo ob n-tem impulzu:

$$u^{(n)}(t) = \frac{I_0}{C}\,(t - (n-1)T_2)$$

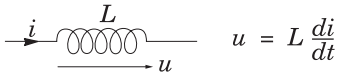
Ob nastopu n-te pavze bi bila napetost ravno $(I_0/C)nT_1$.

Če bi se po preteku n-te pavze smer tokovnih impulzov obrnila ($I_0' = -I_0$), bi se z vsakim novim impulzom napetost manjševala po lomljeni padajoči funkciji v postopih I_0T_1/C. ♣ Bralec naj si skicira časovne diagrame $u(t)$, $W_\mathrm{e}(t)$, $p_\mathrm{e}(t)$ in premisli o režimu, v katerem je kondenzator v določenih časovnih intervalih. ♣

Tuljava. V okviru Faradayevega zakona indukcije smo ugotovili, da je na tuljavi z induktivnostjo L zveza med napetostjo in tokom tale:

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt}} \tag{60.11}$$

Ob tem smo se dogovorili tudi za oznake na koncentriranem elementu; slika 60.3.



Slika 60.3: Tuljava in pripadajoče oznake.

Primerjalno na kondenzator lahko vidimo, da sta se vlogi toka in napetosti zamenjali, zato moremo obratno zvezo že kar zapisati:

$$\boxed{i(t_2) - i(t_1) = \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_2} u\,dt} \tag{60.10a}$$

in tudi tu zaključiti: tok na tuljavi je vedno zvezna funkcija, kar je skladno tudi s shranjevanjem magnetne energije v polju znanega toka,

$$\boxed{W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}Li^2} \tag{60.12}$$

za katero vemo, da se – že fizikalno – v hipu ne more spremeniti. Trenutna moč dotekanja te energije je $p_\mathrm{m} = dW_\mathrm{m}/dt = Li\,di/dt$, kar po enačbi 60.11 da

$$\boxed{p_\mathrm{m} = ui} \tag{60.13}$$

in za katero spet velja podobno – o režimih – kot za p_e.

Zgled 60.3

Ob nekem stikalnem "manevru" se tok skozi tuljavo z induktivnostjo $L = 2$ H odvija po naslednji časovni odvisnosti:

$$i(t) = \begin{cases} 100 & t < 0 \\ 100e^{-2t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Poglejmo, kaj je z ostalimi količinami na tuljavi. Po enačbi 60.11 je napetost sorazmerna odvodu toka,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -400e^{-2t} & t > 0 \end{cases}$$

Akumulirana magnetna energija je (po 60.12)

$$W_\mathrm{m}(t) = \begin{cases} 10\,000 & t < 0 \\ 10\,000e^{-4t} & t \geq 0 \end{cases}$$

in po 60.13 je moč

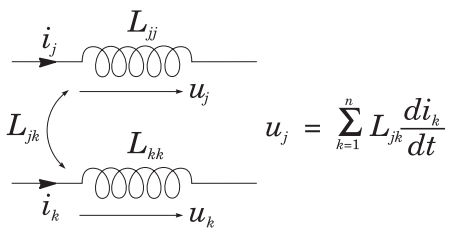
$$p_{\mathrm{m}}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -40\,000e^{-4t} & t > 0 \end{cases}$$

Magnetna energija se od $t = 0$ dalje manjša (moč je negativna) in režim tuljave je generatorski. ♣ Bralec naj si skicira časovne poteke relevantnih količin. ♣

Sklop več tuljav. Za primer n magnetno povezanih tuljav smo za napetost na j-ti tuljavi dobili izraz

$$\boxed{u_j = \sum_{k=1}^{n} L_{jk} \frac{di_k}{dt}} \tag{60.14}$$

ki korespondira z oznakami na sliki 60.4. Za količino shranjene magnetne energije smo



Slika 60.4: Sklopljeni tuljavi s pripadajočimi oznakami.

dobili izraz

$$\boxed{W_{\mathrm{m}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} L_{jk} i_j i_k} \tag{60.15}$$

Če energijo odvajamo po času in upoštevamo vzajemnost ($L_{jk} = L_{kj}$), dobimo (ob upoštevanju 60.14) še

$$\boxed{p_{\mathrm{m}} = \sum_{j=1}^{n} u_j i_j} \tag{60.16}$$

ki ustreza vsoti produktov ui po posameznih tuljavah. Ob slednjih dveh enačbah velja poudariti, da ima pravi fizikalni smisel šele vsota; parcialnega energijskega ali močnostnega sumanda ne moremo poistovetiti z razmerami samo na eni od tuljav.

61. Kirchhoffova zakona in bilanca moči

V prejšnjem razdelku smo si ogledali relacije, ki veljajo na posameznih pasivnih elementih; pri tem nas ni v ničemer zanimal splošen kontekst (vezje), v katerega je opazovan element vpet. Spoznali smo tole: če poznamo element in tok (ali napetost) na njem, potem moremo priti tudi do vseh ostalih zanimivih količin, ki se tega elementa neposredno tičejo. Povsem očitno je, da bodo v vezju takšnih elementov in virov trenutna stanja na posameznih elementih vzročno pogojevana in povezana; prvenstveno jih bodo pogojevale časovne oblike tokov in napetosti virov, ki vezje elementov "od znotraj" vzbujajo; bodo pa med seboj tudi povezana preko ustreznih tokovnih in napetostnih enačb danega vezja.

Kirchhoffova zakona. Pod pogoji kvazistatičnosti elektromagnetnega polja, ki opravičuje uporabo koncepta električnih vezij koncentriranih elementov, se more elektrina kopičiti le na ploščah kondenzatorjev (in ne v spojiščih vej), kar pomeni, da je tudi bilanca časovno spremenljivih tokov v spojišču uravnotežena (I. Kirchhoffov zakon),

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m}(\pm)i_k = 0} \tag{61.1}$$

Tu pomeni m število vej, ki se v dano spojišče stekajo; predznak $(+)$ je pri odtekajočih in predznak $(-)$ je pri pritekajočih tokih.

Podobno je z II. Kirchhoffovim zakonom. Po Faradayevem zakonu je vsota vseh napetosti v sklenjeni zanki – vključno s členom $d\psi/dt$, ki je napetost na tuljavi – enaka nič, kar spet zapišemo kot

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}(\pm)u_j = 0} \tag{61.2}$$

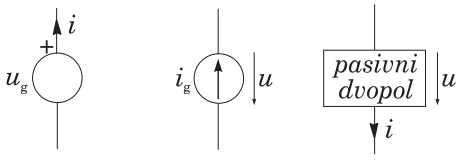
Tu pomeni n število delnih (vejnih) napetosti v dani zanki vezja, predznak $(+)$ je pri oni, ki je v smeri obhoda, in predznak $(-)$ je pri delni napetosti, ki je nasprotna smeri obhoda.

Že iz teh dveh enačb se da sklepati, da bo koncept reševanja časovno spremenljivo vzbujanih linearnih vezij zelo podoben tistemu, ki smo ga spoznali v okviru enosmernih vezij; za dano vezje bo potrebno zapisati potrebno število napetostnih in tokovnih enačb, ki bodo zajemale ustrezne (u, i) relacije na posameznih elementih.

Bilanca moči in energij v električnem vezju. Glede na predhodni razdelek in oba Kirchhoffova zakona bi brez pridržkov razširili stavek Tellegena (iz razdelka 38) tudi na časovno spremenljivo vzbujana električna vezja; dobili bi:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} u_j i_j = 0} \tag{61.3}$$

kjer sta u_j in i_j napetost in tok j-te veje (ki sta na njej istosmiselno označena); vseh vej v vezju je n. Razčlemba sumandov v 61.3 bi za vsako konkretno vezje na koncu rezultirala v uravnoteženo bilanco trenutnih moči aktivnih in pasivnih gradnikov vezja; slika 61.1. Trenutna moč napetostnega vira ustreza produktu napetosti in toka, ki iz



Slika 61.1: Referenčne označbe toka in napetosti na gradnikih električnih vezij.

referenčne sponke izstopa $(u_g i)$, trenutna moč tokovnega vira ustreza produktu toka in napetosti med izstopno in vstopno sponko $(i_g u)$ in trenutna moč na pasivnem dvopolu

ustreza produktu napetosti in toka z istosmerno označbo (ui). Enačbo 61.3 bi z besedami zapisali takole:

$$\boxed{\sum \text{trenutnih moči generatorjev} = \sum \text{trenutnih moči na pasivnih elementih}} \tag{61.4}$$

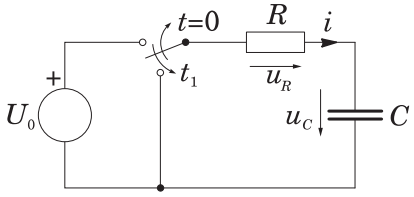
Če bi enačbo integrirali po času med zaporednima trenutkoma t_1 in t_2, bi rezultat prebrali takole:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum \text{energijskih vložkov generatorjev} &= \sum \text{sproščene toplote} \\ &+ \sum \text{v tem času akumulirane el. in mag. energije} \end{aligned}} \tag{61.4a}$$

62. Osnove prehodnih pojavov

Na tem nivoju se z analizo splošno vzbujanih električnih vezij ne bomo ukvarjali – zadržki so predvsem matematične narave –, za boljše razumevanje pa bi nekaj splošnih zakonitosti kazalo vsekakor izpostaviti. V okviru tega imamo v mislih analizo preklopnih razmer v enostavnih električnih vezjih. Vsakršno vezje namreč enkrat priključimo na vir in ga prej ali slej tudi odključimo; s stališča pasivnih elementov učinkuje takšen "radikalen" preklop kot časovno spremenljivo vzbujanje. Zaradi inertnosti kondenzatorjev in tuljav bo odziv zvezja pasivnih elementov na spremenjeno vzbujanje gotovo razpotegnjen (zakasnjen, zadržan) na določen čas t.i. *prehodnega pojava*, po katerem se bodo vzpostavile neke nove razmere.

Glede na to, da ni namen razdelka v tem, da se spuščamo v poglobljene teorije – s katerimi se bo bralec imel še priliko seznaniti –, bo najprimerneje, če osrednjo problematiko spoznamo skozi primer. Oglejmo si vklop in odklop RC člena (kondenzatorja s preduporom) na/od enosmernega vira napetosti U_0; slika 62.1. Opazovali bomo dva



Slika 62.1: Vklop in izklop stikala v RC vezju.

prehodna pojava. Kot prvo si bomo ogledali vklop RC člena na vir ob trenutku $t = 0$ – polnjenje kondenzatorja –, nato pa še praznenje kondenzatorja – po preklopu stikala v spodnji položaj v trenutku $t_1 > 0$.

1) Vklop. Naj je pred vklopom kondenzator prazen; $u_C(t < 0) = 0$. Zaradi inertnosti kondenzatorja bo $u_C(0^+) = 0$; v hipu ne more sprejeti omembe vredne množine energije. Za čase med 0 in t_1 zapišemo za zanko II. Kirchhoffov zakon:

$$-U_0 + u_R + u_C = 0$$

Trenutno imamo še na izbiro, katero od količin bomo opazovali: ali i ali u_R ali u_C. Če si izberemo tok, potem bomo u_R in u_C izrazili z njim: $u_R = Ri$, $u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt'$. Po vstavitvi sledi

$$-U_0 + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' = 0$$

in če še odvajamo po času, dobimo

$$i' + \frac{1}{RC}i = 0$$

kjer smo z i' označili časovni odvod toka, $i' = di/dt$. Dobili smo homogeno (desna stran je nič) linearno (koeficienti so konstantni) diferencialno enačbo prvega reda (prvi odvod) za polnilni tok kondenzatorja. Enačba bo enolično rešljiva, če poznamo t.i. *začetni pogoj*: tok $i(0^+)$ – tik ob vklopu. Tega bomo dobili, če poznamo fizikalne zakonitosti vezja. Ugotovili smo, da je $u_C(0^+) = 0$, kar pomeni, da mora biti takrat $u_R(0^+)$ enak U_0, če naj velja napetostna enačba; torej $i(0^+) = U_0/R$.

Če v diferencialni enačbi za i pišemo u_R/R, dobimo enačbo za u_R in njej pripadajoč začetni pogoj:

$$u_R' + \frac{1}{RC}u_R = 0 \qquad\qquad u_R(0^+) = U_0$$

Nekoliko drugače bi postopali pri enačbi za u_C. V $u_R = Ri$ bi i izrazili z u_C kot $C\,du_C/dt$ in to vnesli v napetostno enačbo; dobili bi:

$$u_C' + \frac{1}{RC}u_C = \frac{U_0}{RC} \qquad\qquad u_C(0^+) = 0$$

Enačba je to pot nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

Že iz tega primera vidimo, do kam nas vodi analiza preklopnega vezja. Glede na integralno-diferencialne odnose na inertnih elementih se Kirchhoffove enačbe v končnem prevedejo v diferencialno enačbo za iskano količino. Za enolično rešitev takšne enačbe potrebujemo začetni pogoj, ki izhaja iz fizikalnih zakonitosti elementov vezja.

Odločimo se, da bomo rešili enačbo za polnilni tok,

$$i' + \frac{1}{RC}i = 0 \qquad\qquad i(0^+) = \frac{U_0}{R}$$

Za linearne diferencialne enačbe je nasploh značilno, da jih reši eksponencialna funkcija oblike

$$i(t) = Ae^{\lambda t}$$

kjer je λ zaenkrat neznan koeficient, A pa poljubna multiplikativna konstanta; zapisano funkcijo imenujemo tudi nastavek za rešitev enačbe. Ko tega vnesemo v enačbo, dobimo

$$\left(\lambda + \frac{1}{RC}\right)Ae^{\lambda t} = 0$$

Izraz v oklepaju imenujemo karakteristični polinom linearne diferencialne enačbe; ta mora biti nič, če naj je $i \neq 0$. Od tu je $\lambda = -1/RC$. Produkt RC dimenzijsko ustreza času in predstavlja t.i. *časovno konstanto vezja*; označimo jo s τ; $\tau = RC$. Nastavek je takle:

$$i(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Ker pa mora biti $i(0^+) = U_0/R$, sledi od tu $A = U_0/R$ in

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Napetost na uporu je

$$u_R(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

Napetost $u_C(t)$ pa dobimo iz razlike $U_0 - u_R(t)$,

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

in eksponencialno narašča od nič k polni vrednosti U_0. V času ene časovne konstante naraste na 63%, v času dveh na 86%, v času treh na 95% in v času štirih časovnih konstant na 98% polne napetosti. Pri $R = 200\ \Omega$ in $C = 1$ mF je $\tau = 200$ ms; v nekaj sekundah je napetost na kondenzatorju praktično že na polni napetosti U_0.

2) Preklop. Ob času t_1 stikalo preklopimo. Na kondenzatorju doseže napetost vrednost

$$U_1 = u(t_1) = U_0 \left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$$

Napetostna enačba novega vezja (za $t > t_1$) je

$$u_R + u_C = 0$$

Pišimo: $u_R = Ri = RCu_C'$, in imamo

$$u_C' + \frac{1}{RC} u_C = 0 \qquad\qquad u_C(t_1) = U_1$$

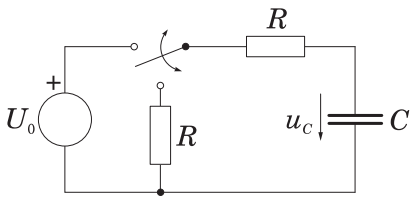
Enačba je podobna vklopni za tok, zato je tudi nastavek enak

$$u_C(t) = Be^{-t/\tau}$$

Iz začetnega pogoja ob t_1 dobimo vrednost konstante B, s tem pa tudi končno rešitev:

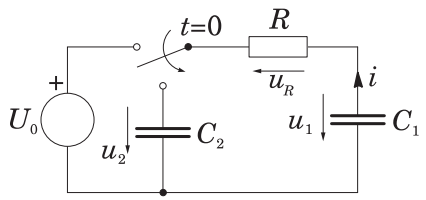
$$u_C(t) = U_1 e^{-(t-t_1)/\tau}$$

Usihanje napetosti se odvija z enako časovno konstanto. V času ene časovne konstante upade napetost na 37%, v času druge na 14% in v času tretje že na 5% začetne napetosti.
♣ Bralec naj razreši primer podobnega vezja, slika 62.2, ko bi se stikalo izmenjaje in dolgo



Slika 62.2: Preklopno RC vezje.

časa preklapljalo v intervalih $T = RC$. Med katerima napetostima bi "nihala" napetost u_C? ♣



Slika 62.3: Elektritev kondenzatorja z naelektrenim kondenzatorjem.

Zgled 62.1

Razrešimo vezje na sliki 62.3. V zgornjem položaju stikala naelektrimo kondenzator C_1 do polne napetosti U_0, nato pa ob $t = 0$ stikalo preklopimo v spodnji položaj. Za čase $t > 0$ je napetostna enačba zanke takale:

$$-u_1 + u_R + u_2 = 0$$

Ob času t sta napetosti na kondenzatorjih odvisni od množine pretečene elektrine:

$$u_1(t) = U_0 - \frac{1}{C_1}\int_0^t i(t')\,dt' \qquad u_2(t) = \frac{1}{C_2}\int_0^t i(t')\,dt'$$

napetost u_R pa je takrat enaka Ri. Če vse tri napetosti vnesemo v napetostno enačbo in odvajamo po času, dobimo enačbo

$$Ri' + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i = 0$$

Za $C_1^{-1} + C_2^{-1}$ pišimo C_{12}^{-1}, pa dobimo

$$i' + \frac{1}{RC_{12}} i = 0$$

kar je podobno, kot pri polnilnem toku kondenzatorja v izhodiščnem primeru. Rabimo še začetni pogoj; dobimo ga iz izhodiščne enačbe, če upoštevamo, da se u_1 in u_2 hipno ne moreta spremeniti. Iz tega sledi: $u_R(0^+) = U_0$ oz. $i(0^+) = U_0/R$. Rešitev za tok je

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau_{12}} \qquad \tau_{12} = RC_{12}$$

Po zelo "dolgem" času ($t \gg \tau_{12}$), vzeli bomo kar $t \to \infty$, dobimo za napetosti na kondenzatorjih izraza:

$$U_1 = u_1(\infty) = U_0 - \frac{1}{C_1}\int_0^\infty i(t)\,dt = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0$$

$$U_2 = u_2(\infty) = \frac{1}{C_2}\int_0^\infty i(t)\,dt = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0$$

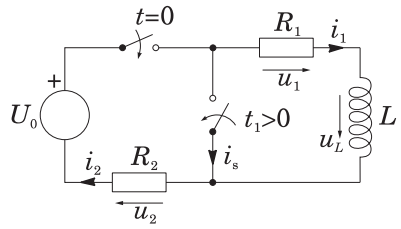
Napetosti sta očitno enaki, tok pa ne teče več. Prvotna množina elektrine C_1U_0 se je po prehodnem pojavu porazdelila tako, da je napetost na obeh kondenzatorjih enaka. Na prvem je elektrina U_1C_1, na drugem pa elektrina $U_2C_2 = U_1C_2$. ♣ Bralcu ne bo težko preveriti, da je razlika med začetno ($C_1U_0^2/2$) in končno električno energijo ($C_1U_1^2/2 + C_2U_2^2/2$) enaka ravno joulskim izgubam,

$$R\int_0^\infty i^2\,dt$$

na uporu v času celotnega prehodnega pojava. Rešitev slednjega integrala se pokaže kot neodvisna od upornosti R (razdelek 28; k vezju na sliki 28.11).

Zgled 62.2

Oglejmo si še vklop in izklop tuljave, ki ju bomo opazovali v naslednjem preklopnem vezju; slika 62.4.



Slika 62.4: Vklop in izklop RL člena.

Prvi vklop. Med $t = 0$ in t_1 je aktualna zunanja zanka. Napetostna enačba zanjo je

$$-U_0 + u_1 + u_2 + u_L = 0$$

Posamezne napetosti so: $u_1 = R_1 i_1$, $u_2 = R_2 i_2$, $u_L = L i_1'$ in $i_1 = i_2 = i$. Po vstavitvi in ureditvi dobimo zvezo

$$i' + \frac{R_1 + R_2}{L} i = \frac{U_0}{L}$$

Enačba je spet diferencialna, vendar nehomogena. Nastavek za rešitev v obliki $Ae^{\lambda t}$ (kot pri homogeni enačbi) gotovo ne bo zadoščal, saj je desna stran različna od nič. Ker pa je ta konstanta, bi tudi v nastavek za tok kazalo vključiti poljubno aditivno konstanto; torej:

$$i(t) = Ae^{\lambda t} + B$$

Če takšen nastavek vnesemo v enačbo, dobimo

$$\left(\lambda + \frac{R_1 + R_2}{L}\right) Ae^{\lambda t} + \frac{R_1 + R_2}{L} B = \frac{U_0}{L}$$

Očitno bo enačba za vsak čas t izpolnjena, če bo $\lambda = -(R_1 + R_2)/L$ in bo $B = U_0/(R_1 + R_2)$; za razmerje $L/(R_1 + R_2)$ pišimo τ_{12}. S tem je prvoten nastavek že določnejši,

$$i(t) = Ae^{-t/\tau_{12}} + \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

Za določitev konstante A uporabimo fizikalen pogoj, da se tok skozi L ne more hipno spremeniti; torej: $i(0^+) = 0$. S tem je $A = -U_0/(R_1 + R_2)$, kar da tudi končno rešitev:

$$i(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-t/\tau_{12}}\right)$$

Funkcija priraščanja toka je sorodna priraščanju napetosti na kondenzatorju ob njegovem polnjenju. Dinamiko priraščanja določa tu pripadajoča časovna konstanta τ_{12}. Ta je večja pri večji induktivnosti in manjši upornosti. Po času $t \gg \tau_{12}$

se vzpostavijo stacionarne enosmerne razmere – ko teče v zanki konstanten tok vrednosti $U_0/(R_1 + R_2)$.

Drugi vklop. Ob t_1 je tok skozi tuljavo enak

$$I_1 = i(t_1) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-t_1/\tau_{12}}\right)$$

Ob vklopu drugega stikala "razpade" vezje v dva ločena dela (na levo in desno zanko). Napetostni enačbi sta:

$$-U_0 + R_2 i_2 = 0 \qquad\qquad R_1 i_1 + L i_1' = 0$$

Rešitev prve je enosmerni tok $i_2 = I_2 = U_0/R_2$. Nastavek za rešitev druge je spet eksponenten, ustrezno konstanto pa določimo iz pogoja $i_1(t_1^+) = I_1$; dobimo

$$i_1(t) = I_1 e^{-(t-t_1)/\tau_1}$$

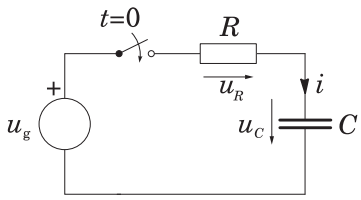
kjer je τ_1 nova časovna konstanta, $\tau_1 = L/R_1$. Tok skozi prečno stikalo (v kratkostični veji) je razlika, $i_\mathrm{s} = i_2 - i_1$ oz.

$$i_\mathrm{s}(t) = \frac{U_0}{R_2} - I_1 e^{-(t-t_1)/\tau_1}$$

Po daljšem času ($t - t_1 \gg \tau_1$) ostane desna veja brez toka, tuljava pa brez energije.

Zgled 62.3

Tokrat bomo opazovali razmere po vklopu RC člena na harmonični vir napetosti $u_\mathrm{g} = U_\mathrm{g}\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g})$. Trenutek vklopa naj bo ob $t = 0$, kar pomeni, da bo vir imel takrat napetost $U_\mathrm{g}\cos\varphi_\mathrm{g}$ (φ_g je začetna faza); slika 62.5. Zapišimo napetostno



Slika 62.5: Vklop RC člena na harmonični vir.

enačbo:

$$-u_\mathrm{g} + u_R + u_C = 0$$

in se odločimo, da bomo opazovali napetost u_C. Za u_R pišemo $Ri = RCu_C'$ in dobimo

$$RCu_C' + u_C = U_\mathrm{g}\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g})$$

Začetni pogoj za u_C bo spet $u_C(0^+) = 0$. Tudi tu moremo ugotoviti, da bo eksponencialni nastavek za u_C "prešibak", saj je glede na harmoničnost vzbujanja pričakovati, da bo tudi u_C vseboval takšno zakonitost. Če oboje združimo, dobimo že primeren nastavek:

$$u_C(t) = Ae^{\lambda t} + B\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \varphi)$$

kjer so A, λ, B in φ še neznane konstante. Pojdimo s tem nastavkom v diferencialno enačbo za u_C; dobimo:

$$(RC\lambda + 1)Ae^{\lambda t} - \omega CRB\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \varphi) = U_\mathrm{g}\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g})$$

Ker pa sta eksponencialna in harmonična funkcija linearno neodvisni, bo λ spet $-1/RC$, konstanta B in faza φ pa morata zadoščati enačbi

$$-\omega CRB\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \varphi) = U_\mathrm{g}\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g})$$

Sinusno in kosinusno funkcijo na levi strani razstavimo po adicijskem teoremu,

$$\begin{aligned}&-\omega CRB\cos\varphi\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{g}) + \omega CRB\sin\varphi\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g}) + \\ &+B\cos\varphi\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g}) + B\sin\varphi\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{g}) = U_\mathrm{g}\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g})\end{aligned}$$

Iz primerjave koeficientov pri $\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{g})$ in $\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g})$ dobimo tile enačbi:

$$\begin{aligned}-\omega CRB\cos\varphi + B\sin\varphi &= 0\\ \omega CRB\sin\varphi + B\cos\varphi &= U_\mathrm{g}\end{aligned}$$

Iz prve sledi

$$\varphi = \arctan\omega CR$$

Če pa enačbi kvadriramo in seštejemo, dobimo še

$$B = \frac{U_\mathrm{g}}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

Nastavek za iskano napetost je

$$u_C(t) = Ae^{-t/RC} + \frac{U_\mathrm{g}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \arctan\omega CR)$$

Iz pogoja $u_C(0^+) = 0$ dobimo še konstanto A,

$$A = -\frac{U_\mathrm{g}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\cos(\varphi_\mathrm{g} - \arctan\omega CR)$$

Končno je

$$\begin{aligned}u_C(t) &= \frac{U_\mathrm{g}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\Big(\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \arctan\omega CR)\\ &- \cos(\varphi_\mathrm{g} - \arctan\omega CR)e^{-t/RC}\Big)\end{aligned}$$

Rešitev skriva kar nekaj zanimivosti.

1) Sestavljena je iz harmoničnega dela in eksponencialnega usihanja. Če je $t \gg RC$, potem do tega časa eksponencialni del povsem usahne; ostane le še harmonični del,

$$u_C(t \gg RC) = \frac{U_\mathrm{g}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \arctan\omega CR)$$

Pri $R = 100\ \Omega$ in $C = 1$ mF izzveni eksponencialni del praktično prej kot v eni sekundi. Napetost na kondenzatorju od tam dalje niha harmonično (s frekvenco vira) in z amplitudo $U_\mathrm{g}/\sqrt{1+(\omega CR)^2}$. Obliko toka dobimo iz relacije $i = Cu'_C$,

$$i(t \gg RC) = -\frac{\omega C U_\mathrm{g}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \arctan \omega CR)$$

Tudi tok je harmoničen, le da je fazno pred napetostjo za $\pi/2$. Prav takšna je tudi napetost na uporu, $u_R = Ri$ oz.

$$u_R(t \gg RC) = -\frac{\omega CRU_\mathrm{g}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{g} - \arctan \omega CR)$$

Napetost u_R niha harmonično in je v fazi s tokom. Bistven zaključek vsega tega je, da se tok in obe napetosti relativno hitro "navzameta" harmonične zakonitosti generatorja; začetni, eksponencialni del postane v končni fazi povsem nebistven.

2) Če je vklopni trenutek izbran tako, da je $\varphi_\mathrm{g} = \arctan \omega CR + \pi/2$, potem RC člen že ob vklopu "pade" v sinhronizem; tok in napetosti nihajo sinhrono z opredeljenimi faznimi zamiki.

3) V najneugodnejši konstelaciji, ko je $RC \gg 2\pi/\omega$, more $|u_C(t)|$ doseči skoraj dvojno vrednost amplitude napetosti v sinhronizmu; $|u_C(t)| < 2U_\mathrm{g}/\sqrt{1+(\omega CR)^2}$. To pomeni, da mora biti kondenzator dimenzioniran nekako na dvojno obratovalno napetost.

63. Harmonično vzbujana električna vezja

V elektrotehniki imamo zelo pogosto opraviti s harmoničnimi viri; časovno obliko npr. napetostnega vira opredeljuje zapis: $u_\mathrm{g}(t) = U_\mathrm{g} \cos(\omega t + \varphi_\mathrm{g})$. Tu pomeni $u_\mathrm{g}(t)$ trenutno vrednost napetosti, U_g je amplituda harmonične napetosti, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ je krožna frekvenca, kjer je f frekvenca in T perioda harmonične funkcije, φ_g pa je začetna faza ob $t = 0$.

Poleg tega srečujemo tudi periodična vzbujanja (impulzni generator). Periodičnost npr. toka tokovnega generatorja označuje zapis: $i_\mathrm{g}(t+T) = i_\mathrm{g}(t)$, kjer je T perioda toka. Glede na Fourierjevo analizo moremo vsakršno periodično funkcijo razstaviti v vsoto samih harmoničnih funkcij,

$$i_\mathrm{g}(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t + \varphi_k\right)$$

Vsota vsebuje konstanten člen (C_0) – enosmerno komponento toka (s frekvenco nič), ki ustreza tudi (poprečju) $\overline{i_\mathrm{g}(t)}$, osnovno harmoniko ($C_1$) in vse višje harmonike ($C_2, C_3, ...$). Pravimo tudi, da periodični funkciji pripada diskreten[1] frekvenčni spekter, v katerem so zastopane točno določene frekvence z opredeljenimi začetnimi fazami φ_k. Takšen tokovni

[1] Aperiodični funkciji pripada zvezen frekvenčni spekter (zastopane so načelno vse frekvence), bazična funkcija pa je kljub temu še vedno harmonična funkcija. (S tem se bo imel bralec priliko še kasneje podrobneje seznaniti.)

vir bi lahko simulirali z vzporednim nizom tokovnih generatorjev, od katerih bi vsak imel svojo frekvenco. Po stavku superpozicije, ki velja v linearnih sistemih – in takšna so tudi linearna električna vezja –, moremo dano vezje rešiti za vsak parcialni vir ločeno, nato pa delne rešitve sešteti.

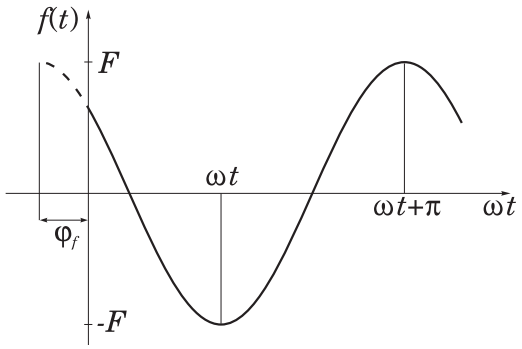
Po tem uvodu moremo zaključiti, da je harmonična funkcija vzbujanja bazična; če znamo vezje analizirati pri določeni frekvenci vzbujanja, ne bo težko odziv prirediti za neko drugo, splošno frekvenco vzbujanja.

Pri analizi harmonično vzbujanih vezij se še dogovorimo, da nas ne bo več zanimal vklopni (ali izklopni) prehodni pojav. O njem iz zgleda 62.3 vemo, da ta relativno hitro izzveni (to smo sicer pokazali na preprostem vezju, velja pa povsem splošno – tudi za bolj zamotano vezje R, L in C elementov). Smo pa v omenjenem zgledu spoznali drugo pomembno odliko harmonično vzbujanega linearnega vezja: vsi toki in napetosti preidejo po določenem času v čisto harmonično zakonitost, ki se (isti ω) sinhrono odvija v celotnem vezju. To ustaljeno sinhrono stanje vezja označujemo s pojmom *kvazistacionarno stanje*; toki in napetosti sicer nihajo, njihove amplitudno-fazne relacije pa ostajajo nespremenjene – to slednje pa je tudi tisto, kar nas bo pri harmoničnem vzbujanju prvenstveno zanimalo.

Kompleksor harmonične količine. Naj je $f(t)$ harmonična funkcija toka ali napetosti nekje v vezju. Pišemo:

$$f(t) = F\cos(\omega t + \varphi_f)$$

kjer so F, ω in φ_f že opredeljene količine, ki karakterizirajo harmonično nihanje funkcije $f(t)$; slika 63.1.



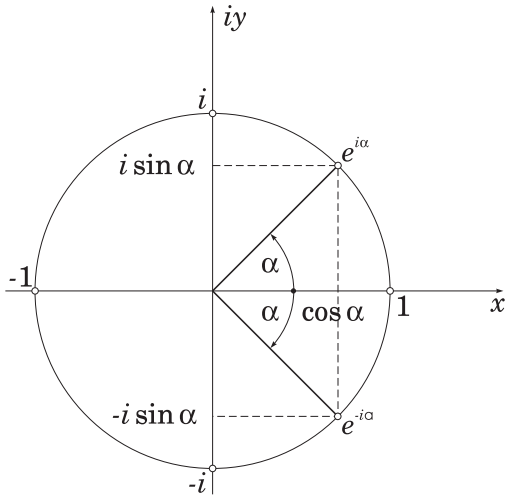
Slika 63.1: Časovni diagram harmonične funkcije.

Iz matematike poznamo Eulerjev obrazec,

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

kjer je i imaginarna enota, i in $-i$ pa sta rešitvi enačbe $w^2 + 1 = 0$. Kompleksnemu številu $e^{i\alpha}$ pripada v kompleksni (x, iy) ali tudi Gaussovi ravnini točka na osnovni krožnici polmera ena, zveznica med točko in izhodiščem pa s pozitivno realno osjo oklepa kot α; slika 63.2. Konjugirano kompleksno število k $e^{i\alpha}$ je $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$; pišemo ga tudi kot $e^{-i\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^*$ – znak $*$ pomeni konjugirano vrednost kompleksnega števila. Dalje je (realni del)

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) = \mathrm{Re}\left[e^{\pm i\alpha}\right]$$



Slika 63.2: Kompleksno število na krogu enote v (x, iy) ravnini.

Če sedaj namesto α pišemo "naš" argument v kosinusu harmonične funkcije $f(t)$, dobimo

$$f(t) = F\cos(\omega t + \varphi_f) = F\mathrm{Re}\left[e^{\pm i(\omega t+\varphi_f)}\right] = \mathrm{Re}\left[Fe^{\pm i(\omega t+\varphi_\mathrm{f})}\right]$$

V elektrotehniki je ustaljeno: 1) da za imaginarno enoto uporabljamo črko j, da se ne bi mešalo z oznako za trenutno vrednost toka, in 2) da si v eksponentu eksponentne funkcije izberemo pozitivni predznak[2]. Funkcijo $f(t)$ pišemo dalje kot

$$f(t) = \mathrm{Re}\left[Fe^{j\varphi_f}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{F}e^{j\omega t}\right]$$

kjer je $\underline{F}$ t.i. *kompleksor harmonične funkcije* $f(t)$ oz. *kompleksna amplituda*. Zanj velja

$$\underline{F} = Fe^{j\varphi_f} = F\cos\varphi_f + jF\sin\varphi_f$$

Povedali smo že, da sta za harmonično zakonitost – poleg frekvence – karakteristična predvsem *amplituda* in *faza*. Kompleksor $\underline{F}$ združuje prav to slednje; pišemo ga tudi v obliki $F\angle\varphi_f$. Njegova absolutna vrednost ustreza amplitudi,

$$F = |\underline{F}| = \sqrt{\underline{F}\,\underline{F}^*}$$

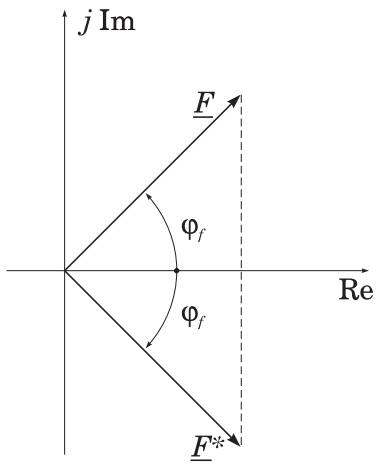
njegov argument φ_f pa začetni fazi harmonične funkcije. Trenutno vrednost $f(t)$ dobimo tako, da kompleksor $\underline{F}$ množimo z $e^{j\omega t}$ in zmnožek projiciramo na realno os: $f(t) = \mathrm{Re}\,[\underline{F}e^{j\omega t}]$.

Nadalje velja v elektrotehniki še en dogovor, namreč, da kompleksorje predstavljamo v kompleksni ravnini kot *kazalce* (usmerjene daljice); slika 63.3.

Če seštevamo dva kazalca ($\underline{F}_1$ in $\underline{F}_2$), napravimo to računsko z vsoto obeh realnih in obeh imaginarnih delov ločeno – kot to narekuje aritmetika v kompleksnem prostoru,

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = (\mathrm{Re}[\underline{F}_1] + \mathrm{Re}[\underline{F}_2]) + j\,(\mathrm{Im}[\underline{F}_1] + \mathrm{Im}[\underline{F}_2])$$

[2]Čitatelj bo imel priliko opaziti, da večina fizikov uporablja črko i kot imaginarno enoto, kot je to dogovor v matematiki, in tudi pri izbiri predznaka se fiziki pogosto odločajo za predznak $(-)$ v eksponentu – vse skupaj pa je končno le stvar konvencije.



Slika 63.3: Kazalec $\underline{F}$ in njegov konjugiran kazalec $\underline{F}^*$ v kompleksni ravnini.

grafično pa to napravimo po paralelogramskem pravilu – kot je to določeno pri seštevanju vektorjev.

Zgled 63.1

V spojišče pritekata dva toka enakih frekvenc ($\omega = 100\pi\ \mathrm{s}^{-1}$): $i_1(t) = 10\sin(100\pi t)$ in $i_2(t) = 10\cos(100\pi t + \pi/6)$, iz njega pa odteka tok $i_3(t)$, ki je njuna vsota; $i_3 = i_1 + i_2$. Priredimo vstopnima tokoma najprej pripadajoča kompleksorja: $i_1 \to \underline{I}_1$ in $i_2 \to \underline{I}_2$. Prvega izrazimo s kosinusno funkcijo, $i_1(t) = 10(\sin 100\pi t) = 10\cos(100\pi t - \pi/2)$, in imamo:

$$i_1(t) = 10\cos(100\pi t - \pi/2) \longrightarrow \underline{I}_1 = 10e^{-j\pi/2} = -j10 = 10\angle{-90^\circ}$$

$$i_2(t) = 10\cos(100\pi t + \pi/6) \longrightarrow \underline{I}_2 = 10e^{j\pi/6} = 5\sqrt{3} + j5 = 10\angle 30^\circ$$

Trenutna vrednost tretjega toka je

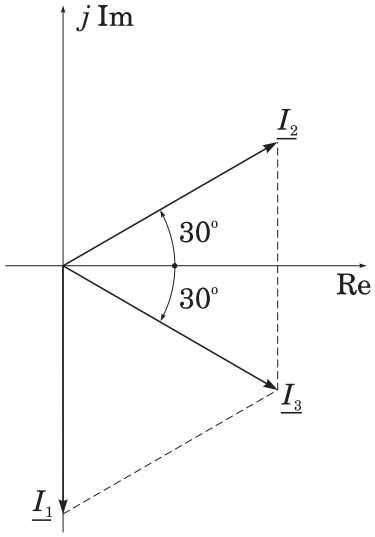
$$i_3(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{I}_1 e^{j\omega t} + \underline{I}_2 e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{I}_3 e^{j\omega t}\right]$$

kjer je $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = -j10 + 5\sqrt{3} + j5 = 5\sqrt{3} - j5 = 10e^{-j\pi/6} = 10\angle{-30^\circ}$, in še dalje:

$$i_3(t) = \mathrm{Re}\left[10e^{-j\pi/6}e^{j100\pi t}\right] = 10\cos(100\pi t - \pi/6)$$

Kazalce vseh treh tokov podaja slika 63.4. ♣ Bralec more preveriti, da bi do enakega rezultata prišli tudi z uporabo adicijskega teorema za sinusno in kosinusno funkcijo – torej brez pripadajočih kompleksorjev. ♣

Po vsem tem vidimo, da moremo harmonično količino (napetost ali tok) enakovredno opazovati v časovnem prostoru, ko jo podajamo kot $f(t) = F\cos(\omega t + \varphi_f)$, ali pa v prirejeni kompleksni ravnini, ko jo podajamo s kazalcem $\underline{F} = Fe^{j\varphi_f} = F\angle\varphi_f$. Pripomniti pa velja, da je v kompleksni ravnini smiselno opazovati hkrati le kompleksorje tistih harmoničnih količin, ki nihajo z enako frekvenco.



Slika 63.4: Kazalci harmoničnih tokov.

64. Kompleksni račun

V tem razdelku se bomo seznanili s kompleksnim računom, ki, ob vpeljavi določenih kompleksorjev (kazalcev) v kompleksni ravnini in z uporabo aritmetike v kompleksnem prostoru, ponuja razmeroma enostavno metodiko analize harmonično vzbujanih vezij.

Relacije med kompleksorjema toka in napetosti na pasivnih elementih. Tu se bomo naslonili na razdelek 60, na relacije med toki in napetostmi v časovnem prostoru.

1) Upor. Omenjena relacija na uporu je $u = Ri$. Če je tok harmoničen, $i = I\cos(\omega t+\varphi_i)$, potem je takšna tudi napetost, $u = RI\cos(\omega t+\varphi_i) = U\cos(\omega t+\varphi_u)$. Iz primerjave sledi, da sta

$$\boxed{U = RI \qquad \varphi_u = \varphi_i} \tag{64.1}$$

Amplitudi sta v razmerju upornosti, fazi sta pa enaki. Priredimo toku in napetosti kompleksorja:

$$i = I\cos(\omega t+\varphi_i) \longrightarrow \underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$$
$$u = U\cos(\omega t+\varphi_u) \longrightarrow \underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$$

V kompleksni ravnini moremo enačbi v 64.1 združiti v eno,

$$\underline{U} = Ue^{j\varphi_u} = RIe^{j\varphi_i} = R\underline{I}$$

oz. v

$$\boxed{\underline{U} = R\underline{I}} \tag{64.1a}$$

2) Kondenzator. Na njem je $i = Cdu/dt$. Če za u pišemo $U\cos(\omega t+\varphi_u)$, potem je $i = -\omega CU\sin(\omega t+\varphi_u) = \omega CU\cos(\omega t+\varphi_u+\pi/2)$, kar ustreza harmonični funkciji, ki ima svojo amplitudo in fazo; $i = I\cos(\omega t+\varphi_i)$. Iz primerjave dobimo

$$\boxed{I = \omega CU \qquad \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}} \tag{64.2}$$

Amplitudi sta v razmerju ωC, kar dimenzijsko ustreza prevodnosti, faza toka pa je za $\pi/2$ večja od faze napetosti. Toku in napetosti priredimo spet kompleksorja:

$$u = U\cos(\omega t + \varphi_u) \longrightarrow \underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$$

$$i = I\cos(\omega t + \varphi_i) \longrightarrow \underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$$

Če upoštevamo enačbi 64.2, moramo za kompleksor $\underline{I}$ pisati

$$\underline{I} = Ie^{j\varphi_i} = \omega CUe^{j(\varphi_u+\pi/2)} = j\omega CUe^{j\varphi_u} = j\omega C\underline{U}$$

oz.

$$\boxed{\underline{I} = j\omega C\underline{U}} \tag{64.2a}$$

3) Tuljava. Na njej je $u = Ldi/dt$. Pri harmoničnem toku $i = I\cos(\omega t + \varphi_i)$ bo $u = -\omega LI\sin(\omega t + \varphi_i) = \omega LI\cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2)$. Napetost je spet harmonična; $u = U\cos(\omega t + \varphi_u)$. Iz primerjave sledita

$$\boxed{U = \omega LI \qquad \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}} \tag{64.3}$$

Amplitudi sta v razmerju ωL, kar dimenzijsko ustreza upornosti, faza napetosti pa je za $\pi/2$ večja od faze toka. Napetosti in toku ponovno priredimo kompleksorja:

$$u = U\cos(\omega t + \varphi_u) \longrightarrow \underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$$

$$i = I\cos(\omega t + \varphi_i) \longrightarrow \underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$$

Upoštevajoč enačbi 64.3, zapišemo kompleksor $\underline{U}$ kot

$$\underline{U} = Ue^{j\varphi_u} = \omega LIe^{j(\varphi_i+\pi/2)} = j\omega LIe^{j\varphi_i} = j\omega L\underline{I}$$

oz. kot

$$\boxed{\underline{U} = j\omega L\underline{I}} \tag{64.3a}$$

4) Sklopljeni tuljavi. Za magnetno povezani tuljavi, z induktivnostima L_1 in L_2 in medsebojno induktivnostjo M, smo za napetosti v referenčnih smereh dobili:

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad u_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

Za i_1 in i_2 pišimo:

$$i_1 = \mathrm{Re}\left[\underline{I}_1e^{j\omega t}\right] \qquad i_2 = \mathrm{Re}\left[\underline{I}_2e^{j\omega t}\right]$$

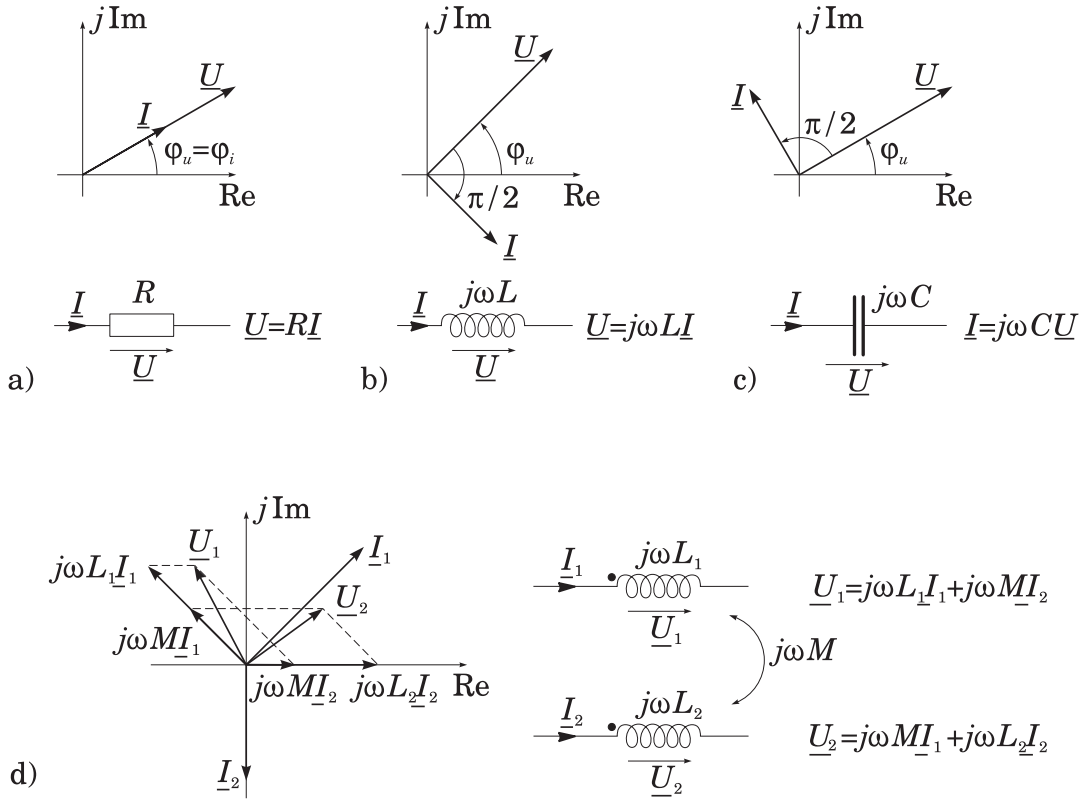
Po vstavitvi dobimo npr. za u_1 tole:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\underline{I}_1e^{j\omega t}\right] + M\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\underline{I}_2e^{j\omega t}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[(L_1\underline{I}_1 + M\underline{I}_2)\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[(j\omega L_1\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2)e^{j\omega t}\right] \end{aligned}$$

Napetost je harmonična; $u_1 = \mathrm{Re}\,[\underline{U}_1 e^{j\omega t}]$ oz. $\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$. Če podobno storimo še za u_2, dobimo zvezi:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \end{aligned}} \tag{64.4}$$

Kazalčni diagram. Ta diagram je slika prirejenih kazalcev v kompleksni (Re, jIm) ravnini. Za začetek bomo v njem predočili ravnokar izvedene kompleksne relacije na pasivnih elementih; če je diagram narisan v izbranem merilu, potem nam dolžine kazalcev in koti med njimi podajajo "otipljive" količine; slika 64.1.



Slika 64.1: Kazalčni diagrami kompleksorjev tokov in napetosti na posameznih pasivnih elementih in referenčne oznake kazalcev na elementih.

Za trenutno vrednost harmonične količine smo rekli, da jo dobimo, če pripadajoč kompleksor množimo s funkcijo $e^{j\omega t}$ ter produkt projiciramo na realno os. Glede na Eulerjev obrazec ($e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$) pomeni kompleksna funkcija $e^{j\omega t}$ kompleksor enote, ki se z rastočim časom enakomerno vrti v pozitivni matematični smeri (v levo, obratno urinemu kazalcu). Enak zaključek velja tudi za produkt $\underline{F}e^{j\omega t}$; produktni kazalec se z rastočim časom enakomerno vrti v levo, projekcija krožečega kazalca na realno os pa da trenutno vrednost ustrezne harmonične količine. Povedano drugače: če diagram kazalcev miselno vrtimo v levo s kotno hitrostjo ω, nam "zaživijo" harmonične količine, pri tem pa ostajajo amplitudno-fazne relacije med kazalci nespremenjene.

Iz interpretacije vrtenja kazalcev izhajajo tudi v žargonu uporabljane fraze: na uporu sta tok in napetost sofazna, na tuljavi napetost "prehiteva" tok (ali, tok na tuljavi "zaostaja" za napetostjo), na kondenzatorju tok "prehiteva" napetost (ali, napetost na kondenzatorju "zaostaja" za tokom); pri tem je potrebno "prehitevanje" in "zaostajanje" razumeti v prenesenem smislu, kajti nihče nikogar nič ne prehiteva, le maksimum (minimum) ene količine sledi maksimumu (minimumu) druge količine z določenim faznim zamikom.

Kirchhoffova zakona v kompleksnem. Ta dva zakona v časovnem prostoru poznamo. Prvega bi pri harmoničnih tokih zapisali takole:

$$\sum_{k=1}^{m}(\pm)i_k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{m}(\pm)I_k\cos(\omega t+\varphi_k) = 0$$

Z vpeljavo kompleksorjev tokov zapišemo to isto kot

$$\sum_{k=1}^{m}(\pm)\mathrm{Re}\left[\underline{I}_k e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}(\pm)\underline{I}_k\right)e^{j\omega t}\right] = 0$$

V oglatem oklepaju je vrteč kompleksor; njegova projekcija na realno os bo nič, če bo dolžina kompleksorja v okroglem oklepaju enaka nič, torej:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m}(\pm)\underline{I}_k = 0} \tag{64.5}$$

Podobno velja tudi za II. Kirchhoffov zakon,

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n}(\pm)\underline{U}_s = 0} \tag{64.6}$$

Očitno bo metodika pisanja napetostnih in tokovnih enačb sorodna tisti, ki smo jo spoznali v okviru enosmernih vezij, le da bodo relacije med kazalci na posameznih elementih kompleksne narave. Sistem enačb, ki ga bomo na ta način dobili, bo kompleksen (s kompleksnimi koeficienti in kompleksnimi neznankami).

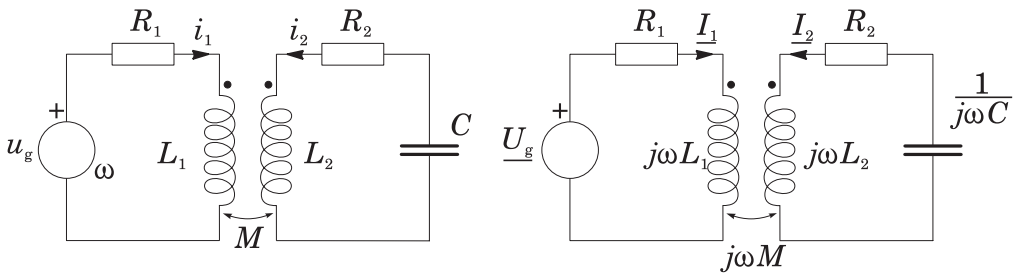
Zgled 64.1

Izračunajmo toka v obeh zankah danega vezja z uporabo kompleksnega računa; slika 64.2. Podatki vezja so sledeči: $u_\mathrm{g} = U_\mathrm{g}\cos\omega t$, $U_\mathrm{g} = 10$ V, $\omega = 1000$ Hz, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $L_1 = 4$ mH, $L_2 = 1$ mH, $M = 2$ mH ($k = 1$), $C = 1$ mF.

Napetosti u_g priredimo kazalec $\underline{U}_\mathrm{g} = 10e^{j0} = 10\mathrm{V}$. Kompleksorji napetosti na posameznih elementih v referenčnih smereh bodo po vrsti: na uporu R_1 bo $R_1\underline{I}_1$, na prvi tuljavi bo $j\omega L_1\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2$, na uporu R_2 bo $R_2\underline{I}_2$, na drugi tuljavi bo $j\omega M\underline{I}_1 + j\omega L_2\underline{I}_2$ in na kodenzatorju bo $\underline{I}_2/j\omega C$.

Obe zančni enačbi sta takile:

$$(R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2 - \underline{U}_\mathrm{g} = 0$$



Slika 64.2: Harmonično vezje sklopljenih tokokrogov.

$$j\omega M\underline{I}_1 + \left(R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{I}_2 = 0$$

Po vstavitvi podatkov dobimo kompleksni enačbi:

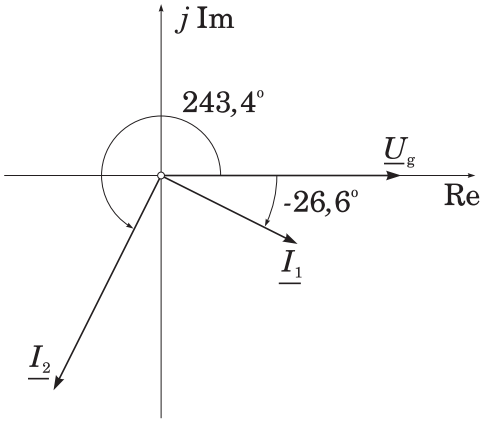
$$(4 + j4)\underline{I}_1 + j2\underline{I}_2 = 10$$

$$j2\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0$$

Iz druge je $\underline{I}_2 = -j2\underline{I}_1$, kar vstavimo v prvo; dobimo: $(8 + j4)\underline{I}_1 = 10$. Dalje sta: $\underline{I}_1 = (1 - j/2)$ A in $\underline{I}_2 = (-1 - j2)$ A. Zapišimo ju še v polarni obliki:

$$\underline{I}_1 = (1 - j/2) \doteq 1.12\angle{-26.6^\circ}\ \text{A} \qquad \underline{I}_2 = (-1 - j2) \doteq 2.24\angle 243.4^\circ\ \text{A}$$

Kazalčni diagram podaja slika 64.3. Iz nje so razvidni amplitudni in fazni odnosi



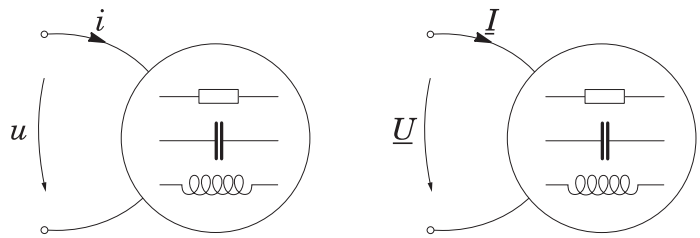
Slika 64.3: Kazalčni diagram.

med kazalci. ♣ Bralec naj v merilu vriše še kazalce napetosti na posameznih elementih vezja in s tem preveri obe napetostni enačbi.♣

Ostane nam le še prehod na trenutne vrednosti; kotne stopinje spremenimo v radiane in dobimo toka:

$$i_1(t) = 1.12\cos(1000t - 0.46)\ \text{A} \qquad i_2(t) = 2.24\cos(1000t + 4.25)\ \text{A}$$

Impedanca in admitanca. Vzemimo poljubno pasivno dvopolno vezje; slika 64.4. Pri



Slika 64.4: Pasivni dvopol.

harmoničnem vzbujanju dvopolnega vezja sta vhodni tok in napetost harmonična, s prirejenima kazalcema:

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u) \longrightarrow \underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$$

$$i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i) \longrightarrow \underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$$

Po analogiji z Ohmovim zakonom v enosmernih vezjih priredimo kvocientu kazalcev napetosti in toka (v kompleksnem) ustrezno kompleksno upornost ali t.i. *impedanco* $\underline{Z}$ oz. kompleksno prevodnost ali t.i. *admitanco* $\underline{Y}$:

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \qquad \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \qquad \underline{Y}\,\underline{Z} = 1} \tag{64.7}$$

Impedanco pišemo dalje kot

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}$$

Absolutna vrednost impedance (torej Z) ustreza kvocientu amplitud napetosti in toka, argument (φ) pa pomeni razliko faze napetosti in faze toka. Glede na to, da je impedanca kompleksno število, ga moremo upodobiti v kompleksni ravnini z ustreznim kazalcem.

Z ozirom na enačbe 64.1a, 64.2a in 64.3a moremo uporu, kondenzatorju in tuljavi (kot enostavnim dvopolom) prirediti ustrezne impedance oz. admitance (po tabeli)

element	impedanca	admitanca
upor	R	$\frac{1}{R}$
kondenzator	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$
tuljava	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$

Izjema je magnetno sklopljena tuljava; njej ne moremo prirediti ustrezne impedance (admitance). ♣ Bralec naj te impedance oz. admitance upodobi kot kazalce v kompleksni ravnini. ♣

Po analogiji z enosmernimi tokokrogi moremo (ob upoštevanju I.in II. Kirchhoffovega zakona) zaporedni ali vzporedni vezavi dvopolov prirediti ekvivalentno impedanco oz.

admitanco. Če so dvopoli z impedancami $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, ..., \underline{Z}_n$ vezani zaporedno, je nadomestna impedanca njihova vsota,

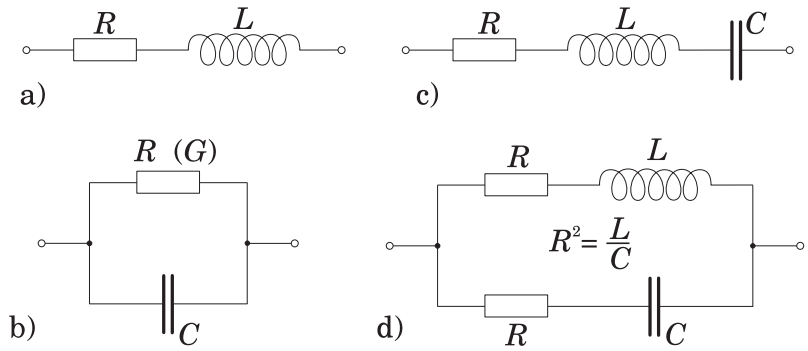
$$\boxed{\underline{Z}_{\text{nad.}} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k} \tag{64.8}$$

Če pa so dvopoli vezani vzporedno, je prikladneje izraziti ekvivalentno admitanco. Za admitance $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, ..., \underline{Y}_m$ dobimo

$$\boxed{\underline{Y}_{\text{nad.}} = \sum_{j=1}^{m} \underline{Y}_j} \tag{64.9}$$

Zgled 64.1

Izrazimo impedance oziroma admitance naslednjim dvopolom pri neki splošni frekvenci ω; slika 64.5.



Slika 64.5: Nekaj vezav pasivnih elementov.

Na skici a) sta elementa vezana zaporedno. Impedanca in admitanca sta:

$$\underline{Z} = R + j\omega L \qquad \underline{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

V takšnem vezju tok "zaostaja" za napetostjo, saj je argument (φ) vedno nekje med 0 in $\pi/2$ (90°). Impedanca kot kompleksor leži v I. kvadrantu kompleksne ravnine.

Na skici b) sta elementa vzporedna,

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = G + j\omega C \qquad \underline{Z} = \frac{1}{G + j\omega C} = \frac{G - j\omega C}{G^2 + (\omega C)^2}$$

Pri takšnem vezju leži impedanca vedno v IV. kvadrantu kompleksne ravnine – tok vedno "prehiteva" napetost za kot med 0 in $\pi/2$.

Na skici c) so vsi trije tipični elementi vezani zaporedno,

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad \underline{Y} = \frac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Tu je impedanca v I. kvadrantu, če je $\omega L > 1/\omega C$, in v IV. kvadrantu, če je $\omega L < 1/\omega C$. Zanimiva je frekvenčna točka ω_0, ko je $\omega_0^2 LC = 1$; takrat je absolutna vrednost impedance $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ najmanjša in enaka R; tok in napetost sta si takrat v fazi. Drugače pa je njuna fazna diferenca največ $\pi/2$ oz. $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Na sliki d) so elementi izbrani v smislu relacije $R^2 = L/C$. Admitanca vezja bo takale:

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{1}{R + j\omega L} + \frac{1}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{R\left(1 + j\dfrac{\omega L}{R}\right)} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega CR} \\ &= \frac{1}{R}\left(\frac{1}{1 + j\dfrac{\omega L}{R}} + \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}\right)\end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $L/R = CR$, dobimo: $\underline{Y} = 1/R$ oz. $\underline{Z} = R$; impedanca vezja je pri vseh vrednostih frekvence čisto ohmska in konstantno enaka upornosti R.

Že teh nekaj dvopolov nakazuje vso pestrost, ki jo bomo v harmonično vzbujanih vezjih srečevali; marsikatera ugotovitev bo navidezno nepričakovana.

Za splošno dvopolno vezje pišemo impedanco oz. admitanco tudi v oblikah:

$$\underline{Z} = R + jX \qquad\qquad \underline{Y} = G + jB$$

kjer so: R – rezistanca, X – reaktanca, G – konduktanca in B – susceptanca[1].

Velja pa pripomniti, da je računanje nadomestnih impedanc in admitanc dvopolov s pomočjo enačb 64.8, 64.9 (in enačb zvezda-trikot pretvorbe) uporabljivo le v primeru, ko so tuljave v vejah dvopolnega vezja med seboj magnetno nepovezane (ko je napetost na tuljavi odvisna le od lastnega toka, $M = 0$); le takrat je namreč impedanca tuljave določljiva z enačbo 64.7. V nasprotnem je potrebno dvopolno vezje razrešiti pri hipotetični napetosti (toku) na vhodu in izračunati vhodni tok (napetost) ter iz kvocienta nato določiti nadomestno impedanco oz. admitanco.

Zgled 64.2

Izračunajmo nadomestno impedanco dveh realnih, vzporednih in magnetno sklopljenih tuljav; slika 64.6. Z X_1, X_2 in X_M smo po vrsti označili ωL_1, ωL_2 in ωM, z $\underline{Z}_1$ in $\underline{Z}_2$ pa vsoti $R_1 + jX_1$ in $R_2 + jX_2$. Uporabimo enačbi 64.4 in pišimo:

$$\underline{Z}_1\underline{I}_1 + jX_M\underline{I}_2 = \underline{U}_1 = \underline{U} \qquad jX_M\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 = \underline{U}_2 = \underline{U}$$

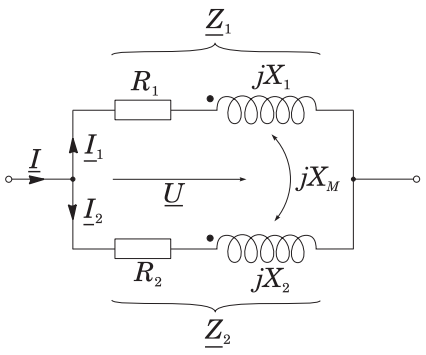
Če iz sistema enačb izrazimo oba toka:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 - jX_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + X_M^2}\underline{U} \qquad\qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 - jX_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + X_M^2}\underline{U}$$

dobimo po združitvi ($\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}$) tudi nadomestno impedanco

$$\underline{Z}_{\text{nad.}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + X_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2jX_M}$$

[1] Tu opozarjamo, da se oznaki za R (in G) podvajata v smislu ohmske upornosti (prevodnosti) upora oz. realnega dela impedance (admitance).



Slika 64.6: Dve vzporedni magnetno sklopljeni veji.

V okviru enosmernih vezij smo se seznanili tudi z vezavo treh elementov v trikot ali zvezdo. Tam smo izpeljali pretvorbene enačbe iz ene v drugo vezavo. ♣ Bralec naj v izpuščenem praznem mestu obe vezavi nariše in pretvorbene enačbe smiselno priredi; (okno) slika 64.7. ♣

Kompleksor moči – delovna, jalova in navidezna moč. Še vedno smo pri pasivnem dvopolnem linearnem vezju. Trenutna moč je določena s produktom vhodne napetosti in toka,

$$p(t) = u(t)i(t) = UI\cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_i)$$

Upoštevajmo, da je $\cos\alpha\cos\beta = (1/2)(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$, pa dobimo za moč preglednejši izraz,

$$p(t) = \frac{1}{2}UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \frac{1}{2}UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

ki ga v časovnem diagramu podaja slika 64.8. Trenutna moč je pulzirajoča - s poprečno vrednostjo $\overline{p(t)} = (1/2)UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) = (1/2)UI\cos\varphi$, okrog katere prenihava z amplitudo $(1/2)UI$ in periodo π/ω. Daljši del periode je moč pozitivna (bremenski režim), krajši del pa je negativna (generatorski režim). Poprečno moč imenujemo *delovna moč*; označimo jo s P in zanjo pišemo:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}UI\cos\varphi} \tag{64.10}$$

Faktor $\cos\varphi$ imenujemo tudi *faktor delavnosti*. Za pasivno vezje je moč P v vsakem primeru nenegativna ($P \geq 0$), kar pomeni, da je faza φ izključno znotraj intervala $[-\pi/2, \pi/2]$. S tipičnimi oblikami trenutne moči se srečamo na čistih elementih.

Na uporu je $\varphi = 0$ in $p(t) = (1/2)UI(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_i)) \geq 0$; moč se sprošča v "paketih" – dvakrat v periodi toka (napetosti).

Na tuljavi je $\varphi = \pi/2$ in $p(t) = (1/2)UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$; poprečje moči je nič. V eni četrtinki periode (naraščanje toka) se energija akumulira v elementu, v naslednji četrtini pa se ta energija vrača k viru. Maksimalna energija, ki jo element sprejme, je ravno $(1/2)LI^2$, časovno poprečje $\overline{W_{\mathrm{m}}(t)}$ akumulirane energije pa je $(1/4)LI^2$. Za izmenjujočo moč je v elektrotehniki uveljavljen termin "jalova" moč; to pač zato, ker se energija med elementom in virom le izmenjuje.

Slika 64.7: ♣ Bralčev okvirček; pretvorbene enačbe za vezavi trikot in zvezda. ♣

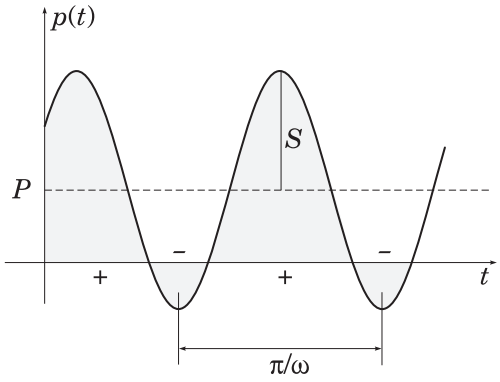
Podobno je na kondenzatorju: $\varphi = -\pi/2$ in $p(t) = (1/2)UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$. V četrtinki periode napetosti, ko ta narašča, se električna energija akumulira do vrednosti $(1/2)CU^2$, v naslednji četrtinki pa se vrne k viru; njeno časovno poprečje $\overline{W_{\mathrm{e}}(t)}$ je tokrat $(1/4)CU^2$. Tudi tu rečemo izmenjujoči moči jalova moč.

Glede na trenutne moči na čistih elementih je moč splošnega dvopola smiselno razdeliti na dva dela: 1) na tisti del moči (p_1), ki je stalno nenegativen, in 2) na tisti del moči (p_2), ki je "jalov". Spreminjajoči del v $p(t)$ še enkrat razstavimo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) &= \frac{1}{2}UI\cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)\\ &= \frac{1}{2}UI\cos\varphi\cos 2(\omega t + \varphi_u) + \frac{1}{2}UI\sin\varphi\sin 2(\omega t + \varphi_u)\end{aligned}$$

Za $p(t)$ dobimo:

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2}UI\cos\varphi(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u))}_{p_1(t)} + \overbrace{\frac{1}{2}UI\sin\varphi\sin 2(\omega t + \varphi_u)}^{p_2(t)}$$



Slika 64.8: Trenutna moč v pasivni dvopol.

Moč $p_1(t)$ je stalno nenegativna s poprečjem $\overline{p_1(t)} = P$, moč $p_2(t)$ pa je izmenjalna s poprečjem $\overline{p_2(t)} = 0$; maksimalno vrednost te moči imenujemo *jalova moč* (Q) in je definirana kot

$$\boxed{Q = \frac{1}{2} U I \sin\varphi} \tag{64.11}$$

Jalova moč je pozitivna, če je $\varphi > 0$ (induktivni karakter), in je negativna, če je $\varphi < 0$ (kapacitivni karakter). Razviden razloček med delovno in jalovo močjo napravimo tudi z enotami; delovno moč računamo in merimo v wattih (W), medtem ko jalovo moč izražamo v reaktivnih volt-amperih (VAr).

Nadalje vpeljemo še t.i. *navidezno moč* oz. kompleksor navidezne moči $\underline{S}$, ki je definiran kot

$$\boxed{\underline{S} = P + jQ} \tag{64.12}$$

kar moremo izraziti tudi s kompleksorjema toka in napetosti,

$$\underline{S} = P + jQ = \frac{1}{2} U I (\cos\varphi + j \sin\varphi) = \frac{1}{2} U e^{j\varphi_u} I e^{-j\varphi_i} = \frac{1}{2} \underline{U}\, \underline{I}^*$$

kjer je $\underline{I}^*$ konjugirano kompleksen kazalec h kompleksorju $\underline{I}$; torej:

$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{U}\, \underline{I}^* = \frac{1}{2} \underline{Z} I^2 = \frac{1}{2} \underline{Y}^* U^2} \tag{64.13}$$

Tudi navidezno moč izražamo v prirejenih enotah, in sicer v volt-amperih (VA). Absolutna vrednost kompleksorja $\underline{S}$ (torej S) je (glede na definicijo) določena s pitagorsko vsoto P-ja in Q-ja,

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{1}{2} U I} \tag{64.14}$$

in hkrati ustreza amplitudi prenihanja trenutne moči $p(t)$ okrog poprečne vrednosti P (slika 64.8).

Zgled 64.3

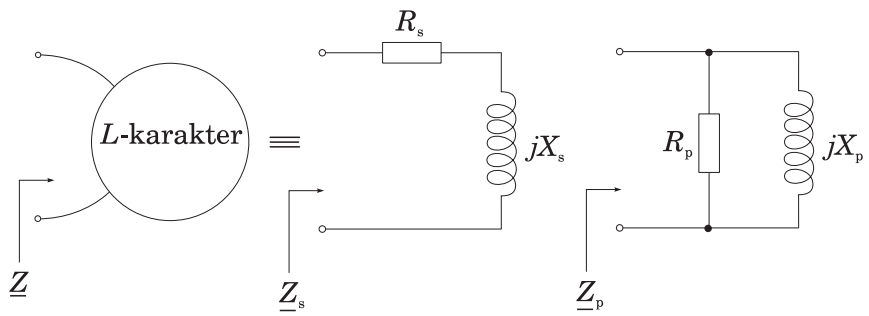
Na vhodu dvopolnega pasivnega linearnega vezja poznamo amplitudo napetosti ($U = 250$ V) in toka ($I = 4$ A) ter fazni kot $\varphi = 30°$. Določimo delovno, jalovo in navidezno moč ter nadomestno vezje dvopola. Posamezne moči so:

$$P = \frac{1}{2}UI\cos\varphi = 433 \text{ W} \qquad Q = \frac{1}{2}UI\sin\varphi = 250 \text{ VAr} \qquad S = \frac{1}{2}UI = 500 \text{ VA}$$

Dvopolu moremo prirediti impedanco

$$\underline{Z} = \frac{U}{I}e^{j\varphi} = 62.5e^{j\pi/6} = (54.13 + j31.25)\ \Omega$$

Glede na induktivni karakter ($\varphi > 0$), moremo takšen dvopol predstaviti kot serijsko vezavo upora R_s in induktivnosti L_s, z impedanco $R_\mathrm{s} + j\omega L_\mathrm{s} = R_\mathrm{s} + jX_\mathrm{s}$, ali s paralelno vezavo upora R_p in induktivnosti L_p; slika 64.9.



Slika 64.9: Dvopol z induktivnim karakterjem in nadomestni shemi.

Dvopoli si bodo ekvivalentni, če bo $\underline{Z}_\mathrm{s} = \underline{Z}_\mathrm{p} = \underline{Z}$ oz. ko bo $\underline{Y}_\mathrm{s} = \underline{Y}_\mathrm{p} = \underline{Y}$. Pišemo:

$$\frac{1}{R_\mathrm{s} + jX_\mathrm{s}} = \frac{R_\mathrm{s} - jX_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}^2 + X_\mathrm{s}^2} = \frac{1}{R_\mathrm{p}} - j\frac{1}{X_\mathrm{p}}$$

Iz primerjave realnih in imaginarnih delov v enačbi dobimo tile povezavi:

$$R_\mathrm{p} = \frac{R_\mathrm{s}^2 + X_\mathrm{s}^2}{R_\mathrm{s}} \qquad X_\mathrm{p} = \frac{R_\mathrm{s}^2 + X_\mathrm{s}^2}{X_\mathrm{s}}$$

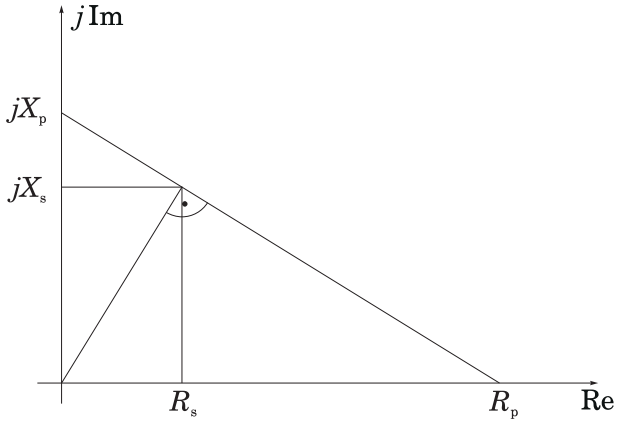
♣ Bralec naj obratni zvezi izvede sam in pokaže, da enačbe ustrezajo geometrijski interpretaciji na sliki 64.10. ♣ Glede na izvedeni enačbi in znano impedanco dvopola so: $R_\mathrm{s} = 54.13\ \Omega$, $X_\mathrm{s} = 31.25\ \Omega$, $R_\mathrm{p} = 72.17\ \Omega$ in $X_\mathrm{p} = 125\ \Omega$.

Dalje moremo vhodnemu harmoničnemu toku (z znano amplitudo) prirediti kompleksor $\underline{I} = I\angle\varphi_i$. Bodi $\varphi_i = \pi/2$; tedaj je $\underline{I} = jI = j4$ A in $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} = (-125 + j216.52)$ V. Kompleksor moči $\underline{S}$ je

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{U}\,\underline{I}^* = \frac{1}{2}(-125 + j216.52)(-j4) = (433 + j250) \text{ VA}$$

Zgled 64.4

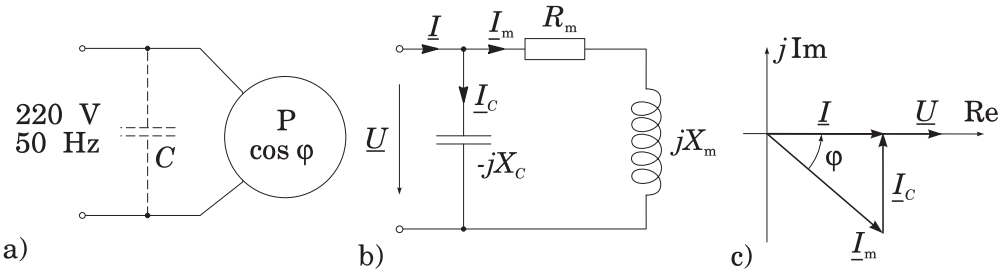
Večkrat je aktualno vprašanje kompenzacije jalove energije, torej tiste, ki se "jalovo" izmenjuje med virom (ali omrežjem) in bremenom. Ta, seleča se energija namreč



Slika 64.10: Povezava med serijskima in paralelnima komponentama RL vezja.

prav tako obremenjuje napajalni (daljnovodni) sistem (ki je navzgor omejen z nazivnim tokom prenosa električne energije) in kot takšna preprečuje prenos koristne (delovne) energije. Ta problematika je pereča pri priključevanju motorskih pogonov (za katere je tipičen L-karakter) na energetsko omrežje.

Vzemimo enofazni asinhronski motor z močjo $P = 2$ kW in faktorjem delavnosti $\cos\varphi = 0.8$, ki je priključen na omrežje: $U_{\mathrm{ef}} = 220$ V, $f = 50$ Hz; slika 64.11. Iz



Slika 64.11: Ekvivalentno (RL) vezje z dodatnim kompenzacijskim kondenzatorjem in ustrezen kazalčni diagram.

podatkov določimo še navidezno ($S = P/\cos\varphi = 2.5$ kVA) in jalovo moč ($Q = S\sin\varphi = 1.5$ kVAr). Ideja kompenzacije jalove moči motorja – proti omrežju – je v tem, da vzporedno k motorju priključimo kondenzator (C), ki mora biti tolikšen, da zagotovi sofaznost vhodnega toka $\underline{I}$ in napetosti $\underline{U}$; skica c). Tok $\underline{I}_C$ fazno prehiteva napetost $\underline{U}$; $\underline{I}_C = j\omega C\underline{U}$. Kompleksor vhodne moči bo:

$$\frac{1}{2}\underline{U}\,\underline{I}^* = \frac{1}{2}\underline{U}(\underline{I}_{\mathrm{m}}^* - j\omega C\underline{U}^*) = P + j(Q - \frac{1}{2}\omega CU^2) = P + j(Q - \omega CU_{\mathrm{ef}}^2)$$

in bo čisto realen, ko bo

$$C = \frac{Q}{\omega U_{\mathrm{ef}}^2} = \frac{1500}{100\pi 220^2} = 98.65\ \mu\mathrm{F}$$

Iz diagrama se tudi vidi, da je – pri tako kompenziranem motorju – tok iz omrežja za faktor $\cos\varphi = 0.8$ manjši kot bi bil sicer. ♣ Bralec naj za dane podatke določi R_{m} in X_{m} in izračuna vhodno impedanco celotnega vezja s skice b). ♣

***jω*-metoda.** Harmonično vzbujanje linearnih električnih vezij omogoča vpeljavo kompleksorjev relevantnih količin (napetosti, toka, impedance, moči) v kompleksni ravnini. Ob tem se nehote vsiljuje primerjava med časovnim prostorom harmoničnih količin in prirejenim kompleksnim prostorom (ravnino); razumevanje teh povezav je gotovo odločilno za pravilno uporabo t.i. *simboličnega* oz. *kompleksnega računa*. Izhodišče vsega — če ponovimo – je dejstvo, da harmonično vzbujanje linearnega vezja izzove v njem harmonične toke in napetosti, ki so povsem opisljivi s svojimi amplitudami in fazami. Proporcionalni in integralno-diferencialni odnosi med toki in napetostmi na osnovnih elementih električnega vezja se prevedejo v amplitudno-fazne korelacije, ki jih z vpeljavo kompleksorjev opišemo z ustreznimi linearnimi kompleksnimi enačbami. Operacija seštevanja v časovnem prostoru se prevede v operacijo seštevanja v kompleksni ravnini; prav tako tudi operacija množenja s konstanto. Operacija odvajanja v časovnem prostoru se prevede v množenje z $j\omega$ v kompleksnem prostoru in operacija integriranja v časovnem prostoru se prevede v deljenje z $j\omega$ v kompleksnem prostoru; ob tem zadnjem sta mišljena naša energijsko akumulabilna elementa – tuljava in kondenzator. Prav od tu izhaja tudi ime *jω-metoda*, ki je v svojem bistvu operatorska metoda.

Naslednja razpredelnica podaja vzporednice med časovnim in kompleksnim prostorom pri frekvenci ω. Ob tem velja pripomniti le to, da kvocient $u(t)/i(t)$ v časovnem prostoru

količina (operator)	časovni prostor	kompleksna ravnina
tok	$i(t)$	$\underline{I}$
napetost	$u(t)$	$\underline{U}$
impedanca	–	$\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$
moč	$p(t) = u(t)i(t)$	$\underline{S} = P + jQ = \underline{U}\,\underline{I}^*/2$
produkt	$ai(t)$	$a\underline{I}$
odvod	d/dt	$j\omega$
integral	$\int dt$	$1/j\omega$
zamik	$i(t \pm t_1)$	$\underline{I}e^{\pm j\omega t_1}$

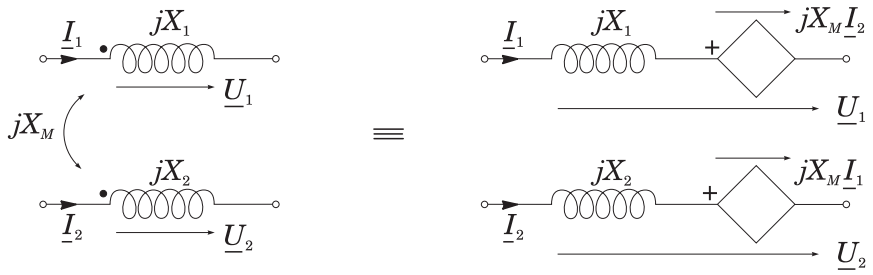
Tabela 64.1: Vzporednice med časovnim in kompleksnim prostorom.

nima nikakršne fizikalne teže – kvocient kot kvocient.

65. Metode reševanja harmonično vzbujanih vezij

Z vpeljavo simboličnega računa smo prišli do prikladnega orodja, ki na nivoju kompleksorjev toka, napetosti, impedance (admitance) in kompleksne moči ter pripadajočih kompleksnih povezav vzpostavlja sorodne relacije, kot jih poznamo že iz enosmernih vezij, vključno z obema Kirchhoffovima zakonoma (v kompleksnem), ki sta podlaga za analizo obsežnejšega vezja. Metodologijo, ki smo jo spoznali v razdelku 37 (enosmerna vezja), bi lahko skoraj v celoti ponovili še za kompleksen prostor: napetost U zamenja kompleksor $\underline{U}$, tok I zamenja kompleksor $\underline{I}$, upornost R zamenja impedanca $\underline{Z}$, prevodnost G zamenja admitanca $\underline{Y}$, moč $P(= UI)$ zamenja kompleksor moči $\underline{S}(= \underline{U}\,\underline{I}^*/2)$.

Tudi enačbe po metodah vejnih tokov, vejnih napetosti, zančnih tokov ($\underline{J}$) in spojiščnih potencialov ($\underline{V}$) se pišejo na povsem enak način, če seveda vezje ne vsebuje magnetno sklopljenih tuljav, če pa jih, je potrebno takšne tuljave predhodno formalno razcepiti v pasivni del, ki je lasten induktivnosti tuljave, in generatorski del, ki je lasten magnetnim povezavam; slika 65.1.



Slika 65.1: Formalna ekvivalenca dveh sklopljenih tuljav.

Napetost $\underline{U}_1$, na skici a), je $jX_1\underline{I}_1 + jX_M\underline{I}_2$. Prvi sumand ustreza padcu napetosti na prvi tuljavi zaradi lastnega toka, drugi člen pa moremo razumeti kot napetostni vir, ki ga krmili (vodi) tok druge tuljave – krmiljen napetostni vir; podoben razmislek velja tudi za drugo tuljavo. Če bi bilo v vezju več magnetno sklopljenih tuljav, bi vsako tuljavo nadomestili s pasivnim elementom, ki pripada impedanci te tuljave, in z več krmiljenimi viri, ki jih "vodijo" toki ostalih tuljav. Pisanje enačb po eni od izbranih metod bi nato potekalo po pravilih in vzorcih, ki smo jih detajlirali že v okviru enosmernih vezij.

Zgled 65.1

Za izbrano vezje; slika 65.2, zapišimo potrebne enačbe po vseh štirih metodah. Izhodiščne Kirchhoffove enačbe so sledeče: ena je tokovna,

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \tag{K1}$$

in dve sta napetostni,

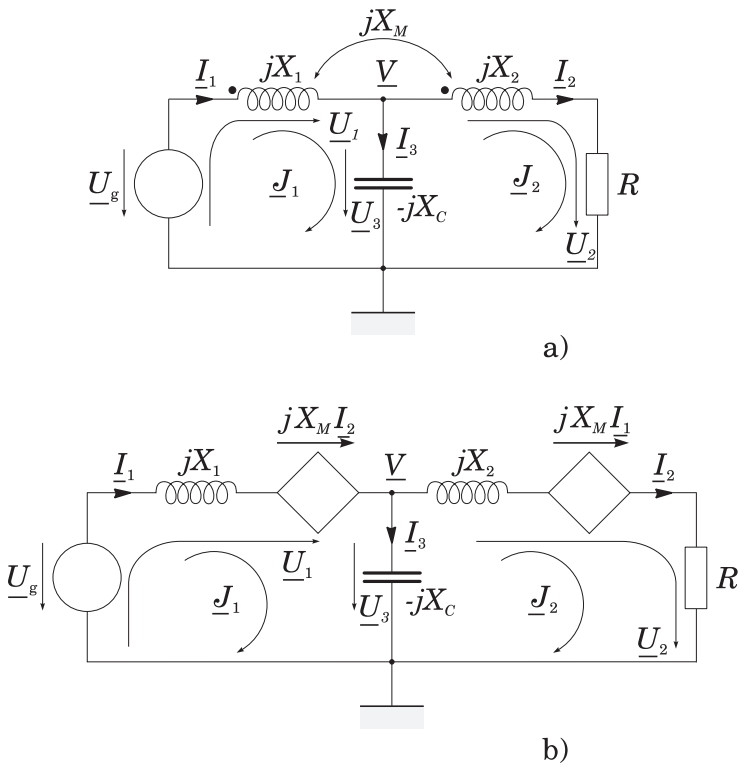
$$\underline{U}_1 + \underline{U}_3 = 0 \qquad -\underline{U}_3 + \underline{U}_2 = 0 \tag{K2}$$

Vejne napetosti so povezane z vejnimi toki:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= -\underline{U}_g + jX_1\underline{I}_1 + jX_M\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= jX_M\underline{I}_1 + jX_2\underline{I}_2 + R\underline{I}_2 \\ \underline{U}_3 &= -jX_C\underline{I}_3 \end{aligned} \tag{K3}$$

ali pa obratno, vejni toki z napetostmi v vejah (v tej obliki sicer ne eksplicitno):

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_g - jX_M\underline{I}_2}{jX_1} \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_2 - jX_M\underline{I}_1}{jX_2} \end{aligned} \tag{K4}$$



Slika 65.2: Vezje z magnetno povezavo in ekvivalentno vezje s krmiljenima viroma.

$$\underline{I}_3 = \frac{j\underline{U}_3}{X_C}$$

1) Metoda vejnih tokov. Po tej metodi izrazimo vejne napetosti v napetostnih enačbah s toki ter tem pridružimo tokovne enačbe; dobimo enačbe:

$$\begin{aligned} -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0 \\ jX_1\underline{I}_1 + jX_M\underline{I}_2 - jX_C\underline{I}_3 &= \underline{U}_\mathrm{g} \\ jX_M\underline{I}_1 + (R + jX_2)\underline{I}_2 + jX_C\underline{I}_3 &= 0 \end{aligned} \tag{K5}$$

2) Metoda vejnih napetosti. Tu bi se postopek že zapletel, saj bi morali iz prvih dveh enačb (K4) najprej eksplicitno izraziti toka $\underline{I}_1$ in $\underline{I}_2$, ki bi ju nato skupaj z $\underline{I}_3$ nesli v (K1) in jim pridružili še enačbi pod (K2). Ta postopek bi celotno proceduro vsekakor podaljšal, zato ta pot ni smotrna. Podobna ugotovitev velja tudi za metodo spojiščnih potencialov. ♣ V to naj se prepriča bralec sam. ♣

3) Metoda zančnih tokov. Po vzorcu iz enosmernih vezij bi enačbi za oba zančna tokova zapisali takole:

$$j(X_1 - X_C)\underline{J}_1 + jX_C\underline{J}_2 = \underline{U}_\mathrm{g} - jX_M\underline{J}_2$$

$$jX_C\underline{J}_1 + (R + j(X_2 - X_C))\,\underline{J}_2 = -jX_M\underline{J}_1$$

kjer smo že upoštevali: $\underline{I}_1 = \underline{J}_1$ in $\underline{I}_2 = \underline{J}_2$. Na desni strani sta še oba krmiljena vira, ki ju v naslednjem koraku prenesemo na levo stran in dobimo

$$j(X_1 - X_C)\underline{J}_1 + j(X_M + X_C)\underline{J}_2 = \underline{U}_\mathrm{g}$$

$$j(X_M + X_C)\underline{J}_1 + (R + j(X_2 - X_C))\,\underline{J}_2 = 0 \qquad \text{(K6)}$$

Vidimo, da je matrika spet simetrična, da so v diagonalah impedance zank, v izvendiagonalnih členih pa se dodatno pojavijo še sumandi, ki kažejo na magnetno povezanost med zankama.

Za zaključek vzemimo še računski primer: $X_1 = 20\ \Omega$, $X_2 = 20\ \Omega$, $X_M = 10\ \Omega$, $X_C = 20\ \Omega$, $R = 6\ \Omega$, $\underline{U}_\mathrm{g} = 150$ V. Sistem enačb je

$$\left.\begin{array}{rl} 0\underline{J}_1 + j30\underline{J}_2 = & 150 \\ j30\underline{J}_1 + 6\underline{J}_2 = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rl} \underline{J}_1 = & 1\ \mathrm{A} \\ \underline{J}_2 = & -j5\ \mathrm{A} \end{array}$$

Tok ($\underline{I}_1$) generatorja je 1 A. Navidezna moč (generatorja) $\underline{S}_\mathrm{g} = \underline{U}_\mathrm{g}\,\underline{I}_1^*/2 = (75 + j0)$ VA je čisto realna in impedanca, ki jo generator "čuti" ($\underline{U}_\mathrm{g}/\underline{I}_1 = 150\ \Omega$), je čisto ohmska. Kompleksor moči na uporu R je $R\underline{I}_2\,\underline{I}_2^*/2 = (75 + j0)$ VA in je jasno čisto realen; $P = 75$ W, kar je ravno delovna moč generatorja.

66. Stavki o harmonično vzbujanih vezjih

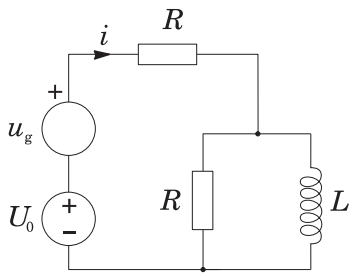
Temu sorodno temo smo podrobno obdelali v okviru enosmernih vezij v razdelku 38. Glede na formalno-matematične sorodnosti (v enih in drugih vezjih), bo ta razdelek ustrezno krajši; zadržali se bomo le ob stavkih, ki vnašajo določeno specifiko in so za harmonično vzbujana vezja tipična, vse druge pa bomo le obnovili.

Stavek superpozicije. V kompleksnem prostoru velja ta stavek za linearna vezja, ki so vzbujana s koherentnimi viri – torej takšnimi, katerih napetosti (toki) nihajo z enako frekvenco (faze so v splošnem različne). Kazalec toka (ali napetosti) neke veje moremo potemtakem – v smislu tega stavka – izraziti kot vsoto kazalcev delnih tokov (ali napetosti), ki jih povzročajo posamezni viri v vezju. V nasprotnem, ko viri niso koherentni, omenjen stavek v kompleksnem ne velja, velja pa v časovnem prostoru. To pomeni, da moremo delne toke (napetosti) izračunati v kompleksnem pri ustreznih frekvencah virov, jih potem pretvoriti v časovni prostor in jih tam nato sešteti.

Zgled 66.1

Vzemimo vezje, ki je vzbujano s kombinacijo enosmernega in harmoničnega vira; slika 66.1. Podatki so tile: $U_0 = 10$ V, $u_\mathrm{g} = U_\mathrm{g}\cos\omega t$, $U_\mathrm{g} = 10$ V, $\omega L = R = 1\ \Omega$. Vprašajmo se po vhodnem toku i. Po superpoziciji v časovnem prostoru je $i = i' + i''$, kjer naj je $i' = I'$ tok zaradi enosmernega vira, i'' pa tok zaradi harmoničnega vira. Za enosmerni vir (frekvenca je nič) je idealna tuljava kratek stik (impedanca je nič); tok I' je kar U_0/R. Za harmonični vir je impedanca vezja enaka

$$\underline{Z}'' = R + \frac{Rj\omega L}{R + j\omega L} = \left(1 + \frac{j}{1+j}\right)\Omega = \left(\frac{1+2j}{1+j}\right)\Omega = \frac{3+j}{2}\,\Omega$$



Slika 66.1: Vezje z dvema nekoherentnima viroma.

Kompleksor toka $\underline{I}''$ bo:

$$\underline{I}'' = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}''} = 2\frac{10e^{j0}}{3+j}\,\mathrm{A} = (6 - j2)\,\mathrm{A}$$

v časovnem pa bo

$$i'' = \sqrt{40}\cos(\omega t - \arctan 1/3)\,\mathrm{A} = 6.32\cos(\omega t - 0.32)\ \mathrm{A}$$

Vhodni tok je

$$i = I' + i'' = [10 + 6.32\cos(\omega t - 0.32)]\,\mathrm{A}$$

Izračunajmo še poprečno moč v vezju:

$$P = \overline{(U_0 + u_g)(I' + i'')} = \overline{U_0 I'} + \overline{U_0 i''} + \overline{u_g I'} + \overline{u_g i''}$$

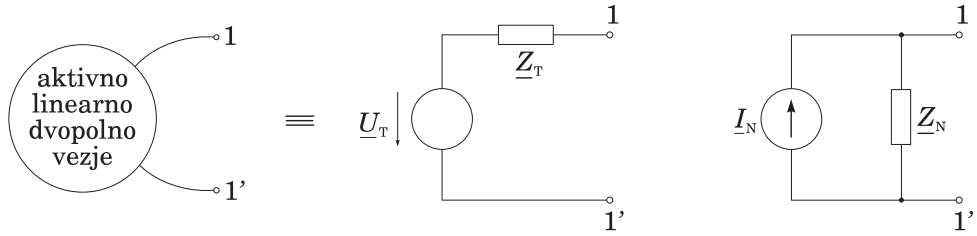
Poprečji mešanih členov sta nič, saj sta to čisti harmonični funkciji, poprečji prvega in zadnjega člena pa tudi znamo določiti:

$$\overline{U_0 I'} = \frac{U_0^2}{R} = 100\ \mathrm{W} \qquad \overline{u_g i''} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\underline{U}_g \underline{I}''^*\right) = 30\ \mathrm{W}$$

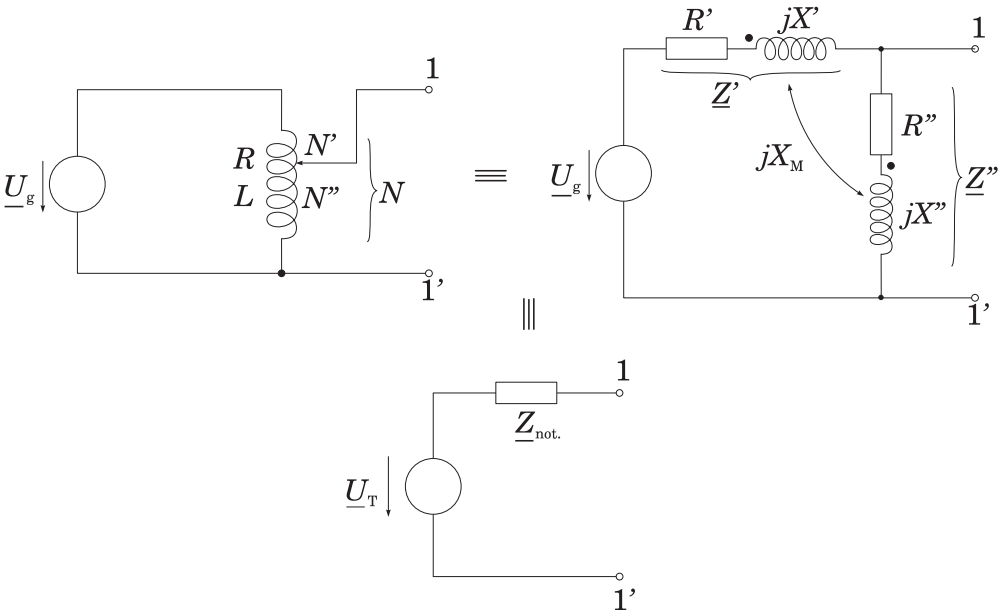
Rezultat preseneča: če so v vezju vsi viri med seboj nekoherentni, potem je delovna moč na posameznem uporu enaka vsoti moči, ki bi jih na njem ločeno povzročali posamezni viri.

Stavek o nadomestitvi. Če se za hip povrnemo v razdelek 38, potem brez težav zaključimo: če v harmonično vzbujanem vezju poznamo tok veje ($\underline{I}$) ali napetost veje ($\underline{U}$), potem moremo vejo zamenjati s tokovnim virom $\underline{I}_g = \underline{I}$ ali napetostnim virom $\underline{U}_g = \underline{U}$ in ostanejo ob tem razmere v vezju nespremenjene.

Stavek Thévenina in stavek Nortona. Glede na razmisleke v že omenjenem razdelku moremo stavka prikrojiti tudi za harmonično aktivno linearno dvopolno vezje; slika 66.2. Théveninova napetost $\underline{U}_T$ je napetost odprtih sponk med 1 in 1′, tok $\underline{I}_N$ Nortonovega vira je tok kratkega stika med sponkama 1 in 1′ in $\underline{Z}_T = \underline{Z}_N = \underline{Z}_{\text{not.}}$ je notranja impedanca dvopola med sponkama 1 in 1′, ko so notranji viri deaktivirani; med vsemi tremi elementi velja zveza $\underline{U}_T = \underline{Z}_{\text{not.}}\,\underline{I}_N$.



Slika 66.2: Ekvivalenca aktivnih dvopolov.



Slika 66.3: Avtotransformator z izgubno upornostjo navitja.

Zgled 66.2

Vzemimo avtotransformator (navitje na feromagnetnem jedru z odcepom); slika 66.3. Delilnik razdeli ovoje na zgornje (N') in spodnje (N''); $N' + N'' = N$. Zgornji in spodnji del upornosti sta: $R' = RN'/N$ in $R'' = RN''/N$; zgornji in spodnji del induktivnosti sta: $L' = L(N'/N)^2$, $L'' = L(N''/N)^2$; pri popolnem sklopu ($k = 1$) je $M = \sqrt{L'L''} = L(N'N''/N^2)$.

Napetost odprtih sponk bo kar napetost na spodnjem delu navitja,

$$\underline{U}_\mathrm{T} = \frac{\underline{U}_\mathrm{g}}{\underline{Z}' + \underline{Z}'' + 2jX_M}(\underline{Z}'' + jX_M)$$

Pri deaktiviranem $\underline{U}_\mathrm{g}$ dobimo notranjo impedanco tako kot v zgledu 64.2, le da je v imenovalcu člen $+2jX_M$,

$$\underline{Z}_\mathrm{not.} = \frac{\underline{Z}'\,\underline{Z}'' + X_M^2}{\underline{Z}' + \underline{Z}'' + 2jX_M} = \frac{R'R'' + j(R'X'' + R''X')}{R + jX}$$

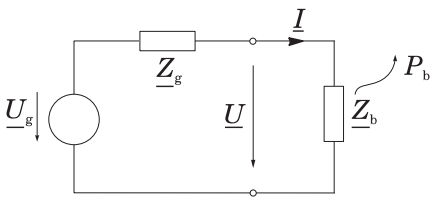
kjer je $R + jX$ impedanca celotnega navitja. Ustrezen tokovni vir $\underline{I}_\mathrm{N} = \underline{U}_\mathrm{T}/\underline{Z}_\mathrm{not.}$.

Stavek Tellegena. Če bi si v vezju izbrali kazalce vejnih tokov ($\underline{I}_j$) in vejnih napetosti ($\underline{U}_j$) istosmiselno bi, z upoštevanjem Kirchhoffovih zakonov v kompleksnem dobili (na soroden način kot v 38. razdelku) relacijo

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \underline{U}_j \, \underline{I}_j^* = 0} \tag{66.1}$$

kjer je n število vseh vej. Rekli bi tudi: vsota kompleksorjev moči po posameznih vejah je enaka nič. Ker pa imajo določene veje aktivne vire, bi stavek prebrali tudi takole: vsota kompleksorjev moči generatorjev je enaka vsoti kompleksorjev moči na bremenih – v harmonično vzbujenem vezju je kompleksna močnostna bilanca uravnotežena.

Stavek največje moči. Ta stavek se nanaša na delovno moč P_b na kompleksnem bremenu $\underline{Z}_\mathrm{b} = R_\mathrm{b} + jX_\mathrm{b}$, ki ga priključimo na realen napetostni (ali tokovni) vir s svojo napetostjo $\underline{U}_\mathrm{g}$ in notranjo impedanco $\underline{Z}_\mathrm{g} = R_\mathrm{g} + jX_\mathrm{g}$; slika 66.4. Ob tem se zastavlja



Slika 66.4: K maksimalni delovni moči na kompleksnem bremenu.

vprašanje: kolikšen naj je $\underline{Z}_\mathrm{b}$, da bo moč P_b na njem največja? (Spraševati se po maksimalnem kompleksorju $\underline{S}_\mathrm{b}$ nima smisla, saj v kompleksnem relacije (urejenosti) $>$ ali $<$ ni.)

Tok $\underline{I}$ v vezju je takle:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_\mathrm{g}}{\underline{Z}_\mathrm{g} + \underline{Z}_\mathrm{b}} = \frac{\underline{U}_\mathrm{g}}{(R_\mathrm{g} + R_\mathrm{b}) + j(X_\mathrm{g} + X_\mathrm{b})}$$

in moč P_b je dalje:

$$P_\mathrm{b} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\underline{Z}_\mathrm{b} I^2\right] = \left(\frac{U_\mathrm{g}^2}{2}\right) \frac{R_\mathrm{b}}{(R_\mathrm{g} + R_\mathrm{b})^2 + (X_\mathrm{g} + X_\mathrm{b})^2} = f(R_\mathrm{b}, X_\mathrm{b})$$

Očitno je P_b odvisen od realne in imaginarne komponente bremenske impedance; je funkcija dveh spremenljivk. Takšna funkcija pa doseže ekstrem tam, kjer sta oba parcialna odvoda enaka nič. Odvajajmo (!):

$$\frac{\partial P_\mathrm{b}}{\partial R_\mathrm{b}} = \left(\frac{U_\mathrm{g}^2}{2}\right) \frac{(R_\mathrm{g} + R_\mathrm{b})^2 + (X_\mathrm{g} + X_\mathrm{b})^2 - 2R_\mathrm{b}(R_\mathrm{g} + R_\mathrm{b})}{\left((R_\mathrm{g} + R_\mathrm{b})^2 + (X_\mathrm{g} + X_\mathrm{b})^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial P_\mathrm{b}}{\partial X_\mathrm{b}} = \left(-\frac{U_\mathrm{g}^2}{2}\right) \frac{2(X_\mathrm{g} + X_\mathrm{b})}{\left((R_\mathrm{g} + R_\mathrm{b})^2 + (X_\mathrm{g} + X_\mathrm{b})^2\right)^2}$$

Spodnji odvod bo nič, ko bo $X_\mathrm{b} = -X_\mathrm{g}$; in ko to upoštevamo še v zgornjem odvodu, vidimo, da mora biti $R_\mathrm{b} = R_\mathrm{g}$. Zaključimo: ekstrem, ki je tudi maksimum moči P_b, nastopi pri

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{b} = \underline{Z}_\mathrm{g}^*} \tag{66.2}$$

in takrat doseže maksimalno moč

$$\boxed{P_{\mathrm{b\ max.}} = \frac{U_\mathrm{g}^2}{8R_\mathrm{g}}} \tag{66.3}$$

Povsem očitno je v tem primeru upornost tokokroga realna in enaka $2R_\mathrm{g} = 2R_\mathrm{b}$, s tem pa sta tok zanke in napetost generatorja sofazna; $\underline{U}_\mathrm{g} = 2R_\mathrm{g}\underline{I}$. Rečemo tudi, da je breme $\underline{Z}_\mathrm{b}$ prilagojeno na realen vir – prenos moči od vira k bremenu je optimalen.

Zanimiv je tudi primer, ko je bremenska upornost čisto realna ($X_\mathrm{b} = 0$) in iščemo R_b, pri katerem bo moč na njem največja. Pogoj za R_b je takrat takle:

$$\frac{d}{dR_\mathrm{b}}\left(\left(\frac{U_\mathrm{g}^2}{2}\right)\frac{R_\mathrm{b}}{(R_\mathrm{g}+R_\mathrm{b})^2+X_\mathrm{g}^2}\right) = \left(\frac{U_\mathrm{g}^2}{2}\right)\frac{(R_\mathrm{g}+R_\mathrm{b})^2+X_\mathrm{g}^2-2(R_\mathrm{g}+R_\mathrm{b})R_\mathrm{b}}{\left((R_\mathrm{g}+R_\mathrm{b})^2+X_\mathrm{g}^2\right)^2} = 0$$

Za R_b dobimo:

$$R_\mathrm{b} = Z_\mathrm{g} = \sqrt{R_\mathrm{g}^2 + X_\mathrm{g}^2}$$

za maksimalno moč pa:

$$P_{\mathrm{b\ max.}} = \frac{U_\mathrm{g}^2}{4(R_\mathrm{g}+Z_\mathrm{g})}$$

♣ Bralec naj premisli o $P_{\mathrm{b\ max.}}$, ko sta $\underline{Z}_\mathrm{g} = jX_\mathrm{g}$ in $\underline{Z}_\mathrm{b} = R_\mathrm{b} + jX_\mathrm{b}$. Najti je potrebno primeren X_g! ♣

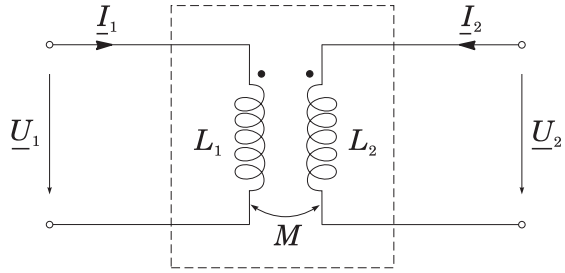
Stavek recipročnosti. Če imamo na voljo pasivno linearno štiripolno vezje (z dvema paroma sponk), potem dobimo z razmislekom, kot v 38. razdelku, formalno enak rezultat, ki ga v kompleksnem zapišemo takole:

$$\boxed{\left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}} \tag{66.4}$$

V četveropolnih enačbah sta napetosti $\underline{U}_1$ in $\underline{U}_2$ povezani s tokoma $\underline{I}_1$ in $\underline{I}_2$ preko *impedančne matrike* $[\underline{Z}]$, v kateri sta izvendiagonalna elementa $\underline{Z}_{12}$ in $\underline{Z}_{21}$ enaka prav zaradi recipročnosti. Podobno velja tudi za *admitančno matriko* $[\underline{Y}]$, ki preslika napetosti v oba toka. Pri *verižni matriki* $[\underline{T}]$ so koeficienti $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ in $\underline{d}$ seveda kompleksni in, zaradi recipročnosti, v zvezi $\underline{a}\,\underline{d} - \underline{b}\,\underline{c} = 1$.

Zgled 66.3

Tipičen primer štiripolnega vezja sta dve magnetno sklopljeni tuljavi (transformator). Zgled nekoliko poenostavimo in vzemimo, da sta ohmski upornosti navitij zanemarljivi; slika 66.5. Napetosti na tuljavah smo že večkrat zapisali; če ju ured-



Slika 66.5: Brezizgubni transformator kot četveropol.

imo v matrično formo, dobimo:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Povezujoča je impedančna matrika $[\underline{Z}]$; $[\underline{U}] = [\underline{Z}][\underline{I}]$. Je simetrična (člen $j\omega M$); če jo obrnemo ($[\underline{Z}]^{-1}$), dobimo še admitančno matriko $[\underline{Y}]$,

$$[\underline{Y}] = [\underline{Z}]^{-1} = \frac{1}{\omega^2(M^2 - L_1L_2)} \begin{bmatrix} j\omega L_2 & -j\omega M \\ -j\omega M & j\omega L_1 \end{bmatrix}$$

Tudi ta je simterična, eksistira pa le za neidealno magnetno povezavo ($k < 1$). ♣
Bralec bo sam našel še verižno matriko in zanjo dobil:

$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{M} & j\omega\left(\dfrac{L_1L_2}{M} - M\right) \\ \dfrac{1}{j\omega M} & \dfrac{L_2}{M} \end{bmatrix}$$

Determinanta matrike $[\underline{T}]$ je očitno enaka ena. ♣

67. Posebne vezave elementov

V tem razdelku bomo namenili pozornost nekaterim specifičnim vezjem, ki jih karakterizirajo svojevrstne lastnosti. Ogledali si bomo pojav resonance in transformacijo impedance, za konec pa še brezizgubni transformator.

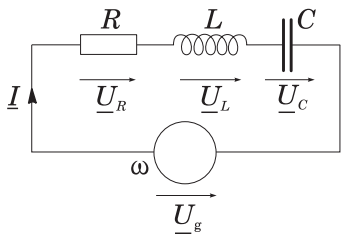
Resonančni krog – nihajni krog. V okviru tega si bomo ogledali tokovno (oz. napetostno) resonanco zaporedne (oz. vzporedne) vezave elementov R, L in C.

1) Zaporedni nihajni krog. Predstavlja ga zaporedna vezava upora, tuljave in kondenzatorja; slika 67.1. Impedanco nihajnega kroga določa izraz

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

Zanimiva je predvsem frekvenčna odvisnost impedance; $\underline{Z}(\omega)$. Frekvenčno značilna točka je, ko je njen imaginarni del nič. Označujemo jo z ω_0 in jo imenujemo *resonančna frekvenca*,

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \underline{Z}(\omega_0) = R$$

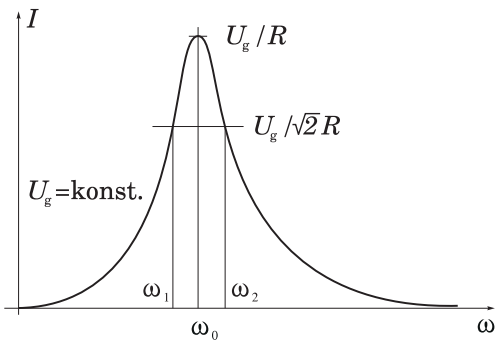


Slika 67.1: Napetostno vzbujan zaporedni nihajni krog.

Takrat je absolutna vrednost impedance

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

najmanjša, amplituda I nihajočega toka pa največja – tokovna resonanca; slika 67.2. V področju $\omega < \omega_0$ ima vezje kapacitivni karakter ($\varphi < 0$), v področju $\omega > \omega_0$ ima



Slika 67.2: Tokovna resonanca zaporednega nihajnega kroga.

induktivni karakter, pri resonančni frekvenci pa čisto ohmski karakter ($\varphi = 0$); v celotnem frekvenčnem pasu se φ spreminja od (skrajne) vrednosti $-\pi/2$ (pri $\omega \to 0$) do (druge skrajne) $\pi/2$ (pri $\omega \to \infty$).

Napetosti $\underline{U}_L = j\omega L\underline{I}$ in $\underline{U}_C = \underline{I}/j\omega C$ (na reaktivnih elementih) sta nasploh vedno v protifazi (ko je trenutna moč na enem elementu pozitivna, je na drugem negativna – eden se energijsko polni, drugi pa prazni), v resonanci pa je njuna vsota ravno nič; $\underline{U}_R$ je takrat enak $\underline{U}_\mathrm{g}$.

Izraz za impedanco nekoliko preoblikujmo:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = R\left(1 + j\frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

Izraz $\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$ imenujemo *razglašenost* (β), kvocient $\omega_0 L/R = 1/\omega_0 CR$ pa *kvaliteta (Q) nihajnega kroga*,

$$\beta = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

S tem je

$$\underline{Z} = R(1 + j\beta Q)$$

Na resonančni krivulji toka sta značilni bočni frekvenci ω_1 (levo od ω_0) in ω_2 (desno od ω_0), med katerima je tok nihajnega kroga večji od $U_g/\sqrt{2}R$. Pri spodnji je $\beta Q = -1$, pri zgornji pa je 1. Pišimo:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} = -\frac{1}{Q} \qquad \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{1}{Q}$$

Če ju seštejemo (in odštejemo), dobimo tile enačbi:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_1\omega_2}\omega_0 = 0 \qquad \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1\omega_2}\omega_0 = \frac{2}{Q}$$

Iz prve ugotovimo, da je $\sqrt{\omega_1\omega_2} = \omega_0$, iz druge pa, da je $(\omega_2 - \omega_1)/\omega_0 = 1/Q$. To slednje je t.i. *pasovna širina (B)* nihajnega kroga,

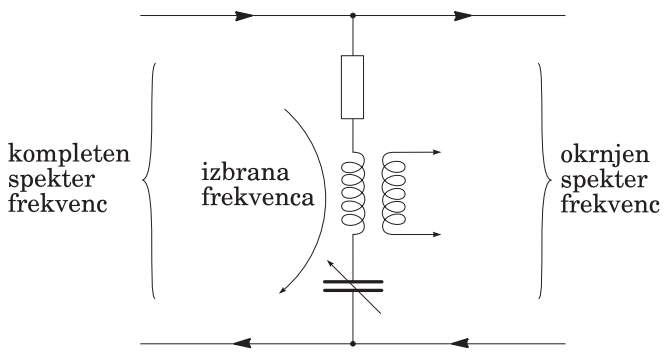
$$B = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Bolj ko je nihajni krog kvaliteten, ožja je resonančna krivulja (in obratno); pravimo tudi, da je – glede na B (ali $1/Q$) – nihajni krog bolj ali manj selektiven; izdatno zaniha le v ozkem frekvenčnem pasu. Za nihajni krog pravimo, da je idealen, ko gre $R \to 0$; s tem gre $Q \to \infty$ in $B \to 0$.

Zgled 67.1

Bodi nihajni krog z elementi: $R = 0.1\ \Omega$, $L = 5\ \mu$H, $C = 2$ nF. Resonančna frekvenca bo pri $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 10^7$ rad/s ($f_0 = \omega_0/2\pi = 1.59$ MHz). Kvaliteta $Q = \omega_0 L/R = 500$ in pasovna širina $B = 0.002$ oz. $f_2 - f_1 = 3.18$ kHz. V resonanci bo $U_L/U_g = \omega_0 L/R = Q = 500$. Pri amplitudi napetosti generatorja 10 mV bo amplituda napetosti na kondenzatorju ali tuljavi Q-krat večja (5 V), amplituda toka I pa bo 100 mA.

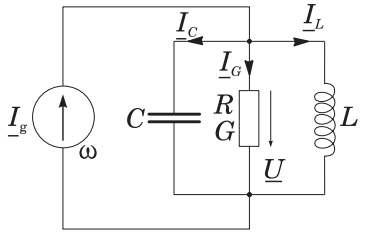
Če imamo na vodilih (dvovodu), slika 67.3, spekter frekvenc $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$, ki so razmeroma narazen glede na pasovno širino, in je nihajni krog uglašen na eno od njih, potem predstavlja prečna veja za to frekvenco sorazmerno majhno upornost glede na ostale. Na



Slika 67.3: Filtriranje željene frekvence.

ta način iz vodil izsejemo želeno frekvenco, ki jo moremo s spremenljivim kondenzatorjem tudi izbirati.

2) Vzporedni nihajni krog. Pri tem krogu so elementi R, L in C vezani vzporedno. Privzemimo, da takšno vezje vzbujamo s tokovnim virom ($\underline{I}_g$), ki mu moremo spreminjati frekvenco; slika 67.4. Glede na prejšnji nihajni krog se tu napetostno-tokovne razmere



Slika 67.4: Tokovno vzbujan vzporedni nihajni krog.

ravno obrnejo. Admitanco kroga bomo pisali:

$$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Karakteristična frekvenčna točka je spet pri $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$, kjer ima vezje najmanjšo absolutno admitanco in s tem največjo možno napetost na vzporednih elementih – napetostna resonanca. ♣ Vse ostale vzporednice s serijskim nihajnim krogom bo bralec uspel opraviti sam. ♣

Tudi tu vpeljemo razglašenost $\beta = (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$, kvaliteto Q, ki je $\omega_0 C/G$, in pasovno širino $B = 1/Q$. S takšnima β in Q se $\underline{Y}$ izraža kot

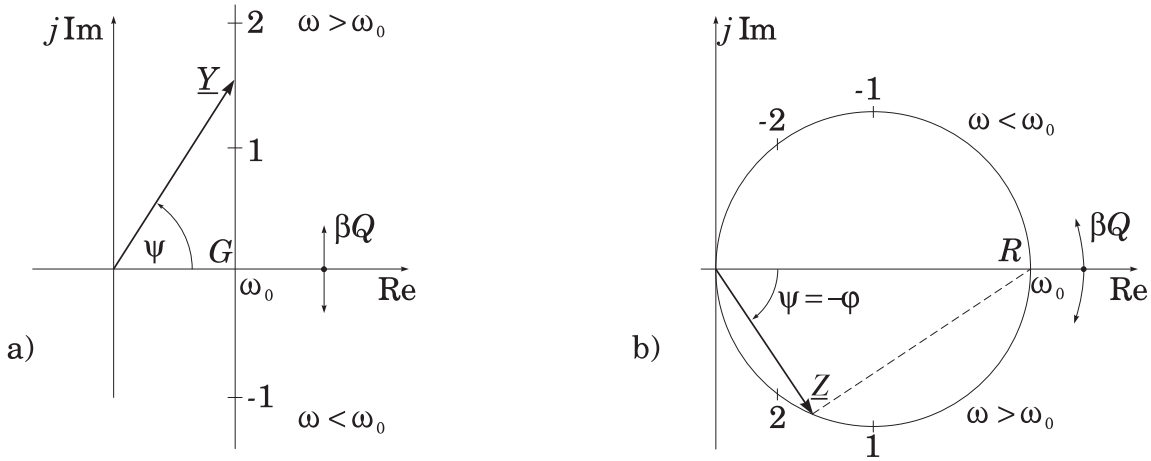
$$\underline{Y} = G(1 + j\beta Q) = G(1 + j\tan\psi) = G\sqrt{1 + \tan^2\psi}e^{j\psi}$$

Glede na simetrijski parameter βQ moremo admitanco $\underline{Y}$ predstaviti kot kazalec v kompleksni ravnini, ki "drsi" po navpični premici (ki gre skozi G na realni osi), pri tem pa βQ pomeni tangens argumenta kazalca; slika 67.5, skica a). Admitanci priredimo sedaj impedanco

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{e^{-j\psi}}{G\sqrt{1 + \tan^2\psi}} = R\cos\psi e^{-j\psi}\left(= Ze^{j\varphi}\right)$$

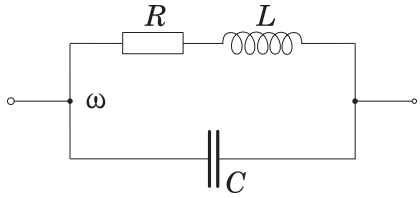
Iz primerjav dobimo: $\psi = -\varphi$ in $Z = R\cos\psi = R\cos\varphi$, kjer je φ že znan fazni kot med napetostjo in tokom (nihajnega kroga). Tu izrabimo geometrijsko možnost, da enačbo $Z = R\cos\varphi$ predstavimo z geometrijo včrtanega trikotnika (s hipotenuzo R) v krogu s premerom R; skica b). Če bo ta krog imel središče na realni osi in bo šel skozi izhodišče, bo kazalec $\underline{Z}$, ki bo "drsel" po obodu, ustrezal ravno impedanci vzporednega nihajnega kroga. ♣ Podobno geometrijsko interpretacijo kazalcev $\underline{Y}$ in $\underline{Z}$ naj za zaporedni nihajni krog opravi bralec sam. ♣ (Tudi pri vzporednem nihajnem krogu bi rekli, da je idealen, ko je $G = 0$.)

3) Splošno o resonanci. Pri teh dveh osnovnih nihajnih krogih smo videli, da vhodni tok (ali vhodna napetost) doseže maksimalno vrednost takrat, ko je imaginarni



Slika 67.5: Tirnica admitance in impedance vzporednega nihajnega kroga.

del impedance (ali admitance nič); $X(\omega_0) = 0$ (ali $B(\omega_0) = 0$). V splošnem, ko imamo na voljo neko poljubno dvopolno (RLC) vezje, pa temu ni več tako. Že preprosto vzporedno vezje realne tuljave (z izgubno upornostjo) in kondenzatorja je takšno; slika 67.6. Za



Slika 67.6: Vzporedni nihajni krog z izgubno tuljavo.

admitanco dobimo:

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

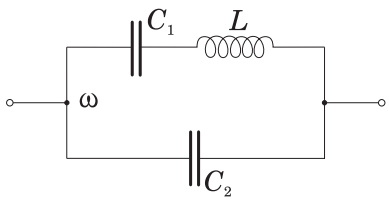
Ta je čisto realna pri frekvenci

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

Če pa bi iskali ekstrem absolutne vrednosti admitance (impedance), bi pa že naleteli na problem ničle polinoma pete stopnje. Frekvenca ω_0'', ki bi zaznamovala točko napetostne resonance, je analitično praktično nedosegljiva.

Kljub temu ima že frekvenca ω_0' določeno resonančno vsebino. Pri tej frekvenci je vezje navzven čisto ohmsko, znotraj vezja pa se medsebojno delno izmenjujeta električna in magnetna energija; podobno kot je to pri matematičnem nihalu, ko se potencialna energija delno pretvarja v kinetično – in obratno – parazitne izgube pretvarjanja pa pokriva zunanja sila, ki vzdržuje enakomerno nihanje.

Na koncu omenimo še vezja, ki imajo več resonančnih frekvenc. Zaradi preprostosti vzemimo enostavno (LC) vezje dveh kondenzatorjev in tuljave; slika 67.7.



Slika 67.7: Vezje s paralelno in serijsko resonančno frekvenco.

Zapišimo admitanco:

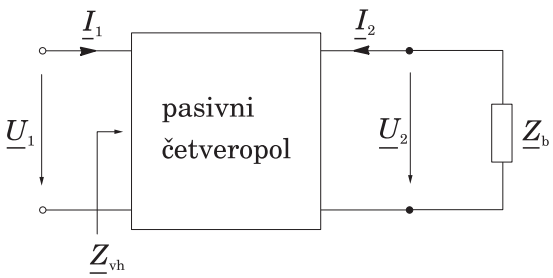
$$\underline{Y} = j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C_1}} = j\left(\omega C_2 + \frac{\omega C_1}{1-\omega^2 LC_1}\right)$$

V primeru brezizgubnih (LC) vezij je impedanca (admitanca) čisto imaginarna; matematično se kaže kot (ulomljena) racionalna funkcija frekvence,

$$\mathrm{Im}[\underline{Y}] = B(\omega) = \omega C_2 + \frac{\omega C_1}{1-\omega^2 LC_1}$$

Ničle funkcije $B(\omega)$ ustrezajo frekvencam paralelne (napetostne) resonance, poli pa frekvencam serijske (tokovne) resonance. Ni težko ugotoviti, da je pol funkcije pri $\omega_1 = (LC_1)^{-1/2}$, ničla pa pri $\omega_2 = \sqrt{(C_1+C_2)/LC_1C_2}$; $\omega_3 = 0$ ni zanimiva.

Transformacija impedance (admitance). Vprašanje transformacije impedance je aktualno predvsem pri četveropolih, ko ta bremensko impedanco z izhodne strani "preslika" (transformira) v splošnem v neko drugo impedanco, ki jo "čuti" vir na vhodni strani; slika 67.8. V razdelku 39 smo o tem že govorili. Če "prenesemo" tisto transformacijo v



Slika 67.8: Transformacija impedance $\underline{Z}_b$ na vhod.

kompleksno ravnino, dobimo:

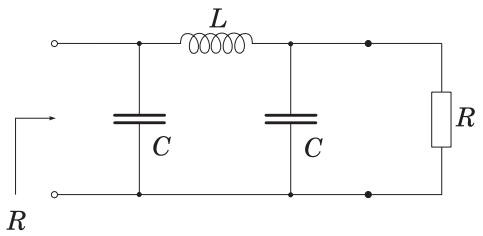
$$\underline{Z}_{vh} = \frac{\underline{a}\,\underline{Z}_b + \underline{b}}{\underline{c}\,\underline{Z}_b + \underline{d}}$$

Takšna preslikava ($\underline{Z}_b \to \underline{Z}_{vh}$) je v matematiki poznana kot ulomljena bilinearna transformacija; je pa zanjo nasploh značilno, da desno polravnino ($\mathrm{Re}[\underline{Z}_b] > 0$) preslika v notranjost kroga, ki leži desno od imaginarne osi[1].

[1]Več o tem bo bralec lahko slišal pri matematiki v okviru kompleksnih funkcij in pri teoriji električnih vezij.

Zgled 67.2

Vprašajmo se po upornosti R, ki jo simetričen Π-četveropol preslika vase; slika 67.9. Zapišimo potreben pogoj:



Slika 67.9: Transformacija upornosti R vase s Π-četveropolom.

$$\frac{1}{R} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L + \dfrac{1}{1/R + j\omega C}}$$

Po ureditvi dobimo

$$\frac{R + j(\omega C R^2(1-\omega^2 LC) - \omega L)}{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2} + j\omega C = \frac{1}{R}$$

ali

$$\frac{R^2}{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2} = 1 \qquad \frac{\dfrac{L}{C} - R^2(1-\omega^2 LC)}{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2} = 1$$

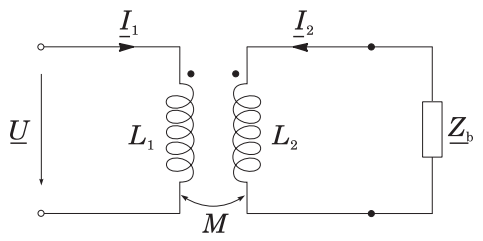
Že iz prve enačbe dobimo iskano upornost

$$R = \frac{\sqrt{\dfrac{L}{C}}}{\sqrt{2-\omega^2 LC}}$$

pri tem pa mora biti $\omega^2 < 2/LC$.

Zgled 67.3

Tipična je tudi transformacija impedance $\underline{Z}_\mathrm{b}$ preko magnetnega sklopa (četveropola); slika 67.10. Zapišemo napetostni enačbi na vhodni in izhodni strani:



Slika 67.10: Transformacija impedance preko magnetnega sklopa.

$$\begin{aligned} -\underline{U} + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 &= 0 \\ j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_\mathrm{b} \underline{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

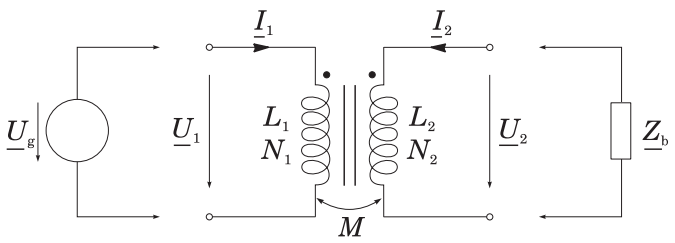
Iz druge izrazimo $\underline{I}_2$ in ga vstavimo v prvo; vhodna impedanca je tu takale:

$$\underline{Z}_{\mathrm{vh}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + \underline{Z}_{\mathrm{b}}}$$

Prvi del je impedanca primarne zanke (kot da druge ni), drugi del pa je transformacija impedance $(\underline{Z}_{\mathrm{b}} + j\omega L_2)$ sekundarnega tokokroga "preko $(\omega M)^2$" na primarno stran. ♣ Bralec naj pokaže, da je $\underline{Z}_{\mathrm{vh}} \doteq (L_1/L_2)\underline{Z}_{\mathrm{b}}$, ko je $\omega L_1, \omega L_2 \gg Z_{\mathrm{b}}$ in je sklop popoln ($k = 1$). ♣

Brezizgubni in popolno sklopljeni transformator. Transformator nasploh tvorita dve navitji na skupnem feromagnetnem jedru, ki ju čvrsto magnetno poveže. Tu bomo modelno vezje transformatorja poenostavili do te mere, da bomo ohmske upornosti (R) navitij zanemarili glede na induktivne (ωL) in da bomo feromagnetno jedro razumeli kot idealno magnetno povezavo (med navitjema), ki nima notranjih toplotnih izgub. Takšen model močno poenostavi analizo transformatorja, zaključki, ki jih dobimo iz tega, pa nikakor niso daleč od resnice.

Naj ima prvo (primarno) navitje N_1, drugo (sekundarno) pa N_2 ovojev. Induktivnosti navitij sta: $L_1 = N_1^2/\mathcal{R}$, $L_2 = N_2^2/\mathcal{R}$, medsebojna induktivnost M pa je $N_1N_2/\mathcal{R}$, oz. $L_1L_2 = M^2$; pri tem je $\mathcal{R}$ magnetna upornost feromagnetnega jedra, ki gre v idealiziranem primeru proti nič; slika 67.11. Napetostni enačbi za dve sklopljeni navitji smo že večkrat



Slika 67.11: Transformator; generator na vhodu in breme na izhodu.

zapisali:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2 \qquad \underline{U}_2 = j\omega M\underline{I}_1 + j\omega L_2\underline{I}_2$$

Za analizo sklopa je prikladnejša verižna izražava; izrazimo vhodni količini z izhodnima! Iz druge izrazimo vhodni tok,

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M}\underline{I}_2$$

in to zanesemo še v prvo,

$$\underline{U}_1 = \frac{L_1}{M}\underline{U}_2 + j\omega\left(M - \frac{L_1L_2}{M}\right)\underline{I}_2$$

Upoštevamo popoln sklop ($M^2 = L_1L_2$) in induktivnosti izrazimo z N_1, N_2 in $\mathcal{R}$; dobimo:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{N_1}{N_2} & 0 \\ \dfrac{\mathcal{R}}{j\omega N_1N_2} & \dfrac{N_2}{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ (-\underline{I}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{c} & \underline{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ (-\underline{I}_2) \end{bmatrix}$$

1) Napetostna prestava. Iz prve enačbe je razvidno, da sta napetosti na navitjih (med paroma sponk) v stalnem razmerju $N_1/N_2 = n$, ne glede na to, kolikšen je sekundarni tok $\underline{I}_2$,

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

2) Magnetilni tok. Če so na sekundarni strani sponke odprte ($\underline{I}_2 = 0$), teče na primarni strani tok

$$\underline{I}_{1\mathrm{m}} = \frac{\mathcal{R}}{j\omega N_1 N_2}\underline{U}_2 = \frac{\mathcal{R}}{j\omega N_1^2}\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1}$$

ki ga imenujemo magnetilni tok. Za transformator rečemo, da je v "praznem teku".

3) Ravnotežni tok. Če je sekundarna stran obremenjena z bremensko impedanco $\underline{Z}_\mathrm{b}$, teče skozi njo tok $(-\underline{I}_2) = \underline{I}_\mathrm{b} = \underline{U}_2/\underline{Z}_\mathrm{b}$. Ta izzove na primarni strani dodaten (ravnotežni) tok

$$\underline{I}_{1\mathrm{r}} = -\frac{N_2}{N_1}\underline{I}_2 \qquad\qquad \underline{I} = \underline{I}_{1\mathrm{m}} + \underline{I}_{1\mathrm{r}}$$

Če je $Z_\mathrm{b} \ll \omega M$ (kar pri transformatorju praviloma mora biti), je $I_{1\mathrm{m}} \ll I_{1\mathrm{r}}$.

4) Tokovna prestava. Pri zgornjem pogoju je

$$\underline{I}_1 \simeq \underline{I}_{1\mathrm{r}} = -\frac{N_2}{N_1}\underline{I}_2 = -\frac{1}{n}\underline{I}_2$$

Razmerje $1/n$ ustreza tokovni prestavi.

5) Magnetna napetost na feromagnetnem jedru. Jedro magnetita oba toka; $\underline{I}_1$ in $\underline{I}_2$. Magnetna napetost $\underline{\Theta}$ je vsota,

$$\underline{\Theta} = N_1\underline{I}_1 + N_2\underline{I}_2 = N_1\underline{I}_{1\mathrm{m}} + \underbrace{N_1\underline{I}_{1\mathrm{r}} + N_2\underline{I}_2}_{0} = N_1\underline{I}_{1\mathrm{m}}$$

Magnetna napetost, ki povzroča magnetni fluks v jedru, je neodvisna od bremenskega toka in je enaka magnetni napetosti v praznem teku. Magnetni napetosti $N_1\underline{I}_{1\mathrm{r}}$ in $N_2\underline{I}_2$ sta v ravnotežju; zato toku $\underline{I}_{1\mathrm{r}}$, kot reakcijskem na tok $\underline{I}_2$, tudi rečemo ravnotežni tok.

6) Transformacija moči. Kompleksor moči $\underline{S}_1$ na vhodu pišimo takole:

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{2}\underline{U}_1\,\underline{I}_1^* = \frac{1}{2}\underline{U}_1(\underline{I}_{1\mathrm{m}}^* + \underline{I}_{1\mathrm{r}}^*) = \frac{1}{2}\underline{U}_1\,\underline{I}_{1\mathrm{m}}^* + \frac{1}{2}\underline{U}_2(-\underline{I}_2)^*$$

ali

$$\underline{S}_1 = \underline{S}_{1\mathrm{m}} + \underline{S}_2$$

Kompleksor moči na vhodu je za jalovo moč magnetenja ($\underline{S}_{1\mathrm{m}}$) "večji" od kompleksorja moči na bremenu. Glede na to, da je magnetilni tok običajno zanemarljivo majhen glede na ravnotežni tok, moremo pisati: $\underline{S}_1 \simeq \underline{S}_2$.

7) Transformacija impedance. Impedanca, ki jo generator čuti na vhodni strani, je

$$\underline{Z}_\mathrm{vh} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{a}\,\underline{Z}_\mathrm{b} + \underline{b}}{\underline{c}\,\underline{Z}_\mathrm{b} + \underline{d}} = \frac{n\underline{Z}_\mathrm{b}}{\dfrac{\mathcal{R}}{j\omega N_1 N_2}\underline{Z}_\mathrm{b} + \dfrac{1}{n}}$$

Pri pogoju $Z_\mathrm{b} \ll \omega L_1$, ωL_2 je

$$\underline{Z}_\mathrm{vh} \simeq n^2 \underline{Z}_\mathrm{b} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \underline{Z}_\mathrm{b}$$

8) Idealni, brezizgubni, popolno sklopljeni transformator. O idealnem transformatorju govorimo takrat, ko je magnetno jedro idealno – kot da je njegova permeabilnost "neskončna" ($\mu_\mathrm{r} \to \infty$); v tem primeru gredo induktivnosti (L_1, L_2, M) formalno proti "neskončnosti". Pri tem privzetku je verižna matrika kar najbolj preprosta,

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ (-\underline{I}_2) \end{bmatrix}$$

Magnetilni tok je "nič"; ravnotežni tok je hkrati tudi primarni tok ($\underline{I}_\mathrm{1r} = \underline{I}_1 = -n^{-1}\underline{I}_2$); transformacija moči je idealna ($\underline{S}_1 = \underline{S}_2$); prav tako tudi transformacija impedance ($\underline{Z}_\mathrm{vh} = n^2 \underline{Z}_\mathrm{b}$).

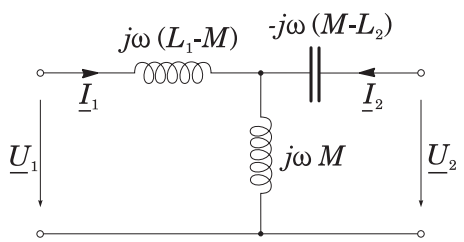
9) Nadomestni T-četveropol transformatorja. Po analogiji stvari iz razdelka 39 je impedančna izražava četveropolnih enačb tega četveropola naslednja:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_3 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Ko to primerjamo z izhodiščnima napetostnima enačbama transformatorja, dobimo:

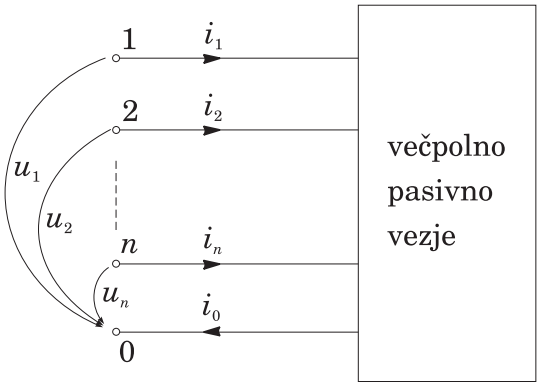
$$\underline{Z}_1 = j\omega(L_1 - M) \qquad \underline{Z}_2 = j\omega(L_2 - M) \qquad \underline{Z}_3 = j\omega M$$

Pri popolnem sklopu je M geometrijska sredina med L_1 in L_2, kar pomeni, da je ena od prvih dveh impedanc induktivnega, druga pa kapacitivnega karakterja. Bodi $L_1 > L_2$; nadomestno vezje bi bilo takšno, kot to kaže slika 67.12. Tuljavi v vezju sta pri tem



Slika 67.12: Nadomestno T-vezje brezizgubnega transformatorja z $N_1 > N_2$.

magnetno nepovezani, vezje pa navzven izkazuje enake lastnosti kot smo jih predhodno izpostavili (napetostna in tokovna prestava, transformacija moči in impedance,...), pa tudi izhod je galvansko (s kondenzatorjem) ločen od vhodne strani. ♣ Bralec naj podobno analizo opravi še za brezizgubni avtotransformator (s slike 66.3). Ugotovi naj tudi njemu nadomestno konfiguracijo klasičnega transformatorja (z ločenima navitjema). ♣



Slika 68.1: Večpolno vezje

68. Trifazni sistem napetosti

Osnove večfaznih sistemov. Kot večfazni sistem napetosti razumemo sistem koherentnih harmoničnih napetostnih virov, s katerimi vzbujamo kako večpolno pasivno vezje, slika 68.1. Na vhodu je običajno poznan sistem *faznih napetosti* $u_1, u_2, .., u_n$ med t.i. faznimi vodi (fazami) in povratnim (referenčnim, ničelnim) vodom. Toki $i_1, i_2, ..., i_n$ so *fazni toki*, tok i_0 pa je povratni ali *ničelni tok*. Po I. Kirchhoffovem zakonu mora biti algebrska vsota vseh tokov enaka nič; torej: $i_1 + i_2 + \cdots + i_n - i_0 = 0$ oz.

$$i_0 = \sum_{k=1}^{n} i_k$$

Levo od sponk si moremo večfazni sistem predstaviti z n napetostnimi viri, ki imajo eno sponko vezano na sponko povratnega voda (0), drugo pa na ustrezne sponke $(1, 2, ..., n)$ faznih dovodov; pravimo tudi, da so viri v spodnji sponki vezani v zvezdo. Tako dobljeno vezje se okvirno v ničemer ne razlikuje od vezij, ki smo jim posvečali pozornost do sedaj; razlika je le v določenem poimenovanju dovodov (faze) in ločitvi na porabniški in generatorski del vezja. Glede na to, da so viri koherentni, moremo napetostim prirediti kazalce $\underline{U}_1, \underline{U}_2, ..., \underline{U}_n$ v kompleksni ravnini; in prav tako tudi tokom kompleksorje $\underline{I}_0, \underline{I}_1, ..., \underline{I}_n$. Če so elementi pasivnega vezja znani, rešimo celotno vezje z metodo, ki se nam pri dani konfiguraciji zdi najprimernejša. Nadalje lahko določimo kompleksorje moči po posameznih fazah in sicer:

$$\underline{S}_k = \frac{1}{2}\underline{U}_k\,\underline{I}_k^*$$

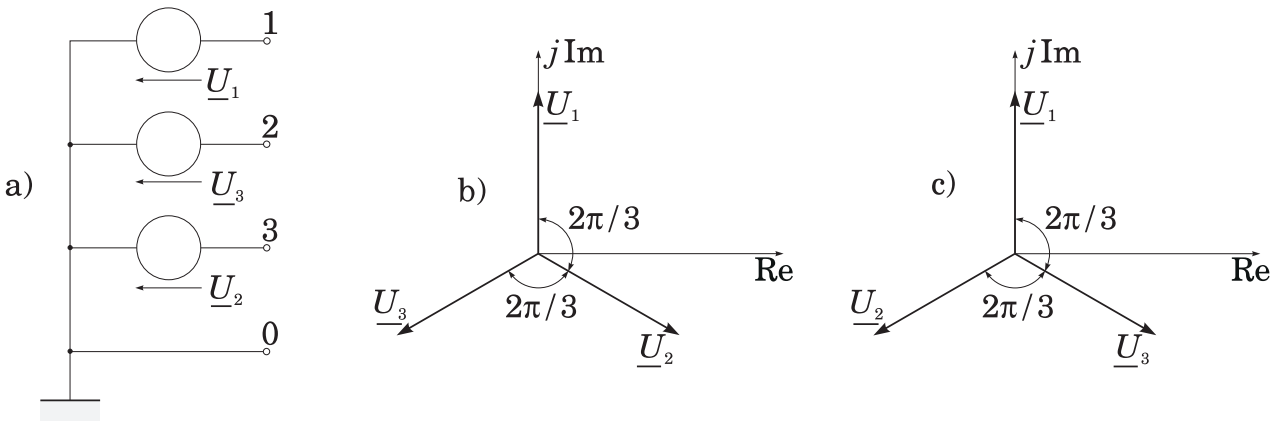
Včasih je zanimiva tudi trenutna moč, ki jo sistem generatorjev daje v pasivno vezje; dobimo jo z algebrsko vsoto produktov ui po posameznih fazah

$$p(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) i_k(t)$$

Simetrični trifazni sistem. V energetiki, in v prenosu električne energije nasploh, je že od Tesle dalje uveljavljen trifazni sistem napetosti. Ta sistem ima vrsto prednosti, tako glede na enofazni izmenični prenos kot na enosmerni prenos električne energije. Nekaj

prednosti trifaznega sistema le naštejmo: omogoča izvedbo vrtilnega polja (asinhronski motor), trifazni daljnovod (tri vrvi) zmore na določenem napetostnem nivoju prenašati trikrat večjo moč kot enofazni (dve vrvi), konstantna moč prenašane energije, ekonomična izraba prostora pri električnih strojih.

Simetrični trifazni sistem napetosti predstavljajo trije enaki izmenični napetostni generatorji, ki imajo amplitude napetosti enake, fazno pa so napetosti zamaknjene za $2\pi/3$. Nadalje ločimo še sistem pozitivnega in sistem negativnega faznega zaporedja; slika 68.2. Pozitivni in negativni sistem se razlikujeta v faznem zaporedju; pri pozitivnem sledi



Slika 68.2: Sistem trifaznega generatorja in predstavitev kazalcev faznih napetosti v kompleksni ravnini.

vrhu harmonične napetosti prve faze vrh druge in nato tretje fazne napetosti, torej $1, 2, 3, (1, 2, 3), ...$, skica b), pri negativnem sistemu pa je fazno zaporedje obratno, torej $1, 3, 2, (1, 3, 2), ...$, skica c). (Kasneje bomo spoznali še sistem ničnega faznega zaporedja, kjer so vse tri napetosti sofazne.) Oba sistema napetosti smo upodobili s kazalci v kompleksni ravnini. Kazalec ene (prve) fazne napetosti smo postavili v imaginarno os; mogli pa bi ga(jih) postaviti (zavrteti) tudi kako drugače, vendar to na amplitudno-fazne razmere sistema napetosti (kot celote) ne vpliva. Skupno zvezdišče generatorjev je na generatorski strani praviloma ozemljeno, ozemljena pa so tudi zvezdišča navitij trifaznega transformatorja v posameznih transformatorskih postajah – v prenosu električne energije. Trifazni generator je običajno izveden v enem stroju (v sinhronskem generatorju), ki ima tri enaka navitja na statorju, katera so po obodu premaknjena za 120° in v katerih se inducirajo napetosti trifaznega sistema, ki so si fazno premaknjene za $2\pi/3$. V takšnem primeru je simetrija napetosti zagotovljena že čisto mehansko. Če daje trifazni sinhronski generator pri določeni smeri vrtenja rotorja (katerega vzbujalno navitje magneti stroj) pozitivni sistem napetosti, potem daje stroj pri obratni smeri vrtenja negativni sistem napetosti.

Prireditev kompleksorjev k efektivnim vrednostim harmoničnih količin. Do sedaj smo kompleksor toka ($\underline{I}$) ali kompleksor napetosti ($\underline{U}$) imeli prikrojen amplitudi in fazi v časovnem prostoru. V energetiki nasploh pa so uveljavljeni kazalci toka in napetosti, ki so prirejeni na efektivno vrednost harmonične količine in njeno fazo; $\underline{I}_{\mathrm{ef}}$, $\underline{U}_{\mathrm{ef}}$. Ker pa je relacija med amplitudo in efektivno vrednostjo harmonične količine (po enačbi 60.5)

število $\sqrt{2}$, bosta stare in nove kazalce povezovali enačbi

$$\underline{I}_{\mathrm{ef}} = \frac{\underline{I}}{\sqrt{2}} \qquad \underline{U}_{\mathrm{ef}} = \frac{\underline{U}}{\sqrt{2}}$$

S to spremembo ostajata oba Kirchhoffova zakona nepremenjena; glasita se pač na efektivne kazalce napetosti in tokov. Impedanca pasivnega elementa je določena s kvocientom

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{ef}}}{\underline{I}_{\mathrm{ef}}}$$

zato na zamenjavo kompleksorjev ni občutljiva. Izjema je le kompleksor moči

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{U}_{\mathrm{ef}}\,\underline{I}^*_{\mathrm{ef}}$$

pri katerem "polovička (1/2)" izostane.

Iz povedanega je razvidno, da bo analiza harmonično vzbujanega vezja z efektivnimi kazalci tokov in napetosti v kompleksni ravnini povsem identična, razloček bo le pri kompleksorju moči. Zaradi preglednosti pisanja enačb se dogovorimo, da bomo pripis "ef" opuščali, ob tem pa bomo imeli v mislih prav efektivne kazalce; tabela 68.1. Nizkona-

	$\underline{U}$ in $\underline{I}$ prirejena amplitudam	$\underline{U}$ in $\underline{I}$ prirejena efektivnim vrednostim
napetost	$\underline{U}$	$\underline{U}$
tok	$\underline{I}$	$\underline{I}$
impedanca	$\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$	$\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$
moč	$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*/2$	$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*$

Tabela 68.1: Dogovor glede označevanja in relacije pri kazalcih, ki pripadajo amplitudam oz. efektivnim vrednostim harmoničnih količin.

petostna (omrežna) efektivna fazna napetost je 220 V, kar pomeni, da je amplituda te napetosti $220\sqrt{2} = 311$ V, trenutna vrednost te napetosti pa ima pri frekvenci 50 Hz obliko: $u(t) = 311\cos(100\pi t + \varphi_u)$.

Medfazne napetosti. Določene so kot napetosti med posameznimi fazami. Medfazna napetost med fazama i in j je

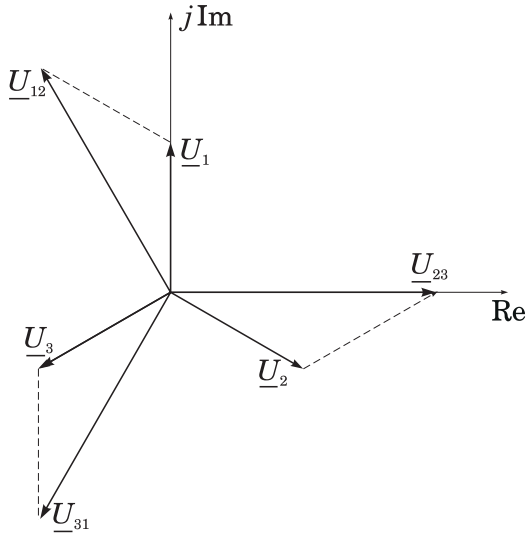
$$\underline{U}_{ij} = \underline{U}_i - \underline{U}_j$$

Napetost $\underline{U}_{ji}$ je potem $-\underline{U}_{ij}$.

Vzemimo simetričen trifazni sistem napetosti kot ga kaže skica b) na sliki 68.2. Fazne napetosti $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ in $\underline{U}_3$ bi kot kompleksorje zapisali takole:

$$\underline{U}_1 = U_{\mathrm{f}}e^{j\pi/2} \qquad \underline{U}_2 = U_{\mathrm{f}}e^{-j\pi/6} \qquad \underline{U}_3 = U_{\mathrm{f}}e^{-j5\pi/6}$$

kjer je U_{f} efektivna fazna napetost; slika 68.3. Razliko $\underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \underline{U}_{12}$ moremo v kazalčnem diagramu predstaviti kot vsoto kazalcev $\underline{U}_1$ in $(-\underline{U}_2)$. Kazalca tvorita kraka enakostraničnega trikotnika z vmesnim kotom 120°. Osnovnica takšnega trikotnika je $\sqrt{3}$-krat večja. Za medfazne napetosti dobimo po vrsti:

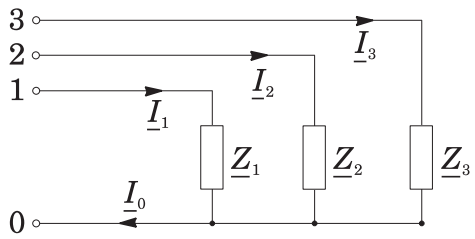


Slika 68.3: Fazne in medfazne napetosti v kazalčnem diagramu.

$$\underline{U}_{12} = U_\mathrm{m} e^{j2\pi/3} \qquad \underline{U}_{23} = U_\mathrm{m} e^{j0} \qquad \underline{U}_{31} = U_\mathrm{m} e^{-j2\pi/3}$$

kjer je $U_\mathrm{m} = \sqrt{3} U_\mathrm{f}$. Pri $U_\mathrm{f} = 220$ V, je $U_\mathrm{m} = 220\sqrt{3} = 380$ V. Iz kazalčnega diagrama je razvidno, da so kazalci medfaznih napetosti enakih dolžin, fazno pa so med seboj spet premaknjeni za 120°.

Trifazno breme v zvezda vezavi. Ta način odjema energije iz električnega omrežja je najpogostejši. Tipično zanj je, da so (različna) bremena priključena na posamezne fazne napetosti; slika 68.4. Pri tej vezavi so posamezni fazni toki povsem neodvisno določeni že



Slika 68.4: Breme v zvezda stiku.

s faznimi napetostmi in impedancami v posameznih fazah,

$$\underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}_i} = \underline{Y}_i \, \underline{U}_i \qquad\qquad i = 1, 2, 3$$

Tok povratnega vodnika je vsota faznih tokov,

$$\underline{I}_0 = \sum_{i=1}^{3} \underline{Y}_i \, \underline{U}_i$$

V primeru, da je breme simetrično, $\underline{Y}_i = \underline{Y}$, je povratni tok nič, saj je vsota kazalcev (pozitivnega ali negativnega) sistema simetričnih napetosti enaka nič.

Pri tej vezavi je zanimiv še primer, ki nastane, ko "pride" do prekinitve povratnega vodnika. Takrat namreč pridobi zvezdišče bremen določen potencial proti zemlji. Med zvezdiščem bremen in ničlo na generatorski strani imamo tri sorodne si veje z napetostmi ($\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ in $\underline{U}_3$) generatorjev in impedancami $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ in $\underline{Z}_3$. Po metodi spojiščnih potencialov dobimo za $\underline{V}_{\text{zvezdišča}}$ enačbo

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \underline{Y}_i\right) \underline{V}_{\text{zvezdišča}} = \sum_{i=1}^{3} \underline{Y}_i \, \underline{U}_i$$

Od tu je

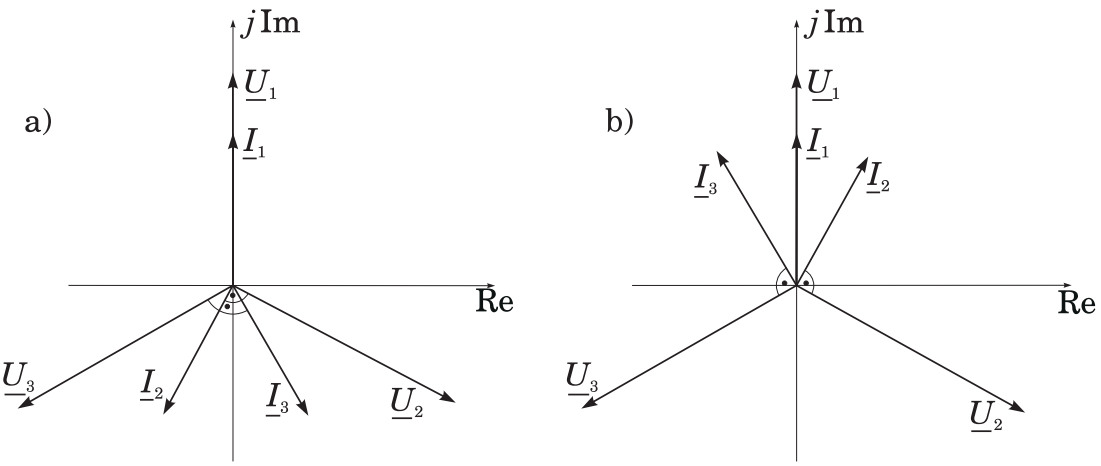
$$\underline{V}_{\text{zvezdišča}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \underline{Y}_i \, \underline{U}_i}{\sum_{i=1}^{3} \underline{Y}_i}$$

Pri simetričnem bremenu je potencial zvezdišča očitno enak nič.

Zgled 68.1

Vzemimo pozitiven sistem faznih napetosti in nesimetrično breme z impedancami R, jX_L, $-jX_C$ v posameznih fazah; za impedance naj velja: $R = X_L = X_C$; opraviti imamo s čisto ohmskim, čisto induktivnim in čisto kapacitivnim bremenom. V prvem (a) primeru vzemimo, da je $\underline{Z}_1 = R$, $\underline{Z}_2 = jX_L = jR$ in $\underline{Z}_3 = -jX_C = -jR$, v drugem (b) primeru pa, da je $\underline{Z}_1 = R$, $\underline{Z}_2 = -jX_C = -jR$ in $\underline{Z}_3 = jX_L = jR$. Zaradi absolutno enakih impedanc bodo absolutne vrednosti tokov v fazah enake.

Razmere moremo predstaviti kar v kazalčnem diagramu; slika 68.5. Na njih smo



Slika 68.5: Kazalčna diagrama tokov in napetosti.

upoštevali sofaznost, oz. prehitevanje, oz. zaostajanje tokov na posameznih čistih bremenih. Vsota faznih tokov je tok ničlovoda. V prvem primeru je $\underline{I}_0 = (1 - \sqrt{3})\underline{I}_1 = (1 - \sqrt{3})\underline{U}_1/R$, v drugema pa je $\underline{I}_0 = (1 + \sqrt{3})\underline{I}_1 = (1 + \sqrt{3})\underline{U}_1/R$. Tok v ničlovodu se pri obrnjeni vezavi spremeni. V naših primerih je razmerje med absolutnima tokoma v ničlovodih enako $(\sqrt{3} - 1)/(\sqrt{3} + 1) = 0.268$.

♣ Bralec naj podobne kazalčne diagrame napravi še za negativno fazno zaporedje pri različnih kombinacijah $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ in $\underline{Z}_3$. ♣

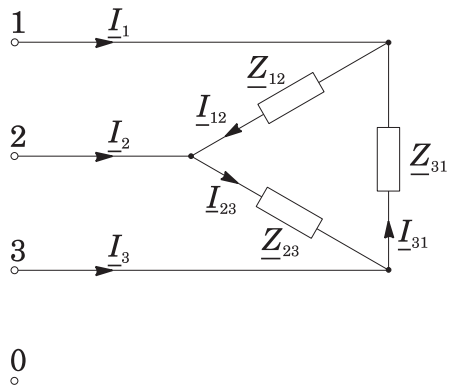
Ob tem zgledu si zapomnimo: če je trifazno breme nesimetrično, potem je absolutna vrednost toka ničlovoda odvisna od sosledja impedanc glede na sosledje faznih napetosti.

Za konec izračunajmo še potencial zvezdišča (ko je ničlovod prekinjen) za sosledje impedanc iz obeh prejšnjih primerov,

$$\begin{aligned} \text{1. primer} &: \; V_{\text{zvezdišča}} = (1-\sqrt{3})\underline{U}_1 = -0.732\ \underline{U}_1 \\ \text{2. primer} &: \; V_{\text{zvezdišča}} = (1+\sqrt{3})\underline{U}_1 = 2.732\ \underline{U}_1 \end{aligned}$$

Pri efektivni fazni napetosti 220 V je v prvem primeru efektivni potencial 161 V, v drugem primeru pa je ta 601 V.

Trifazno breme v vezavi trikot. V trikotno vezavo se običajno vežejo simetrična bremena – kot na primer trifazni motor (s svojim simetričnim trifaznim navitjem po obodu statorja). V takšnem stiku breme ni povezano z ničlovodom; slika 68.6. Toki skozi



Slika 68.6: Trifazno breme v vezavi trikot.

posamezne impedance so določeni z medfaznimi napetostmi,

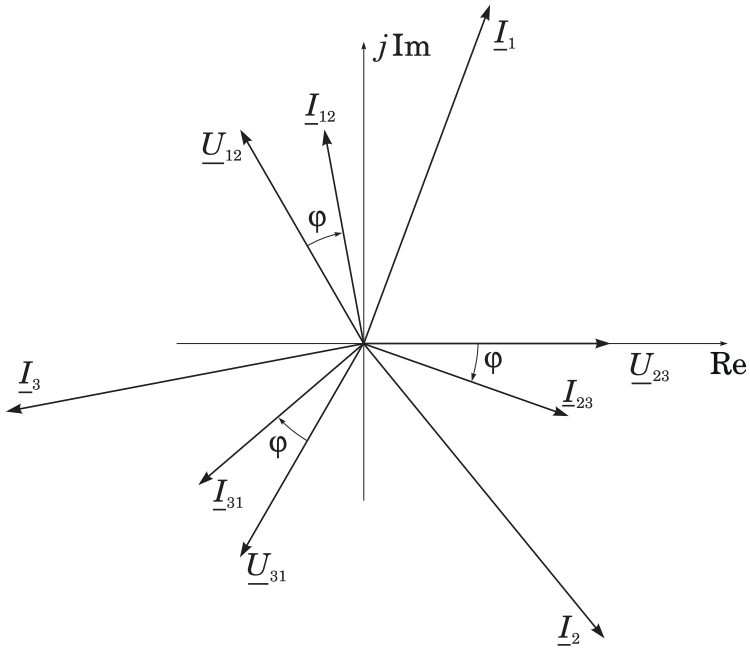
$$\underline{I}_{ij} = \frac{\underline{U}_{ij}}{\underline{Z}_{ij}}$$

medtem ko so fazni toki njihove razlike:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

Če je trifazno breme simetrično, $\underline{Z}_{ij} = \underline{Z} = Ze^{j\varphi}$, bodo kompleksorji bremenskih tokov tvorili simetrično sliko kazalcev, ki bodo glede na medfazne napetosti premaknjeni za fazni kot φ; slika 68.7. Nadalje dobimo grafično še fazne toke kot razlike bremenskih tokov; ti so po iznosu za $\sqrt{3}$-krat večji od bremenskih.

Zvezda-trikot preklop. Vzemimo, da je trifazno simetrično breme $(3 \times \underline{Z})$ najprej v zvezda stiku (lahko brez ničlovoda), nato pa ga prevežemo v trikot vezavo (zvezda-trikot stikalo).



Slika 68.7: Kazalčni diagram simetričnega bremena v trikotu.

V zvezda vezavi so efektivne vrednosti faznih tokov enake U_f/Z, kompleksor moči takšnega bremena pa je $3(U_\mathrm{f}^2/Z)e^{j\varphi}$. V vezavi trikot so efektivne vrednosti bremenskih tokov enake $U_\mathrm{m}/Z = \sqrt{3}U_\mathrm{f}/Z$, efektivne vrednosti faznih tokov so $\sqrt{3}U_\mathrm{m}/Z = 3U_\mathrm{f}/Z$, kompleksor moči v novi vezavi pa je $3(U_\mathrm{m}^2/Z)e^{j\varphi} = 9(U_\mathrm{f}^2/Z)e^{j\varphi}$; pri preklopu se trikrat povečajo tako fazni toki kot moč.

Nesimetrično breme v trikotni vezavi. V okviru tega si bomo ogledali praktično zanimiv zgled priključitve močnega enofaznega porabnika na simetrično trifazno omrežje. Tak tipičen porabnik je indukcijska peč za taljenje kovin (moči segajo do MW, faktor delovnosti ($\cos\varphi$) pa je reda 0.2). Če k takšnemu bremenu vzporedno vežemo primeren kondenzator (kompenzacija jalove energije, zgled 64.4), se to navzven "obnaša" kot čisto ohmsko breme. Seveda pa tega bremena (zaradi velike moči P) ne smemo priključiti le na eno fazo, ker bi to izzvalo nesimetrije v omrežju. V takšnem primeru si pomagamo s tole trikotno vezavo; slika 68.8. Ob tej nalogi se postavlja vprašanje, kolikšni naj sta impedanci $\underline{Z}_{12}$ in $\underline{Z}_{23}$, da bo trifazni vir simetrično obremenjen – enakomerno po vseh treh generatorjih. Zapišimo toka $\underline{I}_1$ in $\underline{I}_3$:

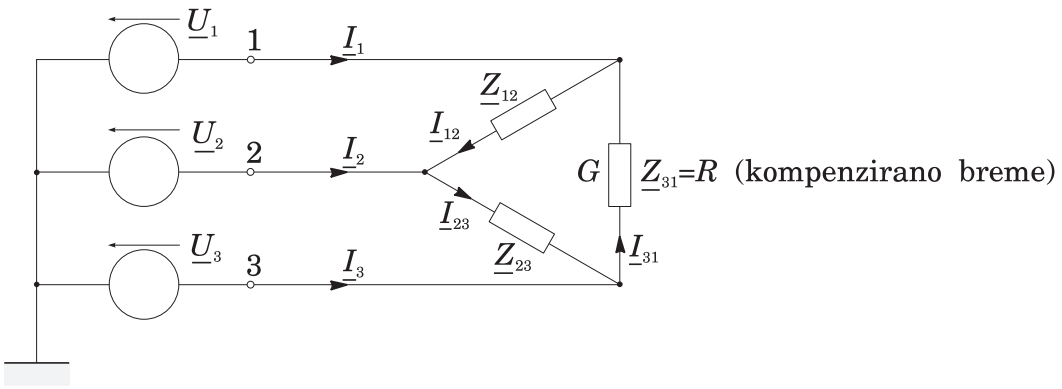
$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{12}\,\underline{U}_{12} - G(\underline{U}_3 - \underline{U}_1) = G\underline{U}_1 + (\underline{Y}_{12}\,\underline{U}_{12} - G\underline{U}_3)$$

$$\underline{I}_3 = G(\underline{U}_3 - \underline{U}_1) - \underline{Y}_{23}\,\underline{U}_{23} = G\underline{U}_3 - (G\underline{U}_1 + \underline{Y}_{23}\,\underline{U}_{23})$$

V slednjih dveh izražavah se že ponuja odgovor: če bosta okrogla oklepaja enaka nič, bo $\underline{I}_1 = G\underline{U}_1$, $\underline{I}_3 = G\underline{U}_3$ in s tem bo $\underline{I}_2 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 = G(-\underline{U}_1 - \underline{U}_3) = G\underline{U}_2$, kar pomeni, da bo trifazni generator obremenjen simetrično in čisto ohmsko.

Sklicujmo se na kazalčni diagram 68.3, pa dobimo:

$$\underline{Y}_{12}\,\underline{U}_{12} - G\underline{U}_3 = \underline{Y}_{12}\sqrt{3}U_\mathrm{f}e^{j4\pi/6} - GU_\mathrm{f}e^{j7\pi/6}$$

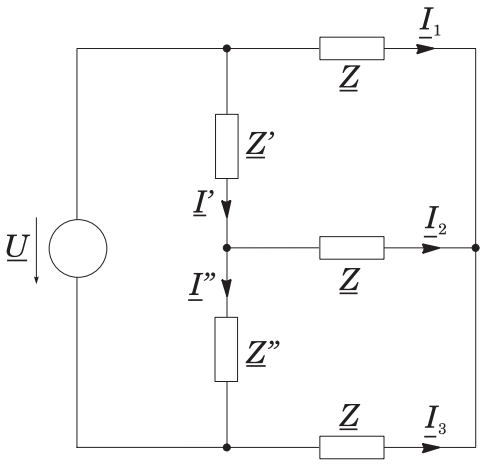


Slika 68.8: Stik enofaznega ohmskega bremena na simetrično trifazno omrežje.

$$G\underline{U}_1 + \underline{Y}_{23}\,\underline{U}_{23} = GU_\mathrm{f}e^{j3\pi/6} + \underline{Y}_{23}\sqrt{3}U_\mathrm{f}$$

Zgornja razlika bo nič, če bo $\sqrt{3}\underline{Y}_{12} = jG$, in spodnja bo nič, ko bo $\sqrt{3}\underline{Y}_{23} = -jG$. Element $\underline{Z}_{12}$ bo tako čisti kondenzator ($\underline{Z}_{12} = -j\sqrt{3}R$), element $\underline{Z}_{23}$ pa bo čista tuljava ($\underline{Z}_{23} = j\sqrt{3}R$). ♣ Bralec naj nariše kazalčni diagram vseh tokov in vseh napetosti ter tako preveri račun. ♣

V zvezi s tem je zanimivo tudi obratno vprašanje: kako priključiti trifazno simetrično breme (trifazni motor) na enofazni generator, da bodo toki skozi navitja motorja enaki in fazno premaknjeni med seboj za $2\pi/3$? Razrešitev te naloge omogoča naslednje vezje; slika 68.9.



Slika 68.9: Priključitev simetričnega trifaznega bremena ($3 \times \underline{Z}$) na enofazni vir.

Zahtevajmo, naj so toki $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ in $\underline{I}_3$ v pozitivnem faznem zaporedju; takrat zanje velja

$$\underline{I}_1 = \underline{a}\,\underline{I}_2 = \underline{a}^2\,\underline{I}_3 = \underline{a}^{-1}\,\underline{I}_3$$

kjer je $\underline{a}$ fazor $e^{j2\pi/3}$. Zapišimo tokovno enačbo v spojišču impedanc $\underline{Z}$, $\underline{Z}'$ in $\underline{Z}''$:

$$\underline{I}' = \underline{I}'' + \underline{I}_2$$

Če vanjo vključimo dve zančni enačbi:

$$\underline{Z}'\,\underline{I}' = (\underline{I}_1 - \underline{I}_2)\underline{Z} \qquad\qquad \underline{Z}''\,\underline{I}'' = (\underline{I}_2 - \underline{I}_3)\underline{Z}$$

dobimo zvezo

$$(\underline{I}_1 - \underline{I}_2)\underline{Y}'\,\underline{Z} = (\underline{I}_2 - \underline{I}_3)\underline{Y}''\,\underline{Z} + \underline{I}_2$$

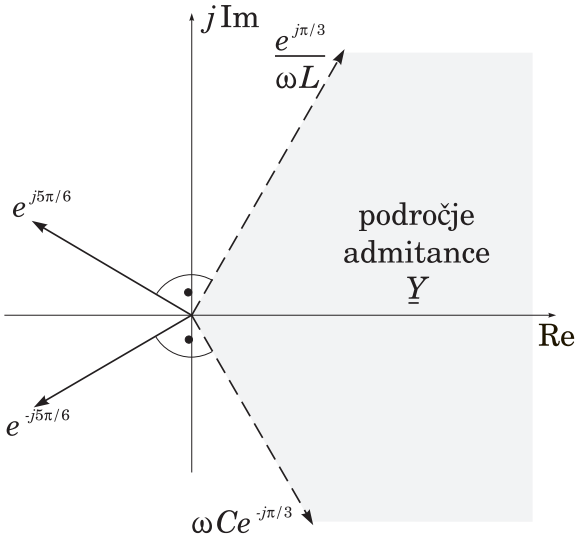
Ker pa toki med seboj korelirajo s fazorjem $\underline{a}$, sledi

$$(\underline{a} - 1)\underline{Y}' + (\underline{a}^{-1} - 1)\underline{Y}'' = \underline{Y}$$

ali tudi

$$\sqrt{3}\left(\underline{Y}'e^{j5\pi/6} + \underline{Y}''e^{-j5\pi/6}\right) = \underline{Y}$$

Slednja enačba povezuje vse tri admitance. Pri danem $\underline{Y}$ (oz. $\underline{Z}$) imamo za $\underline{Y}'$ in $\underline{Y}''$ določene odprte možnosti, vendar je smiselno, da sta ta dodatna elementa čisto reaktivna (tuljava in kondenzator). Ker pa je $\mathrm{Re}[\underline{Y}] > 0$, je edina izbira, da je impedanca $\underline{Z}'$ čisto induktivna ($\underline{Z}' = j\omega L$), $\underline{Z}''$ pa čisto kapacitivna ($\underline{Z}'' = 1/j\omega C$); slika 68.10. Pri tej izbiri



Slika 68.10: Kazalčna predstavitev zveze med $\underline{Y}'$, $\underline{Y}''$ in $\underline{Y}$.

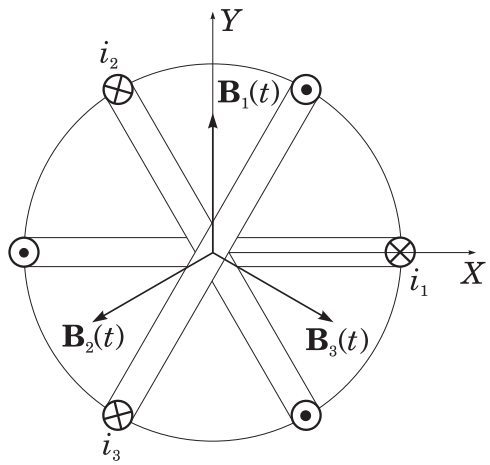
je področje admitance (impedance) ujeto med kota $\pm\pi/3$.

Trivialen je primer, ko je $\underline{Y}$ realen; $\underline{Y} = G = 1/R$. Takrat morata biti $\underline{Y}'$ in $\underline{Y}''$ po izrazu enaki $G/\sqrt{3}$ oz. $\omega L = 1/\omega C = \sqrt{3}R$. V nasprotnem je potrebno rešiti enačbo

$$\frac{\sqrt{3}}{\omega L}e^{j\pi/3} + \sqrt{3}\omega C e^{-j\pi/3} = G + jB$$

kjer sta G in B realni in imaginarni del admitance $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$.

Vrtilno magnetno polje. Kot simetrično trifazno breme smo že omenjali trifazni (asinhronski) motor. Na statorju takšnega motorja so navitja simetrično razporejena po obodu z zamikom 120°. Oglejmo si, kakšno magnetno polje povzročajo ta tri navitja v



Slika 68.11: Modelna slika treh navitij, ki so po obodu premaknjeni po 120°.

svojem centralnem delu, če skozi njih tečejo toki, ki so časovno premaknjeni za 120 "električnih stopinj". Kot računski model vzemimo tri zanke, točka računanja pa bodi njihova centralna točka; slika 68.11. V časovnem prostoru moremo omenjene tri toke zapisati kot:

$$\begin{aligned} i_1 &= I\cos\omega t \\ i_2 &= I\cos(\omega t - 2\pi/3) \\ i_3 &= I\cos(\omega t + 2\pi/3) \end{aligned}$$

Vsak od tokov povzroča v centralni točki sebi sofazno magnetno polje z amplitudo B_0. Posamezna polja se vektorsko seštevajo v skupno magnetno polje $\mathbf{B}$, ki ima komponenti B_x in B_y; zapišimo ju:

$$B_x = -B_0\cos(\omega t - 2\pi/3)\cos\pi/6 + B_0\cos(\omega t + 2\pi/3)\cos\pi/6$$

$$B_y = B_0\cos\omega t - B_0\cos(\omega t - 2\pi/3)\sin\pi/6 - B_0\cos(\omega t + 2\pi/3)\sin\pi/6$$

Po adicijskem teoremu je $\cos(\omega t \pm 2\pi/3) = \cos\omega t\cos 2\pi/3 \mp \sin\omega t\sin 2\pi/3$ in dobimo:

$$B_x = -\frac{3}{2}B_0\sin\omega t \qquad B_y = \frac{3}{2}B_0\cos\omega t$$

Rezultat je zanimiv; magnetno polje je v centru po iznosu konstantno in enako $3B_0/2$ ter se v (X, Y) ravnini vrti s kotno hitrostjo ω v pozitivni smeri. Takšnemu polju rečemo *vrtilno magnetno polje*. Če bi dva vzbujalna toka med seboj zamenjali, bi dobili vrtenje polja v nasprotni smeri. Rečemo tudi lahko: pozitivnemu faznemu zaporedju ustreza vrtenje polja v eno, negativnemu pa v obratno smer[1].

♣ Bralec naj pokaže, da se vrtilno polje doseže tudi z dvema navitjema, ki sta prostorsko premaknjeni za 90° in sta toka skozi njiju fazno premaknjena za $\pi/2$. ♣ Vrtilno polje srečamo tudi pri (XY) odklonskem sistemu osciloskopa, ko sta napetosti na odklonskih ploščah fazno premaknjeni za $\pi/2$. Električno polje $\mathbf{E}$ je konstantno po iznosu in se vrti – elektronski curek na zaslonu zarisuje krožnico.

[1]Bralcu je verjetno poznano, da je potrebno na trifaznem motorju zamenjati priključka dveh faz, če želimo smer vrtenja obrniti.

Celotna delovna moč na trifaznem bremenu. Če je breme simetrično, potem so toki v posameznih fazah fazno premaknjeni za enake kote glede na svoje napetosti. Trenutna moč $p(t)$ je takrat vsota,

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) + u_3(t)i_3(t)$$

ali tudi:

$$\begin{aligned} p(t) &= UI\cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi_i) \\ &+ UI\cos(\omega t - 2\pi/3 + \varphi_u)\cos(\omega t - 2\pi/3 + \varphi_i) \\ &+ UI\cos(\omega t + 2\pi/3 + \varphi_u)\cos(\omega t + 2\pi/3 + \varphi_i) \end{aligned}$$

Posamezni sumandi so podobni trenutnim močem v dvopolna vezja (razdelek 64). Razstavimo jih na enak način kot smo to storili takrat; dobimo:

$$\begin{aligned} p(t) &= 3\frac{UI}{2}\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \frac{UI}{2}\Big(\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \\ &+ \cos(2\omega t - 4\pi/3 + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(2\omega t + 4\pi/3 + \varphi_u + \varphi_i)\Big) \end{aligned}$$

Za harmonični del ni težko videti, da je enak nič; sledi

$$p(t) = \frac{3}{2}UI\cos\varphi = 3U_{\mathrm{ef}}I_{\mathrm{ef}}\cos\varphi$$

Očitno je, da doteka delovna energija v trifazno simetrično breme enakomerno – in ne pulzirajoče, kot pri enofaznem napajanju. Če je breme nesimetrično, potem trenutna moč te "lepe" lastnosti nima.

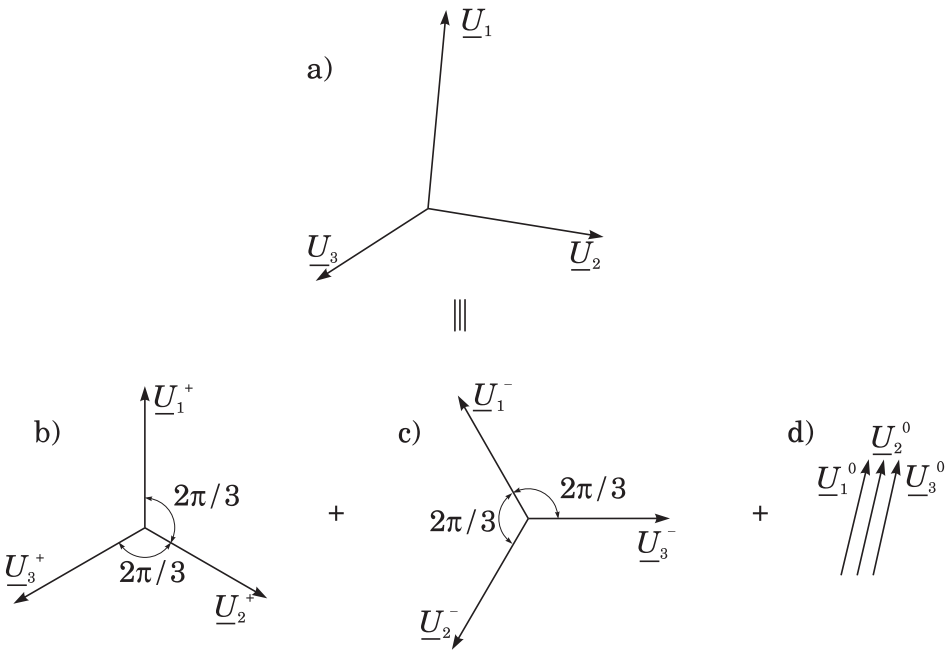
Nasploh pa delovno moč izmerimo s tremi wattmetri, katerih tokovne sponke vežemo v posamezne faze, napetostne pa na pripadajoče fazne napetosti. Izjema nastopi pri trifaznem bremenu brez ničlovoda. Takrat moremo enega od faznih vodnikov razumeti kot povratni vodnik; bodi to tretji. Trenutna moč je takrat:

$$p(t) = u_{13}(t)i_1(t) + u_{23}(t)i_2(t)$$

kjer sta u_{13} in u_{23} napetosti prve in druge faze do referenčnega vodnika (tretje faze). V takšnem primeru se delovna moč meri z dvema wattmetroma – kot da je sistem dvofazen.

Simetrične komponente sistema trifaznih napetosti. Zaradi nesimetričnosti obremenitve trifaznega sistema napetosti pride do tega, da fazni toki niso simetrični, s tem pa so nesimetrični tudi padci napetosti na vodih realnega omrežja. Posledica tega je, da so resnične fazne napetosti na sponkah omrežja "rahlo" nesimetrične – ne ujemajo se po amplitudah in tudi fazne razlike niso ravno $2\pi/3$. Karikirano nesimetrično sliko kazalcev napetosti kaže diagram na sliki 68.12, skica a). Pokaže pa se, da je možno takšen nesimetričen sistem formalno razstaviti na pozitivni, skica b), negativni, skica c) in nični sistem napetosti, skica d),

$$\begin{aligned} \text{pozitivni} &: \underline{U}_1^+ = \underline{U}^+ \qquad \underline{U}_2^+ = \underline{a}^2\,\underline{U}^+ \qquad \underline{U}_3^+ = \underline{a}\,\underline{U}^+ \\ \text{negativni} &: \underline{U}_1^- = \underline{U}^- \qquad \underline{U}_2^- = \underline{a}\,\underline{U}^- \qquad \underline{U}_3^- = \underline{a}^2\,\underline{U}^- \\ \text{in nični} &: \underline{U}_1^0 = \underline{U}_2^0 = \underline{U}_3^0 = \underline{U}^0 \end{aligned}$$



Slika 68.12: Simetrične komponente trifaznega sistema napetosti.

kjer je število $\underline{a}$ spet fazor $e^{j2\pi/3}$, napetosti $\underline{U}^+$, $\underline{U}^-$ in $\underline{U}^0$ pa so napetosti posameznih sistemov. Fazne napetosti nadalje zapišemo kot vsote:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1^+ + \underline{U}_1^- + \underline{U}_1^0 = \underline{U}^+ + \underline{U}^- + \underline{U}^0$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_2^+ + \underline{U}_2^- + \underline{U}_2^0 = \underline{a}^2\,\underline{U}^+ + \underline{a}\,\underline{U}^- + \underline{U}^0$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_3^+ + \underline{U}_3^- + \underline{U}_3^0 = \underline{a}\,\underline{U}^+ + \underline{a}^2\,\underline{U}^- + \underline{U}^0$$

Če upoštevamo, da je $\underline{a}^2 + \underline{a} + 1 = 0$, dobimo hitro tudi obratne zveze. Ko enačbe seštejemo, sledi

$$\underline{U}^0 = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3)$$

Če množimo drugo z $\underline{a}$ in tretjo z $\underline{a}^2$, sledi

$$\underline{U}^+ = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{a}\,\underline{U}_2 + \underline{a}^2\,\underline{U}_3)$$

in če drugo množimo z $\underline{a}^2$ ter tretjo z $\underline{a}$, dobimo po seštevanju še

$$\underline{U}^- = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{a}^2\,\underline{U}_2 + \underline{a}\,\underline{U}_3)$$

S slednjimi tremi enačbami razcepimo nesimetričen trifazni sistem napetosti na ustrezne simetrične komponente. Pozitivni in negativni sistem generirata v trifaznem motorju vrtilni polji v obratnih smereh, nični sistem pa vrtilnega polja ne ustvarja. Tako vzbujan trifazni motor bi imel moč na gredi gotovo manjšo kot sicer – pri mreži simetričnih napetosti.

69. Lastnosti realnih elementov

V razdelku 59 smo se dogovorili, da bodo naša harmonično vzbujana vezja predstavljala zvezja čistih R, L in C elementov in generatorjev. V praktični elektrotehniki pa temu seveda ni povsem tako. Realni elementi namreč ne izkazujejo le svojih deklariranih lastnosti, marveč tudi neželene – parazitne lastnosti; to hkrati pomeni, da tudi napetostno-tokovne relacije na njih niso povsem takšne, kot smo jih opredelili v razdelku 60, ampak bolj kompleksne. V duhu tega se realnim elementom po potrebi priredijo t.i. nadomestna vezja čistih elementov, ki do neke mere simulirajo realne lastnosti danega elementa. Dodatna komplikacija pa je še v tem, da so v takšnem nadomestnem vezju elementi običajno frekvenčno odvisni.

Na tem nivoju se v to problematiko ne bomo utegnili adekvatno poglobiti, saj bi se morali lotiti reševanja sistema Maxwellovih enačb, pri tem pa bi naleteli na matematične probleme, ki presegajo postavljene okvire osnov elektromagnetike. Da pa problematika le ne bi ostala povsem odprta, se bomo na določenih mestih morali zadovoljiti le z opisom fenomenov.

Upor. Že običajen kos žice (ki vodi harmonični tok) ni z elektromagnetnega stališča le upor, ampak ima – zaradi lastnega magnetnega polja v prerezu žice – tudi določeno notranjo induktivnost. Še več, pod vplivom izmeničnega toka se tokovna gostota po prerezu žice razporedi neenakomerno (tako po amplitudi kot po fazi); izkaže se, da je absolutna gostota toka ob površini večja kot v centralnem delu prereza (kožni efekt) in da je ta "anomalija" še izrazitejša pri visokih frekvencah, ko tok teče le še ob površini žice kot adekvaten ploskovni tok – v takšnem primeru je magnetno polje praktično povsem izrinjeno ob površino žice. Zaradi tega fenomena se žica "obnaša" tako, kot da je njen efektivni prerez manjši, s tem pa je njegova ekvivalentna upornost večja.

Kvantitativna analiza tega pojava (kožnega efekta) se, razen redkih izjem, običajno dela z ustreznimi numeričnimi metodami, ki utegnejo dajati zelo solidne in uporabne rezultate. Za nas bo tu važno le to, da je notranja impedanca vodnika danega prereza frekvenčno odvisna,

$$\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

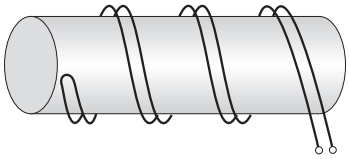
in da je adekvatno modelno vezje možno predstaviti z zaporedno vezavo upora in tuljave[1]. Temu efektu se pridruži še sosedstveni (bližinski) pojav, ako je v bližini žice še druga, ki vodi tok; v takšnem primeru se tokovna gostota porazdeli še dodatno neenakomerno zaradi vpliva magnetnega polja sosednjega toka; izkaže se, da se ekvivalentna upornost v modelnem vezju (zaradi tega) še dodatno poveča.

Za praktičnega elektrotehnika bo zadovoljiva informacija že to, da je kožni efekt zanemarljiv, če je (pri žici krožnega prereza) mera $\sqrt{\omega\mu\gamma}\rho_0 < 0.5$.

[1]Za impedanco ravne žice okroglega prereza se dobi tale analitična izražava:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{K}}{2}\frac{J_0(\underline{K})}{J_1(\underline{K})}R_=$$

$R_=$ je enosmerna upornost (upornost pri enosmernem toku), $\underline{K}$ je $\sqrt{-j\omega\mu\gamma}\rho_0$, kjer sta μ in γ snovna parametra, ρ_0 je radij žice in J_0 ter J_1 sta Besselovi funkciji ničtega in prvega reda.



Slika 69.1: Bifilarno navita uporovna žica.

Dodatna težava se pojavi pri žičnatih uporih (in podobnih spiralnih izvedbah), kjer z navijanjem (prepredanjem) uporovne žice pridobimo še parazitno induktivnost in parazitno medovojno kapacitivnost. Pri visokih frekvencah je takšna izvedba upora praktično neuporabna; delni izhod je bifilarno navijanje; slika 69.1.

Tuljava. Sorodni problemi so pri realni tuljavi. Če je ta zračna (brez feromagnetnega jedra), potem imamo pri njej opraviti s parazitno upornostjo, ki je zaradi kožnega efekta tudi frekvenčno odvisna (s tem pa se spreminja tudi notranja induktivnost). Za impedanco takšne tuljave bi spet pisali: $\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, kjer je v $R(\omega)$ skrit že omenjeni pojav, v $X(\omega)$ pa je poleg tega zajeta tudi parazitna medovojna kapacitivnost. Pri visokih frekvencah bi se takšna tuljava obnašala kot nihajni krog s slike 67.6.

Dodaten problem se pojavi, če je jedro tuljave feromagnetno. V razdelku 55 smo se seznanili s histereznimi izgubami, ki so posledica izmeničnega magnetenja jedra. Te izgube so sorazmerne s ploščino histerezne zanke, adekvatna poprečna izgubna moč pa s frekvenco linearno narašča. Tem izgubam priredimo v modelnem vezju še dodatno ekvivalentno upornost $R_{\text{hist.}}(\omega)$.

Povsem dodaten pojav, ki ga do tu še nismo opisovali, pa so t.i. *vrtinčne izgube* v feromegnetnem jedru. Če bi bilo jedro krožnega prereza (kot na sliki 53.4), bi inducirano električno polje v stebru (jedru) povzročilo vrtinčne toke ($\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}_{\text{ind.}}$) okrog magnetnega fluksa, ki bi se po Joulovem zakonu navzven manifestirali kot dodatne toplotne izgube.

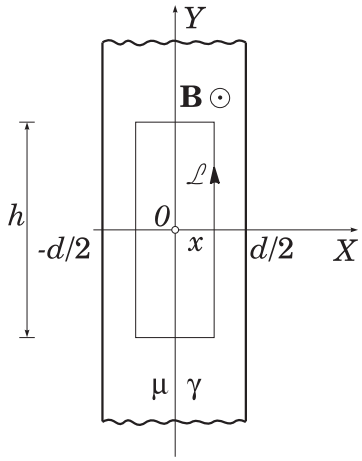
Tako kot pri kožnem efektu, se tudi tu pokaže, da pride do izriva magnetnega pretoka ob površino jedra, če "zadeva" ni znotraj kriterija $\sqrt{\omega\mu\gamma}\rho_0 < 0.5$. Ta ocena pa se pri μ_{r} okrog tisoč, in običajnih frekvencah (50 Hz), hitro prekorači, kar pomeni, da zahteva problematika vrtinčnih tokov dodaten praktičen ukrep. Tehnična rešitev tega problema je takšna, da se feromagnetno jedro izvede iz lamelirane pločevine, ki je tanjša od enega milimetra (pri 50 Hz je pogosto rabljena pločevina debeline $d = 0.35$ mm). Pločevina je obojestransko prelakirana (izolacija) in zložena v paket želenega prereza. Magnetni fluks se v takšnem jedru enakomerno porazdeli po lamelah, vrtinčni toki pa so ujeti (zaprti) znotraj vsake lamele; slika 69.2.

Če je izpolnjen kriterij $\sqrt{\omega\mu\gamma}d \ll 1$, potem je gostota $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ praktično konstantna po prerezu; za harmonično časovno spreminjanje jo pišemo kot

$$B_z = B_0 \cos \omega t$$

Vrtinčni toki bodo tudi tu "opredali" magnetni fluks in sicer po eni polovici pločevine navzgor (v y-smeri), po drugi polovici pa navzdol, $\mathbf{J} = (0, J_y, 0)$; na koncih pločevine se bo gostota "zaobljeno" obrnila v nasprotno smer. Vzemimo pravokotno konturo $\mathcal{L}$ in zapišimo zakon Faradayeve indukcije:

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{J}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$



Slika 69.2: Lamela pločevinastega jedra transformatorja.

oz.

$$2\frac{J_y}{\gamma}h = -\frac{d}{dt}(2xhB_0\cos\omega t) = 2xh\omega B_0\sin\omega t$$

in še dalje:

$$J_y = J_y(x,t) = \omega B_0\gamma x\sin\omega t$$

Gostota vrtinčnih tokov je linearno porazdeljena preko debeline d; v centru pločevine je nič, ob obeh stenah ($\pm d/2$) pa je enaka $\pm\omega B_0\gamma d/2$. Gostota joulskih izgub p je določena kot

$$p(x,t) = \frac{J_y^2}{\gamma} = (\omega B_0)^2\gamma x^2\sin^2\omega t$$

Časovno poprečje $\overline{p(x,t)}$ je dalje takole:

$$\overline{p(x,t)} = \frac{1}{2}(\omega B_0)^2\gamma x^2$$

Če vzamemo v račun prizmo, kot izsek pločevine debeline d, višine h in dolžine l, dobimo za moč P znotraj nje izraz

$$P = 2hl\int_0^{d/2}\overline{p(x,t)}\,dx = hl(\omega B_0)^2\gamma\int_0^{d/2}x^2\,dx = hld\frac{(\omega B_0 d)^2\gamma}{24}$$

Produkt hld predstavlja volumen opazovane prizme. Interesantne so vrtinčne izgube na kilogram pločevine. Če so: $f = 50$ Hz, $\gamma = 10^7$ S/m, $B_0 = 1$ T, $d = 0.35$ mm, potem dobimo pri specifični masi železa 7800 kg/m^3 za vrtinčne izgube 0.65 W/kg.

Za te izgube je značilno, da s frekvenco kvadratično naraščajo (pri dvojni frekvenci so izgube štirikratne); za razliko od histereznih, ki naraščajo linearno s frekvenco. Pri visokih frekvencah (medfrekvenčni transformator na primer) feromagnetna jedra niso več uporabna in se jih zamenjuje s feritnimi jedri, katerih odlika je ravno v nizki specifični električni prevodnosti.

Po vsem tem moremo zaključiti, da je tuljavo s feromagnetnim jedrom formalno možno nadomestiti z ekvivalentnim uporom, ki vključuje joulske izgube v navitju ter histerezne in

vrtinčne izgube v jedru, in reaktivno upornostjo jX, ki zajema induktivnost in parazitne kapacitivnosti.

Kondenzator. Z modelnim vezjem realnega kondenzatorja smo se seznanili že v razdelku 34 (slika 34.4). Predstavili smo ga z vzporedno vezavo izgubne upornosti izolacije in same kapacitete izolatorja. Pri kondenzatorju se pri visokih frekvencah pojavi še dodaten fenomen t.i. *dielektričnih izgub*. Pod vplivom spremenljivega električnega polja nihajo namreč vezani naboji v izolatorju okrog svojih ravnovesnih leg, kar se kot dodatno manifestira v povečanju toplotnih izgub. V modelni shemi kondenzatorja se to odraža v povečani ekvivalentni ohmski upornosti, ki je vzporedna h kapacitivnosti. Pojav dielektričnih izgub se javlja kot frekvenčno nelinearen pojav, zato je tudi ekvivalentna upornost frekvenčno odvisna; $R(\omega)$. Za kondenzatorje se običajno podaja t.i. *tangens izgubnega kota* ($\tan\delta$), kjer kot $(\pi/2 - \delta)$ pomeni kot med kazalcem napetosti in kazalcem toka v kompleksni ravnini. Zaželeno je, da je ta kot $(\pi/2-\delta)$ čim bliže $\pi/2$ oz., da je $\tan\delta$ čim manjši. Je pa $\tan\delta$, ki govori o kvaliteti kondenzatorja, iz zgoraj omenjenih razlogov seveda frekvenčno odvisen.

Če bi bilo načelo relativnosti poznano že pred Oerstedovim odkritjem, tedaj bi bile lahko osnovne zveze elektrodinamike predvidene na teoretični osnovi kot neposredna posledica osnovnih zakonov elektrostatike, razširjenih tako, da bi veljali tako za relativno gibajoče kot za relativno mirujoče naboje.

Page

Viri

[1] Duffin W. J.: *Electricity and Magnetism*, McGraw-Hill, London, 1990

[2] Einstein A.: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. der Physik, vol. 17: 891, 1905

[3] Elliot R. S.: *Relativity and Electricity*, IEEE Spectrum, 3/1966: 140-152

[4] Feynman R. P.: *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, 1972

[5] Giancoli C. D.: *Fizika I, II*, Mir Publishers, Moskva, 1989

[6] Koželj V. A.: *Ampèrov zakon in nekaj elektromagnetnih "paradoksov" I*, Elektrotehniški vestnik, štev. 4-5, str. 101-108, letnik 19, Ljubljana, 1951

[7] Koželj V. A.: *Ampèrov zakon in nekaj elektromagnetnih "paradoksov" II*, Elektrotehniški vestnik, štev. 6-7, str. 165-170, letnik 19, Ljubljana, 1951

[8] Küpfmüller K.: *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, Springer-Verlag, Berlin, 1984

[9] *Maksvell i razvitije fiziki XIX-XX vekov*, Akademija nauk SSSR, Nauka, Moskva, 1985

[10] Maxwell J. C.: *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, The Scientific Papers of J. C. Maxwell, vol. 1: 526-597

[11] Maxwell J. C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Publications, 1954

[12] Meerovič E. A., Mejerovič B. E.: *Metody reljativistskoj elektrodinamiki v elektrotehnike i elektrofizike*, Energoatomizdat, Moskva, 1987

[13] Miroljubov N. N.: *Metody rasčota elektrostatičeskih polej*, Gosudarstvennoje izdatel'stvo, Moskva, 1963

[14] Page L.: *A Derivation of the Fundamental Relations of Electrodynamics from those of Electrostatics*, American Journal of Science, vol. 34: 57-68, 1912

[15] Plonus A. M.: *Applied electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1986

[16] Poberaj S.: *Fizika snovi*, Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 1976

[17] Popović B. D.: *Osnovi elektrotehnike 1, 2*, Građevinska knjiga, Beograd, 1986

[18] Popović B. D.: *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989

[19] Purcell E. M.: *Elektricitet i magnetizam*, Udžbenik sveučilišta u Berkleyu, svezak 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988

[20] Ribarič M., Šušteršič L.: *Conservation Laws and Open Questions of Classical Electrodynamics*, World Scientific, 1990

[21] Schelkunoff S. A.: *Electromagnetic waves*, D. van Nostrand company, New York, 1947

[22] Spasskij B. I.: *Istorija fiziki I, II*, Moskva, 1964

[23] Stratton J. A.: *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill, New York, 1941

[24] Surutka J.: *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989

[25] Tamm I. E.: *Osnovy teorii električestva*, Gostehizdat, Moskva, 1949

[26] *Tehnička enciklopedija*, Jugoslavenski leksikografski zavod, zvezek 5, Zagreb, 1976

[27] Yavorsky B. M., Pinsky A. A.: *Fundamentals of Physics I, II*, Mir Publishers, Moskva, 1975

[28] Željeznov M.: *Ampère-Koželjev zakon*, Elektrotehniški vestnik, štev. 4-5, str. 65-68, letnik 37, Ljubljana, 1970

Stvarno kazalo

absolutna vrednost, 12
admitančna matrika, 440
admitanca $\underline{Y}$, 425
Ampèrov zakon toka, 5
Ampèrovi toki, 3
amplituda, 418
anizotropne snovi, 98

Coulombov zakon, 2

časovna konstanta, 115
časovno konstantna tokovna polja, 36
četveropol, 237, 238
    Π, 161
    T, 161
četveropolni enačbi, 239

delna kapacitivnost, 116
desno pravilo, 15
dielektrične izgube, 328, 466
dielektričnost, 40, 101
dielektriki, 96
diferencial poti, 17
diferencial volumna, 20
diferenciali točkastih elektrin, 29
diferencialne ploskvice, 19
dinamična polja, 37
dipolska polarizabilnost, 97
dipolski moment, 69
direktna Kirchhoffova metoda, 216
določeni integral, 20
drevo vezja, 217

efektivna vrednost, 403
ekvipotencialna ploskev, 62
električna
    influenca, 82
    energija, 138
    indukcija, 82
    napetost, 60
    nevtralnost, 2
    potencialna energija, 59
    prevodnost, 185
    susceptibilnost, 98
    upornost, 185
    vezja, 199
    vezja koncentriranih elementov, 117
električni
    potencial, 60
    moment, 68
    tok, 30
električno
    zaključen, 34
    polje, 4
elektrina, 26
elektrodinamika, 3, 37
elektrodna napetost, 112
elektromotorna sila, 331
elektronska polarizabilnost, 98
elektrostatična polja, 36
elektrostatika, 3, 36
element poti, 17
elementarni premiki, 17
energija elektrostatičnega sistema, 138
enosmerni tok, 36
enosmerno električno vezje, 183
enotski vektor, 8
eter, 5

faktor
    delavnosti, 429
    stresanja, 366
Faradayeva kletka, 85
faza, 418
fazne napetosti, 451
fazni toki, 451
ferodielektriki, 148
feromagnetik, 148
fizično
    kratki interval časa, 6

majhna prostorninica, 6

Gaussov stavek vektorskega polja, 50
gibalna inducirana napetost, 338
gibalni način, 336
globina prodiranja, 397
gostota
    električne energije, 144
    električnega pretoka, 100
    energije magnetenja, 378
    ploskovnega dipola, 90
    ploskovnega toka, 248
    ploskovno porazdeljene elektrine, 28
    polarizacijskega toka, 329
    premikalnega toka, 387
    prostorsko porazdeljene elektrine, 27
    vzdolžno porazdeljene elektrine, 28
gradient funkcije, 66
graf vezja, 217

Hallova napetost, 167, 287
Hallovo polje, 287
histerezna zanka, 148
histerezne izgube, 376
homogeno polje, 48

impedančna matrika, 440
impedanca, 425
incidenčna matrika, 217
induciranje, 4, 331
inducirana napetost, 331
inducirani tok, 331
inverzno kvadratična zakonitost, 2
ionska polarizabilnost, 98
izvornost, 24

jalova moč Q, 430
Joulov zakon, 171
    v integralni obliki, 172
    integralnih količin, 189
joulske izgube, 171

kapacitivnost, 88, 116
karakteristična
    upornost, 354, 398
    upornost linije, 254
kartezijev k.s., 7
kazalci, 419
kožni efekt, 351
kompleksna amplituda, 418
kompleksni račun, 433
kompleksor harmonične funkcije, 418
kondenzator, 117
kondenzatorsko vezje, 120, 153
konduktivni tok, 31, 166
konstanta širjenja, 395
kontinuitetna enačba, 5, 34
konvektivni tok, 31, 166
koordinate, 7
koordinatna trojka, 7
koordinatni sistem, 7
koplanarni vektorji, 17
krajevno-časovno povprečje, 6
krivuljni integral, 22
krogelni k.s., 7
kvaliteta, 401
    nihajnega kroga, 442
kvazistacionarno stanje, 417
kvazistatično
    električno polje, 330
    magnetno polje, 247, 330

Laméjevi koeficienti, 18
lastna induktivnost, 348
linearen vir, 206
linijsko porazdeljena elektrina, 29
lomni zakon, 111
Lorentzova sila, 26

magnetna
    polarizacija, 298
    susceptibilnost, 297
    energija, 370
magnetni
    dipolski moment, 292
    pretok, 266
    sklep, 341
    vektorski potencial, 271
magnetno polje, 4, 166, 247, 252, 255
magnetostatično polje, 36, 247
magnetostatika, 3, 36
makroskopska teorija, 6
masna točka, 29

Maxwellova enačba, 389
I., 387
II., 335
III., 269
IV., 101
medsebojna induktivnost, 348
metoda
zrcaljenja, 86, 126
$j\omega$, 433
U-I, 186
spojiščnih potencialov, 216
zančnih tokov, 216
modeliranje, 120
modelno vezje, 120
koncentriranih elementov, 153
moment premega dipola, 68
multipoli, 95
multipolna (večpolna) vezja, 238

nadomestna kapacitivnost, 116
naelektrena
daljica, 29
premica, 29
telesa, 1
napetost
koraka, 195
odprtih sponk, 206
napetostni vir, 206
navidezna moč, 430
negativna naelektritev, 1
nelinearen vir, 206
ničelni tok, 451
Nortonov vir, 233
notranja upornost, 206

oblak elektrin, 27
obloga elektrine, 28
Ohmov zakon, 4, 168
v razširjeni obliki, 171
integralnih količin, 185
ortogonalna baza, 11
ozemljevanje, 95

padec napetosti, 182
parcialni odvod, 25
pasovna širina, 443
permeabilnost, 40, 101, 298
piezoelektrični pojav, 98
ploskovni integral, 23
polarizacijski tok, 31, 166
poljski tok, 387
polni tok, 387
poprečna moč, 403
potencial dvojnega sloja, 90
potencialni koeficienti, 118
potencialno polje, 107
pozitivna naelektritev, 1
pravokotne koordinatne osi, 7
prebojna trdnost, 98
prebojna poljska jakost, 98
prehodni pojav, 115, 409
prelom
elektrostatičnega polja, 111
magnetnega polja, 311
prema elektrina, 29
premi dipol, 68
premikalni tok, 5
pretočna cevka, 103
prevodnostna matrika, 240
primarni vir, 392
psevdoskalarni produkt, 16

razširjen Joulov zakon, 172
razglašenost, 442
recipročnost, 237
relaksacijski čas, 74
relativna dielektričnost, 101
resonančna frekvenca, 441
rotacijska simetrija, 44

samoindukcija, 332
sekundarni vir, 392
silnice, 4
simbolični račun, 433
skalarne funkcije, 7
skalarno polje, 7
sklopni faktor k, 365
specifična
električna prevodnost, 101, 168
električna upornost, 169
spojišča (vozlišča), 216
stavek

reciprocnosti, 119, 227
maksimalne moči, 227
Nortona, 227
o nadomestitvi, 227
superpozicije, 226
Thévenina, 227
Tellegena, 227
superpozicija, 42
supraprevodnost, 169

tangens izgubnega kota, 328, 466
tehnika okovinjanja, 126
telegrafska enačba, 399
temperaturni koeficient, 169
Théveninov vir, 233
točkasti
dipol, 69, 90
magnetni dipol, 292
točkasta elektrina, 29
tok
kratkega stika, 209
magnetizacije, 31, 294
odmika, 5
zančni, 220
tokovna
daljica, 258
obloga, 248
premica, 259
tokovni
vir, 208
element, 248
tokovno polje, 175
transformacija
zvezda-trikot, 161
trikot-zvezda, 161
transformatorska napetost, 338
transformatorski način, 336

upor, 185
upornostna matrika, 240
usmerjen graf, 217

valjni k.s., 7
valovna impedanca, 396
valovna upornost, 254, 354, 396
valovni enačbi, 394

vektor
električne poljske jakosti, 26, 42
prostorske gostote dipolskih momentov, 96
električne polarizacije, 97
gostote električnega toka, 32
gostote magnetnega pretoka, 26, 255
magnetizacije, 294
magnetne poljske jakosti, 296
gostote električnega pretoka, 99
vektorske funkcije, 7
vektorski produkt, 14
vektorsko
polje, 7
polje sil, 41
verižna matrika, 241, 440
vezje
Δ, 161
Π, 161
Y, 161
T, 161
vrtilno magnetno polje, 462
vrtinčne izgube, 466
vrtinčnost, 23

začetni pogoj, 410
zakon
o ohranitvi elektrine, 33
I. Kirchhoffov, 158, 200
II. Kirchhoffov, 159, 202
zanka, 218
zrcalna elektrina, 92
zvezje vej, 216