Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I

Iztok Humar
Edi Bulić
Anton Rafael Sinigoj

Ljubljana, 2017

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

621.3(075.8)

HUMAR, Iztok, 1977-
Osnove elektrotehnike I / Iztok Humar, Edi Bulić, Anton Rafael Sinigoj. - 1. izd. - Ljubljana : Založba FE, 2017

ISBN 978-961-243-333-8
1. Bulić, Edi 2. Sinigoj, Anton R.
291560192

Copyright © 2017 Založba FE. All rights reserved.
Razmnoževanje (tudi fotokopiranje) dela v celoti ali po delih
brez predhodnega dovoljenja Založbe FE prepovedano.

Založnik: Založba FE, Ljubljana
Izdajatelj: Fakuleta za elektrotehniko, Ljubljana
Urednik: prof. dr. Sašo Tomažič

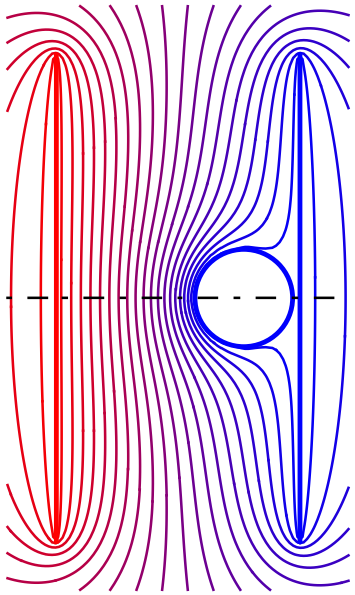
Recenzenta: prof. dr. Tomaž Slivnik, prof. dr. Tadej Kotnik

Natisnil: SINET d.o.o., Hrastnik
Naklada: 200 izvodov
1. izdaja

Predgovor

Učbenik je namenjen študentom elektrotehnike in pokriva snov predmeta Osnove elektrotehnike I. Vsebina učbenika je razdeljena v tri poglavja oziroma šestindvajset razdelkov. Obravnavane teme so predstavljene v Vsebini na začetku.

Pri izbiri in načinu obravnave tem smo se ozirali na učna gradiva, ki so za ta predmet na voljo študentom že sedaj, in se pri tem poskušali izogniti nepotrebnim podvajanjem. Snov predmeta smo zato podali v bolj strnjeni obliki in – kjer je to možno – ubrali druge poti, ki vodijo k istim ciljem; za razumevanje zahtevne snovi je to vsekakor koristno in dobrodošlo. V ta namen smo dodali tudi nekaj tehnično zanimivih primerov, ki jih na enem mestu ali sicer redkeje srečamo. K temu bodo svoje pripomogle tudi upodobitve električnih polj, ki izhajajo iz analitičnega ali numeričnega reševanja problemov in po teoretični ter matematični plati včasih presegajo zahtevane nivoje znanj. Dobrodošlo je, če se študentom usmerja pogled v problematike, katerim hodijo naproti, in se jih skuša na ta način motivirati za kreativno delo.



Uporabljena matematična orodja niso enostavna, so pa nujna, če želimo snov osnov elektrotehnike korektno predstaviti; k sreči se študenti z njimi srečujejo tudi pri fiziki. Veliko orodij so študenti spoznali že v preteklem šolanju, vendar so jih nekaj »žal pozabili«; nemalokrat je že ovira, ko zapišemo kaj z drugimi simboli. Pri študiju je pomembno predvsem to, da zasledujemo vsebine in odnose. Ta učbenik je v to smer tudi naravnan: poudarek daje besedam, matematične relacije pa so zgolj povzetek tega, kar izrečemo. Študentom priporočamo aktivno učenje: da pišejo, rišejo, izpeljujejo, sprašujejo, se pogovarjajo (diskutirajo), si delajo miselne vzorce in se tako učijo učiti – učenje zgolj »iz fotelja« ne daje sadov.

Da je učbenik tak, kot je, se zahvaljujemo prof. dr. Matjažu Vidmarju za vrsto zelo tehtnih pripomb, recenzentoma zaslužnemu profesorju dr. Tomažu Slivniku in prof. dr. Tadeju Kotniku pa za koristne nasvete.

Avtorji

Vsebina

Električni naboj in električni tok

§1. Lorentzova sila – Namesto uvoda

§2. Porazdelitve električnega naboja (prostorninska, površinska, dolžinska in točkasta porazdelitev)

§3. Električni tok (definicija, funkcija pretečenega naboja, vrste električnih tokov)

§4. Gostota električnega toka (definicija, grafično upodabljanje tokovnega polja, učinki gostote električnega toka)

§5. Kontinuitetna enačba (definicija)

§6. Razrez vsebine osnov elektrotehnike (elektrostatika in kondenzatorska vezja, tokovno polje in enosmerna vezja magnetostatika in magnetna vezja, elektrodinamika in izmenična vezja)

Elektrostatično polje

§7. Coulombov zakon električne sile (sili med točkastima nabojema)

§8. Električna poljska jakost (definicija, polje točkastega naboja, polje splošne elektrinske strukture, električno polje naelektrene daljice, polje naelektrene premice, polje nasprotno naelektrenih vzporednih premic, polje več naelektrenih vzporednih premic, polje naelektrene ravnine, polje nasprotno naelektrenih vzporednih ravnin, polje naelektre tanke cevi, naelektren prevoden vodnik krožnega preseka, koaksialni kabel, polje naelektrene krožnice)

§9. Gaussov zakon (pretok vektorja poljske jakosti, polje enakomerno naelektrene krogelne lupine, polje naelektrene kovinske krogle, krogelni kondenzator, polje naboja v krogelnem oblaku, druge uporabe Gaussovega zakona, splet dveh izvornosti)

§10. Električna napetost (delo električne sile, električna napetost, vprašanje vrtinčnosti, drugi Kirchhoffov zakon, električna potencialna energija, električni potencial, potencial točkastega naboja, potencial gruče točkastih nabojev, potencial naelektrene krožnice, potencial naelektrene daljice, potencial naelektrene premice, potencial snopa

naelektrenih premic, potencial v ploščnem kondenzatorju, potencial v koaksialnem kablu, potencial v krogelnem kondenzatorju, naelektrena krogla, potencial krogelnega oblaka nabojev)

§11. Gradient potenciala (ekvipotencialne ploskve, ekvipotencialke para nasprotnih premih nabojev, ekvipotencialke para enakih premih nabojev, gradient potenciala, polje točkastega naboja, drugi lepi primeri, o gradientu še drugače, polje para nasprotnih premih nabojev, polje naelektrene daljice)

§12. Električni dipoli (točkasti dipol, navor na dipol, potencialna energija dipola, sila na dipol, električno polje dipola, premi dipol, dipolska ploskev)

§13. Prevodnik in elektrostatično polje (status elektrostatičnega polja v prevodniku, elektrostatične razmere v/ob prevodniku, vodnik v homogenem električnem polju, avtonomnost električno zaključenega sistema, Faradayeva klatka, okovinjanje ekvipotencialk, polje dveh premih nabojev, simetrični dvovod, vodnik pred prevodno steno, vodnik nad zemljo, asimetrični dvovod, ekscentrični kabel, polje dveh točkastih nabojev, točkasti naboj nad ravno prevodno podlago, točkasti naboj v krogelni luknji, točkasti naboj pred kroglo, točkasti naboj nad zemljo)

§14. Dielektrik in elektrostatično polje (vrste polarizacij, dipolska, ionska in elektronska polarizacija, prosti in vezani naboji, vektor polarizacije, izvornost vektorja polarizacije, polarizacijski tok, toki prostih in vezanih nabojev, vektor gostote električnega pretoka, električna susceptibilnost in dielektričnost snovi, nehomogenost, nelinearnost in anizotropnost, električni pretok, elektrostatični sistem z izolantom, korgelni kondenzator z dielektrikom)

§15. Mejna pogoja elektrostatičnega polja (mejni pogoj gostote električnega pretoka, mejni pogoj električne poljske jakosti, meja prevodnik – dielektrik, meja dielektrik – dielektrik)

§16. Električni vir ter kapacitivnost in kondenzator (električni vir, idealni tokovni vir, idealni napetostni vir, delo in moč vira, kapacitivnost, definicija kapacitivnosti, kondenzator kot strnjen element električnih vezij, polnilni tok, polnilna moč, snop vodnikov nad zemljo, delne kapacitivnosti in modelno C-vezje, trifazni vod, kondenzator z več izolanti, ploščni kondenzator z več izolanti, koaksialni kabel z dvoslojno izolacijo, ploščni kondenzator z delno vstavljenim izolantom, plavajoča krogla)

§17. Zrcaljenje (točkasti naboj pred naelektreno kroglo, nevtralna krogla v homogenem polju, naelektrena krogla nad prevodno podlago, influenčni generator, vodnik med ozemljenima stenama, vodnik v globokem žlebu, nepopolno zrcaljenje, dvovod nad dielektrično podlago)

§18. Električna energija (elektritev in razlektritev prevodnega telesa, električna energija, elektritev kondenzatorja, elektritev prostora, energija v sistemu naelektrenih teles, gostota električne energije, nelinearno elektrenje)

§19. Gibalni procesi v elektrostatičnem polju (premik v avtonomnem sistemu, premik v sistemu z virom, ploskovne sile)

§20. Kondenzatorska vezja (pet primerov C-vezij)

Tokovno polje

§21. Konduktivni tok (uvod v tokovno polje, prevodniški tok v luči elektrostatike, model trkov, specifična električna prevodnost, Ohmov zakon, specifična električna upornost in njena temperaturna odvisnost, nehomogenost, nelinearnost, anizotropnost, Joulov zakon, Ohmov zakon v razširjeni obliki, Ohmov zakon v dinamičnih razmerah, praznjenje kondenzatorja)

§22. Mejni pogoji tokovnega polja (mejni pogoji, stik kovina – kovina, stik supraprevodnik – vakuum, stik realen prevodnik – realen izolant)

§23. Električna prevodnost – upornost in upor (konduktivni kanal, električna prevodnost in električna upornost, izolacijska upornost koaksialnega kabla, prevodnost toroidnega obroča, joulska moč, upor – strnjen element, dualnost, nadomestno vezje kondenzatorja, kvaliteta izolanta, nadomestno vezje linije, linija kot 1D vezje, ozemljevanje, določanje ponikalne upornosti, paličasto, tračno in ploščno ozemljilo)

§24. Elementi enosmernih električnih vezij (linearni upor, električni vir, Voltov člen, linearni električni vir, linearni napetostni vir, linearni tokovni vir, ekvivalentnost virov, kontaktna napetost, nelinearni dvopol, polprevodniška dioda, sončna celica, elektromehanski in elektronski viri)

§25. Analiza enosmernih električnih vezij (vejni toki in vejne napetosti, spojiščni potenciali, zančnii toki)

§26. Teoremi o enosmernih električnih vezij (superpozicija, nadomestitev, Tellegen, Thevenin in Norton, prilagoditev)

Električni naboj in električni tok

§1. Lorentzova sila – Namesto uvoda (2)

§2. Porazdelitve električnega naboja (3)

§3. Električni tok (3)

§4. Gostota električnega toka (2)

§5. Kontinuitetna enačba (2)

§6. Razrez vsebine osnov elektrotehnike (2)

§1. Lorentzova sila – Namesto uvoda

29:51

Niso redki avtorji, ki pričnejo obravnavo elektromagnetizma z Lorentzovo silo, zato verjetno ne bo narobe, če začnemo z njo tudi mi. Prepričljivega razloga za tak začetek še ne moremo navesti, bo pa ta razviden kasneje. Predhodnici te sile sta dve, že od prej poznani sili, električna in magnetna, ki ju je Lorentz združil v elektromagnetno silo

$$\mathbf{F}_\mathrm{L} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{w} \times \mathbf{B} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}).$$

Relacija sporoča: če se v prostoru z elektromagnetnim poljem, ki ga določata vektor električne poljske jakosti **E** in vektor gostote magnetnega pretoka **B**, nahaja naelektren delec, ki ima hitrost **w** in naboj Q, deluje nanj elektromagnetna sila $\mathbf{F}_\mathrm{L}$. Delec je lahko elektron, proton, ion ali manjši objekt (kapljica, opilek, prašni delec ...). Sila se izraža v njutnih (N), naboj v amper-sekundah ali kulonih (As = C), električna poljska jakost v voltih/meter (V/m), hitrost v metrih/sekundo (m/s) in gostota magnetnega pretoka v teslih ($\mathrm{T} = \mathrm{Vs/m^2}$).

Objekt more biti tudi gruča sorodnih si delcev v neznatni prostornini. S tem pogledom vstopamo v jedro makroskopske obravnave elektromagnetizma: ko predmet proučevanja niso posamezni nabiti deleci, ampak male gruče nabitih delcev. V primeru neznatne prostornine sta neznatna tako množina naboja kot tudi Lorentzova sila, ki deluje na gručo delcev,

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{L} = \delta Q(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}).$$

Z znakom »δ« nakažemo neznatnosti naboja in sile, vektorja **E** in **B** pomenita poprečni vrednosti obeh polj v gruči, vektor **w** pa pomeni poprečno hitrost delcev v gruči.

Čeravno je naboj kvantiziran (je vedno večkratnik osnovnega naboja $e \cong 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As), ga v makroskopskem smislu sprejemamo kot kontinuirno porazdeljenega. S to poenostavitvijo zaobidemo resnico, da je med nabitimi delci prazen prostor. Diferencial sile na diferencialni naboj, ki se ob času t nahaja v točki T in ima hitrost **w**, zapišemo takole:

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_\mathrm{L} = \mathrm{d}Q(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}),$$

da znak »δ« zamenjamo z »d«. Diferencialni naboj razumemo kot točkast, polji **E** in **B** pa kot krajevno-časovni vektorski funkciji, $\mathbf{E}(T,t)$ in $\mathbf{B}(T,t)$, točke T in časa t in podobno tudi njune komponente, kot npr. $E_x(T,t)$, $B_z(T,t)$. Poseben primer je statično, časovno neodvisno polje. Takrat razumemo na primer polje **B** kot $\mathbf{B}(T)$ in komponento B_y kot $B_y(T)$.

Lorentzovo silo smemo sprejeti tudi kot »definicijo« elektromagnetnega polja, kajti sila je tisto, kar opravičuje pogovor o njenem ozadju. Izkaže se, da moremo učinke elektromagnetnega polja neposredno ali posredno pojasniti prav s silo, da je Lorentzova sila nekakšen »vezni člen« med učinki polja in poljem samim. Njeno delovanje se odraža v premiku delca (objekta, telesa, molekule, iona, protona, elektrona), ki ga spremljajo pojavi kot so toplota, oblok, polarizacija, ionizacija, preboj, korona, magnetizacija in drugi. V nadaljevanju nam bo uspelo elektromagnetno silo povezati še z energijo, kar bo pojem polje le še bolj učvrstilo.

Lorentzova sila vsebuje definicijo električne poljske jakosti: $\mathbf{E} = [\delta\mathbf{F}_\mathrm{L}/\delta Q]_{w=0}$. Vektor **E** je sorazmeren sili na mirujoči naboj. V tesni zvezi z elektromagnetno silo so trije temeljni zakoni: Coulombov zakon električne sile, Amperov zakon magnetne sile in Faradayev zakon inducirane električne sile. Spoznali bomo, da je električna poljska jakost vsota dveh, imenovali ju bomo Coulombova in Faradayeva poljska jakost. Na teh silah in na zakonu o ohranitvi naboja sloni nauk o elektromagnetizmu. Nauk povzemajo štiri Maxwellove enačbe, ki so fizikalno-matematični model elektromagnetnega polja, ter Lorentzova sila, ki je odraz tega polja.

Vprašanj je naenkrat preveč: kaj je naboj in kaj sta električno in magnetno polje? Naboj sprejemamo kot naravno danost, ki je pomembna tudi v kemiji in širše v fiziki. O električnem naboju ne vemo veliko. Poznamo nosilce naboja, ne pa tudi, zakaj naboj imajo in kaj on je. »Tolažimo« se s tem, da ne vemo niti, zakaj ima delec maso in kaj ona je. Delcem pripišemo maso in naboj pač zato, da zmoremo pojasniti pojave, ki se jim dogajajo. Precej težje je sprejeti pojem polje, vendar bomo postopoma spoznali, da vodi pot do razumevanja elektromagnetnih pojavov ravno in samo prek njega.

§2. Porazdelitve električnega naboja

55:54

Če se elektromagnetni pojavi odražajo na nabitih delcih – in se to verjetno dogaja zaradi drugih nabitih delcev, katerih odsev sta električno in magnetno polje –, potem bo naša prva naloga namenjena seznanitvi s porazdelitvami, ki služijo podajanju naboja v prostoru. Vpeljali bomo štiri porazdelitve: prostorninsko, površinsko, dolžinsko in točkasto.

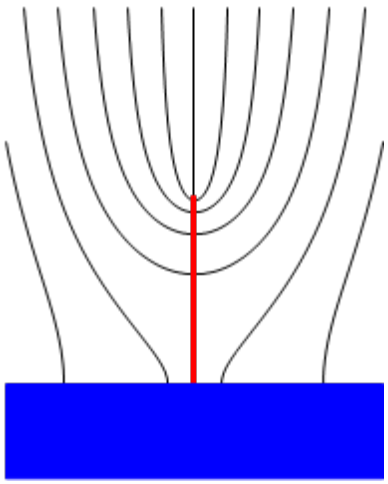
Prostorninska porazdelitev. O njej govorimo: pri atmosferski naelektritvi, v disociirani raztopini, v ioniziranem plinu, pri prostih elektronih v prevodniku ter elektronih in vrzelih v polprevodniku, itn. V teh in podobnih primerih vpeljemo prostorninsko gostoto ρ, ki je definirana z limito kvocienta množine električnega naboja δQ v vzorcu in prostornine δv vzorca, ko je ta vse manjši in »manjši«:

$$\rho = \lim_{"\delta v \to 0"} \frac{\delta Q}{\delta v} = \rho(T, t).$$

Simbolični zapis terja krajše pojasnilo. Limitni postopek je mišljen v smislu, da je vzorec, kot okolica točke T, čim manjši (in nikakor ne nič, zato tudi navednici, kajti v nič ni nič), da se krčenje vzorca dejansko »ustavi« pri t. i. fizično majhnem vzorcu, takšnem, ki zaobjame še vedno na stotine ali tisoče nabitih delcev. Neznaten vzorec je v makroskopskem smislu sinonim za »debelo točko«. Ker pa delci v splošnem migrirajo po prostoru, je potrebno tudi trenutek t sprejeti kot fizično kratek časovni interval, kot »debeli trenutek«. Dogodek ni stvar trenutka, ampak stvar debelega trenutka.

Gostota n prostih elektronov v bakru je približno $8{,}4 \cdot 10^{28}/\mathrm{m}^3$. V kubičnem nanometru jih je torej 84. Cu je v periodnem sistemu na 29. mestu, njegov atom ima na četrti lupini le en elektron, najšibkeje vezan na jedro, in ta je v glavnem prost. Pri višjih temperaturah, ko je atom v vzbujenem stanju, se mu pridruži še kateri. V tesni zvezi s tem je t. i. velikost atoma, ki meri dobri dve desetinki nm (ali 2 Å); nanometrski vzorec bakra bi potemtakem že lahko predstavljal »debelo točko«. Osnovni naboj je $e \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; prostorninska gostota prostih elektronov v Cu je zato $\rho = -ne \cong -1{,}34 \cdot 10^{10}\ \mathrm{C/m^3}$.

Kulon je izpeljana enota mednarodnega sistema SI in ustreza produktu osnovnih enot, ampera in sekunde. V kubičnem milimetru je −13,4 C naboja. Če vemo, da se ob streli (atmosferski razelektritvi) sprosti do 100 C naboja, imamo verjetno kar nekaj rešpekta do »armade« prostih elektronov v koščku žičke, kaj šele do vseh nabojev v njem. Ko omenjamo strelo, še nekaj podatkov. Največ, okoli 80%, se jih pripeti v nevihtnih oblakih, in le manjši del jih udari v tla, in še manj (1%) je takih, ki krenejo iz tal v oblak. Množina razelektritve je zelo različna, čas trajanja pa je do nekaj deset milisekund. Pri tem vzpostavljen ioniziran kanal se izkoristi za enega ali več udarov.



silnice atmosferskega električnega polja v bližini kovinske ograje

Če nevihtni oblak modeliramo s plastjo debeline $d = 100$ m in izhajamo iz okvirne vrednosti električne poljske jakosti $E \approx 10^4$ V/m od tal k njemu, dobimo za gostoto naboja v oblaku vrednost $\rho = -\varepsilon_0 E/d \approx -8{,}854 \cdot 10^{-10}\mathrm{C/m^3}$. Konstanta $\varepsilon_0 \cong 8{,}854 \cdot 10^{-12}\mathrm{C/Vm}$ je električna konstanta vakuuma. Strele so tudi tisti krivci, ki vzdržujejo pozitivno naelektritev ionosfere in negativno naelektritev tal oziroma električno polje in električno energijo med njima. Prostor med površino Zemlje in vrhom ionsfere predstavlja »naravni« kondenzator. Ob lepem vremenu je vrednost poljske jakosti v njem okoli 100 V/m, gostota električne energije pa okoli $4{,}4 \cdot 10^{-8}\mathrm{J/m^3}$.

Površinska porazdelitev. Površinsko razporejen naboj srečujemo običajno na površinah prevodnih teles. Če je na krpi s površino δa naboj δQ, govorimo o površinski gostoti $\delta Q/\delta a$, ki jo v strožjem smislu spet definiramo z limito:

$$\sigma = \lim_{\text{"}\delta a \to 0\text{"}} \frac{\delta Q}{\delta a} = \sigma(T, t).$$

Komentar, kot pri ρ, tokrat verjetno ni potreben, potreben pa je v nečem drugem. V to naj nas uvede primer jakosti polja ob lepem vremenu. Na tleh je gostota naboja $\sigma = -\varepsilon_0 E = -8{,}854 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{C/m^2}$. Naj dve desetinki nanometra ustrezata velikosti atoma neke snovi. Na 1 $\mathrm{m^2}$ tal je okoli $25 \cdot 10^{18}$ obpovršinskih atomov, elektronov, ki oblikujejo to izračunano gostoto, pa okoli $(8{,}85/1{,}60) \cdot 10^9 = 5{,}53 \cdot 10^9$. To pomeni, da ima vsak 45-miljardni obpovršinski atom pribitek enega elektrona. Presežni prosti elektroni se torej ne gnetejo, ampak se ob površini pojavljajo zelo na redko. Pri tako zelo šibki zastopanosti presežnega naboja na tleh mora biti tudi površinica δa, ki sodeluje v zgornji limiti, temu primerno majhna.

Dolžinska porazdelitev. O njej govorimo v primeru naelektrenih tankih žic neznatne debeline. Če je na kratkem odseku žice dolžine δl naboj δQ, govorimo o dolžinski (linijski) gostoti $\delta Q/\delta l$, ki jo formalno spet opredelimo z limito:

$$q = \lim_{"\delta l \to 0"} \frac{\delta Q}{\delta l} = q(T, t).$$

Vemo, da je presežni naboj, ki vstopa v limito, v resnici obpovršinski, z ustrezno površinsko gostoto σ. Nazoren primer je daljnovodna vrv, viseča na izolatorjih med stebri. Vrv naj ima debelino $d = 5$ cm. Če je na nekem mestu ob nekem času površinska gostota $\sigma = 20\ \mu\mathrm{C/m^2}$, potem je ob vrvi električna poljska jakost $E = \sigma/\varepsilon_0 = 2{,}25$ MV/m, linijska gostota je $q = \sigma\pi d = 3{,}14\ \mu\mathrm{C/m}$ in na 500 metrih vrvi med stebroma je 1,57 mC naboja. Nekaj besed še o poljski jakosti E v zraku. Pri normalni temperaturi in vlagi je prebojna jakost zraka okoli 2,9 MV/m. Pri tolikšni jakosti pride v zraku do izgradnje ionizacijskega kanala, skozi katerega se izvrši preboj (razelektritev); podobno kot pri streli, pri odklopnikih, v obločnih napravah, v stikalih itn. Se pa ionizacija odvija že pri nižji jakosti, kar povzroči, da postane zrak ob vrvi bolj prevoden in s tem soudeležen pri selitvi naboja. Pojav imenujmo korona. Korono spremljata svetlobni in termični učinek (koronski sij in koronske izgube).

Točkasta porazdelitev. Točkastega naboja ni – še najbolj se mu približa elektron. Pa vendar: brž ko kak neznaten delec nosi naboj, ga smatramo za točkastega; enako ravnamo tudi pri gruči delcev. Prisotnost skupine točkastih nabojev bomo podajali s podatki o množinah Q_k in točkh T_k, v katerih se naboji nahajajo.

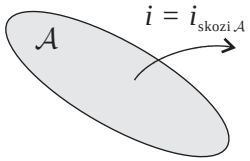
Sklep. Prostorninska porazdelitvena funkcija je splošna, površinska pomeni krčenje v ploskev, dolžinska v krivuljo in točkasta krčenje v točko. Opraviti imamo z redukcijami iz 3D, v 2D, 1D ali v 0D. Kadar bo potrebno ovrednotiti naboj v delu prostora ali na delu ploskve ali krivulje, bomo to storili z integrali, pri točkastih pa z vsoto:

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}v \ \text{ in (ali) } \int_{\mathcal{A}} \sigma \mathrm{d}a \ \text{ in (ali) } \int_{\mathcal{L}} q \mathrm{d}l \ \text{ in (ali) } \sum_k Q_k.$$

Integrirali bomo diferenciale nabojev $\rho \mathrm{d}v$ v prostoru $\mathcal{V}$, $\sigma \mathrm{d}a$ na ploskvi $\mathcal{A}$, $q\mathrm{d}l$ na krivulji $\mathcal{L}$ ali sešteti množine Q_k.

39:13

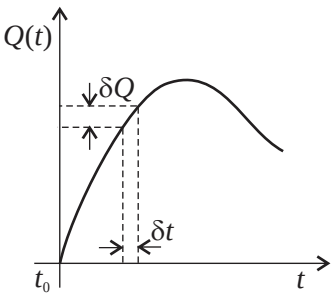
§3. Električni tok



Brž ko so nosilci naboja v gibanju, govorimo o električnem toku. Tok kot pretok elektrin nas asociira še na druge toke: na vodni tok, energijski tok ali moč, na masni tok idr. Lahko bi tudi rekli: tok je intenzivnost pretoka naboja (energije, mase, fluida). Sama definicija terja verjetno še kaj več. Pomembna je ploskev, skozi katero izražamo pretok, in pa njeno lice. Če je energijski tok skozi okno iz hiše 10 W, je tok skozi isto okno v hišo –10 W. Pri izražanju toka skozi ploskev moramo izbrati referenčno smer. Govorimo o pretoku skozi orientirano ploskev. Je pa električni tok v nečem drugačen od ostalih. Pri električnem imamo dve vrsti nosilcev, negativne (elektroni, anioni) in pozitivne (protoni, vrzeli, kationi). Če anion prečka ploskev v izbrani smeri, je to v luči migracije naboja enako prehodu enakovalentnega kationa v nasprotni smeri. S tem uvodom smo že pripravljeni na definicijo električnega toka i skozi orientirano ploskev $\mathcal{A}$:

$$i = i_{\text{skozi}\,\mathcal{A}} = \lim_{\text{"}\delta t\to 0\text{"}} \frac{\delta Q}{\delta t} = i(t).$$

Električni tok je definiran z limito kvocienta množine naboja δQ, ki prestopi orientirano ploskev v referenčni smeri, in časovnega intervala δt, v katerem se to zgodi; pri tem naj je interval δt čim krajši. Ker je intenzivnost prečkanja nabojev skozi ploskev v splošnem spreminjajoča, je tak, spreminjajoč, časovno odvisen, tudi tok, $i = i(t)$.



Funkcija pretečenega naboja. Da bi z zgornjo limito zmogli izraziti tok ob vsakem času, moramo imeti na voljo funkcijo, ki bo sporočala, kolikšna množina naboja je prestopila ploskev v izbrani smeri od izhodiščnega trenutka t_0 do kasnejšega trenutka t. To funkcijo imenujmo funkcija pretečenega naboja in jo označimo s $Q(t)$. Pretečeni naboj v intervalu δt med trenutkoma t in $t + \delta t$ je očitno enak razliki $Q(t + \delta t) - Q(t)$. Od tu je

$$i(t) = \lim_{\text{"}\delta t\to 0\text{"}} \frac{\delta Q}{\delta t} = \lim_{\text{"}\delta t\to 0\text{"}} \frac{Q(t+\delta t) - Q(t)}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = Q'(t) \quad \Longrightarrow \quad i = Q'.$$

Relacijo beremo: tok skozi ploskev je odvod funkcije pretečenega naboja. Merska enota električnega toka je amper (A). Amper je ena od sedmih osnovnih enot mednarodnega sistema SI; kulon (C = As) je izpeljana enota. Amper je definiran z

magnetno silo, ki deluje med vzporednima, dolgima in tankima tokovodnikoma, ki sta 1 m vsaksebi; več o tem v poglavju o magnetiki.

Najpreprostejše je enakomerno pretakanje naboja. Funkcija pretečenega naboja je takrat linearna, $Q(t) = at + b$; a in b sta konstanti, prva se izraža v A, druga v C. Odvod $Q'(t)$ je električni tok $i(t) = a$. Tok je nespremenljiv, je konstanten; takšne, časovno nespremenljive, srečamo v enosmernih električnih vezjih.

Vzemimo primer iz naprave, ki je priključena na omrežje nizke napetosti, frekvence $f = 50$ Hz. Tok v neki žici v napravi naj določa funkcija $i(t) = I_\mathrm{m}\cos(\omega t + \alpha)$ s podatki: amplituda $I_\mathrm{m} = 10$ A, krožna frekvenca $\omega = 2\pi f$ in »začetni« kot $\alpha = \pi/3\,\mathrm{rad} = 60°$. Poiščimo funkcijo pretečenega naboja $Q(t)$. Zgornjo zvezo uporabimo v obratni smeri, da iščemo funkcijo $Q(t)$, katere odvod je dani tok $i(t)$. Ni težko ugotoviti, da je iskani $Q(t) = (I_\mathrm{m}/\omega)\sin(\omega t + \alpha) + Q_0$, kjer je Q_0 poljubna konstanta. Njen sinusni del ima amplitudo $10\,\mathrm{A}/100\pi\,\mathrm{s}^{-1} = 31{,}6$ mC. Če opazujemo pretok naboja od trenutka t_0, ko ima $Q(t)$ minimalno vrednost, potem se v času prve polperiode skozi namišljen presek žice preseli 63,2 mC naboja, v času druge polperiode pa se enaka množina naboja premakne v nasprotni smeri. Množica, ki prečka namišljen presek in ga zatem prečka še v nasprotni smeri, šteje $(0{,}0632/1{,}602)\cdot 10^{19} \cong 4\cdot 10^{17}$ prostih elektronov.

Če sta naboj in tok v odnosu »tok je odvod naboja«, potem je obratna zveza integral. Pišimo:

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad i(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}Q(t).$$

Produkt trenutne vrednosti toka i in diferenciala $\mathrm{d}t$ določa diferencialni naboj $\mathrm{d}Q$, ki v času $\mathrm{d}t$ prečka ploskev. Množino naboja, ki prečka ploskev med časoma t_1 in t_2, dobimo z integracijo (seštevanjem) diferencialnih paketov naboja:

$$\int_{t_1}^{t_2} i(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}Q(t) = Q(t_2) - Q(t_1) \quad\Longrightarrow\quad Q(t_2) = Q(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} i(t)\mathrm{d}t.$$

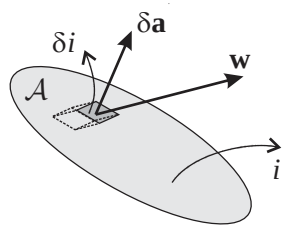
Naboj $Q(t_2)$, ki je ploskev prečkal do časa t_2, je enak vsoti naboja $Q(t_1)$, ki je ploskev prečkal do časa t_1, in naboja, ki je to ploskev prešel med obema časoma; $Q(t)$ je očitno v vlogi funkcije pretečenega naboja.

Vrste električnih tokov. Nekaj primerov tokov smo že omenili, vseh pa še ne. Električni toki in njihova poimenovanja so namreč v tesni zvezi z različnimi elektromagnetnimi pojavi in z okoliščinami, v katerih se odvija migracija nabitih delcev. Ker vsega tega še ne poznamo, se zaenkrat zadovoljimo z okvirno razvrstitvijo tokov. V prvo skupino sodita konduktivni in konvektivni tok. Zanju je značilno migriranje prostih nosilcev naboja. Prvega srečamo v kovinah in tekočinah, v katerih so nosilci naboja elektroni oziroma ioni, drugega pa v plinih ali v praznem prostoru, kjer so nosilci naboja ioni ali osnovni delci. V drugo skupino spadata polarizacijski in magnetizacijski tok. Zanju je značilno migriranje vezanih nosilcev naboja znotraj območja atoma ali molekule. Prvega srečamo v dielektrikih in izolantih, drugega pa v magnetikih.

§4. Gostota električnega toka

43:27

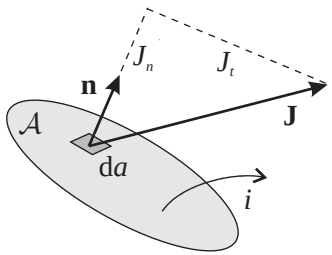
Električni tok sporoča intenzivnost prečkanja naboja skozi ploskev, nič pa ne govori o intenzivnosti migriranja skozi dele te ploskve; v splošnem je ta na različnih delih njene površine različna. – To informacijo bi bilo gotovo zaželeno spoznati. Količina, ki govori o tem, je gostota električnega toka. Osredotočimo se na delček ploskve s površinico δa, ki ji priredimo vektor $\mathbf{n}\delta a$; $\mathbf{n}$ je enotski vektor normale na ploskev na tistem mestu. Ob tej ploskvici si omislimo majhno gručo nabojev s prostorninsko gostoto ρ, ki naj jo prečka s hitrostjo $\mathbf{w}$. Zamislimo si jo kot poševno prizmo z vektorjema osnovne ploskve $\mathbf{n}\delta a = \delta\mathbf{a}$ in stranskega robu $\mathbf{w}\delta t$, pri čemer je δt čas, ki je potreben, da se naboji iz prizme v celoti preselijo na drugo stran ploskve. Množino naboja v prizmi določata gostota ρ in prostornina δv, slednjo pa skalarni produkt vektorjev osnovnice in poševnega robu prizme. Tok δi skozi ploskvico izraža kvocient pretečenega naboja in intervala časa,



$$\delta i = \frac{\rho\delta v}{\delta t} = \frac{\rho(\delta\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}\delta t)}{\delta t} = \rho\mathbf{w}\cdot\delta\mathbf{a} = \mathbf{J}\cdot\delta\mathbf{a} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{J} = \rho\mathbf{w}.$$

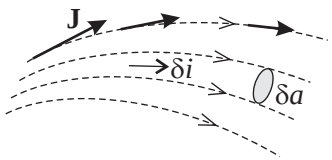
Ponuja se uvedba nove količine, vektorja $\mathbf{J}$, ki v produktu združuje prostorninsko gostoto naboja in vektor hitrosti. Dobili smo vektor gostote električnega toka $\mathbf{J}$, ki v produktu z vektorjem ploskvice da tok δi skozi njo.

Ploskev $\mathcal{A}$ razdelimo na m ploskvic s površinami δa_k, ki jim pripadajo vektorji $\delta\mathbf{a}_k$. Gostoto toka na k-ti ploskvici določa vektor $\mathbf{J}_k$ (indeks k teče od 1 do m), tok δi_k skozi to ploskvico pa produkt $\mathbf{J}_k\cdot\delta\mathbf{a}_k$. Tok skozi celotno ploskev $\mathcal{A}$ opredeli šele vsota. Vsota bo verodostojna, če bo ploskvic kar največ, vsaka od njih pa kar najmanjša. To doseže limita vsote, ki z naraščajočim m preide v integral,



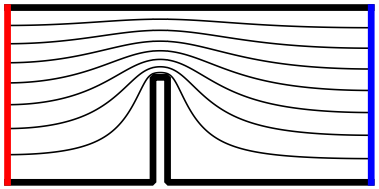
$$i = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\mathbf{J}_k\cdot\delta\mathbf{a}_k = \int_{\mathcal{A}}\mathrm{d}i = \int_{\mathcal{A}}\mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}}J_n\mathrm{d}a.$$

Tok i skozi ploskev je zvezna vsota oziroma integral diferencialnih tokov $\mathrm{d}i = \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = J_n\mathrm{d}a$; pri tem pomeni J_n normalno komponento gostote $\mathbf{J}$, tisto, ki ploskev »prečka«, J_t pa tangentno , ki ploskev zgolj »oplazi«. Pod znak integrala dodajamo



še $\mathcal{A}$, ki določa področje integracije. Zapis je simboličen in ga bomo kot takega uporabljali tudi kasneje. Glede na to, da se integracija vrši po ploskvi, rečemo zgornjemu zapisu tudi ploskovni integral vektorske funkcije.

Grafično upodabljanje tokovnega polja. Tokovno polje upodabljamo s črtami, na katerih je vektor **J** tangenten; rečemo jim tokovnice ali gostotnice. Če sosednje gostotnice bočno (namišljeno) povežemo v ploskve, dobimo t. i. pretočne cevke.



tokovnice v zareznem uporu

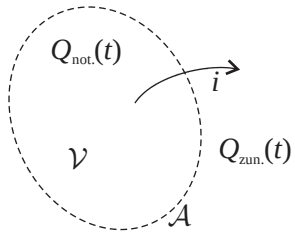
Učinki gostote električnega toka. V prevodni snovi je gostota toka pomembna količina, saj se nanjo navezuje termični učinek (segrevanje snovi). Dopustna gostota toka v bakru, pri kateri še ni potrebno prisilno odvajanje toplote, je okoli $4\,\mathrm{A/mm^2}$ oziroma $4 \cdot 10^6\,\mathrm{A/m^2}$. Iz poznane gostote prostega naboja za baker sledi: $w = J/|\rho| \cong 300\ \mu\mathrm{m/s}$. Rezultat nas preseneča. Poprečna hitrost skupine prostih elektronov je neznatna in žal ne ustreza hitrostim posameznih elektronov v njej. Že brez delovanja elektromagnetne sile so hitrosti prostih elektronov tudi do 100 km/s, kar je posledica notranje energije snovi. Za to gibanje je značilna kaotičnost, ki elektrone v poprečju pušča na izhodiščem mestu. Termični učinek srečamo tudi v drugačnih okoliščinah: segreva se zaslon, v katerega trkajo elektroni, segrevajo se fluorescenčna svetila, zaradi stalnih polariziranj ali magnetiziranj se segrevajo dielektriki in magnetiki. Gostota električnega toka učinkuje tudi na žive organizme (fiziološki učinek). Od zunaj vsiljene električne toke primerjamo z bio-električnimi (endogenimi) toki, ki so posledica aktivacije tkiv, mišic, srca in možganov; gostota slednjih se giblje od $100\,\mu\mathrm{A/m^2}$ do $10\,\mathrm{mA/m^2}$. Od zunaj vsiljenega gostota toka $100\,\mathrm{mA/m^2}$ vpliva na spremembo lastnosti celic in tkiv in že more služiti v terapevtske namene, gostote do $1\,\mathrm{A/m^2}$ dosežejo nivo vzdražljivosti živčnih in mišičnih celic, večje gostote pa so za biološki sistem lahko že nevarne (dihalne motnje, motnje ritma srca in podobno).

§5. Kontinuitetna enačba

27:30

Izhodišče je zakon o ohranitvi električnega naboja (elektrine), ki je eno osnovnih načel fizike. Iz njega izhajajo nekatere ključne relacije. Načelo pravi: če v izoliran sistem ne vstopi niti iz njega ne izstopi noben nabit delec, se množina naboja v njem ohranja. Naboj sistema je relativistična invarianta, je nespremenljiv, čeravno se sistem giblje. Pri masi je drugače: če potuje telo z desetinko svetlobne hitrosti, se mu masa poveča za pet promil. Izoliran sistem je tudi univerzum: vse je v njem in nič ni izven njega; množina naboja v njem se torej ohranja. Imejmo v njem prostor $\mathcal{V}$, ki ga ograjuje t. i. sklenjena ploskev $\mathcal{A}$. Nabiti delci so v splošnem v gibanju: so takšni, ki se gibajo izključno izven ali znotraj $\mathcal{V}$, in takšni, ki ograjo $\mathcal{A}$ prehajajo. V duhu ohranitvenega zakona je v vsakem trenutku t vsota množin notranjega in zunanjega naboja enaka,

$$Q_{\text{not.}}(t) + Q_{\text{zun.}}(t) = C = \text{konstanta} \quad \Rightarrow \quad Q'_{\text{not.}}(t) + Q'_{\text{zun.}}(t) = 0.$$



Če je tako, potem v primeru naraščanja notranjega naboja kopni zunanji in obratno – to gre na račun migracij prek meje. Izberimo eksterno orientacijo ograje $\mathcal{A}$, z licem, usmerjenim iz $\mathcal{V}$. V $Q_{\text{zun.}}(t)$ prepoznavamo funkcijo pretečenega naboja skozi ograjo v zunanjost. Tok v zunanjost je torej odvod zunanjega naboja oziroma negativni odvod notranjega naboja,

$$i(t) = Q'_{\text{zun.}}(t) = -Q'_{\text{not.}}(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = -Q'_{\text{not.}}(t).$$

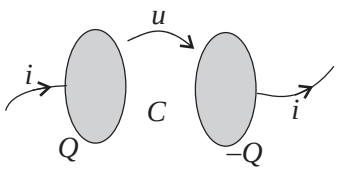
Dobili smo kontinuitetno enačbo, ki jo običajno pišemo v desni obliki: kot odnos med eksterno orientiranim tokom in notranjim nabojem. V integralni obliki izgleda zapis takole:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}v.$$

Levi integral pomeni tok i v zunanjost skozi sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$, zato to integracijo simbolično opremimo s krogcem, desni integral pa pomeni množino naboja v $\mathcal{V}$.

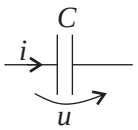
Ker je integral gostote $\mathbf{J}$ po sklenjeni ploskvi enak toku i oziroma pretoku naboja v zunanjost, spremlja to in katerokoli drugo integracijo vektorske funkcije skozi sklenjeno ploskev sledeča interpretacija. Če ima levi integral, pretok, v danem

trenutku pozitivno vrednost, rečemo, da je prostor $\mathcal{V}$ takrat izvor, v nasprotnem pa, da je ponor. Vpletli smo torej pojem izvornosti vektorskega polja, ki ga zakjučuje tale ugotovitev: tokovno polje je izvorno vektorsko polje.



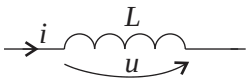
Kontinuitetna enačba je med drugim pomembna tudi za kondenzator, sistem dveh prevodnih in med seboj izoliranih teles s priključkoma za povezovanje v električno vezje. Naboj, ki na prvo telo priteka skozi levi priključek, je številsko enak naboju, ki drugo telo zapušča skozi desni priključek. Vsota nabojev na telesih je vsak trenutek enaka nič. Če ima prvo telo naboj Q, ima drugo telo naboj $-Q$. Med prvim in drugim telesom je električna napetost $u = Q/C$, kjer je C kapacitivnost kondenzatorja. Po kontinuitetni enačbi je tok i v prvo telo enak odvodu naboja tega telesa,

$$i = Q' = (Cu)' = Cu' \quad \Rightarrow \quad i = Cu'.$$



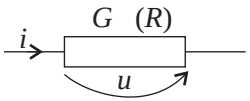
Zgornji podobna relacija je zveza med napetostjo in tokom na tuljavi, kot klopki žice, z induktivnostjo L: tok in napetost ter kapacitivnost in induktivnosti si zamenjajo vloge,

$$u = Li'.$$



Tok in napetost sta si na tuljavi oziroma kondenzatorju v diferencialno-integralnem odnosu. Gotovo poznamo tudi zvezo med tokom in napetostjo na uporu prevodnosti G, za katerega velja

$$i = Gu.$$



Kondenzator, upor in tuljava so elementi, ki bodo zaznamovali naše obravnave: obravnava električnega polja bo privedla do kondenzatorja in C-vezij, obravnava tokovnega polja do upora in R-vezij, obravnava magnetnega polja do magnetnih vezij in obravnava induciranega električnega polja do tuljave in RLC-vezij.

§6. Razrez vsebine osnov elektrotehnike

27:24

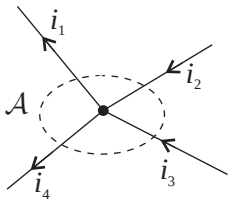
Zadnji razdelek tega poglavja namenjamo razrezu vsebine osnov elektrotehnike. Zaporedje tem ustreza zgodovinskemu toku spoznavanja elektromagnetizma kot temelja elektrotehnike. Izhodišče razreza je kontinuitetna enačba,

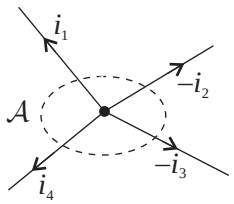
$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}v.$$

Elektrostatika in kondenzatorska vezja. Proučevanje polja mirujočih nabojev ($\mathbf{w} = \mathbf{0}$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$) je najzgodnejše. To polje predstavlja določen ideal, ki ga v takšni obliki praktično ne srečamo, naletimo pa nanj v nadaljevanju, in sicer v družbi s tokovnim, z magnetnim in elektromagnetnim poljem. Podobno postopamo v fiziki nasploh, in sicer, da okoliščine nekega problema v začetku poenostavimo (idealiziramo), kasneje pa te nadgradimo oziroma razširimo. Če ostajamo pri zgornji omejitvi ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$), potem je levi integral kontinuitetne enačbe enak nič, integral gostote naboja v danem prostoru $\mathcal{V}$ pa je konstanta. Naboj je v prostoru razporejen tako kot je, podajajo pa ga porazdelitvena funkcija $\rho = \rho(T)$ in druge. Govorili bomo o Coulombovem zakonu električne sile, o elekrični poljski jakosti, potencialu, napetosti, prevodniku, polarizaciji, dielektriku, električnem pretoku, kondenzatorju, električni energiji, gibalnih procesih in kondenzatorskih vezjih.

Tokovno polje in enosmerna vezja. To področje je aktualno pri časovno stalnih ali enosmernih tokih, ko je $\mathbf{J} = \mathbf{J}(T)$ le krajevna funkcija. Pri izbrani sklenjeni ploskvi $\mathcal{A}$ bi imela leva stran kontinuitetne enačbe določeno vrednost k. Integral z desne, ki predstavlja notranji naboj, bi bil linearna funkcija, $Q_{\text{not.}}(t) = -kt + k_1$. Ta sporoča, da bi množina naboja v $\mathcal{V}$ s časom presegla vse meje, kar je fizikalni nesmisel: v končnem prostoru vendar ne more biti neomejene množine naboja. Edina možnost je, da je $k = 0$, iz česar sledi, da je integral z desne strani kontinuitetne enačbe v kateremkoli prostoru $\mathcal{V}$ nespremenljiv, da je $\rho = \rho(T)$, torej takšen kot v elektrostatičnem polju, torej le krajevna funkcija,

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \quad \text{in} \quad Q'_{\text{not.}} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}v = k_1.$$





Z vidika izvornosti lahko rečemo, da je časovno nespremenljivo tokovno polje neizvorno. Aktualen je primer spojišča vodnikov. V danem razvejišču enosmernih tokov sta referenčni smeri tokov i_1 in i_4 orientirani iz spojišča, referenčni smeri tokov i_2 in i_3 pa k spojišču. Ker so toki $i_1, -i_2, -i_3$ in i_4 izhodni in ker za sklenjeno ploskev velja, da je celoten izhodni tok skozi njo enak nič, dobimo tole bilančno enačbo: $i_1 + (-i_2) + (-i_3) + i_4 = 0$. Če ugotovljeno razširimo na stičišče n tokov, dobimo t. i. prvi Kirchhoffov zakon enosmernih električnih vezij ali zakon spojišča,

$$\sum_{k=1}^{n} (\pm) i_k = 0.$$

Alternacija $\pm$ je namenjena določitvi predznaka toka v bilančni enačbi glede na predhodno izbiro referenčnih usmeritev tokov v strukturi. Uravnoteženost tokov velja pogosto tudi za časovno spremenljive toke, vendar je to takrat pogojeno še z elementi, ki jih ploskev $\mathcal{A}$ objame. V okviru časovno nespremenljivih tokov bomo obravnavali model trkov, Ohmov in Joulov zakon, prevodnost, upornost, upor, moč, tokovni in napetostni vir, spoznali postopke za analizo enosmernih vezij in teoreme, ki veljajo v takšnih vezjih.

Magnetostatika in magnetna vezja. Nadaljevali bomo z magnetnim poljem: spoznali bomo Amperov zakon magnetne sile, vektor gostote magnetnega pretoka in magnetni pretok, magnetizacijo, magnetno poljsko jakost, magnetilne krivulje in koncept magnetnih vezjih.

Elektrodinamika in izmenična vezja. Zadnje poglavje bo v znamenju časovno spremenljivih tokov in nabojev, kar je tudi splošno sporočilo kontinuitetne enačbe. Dinamično polje bodo opredeljevale krajevno-časovne vektorske funkcije, strukture strnjenih elementov oziroma električnih vezij pa časovno spremenljive količine, kot so napetosti in toki, moči in energije. Izhodišči bosta Faradayev indukcijski zakon in Maxwellove enačbe. Govorili bomo o inducirani napetosti, induktivnostih in sklopljenih tuljavah, magnetni energiji, elektromagnetu, o valovanju in difuziji, o prehodnih pojavih v električnih vezjih in o analizi izmeničnih električnih vezij.

Elektrostatično polje in kondenzatorska vezja

§7. Coulombov zakon električne sile (2)

§8. Električna poljska jakost (12)

§9. Gaussov zakon (7)

§10. Električna poljska jakost (16)

§11. Gradient potencial (8)

§12. Električni dipoli (6)

§13. Prevodnik in elektrostatično polje (19)

§14. Dielektrik in elektrostatično polje (10)

§15. Mejna pogoja elektrostatičnega polja (5)

§16. Električni vir ter kapacitivnost in kondenzator (16)

§17. Zrcaljenje (6)

§18. Električna energija (10)

§19. Gibalni procesi v elektrostatičnem polju (6)

§20. Kondenzatorska vezja (4)

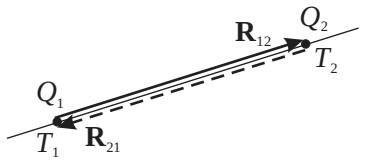
§7. Coulombov zakon električne sile

28:52

Zakon električne sile govori o interakciji med mirujočimi naboji. Daljše obdobje proučevanja te sile je sklenil francoski fizik Charles Augustin de Coulomb. Izdelal je precizno torzijsko tehtnico, s katero je verodostojno meril električno silo med naelektrenima kroglicama. Glavna zakonitost te sile je bila znana že precej pred njim in ima identične lastnosti kot težnostna oziroma gravitacijska sila. Razlika do slednje je v tem, da je električna sila lahko ali privlačna ali odbojna in da je to odvisno od predznakov obeh naelektritev. Težnostna sila je bila tudi tista dobrodošla okoliščina, ki je proučevanju električne sile dala dodaten zagon, kajti matematična orodja zanjo so bila takorekoč že pripravljena.

Sili med točkastima nabojema. Točkast naboj sprejemamo kot ideal, ki ga pripišemo majhnemu naelektrenemu telesu. Coulombov zakon se nanaša na sili med dvema točkastima nabojema. Zakon pravi: 1) vektorja električnih sil na točkasta naboja sta si nasprotna in ležita na premici skozi njiju, 2) absolutna vrednost obeh sil je sorazmerna absolutni vrednosti produkta nabojev in obratnosorazmerna kvadratu njune oddaljenosti, 3) pri enako predznačenih nabojih sta sili odbojni, sicer pa privlačni.

Naj sta $T_1(x_1, y_1, z_1)$ in $T_2(x_2, y_2, z_2)$ točki, v katerih sta naboja Q_1in Q_2; $\mathbf{R}_{12}$ in $\mathbf{R}_{21}$ naj sta vektorja razdalje med njima:



$$\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \;\; \Rightarrow \;\; R_{12} = R_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Vektorja predstavljata usmerjeni daljici med nabojema, njuna absolutna vrednost pa ustreza razdalji med njima. Ni težko preveriti, da naštetim trem zakonitostim Coulombove sile ustrezata sledeča zapisa:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e}1}^{(2)} = k\frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^3}\mathbf{R}_{21} \;\; \text{in} \;\; \mathbf{F}_{\mathrm{e}2}^{(1)} = k\frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^3}\mathbf{R}_{12} \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{F}_{\mathrm{e}1}^{(2)} + \mathbf{F}_{\mathrm{e}2}^{(1)} = \mathbf{0}.$$

Pojasnilo terjata indeksa sil. Spodnji indeks označuje naboj, na katerega se sila nanaša, zgornji (v oklepaju) pa označuje »vzročni« naboj. Konstante k je imela za časa Coulomba vrednost ena, sama enačba pa je bila podlaga za definicijo enote

električnega naboja. V CGS (centimeter-gram-sekunda) sistemu merskih enot je tako še danes (imenuje se elektrostatični kulon), v mednarodnem sistemu SI pa je konstanta

$$k = 1/(4\pi\varepsilon_0).$$

Konstanta ε_0 je električna konstanta (influenčna konstanta, dielektričnost, permitivnost vakuuma), ki se v SI navezuje na magnetno konstanto μ_0 (permeabilnost vakuuma) in svetlobno hitrost c_0 v vakuumu na sledeči način:

$$\varepsilon_0\mu_0 c_0^2 = 1, \quad \text{kjer sta} \quad c_0 = 299792458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \text{in} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}.$$

Svetlobna hitrost nastopa v definiciji metra, magnetna konstanta pa je prikrito prisotna v definiciji ampera. Od tod sledi

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \cong 8{,}854187817 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}}.$$

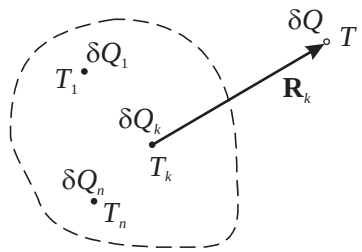
Za svetlobno hitrost se pogosto uporablja približek $3 \cdot 10^8$ m/s, kar da približek za električno konstanto:

$$c_0 \cong 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 \cong \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{V\,m}}{\mathrm{A\,s}}.$$

Z dvema nabojema ne moremo »delati« elektrotehnike; potrebnih bo »več« njih! Brž ko je tako, je več tudi sil. Na vsakega od njih deluje več delnih sil. Za pridobitev vektorja sile na izbran naboj bo potrebno delne sile vektorsko sešteti.

§8. Električna poljska jakost

17:14



Za primer, ko bo izbrani naboj δQ ob gruči drugih, se moramo primerno pripraviti. Gruča naj je takšna, da jo bo kasneje možno približati strukturam, ki smo jih predstavili v uvodu (da je elektrina v prostoru z gostoto ρ, ali na ploskvi z gostoto σ, ali na krivulji z gostoto q, ali točkasta). Gručo si predstavimo kot skupino n neznatnih nabojev δQ_k (v prostorninah δv_k, ali na površinah δa_k, ali na lokih δl_k) s središčnimi točkami T_k (indeks k teče od 1 do n). Po potrebi jih bomo zapisali kot $\rho(T_k)\delta v_k$, ali $\sigma(T_k)\delta a_k$, ali $q(T_k)\delta l_k$, ali kot $\delta Q(T_k)$. Izbrani ali testni naboj δQ naj je v točki T. Električno silo $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}$ nanj izrazimo z vsoto delnih ali parcialnih sil:

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} = \sum_{k=1}^{n} \delta\mathbf{F}_\mathrm{e}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta Q \delta Q_k}{4\pi\varepsilon_0 R_k^3}\mathbf{R}_k = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta Q_k}{R_k^3}\mathbf{R}_k.$$

Kar je delnim silam skupnega, smo izpostavili. Pod znakom vsote ostajajo naboji, soodgovorni za silo na testni naboj, in konstelacija nabojev, ki jo določajo vektorji $\mathbf{R}_k$, usmerjeni od T_k k T. Zapis je splošen in ne daje vpogleda v rezultančni vektor. Nekaj je gotovo: sila na testni naboj je njemu sorazmerna: če množino naboja δQ podvojimo, se tudi $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}$ podvoji, če naboju spremenimo predznak, se sili spremeni usmerjenost. Ponuja se priložnost, da električno silo »razbremenimo« naboja. To storimo tako, da vpeljemo sorazmerni vektor $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}/\delta Q$; podobno kot pri gravitaciji, kjer sili teže $\delta\mathbf{F}_\mathrm{g}$, ki deluje na telo z maso δm, priredimo sorazmerni vektor $\delta\mathbf{F}_\mathrm{g}/\delta m$, ki predstavlja težnostni oziroma gravitacijski pospešek $\mathbf{g}$.

20:30

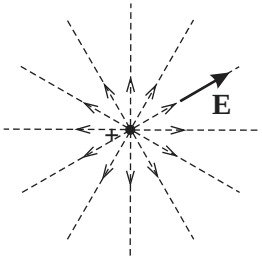
Ob tem vprašanju ne moremo mimo Faradaya in njegove sijajne zamisli o polju. Do Faradaya so fiziki, tako pri težnostni kot pri električni sili, govorili o »delovanju na daljavo«, on pa je s pojmom polje ta pogled presegel. Faraday dalje pravi: nista v interakciji objekta (naboja, masi), ampak je objekt v interakciji s poljem drugega objekta na njegovem mestu. In s tem smo se že v celoti sprijaznili. Govorimo o težnostnem pospešku kot vektorskem polju v okolici planetov, čeravno tam ni objekta; če pa je, deluje nanj sila, ki jo določa produkt mase in pospeška. Faradayeva ideja polja je prostoru dala vlogo, ki jo do takrat prostor ni imel. Faradayev termin polje je prerasel fiziko – srečujemo ga tako v matematiki kot tudi širše.

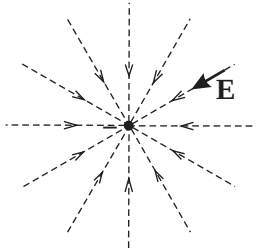
10:29

Na pojmu polje sloni tudi Lorentzova sila; ta ne govori o interakciji med naboji, ampak zgolj o interakciji med nabitim delcem in elektromagnetnim poljem na njegovem mestu. Rekli smo, da je vektor električne poljske jakosti sorazmeren Lorentzovi sili, kadar deluje ta na mirujoči naboj, in prav takšno silo trenutno obravnavamo. Ostaja nam le še korak, da ravnokar zapisano električno silo delimo z nabojem, na katerega se ta naslavlja, in že smo pri iskani vektorski količini:

$$\frac{\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}}{\delta Q}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}^{(k)}}{\delta Q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3}\delta Q_k=\sum_{k=1}^{n}\delta\mathbf{E}^{(k)}(T)=\mathbf{E}(T)\quad\Rightarrow\quad\delta\mathbf{E}^{(k)}(T)=\frac{\delta Q_k}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3}.$$

Vektor električne poljske jakosti **E** se izraža v V/m. V oklepaj postavljamo točko T kot argument, ki pomeni mesto naboja. Če je v točki T naboj, deluje nanj sila $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}=\delta Q\mathbf{E}(T)$, če pa naboja tam ni, je v točki T, kot splošni točki prostora, le polje $\mathbf{E}(T)$. Čeravno se jakost **E** trenutno predstavlja prek električne sile, bo njena vsebina od teme do teme bogatejša. Enega od vrhov bo dosegla proti koncu poglavja, kjer bomo ugotovili, da je poljska jakost **E** sonosilka informacije o električni energiji v prostoru – z njo se bo končno poglobilo tudi razumevanje Coulombove sile.





Iz zapisov razberemo, da moremo polje $\mathbf{E}(T)$ izraziti z vsoto delnih poljskih jakosti. Pravilo seštevanja ali superponiranja delnih sil se prenaša tudi na seštevanje delnih poljskih jakosti $\delta\mathbf{E}^{(k)}(T)$. Delna jakost naboja δQ_k je njegov odtis v točki T. Še več, je njemu lasten »pečat« ter znak njegove prisotnosti v prostoru.

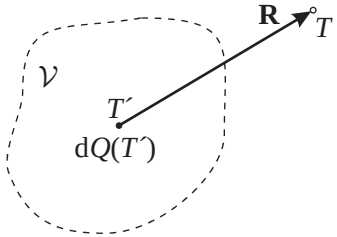
Polje točkastega naboja. Izraz že imamo! Priredimo ga za naboj Q_0, ki se nahaja v točki T_0, od nje k splošni točki T pa seže vektor razdalje $\mathbf{R}_0$:

$$\mathbf{E}(T)=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\quad\Rightarrow\quad E(T)=|\mathbf{E}(T)|=\frac{|Q_0|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\mathbf{R}_0|}{R_0^3}=\frac{|Q_0|}{4\pi\varepsilon_0 R_0^2}.$$

7:31

Vektor razdalje določa polju smer, usmerjenost pa predznak naboja. Če je naboj pozitiven, je vektor jakosti usmerjen od naboja, sicer pa k njemu. Absolutna vrednost usiha s kvadratom oddaljenosti; na dvojni oddaljenosti je jakost četrtinska. Električno polje upodabljamo s silnicami, usmerjenimi linijami, na katerih je vektor **E** tangenten. Pri enem naboju je to še

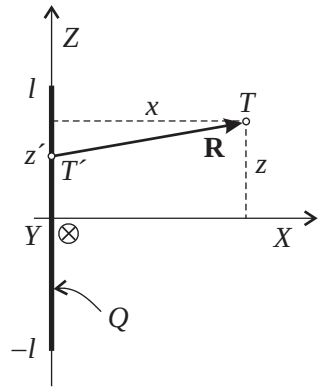
enostavno, brž ko je nabojev več, pa je risanje silnic možno le še z računalniškimi orodji, ki iz množice izračunanih jakosti izrišejo silnice. Premik na silnici predstavlja vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, katerega komponente so med seboj v enakih razmerjih, kot so med seboj komponente vektorja: $\mathrm{d}x : \mathrm{d}y : \mathrm{d}z = E_x : E_y : E_z$. Kasneje bomo spoznali še možnost upodabljanja polja z ekvipotencialnimi ploskvami; za njih bomo ugotovili, da jih silnice elektrostatičnega polja pravokotno »prebadajo«.



Polje splošne elektrinske strukture. Gradnik splošne elektrinske strukture je diferencial naboja. V splošni točki T' ga opredeljujejo zapisi $\rho(T')\mathrm{d}v'$ ali $\sigma(T')\mathrm{d}a'$ ali $q(T')\mathrm{d}l'$ ali $\mathrm{d}Q(T')$. Njegovo polje določa vsebinsko enak izraz kot pred tem izraz za točkasti naboj Q_0. Za določitev rezultančnega polja $\mathbf{E}(T)$ vseh diferencialnih nabojev bo potrebno njihove deleže integrirati. Integracijska točka T' bo morala pri tem »preleteti« tisti prostor $\mathcal{V}$, v katerem se naboji nahajajo. Povedano povzema tale simbolični zapis:

$$\mathrm{d}\mathbf{E}(T) = \frac{\mathrm{d}Q(T')\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(T) = \int \mathrm{d}\mathbf{E}(T) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}Q(T')\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{R}}{R^3}\,\mathrm{d}Q(T').$$

Dobili smo predpis, ki omogoča izračun vektorja električne poljske jakosti v splošni točki T. Pri sami uporabi predpisa je potrebno upoštevati dogovorjene notacije in njihove vsebine.



Električno polje »naelektrene daljice«. Daljica ne more biti nosilka naboja, se pa izkaže, da je naslov kljub vsemu na mestu. Če tanko stekleno palico z drgnjenjem torno naelektrimo, je naboj vzdolž nje razporejen približno enakomerno. Pri palici dolžine $2l$ in naboju Q je dolžinska gostota $q = Q/2l$. Temu soroden je primer naelektrene žice, vendar je pri tem enakomernost že vprašljiva. Izkaže se, da je ob konceh žice naboja več. Zanimivost: če je prevodna palica rotacijski elipsoid z goriščno razdaljo l, ki ima na sredini debelino $d << l$, je dolžinska gostota naelektritve povsem enakomerna.

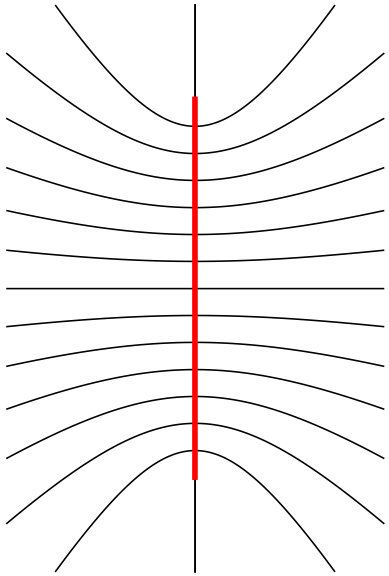
Položimo naelektreno daljico v os Z med koordinati $z_1 = -l$ in $z_2 = l$. Računska točka T ima koordinate $(x, 0, z)$. Splošni diferencialni naboj $\mathrm{d}Q$ daljice je v $T'(0,0,z')$; pisali ga bomo kot $q\mathrm{d}z'$. Vektor razdalje in njegova absolutna vrednost sta

$$\mathbf{R} = (x, 0, z - z') \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{x^2 + (z - z')^2}.$$

Vektor **R** ima od nič različni dve komponenti in enako tudi polje $\mathrm{d}\mathbf{E}(T)$:

$$\mathrm{d}\mathbf{E}(T) = \frac{\mathrm{d}Q(T')\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{q\mathrm{d}z'(x, 0, z - z')}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \mathrm{d}\mathbf{E}(x, z) = \big(\mathrm{d}E_x(x, z), 0, \mathrm{d}E_z(x, z)\big) \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}E_x(x, z) = \frac{qx\mathrm{d}z'}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad \text{in} \quad \mathrm{d}E_z(x, z) = \frac{q(z - z')\mathrm{d}z'}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2 + (z - z')^2)^{3/2}}.$$



silnice v okolici enakomerno naelektrene daljice

Sledita še integraciji:

$$E_x(x, z) = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}z'}{(x^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}\left(\frac{z + l}{\sqrt{x^2 + (z + l)^2}} - \frac{z - l}{\sqrt{x^2 + (z - l)^2}}\right),$$

$$E_z(x, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{(z - z')\mathrm{d}z'}{(x^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + l)^2}}\right).$$

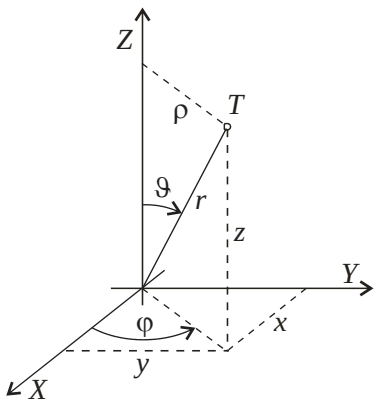
Izraza moremo smiselno uporabiti tudi za katerokoli točko, saj je polje **E** okoli daljice oziroma osi Z očitno rotacijsko simetrično. Zanimive so še točke v osi Z, $(x = 0)$, vendar izven daljice. Tam je $E_x = 0$ (to ugotovimo z l'Hospitalovim pravilom), druga komponenta pa ima razmeroma preprosto obliko,

$$E_z(0, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z - l|} - \frac{1}{|z + l|}\right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{|z - l|} - \frac{1}{|z + l|}\right).$$

33:50

Polje »naelektrene premice«. Izhajajmo iz izrazov za naelektreno daljico, in sicer tako, da krajišči daljice povlečemo v neskončnost, $l \longrightarrow \infty$. Pri prvi komponenti stremi prvi notranji ulomek k 1, drug k -1, celoten izraz v oklepaju pa k 2, pri drugi komponenti stremita oba ulomka k 0; sledi:

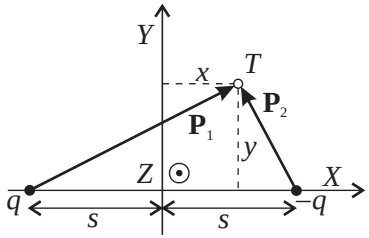
$$E_x(x, z) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 x} \quad \text{in} \quad E_z(x, z) = 0.$$



Zapis polja se izredno poenostavi. Od nič različna ostaja le x komponenta polja in še ta je odvisna le od oddaljenosti x. Pomembna je vsebina: polje $\mathbf{E}$ je pri $q > 0$ usmerjeno stran od premice, pri $q < 0$ k premici, in usiha z oddaljenostjo od nje (pri točkastem naboju usiha polje s kvadratom oddaljenosti). Os X kar naenkrat ni več važna, zato velja prestopiti iz kartezičnega v valjni koordinatni sistem, v katerem je za oddaljenost od osi Z odgovorna koordinata ρ oziroma radij valja okoli osi Z, na katerem leži točka T. Črka ρ se pojavlja v dvojni vlogi; prej gostota, tu koordinata. (Čeravno koristimo dve abecedi, je črk premalo, zato se nekaterim podvajanjem žal ne moremo izogniti.) Oznaka za radij je še črka r, vendar jo hranimo za oddaljenost točke T od izhodišča v krogelnem koordinatnem sistemu s koordinatami (r, ϑ, φ). S prehodom v valjni oziroma cilindrični koordinatni sistem s koordinatami (ρ, φ, z) se polje naelektrene premice opiše zgolj z radialno, z edino od nič različno komponento,

$$E_\rho(\rho) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\rho} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\rho) = E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathbf{e}_\rho.$$

Skici silnic točkastih $\pm$ nabojev sta uporabni tudi v tem primeru. Tam smo silnice risali v ravnini, v kateri je tudi naboj, tokrat pa v ravnini, ki jo naelektrena premica pravokotno prebada.



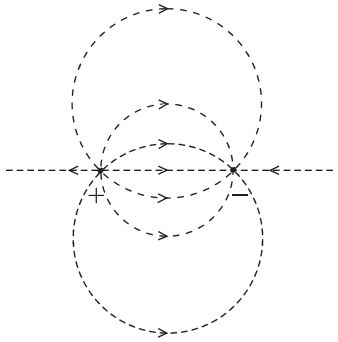
Polje nasprotno naelektrenih vzporednih premic. To bo izredno pomembno polje in izhodišče za več novih primerov (simetrični ali nesimetrični dvovod, vodnik nad zemljo, ekscentrični kabel), ki nas v nadaljevanju še čakajo. Naelektreni premici naj sta vsaka s svoje strani vzporedni z osjo Z in naj ležita na mestih $x = \pm s$. Razmere osvetljuje prerez v ravnini XY. Vektor $\mathbf{P}_1$ je usmerjen od naboja q k točki T, kvocient $\mathbf{P}_1/P_1$ pa je enotski vektor, ki služi zapisu smeri in usmerjenosti polja $\mathbf{E}_1$. Podobno vlogo ima vektor $\mathbf{P}_2$ pri zapisu polja $\mathbf{E}_2$. Sledi:

$$\mathbf{P}_1 = (x+s, y) \text{ in } \mathbf{P}_2 = (x-s, y) \quad \Rightarrow \quad P_1 = \sqrt{(x+s)^2 + y^2} \text{ in } P_2 = \sqrt{(x-s)^2 + y^2}.$$

Rezultančno polje $\mathbf{E}$ je vektorska vsota dveh:

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}_1(T) + \mathbf{E}_2(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 P_1}\frac{\mathbf{P}_1}{P_1} + \frac{(-q)}{2\pi\varepsilon_0 P_2}\frac{\mathbf{P}_2}{P_2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{P}_1}{P_1^2} - \frac{\mathbf{P}_2}{P_2^2}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x+s, y)}{(x+s)^2 + y^2} - \frac{(x-s, y)}{(x-s)^2 + y^2}\right),$$

10:40



katerega komponenti sta:

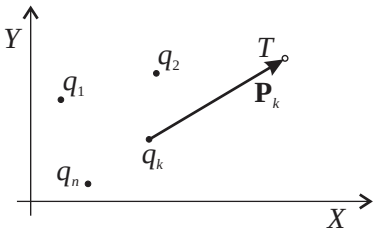
$$E_x(x,y) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x+s}{(x+s)^2+y^2} - \frac{x-s}{(x-s)^2+y^2}\right) \quad \text{in} \quad E_x(x,y) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{(x+s)^2+y^2} - \frac{y}{(x-s)^2+y^2}\right).$$

Izkaže se, da so silnice tega polja krožni loki, ki imajo začetek v pozitivnem in konec v negativnem naboju.

Polje več naelektrenih vzporednih premic. Ta primer služi kot model za opis električnega polja v okolici daljnovodnih vrvi. Premice so vzporedne z osjo Z in so nosilke nabojev z gostotami q_k. Od premic do točke T sežejo vektorji $\mathbf{P}_k$. Vektor $\mathbf{E}$ je vsota več delnih jakosti (n je število premic):

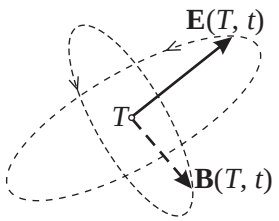
10:07

$$\mathbf{E}(T) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{P}_k}{P_k^2}q_k.$$



Formula je primerna za statične in tudi za kvazistatične razmere. O slednjih govorimo, ko so viri polja, elektrine in toki, časovne funkcije z relativno nizko časovno dinamiko. O tem žal na tem mestu še ne moremo prepričljivo govoriti, lahko pa vzamemo na znanje, da je omrežna frekvenca 50 Hz tista, ki sodi v področje nizke časovne dinamike. V takem primeru postane zgornje električno polje krajevno-časovna funkcija:

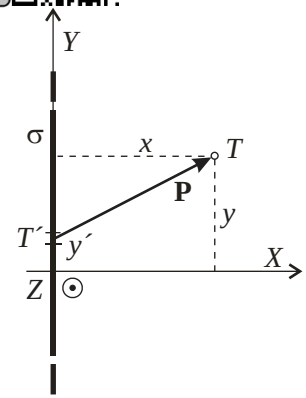
$$\mathbf{E}(T,t) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{P}_k}{P_k^2}q_k(t).$$



Če v primeru treh vodnikov trifaznega sistema vnesemo v formulo naboje kot sinusne časovne funkcije, ki so med seboj fazno premaknjene za $2\pi/3$, ugotovimo, da je polje $\mathbf{E}(T,t)$ vektor, katerega konica »drsi« po elipsi s frekvenco 50 Hz. Če imajo nabojem časovne enake odvisnosti tudi toki v vrveh, velja podobno tudi za magnetno polje $\mathbf{B}(T,t)$, le da je njegova elipsa glede na prejšnjo zasukana za 90°. Elipse so od točke do točke drugačne: imajo različne nagibe, različna razmerja osi, so bolj ali manj sploščene, smer drsenja vektorja pa je nekje v levo, drugje pa v desno.

Polje »naelektrene ravnine«. Mišljena je tanka naelektrena kovinska plošča, ki je z gledišča bližnjih točk, ki niso ravno ob njenem robu, videti kot »ravnina«. Predpostavili bomo enakomerno razporeditev naboja Q po obeh straneh plošče. Če je enostranska površina plošč S, potem je gostota na obeh straneh $Q/2S$. Naboj Q je v dveh plasteh. Smatrali bomo, da je plošča tako tanka, da sta sloja »zlita« v enega z gostoto $\sigma = Q/S$. Enakomernost gostote je tudi tokrat »precej vprašljiva«. Kot pri palici se izkaže tudi tu, da je v osrednjem delu plošče gostota naboja dokaj enakomerna, ob robovih pa se izrazito poveča. Rezultat za polje naelektrene ravnine bo potrebno zato uporabljati »z rezervo«.

25:38



Izhajamo iz zamisli, da je naelektrena ravnina niz naelektrenih premic. Splošni premici dodamo vzporedno še druge, da pokrijemo celotno ravnino YZ. Vsako izmed njih sprejemamo kot trak diferencialne višine $\mathrm{d}y'$, ki je na koordinati $(0, y')$ in ima naelektritev $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}y'$. Splošna točka polja $\mathbf{E}$ ima koordinati (x, y). Vektor razdalje in splošna oddaljenost sta:

$$\mathbf{P} = (x, y - y') \quad \Rightarrow \quad P = \sqrt{x^2 + (y - y')^2}.$$

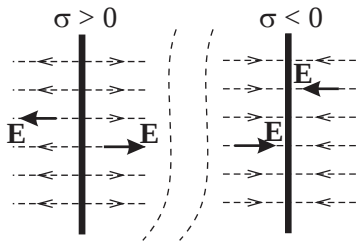
Diferencialno polje premice je:

$$\mathrm{d}\mathbf{E}(T) = \frac{\mathrm{d}q(T')\mathbf{P}}{2\pi\varepsilon_0 P^2} = \frac{\sigma \mathrm{d}y'(x, y - y')}{2\pi\varepsilon_0 (x^2 + (y - y')^2)} = \mathrm{d}\mathbf{E}(x, y) = \Big(\mathrm{d}E_x(x, y), \mathrm{d}E_y(x, y)\Big) \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}E_x(x, y) = \frac{\sigma x}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}y'}{x^2 + (y - y')^2} \quad \text{in} \quad \mathrm{d}E_y(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(y - y')\mathrm{d}y'}{x^2 + (y - y')^2}.$$

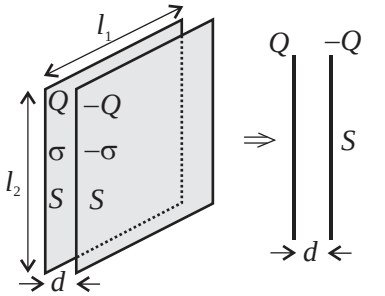
Sledita še integraciji:

$$E_x(x, y) = \frac{\sigma x}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y'}{x^2 + (y - y')^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{x}{|x|} \quad \text{in} \quad E_y(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y')\mathrm{d}y'}{x^2 + (y - y')^2} = 0.$$



Rezultat je preprost. Polje ima od nič različno le x komponento in ima konstantno vrednost; takšnemu polju rečemo, da je homogeno. Pri pozitivni naelektritvi je polje usmerjeno stran od ravnine, sicer pa k njej; silnice so nanjo pravokotne. In kako je s poljem v ravnini? Naelektrene premice nad točko v ravnini gradijo v tej točki polje, ki je ravno nasprotno polju, ki ga v tej točki gradijo premice pod njo; v ravnini je poljska jakost enaka nič. Rezultat zapišemo kot sestavljeno funkcijo:

9:44



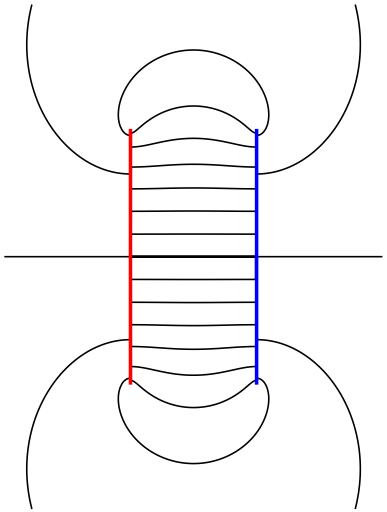
$$E_x(x,y) = \begin{cases} -\sigma/2\varepsilon_0 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \sigma/2\varepsilon_0 & x > 0. \end{cases}$$

Srečujemo se z nezveznostjo: točke pred, v in za ravnino imajo različne vrednosti poljske jakosti.

Polje nasprotno naelektrenih vzporednih ravnin. Bližamo se ploščnemu kondenzatorju, ki je važen elektrotehniški element. Obravnavani ravnini dodamo z desne, na oddaljenost d, še drugo z nasprotno naelektritvijo. Govorimo o polju v levem, vmesnem in desnem prostoru. V krajnih prostorih se vektorja poljskih jakosti nabojev plošč odštejeta, v vmesnem prostoru pa se polje podvoji. Da bo zapis polja simetričen, postavimo ravnino $x = 0$ v sredino med plošči. Upoštevajoč še polje v naelektrenih ravninah, sledi:

$$E_x(x) = \begin{cases} \sigma/\varepsilon_0 & x \in (-d/2, d/2) \\ \sigma/2\varepsilon_0 & x = \pm d/2 \\ 0 & \text{drugje.} \end{cases}$$

18:16



silnice električnega polja v okolici naelektrenih trakov

Prelepo, da bi bilo res! Opozoriti želimo, da v resnici nimamo dveh naelektrenih ravnin, ampak plošči (končnih izmer). Naj sta pravokotnih oblik s stranicama l_1 in l_2. Če je razmik d med njima neznaten, da je $d \ll l_1, l_2$, potem za pretežni del prostora med ploščama lahko trdimo, da sta ti »videti« kot ravnini. Ne moremo pa tega trditi za točke ob robovih plošč. Zgornji zapis tam zagotovo ne velja. Kaj tam potem velja? Težko, vendar rešljivo vprašanje. Ta hip se moramo zadovoljiti s pojasnilom. Numerični modeli kažejo, da je območje solidne homogenosti v kvadru $(l_1 - 2d) \times (l_2 - 2d) \times d$, v kvadru, ki je za $2d$ krajši in nižji od kvadra $l_1 \times l_2 \times d$. Ostaja še vprašanje polja izza plošč. Idealizirane razmere govore, da polja tam ni, v resnici pa je, saj plošči nista ravnini in je v točki izza plošče vpliv bližje večji. Sklepamo lahko, da bo preostanek polja izza plošč pogojen z izmerami plošč in razmikom med njima, vendar o tem kasneje.

Polje »naelektre tanke cevi«. Če naelektrene premice nizamo drugo do druge po obodu valja, dobimo naelektreno cev. Privzemimo, da je cev polmera a enakomerno naelektrena. Površinsko in linijsko gostoto povezuje zveza $\sigma = q/2\pi a$. Na

traku širine $ad\varphi'$ leži točka $T'(a\cos\varphi', a\sin\varphi')$. Za določitev vektorja poljske jakosti v točki $T(x,0)$ na osi X rabimo še vektor razdalje in samo oddaljenost,

20:30

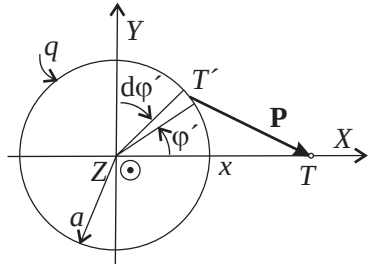
$$\mathbf{P} = (x - a\cos\varphi', -a\sin\varphi') \quad \text{in} \quad P = \sqrt{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi'}.$$

Diferencialno polje naelektrenega traku je:

$$\mathrm{d}\mathbf{E}(T) = \frac{\mathrm{d}q(T')\mathbf{P}}{2\pi\varepsilon_0 P^2} = \frac{qa\mathrm{d}\varphi'\mathbf{P}}{4\pi^2 a\varepsilon_0 P^2} = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{(x - a\cos\varphi', -a\sin\varphi')}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi')}\mathrm{d}\varphi' = \Big(\mathrm{d}E_x(x), \mathrm{d}E_y(x)\Big) \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}E_x(x) = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{(x - a\cos\varphi')\mathrm{d}\varphi'}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi')} \quad \text{in} \quad \mathrm{d}E_y(x) = -\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{a\sin\varphi'\,\mathrm{d}\varphi'}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi')}.$$

Sledita integraciji:



$$E_x(x) = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x - a\cos\varphi')\mathrm{d}\varphi'}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi')} = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 x}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi'}\right)\mathrm{d}\varphi' =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}\left(1 + \frac{x^2 - a^2}{|x^2 - a^2|}\right) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 x} & x > a, \end{cases}$$

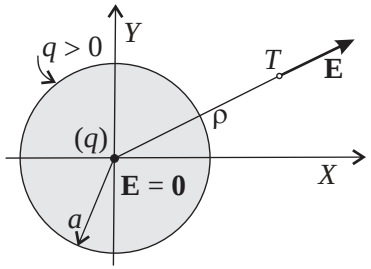
$$E_y(x) = -\frac{qa}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\varphi'\,\mathrm{d}\varphi'}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi')} = 0.$$

Prva integracija ima na intervalu $[-\pi, \pi)$ dva rezultata: v notranjosti cevi je poljska jakost enaka nič, v zunanjosti pa je tolikšna, kot da bi bil naboj s cevi združen v naelektreni premici v njeni osi. Druga integracija da vrednost nič, $E_y = 0$, saj je podintegralska funkcija liha. Polje je očitno rotacijsko simetrično. Prestopimo v valjni koordinatni sistem,

$$E_\rho(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\rho} & \rho > a. \end{cases}$$

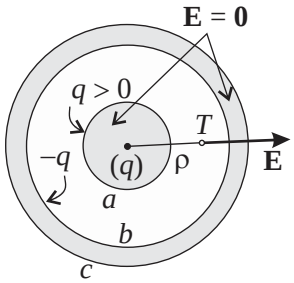
V sami steni cevi ($\rho = a$) je jakost polja enaka srednji vrednosti jakosti z obeh sten cevi. Beseda o nezveznosti bo na bolj splošni ravni tekla kasneje.

6:55



Naelektren prevoden vodnik (žica) krožnega preseka. Čeravno bomo mestu in vlogi prevodnika v elektrostatičnem polju kasneje namenili posebno pozornost, si vseeno dovolimo prehitevanje. Nekaj besed želimo nameniti »virtualnemu okovinjanju prostora«, v katerem (pri dani porazdelitvi naboja) ni polja. V našem primeru je tak prostor notranjost cevi. Virtualnost (namišljenost) je v tem, da si postopek zapolnjevanja tega prostora s prevodno snovjo, kovino, le domišljamo. Naboj, ki je bil pred tem na cevi, postane po tem naboj ob površini vodnika. Ni pa nujno, da je vsa notranjost iz prevodne snovi (npr. cevni vodnik). Pri virtualnem postopku je pomembno predvsem to, da smo prišli do realnega naelektrenega prevodnega objekta. V notranjosti površinsko naelektrenega vodnika ni polja, zunaj njega pa je tolikšno, kot da bi bila vsa vodnikova naelektritev združena v namišljeni naelektreni premici v njegovi osi. Temu sledij tudi označevanje: ob površino vodnika pripišemo naelektritev q, naelektritev ekvivalentne premice v osi pa damo v oklepaj, torej (q).

9:27



Koaksialni kabel. Začnimo z dvema soosnima cevema polmerov a in b z nasprotnima naelektritvama. Ker poznamo polji obeh naelektritev, je do rezultata le še korak. Znotraj notranje cevi ni polja, polje v vmesnem prostoru določa le notranja naelekritev, izven zunanje cevi pa se polji obeh naelektritev izničita. Zapišimo:

$$E_\rho(\rho) = \begin{cases} \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\rho} & \rho \in (a, b) \\ 0 & \text{drugje.} \end{cases}$$

Velja, da je v stenah cevi vrednost jakosti enaka srednji vrednosti jakosti z obeh strani. Izkoristimo možnost okovinjanja: s prevodnikom zapolnimo notranjo cev, zunanjo pa z zunanje strani do radija c. Dobimo koaksialni kabel (linijo, vod), ki služi povezovalnju komponent in naprav. K njemu se bomo še vračali, ne le zaradi elektrostatičnega, pač pa tudi zaradi potreb tokovnega, magnetnega in elektromagnetnega polja.

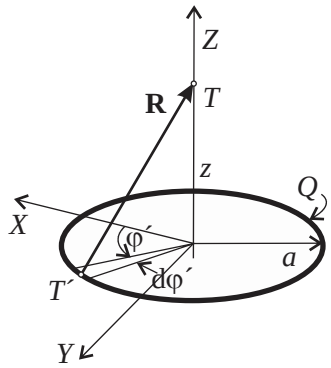
10:28

Polje »naelektrene krožnice«. Tudi naelektrene krožnice ni, je pa krožnica model za obroč, prstan, ovoj ali zanko, ki so pomembni gradniki v elektrotehniki. Če prstan naelektrimo in v okolici ni »motilcev«, pravimo tudi, da je sam v prostoru, je naboj Q enakomerno razporejen po obodu s kotno gostoto $Q/2\pi$. Krožnico z radijem a in nabojem Q položimo v XY

ravnino tako, da je njeno središče v izhodišču. Naj nas v začetku zanima polje v osi Z v točki $T(0,0,z)$. Diferencialni naboj $\mathrm{d}Q = (Q/2\pi)\mathrm{d}\varphi'$ na krožnici naj je v točki $T'(a\cos\varphi', a\sin\varphi', 0)$. Vektor razdalje in absolutna vrednost sta:

$$\mathbf{R} = (a\cos\varphi', a\sin\varphi', z) \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{a^2+z^2}.$$

Sledi diferencial polja $\mathrm{d}\mathbf{E}(T)$:



$$\mathrm{d}\mathbf{E}(T) = \frac{\mathrm{d}Q(T')\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{Q\mathrm{d}\varphi'}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{(a\cos\varphi', a\sin\varphi', z)}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \mathrm{d}\mathbf{E}(z) = \Big(\mathrm{d}E_x(z), \mathrm{d}E_y(z), \mathrm{d}E_z(z)\Big) \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}E_x(z) = \frac{Qa\cos\varphi'\,\mathrm{d}\varphi'}{8\pi^2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}} \;\text{ in }\; \mathrm{d}E_y(z) = \frac{Qa\sin\varphi'\,\mathrm{d}\varphi'}{8\pi^2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}} \;\text{ ter }\; \mathrm{d}E_z(z) = \frac{Qz\mathrm{d}\varphi'}{8\pi^2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

Integrirati je potrebno v mejah od 0 do 2π. Prvi integraciji dasta vrednost nič (na tem intervalu sta integrala sinusne in kosinusne funkcije enaka nič), zadnja integracija pa je integral konstante,

$$E_x(z) = E_y(z) = 0 \;\text{ in }\; E_z(z) = \int_0^{2\pi} \frac{Qz\mathrm{d}\varphi'}{8\pi^2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

V središču ovoja je polje enako nič, drugje pa je vektor polja $\mathbf{E}$ usmerjen vzdolž osi: če je naboj pozitiven, je usmerjen od središča, v nasprotnem pa k središču. Zgovoren je približek na veliki oddaljenosti, $|z| \gg a$:

$$E_z(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \xrightarrow{|z|\gg a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{|z|^3} \quad \Rightarrow \quad |E_z(z)| \xrightarrow{|z|\gg a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|z|^2}.$$

Jakost polja upada s kvadratom oddaljenosti od središča. Seveda: z velike oddaljenosti je krožnica videti kot točka. Kaj pa polje izven osi? Pot, ki smo jo pred tem ubirali, privede do popolnih eliptičnih integralov prve in druge vrste, ki analitično nista rešljiva, sta pa numerično. Vrednosti integralov sta tabelirani po modulu, v katerem je zajeta relevantna geometrija. Na voljo imamo še eno možnost, da krožnico razdelimo na sto, petsto, ... n »kratkih« lokov z naboji Q/n, ki jih smatramo kot točkaste, zatem pa uporabimo formulo za polje gruče nabojev iz začetka razdelka:

$$\mathbf{E}(x,y,z) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3}\delta Q_k = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a\cos(2\pi k/n), y-a\sin(2\pi k/n), z)}{((x-a\cos(2\pi k/n))^2+(x-a\sin(2\pi k/n))^2+z^2)^{3/2}}.$$

Že kratka programska koda privede do rezultata, ki je povsem primerljiv s tistim, ki ga ponudita eliptična integrala.

Iskušnja s poljem naelektrenega prstana je poučna. Gotovo je lepo, če uspemo za nek primer najti rešitev polja v obliki analitične funkcije, če ne, pa tudi ni nobena tragedija. Očitno imamo na voljo možnost, da elektrinski strukturi priredimo primerno gosto točkasto strukturo, tej pa v nadaljevanju določimo rezultančno polje. Uporabljen koncept ne velja le za električna, temveč tudi za magnetna in nasploh elektromagnetna polja.

§9. Gaussov zakon

23:13

Za nami je kar nekaj zgledov Coulombovega polja. Pomembno je predvsem zaključno sporočilo: če se analitična izpeljava nekega primera zatakne, imamo še vedno »izhod«. Ponuja ga numerični približek, ki da povsem soliden rezultat. Nekaj o polju povedo tudi silnice, ki dajejo vtis izvora v pozitivnih in ponora v negativnih nabojih, vendar zaenkrat le na slikovni ravni. In kaj bi o tem lahko rekli še s fizikalno-matematičnega gledišča?

Pojem izvornosti smo omenili ob kontinuitetni enačbi. Ugotovili smo, da je tok iz prostora skozi sklenjeno ploskev enak negativnemu časovnemu odvodu notranjega naboja. To lastnost zapišemo z enačbo

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{not.}}}{\mathrm{d}t}$$

in zaradi nje tudi rečemo, da je tokovno polje izvorno. Pri Gaussovem zakonu je vprašanje na moč podobno: ali lahko kaj rečemo o »pretoku« vektorja **E** skozi sklenjeno ploskev,

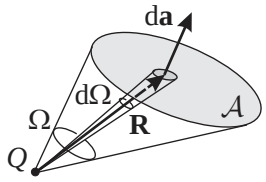
$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = ?$$

Pri pretoku vektorja **J** skozi ploskev nam je bila v pomoč predstava o prehajanju nosilcev naboja, pri pretoku vektorja **E** pa žal te možnosti nimamo. Govorimo le o lastnosti polja **E**, metaforično pa tudi o njegovem »pretoku«.

17:16

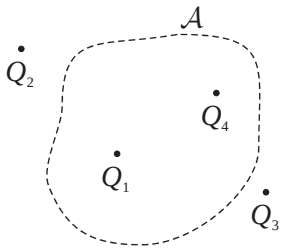
Pretok vektorja E. Vprašanja izvornosti Coulombovega polja se bomo lotili po korakih. V prvem skušajmo odgovoriti na poenostavljeno vprašanje: kolikšen je pretok ϕ_E vektorja **E** točkastega naboja skozi nesklenjeno ploskev. Točkasti naboj izbiramo iz dveh razlogov: njegovo polje je elementarno in vsakršno polje moremo zapisati kot vsoto elementarnih polj. Pri zgornjem integralu »seštevamo« diferencialne pretoke

$$\mathrm{d}\phi_E = \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\mathbf{R}/R)\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_R\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}a_R}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega.$$



Težišče je na geometrijski interpretaciji: kvocient $\mathbf{R}/R$ je enotski vektor $\mathbf{e}_R$, produkt tega vektorja in vektorja ploskvice je vidni del površine te ploskvice, kvocient vidne površine in kvadrata oddaljenosti do nje pa je prostorski kot lijaka, ki ima vrh v naboju. Sklenimo: pretok polja točkastega naboja skozi ploskvico je sorazmeren prostorskemu kotu lijaka, pretok skozi celotno ploskev $\mathcal{A}$ pa je sorazmeren prostorskemu kotu stožca, pod katerim je to ploskev videti iz točke naboja,

$$\phi_E = \int_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\phi_E = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{A}}\mathrm{d}\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega.$$



Enota pretoka ϕ_E je Vm. Rezultat je sila preprost. V drugem koraku ploskev »napihnimo« v balon, ki ga zatem zapremo v sklenjeno ploskev. Lahko se zgodi dvoje: da se naboj znajde v notranjosti sklenjene ploskve ali pa ostane zunaj nje. Če se znajde znotraj ploskve, je prostorski kot, pod katerim se iz točke naboja vidi sklenjeno ploskev, enak polnemu kotu 4π, če pa ostane zunaj ploskve, je prostorski kot enak nič. Tako je zato, ker se sprednji del sklenjene ploskve vidi iz točke naboja skozi prostorski kot, ki je za predznak drugačen od prostorskega kota, skozi katerega se vidi zadnji del sklenjene ploskve. Različnost predznakov prostorskih kotov izhaja iz kotov, ki jih enotski vektor $\mathbf{e}_R$ oklepa z vektorjema ploskvic na zadnji in sprednji strani sklenjene ploskve. Na zadnji strani je kot med njima manjši od 90°, zato ima skalarni produkt pozitivno vrednost, na sprednji strani pa je kot med njima večji od 90°, zato ima skalarni produkt negativno vrednost. Zapišimo:

$$\phi_E = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \begin{cases} Q/\varepsilon_0 & \text{če ploskev naboj objame} \\ 0 & \text{če ploskev naboja ne objame.}\end{cases}$$

Čaka nas še zadnji korak. Naj je točkastih nabojev več, sklenjena ploskev pa katerakoli. Nekaterim nabojem »se zgodi« notranjost, drugim zunanjost. Naj sta prvi in zadnji notranja, drugi in tretji pa zunanja. Rezultančno polje je vsota polj štirih točkastih nabojev, pretok skozi sklenjeno ploskev pa je vsota štirih pretokov. Za vsakega od teh delnih pretokov uporabimo zgornji rezultat in dobimo:

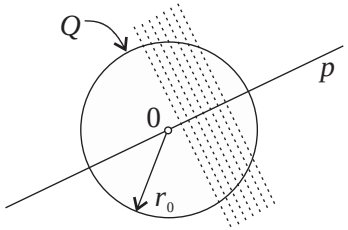
$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} (\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3+\mathbf{E}_4)\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \underbrace{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}_1\cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}_{Q_1/\varepsilon_0} + \underbrace{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}_2\cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}_{0} + \underbrace{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}_3\cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}_{0} + \underbrace{\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}_4\cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}_{Q_4/\varepsilon_0} = (Q_1+Q_4)/\varepsilon_0.$$

Sporočilo je sledeče: za pretok polja **E** skozi sklenjeno ploskev sta »odgovorna« le notranja naboja. Ko bo v prostoru več nabojev, bodo za pretok njihovega skupnega polja skozi katerokoli sklenjeno ploskev »zaslužni« zgolj notranji naboji,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} E_n \mathrm{d}a = \frac{Q_{\text{not.}}}{\varepsilon_0}.$$

Dobili smo občo lastnost Coulombovega polja oziroma t. i. Gaussov zakon polja **E** (kasneje tudi I. Maxwellova enačba).

Polje enakomerno »naelektrene krogelne lupine«. Tako kot premica, daljica ali krožnica tako tudi krogelna lupina ne more biti naelektrena, se pa izkaže kot zelo hvaležen gradnik. Pri naboju Q na lupini polmera r_0 je površinska gostota σ na njej enaka $Q/4\pi r_0^2$. Zanima nas poljska jakost znotraj in zunaj krogelne lupine. Naj je T splošna točka v prostoru. Skozi T in središče lupine, ki naj je izhodišče koordinatnega sistema, položimo premico p. Pravokotno nanjo položimo množico vzporednih ravnin. Te »razrežejo« lupino na kolobarje, vsak kolobar pa je videti kot krožnica. Naelektrena lupina je torej niz soosnih naelektrenih krožnic, katerih polja so usmerjena vzdolž premice p, ki je radialna premica. Zaključimo: vektor poljske jakosti **E** enakomerno naelektrene krogelne lupine ima radialno smer, $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r E_r$. Zaradi krogelne simetrije imajo točke, ki so na enaki oddaljenosti od središča lupine, enako jakost E_r. Uporabimo Gaussov zakon. Za sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ izberimo k naelektreni lupini koncentrično krogelno površino polmera r in pišimo:

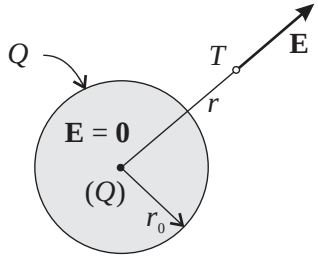


$$\oint_{\mathcal{A}} \underbrace{\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}_{\parallel} = \oint_{\mathcal{A}} E_r \mathrm{d}a_r = E_r \oint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}a_r = 4\pi r^2 E_r = \begin{cases} 0 & r<r_0 \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & r>r_0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad E_r = E_r(r) = \begin{cases} 0 & r<r_0 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>r_0. \end{cases}$$

Vektor ploskvice na njej je radialni vektor, $\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_r\,\mathrm{d}a_r$, in je vzporeden z vektorjem poljske jakosti; poljska jakost ima tam konstantno vrednost, zato gre pred integral, integral površine ploskvic pa je površina krogle, torej $4\pi r^2$. Ploskve $\mathcal{A}$, ki so

8:31

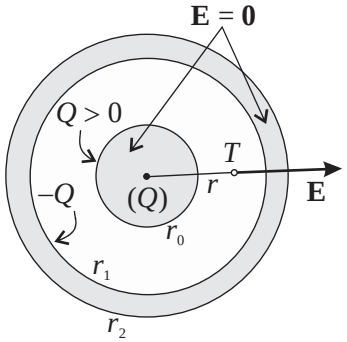
znotraj naelektrene lupine ($r < r_0$), ne objamejo naboja, zunanje ($r > r_0$) pa objamejo ves naboj lupine. Rezultat sporoča: znotraj naelektrene lupine ni polja, zunaj nje pa je takšno, kot da bi bil ves naboj lupine združen v njenem središču.



Polje naelektrene kovinske krogle. Zaradi ničnosti polja v notranjosti naelektrene lupine lahko notranjost okovinimo. Naboj, ki je bil pred tem na lupini, postane obpovršinski na prevodni krogli. V krogli je lahko tudi luknja, da le ne seže do površine. Takšen primer je s prevodno barvo premazana pink-ponk žogica. Naelektrena deluje navzven kot točkast naboj iz središča. Njena površina je mesto originalnega naboja, center krogle pa je mesto namišljenega, virtualnega naboja, kar simbolično nakažemo z nabojem, ki ga damo v oklepaj.

21:37

Krogelni kondenzator. Pričnimo z dvema koncentričnima lupinama radijev r_0 in r_1, ki sta naelektreni z nasprotnima nabojema. Če se sklicujemo na superpozicijo, potem je notranjost notranje lupine brez polja, v vmesnem prostoru je za polje odgovorna naelektritev notranje lupine, izven večje pa se polji nabojev obeh lupin odštejeta. Zapišemo:



$$E_r = E_r(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \in (r_0, r_1) \\ 0 & \text{drugje.} \end{cases}$$

Tudi tokrat sta jakosti polj v stenah lupin enaki srednji vrednosti jakosti z obeh strani lupin. Ko okovinimo notranjost notranje lupine in zunanjost zunanje do radija r_2, dobimo t. i. krogelni kondenzator. Električno polje **E** je »ujeto« med krogelni elektrodi. Tega nismo srečali pri ploščnem kondenzatorju, pri katerem polje delno seže v prostor izza robov plošč; podobno je tudi pri koaksialnem kablu, pri katerem je na konceh kabla nekaj polja tudi izven kabla.

6:48

Krogelni kondenzator oblikujeta tudi površina Zemlje z negativnim nabojem in ionosfera z nasprotnim nabojem. Če bi kot izhodiščno vrednost vzeli okvirno poljsko jakost nad tlemi, $E_r(r_0 \approx 6400\,\text{km}) \cong -120\,\text{V/m}$, bi za površinski naboj Zemlje dobili $Q = -546\,\text{kC}$. Pri tem bi bilo potrebno upoštevati še nekaj okoliščin. Ionosfera ni zgolj lupina, ampak kar debel ionski plašč. Polje ima dnevno-nočno dinamiko, ki jo pestrijo še lokalne atmosferske razelektritve.

Polje naboja v krogelnem oblaku. Oblak naj ima polmer r_0, naboj v njem pa enakomerno gostoto ρ. Sprejeti ga moremo tudi kot model točkastega naboja v smislu »debele točke«. Krogelni oblak tvori niz naelektrenih krogelnih lupin (lupine v lupinah), za katere vemo, kakšna so njihova polja: polja so radialna, zato je takšno tudi polje oblaka. Uporabimo Gaussov zakon in kot sklenjeno ploskev izberimo k oblaku koncentrično krogelno površino polmera r. Pišimo:

16:29

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} E_r \mathrm{d}a_r = 4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} 4\pi r^3\rho/3 & r \le r_0 \\ 4\pi r_0^3\rho/3 & r > r_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_r = E_r(r) = \begin{cases} \rho r/3\varepsilon_0 & r \le r_0 \\ \rho r_0^3/3\varepsilon_0 r^2 & r > r_0. \end{cases}$$

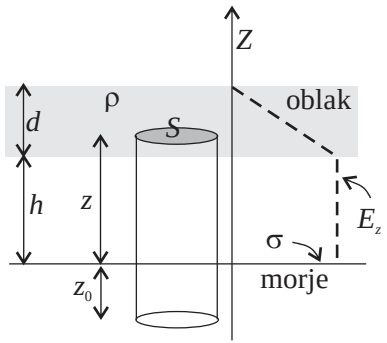
Pri tem smo pozorni na množino naboja, ki jo Gaussova ploskev objame. Sporočilo je: poljska jakost v oblaku je linearna funkcija, ki doseže absolutno največjo vrednost na površini, pri $r = r_0$, od tam dalje pa usiha s kvadratom oddaljenosti od središča oblaka. Če izraz za polje v zunanjosti v imenovalcu in števcu množimo s 4π, prepoznamo v njem izraz za polje E_r točkastega naboja, katerega naelektritev ustreza množini naboja v oblaku.

Ob tem primeru se spomnimo vzporednic med Coulombovim in težnostnim zakonom. Če »prezremo« geološko sestavo Zemlje in privzamemo enakomerno gostoto $\rho_{\text{zem.}}$ snovi v njej, dobimo za pospešek g_r povsem identičen rezultat:

$$g_r = g_r(r) = \begin{cases} -4\pi G\rho_{\text{zem.}} r/3 & r \le r_0 \\ -4\pi G\rho_{\text{zem.}} r_0^3/3r^2 & r > r_0. \end{cases}$$

Prejšnjo konstanto $1/4\pi\varepsilon_0$ nadomešča pri težnosti gravitacijska konstanta G, v minusu pa je sporočilo privleka.

Druge uporabe Gaussovega zakona. Zakon smo uporabili pri krogelnosimetričnih naelektritvah, kar pa ne pomeni, da ne bi z njim ugnali še katere druge. Spomnimo se prejšnjega razdelka: ukvarjali smo se z naelektrenimi premico, valjem in ravnino. Polja smo našli z manj ali bolj zahtevnimi integracijami, z uporabo Gaussovega zakona pa so izpeljave precej lažje. Ukvarjali bi se z določitvijo smeri polj, da sta polji premice in valja radialni, polje ravnine pa je pravokotno nanjo, in izbrali primerne Gaussove ploskve, pri premici in valju soosne valje, pri ravnini pa plašč kvadra, izpisali Gaussov zakon in bi že bili pri rezultatih.



Za konec raziščimo električno polje v prostoru med morsko gladino in nevihtnim oblakom. Oblak naj je razsežna plast debeline d, ki »plava« na višini h nad gladino. Na površju morja naj je pozitiven naboj z gostoto σ, v oblaku pa nasproten s prostorninsko gostoto $\rho = -\sigma/d$. Če oblak po debelini razdelimo na plasti, govorimo o vzporednih naelektrenih ravninah. Njihova polja so pravokotna na plasti. Od gladine morja proti oblaku usmerimo os Z. Zanima nas komponenta $E_z(z)$. Za Gaussovo ploskev izberimo valj višine $z + z_0$ z osnovnico ploščine S. Nad oblakom in pod gladino ni polja, enako kot pri ploščnem kondenzatorju, le da naboj oblaka ni v ravnini, temveč v plasti debeline d. Pretok polja **E** skozi dno valja je nič, tam ni polja, pretok skozi obod valja je nič, saj je polje **E** tam tangentno, ostaja še pretok skozi vrhnjo ploskev, ki se izraža s produktom $E_z(z)S$:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = E_z(z)S = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases}\sigma S & 0 < z \le h \\ \sigma S - \sigma S(z-h)/d & z \in (h, h+d)\end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_z(z) = \begin{cases}\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & 0 < z \le h \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{z-h}{d}\right) & z \in (h, h+d).\end{cases}$$

Zapis sporoča: med morjem in oblakom je polje konstantno, proti vrhu oblaka pa se enakomerno slabi do vrednosti nič.

Splet dveh izvornosti. Električno polje **E** ima izvorno naravo, enako kot tokovno polje **J**. Če uporabimo Gaussov zakon v primeru gibanih nabojev, ko je polje **E** tudi časovno odvisno, ga je smiselno odvajati in spojiti s kontinuitetno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q_{\text{not.}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\mathcal{A}} \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = 0.$$

Navaden odvod smo pri prenosu pod integral nadomestili s parcialnim ali delnim odvodom zato, ker je pretok časovna funkcija, polje **E** pa krajevno-časovna funkcija štirih neodvisnih spremenljivk. Maxwell je združeni vektor

$$\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}_{\text{tot.}}$$

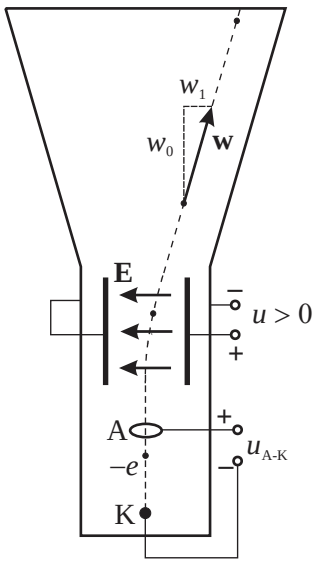
imenoval gostota totalnega toka. V njegovem času je bil »eter« sinonim za nesnovni (prazen) prostor, ki je napolnjen z naboji, čeravno nosilcev naboja takrat še niso poznali. Maxwell je drugi sumand imenoval gostota premikalnega toka.

Tolmačil ga je z vibracijo nabojev v etru – kot posledico spreminjajoče električne sile. S teorijo relativnosti je eter doživel neslaven konec. Nobelovec E. M. Purcell pravi, da je ime »gostota premikalnega toka v vakuumu«, ki se v mnogih knjigah pojavlja še danes, neustrezno, neprimerno in le historično sprejemljivo. Nekaj več o tem bomo znali povedati v zaključku razprave o Maxwellovih enačbah.

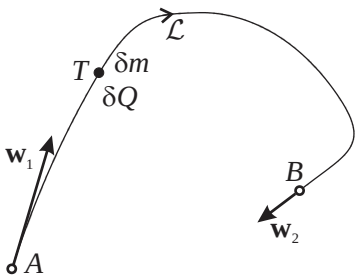
43:29

§10. Električna napetost

Osrednja vsebina razdelka je električna napetost, obravnavali pa bomo še druge, ki se nanjo navezujejo: delo električne sile, nevrtinčnost Coulombove poljske jakosti, drugi Kirchhoffov zakon, električno potencialno energijo in potencial.



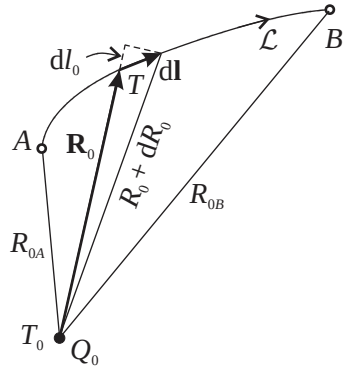
Delo električne sile. Zadnja razdelka sta bila v znamenju poljske jakosti, njenega določevanja in njene izvorne narave; spoznali smo celo že nekaj osnovnih elektrostatičnih polj. Čas je, da se vrnemo k definiciji poljske jakosti, k električni sili. Izhajajoč iz skromnih izkušenj verjetno ne bo težko sprejeti sledeče izjave: privzemimo, da polje $\mathbf{E}$ poznamo. V njem si omislimo delec (elektron, proton, ion, kak drug neznaten delec) z nabojem δQ in maso δm, ki se v nekem trenutku nahaja na nekem mestu in ima tam in takrat hitrost $\mathbf{w}$. Na delec deluje električna sila $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e} = \delta Q\mathbf{E}$, ki ga tudi v nadaljevanju »vodi« skozi prostor. Tak proces zasledimo v katodni cevi, v komori elektro-filtra, pri elektrostatskem nanosu vlaken ali barve itn. Če v prostoru ni drugih sil, potem se delec giblje s pospeškom $\mathrm{d}\mathbf{w}/\mathrm{d}t = \delta\mathbf{F}_\mathrm{e}/\delta m$. Okoliščine spominjajo na poševni met, pri katerem zanemarimo zračni upor. Zaradi težnostne sile se telo v vertikalni smeri giblje enakomerno pospešeno, v horizontalni pa enakomerno. Pri tem telo izgublja/pridobiva kinetično energijo in končno udari v tla; sled (trajektorija) njegovega gibanja je navzdol obrnjena parabola. Podobno je z elektroni v katodni cevi: elektroni pridobijo na poti od katode do anodnega obroča hitrost w_0, vstopijo v polje naelektrenih plošč, v njem pridobivajo prečni del hitrosti (w_1), od tam dalje pa nadaljujejo pot do zaslona, se vanj zadanejo s hitrostjo w ter iz zaslona izsevajo svetlobo.



Vrnimo se na uvod: imamo delec z nabojem δQ in maso δm ter polje $\mathbf{E}$, v katerem se giblje. Naj je bil delec v trenutku t_1 v točki A in imel hitrost $\mathbf{w}_1$, v trenutku t_2 v točki B in imel hitrost $\mathbf{w}_2$, vmes pa brzel po krivulji in bil v trenutku t v točki T ter imel tam hitrost $\mathbf{w}$. Zaradi električne sile je delec v intervalu (t_1, t_2) pridobil/izgubil določeno kinetično energijo δW_k, ki je enaka razliki kinetičnih energij med končnim časom (t_2) in začetnim časom (t_1) oziroma enaka delu δA_e sile $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}$ na krivulji $\mathcal{L}$ med A in B. Če je vsakokratna absolutna vrednost hitrosti delca mnogo manjša od svetlobne hitrosti, potem je

$$\delta W_{\mathrm{k}}(B) - \delta W_{\mathrm{k}}(A) = \frac{\delta m w_2^2}{2} - \frac{\delta m w_1^2}{2} = \delta A_{\mathrm{e}}(A\mathcal{L}B) = \int\limits_{A\mathcal{L}B} \underbrace{\delta \mathbf{F}_{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}_{\mathrm{d}A_{\mathrm{e}}} = \delta Q \int\limits_{A\mathcal{L}B} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Znak »δ« se nanaša na neznatnost mase (δm) in naboja (δQ). Integracijska pot je označena simbolično z $A\mathcal{L}B$, pri tem pa je $\mathrm{d}\mathbf{l}$ splošen diferencialni pomik vzdolž poti. Skalarni produkt je uporabljen zato, ker je za delo $\mathrm{d}A_{\mathrm{e}}$ zaslužna projekcija sile $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ na $\mathrm{d}\mathbf{l}$. Težišče delovanja Coulombove sile se z zadnjim zapisom prenaša na lastnost integrala vektorja električne poljske jakosti $\mathbf{E}$ po krivulji $\mathcal{L}$ med A in B. Takšen integral imenujemo krivuljni integral vektorske funkcije.



Da se z novo integracijo bolje seznanimo, si prvi hip omislimo manjšo poenostavitev: za vektor poljske jakosti izberimo polje točkastega naboja Q_0, ki je v točki T_0. Njegovo polje določa vektor $\mathbf{R}_0$, ki leži med točko T_0 in splošno točko T na $\mathcal{L}$:

$$\mathbf{E}_0(T) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Izračunajmo krivuljni integral tega polja po $\mathcal{L}$ med A in B. Pišimo:

$$\int\limits_{A\mathcal{L}B} \mathbf{E}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int\limits_{A\mathcal{L}B} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{A\mathcal{L}B} \frac{(\mathbf{R}_0/R_0)}{R_0^2} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{A\mathcal{L}B} \frac{\mathbf{e}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}{R_0^2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{A\mathcal{L}B} \frac{\mathrm{d}R_0}{R_0^2}.$$

Uvedli smo enotski vektor $\mathbf{e}_0$ vektorja $\mathbf{R}_0$, ki po skalarnem množenju z diferencialom $\mathrm{d}\mathbf{l}$ da projekcijo $\mathrm{d}l_0$, ta pa grafično ustreza prirastku $\mathrm{d}R_0$ oddaljenosti R_0 med začetkom in koncem vektorja $\mathrm{d}\mathbf{l}$. Rezultat je vsekakor zanimiv: pri integraciji niso več pomembni niti polje niti smer premika niti krivulja, ampak le kvocient diferencialnega prirastka oddaljenosti in kvadrata oddaljenosti od naboja, ki se med premikanjem po krivulji spreminja od vrednosti R_{0A}, do R_{0B}. Ugotavljamo, da sta za vrednost integrala pomembni le še krajni točki, v ničemer pa pot med njima. Lahko bi bila katerakoli z začetkom v A in koncem v B. Ta pomembna ugotovitev spremeni tudi notacijo integrala, zapis $A\mathcal{L}B$ nadomestita točki začetka (A) in konca (B), sam integral pa beremo: integral vektorja poljske jakosti od točke A do točke B po katerikoli poti. Integracija postane s tem elementarna,

$$\int\limits_{A\mathcal{L}B} \mathbf{E}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int\limits_{A}^{B} \mathbf{E}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{R_{0A}}^{R_{0B}} \frac{\mathrm{d}R_0}{R_0^2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{R_0}\right]_{R_{0A}}^{R_{0B}} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_{0A}} - \frac{1}{R_{0B}}\right).$$

Kar smo ugotovili za polje naboja Q_0, lahko smiselno razširimo na gručo nabojev, δQ_k $(k = 1, \dots, n)$ v prostorninah δv_k, na površinah δa_k ali na odsekih δl_k s središčnimi točkami T_k. Poljska jakost $\mathbf{E}$ je vsota delnih jakosti:

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{k=1}^{n} \delta\mathbf{E}^{(k)}(T) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta Q_k}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3},$$

vsaka od njih pa pri integraciji po krivulji od A do B da zgornjemu identičen rezultat, zato je

$$\int\limits_{A\mathcal{L}B} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int\limits_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int\limits_{A}^{B} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta Q_k}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \delta Q_k \left(\frac{1}{R_{kA}} - \frac{1}{R_{kB}}\right).$$

Pri tem sta R_{kA} in R_{kB} oddaljenosti k-tega naboja do začetne (A) in končne (B) točke.

Do splošnega rezultata za krivuljni integral poljske jakosti nas loči le še korak. Gradnik splošne elektrinske strukture je diferencialni naboj $\mathrm{d}Q(T')$ v točki T'. V limiti preide prejšnja vsota v integral,

$$\int\limits_{A\mathcal{L}B} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int\limits_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta Q_k \left(\frac{1}{R_{kA}} - \frac{1}{R_{kB}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}Q(T') \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right),$$

delo polja električnih sil pa v

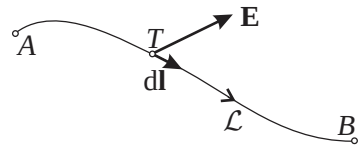
$$\delta A_{\mathrm{e}}(A\mathcal{L}B) = \delta Q \int\limits_{A\mathcal{L}B} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \delta A_{\mathrm{e}}(A, B) = \delta Q \int\limits_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}Q(T') \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right),$$

kjer pomenita R_A in R_B oddaljenosti točke T' do točk A in B. Lastnost, ki velja za integral Coulombove poljske jakosti, velja tudi za delo električne sile, ki premakne naboj od točke A do B: opravljeno delo je neodvisno od poti. To lastnost

notiramo tako, da pri delu δA_e navedemo le oznaki krajnih točk. Opazimo tudi, da se delo električne sile izraža z dvema integracijama, ki ju bomo na primerih podrobno predstavili.

24:00

Električna napetost. Delo električne sile na krivulji od A do B je premosorazmerno naboju delca. Ponuja se prilika, da vpeljemo delu sorazmerno količino, t. i. električno napetost, kot kvocient dela za premik naboja in množine naboja,



$$u_{A\mathcal{L}B} = \frac{\delta A_\mathrm{e}(A\mathcal{L}B)}{\delta Q} = \int\limits_{A\mathcal{L}B} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

3:47

Enota električne napetosti je J/C = V (volt). Ker pa govorimo o delu Coulombove sile, za katerega velja lastnost

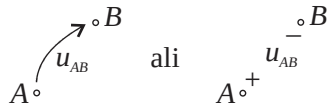
$$\delta A_\mathrm{e}(A\mathcal{L}B) = \delta A_\mathrm{e}(A,B) \quad \Rightarrow \quad u_{A\mathcal{L}B} = u_{AB},$$

se ta prenese tudi na napetost: električna napetost med točkama A in B v Coulombovem polju je neodvisna od poti,

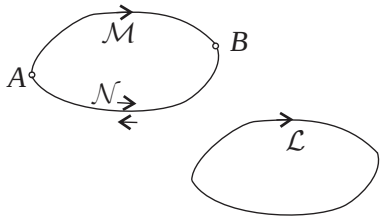
6:38

$$u_{AB} = \int\limits_{A}^{B} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

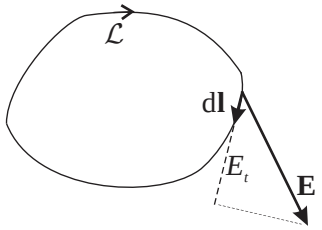
Izkoristimo priložnost za opozorilo. Pri Faradayevem indukcijskem zakonu bomo spoznali še drugi del električne sile, drugi del električne poljske jakosti, inducirano električno poljsko jakost, in drugi del napetosti, inducirano električno napetost, pri kateri bo najbolj pomembno vlogo odigrala ravno krivulja med točkama. Kaj želimo povedati? Definicija električne napetosti ostaja enaka, neodvisnost poti v Coulombovem polju pa sprejemamo kot »hvaležno« poenostavitev. Električno napetost označujemo z usmerjenim lokom med točkama, ali pa z znakom »+«, pri začetni, in z znakom »−« pri končni točki.



Vprašanje vrtinčnosti. Pojem vrtinčnosti se navezuje na krivuljni integral električne poljske jakosti. Imejmo krivulji $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$, ki sta razpeti med točki A in B. Iz ugotovljenega sledi:



$$\int\limits_{A\mathcal{M}B} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int\limits_{A\mathcal{N}B} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int\limits_{B\mathcal{N}A} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{A\mathcal{M}B} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \int\limits_{B\mathcal{N}A} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int\limits_{\mathcal{M}\cup\mathcal{N}=\mathcal{L}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0.$$



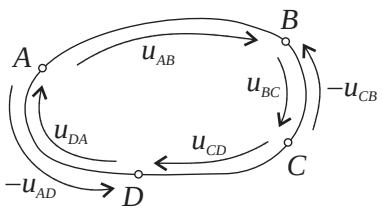
Če pot obrnemo, se integralu vrednost spremeni za predznak, ko pa pot od A po $\mathcal{M}$ do B nadaljujemo s potjo $\mathcal{N}$ nazaj do A, pridobimo sklenjeno pot $\mathcal{L}$. Integralu dodamo krogec, ki simbolizira sklenjeno pot $\mathcal{L}$, in vpeljemo napetost $u_{\mathcal{L}}$ zanke $\mathcal{L}$

$$u_{\mathcal{L}} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} E_t \mathrm{d}l = 0.$$

V drugi notaciji pomeni $E_t = \mathbf{t} \cdot \mathbf{E}$ tangentno komponento poljske jakosti oziroma projekcijo $\mathbf{E}$ na $\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{t}\mathrm{d}l$; $\mathbf{t}$ je tangentni enotski vektor na krivulji. Zapisa govorita o ne-vrtinčnosti Coulombovega polja. Neko polje npr. $\mathbf{M}$ bi bilo vrtinčno, če bi bil njegov integral po sklenjeni krivulji različen od nič. Vrtinčnih vektorjev še ne poznamo, se pa bomo s takimi srečali v magnetiki in pri Faradayevi indukciji; takrat nam bo postal ta pojem »bolj domač«. K boljšemu razumevanju pripomore tudi tale zapis:

$$\delta Q \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} \delta \mathbf{F}_{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0.$$

Beremo: delo Coulombove sile vzdolž sklenjene poti je vedno enako nič. Kolikor sila delec na delu poti pospeši, toliko ga na drugem delu zavre. Coulombova sila torej ne (z)more nabitega delca »vrtinčiti« (enako kot ne sila težnosti), zmore pa to Faradayeva sila, vendar o njej kasneje.



Drugi Kirchhoffov zakon. Ostajamo pri sklenjeni krivulji $\mathcal{L}$; na njej imejmo točke A, B, C in D. Izpišemo nevrtinčnost:

$$u_{\mathcal{L}} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \int_D^A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = u_{AB} + u_{BC} + u_{CD} + u_{DA} = 0.$$

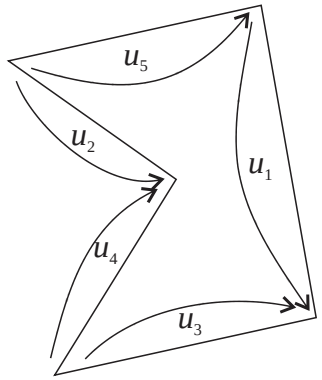
Beremo jo takole: napetost zanke oziroma vsota napetosti vzdolž sklenjene zanke (v desno ali v levo) je enaka nič. Ker je

$$u_{EF} = \int_E^F \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_F^E \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -u_{FE} \quad \Rightarrow \quad u_{AB} - u_{CB} + u_{CD} - u_{AD} = 0$$

in sta oznaka in imenovanje napetosti stvar proste izbire, bi mogli bilanco napetosti v sklenjeni zanki zapisati tudi takole:

$$u_{\mathcal{L}} = \sum_{j=1}^{m} (\pm) u_j = 0.$$

Pri obhodu po sklenjeni krivulji (zanki) je vsota napetosti enaka nič. Predznak plus imajo napetosti, katerih usmerjenost se ujema z obhodom po zanki, predznak minus pa ostale. Enačbo imenujemo drugi Kirchhoffov zakon ali Kirchhoffov napetostni zakon. S spoznanji o elektromagnetni indukciji se bomo k zakonu še vrnili, ga dopolnili in njegovo veljavnost (uporabnost) tudi kritično presodili. Napetost $u_{\mathcal{L}}$ takrat ne bo več enaka nič, ampak bo določena z negativnim časovnim odvodom magnetnega pretoka skozi njo.



$u_5 + u_1 - u_3 + u_4 - u_2 = 0$

Električna potencialna energija. Neodvisnost dela Coulombove sile od poti nas ponovno spomni na težnost. Tudi zanjo velja, da za spremembo kinetične energije drseče klade ni pomemben profil klančine, ampak le mesti začetka in konca. Za potrebe izražanja pridobljene/izgubljene kinetične energije vpeljemo potencialno energijo. Potencialno izhodišče so ali tla v nadstropju ali nivo dvorišča ali morska gladina ali ... Pri tem ni pomembno izhodišče kot takšno, ampak možnost njegove izbire. Zaradi že ugotovljenih vzporednic vpeljemo ta pojem tudi v elektromagnetiki, imenujemo ga električna potencialna energija. Uveljavljen je dogovor, da je mesto njenega izhodišča v neskončnosti. Z vidika mogočih orientacij v prostoru je izbira izrazito »nevtralna«.

9:22

Električno potencialno energijo δW_{ep} delca, ki se nahaja v točki A in ima naboj δQ, definiramo z delom, ki ga električno polje opravi, da delec »izrine« iz polja oziroma »odrine« v neskončnost, v točko T_∞,

$$\delta W_{\mathrm{ep}} = \delta A_{\mathrm{e}}(A, T_\infty).$$

Potencialna energija more biti tudi negativna. Če takšna je, pomeni zgolj to, da je za izrivanje delca iz polja potrebna sila, ki stalno premaguje nanj delujočo električno silo. Potencialna energija elektrona v atomu vodika je $-2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J; polje protona bi za privlek elektrona iz T_∞ na svoje mesto opravilo delo $2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J. Temu enako delo bi morala opraviti tudi druga sila, če bi stremela elektron iztrgati iz »objema« protona. Tako delo kot energija sta sorazmerni osnovnemu naboju

$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C. V atomski fiziki se za delo in energijo uporablja enota »elektron-volt« ali »eV« . Prejšnja potencialna energija elektrona vodika v nevzbujenem stanju je zato $-13{,}6\ e\mathrm{V}$ oziroma $-13{,}6\ \mathrm{V} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} = -2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J. Ko v definicijo potencialne energije zanesemo izraze za delo električne sile, sledita še zapisa,

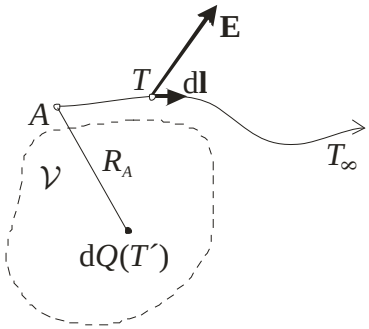
$$\delta W_{\mathrm{ep}} = \delta Q \int_A^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{B \to T_\infty} \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}Q(T') \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) = \frac{\delta Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}Q(T')}{R_A},$$

prvi se izraža z integralom poljske jakosti od A do T_∞, drugi pa z naboji, ki električno polje povzročajo. Limitiran izraz se skrči, saj stremi oddaljenost R_B k neskončnosti.

5:37

Električni potencial. Električna potencialna energija delca je sorazmerna množini njegovega naboja. Ponuja se prilika, da (podobno kot pred tem pri sili $\delta\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ in delu δA_{e}) vpeljemo novo količino, električni potencial na tale način:

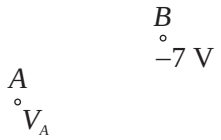
$$V(A) = V_A = \frac{\delta W_{\mathrm{ep}}}{\delta Q} \quad \Longrightarrow \quad V(A) = \int_A^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}Q(T')}{R_A}.$$



Električni potencial je torej količina, ki je lastna točki oziroma nabojem, ki jim pripada polje **E**. Pridobili smo predpisa, ki služita določitvi potenciala v katerikoli točki. Prvi vodi prek krivuljnega integrala jakosti **E** od točke A do neskončnosti, drugi pa direktno iz porazdelitve nabojev.

Električni potencial v točki je napetost med njo in neskončnostjo, če pa je na poti do tja še točka B, potem je

$$V(A) = V_A = u_{A\infty} \quad \text{in} \quad V_A = u_{A\infty} = u_{AB} + u_{B\infty} = u_{AB} + V_B \quad \Longrightarrow \quad u_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = V_A - V_B.$$



Napetost med točkama se izraža z razliko njunih potencialov. Očitno sta si potencial in napetost sorodni količini, razlika je le v naglasitvi: napetost se naglaša na dve točki, potencial pa le na točko. Potencial točke notiramo z oznako oziroma z vrednostjo, ki ji pripada.

Kaj smo do tu počeli? Privzeto polje in virtualno gibanje delca v njem smo izkoristili za definicije in splošne zapise dela, napetosti, potencialne energije in potenciala, vse to pa so ključni elementi, ki jih bomo potrebovali pri novih premislekih. Čakajo nas namreč vprašanja, ki bodo aktualna pri strukturah iz prevodnih in izolacijskih oziroma dielektričnih snovi.

Potencial točkastega naboja. Izkoriščamo primer naboja Q_0, ki se nahaja v točki T_0, za katerega ugotovljamo, da je

6:57

$$u_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{0A}} - \frac{1}{R_{0B}}\right) = V_A - V_B, \quad \text{zato sta} \quad V_A = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_{0A}} + K \quad \text{in} \quad V_B = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_{0B}} + K.$$

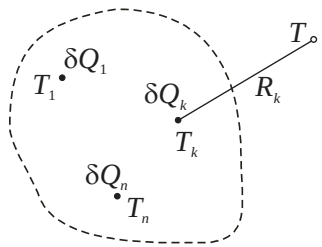
Napetost je enaka razliki dveh identičnih izrazov, zato sta potenciala posameznih točk očitno določena le do konstante natančno. Ker sta izhodišči električne potencialne energije in potenciala (0 J in 0 V) v neskončnosti in se z oddaljevanjem točk A in B od naboja oba funkcijska dela izrazov za potencial bližata vrednosti nič, mora biti $K = 0$ V. Od tod sledi izraz

$$V_T = V(T) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0},$$

kjer je R_0 razdalja točke T do naboja. Absolutna vrednost potenciala upada s prvo potenco, za absolutno vrednost poljske jakosti pa že od prej vemo, da upada z drugo potenco oddaljenosti od naboja.

4:14

Potencial gruče točkastih nabojev. Princip superpozicije velja za vektor poljske jakosti in enako tudi za potencial. Če je nabojev več, je rezultančni potencial enak vsoti potencialnih prispevkov nabojev δQ_k v gruči,



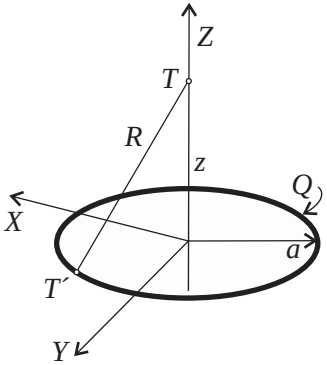
$$V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta Q_k}{R_k} \quad \text{in} \quad \mathbf{E}(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3}\delta Q_k,$$

kjer je R_k razdalja točke T do naboja δQ_k. Izraz za potencial je očitno prijaznejši od sorodnega za vektor poljske jakosti.

Potencial »naelektrene krožnice«. Električno poljsko jakost v osi naelektrene krožnice, ki ima polmer a in naboj Q, že poznamo. Temu rezultatu dodajmo še potencial. Izhajamo iz

24:28

$$V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}Q(T')}{R}.$$

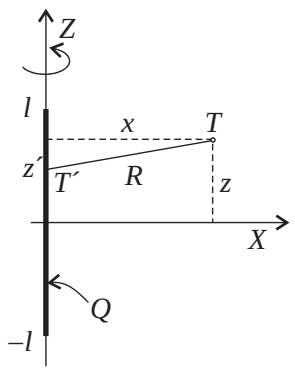


Točka $T(z)$ v osi Z je do vseh točk na krožnici enako oddaljena, zato je

$$V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\text{krožnica}} \frac{\mathrm{d}Q(T')}{\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\int\limits_{\text{krožnica}} \mathrm{d}Q(T') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = V(z).$$

Potencial ima absolutno največjo vrednost v središču krožnice, $|Q|/4\pi\varepsilon_0 a$, daleč stran pa upada in se približuje vrednosti $|Q|/4\pi\varepsilon_0|z|$. Izven osi so težave podobne že omenjenim. Izhod je spet v delitvi naelektrene krožnice na kratke loke, ki jih sprejemamo kot gručo točkastih nabojev. Za potencial v točki $T(x,y,z)$ dobimo sledečo vsoto:

$$V(x,y,z) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta Q_k}{R_k} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(x-a\cos(2\pi k/n))^2+(y-a\sin(2\pi k/n))^2+z^2}}.$$



Potencial »naelektrene daljice«. Daljico dolžine $2l$, ki ima enakomerno razporejen naboj Q, damo v os Z, da sta njena konca na koordinatah $z_{1,2} = \pm l$ in pišemo:

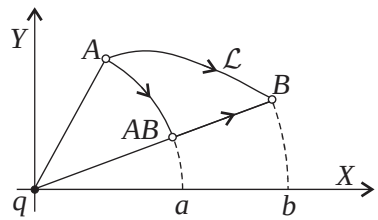
$$V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}Q(T')}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l}\int\limits_{-l}^{l} \frac{(Q/2l)\mathrm{d}z'}{\sqrt{x^2+(z-z')^2}} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{\sqrt{x^2+(z+l)^2}+z+l}{\sqrt{x^2+(z-l)^2}+z-l} = V(x,z).$$

Tako kot vektor poljske jakosti **E** je tudi potencial V rotacijsko simetrična funkcija; zapišimo jo kot funkcijo koordinat valjnega koordinatnega sistema,

$$V(\rho,z) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{\sqrt{\rho^2+(z+l)^2}+z+l}{\sqrt{\rho^2+(z-l)^2}+z-l}.$$

Nanjo se bomo sklicevali v tokovnem polju, ko bomo določali ponikalno upornost paličastega ali tračnega ozemljila.

Potencial »naelektrene premice«. Premica z naelektritvijo q naj leži v osi Z. Postavimo si najprej vprašanje napetosti med točkama A in B v ravnini XY. Izhajamo iz vektorja poljske jakosti naelektrene premice in definicije napetosti: da je ta enaka integralu poljske jakosti med točkama, da pot ni pomembna in je napetost enaka razliki potencialov krajnih točk. Osrednje vprašanje je izbira poti. Ta je katerakoli ($\mathcal{L}$), vendar je, glede na radialnost polja naelektrene premice, smiselno, da del poti (od A do AB) izberemo po krožnem loku, preostali del (od AB do B) pa po daljici v radialni smeri:



$$u_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A^{AB} \underbrace{\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}}_{\perp} + \int_{AB}^{B} \underbrace{\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}}_{\parallel} = 0 + \int_{AB}^{B} E_\rho \mathrm{d}\rho = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{d}\rho = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}.$$

Na prvem delu poti sta vektorja pravokotna, na drugem pa vzporedna. Napetost je odvisna od razmerja oddaljenosti točk do naelektrene premice. Če je točka A katerakoli na krožnici z radijem a, točka B pa katerakoli na krožnici z radijem b, je med njima vedno enaka napetost u_{AB}. Povsem očitno ima krožnica polmera a potencial V_A, krožnica polmera b potencial V_B, krožnica polmera c potencial V_C itn. Upoštevajmo lastnost logaritmske funkcije in poskrbimo, da je njen argument še naprej brez dimenzije; pišimo:

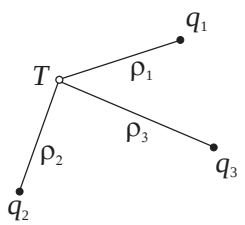
$$u_{AB} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{a} - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{b} = V_A - V_B.$$

Napetost oziroma razlika potencialov se kaže kot razlika dveh identičnih izrazov, kar tudi pomeni, da je potencial točke T na valju polmera ρ okoli naelektrene premice določen le do konstante K natančno,

$$V_T = V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{\rho} + K.$$

Izraz skriva pasti. Za določitev konstante K nimamo nikakršnega fizikalnega izhodišča. Pri velikih oddaljenostih ρ stremi vrednost potenciala v eno, pri majhnih oddaljenostih pa v drugo skrajnost ($\pm\infty$). V čem je težava? Osrednja tiči v privzeti naelektreni premici, ki bi zahtevala neskončno veliko naboja, kar posledično onemogoča izbrati konstanto K tako, da bi imel potencial v neskončnosti vrednost 0 V. Težavo predstavlja tudi neposredna bližina, vendar bo ta rešljiva brž, ko bo namesto naelektrene premice vodnik ustreznega radija in bo ta le še v vlogi modela za električno polje zunaj vodnika.

Prvi dve težavi odpravi dejstvo, da se naboji pojavljajo v parih oziroma tako, da je algebraična vsota naelektritev enaka nič; takrat govorimo o t. i. električno zaključenem sistemu.



Potencial snopa naelektrenih premic. Primer, ki razblini prejšnje pomisleke, je sistem vzporednih vodnikov, ki ga modeliramo s snopom vzporednih naelektrenih premic; srečali smo ga pri računanju poljske jakosti v okolici daljnovoda. Naj so q_1, q_2 in q_3 naelektritve treh daljnovodnih vrvi, ρ_1, ρ_2 in ρ_3 pa oddaljenosti osi teh vrvi do splošne točke T. Potencial v tej točki določa vsota potencialnih prispevkov posameznih nabojev,

$$V(T) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\ \mathrm{m}}{\rho_1} + \frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\ \mathrm{m}}{\rho_2} + \frac{q_3}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\ \mathrm{m}}{\rho_3} + K_0.$$

K_0 je združena konstanta, ki je, ko je sistem električno zaključen, uravnotežen, $q_1 + q_2 + q_3 = 0$, tudi določljiva. Pišimo:

$$V(T) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\ \mathrm{m}}{\rho_1} + \frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\ \mathrm{m}}{\rho_2} - \frac{q_1+q_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\ \mathrm{m}}{\rho_3} + K_0 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_3}{\rho_1} + \frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_3}{\rho_2} + \underbrace{K_0}_{0\ \mathrm{V}} = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_3}{\rho_1} + \frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}.$$

Če točko T »povlečemo« v T_∞, stremijo razdalje ρ_1, ρ_2 in ρ_3 k vse bolj enakim vrednostim, logaritmi njihovih razmerij pa k nič. Da bo potencial v neskončnosti enak nič, $V(T_\infty) = 0$, mora biti $K_0 = 0$ V. Očitno ni več težav s konstanto niti ne z vrednostjo potenciala v neskončnosti.

19:03

Potencial v ploščnem kondenzatorju. Vračamo se k primeru dveh naelektrenih plošč: leve, ki leži v ravnini $x_1 = -d/2$ in ima naelektritev σ, in desne, ki leži v ravnini $x_2 = d/2$ in ima naelektritev $-\sigma$. Glede na splošno formulo

$$V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}Q(T')}{R}$$

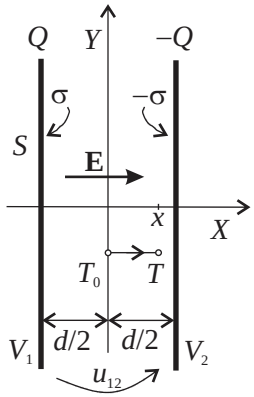
ima potencial v točkah v simetralni ravnini ($x = 0$) vrednost nič, kajti potencialna deleža nabojev plošč se tam ravno odštejeta. V področju homogenosti polja med ploščama imejmo točki $T_0(0, y, z)$ in $T(x, y, z)$. Izrazimo potencialno razliko med njima z integralom poljske jakosti po daljici med T_0 in T:

$$\underbrace{V(T_0)}_{0\,\mathrm{V}} - V(T) = \int_{T_0}^{T} \underbrace{\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}}_{\parallel} = \int_0^x E_x \mathrm{d}x' = \int_0^x \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x \quad \Longrightarrow \quad V(T) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x = V(x).$$

Potencial določa linearna funkcija in kot takšna velja za vse točke v območju homogenosti. Iz nje sledita tudi potenciala plošč in napetost med njima:

$$V_1 = V(-d/2) = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0},\ \ V_2 = V(d/2) = -\frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad u_{12} = V_1 - V_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = E_x d = u \quad \Longrightarrow \quad E_x = \frac{u}{d}.$$

Preproste relacije pa ne veljajo izven cone homogenosti, o čemer smo govorili že ob določanju električne poljske jakosti. Dodatno vprašanje je, kako je s potencialom izza plošč? V idealiziranih razmerah tam ni polja; dalje bi to pomenilo, da se vrednost potenciala leve plošče nadaljuje tudi v prostor izza nje, potencial desne pa v prostor izza desne plošče. Ker pa je nekaj polja tudi izza plošč, je zadeva drugačna: da namreč potencial od plošč v levo ali desno skrajnost usiha k vrednosti nič. Kakšna je ta funkcija, bo razkrito v naslednjem razdelku.



Čeravno bo o ploščnem kondenzatorju kasneje še tekla beseda, se dotaknimo njegove kapacitivnosti. »Začasno« jo bomo opredelili s kvocientom naboja ene plošče in napetosti med njo in drugo ploščo. Pri kondenzatorju s površinama plošč S je izraz za kapacitivnost izredno preprost:

$$u = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{Q}{u} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Kapacitivnost se izraža v $\mathrm{C/V} = \mathrm{F}$ (farad). Pri površini plošč $1\ \mathrm{m}^2$ in razmiku 1 mm med njima, je kapacitivnost 8,85 nF. Pri $u = 100\ \mathrm{V}$ je $E_x = 100\ \mathrm{kV/m}$, naboja in gostoti pa sta $\pm\ 0{,}885\ \mu\mathrm{C}$ in $\pm\ 0{,}885\ \mu\mathrm{C/m}^2$.

Potencial v koaksialnem kablu. Električno polje v kablu poznamo: absolutna vrednost jakosti polja od žile k oklopu upada obratnosorazmerno z oddaljenostjo ρ od osi. Ker izven valja radija b ni polja, je napetost med točko B na tem valju

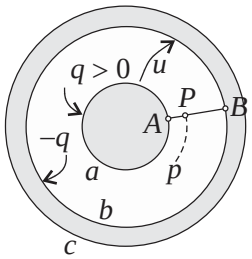
16:46

in točko v neskončnosti enaka nič; sledi: $V(B) = 0\,\mathrm{V}$. Imejmo radialno pot od točke P na radiju p do točke B in izrazimo potencialno razliko med njima:

$$V(P) - \underbrace{V(B)}_{0\,\mathrm{V}} = \int_P^B \underbrace{\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}}_{\parallel} = \int_p^b E_\rho \mathrm{d}\rho = \int_p^b \frac{q\mathrm{d}\rho}{2\pi\varepsilon_0\rho} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{p} \quad\Longrightarrow\quad V(P) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{p} = V(p).$$

Ko točko P približamo točki A na valju polmera a, dobimo potencial

$$V(A) = V_A = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}.$$

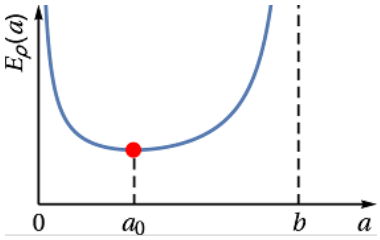


Ker v žili ni polja, pripada ta potencial tudi vsej žili. Med žilo in plaščem je napetost

$$u_{AB} = V_A - V_B = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} = u \quad\Longrightarrow\quad u = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} \quad\Longrightarrow\quad C = \frac{Q}{u} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)},$$

ki posreduje še kapacitivnost kabla dolžine l. V elektrostatičnih sistemih običajno poznamo napetost vira, s katerim elektrimo, in ne naboj, zato je primerno, da uvedemo njun odnos tudi v zapisa za polje in potencial,

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{u}{\ln(b/a)} \quad\Longrightarrow\quad E_\rho(\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(b/a)}\dfrac{u}{\rho} & \rho\in(a,b) \\ 0 & \text{drugje} \end{cases} \quad \text{in} \quad V(\rho) = \begin{cases} u & \rho\le a \\ u\dfrac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)} & \rho\in(a,b] \\ 0 & \text{drugje.} \end{cases}$$



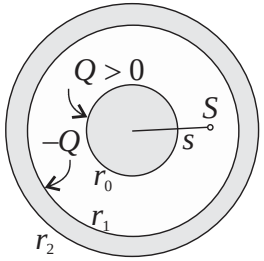
Zanimivo je vprašanje optimalnega razmerja med radijema žile in oklopa. Pri izbranima napetosti in notranjem radiju plašča kabla je poljska jakost ob notranji žili funkcija njenega polmera. Ta sporoča, da bo absolutno največja vrednost poljske jakosti preraščala vse meje, če bo a premajhen ali prevelik. Očitno je med 0 in b najugodnejši tisti radij a_0, ki zagotavlja, da bo največja absolutna vrednost poljske jakosti (ki lahko predstavlja težavo – preboj) najmanjša možna,

$$E_\rho(a) = \frac{u}{a\ln(b/a)} = \frac{u}{g(a)} \quad\Longrightarrow\quad g'(a) = \ln\frac{b}{a} - 1 \quad\Longrightarrow\quad g'(a_0) = 0 \quad\Longrightarrow\quad a_0 = \frac{b}{\mathrm{e}},\ \ \mathrm{e} = 2{,}718\ldots$$

Ugodno razmerje radijev je osnova naravnega logaritma. Kapacitivnost kabla je takrat 55,5 pF/m. Pri napetosti 1 kV in radiju žile 1 cm je poljska jakost ob njej 100 kV/m, ob plašču pa 36,8 kV/m.

Potencial v krogelnem kondenzatorju. Potek opravil je tak kot pri kablu, le izrazi so nekoliko drugačni. Absolutna vrednost jakosti polja med krogelnima lupinama upada obratnosorazmerno s kvadratom oddaljenosti od središča lupin. Ker izven lupine z radijem r_1 ni polja, je napetost med točko T_1 na njej in neskončnostjo enaka nič; sledi: $V(T_1) = 0$ V. Imejmo radialno pot od točke S na radiju s do točke T_1 na radiju r_1:

28:48



$$V(S) - \underbrace{V(T_1)}_{0\,\mathrm{V}} = \int_s^{r_1} E_r \mathrm{d}r = \int_s^{r_1} \frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r_1}\right) \implies V(S) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r_1}\right) = V(s).$$

Ko točko S približamo točki T_0 na lupini polmera r_0, dobimo potencial

$$V(T_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right).$$

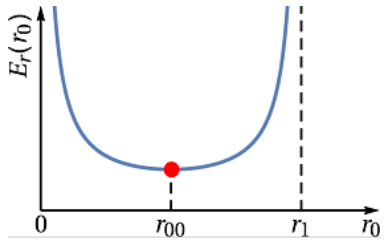
Ker v notranji krogli ni polja, pripada ta potencial tudi vsej notranjosti. Napetost in kapacitivnost sta:

$$u_{01} = V_0 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) = u \quad \implies \quad u = \frac{Q(r_1 - r_0)}{4\pi\varepsilon_0 r_0 r_1} \quad \implies \quad C = \frac{Q}{u} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_0 r_1}{r_1 - r_0},$$

Iz predstavljenih zvez sledi še

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{r_0 r_1}{r_1 - r_0} u \quad \implies \quad E_r(r) = \begin{cases} \dfrac{r_0 r_1}{r_1 - r_0}\dfrac{u}{r^2} & r \in (r_0, r_1) \\ 0 & \text{drugje} \end{cases} \quad \text{in} \quad V(r) = \begin{cases} u & r \le r_0 \\ \dfrac{r_0 r_1 u}{r_1 - r_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}\right) & r \in (r_0, r_1] \\ 0 & \text{drugje.} \end{cases}$$

Vprašanje optimalnega razmerja radijev krogelnih elektrod se postavlja tudi tu. Pri izbranima napetosti in radiju zunanje elektrode je poljska jakost ob notranji elektrodi funkcija njenega polmera. Največja absolutna vrednost presega vse meje, če je r_0 premajhen ali prevelik. Med 0 in r_1 je primeren tisti radij r_{00}, ki zagotavlja, da bo največja vrednost poljske jakosti kar najmanjša,



$$E_r(r_0) = \frac{r_1 u}{r_0(r_1 - r_0)} = \frac{r_1 u}{f(r_0)} \quad \implies \quad f'(r_0) = r_1 - 2r_0 \quad \implies \quad f'(r_{00}) = 0 \quad \implies \quad r_{00} = r_1/2\,.$$

Ugodno razmerje radijev je tokrat 2.

Spomnimo se Zemljinega kondenzatorja. Izhajali smo iz podatka za lepo vreme in dobili za elektrino na površini Zemlje -546 kC. Če privzamemo višino ionosfere na $h = 150$ km, kjer bi bil nasprotni naboj v sorazmerno tanki lupini (čeravno temu ni tako), bi bili kapacitivnost in napetost »našega« kondenzatorja pri $r_0 = 6378$ km sledeči:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_0 r_1}{r_1 - r_0} \cong \frac{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}{h} = \frac{\varepsilon_0 S_0}{h} \cong 30\ \text{mF} \quad \text{in} \quad u = Q/C = 18\ \text{MV}.$$

Približek za kapacitivnost spominja na formulo za kapacitivnost ploščnega kondenzatorja, kar je pričakovano, saj je pas med površino Zemlje in ionosfero lokalno videti kot prostor med »ploščama«. Ker smo že pri številskih vrednostih, izdajmo, da je električna energija v polju kondenzatorja določena s formulo $Cu^2/2$, kar bi za ta »ogromen« kondenzator znašalo 4,86 TJ. To je energija, ki jo slovenske elektrarne (z močjo 2 GW) proizvedejo v 2430 sekundah (40 minutah).

Naelektrena krogla. Naelektrena krogla je primer krogelnega kondenzatorja, ko gre $r_1 \to \infty$. Nasprotni naboj je nekje daleč, v neskončnosti. Iz predhodnih relacij dobimo sledeče zveze:

$$u_{0\infty} = V_0 - \underbrace{V_\infty}_{0\ \text{V}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = u \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{Q}{u} = 4\pi\varepsilon_0 r_0\,.$$

Če Zemlja ne bi imela ionosfere, bi bila njena kapacitivnost do neskončne okolice 711 μF. V merskem sistemu CGS ima konstanta $4\pi\varepsilon_0$ vrednost 1, zato se v njem kapacitivnost izraža – »čudno« – v centimetrih.

16:29

Potencial homogenega krogelnega oblaka nabojev. V prejšnjem razdelku smo spoznali poljsko jakostj krogelnega oblaka polmera r_0, v katerem ima naboj enakomerno gostoto ρ. Ugotovili smo, da je polje radialno, da ga v oblaku do njegove površine opredeljuje linearna funkcija, izven pa kvadratična hiperbola, ki ustreza polju točkastega naboja. Potencial izven oblaka in na njegovem robu že poznamo,

$$V(r) = \frac{Q_{\text{oblaka}}}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(4\pi/3)\rho r_0^3}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho r_0^3}{3\varepsilon_0 r} \quad \Longrightarrow \quad V(r_0) = \frac{\rho r_0^2}{3\varepsilon_0}.$$

Manjka še potencial v oblaku. Izberimo točko P, ki je za p oddaljena od središča. Izrazimo potencialno razliko med točko P in površinsko točko T_0:

$$V(P) - V(T_0) = \int_p^{r_0} E_r \mathrm{d}r = \int_p^{r_0} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \mathrm{d}r = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r_0^2 - p^2) \quad \Longrightarrow \quad V(P) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r_0^2 - p^2) + \frac{\rho r_0^2}{3\varepsilon_0} = V(p).$$

Oblikujemo sestavljeno funkcijo:

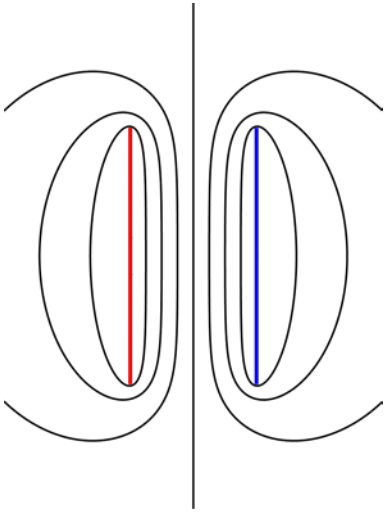
$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r_0^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2\right) & r \leq r_0 \\ \dfrac{\rho r_0^3}{3\varepsilon_0 r} & r > r_0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad V(0) = \frac{\rho r_0^2}{2\varepsilon_0} = \frac{3}{2} V(r_0).$$

Potencial v oblaku sledi kvadratični funkciji, izven pa že znani hiperbolični funkciji. Potencial ima absolutno največjo vrednost v središču – za 50% višjo kot na robu oblaka.

Točkasti naboj se je (do sedaj) izkazal kot ustrezen model, čeravno smo pri njem vedno nekoliko rezervirani; moteči sta singularnosti poljske jakosti $(1/r^2)$ in potenciala $(1/r)$ na njegovem mestu, moteči predvsem z vidika njunih definicij, ki slonita na sili in delu. Težava je v zamisli o naboju v točki. Krogelni oblak ponuja boljšo rešitev: ta je v tem, da predstavo o točkastem naboju zamenjamo kar z njim. Potencial in poljska jakost sta v njegovi bližini v absolutnem iznosu omejena s poljsko jakostjo na robu oblaka in s potencialom v centru oblaka – in neljubih težav ni več.

§11. Gradient potenciala

6:38

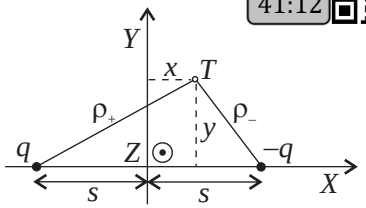


ekvipotencialke v okolici naelektrenih diskov

Razdelek je smiselno nadaljevanje prejšnjih v smeri zaokrožitve tematik, ki so nas od poljske jakosti, dela, napetosti, nevrtinčnosti in potencialne energije privedle do potenciala, ki ga želimo tokrat z druge strani približati poljski jakosti.

Ekvipotencialne ploskve. Nehote smo jih že omenjali. Pri linijskem naboju smo ugotovili, da so valji okoli njega mesta enakega potenciala. To so torej ekvipotencialne ploskve oziroma »ekvipotencialke«. Nekaj podobnega je pri geodetskih krivuljah, plastnicah, izohipsah, ki povezujejo točke enake nadmorske višine; vremenarji podajajo izobare, ki povezujejo točke enakega zračnega tlaka. Tovrstne krivulje ali ploskve služijo grafičnemu prikazu dinamike skalarne funkcije (tlaka, višine, potenciala). Ponovimo: pri točkastem naboju, krogelnem oblaku in krogelnem kondenzatorju so ekvipotencialke koncentrične krogelne lupine, v koaksialnem kablu so to soosni valji, v ploščnem kondenzatorju, v področju homogenosti polja, pa vzporedne ploskve. Pri skupinah točkastih ali premih nabojev in pri naelektreni krožnici, pa se zadeve že močno zapletejo; razrešijo jih primerni, računalniško podprti postopki. Seznama lepih primerov pa seveda še nismo izčrpali ...

41:12



Ekvipotencialke para nasprotnih premih nabojev. Njun rezultančni vektor poljske jakosti poznamo; poglejmo, kako je z njunim potencialom in kakšne so ekvipotencialke. Prema naboja $\pm q$ položimo v ravnino $y = 0$ tako, da sta vsak zase odmaknjena od osi Y za s. Oddaljenosti točke $T(x, y)$ do njiju sta ρ_+ in ρ_-. Potencialna prispevka seštejemo in dobimo

$$V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{\rho_+} + \frac{(-q)}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{\rho_-} + K_0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_+} + \underbrace{K_0}_{0\,\mathrm{V}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_+}.$$

Pri oddaljevanju točke T v neskončnost se logaritem razmerja bliža vrednosti nič. Če naj je potencial tam enak nič, mora biti tudi K_0 enak nič. Potencial v splošni točki določa razmerje ρ_-/ρ_+. Točke, za katere je to razmerje konstantno, so na isti ekvipotencialni ploskvi. Ravnina $x = 0$ je očitno ploskev s potencialom 0 V, saj je tam $\rho_- = \rho_+$. Če privzamemo, da je $q > 0$, potem ima potencial v prostoru $x < 0$ pozitivno, v prostoru $x > 0$ pa negatvno vrednost. V točkah (x, y) in $(-x, y)$,

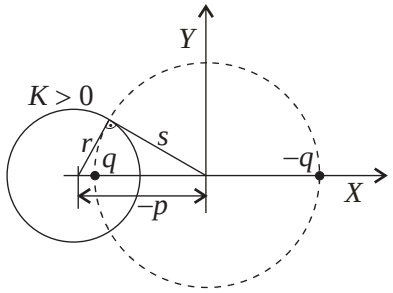
zrcalnih prek ravnine $x = 0$, se razdalji ρ_- in ρ_+ ravno zamenjata, zato je $V(-x, y) = -V(x, y)$. Poiščimo ekvipotencialko s potencialom K, pišimo:

15:05

$$K = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_+} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_-}{\rho_+} = \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 K}{q}\right) = k \quad \text{in} \quad \rho_\pm^2 = (x \pm s)^2 + y^2 \quad \text{ter} \quad (x - s)^2 + y^2 = k^2((x + s)^2 + y^2).$$

Po kvadriranju in ureditvi prepoznamo enačbo krožnice s središčem na osi X:

$$x^2 - 2\frac{1 + k^2}{1 - k^2}sx + y^2 + s^2 = (x - p)^2 + y^2 - r^2 = x^2 - 2px + y^2 + p^2 - r^2 = 0\,.$$

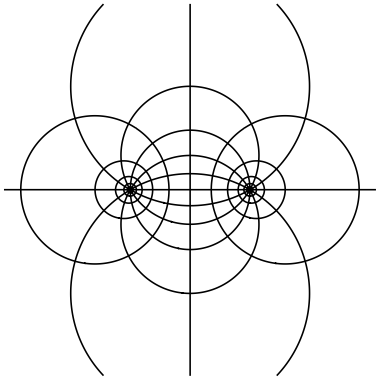


Iz primerjave členov izideta parametra kroga, izmik središča p in radij r:

$$p^2 = s^2 + r^2 \quad \text{in} \quad p = \frac{1 + k^2}{1 - k^2}s \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2k}{|1 - k^2|}s$$

Pitagorsko vsoto geometrijsko upodablja trikotnik s pravim kotom v presečišču pravokotno sekajočih krožnic polmerov s in r. Krožnico polmera s imenujemo »osnovna krožnica«. Diferenca $|p| - s = e$ določa t. i. ekscentričnost oziroma izmik središča ekvipotencialnega kroga od naboja, ki ga obkroža.

Z izbiranjem vrednosti za konstanto K, npr. $\pm$ 10 V, $\pm$ 20 V, $\pm$ 30 V … pridobivamo lege središč in radije krogov oziroma ekvipotencialnih valjev. Družini ekvipotencialk lahko dodamo še družino silnic; mesta zgoščenih ekvipotencialk so hkrati tudi mesta zgoščenih silnic. Informacija o jakosti polja se torej podvaja. Opažamo, da se ekvipotencialne ploskve in silnice sekajo pod pravim kotom, enako kot v ploščnem in krogelnem kondenzatorju ali v koaksialnem kablu. To, kar se kaže kot slučaj, se bo kasneje izkazalo za pravilo.



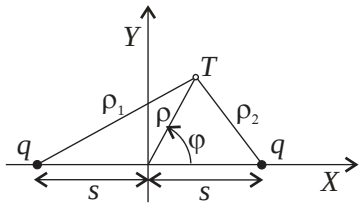
ekvipotencialke in silnice dveh nasprotno naelektrenih premic

Ekvipotencialke para enakih premih nabojev. Primer je aktualen pri linijskem oziroma faznem vodniku 400 kV-nega daljnovoda v izvedbi s parom vrvi, s t. i. »dvojčkom«. Odlikuje ga manjša poprečna vrednost električne poljske jakosti ob vrveh, posledično manjša ionizacija zraka in posledično manjše koronske izgube. Še boljši od te sta izvedbi s »trojčkom«

26:05

ali s »četvorčkom«; kaj več o tem še kasneje. Naj sta ρ_1 in ρ_2 oddaljenosti točke $T(x, y)$ do premih nabojev (q, q). Vsota njunih potencialnih deležev je

$$V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\ \mathrm{m}}{\rho_1} + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\ \mathrm{m}}{\rho_2} + K_0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1\ \mathrm{m}^2}{\rho_1\rho_2} + K_0.$$



Nedorečena konstanta ne moti iskanja ekvipotencialk; bolj kot sama vrednost potenciala so pomembne ekvipotencialke kot takšne in napetosti med sosednjimi. Enačba ekvipotencialk je

$$\rho_1\rho_2 = l^2.$$

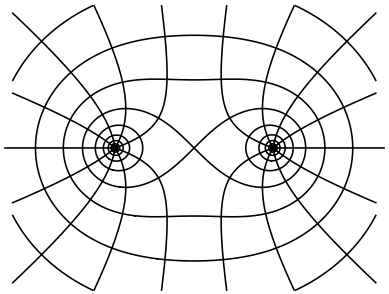
Lotimo se tiste, ki prečka izhodišče, $l = s$. Oddaljenosti izrazimo s pomočjo polarnih koordinat in kosinusnega izreka,

$$\rho_1^2 = s^2 + \rho^2 + 2s\rho\cos\varphi \quad \text{in} \quad \rho_2^2 = s^2 + \rho^2 - 2s\rho\cos\varphi,$$

9:09

in ju vstavimo v zgornjo enačbo ter uredimo:

$$(s^2 + \rho^2 + 2s\rho\cos\varphi)(s^2 + \rho^2 - 2s\rho\cos\varphi) = s^4 + 2s^2\rho^2 + \rho^4 - 4s^2\rho^2\cos^2\varphi = s^4 \quad \Rightarrow \quad \rho = s\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$



ekvipotencialke in silnice dveh enako naelektrenih premic

Dobimo enačbo leminiskate, ki spominja na »ležečo osmico«. Ta in vse ostale krivulje so iz družine Cassinijevih krivulj. Če je $l < s$, so krivulje kot čebulni listi v pentljah osmice, če pa je $l > s$, so krivulje ledvičnih oblik in so z oddaljevanjem od dvojčka vse bolj podobne krogom.

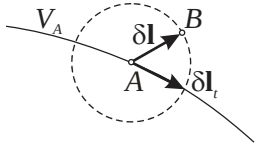
Gradient potenciala. Razmišljanja so nas od električne sile, poljske jakosti, dela in napetosti privedla do potenciala in ekvipotencialk. Postavlja se vprašanje: kako priti od potenciala nazaj do poljske jakosti? Odgovor je na videz preprost. Če vodi pot od **E** do V prek integrala, potem vodi pot od V do **E** prek odvoda; res, vendar prek katerega odvoda? Potencial je skalarna funkcija, poljska jakost pa vektorska, torej trojka skalarnih funkcij. V »igri« je verjetno več odvodov.

16:35

Naj je funkcija električnega potenciala znana; grafično jo upodablja družina ekvipotencialk. Na eni od njih izberimo točko A. Potencial ima na tej ekvipotencialki vrednost V_A. Vektor $\delta\mathbf{l}$ naj pomeni kratek izmik iz A v bližnjo točko B. Potencialna razlika med točkama B in A je

$$\delta V = V_B - V_A = \int_B^A \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \cong -\mathbf{E}(T)\cdot \delta\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad \delta V \cong -\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{l}\,.$$

Zaradi kratkega izmika $\delta\mathbf{l}$ je možno integral aproksimativno izraziti s skalarnim produktom poljske jakosti v katerikoli točki C, ki leži na zveznici med A in B, in vektorjem $\delta\mathbf{l}$. Relacija sporoča: pri izmiku $\delta\mathbf{l}$ iz točke A v točko B se vrednost potenciala spremeni za δV. Sprememba δV je pozitivna, negativna ali nič, odvisno od usmerjenosti izmika $\delta\mathbf{l}$.

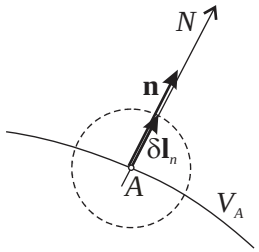


V prvem primeru naj je izmik tangenten na ekvipotencialko, $\delta\mathbf{l} = \delta\mathbf{l}_t$. Sledi: točki B in A sta na isti ekvpotencialki, zato je $\delta V = 0$ V. Če pa je

15:37

$$\delta V \cong -\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{l}_t = 0\ \mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}\perp\delta\mathbf{l}_t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{n}E_n\,,$$

sta si vektorja polja in izmika pravokotna. To pomeni, da je poljska jakost $\mathbf{E}$ normalni vektor; izrazimo ga s produktom enotskega vektorja $\mathbf{n}$ normale na ekvipotencialko v točki A in normalne komponente E_n vektorja $\mathbf{E}$. Pri izbiri enotskega vektorja normale imamo dve možnosti: izbrali smo narisanega, mogli pa bi izbrati tudi njemu nasproten vektor. Vzdolž vektorja $\mathbf{n}$ položimo os N s koordinato n.

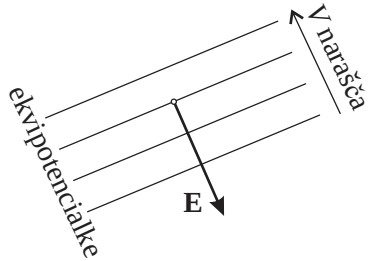


V drugem primeru izberemo za izmik iz A vektor $\delta\mathbf{l} = \delta\mathbf{l}_n = \mathbf{n}\delta n$ in pišemo:

9:36

$$\delta V \cong -\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{l}_n = -\mathbf{n}E_n\cdot\mathbf{n}\delta n = -E_n\delta n \quad \Rightarrow \quad E_n \cong -\frac{\delta V}{\delta n} \quad \Rightarrow \quad E_n = -\lim_{\delta n\to 0}\frac{\delta V}{\delta n} = -\frac{\partial V}{\partial n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{n}\frac{\partial V}{\partial n}\,.$$

Uporabili smo pravilo skalarnega produkta, izrazili normalno komponento, izvedli limitni postopek, ko je izmik δn vse manjši (ko se točka B bliža točki A) in pridobili odvod potenciala, ki ga zapisujemo s pisanim grškim »d« in mu rečemo parcialni (ali delni) odvod. Parcialni odvod zato, ker se potencial ne spreminja le vzdolž osi N, ampak vzdolž katerekoli osi M, ki bi jo položili skozi točko A. Zadnji zapis je matematični predpis, ki iz privzeto znanega potenciala v prostoru iztisne vektor poljske jakosti.



Kaj je sporočilo negativnega predznaka? Če je potencial vzdolž osi N v točki A naraščajoč ($\partial V/\partial n > 0$), potem je vektor $\mathbf{E}$ usmerjen nasproti vektorja $\mathbf{n}$, torej v smer padanja potenciala, če pa je potencial vzdolž osi N v A padajoč ($\partial V/\partial n < 0$), je vektor $\mathbf{E}$ usmerjen vzdolž vektorja $\mathbf{n}$, torej spet v smer padanja potenciala. Sporočilo je jasno: vektor Coulombove poljske jakosti je vedno usmerjen v smer padanja potenciala, od prej pa še, da je vedno pravokoten na ekvipotencialno ploskev, ki gre skozi tisto točko. Pridobljeno operacijo

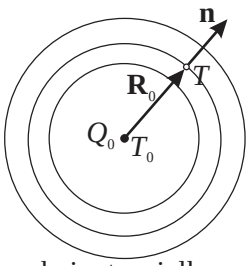
$$\mathbf{n}\frac{\partial V}{\partial n} = \operatorname{grad} V \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{n}\frac{\partial V}{\partial n} = -\operatorname{grad} V$$

imenujemo gradient (strmina), v našem primeru gradient potenciala; poljska jakost je negativni gradient potenciala. V temperaturnem polju je pomemben grad T. Ta vektor določa intenzivnost spreminjanja temperature oziroma gostoto toplotnega toka v prostoru. Beseda gradient se v pomenu upadanja ali naraščanja uporablja tudi v drugih kontekstih. Ko neka funkcija narašča, rečemo, da ima pozitivni gradient, ob upadanju pa, da ima negativni gradient.

6:57

Polje točkastega naboja. Šolski primer je potencial točkastega naboja Q_0, ki se nahaja v točki T_0,

$$V(T) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0}.$$



ekvipotencialke

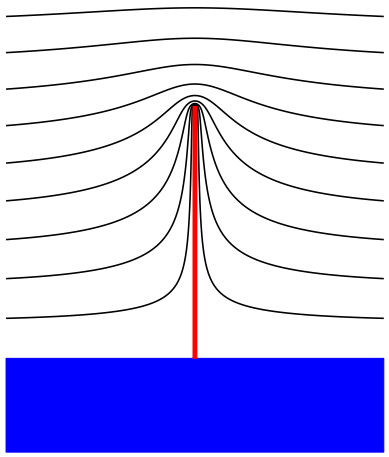
Ekvipotencialke so koncentrične krogelne lupine okoli njega. Točka T je na ekvipotencialni ploskvi z radijem R_0, enotski vektor $\mathbf{n}$ določa kvocient $\mathbf{R}_0/R_0$. Potrebujemo še odvod potenciala vzdolž vektorja $\mathbf{n}$; temu ustreza odvod po radiju R_0:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_0}{R_0}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial R_0} = -\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{n}\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{Q_0\mathbf{R}_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3}.$$

In krog je sklenjen: polje točkastega naboja nas je spremljalo skozi vrsto vprašanj, na koncu privedlo do potenciala, sam gradient potenciala pa nazaj k polju.

Drugi lepi primeri. Podobno bi postopali v že znanih zgledih polja v krogelni in valjni geometriji in podobno v ploščnem kondenzatorju. Opredeliti je potrebno vektor $\mathbf{n}$ na krogli, valju ali na ravnini ter odvajati funkcijo potenciala po koordinati

n osi N. Opravilo izgleda preprosto, a žal ni. Že omenjeni primeri imajo namreč enostavne ekvipotencialke (soosne valje, koncentrične krogelne lupine in vzporedne ploskve), pri paru vzporednih linijskih nabojev pa že ni več tako. Na težave bi naleteli pri določitvi normale na ekscentričnih krožnicah ali Cassinijevih krivuljah. Še trši oreh bi predstavljalo iskanje potenciala kot funkcije lokalne koordinate n na osi N.



ekvipotencialke ob strelovodni palici

O gradientu še drugače. Na mestu je vprašanje, kje iskati izhod? Vrniti se moramo k odnosu

$$\delta V \cong -\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{l}\,,$$

v katerem je $\delta\mathbf{l}$ neznaten izmik iz točke A. Če je $\delta\mathbf{l}$ poljuben, naj bo $(\delta x, 0, 0)$, torej tak, da predstavlja izmik vzdolž osi X:

$$\delta V \cong -\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{l} = -\left(E_x,\ E_y,\ E_z\right)\cdot(\delta x, 0, 0) = -E_x\delta x \quad\Rightarrow\quad E_x \cong -\frac{\delta V}{\delta x} \quad\Rightarrow\quad E_x = -\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta V}{\delta x} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Podobno postopamo še pri izmikih $(0, \delta y, 0)$ ter $(0, 0, \delta z)$. Če torej poznamo funkcijo potenciala $V(x, y, z)$, je polje

$$\mathbf{E} = \left(E_x,\ E_y,\ E_z\right) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

V valjnem koordinatnem sistemu so osnovni izmiki: v radialni smeri za $\delta\rho$, v smeri kota φ za dolžino loka $\rho\delta\varphi$ in vzdolž osi Z za δz. Pri vseh treh izmikih postopamo enako kot prej. Iz funkcije potenciala v obliki $V(\rho, \varphi, z)$ sledi polje

$$\mathbf{E} = \left(E_\rho,\ E_\varphi,\ E_z\right) = \left(-\frac{\partial V}{\partial \rho}, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

V krogelnem koordinatnem sistemu so osnovni izmiki: v radialni smeri za δr, v smeri kota ϑ za dolžino loka $r\delta\vartheta$ vzdolž poldnevnika in v smeri kota φ za dolžino loka $r\sin\vartheta\,\delta\varphi = \rho\delta\varphi$ vzdolž vzporednika. Če poznamo potencial $V(r, \vartheta, \varphi,)$, je

$$\mathbf{E} = \left(E_r,\ E_\vartheta,\ E_\varphi\right) = \left(-\frac{\partial V}{\partial r}, -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right).$$

Polje para nasprotnih premih nabojev. Če izpisani razdalji vnesemo v logaritmsko funkcijo, dobimo:

$$\rho_\pm^2 = (x \pm s)^2 + y^2 \quad\Rightarrow\quad V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x-s)^2 + y^2}{(x+s)^2 + y^2} = V(x, y).$$

Ko izraz odvajamo po koordinatah x in y, dobimo:

$$E_x(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x+s}{(x+s)^2+y^2} - \frac{x-s}{(x-s)^2+y^2}\right),$$

$$E_y(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{(x+s)^2+y^2} - \frac{y}{(x-s)^2+y^2}\right).$$

Pravila parcialnega odvajanja so enaka pravilom odvajanja funkcije ene spremenljivke, s poudarkom: ko odvajamo po eni spremenljivki, smatramo ostale kot konstante.

Polje naelektrene daljice. Potencial okrog daljice, ki leži na osi Z med točkama $z_{1,2} = \pm l$ in nosi naboj Q, že poznamo:

$$V(\rho,z) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{\sqrt{\rho^2+(z+l)^2}+z+l}{\sqrt{\rho^2+(z-l)^2}+z-l}.$$

Vprašajmo se po ekvipotencialkah. Za točke (ρ,z) na ekvipotencialki s potencialom izbrane vrednosti V_s velja enačba

$$\frac{\sqrt{\rho^2+(z+l)^2}+z+l}{\sqrt{\rho^2+(z-l)^2}+z-l} = K_s = \exp\left(8\pi\varepsilon_0 l\frac{V_s}{Q}\right) > 1.$$

Za nadaljevanje je odločilna substitucija, ki podkorenska izraza predstavi kot popolna kvadrata,

$$\rho^2+(z\pm l)^2 = \rho^2+z^2+l^2\pm 2lz = \frac{l^2z^2}{s}+s\pm 2lz = \left(\frac{lz}{\sqrt{s}}\pm\sqrt{s}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad K_s = \frac{\frac{lz}{\sqrt{s}}+\sqrt{s}+z+l}{\left|\frac{lz}{\sqrt{s}}-\sqrt{s}\right|+z-l},$$

$$\rho^2+z^2+l^2-\frac{l^2z^2}{s}-s = 0 \quad\Rightarrow\quad s = \frac{1}{2}\left(\rho^2+z^2+l^2+\sqrt{(\rho^2+z^2+l^2)^2-4l^2z^2}\right),$$

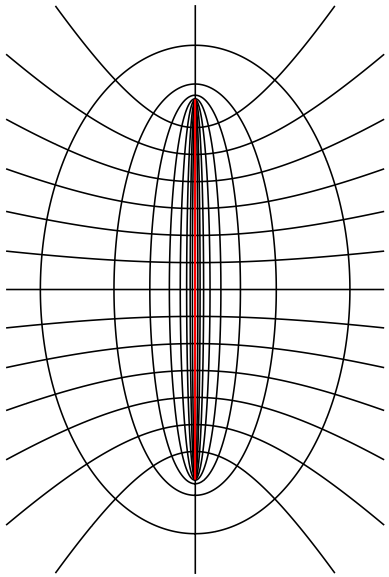
pri čemer je s parameter ekvipotencialke s potencialom V_s. Povezavo med s in K_s najdemo na ravnini $z = 0$:

$$K_s = \left.\frac{\frac{lz}{\sqrt{s}}+\sqrt{s}+z+l}{\left|\frac{lz}{\sqrt{s}}-\sqrt{s}\right|+z-l}\right|_{z=0} = \frac{\sqrt{s}+l}{\sqrt{s}-l} \quad\Rightarrow\quad s = \left(\frac{K_s+1}{K_s-1}l\right)^2 > l^2\,.$$

Izbran potencial V_s določi konstanto K_s, ta pa parameter s in ploskev,

$$\rho^2 + z^2 + l^2 = \frac{l^2 z^2}{s} + s \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{s} + \frac{\rho^2}{s - l^2} = 1,$$

ki je podolgovat rotacijski elipsoid, ki obkroža daljico. Sosednje ekvipotencialke oziroma parametri s_1, s_2, s_3 ... določajo družino konfokalnih elipsoidov z goriščno razdaljo l.



ekvipotencialke in silnice enakomerno naelektrene daljice

Izrazimo še komponenti poljske jakosti. Po odvajanju in ureditvi sledita:

$$E_\rho(\rho, z) = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l\rho}\left(\frac{z + l}{\sqrt{\rho^2 + (z + l)^2}} - \frac{z - l}{\sqrt{\rho^2 + (z - l)^2}}\right),$$

$$E_z(\rho, z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + l)^2}}\right).$$

Izraza že poznamo; do njiju smo prišli prek integracije. S podobno substitucijo kot prej ugotovimo, da ležijo silnice, ki jih določa enačba $E_\rho : E_z = \mathrm{d}\rho : \mathrm{d}z$, na rotacijskih hiperboloidih

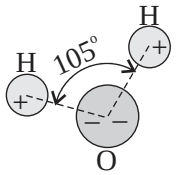
$$\frac{z^2}{p} - \frac{\rho^2}{l^2 - p} = 1, \;\; p < l^2.$$

Parametri p_1, p_2, p_3 ... določajo družino konfokalnih hiperboloidov z goriščno razdaljo l. Družini konfokalnih elipsoidov in hiperboloidov predstavljata ortogonalni družini ploskev v okolici naelektrene daljice.

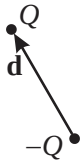
§12. Električni dipoli

9:54

Razdelek o dipolih je sklepni del priprav za obravnavo prevodnih, izolacijskih in dielektričnih snovi v električnem polju. Največ pozornosti namenjamo točkastemu dipolu, dotaknili pa se bomo še premega dipola in dipolske ploskve. Sorodne teme bodo aktualne tudi v magnetiki, ko bo govora o magnetnih dipolih in njihovi vlogi pri obravnavi magnetikov.



»Naravni« električni dipol je polarna molekula; molekula vode je že takšna. Gre za kovalentno vez kisika in dveh vodikov. Jedri vodikov oklepata z jedrom kisika kot 105°. Zaradi prevlade protonov kisika nad protonoma vodikov sta elektrona vodikov pomaknjena bližje kisiku. Središči elektronov in protonov molekule sta zato rahlo izmaknjeni. Molekulo vode je potemtakem mogoče modelirati z dipolskim parom ($\pm$) točkastih nabojev, ki sta neznatno izmaknjena. Polarne molekule oziroma permanentni dipoli so še molekule alkohola, glicerina in vrste drugih snovi.



Točkasti dipol. To je par točkastih nabojev $\pm Q$, ki sta vsaksebi na razdalji d. Dipolu priredimo električni dipolni moment $\mathbf{p}$; moment je definiran s produktom naboja Q in vektorja razdalje $\mathbf{d}$ med njima, ki je po dogovoru usmerjen od negativno k pozitivno predznačenemu naboju,

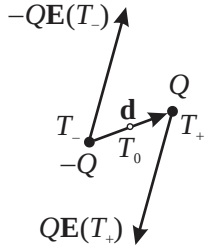
$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}.$$

Absolutna vrednost dipolnega momenta molekule vode je $6{,}1 \cdot 10^{-30}$ Cm. Če upoštevamo, da ima molekula vode $(2 + 8)$ protonov in $(2 + 8)$ elektronov, potem sta središči skupine protonov in skupine elektronov znotraj molekule izmaknjeni za $6{,}1 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{Cm}/(10 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}) = 3{,}8 \cdot 10^{-12}$ m, moment kot vektor pa razpolavlja kot 105°.

11:27

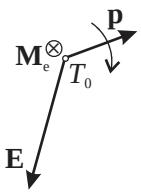
Navor na dipol. Vprašanje navora je aktualno v primeru, ko se dipol nahaja v električnem polju. Če sta si naboja dipola sorazmerno blizu, potem sta sili nanju praktično enakih absolutnih vrednosti, vendar nasprotnih smeri. Električni sili

oblikujeta dvojico sil z navorom okoli sredinske točke T_0. Navora sil $Q\mathbf{E}(T_+)$ in $-Q\mathbf{E}(T_-)$, ki delujeta na ročicah $\pm\,\mathbf{d}/2$ sta vektorja in se izražata z vektorskima produktoma ročic in sil; njuna vsota je



$$\mathbf{M}_\mathrm{e} = \tfrac{1}{2}\mathbf{d} \times Q\mathbf{E}(T_+) + \left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{d}\right) \times (-Q)\mathbf{E}(T_-) = Q\mathbf{d} \times \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{E}(T_+) + \mathbf{E}(T_-)\big) \cong Q\mathbf{d} \times \mathbf{E}(T_0) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}\,.$$

Moment $\mathbf{p}$ in polje $\mathbf{E}$ na skici določata vektor navora $\mathbf{M}_\mathrm{e}$, ki je usmerjen v list papirja, kar označuje znak $\otimes$, rep strelice. Točki T_+ in T_- sta točki nabojev, polje $\mathbf{E}$ pa je jakost polja v sredini dipola in približno ustreza srednji vrednosti polj na mestih nabojev. Težnja navora je dipol zavrteti in ga usmeriti vzdolž polja. Takrat pravimo, da je dipol v stabilni legi; tej nasprotna je labilna lega. Absolutno največji navor na dipol je v prečni legi, $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}$. V primeru izmeničnega električnega polja se dipol obrača. Ko damo kozarec vode v takšno polje, se molekule vode obračajo in trkajo med seboj, kar dviguje notranjo energijo oziroma temperaturo. Princip se izkorišča v mikrovalovni pečici, ki deluje pri frekvenci okoli 2,4 GHz.



Potencialna energija dipola. Potencialno energijo dipola določa vsota električnih potencialnih energij nabojev:

$$W_\mathrm{ep} = QV(T_+) + (-Q)V(T_-) = Q\int_{T_+}^{T_-} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \cong Q(-\mathbf{d})\cdot\mathbf{E}(T_0) = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}\,.$$

4:32

Razliko potencialov smo izrazili z integralom poljske jakosti, tega pa aproksimirali s skalarnim produktom jakosti polja v sredini dipola in vektorjem $\mathbf{d}$. Enačba podpira ugotovitve navora: potencialna energija dipola je v stabilni legi najmanjša (negativna), v labilni največja (pozitivna), v prečni pa enaka nič. Navor sil stremi dipol zaokreniti v lego najmanjše možne potencialne energije, kar je tudi nasploh težnja Coulombove sile.

Sila na dipol. Dipol naj leži vzdolž osi L s koordinato l. Na dipol deluje diferenčna sila

15:20

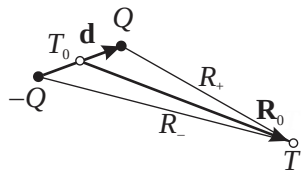
$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = Q\mathbf{E}(T_+) + (-Q)\mathbf{E}(T_-) = Q\big(\mathbf{E}(T_+) - \mathbf{E}(T_-)\big) \cong Qd\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial l} = p\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial l}\,.$$

Diferenco poljskih jakosti smo izrazili s produktom odvoda vektorja poljske jakosti vzdolž osi L in razdalje d. Kaj zapis sporoča? Če je dipol prosto vrtljiv, leži vzdolž silnice. Če se jakost polja vzdolž silnice povečuje, sta odvod vektorja $\mathbf{E}$ in

sila $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ usmerjena v smeri silnice. Res: pozitivni naboj dipola je v močnejšem polju kot negativni naboj. Če pa se jakost polja vzdolž silnice zmanjšuje, sta odvod vektorja $\mathbf{E}$ in sila $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ usmerjena v nasprotni smeri silnice. Res: negativni naboj dipola je v močnejšem polju kot pozitivni naboj. V obeh primerih stremi sila $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ dipol povleči v področje močnejšega polja. Ta učinek se uporablja pri dielektroforezi oziroma pri postopkih, pri katerih se s poljem usmerja gibanje dipolnih delcev, npr. prašnih, pri postopku suhega barvanja (tiskanja), pri nanosu vlaken na tkanine, pri izločanju delcev iz dimnih plinov v elektro-filtru itn. Splošen zapis sile na dipol dobimo tako, da komponente p_x, p_y in p_z dipolnega momenta in osi X, Y in Z s koordinatami x, y in z razumemo v duhu p, L in l: da dipol razstavimo na tri pravokotne dipole in izrazimo vektorje sil na posamezne na zgornji način ter jih seštejemo,

28:14

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} = \left(p_x, p_y, p_z\right) \quad \Rightarrow \quad p_x = Qd_x \ldots \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_\mathrm{e} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}.$$

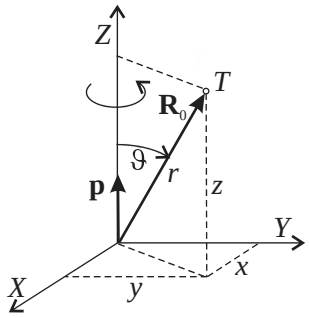


Električno polje dipola. Oddaljenosti točke T do nabojev dipola sta R_+ in R_-. Potencial v točki T določa izraz

$$V(T) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_+} + \frac{(-Q)}{4\pi\varepsilon_0 R_-} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_- - R_+}{R_- R_+}.$$

Če smatramo razdaljo d med nabojema kot neznatno, sledijo naslednje aproksimacije:

$$\left.\frac{R_- - R_+}{R_- R_+}\right|_{d \ll R_0} \cong \frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{R}_0/R_0)}{R_0^2} = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}_0}{R_0^3} \quad \Rightarrow \quad V(T) \cong \frac{Q\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3},$$



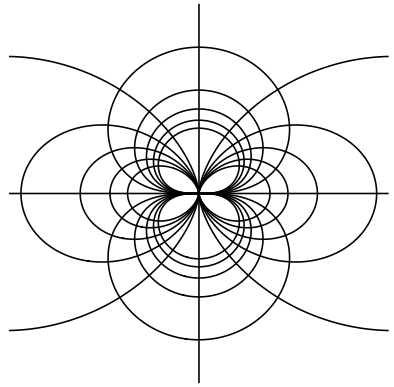
kjer je $\mathbf{R}_0$ vektor razdalje od točke T_0 do točke T. Določimo še električno poljsko jakost. Dipol postavimo v koordinatno izhodišče in ga usmerimo vzdolž osi Z, sledi:

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}_0 = p_z r\cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad V(T) = \frac{p_z r\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p_z\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = V(r,\vartheta).$$

Potencial se izraža z oddaljenostjo r od izhodišča in s kotom ϑ. Iz prejšnjega razdelka povzamemo formule in dobimo:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p_z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cos\vartheta}{r^3} \quad \text{in} \quad E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{p_z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\vartheta}{r^3} \quad \text{ter} \quad E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0.$$

Polje okoli osi Z je rotacijsko simetrično in usiha s tretjo potenco oddaljenosti; na dvojni oddaljenosti je polje osemkrat šibkejše. Ob osi dipola dominira prva (r) komponenta, ob ekvatorialni ravnini dipola pa druga (ϑ) komponenta.



električno polje točkastega dipola

Premi dipol. Izhodiščni primer sta vzporedni premici z naelektritvama $\pm q$, katerih potencial poznamo,

$$V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_+}\,.$$

O premem dipolu govorimo takrat, ko sta premici sorazmerno skupaj, $d = 2s \ll \rho$. Takrat sta si razdalji ρ_- in ρ_+ za malo različni. Njun kvocient izrazimo s približkom

$$\frac{\rho_-}{\rho_+} \cong \frac{\rho - s\cos\varphi}{\rho + s\cos\varphi} = \frac{\rho^2 - 2s\rho\cos\varphi + s^2\cos^2\varphi}{\rho^2 - s^2\cos^2\varphi} \xrightarrow{s\ll\rho} 1 - \frac{2s\cos\varphi}{\rho} \quad\Rightarrow\quad V(T) \cong \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(1 - \frac{2s\cos\varphi}{\rho}\right) = V(\rho,\varphi).$$

Pri logaritmu se opremo na približek funkcijske vrednosti v bližini izbrane točke:

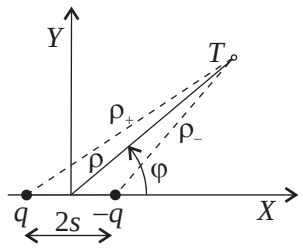
$$f(t+h) \cong f(t) + hf'(t) \quad\Rightarrow\quad \ln(t+h) \cong \ln t + h(\ln t)' = \ln t + h(1/t) \quad\Rightarrow\quad \ln(1+h) \cong h.$$

Od tod sledi

$$V(\rho,\varphi) \cong \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(1 - \frac{2s\cos\varphi}{\rho}\right) \cong -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2s\cos\varphi}{\rho} = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

Produkt qd je moment premega dipola. Po enačbah iz prejšnjega razdelka sledijo še komponente poljske jakosti:

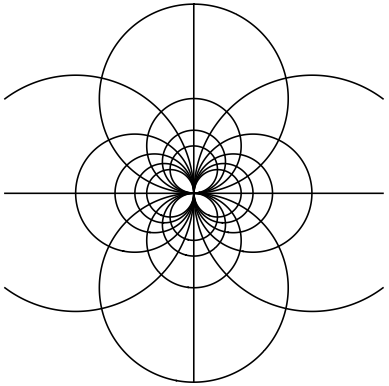
$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\varphi}{\rho^2} \quad\text{in}\quad E_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi} = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\varphi}{\rho^2} \quad\text{ter}\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0\,.$$



Aktualni komponenti se razlikujeta le v kotni odvisnosti. Absolutna vrednost poljske jakosti

$$E = |\mathbf{E}| = \sqrt{E_\rho^2 + E_\varphi^2 + E_z^2} = \frac{|q|d}{2\pi\varepsilon_0\rho^2}$$

je neodvisna od polarnega kota in upada s kvadratom oddaljenosti. Na veliki oddaljenosti je zračni dvovod videti kot premi dipol. Če sta žici 40 cm narazen in naelektreni s ± 4 nC/m, je poljska jakost na oddaljenosti 4 m enaka 1,8 V/m.



električno polje premega dipola

Pri energetskem daljnovodu se naelektritve vodnikov spreminjajo po sinusni zakonitosti. Daleč stran od snopa vodnikov z razmikom d med vrvmi je ocena jakosti polja sledeča:

$$E \cong \frac{\sqrt{3}|q|d}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}.$$

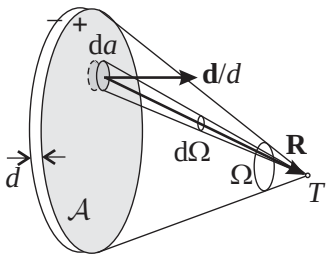
Naboji so okoli tisočkrat večji, razdalja d je okoli 5 m, jakost polja na oddaljenosti 20 m pa je takrat okoli 800 V/m.

Dipolska ploskev. Nazoren primer dipolske ploskve je ploščni kondenzator z neznatnim razmikom d med ploščama in naelektritvama $\pm\sigma$. Polje med ploščama poznamo, opozorili pa smo tudi na anomalije ob robovih. Tu se bomo posvetili razmeram izza plošč. Ko na eni plošči izberemo ploskvico s površino da, in na drugi njej sosednjo, si na razdalji d stojita nasproti naboja $\pm\sigma\,\mathrm{d}a$, ki oblikujeta točkasti dipol z električnim momentom $(\sigma\,\mathrm{d}a)\mathbf{d}$, vektor $\mathbf{d}$ je usmerjen od negativne k pozitivni plošči. Potencial dipola že poznamo; zaradi diferencialnih nabojev ga pišemo v diferencialni obliki:

$$\mathrm{d}V(T) = \frac{(\sigma\,\mathrm{d}a)\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3},$$

pri tem je vektor $\mathbf{R}$ usmerjen od točkastega dipola k točki T izven kondenzatorja. Zapis potenciala preoblikujemo takole:

$$\mathrm{d}V(T) = \frac{(\sigma\,\mathrm{d}a)\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\sigma d}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}a(\mathbf{d}/d)\cdot\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\sigma d}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{R}/R)}{R^2} = \frac{\sigma d}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega,$$

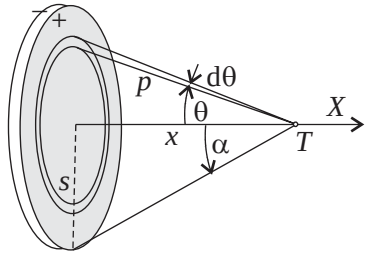


Oblikujemo enotski vektor $(\mathbf{d}/d)$ in ga uporabimo za zapis vektorja ploskvice d$\mathbf{a}$, zatem pa še enotski vektor $(\mathbf{R}/R)$, da v drugem ulomku (kot pri Gaussovem zakonu) prepoznamo prostorski kot dΩ, pod katerim se ploskvico d$\mathbf{a}$ vidi iz točke T. Takšne prispevke na koncu le še »seštejemo«,

$$V(T) = \int_{\mathcal{A}} \mathrm{d}V(T) = \frac{\sigma d}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\Omega = \frac{\sigma d}{4\pi\varepsilon_0}\Omega.$$

Rezultat je preprost: potencial izven kondenzatorja je sorazmeren prostorskemu kotu, pod katerim se od tam vidi plošči kondenzatorja. Če je točka tik izza pozitivne plošče, se ju od tam vidi pod kotom 2π, kar pomeni, da ima tam potencial

vrednost $\sigma d/2\varepsilon_0$. V prostoru izza negativne plošče se stvar ponovi. Tik izza te plošče ima potencial vrednost $-\sigma d/2\varepsilon_0$, na simetralni ravnini med ploščama pa ima potencial vrednost nič.



Rezultat je zelo nazoren, ko pa ga želimo uporabiti, se zatakne pri zapisu prostorskega kota. Izhod ponuja numerični približek, vendar to ne bo naše opravilo. Na voljo imamo še šolski zgled: da sta plošči kondenzatorja krožna diska, točka računanja potenciala pa v njuni osi. Diferencialno ozek kolobar na disku polmera s se iz točke T zaznava kot del krogelne površine $\mathrm{d}a = 2\pi(p\sin\theta)p\mathrm{d}\theta$ znotraj prostorskega kota $\mathrm{d}\Omega = (\mathrm{d}a/p^2) = 2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, celoten disk pa se vidi pod kotom

$$\Omega = \int_0^\alpha 2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi(1-\cos\alpha) = 2\pi\left(1-\frac{x}{\sqrt{s^2+x^2}}\right).$$

Potencial v točki $T(x,0,0)$ je s tem določen,

$$V(T) = \frac{\sigma d}{4\pi\varepsilon_0}\Omega = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha) = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{s^2+x^2}}\right) = V(x).$$

Izrazimo še poljsko jakost v osi, ta ima od nič različno le x komponento, sledi:

$$E_x = E_x(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}\frac{s^2}{(s^2+x^2)^{3/2}} \xrightarrow{x\to d/2} \approx \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0 s}.$$

potencial v osi dipolske ploskve

Pri obravnavi ploščnega kondenzatorja smo opozorili na polje izza plošč; polje tik izza desne plošče je z zadnjo oceno ovrednoteno. Vidimo, da je polje tam za faktor $d/2s$ šibkejše od polja med ploščama. Npr.: če bi bil polmer plošč 10 cm, razmik med njima pa 1 mm, bi bilo polje izza plošč okvirno dvestokrat šibkejše od onega med ploščama.

§13. Prevodnik in elektrostatično polje

Prevodnik smo spotoma že omenjali. Spomnimo se struktur, pri katerih smo naleteli na področja brez polja in si dovolili virtualno okovinjanje. Spoznali smo nekaj pomembnih primerov: ploščni in krogelni kondenzator ter koaksialni kabel. Tega se bomo to pot lotili temeljiteje, vendar še ne celovito. Na prevodne snovi je potrebno gledati širše in ne le z vidika elektrostatike. O njih bomo tokrat spregovorili na kvalitativni ravni, kajti elektrostatika ne loči med boljšimi in slabšimi prevodniki, med srebrom, aluminijem, železom, grafitom, vodo, silicijem, zemljo, čeravno so za elektrotehniko vse te in druge snovi izredno pomembne. Na sam kvantitativni odgovor bo potrebno žal še malo počakati. Podobno velja tudi za izolante, dielektrike in magnetike; vse te bomo spoznavali postopoma in v okviru danih možnosti.

Status elektrostatičnega polja v prevodniku. Kot ključno se izkaže vprašanje polja **E** v prevodniku. Do odgovora ne vodi neko matematično izvajanje, ampak fizikalni oziroma izkustveni razmislek. Kot prevodnik razumemo snov, ki ima na voljo veliko prostih nosilcev naboja; v kovinah so to elektroni, v tekočinah ioni, v plinih pa eni in drugi. Za baker, kot najpogostejši električni prevodnik, smo navedli, da ima v normalnih razmerah vsak njegov atom en prost elektron in da je teh $8{,}4 \cdot 10^{28}/\mathrm{m}^3$. Govorimo o izredno gostem »plinu« prostih elektronov. Nič slabše niso ostale kovine, njim sledijo grafit, elektroliti, polprevodna germanij in silicij, pa vse tja do snovi, ki jih deklariramo kot izolante (zrak, guma, steklo, olje, teflon) in jih označujemo kot snovi z izrazitim pomanjkanjem prostih nosilcev naboja. Jasne ločnice med prevodniki in izolanti ni. Meja je celo premakljiva, predvsem z vidika vrednotenja učinkov električnega polja v njih. Prav zato bomo morali na začetku nekaj dejstev sprejeti »na zalogo«, jim kratkomalo verjeti, ko pa bodo okoliščine primerne, jih bomo še enkrat premotrili in sprejeli za svoje. Pomembnejši podatek prevodne snovi je odzivni čas prostih nosilcev oziroma t. i. relaksacijski čas. Pri kovinah je odzivni čas izredno kratek, okoli 10^{-14} s; v plinih je daljši, okoli 10^{-9} s. Relaksacijski čas ima svojo vlogo tudi pri obravnavi prevodniških lastnosti snovi. V modelu trkov se njegovo vrednost jemlje kot poprečni čas med zaporednima trkoma, njemu recipročno pa kot poprečno frekvenco trkov; vendar o tem kasneje.

Privzemimo, da imamo v prostoru električno polje $\mathbf{E}_0(T)$, imenovali ga bomo primarno polje. Viri tega polja so nekje »ob strani« in naj nas ta hip ne zanimajo, zadoščalo bo njihovo polje. Zatem vstavimo v to polje kovinsko telo. Zaradi kratkega odzivnega časa se dogodki v njem odvrtijo tako naglo, da jim ni moč slediti, zato bo krajši opis zgolj informativne narave. Na nabite delce v kovinskem telesu bi prvi hip delovala sila $\pm e\mathbf{E}_0(T)$; na protone v smeri poljske jakosti, na elektrone v nasprotni smeri. Za protone in elektrone na spodnjih lupinah so te sile očitno premajhne, da bi predrugačile atom, so pa tu še gibki prosti elektroni, ki se (vsled sile $-e\mathbf{E}_0$) hipno zganejo in rahlo pomaknejo v nasprotni smeri polja. Ta čas še ne znamo odgovoriti, koliko se jih zgane in za koliko se premaknejo. Vsi se ne, in tudi premiki tistih, ki se, so neznatni. Na to bomo dobili odgovor nekoliko kasneje, ko bodo na voljo zveze, ki omogočajo vrednotenja. Neznaten premik elektronov ustvari presežek elektronov na eni in manko elektronov na drugi strani telesa oziroma izmik težišč ($\pm$) nabojev v njem. Kovinskemu telesu se zgodi dipol, ki ima tudi lastno, reakcijsko polje $\mathbf{E}_1$, ki se superponira k primarnemu polju $\mathbf{E}_0$ in daje končno oziroma rezultančno polje $\mathbf{E}$; v splošni točki T ga opredeljuje zapis

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}_0(T) + \mathbf{E}_1(T).$$

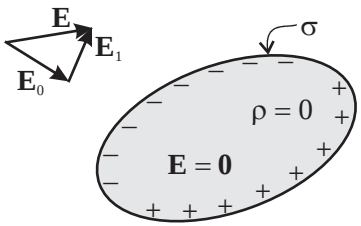
Posvetimo se notranjosti kovinskega telesa s splošno točko $T_{\text{not.}}$ in se vprašajmo po jakosti polja v njej. Do odgovora vodi protislovje. Privzemimo, da je $\mathbf{E}(T_{\text{not.}}) \neq \mathbf{0}$, da je polje v telesu različno od nič. Če je tako, potem je v njem točka $T_{\uparrow}$, točka najvišjega potenciala, kamor bi se prosti elektroni zgrinjali. To ni možno, saj se v točko, četudi v debelo, ne more nagnesti neštevno elektronov. Selitev bi spremljal tudi termični učinek, ki ga v elektrostatičnih razmerah ne zaznamo. »Dvojni ne« govori o napačnosti vstopne predpostavke. Velja nasprotno, da je elektrostatična poljska jakost v prevodniku enaka nič,

$$\mathbf{E}(T_{\text{not.}}) = \mathbf{0}.$$

Ugotovitev je zelo pomembna in predstavlja iztočnico za nova razmišljanja. Poudarimo še enkrat: ta rezultat velja le za elektrostatično polje. V drugačnih okoliščinah bo to enostavno spoznanje zahtevalo določene popravke, ki zadev sicer ne bodo postavili na glavo, ampak jih bodo le dopolnili oziroma nadgradili. Prvo priložnost za to bomo imeli v naslednjem poglavju. Govorili bomo o tokovnem polju in omenili pojav superprevodnosti, v visokodinamičnem elektromagnetnem polju pa bo zgorji rezultat možno sprejeti kot dober približek stanja v prevodniku ob močno izraženem kožnem pojavu.

1:16:24

Elektrostatične razmere v/ob prevodniku. Prisotnost prevodnega telesa značilno zaznamuje stanje elektrostatičnega polja v celotnem prostoru. Ključne ugotovitve bomo povzeli v štirih sklopih.



O NABOJU. Naj je $\mathcal{A}$ sklenjena ploskev, ki je v celoti znotraj prevodnega telesa. Po Gaussovem zakonu je pretok vektorja poljske jakosti skozi sklenjeno ploskev sorazmeren množini objetega naboja,

$$\oint_{\mathcal{A}} \underbrace{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{not.}}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{not.}} = 0.$$

Ker pa je polje **E** na vsej ploskvi enako nič, je tolikšna tudi množina naboja, ki jo ta ploskev objeme. V prevodniku torej ni podprostora, kjer bi našli makroskopsko neravnovesje med ($\pm$) naboji. Izjema je površina prevodnika, v kar nas prepriča sklenjena ploskev, ki delno poseže tudi v zunanjost telesa, kjer pa je polje v splošnem različno od nič. To pomeni, da se ob vnosu prevodnega telesa v polje in premiku prostih nabojev v njem pojavi neuravnoteženost ($\pm$) nabojev tik pod njegovo površino; porazdeljenost teh podaja površinska gostota σ. Pojav je znan pod imenom električna influenca. Zaključimo: v prevodniku ($T_{\text{not.}}$) je prostorninska gostota naboja enaka nič, v točkah ($T_{\text{povr.}}$) tik pod površino pa je površinska gostota naboja v splošnem različna od nič:

$$\rho(T_{\text{not.}}) = 0 \quad \text{in} \quad \sigma\left(T_{\text{povr.}}\right) \neq 0.$$

Ugotovitev je pomembna in presega elektrostatiko, saj se izkaže, da za kovine velja oboje tudi v dinamičnih razmerah. Ob vnosu kovinskega telesa v polje nismo omenjali njegove predhodne naelektritve. Če je bilo nevtraleno, brez naelektritve, potem je integral površinske gostote σ tudi po vnosu enak nič, če pa je imelo naelektritev $Q_{\text{prev.}}$, se ob vnosu v polje zgodi njena prerazporeditev, vendar v duhu ohranitvenega zakona: da ostaja integral gostote σ tudi po vnosu nespremenjen,

$$\int_{\mathcal{A}_{\text{prev.}}} \sigma \mathrm{d}a = Q_{\text{prev.}}.$$

O porazdeljenosti (pod)površinskega naboja bomo govorili v nadaljevanju.

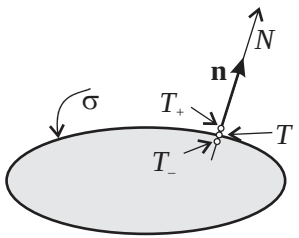
O POLJU. Influiran (pod)površinski naboj je potemtakem struktura, ki je odgovorna za reakcijsko polje $\mathbf{E}_1$. Ker velja

$$\mathbf{E}(T_{\text{not.}}) = \mathbf{E}_0(T_{\text{not.}}) + \mathbf{E}_1(T_{\text{not.}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_1(T_{\text{not.}}) = -\mathbf{E}_0(T_{\text{not.}}),$$

tudi rečemo, da se naboj po površini prevodnega telesa razporedi tako, da njegovo (reakcijsko) polje $\mathbf{E}_1$ v vseh notranjih točkah kompenzira primarno polje $\mathbf{E}_0$. V kolikor primarnega polja ni, $\mathbf{E}_0(T_{\text{not.}}) = \mathbf{0}$, se naboj telesa razporedi po površini tako, da je njegova poljska jakost kjerkoli v notranjosti enaka nič, $\mathbf{E}_1(T_{\text{not.}}) = \mathbf{0}$.

Izkoristimo priložnost in upravičimo postopek virtualnega okovinjanja prostora, če v njem ni polja. Primer. Osamljena naelektrena kovinska krogla ima naboj enakomerno razporejen po površini zato, ker le takšna porazdelitev zagotavlja, da bo v notranjosti polje enako nič. Ko smo notranjost naelektrene krogelne lupine virtualno okovinili in s tem pridobili naelektreno kroglo, nismo torej v ničemer spremenili stanja polja v prostoru.

Čaka nas razjasnitev električnega polja ob površini prevodnika. V notranjosti ga ni, zunaj je; kakšen je prehod oziroma kakšna je narava nezveznosti? Omislimo si tri točke, nadpovršinsko T_+, podpovršinsko T_- in površinsko točko T. Točke leže limitno blizu: prva je tik nad, že izven prevodnika, in druga tik pod, že v prevodniku. Naj sta ti točki od sredinske T oddaljenosti za nekaj nm. Okoli vektorja normale skozi te točke si na površini prevodnika zamislimo disk, katerega radij krepko presega razdalji točk T_+ in T_- do površine. Električno polje $\mathbf{E}$ smo pred tem zapisovali kot vsoto primarnega in reakcijskega, polja nabojev izven prevodnika in polja nabojev na njegovi površini. Tokrat izberimo drugačna sumanda: polje $\mathbf{E}'$ naj predstavlja polje nabojev z diska, $\mathbf{E}''$ pa polje ostalih nabojev (preostalih s prevodnika in onih izven njega). Izrazimo rezultančno polje v treh točkah; v eni ga že poznamo, v dveh pa še ne:



$$\mathbf{E}(T_+) = \mathbf{E}'(T_+) + \mathbf{E}''(T_+) = ?, \quad \mathbf{E}(T) = \mathbf{E}'(T) + \mathbf{E}''(T) = ?, \quad \mathbf{E}(T_-) = \mathbf{E}'(T_-) + \mathbf{E}''(T_-) = \mathbf{0}.$$

Z vidika točk točk T_+, T in T_- deluje disk kot »naelektrena ravnina« s površinsko gostoto, ki ji približno ustreza vrednost $\sigma(T)$. S pomočjo enotskega vektorja $\mathbf{n}$ znamo polje v njih tudi zapisati:

$$\mathbf{E}'(T_+) = \mathbf{n}\sigma(T)/2\varepsilon_0 \quad \text{in} \quad \mathbf{E}'(T) = \mathbf{0} \quad \text{ter} \quad \mathbf{E}'(T_-) = -\mathbf{n}\sigma(T)/2\varepsilon_0.$$

Ker so naboji, ki povzročajo polje $\mathbf{E}''$, relativno stran od povsem bližnjih točk T_+, T in T_-, ima $\mathbf{E}''$ v njih enako vrednost:

$$\mathbf{E}''(T_+) = \mathbf{E}''(T) = \mathbf{E}''(T_-).$$

Z uveljavljanjem ničnosti polja v T_- in preostalih relacij sledijo tudi odgovori:

$$\mathbf{E}''(T_-) = -\mathbf{E}'(T_-) = \mathbf{n}\sigma(T)/2\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(T) = \mathbf{n}\sigma(T)/2\varepsilon_0 \quad \text{in} \quad \mathbf{E}(T_+) = \mathbf{n}\sigma(T)/\varepsilon_0.$$

V prevodniku ni polja, kar je izhodišče, na površini, kjer so naboji, pa je polje polovica tistega, ki je nad površino. Opravka imamo z dvema enakima »stopničkama«. Pridobili smo zvezi, ki povezujeta normalni komponenti poljske jakosti tik nad ter v površini z gostoto naboja na tistem mestu:

$$E_n(T_+) = \sigma(T)/\varepsilon_0 \quad \text{in} \quad E_n(T) = \sigma(T)/2\varepsilon_0.$$

Odnos je splošen in velja za vse gladke površine prevodnih teles. Rahel zaplet nastane pri vogalih ali robovih, še posebej, če bi jih smatrali kot strogo matematične prelome. Tega v praksi k sreči ni, kajti vsak »živ rob ali vogal«, kot radi rečemo, je vsaj malo zaobljen. Določen premislek namenimo še površinskemu naboju. Pri jakosti 1 MV/m v T_+ je gostota naboja v točki T približno $8{,}85 \cdot 10^{-6}$ C/m^2. Če za »premer« atoma vzamemo 0,2 nm, potem se na 1 mm^2 nahaja $25 \cdot 10^{12}$ atomov, osnovnih nabojev e, ki tvorijo to gostoto, pa je le okoli 55 milijonov; to pomeni, da ima vsak 450 tisoči obpovršinski atom primanjkljaj ali presežek elektrona. Skromen delež teh elektronov glede na vse v podpovršinski plasti govori tudi o deležu tistih prostih elektronov glede na vse v prevodnem telesu, ki so ob njegovem vnosu v električno polje »sodelovali« v procesu influence. Podpovršinsko naelektritev si lahko zamišljamo kot tanek sloj z gostoto $\rho(s)$, katere integral v globino nekaj atomov da aktualno površinsko gostoto (pri tem pomeni s globinsko koordinato):

$$\sigma(T) = \int\limits_{\text{skozi sloj}} \rho(s)\mathrm{d}s.$$

V tej luči moramo razumeti tudi polje $E_n(T)$: kot poprečno vrednost polja v tankem sloju. Kot poprečno tudi v časovnem smislu; elektroni so namreč v nenehnem termičnem gibanju. V tej plasti ne vladajo zakoni elektrostatike, ampak zakoni kvantne fizike.

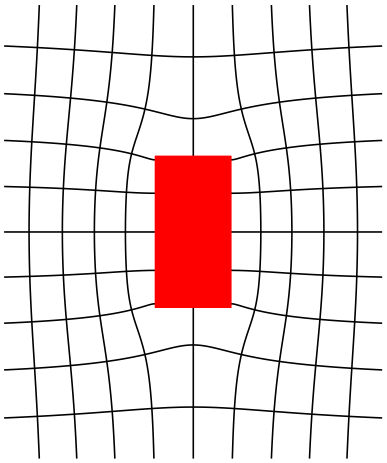
O SILAH. (Pod)površinski naboji se nahajajo v polovičnem polju. Sila na naboje na disku površine δa je

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}(T) = \sigma(T)\delta a\mathbf{E}(T) = \mathbf{n}\sigma^2(T)\delta a/2\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \delta\mathbf{F}_\mathrm{e}(T)/\delta a = \mathbf{f}_\mathrm{e}(T) = \mathbf{n}\sigma^2(T)/2\varepsilon_0.$$

Sila je eksterna, v vsakem primeru usmerjena pravokotno iz prevodnika. Sila stremi telo »napihniti«. Če uveljavljamo še odnos med gostoto σ in poljem nad površino, dobimo tlak oziroma normalno komponento gostote ploskovne sile

$$f_{\mathrm{e}n}(T) = \sigma^2(T)/2\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(T_+).$$

Kasneje bomo ugotovili, da tlak številsko ustreza gostoti električne energije ob površini prevodnika. Pri obpovršinski poljski jakosti 1 MV/m je tlak približno 4,4 Pa; tolikšen ne »ogroža« kompaktnosti prevodnika. Tlak električne sile res nima zavidljive vrednosti, jo pa zato ima tlak magnetne sile, ki je izredno pomemben za delovanje elektromotorjev.



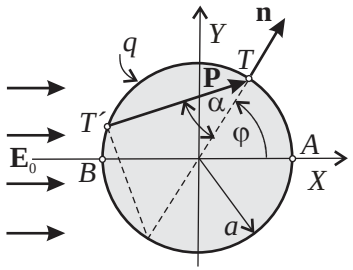
nevtralen vodnik pravokotnega preseka v homogenem električnem polju

O POTENCIALU. Tu bomo krajši. Naj sta A in B točki v prevodniku. Integral poljske jakosti med njima je enak napetosti,

$$u_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \underbrace{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_\mathrm{prev.} = \text{konst.}$$

Prevodno telo je očitno ekvipotencialni prostor, njegova površina pa ekvipotencialna ploskev. To ne preseneča, saj smo že pred kratkim ugotovili, da je poljska jakost nad površino prevodnika normalni vektor. Ob vnosu prevodnika v prostor zavzame telo nek potencial, ki ga določajo vsi naboji oziroma obe polji, primarno in reakcijsko.

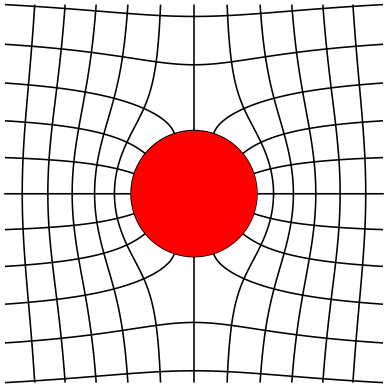
Dolgujemo še nekaj komentarjev. »Zgodbo« smo začeli z vnosom prevodnika v prostor s poljem. Ves čas smo govorili o stanju polja v/ob prevodniku, vedeti pa moramo, da se je influenčni proces odvijal tudi med samim vnašanjem telesa na končno mesto. V času vnosa se je naboj na telesu stalno na novo prerazporejal tako, da je »lovil« razmere ničelnega polja v prevodniku, in tudi potencial telesa se je med tem spreminjal. Dogodke očitno zaznamuje tudi čas, ki smo ga ignorirali in razmišljali le o statusu polja v končni legi. Opravičilo imamo v ekstremno kratkem relaksacijskem času, ki zagotavlja, da si dogodki sledijo praktično sočasno in da smemo časovno dimenzijo izločiti. Pri vnosu izolanta v polje je drugače, saj mu »kronično« primanjkuje prostih elektronov. Izolant bi se odzival zakasnilno in z dinamiko, ki jo določa relaksacijski



čas. Pa vendar, po ustrezno dolgem času bi se vzpostavile razmere, ki so podobne predstavljenim. »Počasni« dogodki pa za elektrotehniko, ki jo označuje splet naglih sprememb, praviloma niso zanimivi. To seveda ne pomeni, da zanjo izolanti niso zanimivi. So, le spoznati moramo še druge mehanizme, s katerimi se te snovi odzivajo na električno polje.

Vodnik v homogenem električnem polju. To je šolski primer, ki osvetljuje razmere v/ob prevodniku, ima pa tudi praktično vrednost, ki bo koristna pri določanju delnih kapacitivnosti sistema vzporednih vodnikov. Os X usmerimo vzdolž polja $\mathbf{E}_0$, os vodnika polmera a z nabojem q pa vzdolž osi Z. Primarno polje in pripadajoč potencial sta

$$\mathbf{E}_0 = (\mathbf{E}_0, 0, 0) \quad \text{in} \quad V_0(x) = -E_0 x + K \quad \Rightarrow \quad V_0(x=0) = K.$$



nevtralen vodnik v homogenem električnem polju

Negativni odvod potenciala je x komponenta poljske jakosti, konstanta K pa določa potencial ravnine $x = 0$, ki z vnosom vodnika v polje postane tudi njegova simetralna ravnina. Zanima nas influenčni pojav in kar je v zvezi z njim. Izhajamo iz relacije med poljsko jakostjo in gostoto naboja v površinski točki prevodnika:

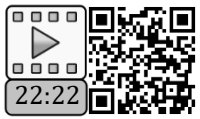
$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{n}\sigma(T)/2\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma(T) = 2\varepsilon_0 \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}(T) = 2\varepsilon_0 \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0(T) + 2\varepsilon_0 \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1(T).$$

Naelektritev vodnika si predstavljamo kot niz diferencialno ozkih vzporednih naelektrenih trakov. Reakcijsko polje $\mathbf{E}_1$ določa integral polj ozkih naelektrenih trakov,

$$\mathbf{E}_1(T) = \oint \frac{\mathrm{d}q(T')}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{P}}{P^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\oint \frac{\mathbf{P}}{P^2}\sigma(T')\mathrm{d}l',$$

ki jih razumemo kot naelektrene premice, vsaka od njih pa ima ustrezno naelektritev $\mathrm{d}q(T') = \sigma(T')\mathrm{d}l'$. Če to polje vstavimo v izraz za gostoto naboja in upoštevajmo geometrijo, smo že pri rezultatu:

$$\sigma(T) = 2\varepsilon_0 \underbrace{\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0(T)}_{E_0\cos\varphi} + \frac{1}{\pi}\oint \underbrace{\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}}{P^2}}_{\cos\alpha/P=1/2a} \sigma(T')\mathrm{d}l' = 2\varepsilon_0 E_0\cos\varphi + \frac{1}{2\pi a}\underbrace{\oint \sigma(T')\mathrm{d}l'}_{q} = 2\varepsilon_0 E_0\cos\varphi + \frac{q}{2\pi a}.$$

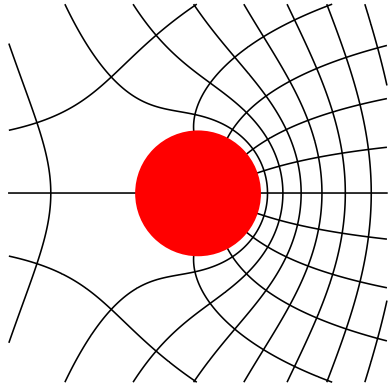


Pri nevtralnem valju ($q = 0$) je porazdelitev naboja zrcalna prek ravnine $x = 0$: $\sigma(T) = 2\varepsilon_0 E_0 \cos\varphi$. V točkah A in B je absolutna vrednost gostote naboja največja in ob njiju je največja tudi absolutna vrednost poljske jakosti,

$$\sigma(A) = 2\varepsilon_0 E_0 \text{ in } \sigma(B) = -2\varepsilon_0 E_0 \text{ ter } E_n(A_+) = \frac{\sigma(A)}{\varepsilon_0} = 2E_0 \text{ in } E_n(B_+) = -2E_0.$$

Zaradi simetrične porazdeljenosti influiranih nabojev ima njihov potencial V_1na ravnini $x = 0$ vrednost nič, potencial V_0 pa vrednost K. Ker pa gre ta ravnina skozi vodnik, ima tolikšen potencial tudi celoten vodnik. V polje vnešen nevtralen vodnik zavzame potencial, ki ga je pred vnosom imela njegova simetralna ravnina. Če bi se ukvarjali s poljem influiranih nabojev izven valja, bi ugotovili, da ta ustreza polju namišljenega premega dipola, ki leži v osi valja:

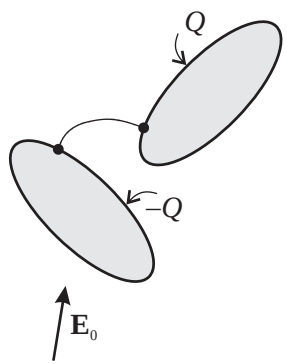
$$V_1(\rho > a, \varphi) = E_0 a^2 \frac{\cos\varphi}{\rho}.$$



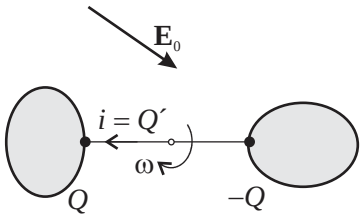
naelektren vodnik v homogenem električnem polju

Če je valj prednaelektren, $q \neq 0$, je potrebno gostoti naboja in jakosti polja ob površini vodnika dodati delež, ki izhaja iz drugega sumanda porazdelitve σ. Glede na q je možnosti več: da ima valj nekaj pozitivnega in nekaj negativnega naboja, več prvega, več drugega, v celoti pozitivnega ali v celoti negativnega, v vsakem primeru pa je gostota neenakomerna. Če je primarno polje $E_0 = 0$, imamo opraviti z enakomerno naelektrenim valjem, katerega polje že poznamo. Obravnavan primer nazorno kaže, kako se nove strukture predstavijo kot »zloženke« elementarnih primerov; naelektrena premica, premi dipol, točkasti naboj in drugi, prvi hip nekam »čudni« primeri, dobijo pri novih povsem uporabno vrednost.

Influenčni generator. Influenčni pojav lahko služi kot generator. Zamislimo si nevtralno vodno kapljico, ki pada in se giblje v naravnem polju 100 V/m (influiran naboj je na njeni površini), nato pa se v vetru razcepi v dve. Vsaka odnese del naboja – postaneta naelektreni. Naj sta dve prevodni telesi spojeni z žico in postavljeni v polje. V električnem smislu sta to eno telo. Naj je združeno telo električno nevtralno. Eno telo bo imelo presežek enih (Q), drugo pa presežek nasprotnih nabojev ($-Q$). Ko žico prekinemo, dobimo dve nasprotno naelektreni telesi.

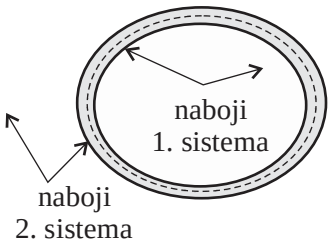


Druga možnost je, da sestavljeno telo vrtimo. Naboj na enem telesu se s časom veča, na drugem manjša, njuna vsota pa je vsak trenutek enaka nič. Med vrtenjem se skozi žico med telesoma očitno izmenjuje naboj s tokom, ki ustreza odvodu naboja enega ali drugega telesa. Če med primerno veliki telesi vežemo nepotratno svetilko in sta frekvenca vrtenja ter



primarno polje ustrezna, bo ta svetila. Dobili smo influenčni generator s tokom $i = \pm Q'$. Če pa se primarno polje časovno spreminja, še vrtenje ni potrebno. Tako se zgodi, če gremo z napravo pod daljnovod. Odpre se kar nekaj vprašanj. Kako učinek generatorja povečati? Ali lahko drugo telo zamenjamo s tlemi? Kaj se dogaja s tokom, če svetilko zamenjamo z uporom manjše ali večje električne upornosti? Kaj se dogaja s kompasom, ki ga približamo žici? Od kje prihaja energija, ki zmore vzdrževati te učinke? ...

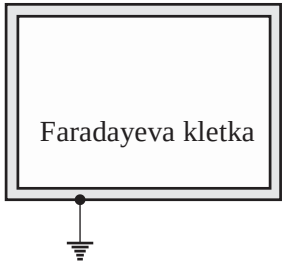
13:41



Avtonomnost električno zaključenega sistema. Če je množina električnega naboja v sistemu enaka nič, pravimo, da je sistem električno zaključen. Omislimo si prevodno lupino, kovinsko škatlo. Naboji so lahko zunaj škatle, v škatli ter na zunanji in notranji površini škatle. Imejmo sklenjeno ploskev v steni škatle. Po Gaussovem zakonu je pretok skozi njo sorazmeren algebraični vsoti nabojev v njej, po drugi strani pa je integral enak nič, saj leži ploskev v prevodniku, kjer ni polja. Sledi: naboji v škatli in na njeni notranji steni oblikujejo električno zaključen sistem. Enako velja za naboje izven škatle in na njeni zunanji steni, saj je celoten sistem nabojev električno zaključen. Sporočilo je: prevodna lupina razdeli sistem nabojev na dva zaključena sistema. Vsaka nova škatla v tej škatli ali izven nje »ustvari« en nov zaključen sistem.

Ostanimo pri eni škatli. Pokažimo avtonomnost obeh zaključenih sistemov, ki ju loči stena škatle. Avtonomnost v smislu, da so za polje v vsakem od prostorov odgovorni naboji tistega prostora, ali tudi, polje nabojev enega sistema je v drugem prostoru enako nič. Privzemimo naboje le v zunanjem sistemu in postavimo »izzivalno« trditev: polje zunanjih nabojev je znotraj škatle različno od nič. Ker je notranja stena škatle površina prevodnika, je ekvipotencialka; s potencialom npr. 5 V. Zaradi polja v škatli bi ob njej našli morda še eno z npr. 4 V, še eno s 3 V in ... Ekvipotencialke bi bile sklenjene ploskve, druga okrog druge. V notranjost škatle bi potencial upadal in vektor jakosti polja bi bil na vsaki usmerjen navznoter. Če bi določali pretok polja skozi eno od njih, bi dobili neko negativno vrednost, kar po Gaussovem zakonu pomeni, da bi bil znotraj nje negativni naboj, to pa ni možno, če smo rekli, da nabojev znotraj ni. Protislovje! Polja znotraj škatle torej ni. Bila bi sicer še možnost, da so naboji na sami notranji steni škatle, vendar uravnoteženi, da bi bila njihova vsota enaka

nič. Ker pa se silnice raztezajo od pozitivnih k negativnim nabojem, bi pomenilo, da ima integral poljske jakosti vzdolž silnice neko vrednost, ki bi ustrezala razliki potencialov med začetkom in koncem silnice, to pa spet ni možno, saj sta začetek in konec silnice na isti ekvipotencialki. Podoben razmislek ponovimo še za sistem notranjih nabojev: ugotovimo, da je njihovo polje zunaj škatle enako nič. Avtonomnost sistemov, ki jih ločuje prevodna lupina, je s tem pokazana.



Faradayeva kletka. Zelo pomembno spoznanje. Če se želimo obvarovati elektrostatičnega polja, se zapremo v prevodno škatlo. In tudi obratno: če ne želimo nekoga motiti s svojimi početji, se zapremo v prevodno škatlo. Kletka ni pomembna le z elektrostatičnega vidika, pomembna je tudi v dinamičnih razmerah: ko elektromagnetne motnje ne želimo pošiljati v okolico, ali pa se pred njimi varujemo. Za motnje dinamičnega značaja takšna kletka ni več »neprodušna«, ampak delno »spušča«. Koliko spušča, je odvisno od elektromagnetnih lastnosti kletke, njene permeabilnosti (μ), specifične električne prevodnosti (γ), debelina stene (d) in krožne frekvence (ω) izmenične motnje. Kriterij je t. i. vdorna globina

$$\delta = \sqrt{2/\omega\mu\gamma}.$$

Pri bakru in omrežni frekvenci 50 Hz je $\delta = 9{,}6$ mm, pri 50 MHz je 9,6 μm in pri 5 GHz pod mikronom. Okvirno slabljenje (dušenje) kletke določa funkcija $\exp(-d/\delta)$. Pri debelini d, ki je nekajkratnik vdorne globine, je spuščanje kletke skoraj zanemarljivo. Popolna kletka je tudi težava, saj zastira dnevno svetlobo, zato izbiramo rešetkasto. Njeno dušenje je sicer nekoliko slabše, vendar še vedno zadovoljivo. Dodaten ukrep je ozemljevanje, ki varuje ljudi pred napetostjo dotika.

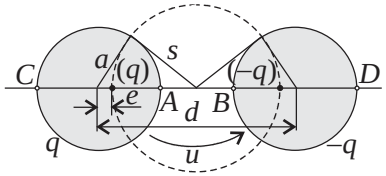
»Okovinjanje« ekvipotencialk. Možnost virtualnega okovinjanja prostora brez polja že poznamo. Smo pred možnostjo okovinjanja ekvipotencialk. Privzemimo, da poznamo elektrostatično polje in njegove ekvipotencialke. Ekvipotencialke so sklenjene ploskve. Eno od njih okovinimo, prevlečemo s tanko plastjo nevtralne prevodne snovi. Govorimo o vnosu prevodnika v polje. Na notranji in zunanji steni prevodne plasti se influira površinski naboj; na »vstopni« strani polja negativni, na »izstopni« pa pozitivni. Polje influiranih nabojev v celoti kompenzira primarno polje v plasti, $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$. Njihovo polje v plasti spominja na razmere v ploščnem kondenzatorju. Opravka imamo z ukrivljeno dipolsko ploskvijo.

Električni moment nabojev $\pm\sigma\delta a$ z obeh strani določa tudi debelina plasti. Če je tanka, je pripadajoč moment ustrezno neznaten in neznatno je tudi njuno polje in polje drugih parov izven plasti. To pomeni, da influirani naboji ne spremenijo primarnega polja izven prevodne plasti, $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0$. Prevodna plast je obenem tudi bariera, ki prvoten sistem nabojev razdeli na dva električno zaključena sistema, od katerih je vsak odgovoren za polje znotraj svojega prostora. Če se zgodi npr. razelektritev v enem sistemu, se to ne odrazi na polju v drugem sistemu. Z razelektritvijo ostane prostor brez naboja in tudi brez polja, zato ga je moč delno ali v celoti zapolniti s prevodno snovjo.

IZHODIŠČE: polje dveh premih nabojev. Ekvipotencialke polja vzporednih premih nabojev ($\pm q$) poznamo. To so valji, ki obkrožajo naboja; ekvipotencialka je tudi simetralna ravnina. Če okovinimo njo in zatem k njej prislonimo desni naboj, se desni prostor razelektri, ostane brez naboja in polja. Moremo ga delno ali v celoti zapolniti s prevodno snovjo. Pridobili smo primer naelektrene premice pred prevodno steno. Za polje pred njo sta odgovorna naelektrena premica in influiran naboj na steni. Slednji deluje v prostor pred steno tako kot pred okovinjanjem nasprotni naboj, po novem kot namišljen naboj ($-q$), ki bi deloval iz zrcalne pozicije izza stene. Okoviniti moremo dve ekvipotencialki; prva naj obkroža levi naboj, druga pa desni naboj. Pridobili smo tri električno zaključene sisteme. Če z dotikoma razelektrimo sistema znotraj obeh ekvipotencialk in prostora okovinimo, ostaja polje med ekvipotencialkama nespremenjeno. Pridobili smo dvovod. Če sta polmera vodnikov enaka, govorimo o simetričnem, sicer pa o asimetričnem dvovodu. Za polje med njima sta odgovorna njuna površinska naboja, ki učinkujeta v prostor med vodnikoma tako kot dve namišljeni, nasprotno naelektreni premici, ležeči v ekscentričnih legah znotraj vodnikov. Na ta način nadaljujmo in okovinimo simetralno ravnino in ekvipotencilko, ki obkroža levi naboj. Dobimo primer vodnika pred prevodno steno. Če »damo stvar na bok«, dobimo še primer vodnika nad prevodno podlago ali vodnika nad zemljo. Zaključimo z okovinjenjem ekvipotencialk, ki obkrožata isti naboj; dobimo ekscentrični kabel. Omenjeni primeri imajo rdečo nit v polju dveh nasprotnih nabojev, zato tudi rečemo, da so »izvlečki« iz znanega polja dveh premih ($\pm q$) nabojev.

Simetrični dvovod. Tak izvleček je par vodnikov polmera a in medosne razdalje d. Na levem vodniku imejmo točki A in C, na desnem točki B in D. Za polje sta odgovorna naboja na površinah vodnikov, v prostor med njima pa učinkujeta kot dva namišljena naboja, ki sta locirana v ekscentričnih legah glede na njuni osi. Naša naloga je, najti poziciji namišljenih nabojev oziroma ekscentričnost e in naelektritev $\pm q$, ko je dvovod priključen na vir napetosti u. (Več o virih kasneje.) Sklicujmo se na osnovno krožnico polmera s. Vlogo izmika p prevzema razdalja $d/2$, vlogo radija r pa polmer a:

31:13



$$s = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4a^2} \quad \text{in} \quad e = \frac{d}{2} - s = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2 - 4a^2}\right) \xrightarrow{a \ll d} \frac{a^2}{d}.$$

Zadnja ocena sporoča, da je pri neznatnem polmeru a glede na d, takšna tudi ekscentričnost e. Za polje med vodnikoma je odgovorna funkcija potenciala premih nabojev,

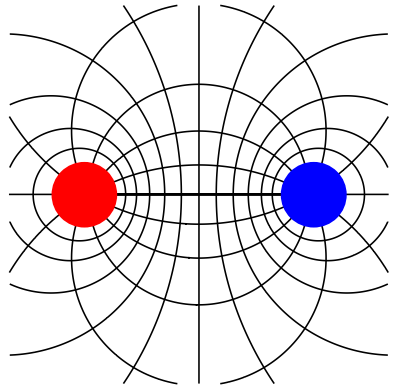
$$V(T) = V_T = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_-}{\rho_+}.$$

Uporabimo jo za zapis potenciala v točkah A in B ter napetosti u med vodnikoma,

$$V_A = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d-a-e}{a-e} \quad \text{in} \quad V_B = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a-e}{d-a-e} = -V_A \quad \Rightarrow \quad u = u_{AB} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d-a-e}{a-e}.$$

Iz nje sledi kapacitivnost dvovoda dolžine l, ki se pri tankih vodnikih še dodatno poenostavi,

$$C = \frac{ql}{u} = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{d-a-e}{a-e}} = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{d + \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2a}} \xrightarrow{a \ll d} \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{d}{a}}.$$



simetrični dvovod

Pri dvovodu imamo opraviti z neenakomerno razporedelitvijo influiranega naboja (zgoščenost ekvipotencialk ob žicah). Najgostejše so ob točkah A in B, najredkejše ob točkah C in D; v prvih dveh je pričakovati absolutno največjo, v drugih dveh pa absolutno najmanjšo gostoto naboja. Izrazimo kvocient gostot za levi vodnik pri $a : d = 0{,}3$, ko je $e : d = 0{,}1$:

$$\frac{\sigma(A)}{\sigma(C)} = \frac{E_n(A_+)}{E_n(C_+)} = \left(\frac{1}{a-e} + \frac{1}{d-a-e}\right) : \left(\frac{1}{a+e} - \frac{1}{d+a-e}\right) = 4.$$

Na »trebušni« strani vodnikov je gostota štirikratnik tiste na »hrbtni« strani. Pri zbliževanju vodnikov se razmerje veča, pri oddaljevanju pa stremi k vrednosti 1. Če sta vodnika sorazmerno narazen, je ekscentričnost zanemarljiva in naboja sta praktično enakomerno razporejena po obodih vodnikov.

Tako kot pri koaksialnem kablu in sferičnem kondenzatorju je izbira optimalne geometrije, oziroma razmerja $2a : d = k$, aktualna tudi tu. Izrazimo poljsko jakost na trebušnem delu vodnikov z u, d in k:

$$E_n(A_+) = \frac{u}{d}\left(k\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\ln\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}\right)^{-1} = \frac{u}{d}f^{-1}(k).$$

Za največjo vrednost poljske jakosti ni ugodno, če sta vodnika debela, niti ne, če sta tanka. Optimum je »v zlati sredini«; poiščemo jo prek odvoda in s primernim iterativnim postopkom,

$$f'(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-k-k^2)\ln\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k} - \sqrt{1-k^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2a/d \cong 0{,}3418 \quad \Rightarrow \quad d/a \cong 5{,}851.$$

Vodnik pred prevodno steno. Simetričnemu dvovodu soroden je primer vodnika pred prevodno steno. Oddaljenost osi vodnika polmera a do stene označimo s h. Prvi namišljeni naboj (q) se nahaja v vodniku na oddaljenosti s od stene in je iz osi izmaknjen za ekscentričnost e, drugi naboj $(-q)$ pa se nahaja na oddaljenosti s izza stene. Iz geometrije osnovnega kroga sledita radij s in ekscentričnost e,

$$s = \sqrt{h^2 - a^2} \quad \text{in} \quad e = h - s = \left(h - \sqrt{h^2 - a^2}\right).$$

Izrazimo potenciala točke A na vodniku in točke B na steni ter napetosti u med njima:

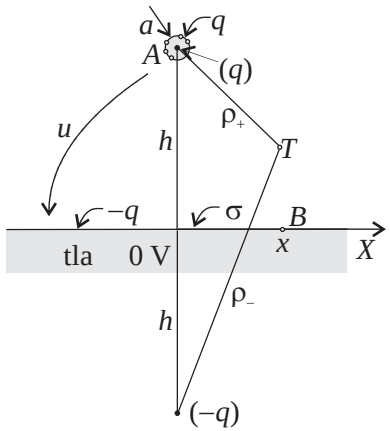
$$V(T) = V_T = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_+} \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h+s-a}{a-e} \quad \text{in} \quad V_B = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{s}{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = u_{AB} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h+s-a}{a-e}.$$

Iz nje izhaja kapacitivnost dvovoda dolžine l:

$$C = \frac{ql}{u} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{h+s-a}{a-e}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{h+\sqrt{h^2-a^2}}{a}}.$$

Pogostejša od vodnika pred steno je postavitev vodnika nad prevodno podlago. Razdalja h postane v tem primeru višina osi vodnika nad prevodno podlago.

Vodnik nad zemljo. Zadeva je aktualna pri distribuciji električne energije s sistemom prostozračnih nadzemnih vodov. Osnova je vodnik nad zemljo. Kasneje, ko bomo obravnavali delne kapacitivnosti, bomo njemu pridružili še enega ali več drugih. Zemljo bomo razumeli kot ravno prevodno podlago. Višina obešanja h vodnika je reda nekaj deset metrov, radij a vodnika pa je reda nekaj centimetrov. Ekscentričnost je zanemarljiva, $e \cong a^2/2h \ll a$. Električno polje med vodnikom in zemljo določata naboja na vodniku in zemlji, v prostor pa učinkujeta tako kot naboj (q) v osi vodnika in naboj $(-q)$ pod površjem v zrcalni legi zgornjega naboja, na globini h. Funkcijo potenciala uporabimo za zapis potencialov točk A in B,



$$V(T) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_-}{\rho_+} \quad\Rightarrow\quad V_A \cong \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{a} \quad \text{in} \quad V_B = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{\sqrt{h^2+x^2}} = 0.$$

Pri potencialu točke A smo za ρ_- vzeli srednjo oddaljenost zrcalnega naboja do površine vodnika $(2h)$, za ρ_+ pa srednjo oddaljenost preme elektrine v vodniku do njegove površine (a), saj je $e \ll a$, pri potencialu točke B pa sta oddaljenosti enaki. Brž sledita še napetost in kapacitivnost:

$$u = V_A - V_B \cong \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{a} \quad\Rightarrow\quad C = \frac{ql}{u} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(2h/a)}.$$

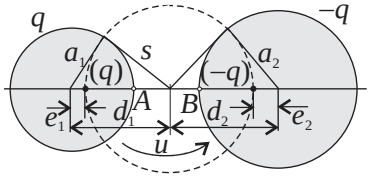
Zaradi neznatne ekscentričnosti je naboj po obodu žice praktično enakomerno razporejen. Drugače je na zemlji:

$$\sigma(B) = \varepsilon_0 E_n(B_+) = \varepsilon_0 E_y(B_+) = -2\varepsilon_0\left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2+x^2}}\right)\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}} = -\frac{qh}{\pi(h^2+x^2)} = \sigma(x).$$

Gostota naboja je nasprotnega znaka kot naboj na vodniku in absolutno največja tik pod njim, vstran od vertikale pa zvončasto usiha proti nič. Opravimo še »kontrolo«, ki skorajda ni potrebna,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x)\mathrm{d}x = -2\frac{qh}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)} = -q,$$

da je integral gostote po širini trase enak nasprotnemu naboju na vodniku.



Asimetrični dvovod. Nadaljujmo s parom vzporednih žic različnih polmerov. Naj sta radija žic a_1 in a_2, njuna medosna oddaljenost pa d. Nadomestna naboja $(\pm q)$ sta v presečiščih abscise z osnovno krožnico polmera s; ta seka oboda žic pod pravim kotom. Vpeljemo dve ekscentričnosti, e_1 in e_2, in delni medosni oddaljenosti, d_1 in d_2, ter zapišemo tri relacije:

$$d_1^2 = s^2 + a_1^2 \quad \text{in} \quad d_2^2 = s^2 + a_2^2 \quad \text{ter} \quad d_1 + d_2 = d.$$

Ko eliminiramo s, sledita:

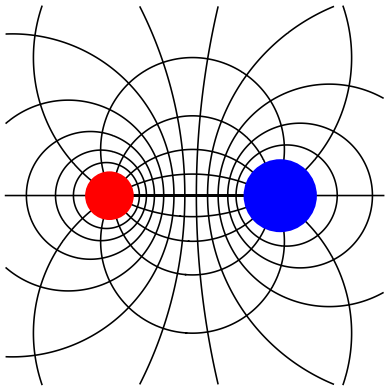
$$d_1 = \frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d} \quad \text{in} \quad d_2 = \frac{d^2 - a_1^2 + a_2^2}{2d}.$$

To vnesemo v eno od prvih dveh in dobimo:

$$s = \frac{\sqrt{d^4 + a_1^4 + a_2^4 - 2(d^2a_1^2 + d^2a_2^2 + a_1^2a_2^2)}}{2d} \quad \text{in} \quad e_1 = d_1 - s \quad \text{ter} \quad e_2 = d_2 - s.$$

Ko izrazimo potenciala točk A in B in napetost med njima, sledi kapacitivnost/m:

$$c = \frac{q}{u} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{(d-a_1-e_2)(d-a_2-e_1)}{(a_1-e_1)(a_2-e_2)}}.$$



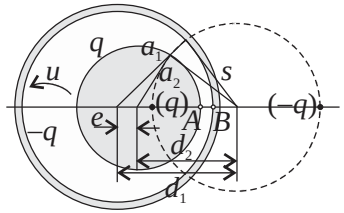
asimetrični dvovod

Ekscentrični kabel. Zaključimo z vodnikom v ekscentrični oklopni cevi. Vodnik in žila nista soosna kot pri koaksialnem kablu. V praksi srečujemo večžilne kable. Če bi odstranili vse razen ene žile, bi dobili ekscentrični kabel. Podatki kabla so polmera a_1 in a_2 in izmik e njunih osi. Legi pomožnih nabojev $(\pm q)$ sta v presečiščih abscise z osnovno krožnico polmera s; ta seka obod žile in obod oklopa pod pravim kotom. Velja sledeče:

$$d_1^2 = s^2 + a_1^2 \quad \text{in} \quad d_2^2 = s^2 + a_2^2 \quad \text{ter} \quad d_1 - d_2 = e.$$

Ko eliminiramo s, sledita

$$d_1 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + e^2}{2e} \quad \text{in} \quad d_2 = \frac{a_1^2 - a_2^2 - e^2}{2e}.$$

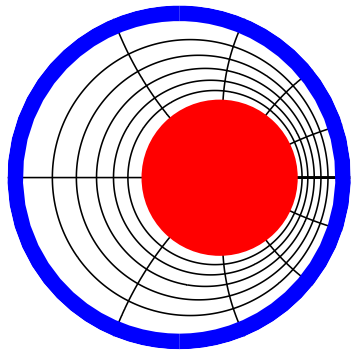


To vnesemo v eno od prvih dveh in dobimo

$$s = \frac{\sqrt{a_1^4 + a_2^4 + e^4 - 2(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 e^2 + a_1^2 e^2)}}{2e}.$$

Izrazimo še potenciala točk A in B ter napetost med njima, iz česar sledi kapacitivnost/m:

$$c = \frac{q}{u} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \dfrac{(s - d_1 + a_1)(s + d_2 - a_2)}{(s + d_1 - a_1)(s - d_2 + a_2)}}.$$



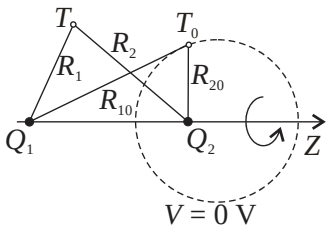
ekscentrični kabel

IZHODIŠČE: polje dveh točkastih nabojev. Za tehniko okovinjanja ekvipotencialk je uporaben tudi primer dveh točkastih nabojev nasprotnega predznaka; absolutna vrednost prvega naj je večja ali kvečjemu enaka absolutni vrednosti drugega,

$$Q_1 Q_2 < 0 \quad \text{in} \quad |Q_1| \geq |Q_2|.$$

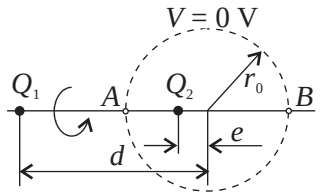
Potencial v točki T, ki je od nabojev oddaljena za R_1 oziroma R_2, določa izraz

$$V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad V(T_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_{10}} + \frac{Q_2}{R_{20}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{R_{10}}{R_{20}} = -\frac{Q_1}{Q_2} = k \geq 1.$$

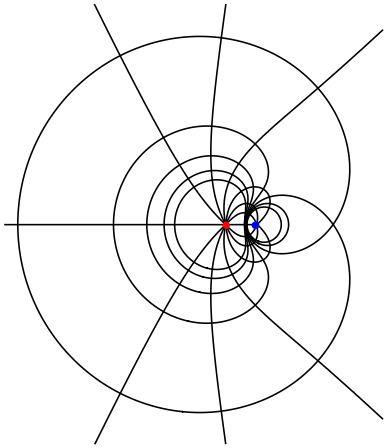


Zaradi $Q_1 Q_2 < 0$ je v njuni neposredni okolici gotovo ploskev s potencialom 0 V; naj je točka T_0 s te ekvipotencialke. Za to in vse druge točke na njej velja, da je razmerje oddaljenosti stalnica. V ravnini, položeni skozi naboja, je to krožnica, ki ekscentrično obkroži manjši naboj; ko jo zavrtimo, dobimo krogelno lupino polmera r_0. Ostale ekvipotencialke so mnogo bolj zapletene. Znotraj krogelne lupine so druga v drugi, in se gostijo ob drugem naboju. Zunaj krogelne lupine je podoba ekvipotencialk bolj pestra: nekatere objemajo prvi naboj, druge oba naboja.

Zanimiva je ekvipotencialka s potencialom 0 V. Če jo okovinimo, dobimo dva sistema: točkasti naboj pred kroglo z 0 V in točkasti naboj, ležeč ekscentrično v krogelni luknji prevodnika z 0 V. V prvem sistemu je za polje okrog krogle odgovoren



naboj Q_1 in neenakomerno razporejen naboj Q_2 na površini krogle, ki učinkuje kakor navidezni naboj (Q_2) v prvotni legi naboja Q_2. V drugem sistemu je za polje odgovoren naboj Q_2 in neenakomerno razporejen naboj $-Q_2$ na steni luknje, ki učinkuje v luknjo kot navidezni naboj (Q_1) v prvotni legi naboja Q_1. Ostaja še primer nasprotnih naelektritev ($k = 1$), pri katerem ima izhodiščni potencial 0 V simetralna ravnina. Z okovinjanjem simetralne ravnine dobimo primer naboja pred (nad) prevodno steno, kjer influirani naboj s stene učinkuje v prostor pred (nad) njo kakor nasprotni naboj v zrcalni legi. Enako smo ugotavljali v primeru premega naboja pred prevodno steno ali premega naboja nad prevodno podlago.

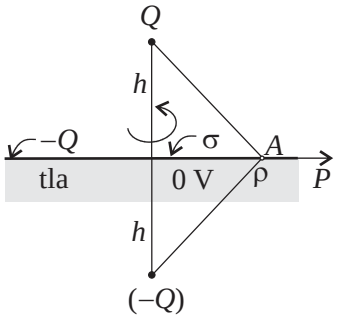


polje točkastih nabojev:
$Q_2/Q_1 = -1/2$

Za uporabo teh možnosti je pomemben odnos med nabojema in geometrijo, ki jo opredeljujejo polmer r_0 krogelne lupine s potencialom 0 V, oddaljenost d prvega naboja in oddaljenost e drugega naboja od središča krogelne lupine. Povlecimo premico skozi naboja: dobimo točki A in B na krogelni lupini. Potencial v njiju bo 0 V, če bo veljalo:

$$\frac{Q_1}{d-r_0}+\frac{Q_2}{r_0-e}=\frac{Q_1}{d+r_0}+\frac{Q_2}{r_0+e} \quad\Rightarrow\quad \frac{d-r_0}{d+r_0}=\frac{r_0-e}{r_0+e} \quad\Rightarrow\quad de=r_0^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{r_0}{d}=-\frac{Q_2}{Q_1}.$$

Točkasti naboj nad ravno prevodno podlago. Sorodnemu primeru – vodniku nad zemljo – smo se posvetili nedavno tega. Ugotovili smo, da sta za polje med vodnikom in ravno prevodno podlago odgovorna premi naboj vodnika in njemu nasproten namišljen premi naboj v zrcalni legi v tleh. Pri točkastem naboju je enako. Influiran naboj na površini zemlje učinkuje v zgornji prostor enako kot nasproten naboj v zrcalni legi pod površino. Poiščimo funkcijo porazdelitve naboja na podlagi, ko je na višini h nad njo točkasti naboj Q. Opravila so podobna kot pri vodniku; pišimo:



$$\sigma(A)=\varepsilon_0 E_n(A_+)=-2\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(h^2+\rho^2)}\right)\frac{h}{\sqrt{h^2+\rho^2}}=-\frac{Qh}{2\pi(h^2+\rho^2)^{3/2}}=\sigma(\rho).$$

Porazdelitev je rotacijska okoli osi Z. Absolutno največja gostota je tik pod nabojem. Če je naboj povsem pri tleh, tvorita ta in zrcalni naboj točkasti dipol, električno polje nad podlago pa ustreza polju vertikalnega dipola z momentom $2hQ$.

Točkasti naboj v krogelni luknji. Temu primeru je blizu krogelni kondenzator, katerega notranja elektroda (krogla) ima majhen radij in je iz središča prevodnega krogelnega oklepa polmera r_0 izmaknjena za ekscentričnost e. Električno polje med kroglico in krogelnim oklepom določa namišljen točkasti naboj (Q) v središču kroglice (resnični je na površini) in namišljen naboj ($-Qr_0/e$) izza oklepa na oddaljenosti $d = r_0^2/e$ od središča oklepa (resnični $-Q$ je na oklepu). Na kroglico deluje Coulombova sila $\mathbf{F}_\mathrm{e}$, ki jo potiska k steni in jo končno vanjo pritisne, kjer se razelektri,

$$F_\mathrm{e} = |\mathbf{F}_\mathrm{e}| = \frac{|Q(-Qr_0/e)|}{4\pi\varepsilon_0(r_0^2/e - e)^2} = \frac{Q^2 r_0 e}{4\pi\varepsilon_0(r_0^2 - e^2)^2}\,.$$

Točkasti naboj pred kroglo. Primer je obrat prejšnjega. Imejmo prašni delec z nabojem Q, ki je na oddaljenosti d od središča krogle polmera r_0, ki ima potencial 0 V. Polje določata naboj delca in namišljeni naboj ($-Qr_0/d$) v krogli, ki je iz njenega središča izmaknjen za $e = r_0^2/d$. Na delec deluje sila, usmerjena h krogli,

6:25

$$F_\mathrm{e} = |\mathbf{F}_\mathrm{e}| = \frac{|Q(-Qr_0/d)|}{4\pi\varepsilon_0(d - r_0^2/d)^2} = \frac{Q^2 r_0 d}{4\pi\varepsilon_0(d^2 - r_0^2)^2}\,.$$

Dobljeno silo lahko uporabimo tudi v primeru, ko se pred kroglo s potencialom 0 V nahaja naelektren obroč, katerega os gre skozi središče krogle. Razdalja d je v tem primeru oddaljenost oboda obroča do središča krogle.

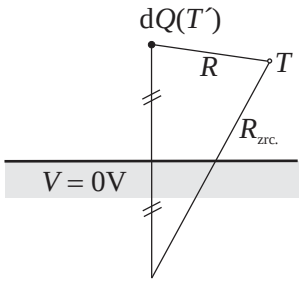
Točkasti naboj nad Zemljo. Zemlja je velik prevoden objekt ($r_0 \cong 6400$ km), ki značilno zaznamuje elektromagnetne razmere v prostoru. Tu želimo osvetliti le njeno elektrostatično vlogo. Po formulah za naboj pred kroglo poiščimo lego in vrednost namišljenega naboja. Za oddaljenost naboja Q od površine uporabimo višino h ($h \ll r_0$), za oddaljenost naboja (Q') do površine pa globino h'; pišimo:

7:33

$$r_0^2 = de = (r_0 + h)(r_0 - h') = r_0^2 + \underbrace{r_0(h - h') - hh'}_{0} \;\text{ in }\; Q' = -\frac{r_0}{r_0 + h}Q \cong -Q \quad \Rightarrow \quad h' \cong h \;\text{ in }\; Q' \cong -Q.$$

Sporočilo ne preseneča, poznamo ga iz primerov vodnika in točkastega naboja nad prevodno podlago, ki smo jo takrat razumeli kot prevoden polprostor pod njima. Še več: to terja popravek za nazaj. Obravnavali smo gručo nabojev, preme

elektrine, naelektreno palico, obroč, kroglo, ploščo idr, nič pa nismo omenjali bližine Zemlje. Njihova električna polja smo določali glede na (običajno) privzete porazdelitve naboja na objektih, s spoznanjem, ki ga prinaša Zemlja, pa vidimo, da smo nekaj spregledali, na nekaj pozabili. Pozabili smo na zrcalne naboje oziroma na učinek influiranih nabojev, ki jih na tleh izzovejo naelektritve na palicah, kroglah, ploščah, vodnikih. Manjkajoče bomo v bodoče nadoknadili tako, da bomo k polju nabojev nad tlemi prišteli še polje zrcalnih nabojev. V primeru električnega potenciala je to videti takole:



$$V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}Q(T')}{R} \underset{\text{znaten zrcalni učinek}}{\overset{\text{neznaten zrcalni učinek}}{\longleftrightarrow}} V(T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{\text{zrc.}}}\right)\mathrm{d}Q(T').$$

R in $R_{\text{zrc.}}$ sta oddaljenosti originalnega oziroma zrcalnega naboja do točke T. Kadar so naboji visoko nad tlemi in je točka T v njihovi bližini, shajamo z levim zapisom, v nasprotnem pa z desnim. Iz desnega izraza je prepoznati, da potencialno izhodišče ni le v neki abstraktni neskončnosti, ampak ga najdemo tudi bližje, na površju Zemlje.

18:59

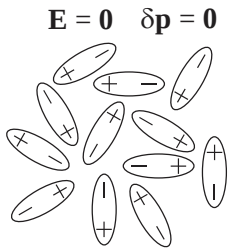
Zrcaljenje. Pretekli primeri se dotikajo t. i. zrcaljenja, ki ni zgolj elektrostatična posebnost, ampak ga (na svoje načine) srečamo tudi v drugih poljih. Rdeča nit zrcaljenjem so navidezni viri, ki prevzemajo vlogo matematičnih ekvivalentov za vire, ki se nahajajo na ravnih površinah, na valjih ali kroglah. Viri niso le naboji, lahko so tudi toki, pa tudi ravnih, valjnih in krogelnih površin ne odlikuje le prevodnost, ampak tudi druge elektromagnetne lastnosti. Zrcaljenje kot pojem izhaja iz lege nadomestnega vira pri ravnini (naboj in nadomestni naboj stojita zrcalno prek ravnine), pri krogli in valju pa sta si oddaljenosti nabojev inverzni glede na radij krogle ali valja, na kar kažeta zvezi $de = r_0^2$ in $(d - e)e = a^2$. Obe inverzni poziciji bi v tem primeru sprejeli kot zrcalni prek krogle oziroma valja. K zrcaljenju in možnostim, ki jih ponuja, se bomo še vrnili, predvsem v kontekstu novih problematik, prav tako tudi k ekvivalentnim virom, ki so elektrotehniška stalnica, ki presega tematiko polj, in jih vpeljujemo tudi v strnjenih strukturah, v t. i. električnih in magnetnih vezjih.

§14. Dielektrik in elektrostatično polje

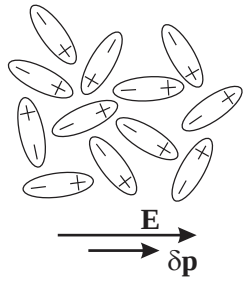
24:40

Omenili smo, da se izolacijska snov ob vnosu v polje $\mathbf{E}_0$, navkljub pomanjkanju prostih nosilcev, odzove na prevodniški način, le veliko počasneje. V dinamičnih razmerah, ko se polje časovno hitro spreminja, tako reagiranje nima uporabne vrednosti. Ni pa to edini način. Poznamo še dielektrični odziv, ki sloni na dipolih, na zasukih dipolov ali na generiranju dipolov, zaradi delovanja nasprotnih sil $\pm e\mathbf{E}_0$. Od tod tudi ime dielektrik.

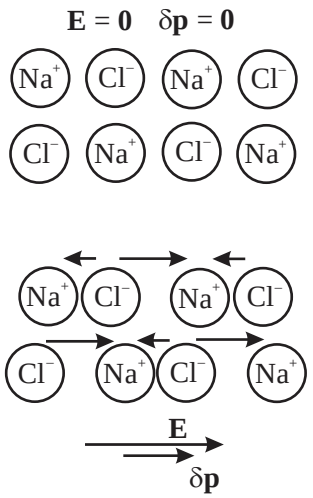
Dielektrik in izolant sta pogosto soznačnici, vendar spet ne povsem. Že izolant ni povsem definiran, zato tudi razloček do dielektrika ne more biti povsem jasen. Ko imamo v mislih klasične izolante, kot so papir, guma, plastika, steklo, teflon, ..., uporabljamo sopomenko dielektrik, težje pa to sprejmemo pri vodi, ki ni izolant, je pa dielektrik. Izkaže se, da v časovno nizko-dinamičnem polju dominira prevodniški, v visoko-dinamičnem pa dielektrični odziv; več o tem kasneje.



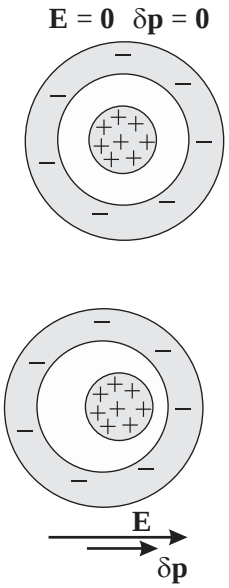
Vrste polarizacij. Vrste ali načini polariziranja govorijo o mehanizmih odzivanja dielektričnih snovi na električno polje. Razlikujemo tri: dipolski, elektronski in ionski način. Pri pojasnitvah načinov polariziranja se bomo vsakokrat osredotočili le na »majhen« vzorec dielektrične snovi. Vektor $\delta\mathbf{p}$ (na skicah) bomo razumeli kot vsoto dipolnih momentov dipolov v vzorcu.



DIPOLSKA POLARIZACIJA. Dipolski način je značilen za snovi s permanentnimi dipoli (molekule vode, alkohola, glicerina ...). V odsotnosti polja so polarne molekule podvržene termičnemu gibanju in trkom; njihovi električni dipolni momenti so kaotično usmerjeni, ne izkazujejo prednostne orientacije, v prisotnosti polja pa nanje delujejo navori, ki jih stremijo usmeriti vzdolž silnic. Do celovite usmeritve dipolov sicer ne pride (razlog tiči v termičnem »nemiru«), v poprečju pa izkazujejo prednostno usmeritev vzdolž silnic električnega polja; ob močnejšem polju je tudi stopnja orientiranosti teh molekul večja.



IONSKA POLARIZACIJA. Ta je značilna za kristale, za snovi z ionsko vezjo. Za ilustracijo se zadržimo pri simetričnem kristalu natrijevega klorida (NaCl). V kristalni rešetki se izmenjujejo ioni Na^+ in Cl^-. Vsak natrijev ion ima za sosede šest klorovih in obratno. Naboj $e/6$ Na^+ oblikuje z $-e/6$ Cl^- dipol z momentom, ki je usmerjen od Cl^- k Na^+. Vektorska vsota dipolnih momentov natrija s sosedi je enaka nič, enako klora s sosedi. Brž ko je tak kristal izpostavljen električnemu polju, pride do premika ionov Na^+ v smeri polja in ionov Cl^- proti smeri polja. Razdalje natrijevega iona do sosednjih klorovih v levo in desno, navzgor in navzdol, naprej in nazaj paroma niso več enake, zato je tudi vsota momentov iona Na^+ s šestinami sosednjih nabojev Cl^- različna od nič. Odzivnost simetričnega kristala NaCl očitno ni odvisna od smeri električnega polja; govorimo o izotropnosti oziroma izotropnem dielektriku. Drugo skupino tvorijo asimetrični kristali. Pri njih je odzivnost pogojena s smerjo polja – govorimo o anizotropnosti oziroma anizotropnem dielektriku.



ELEKTRONSKA POLARIZACIJA. Razlaga te polarizacije sloni na modelu atoma: kot jedra z objemajočim opletom elektronov. V odsotnosti zunanjega električnega polja težišči ($\pm$) nabojev atoma sovpadata, v prisotnosti polja pa se oplet elektronov rahlo pomakne nazaj po silnici. Izmaknjeni težišči ($\pm$) nabojev atoma modeliramo z dipolom, ki je usmerjen vzdolž silnic vzročnega polja. Ker pa se elektronska polarizacija zgodi v atomu, se očitno pridružuje prejšnjima dvema mehanizmoma, da se ioni v kristalu ali atomi v molekuli še dodatno elektronsko polarizirajo.

Prosti in vezani naboji. Pri prevodniku v električnem polju je odziv osredotočen na naboje ob površini, pri dielektriku pa na dipole v njem. V prevodniku so akterji prosti, v dielektriku pa vezani naboji; prosti naboji nimajo domicila, vezani pa ga imajo v atomih, ionih in molekulah. Delitev na proste in vezane je umetna. Z vidika elektromagnetizma so eni in drugi naboji enakovredni: zakon Lorentzove sile velja za vse in tudi elektromagnetno polje je lastno tako prostim kot vezanim nabojem. Elektrotehnika daje določeno prednost prostim nabojem. Razlog tiči v elektrotehniških strukturah, ki jih pretežno vzbujano tokovni in napetostni električnimi viri, v katerih notranje sile usmirjajo migracije prostih nabojev; te naboje in njihove toke v končnem tudi merimo. Vpliv električnih virov na vezane naboje in njihove toke v dielektrikih

(in kasneje magnetikih) se odvija praviloma posredno prek električnega (in magnetnega) polja. Prostim nabojem večkrat rečemo, da so primarni viri, vezanim pa, da so sekundarni viri elektromagnetnega polja. Vrnimo se na začetek: ob vnosu dielektrika v primarno polje $\mathbf{E}_0$, so bili viri tega polja prosti naboji nekje v prostoru, v dielektriku usmerjeni ali formirani dipoli pa so bili viri reakcijskega oziroma sekundarnega polja $\mathbf{E}_1$. Njuna vsota določa rezultančno polje $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$. Dalje to pomeni, da je vsak dipol v dielektriku v interakciji z električnim poljem tako prostih kot vezanih nabojev.

Vektor polarizacije. Skupni imenovalec vseh načinov polariziranja dielektrikov so dipoli. Količina, ki označuje stopnjo polariziranosti dielektrika, je vektor polarizacije $\mathbf{P}$. Definiran je s prostorninsko gostoto električnega dipolnega momenta oziroma s kvocientom vsote dipolnih momentov gruče dipolov v vzorcu dielektrika in prostornine tega vzorca,

11:09

$$\mathbf{P} = \lim_{"\delta v \to 0"} \frac{1}{\delta v} \sum_k \delta \mathbf{p}_k = \mathbf{P}(T, t),$$

ki je, v duhu makroskopskosti, primerno majhen, da še vedno zajame »veliko« dipolov (molekul, atomov, ionskih parov). Merska enota novega vektorja je C/m^2. V splošnem je polarizacija krajevno-časovna vektorska funkcija. Pričakovati je, da bo odziv vezanih nabojev v dielektriku bolj ali manj sledil dinamiki sil, ki dipole obračajo ali generirajo.

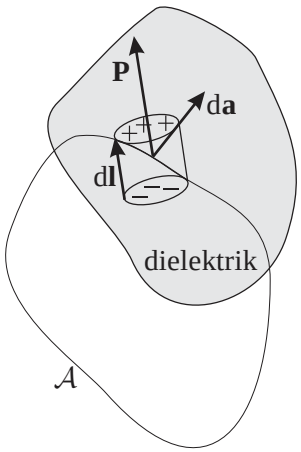
Izvornost vektorja polarizacije. Pri izvornostih vektorjev $\mathbf{J}$ in $\mathbf{E}$ smo ugotovili sledeče:

20:46

$$i = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{not.}}}{\mathrm{d}t} \quad \text{in} \quad \phi_E = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{not.}}}{\varepsilon_0},$$

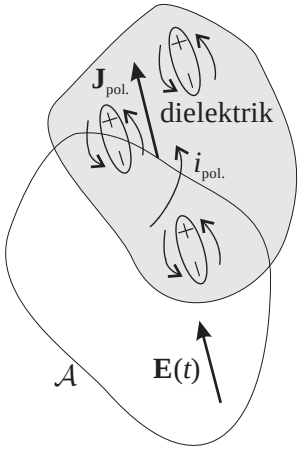
da izvornost tokovne gostote oziroma tok i skozi sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ korelira s časovnim odvodom naboja v objetem prostoru in da izvornost poljske jakosti oziroma pretok ϕ_E skozi sklenjeno ploskev korelira z nabojem v tem prostoru. Očitno nas čaka vprašanje pretoka ϕ_P skozi sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$ oziroma vprašanje izvornosti vektorja polarizacije,

$$\phi_P = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = ?$$



Odgovor bomo našli s pomočjo definicije vektorja polarizacije. Imejmo dielektrično telo, ki je polarizirano, kar opisuje vektor polarizacije. Nadalje si omislimo sklenjeno ploskev, ki obkroži tudi del dielektrika. Zgornja integracija bo očitno aktualna na tistem delu sklenjene ploskve, ki leži v dielektriku, tam, kjer je vektor polarizacije v splošnem različen od nič. Pri integraciji je pomembno, kaj integriramo. Poskusimo prepoznati vrednost produkta $\mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$. V okolici ploskvice d**a** si omislimo »sveženj« dipolov v valju z »višino« d**l** vzdolž vektorja **P**. Pozitivni in negativni naboji so na osnovnicah valja. Skupini ($\pm$) nabojev sta predstavnici vezanih nabojev, ki oblikujeta električni dipol, električni moment in končno tudi vektor polarizacije; označili ju bomo s $\pm \mathrm{d}Q_{\mathrm{pol.}}$. Vektor d**a** pripada ploskvici poševnega preseka valja, skalarni produkt z vektorjem d**l** pa pomeni prostornino dv valja. Sledi:

$$\mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{pol.}}\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \mathrm{d}Q_{\mathrm{pol.}}.$$



Kako to interpretirati? Sklenjena ploskev poseže v prostor dipolov: nekateri dipoli so izključno znotraj sklenjene ploskve $\mathcal{A}$, nekateri so izključno zunaj nje, nekatere pa ta »prereže na dvoje«, da so (kot na sliki) pozitivni naboji zunaj, negativni pa znotraj. Ko vršimo integracijo produkta $\mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$ po ploskvi $\mathcal{A}$,

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}Q_{\mathrm{pol.}} = Q_{\mathrm{zun.\ pol.}} = -Q_{\mathrm{not.\ pol.}} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -Q_{\mathrm{not.\ pol.}},$$

dobimo množino vezanih pozitivnih nabojev, ki so v presežku zunaj sklenjene ploskve, oziroma množino negativnih, ki so v presežku znotraj sklenjene ploskve $\mathcal{A}$. Ali tudi: izvornost vektorja polarizacije v prostoru, ki ga obkroža sklenjena ploskev $\mathcal{A}$ oziroma pretok ϕ_P skozi njo, korelira z množino vezanih (polarizabilnih) nabojev, ki jih ta ploskev obkroži.

Polarizacijski tok. Polarizacijski tok je (pre)tok vezanih nabojev; več o njem bomo povedali v dinamičnih razmerah. Pa vendar: privzemimo, da je električno polje, v katerem je dielektrik, časovno spremenljivo, npr. sinusno, $\mathbf{E}_0 \sin(\omega t)$: da je dielektrik vstavljen med vzporedni plošči, med kateri priključimo vir sinusne napetosti. Nihanju polja **E** sledijo premiki vezanih nabojev: da se polarne molekule obračajo, središča elektronskih opletov v atomih in ioni v kristalih pa nihajo

vzdolž silnic, s čimer se spreminja tudi vektor polarizacije. Takrat se množina vezanih nabojev znotraj sklenjene ploskve spreminja, saj določeni vezani naboji tik ob ploskvi to tudi prečkajo. Če izvornost vektorja polarizacije odvajamo po času,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}}_{\cdots\cdots}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{not. pol.}}}{\mathrm{d}t} = i_{\text{pol.}} = \oint_{\mathcal{A}} \underbrace{\mathbf{J}_{\text{pol.}}}_{\cdots\cdots}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{J}_{\text{pol.}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

zamenjamo vrstni red odvajanja in integriranja, pri katerem preide odvod v parcialnega, se sklicujemo na kontinuitetno enačbo, ki velja tudi za strukturo vezanih nabojev, in njihov pretok izrazimo z integralom gostote toka, dobimo razvidno sporočilo: časovni odvod vektorja polarizacije $\partial\mathbf{P}/\partial t$ je enak gostoti $\mathbf{J}_{\text{pol.}}$ polarizacijskega toka.

Toki prostih in vezanih nabojev. Polarizacijski tok je eden izmed štirih električnih tokov, dva od njih se nanašata na tok prostih nabojev, to sta konduktivni tok v prevodnikih in konvektivni tok v vakuumu ali plinu, dva pa se nanašata na tok vezanih nabojev, to sta polarizacijski tok v dielektrikih (izolantih) in magnetizacijski tok v magnetikih. Omenjene toke bomo v nadaljevanju še srečevali in jih tudi primerno predstavili. Kot za naboje tudi za toke velja, da je delitev na proste in vezane umetna. Vsem tokom oziroma kakorkoli gibanim nabojem je namreč imanentno, lastno t. i. magnetno polje, vendar o tem kasneje.

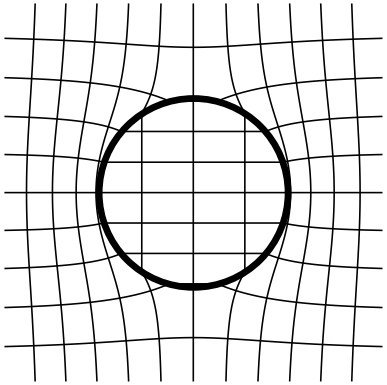
Vektor gostote električnega pretoka. Korenine novega vektorja tičijo v delitvi nabojev na proste in vezane. Poznamo Gaussova zakona, ki govorita o izvornosti vektorjev **E** in **P**; za splošen prostor z ograjo $\mathcal{A}$ se glasita:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{not.}}}{\varepsilon_0} \quad\text{in}\quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = -Q_{\text{not. pol.}}.$$

Če relaciji združimo, da prvo množimo z influenčno konstanto ter ji prištejemo drugo,

$$\oint_{\mathcal{A}} \underbrace{(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})}_{\mathbf{D}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = Q_{\text{not.}} - Q_{\text{not. pol.}} = Q_{\text{not. pro.}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}+\boldsymbol{P} \;\text{ in }\; \phi_{\mathrm{e}} = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} D_n\mathrm{d}a = Q_{\text{not. pro.}},$$

dobimo na desni množino prostega naboja znotraj ograje $\mathcal{A}$ in še nov vektor **D**, vektor gostote električnega pretoka, ter njegovo izvornost v prostoru oziroma električni pretok ϕ_e skozi ograjo tega prostora. Merska enota vektorja **D** je $\mathrm{C/m^2}$, enota torej, ki pripada tudi vektorju polarizacije in gostoti ploskovno porazdeljenega naboja. Vektor gostote električnega pretoka določata električna poljska jakost, ki je odgovorna za silo, in vektor polarizacije, ki ga posredno določa definicija električnega dipolnega momenta. Vektor **D** kot tak žal ni »otipljiv«, ima pa (prek integrala) povezavo z množino prostega naboja, ki je prek kontinuitetne enačbe v povezavi z električnim tokom prostih nabojev.



dielektrična krogla v homogenem električnem polju

Električna susceptibilnost in dielektričnost snovi. Odzivnost oziroma polarizabilnost dielektrikov je različna. Kadar je stopnja polarizacije sorazmerna jakosti polja, se odnosi med vektorji **E**, **P** in **D** v dielektriku silno poenostavijo:

$$!!!\quad \mathbf{P} \propto \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_\mathrm{e} \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\mathbf{1} + \chi_\mathrm{e}) \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_\mathrm{r} \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad !!!$$

Vektorji so takrat kolinearni, vpeljane konstante pa so polarizabilnost oziroma električna susceptibilnost χ_e in relativna dielektričnost ε_r, kot številski konstanti, ter dielektričnost ε dielektrika, ki ji pripada merska enota influenčne konstante. S klicaji želimo opozoriti na lepo lastnost, ki je značilna za trdne amorfne snovi, tekočine in pline. Za nekaj teh navajamo okvirne vrednosti relativne dielektričnosti; pri večini snovi so te dielektričnosti odvisne še od temperature, frekvence in vrste drugih fizikalnih dejavnikov,

24:49

dielektrik	ε_r
zrak	1,0006
teflon	2,1
polietilen	2,25
papir	3,85
olje	$2-5$

dielektrik	ε_r
sljuda	$3-6$
guma	7
sol	$3-15$
steklo	$3{,}7-10$
etanol	25

dielektrik	ε_r
voda	81
titanov dioksid	$86-173$
stroncijev titanat	310
barijev titanat	$1200-10^4$
kalcijbakrov titanat	10^5

Pozornost pritegnejo snovi z visoko relativno dielektričnostjo. Če telo iz takšne snovi vstavimo v polje $\mathbf{E}_0$, je rezultančno polje $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$ povsem neznatno, reakcijsko polje $\mathbf{E}_1$ v njem pa praktično nasprotno primarnemu polju, $\mathbf{E}_1 \cong -\mathbf{E}_0$. To spominja na razmere ob vnosu prevodnika v električno polje. Dielektrično telo je takrat skoraj ekvipotencialni prostor, v katerem je $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \cong \mathbf{P}$.

Podatek o dielektričnosti dopolnjuje še prebojna trdnost dielektrika: to je poljska jakost, pri kateri se prične struktura v njem rušiti. Posledica tega je vzpostavitev prevodnega kanala, skozi katerega se izvrši razelektritev, govorimo o preboju dielektrika, ki ima pri trdih snoveh trajne, pri tekočinah in plinih pa prehodne posledice. Mehanizem preboja nikakor ni enostaven, je naključen in nenadzorovan proces. Osrednji krivec preboja so »maloštevilni« prosti elektroni, ki pri visoki poljski jakosti pridobijo velike hitrosti, izbijajo vezane elektrone in tako sprožijo »verižno« reakcijo novih trkov. Proces spremlja tudi termični učinek, ki vodi do porušitve strukture dielektrika. Navajamo okvirne prebojne trdnosti za nekaj dielektrikov; tudi te so odvisne še od vrste drugih fizikalnih dejavnikov,

dielektrik	$E_{\text{pr.}}$ (MV/m)
zrak	2,5 – 3
olje	15
papir	20

dielektrik	$E_{\text{pr.}}$ (MV/m)
parafin	30
steklo	10 – 40
guma	20 – 40

dielektrik	$E_{\text{pr.}}$ (MV/m)
papir v olju	50
polivinilklorid	40 – 60
sljuda	200

Nehomogenost, nelinearnost in anizotropnost označujejo posebnosti in muhavosti dielektrikov. Problematika je zelo široka in sodi v okvir interakcij polje – snov oziroma v področje kvantne fizike in fizike snovi.

NEHOMOGENOST je posledica snovne nehomogenosti, temperature, tlaka in drugih dejavnikov. Odnos med poljsko jakostjo in gostoto pretoka določa krajevno odvisna dielektričnost.

NELINEARNOST je pogosta in tudi zanimiva, saj ponuja določene uporabne možnosti. Odnos med jakostjo in gostoto polja ni sorazmeren, temveč funkcijski. V to skupino sodijo feroelektriki, snovi, ki se obnašajo podobno kot feromagnetiki. Zanje je značilna histerezna zanka, ki pri časovno spremenljivih poljih podaja kasnjenje ali zaostajanje polarizacije za poljsko jakostjo. Tudi polarne molekule se v mikrovalovnem električnem polju sučejo zakasnjeno; kasnjenje spremlja termični učinek. Nelinearni so elektreti: to so snovi, ki po odstranitvi iz polja ohranijo električno polje, t. i. vgrajeno polje v in izven njega. Če staljen vosek postavimo v električno polje, v katerem se polarizira, počakamo, da zatrdi, in ga zatem izvlečemo iz polja, zadrži usmerjenost dipolov in ti dipoli so vir vgrajenega polja (podobno kot pri trajnem magnetu).

ANIZOTROPNOST srečamo v nesimetričnih kristalih, v katerih je polarizabilnost v različnih smereh različna. Vektorja **E** in **D** takrat nista sosmerna. Odnos med njima določa tenzor dielektričnosti. Komponento D_x določajo tri dielektričnosti,

$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z,$$

in podobno tudi ostali dve komponenti; vseh delnih dielektričnosti je torej devet. Določeni kristali in nekatere tekočine postanejo v prisotnosti električnega polja anizotropne. Aplikacije tega pojava srečamo v optiki. Pomembna je tudi vpliv frekvence. V visokofrekvenčnem električnem polju se dogaja, da zasuki molekul in premiki ionov in elektronskih opletov zaostajajo, ne sledijo dinamiki polja. V mikrovalovnem področju, nad 1 GHz, začne odpovedovati dipolska polarizacija, ki jo določa kinematika molekul; v infrardečem področju, nad 1 THz, odpove ionska, ki sloni na izmikih ionov; v pasu vidne in ultravijolične svetlobe, nad 1 PHz, odpove še (najgibkejša) elektronska, ki jo označuje nihanje elektronskega opleta v atomu. V področju gama žarkov je dielektričnoat dielektrika enaka izhodiščni dielektričnosti ε_0.

Elektromehanske posebnosti dielektrikov opisujeta elektrostrikcija in piezoelektrični pojav. Prva označuje pojav, pri katerem se določeni dielektriki v električnem polju skrčijo (stisnejo), drugi pa obratna pojava, ko se s stiskom kristala doseže premik ($\pm$) ionov, kar rezultira v vgrajenem polju in napetosti, pri kontaktiranju napetosti na kristal, pa se ta stisne. Pri piezoelektričnem pojavu se mehansko delo spremeni v električno energijo in obratno.

Električni pretok. Govorimo o formalnem pretoku. Na voljo imamo nov vektor, vektor gostote električnega pretoka **D**, katerega pretok skozi sklenjeno ploskev ustreza množini objetega prostega naboja. Brž ko je ploskev $\mathcal{A}$ katerakoli, je

22:47

$$\phi_\mathrm{e} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

pretok skozi njo. Merska enota pretoka ϕ_e je C. Ob integraciji vektorja **D** se spomnimo integralov tokovne gostote **J** po sklenjeni ploskvi (pri kontinuitetni enačbi) ali nesklenjeni (pri električnem toku skozi ploskev). Vloga novega pretoka je zaenkrat še nejasna, vendar se bo pri definiciji kapacitivnosti, ki opredeljuje »pretočne« vezi med prevodnimi telesi (kot nosilci prostega naboja), pokazala kot osrednja. Njemu soroden je magnetni pretok ϕ_m (polja **B** oziroma vektorja gostote magnetnega pretoka), ki ga bomo spoznali v magnetiki in je izhodiščen za definicijo lastnih in medsebojnih induktivnosti tuljav (navitij). Električni pretok upodabljamo s pretočnimi cevkami – enako kot to počnemo pri električnem toku.

Elektrostatični sistem z izolantom. Razdelek zaključujemo s pogledom nazaj, do Coulombove sile, ko so bili naboji v vakuumu, električno polje pa v prostoru okoli njih. Z vpeljavo prevodnih teles smo ugotovili, da je mesto presežnega naboja praviloma na njihovih površinah in da je tam razporejen tako, da 1) v telesih ni elektrostatičnega polja in 2) da je polje izključno v prostoru med njimi. Vse do tega razdelka smo prostor med telesi razumeli kot prazen (ε_0). V resnici je med prevodnimi telesi določen medij, pogosto zrak, za katerega iz prve tabele ugotavljamo, da je rahlo polarizabilen, da je njegov ε_r približno 1,0006. To pomeni, da bi morali pri analizi vodnika nad zemljo konstanto ε_0 v izrazih za električno polje, potencial in kapacitivnost zamenjati z $1{,}0006 \cdot \varepsilon_0$. Tega v praksi seveda ne počnemo, kajti šest desetink promila ni nekaj, kar bi zadeve postavilo na glavo. Pa vendar, oglejmo si to drugačnost malo podrobneje na sledečem primeru.

13:46

Krogelni kondenzator z dielektrikom. Med krogelnima elektrodama polmerov r_0 in r_1 je snov relativne dielektričnosti ε_r. Naboja $\pm Q$ sta na notranji in zunanji elektrodi enakomerno porazdeljena. Električno polje je radialno, zato je izolant radialno polariziran; vektorji **E**, **P** in **D** med elektrodama so radialni; odnose med njimi določa relativna dielektričnost,

20:15

$$\mathbf{P} = (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{\varepsilon_\mathrm{r}} \mathbf{D}.$$

30:24

Zapišimo izvornost polja **D** za krogelno lupino polmera r, ki je koncentrična k elektrodama in leži med njima:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} D_r \mathrm{d}a_r = D_r(r) 4\pi r^2 = Q \quad \Rightarrow \quad D_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 r^2} \quad \text{in} \quad P_r(r) = \frac{(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)Q}{4\pi\varepsilon_\mathrm{r} r^2}.$$

Poljska jakost med elektrodama je (glede na primer vakuuma kot izolanta med elektrodama) manjša za faktor relativne dielektričnosti. V primerjavi s poljsko jakost v vakuumu bi novi rezultat lahko zapisali v dveh delih,

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{-(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)Q/\varepsilon_\mathrm{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Prvi sumand pomeni polje prostega naboja, ki je ob površju notranje elektrode, drugi pa polje dipolov v izolantu. Izkaže se, da je polje dipolov možno matematično predstaviti kot polje vezanih nabojev v izolantu tik ob notranji elektrodi, kjer je njihova površinska gostota sorazmerna gostoti prostega naboja na elektrodi,

$$\sigma_\mathrm{pol.} = -(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\sigma_\mathrm{pro.}/\varepsilon_\mathrm{r}\,.$$

Zmanjšani jakosti sledita zmanjšanje napetosti med elektrodama in povečanje kapacitivnosti,

$$u = \frac{Q(r_1 - r_0)}{4\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 r_0 r_1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{u} = \frac{4\pi\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 r_0 r_1}{r_1 - r_0}.$$

Sporočilo tega primera moremo smiselno razširiti tudi na druge, pri katerih je bil prostor med prevodnikoma prazen, po novem pa more biti zapolnjen z izolantom; prejšnjo dielektričnost ε_0 zamenja po novem dielektričnost $\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0$ izolanta. Spoznavamo, da postaja kapacitivnost kondenzatorja njemu lastna snovno-geometrijska značilnica. Prisotnost enega ali več izolantov odpira nova vprašanja, ki jih bomo obravnavali v naslednjem razdelku.

§15. Mejna pogoja elektrostatičnega polja

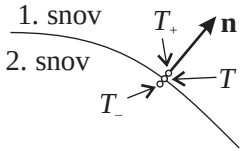
Mejni pogoji so eno temeljnih vprašanj elektromagnetike. Aktualni so v strukturah z več mediji (materiali ali snovmi). Lahko celo rečemo, da brez »zloženke« različnih elektromagnetnih snovi ni prave elektrotehnike. V začetku smo imeli le prazen prostor z naboji, temu smo kasneje dodali prevodnik s prostimi naboji in ravnokar še dielektrik z vezanimi naboji (kasneje se jima bo pridružil tudi magnetik z vezanimi toki). Postopnost opravil narekuje narava polj, ki jih moramo šele spoznati, spoznati pa tudi njihove interakcije z materiali; mislimo seveda na tokovno, magnetno in dinamično polje; z mejnimi pogoji oziroma z lastnostmi vektorjev elektromagnetnega polja ob stikih medijev se bomo torej še srečevali. V tem razdelku bomo vprašanje razmer na mejah premotrili zgolj z vidika elektrostatičnega polja. Teh vprašanj smo se delno že dotaknili, le da jih nismo tako naslovili. Govorili smo o elektrostatičnem polju in prevodniku in ugotovili, da je njegova površina ekvipotencialna, da je tangentni del poljske jakosti tam enak nič, njen normalni del ob prevodniku pa je sorazmeren površinski gostoti naboja. Tokrat bomo o tem spregovorili nekoliko širše: osvetlili bomo stik prevodnika z dielektrikom in stik dveh dielektrikov. Od kje radovednost? Če se na električno polje odzivajo snovi različno (influenca, polarizacija), potem se to gotovo odrazi tudi na stanju polja ob stikih snovi. – In prav to je tisto, kar nas bo zanimalo.

Postavlja se vprašanje, kje začeti, od kje pričakovati odgovore? Izhodišči sta gotovo relaciji, ki sta povsem splošni,

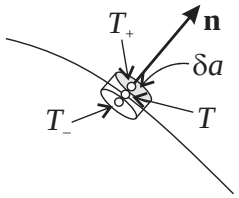
$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} D_n \mathrm{d}a = Q_{\text{not. pro.}} \quad \text{in} \quad \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} E_t \mathrm{d}l = 0,$$

in sporočata: elektrostatično polje je izvorno ($\mathcal{A}$ je katerakoli sklenjena ploskev) in nevrtinčno ($\mathcal{L}$ je katerakoli sklenjena krivulja), čeravno $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}$ posežeta v sosednja si medija. Imejmo mejo (stik, dotik) dveh medijev. Stik dveh prevodnikov za elektrostatično polje ni zanimiv (v nobenem ni polja, isto velja za stične točke), zanimiv pa bo postal v tokovnem polju. Tokrat bosta »na tapeti« stik prevodnika z dielektrikom in stik dveh dielektrikov. Obravnavali ju bomo v paketu, kasneje pa izsledke ločeno osvetlili.

31:40



Mejni pogoj polja D. Spet si omislimo tri točke, nadpovršinsko T_+ v 1. mediju, površinsko točko T in podpovršinsko T_- v 2. mediju. Normalo $\mathbf{n}$ mejne površine v točki T usmerimo v 1. medij. Za sklenjeno ploskev, ki delno poseže v oba medija, izberemo površino nizkega valja: osnovnico s ploščino δa ima vzporedno z mejo, višino pa določa razdalja med točkama T_+ in T_-. Glavnino pretoka vektorja $\mathbf{D}$ skozi površino valja določata pretoka skozi osnovnici; skozi zgornjo jo zadovoljivo ovrednoti produkt $D_n(T_+)\delta a$, skozi spodnjo pa produkt $-D_n(T_-)\delta a$. Na stiku medijev izreže plašč valja površino, katere ploščina ustreza osnovnici valja. Na njej je določena množina prostega naboja, ki jo ovrednoti produkt $-\sigma_{\text{pro.}}(T)\delta a$. Od tu neposredno sledi ocena pretočnega integrala vektorja $\mathbf{D}$,

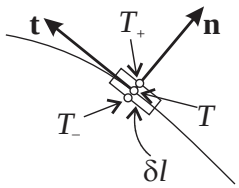


$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} D_n \mathrm{d}a = Q_{\text{not. pro.}} \xrightarrow{\mathcal{A}\to\delta\mathcal{A}} D_n(T_+)\delta a - D_n(T_-)\delta a \cong \sigma_{\text{pro.}}(T)\delta a,$$

ki v limiti »$\delta a \to 0$« da tole relacijo:

$$D_n(T_+) - D_n(T_-) = \sigma_{\text{pro.}}(T) \quad \text{ali} \quad \mathbf{n}\cdot\big(\mathbf{D}(T_+) - \mathbf{D}(T_-)\big) = \sigma_{\text{pro.}}(T).$$

Njeno sporočilo je: normalna komponenta vektorja $\mathbf{D}$ je na meji dveh medijev v splošnem nezvezna, vrednosti normalnih komponent vektorja $\mathbf{D}$ z obeh strani meje se razlikujeta za površinsko gostoto prostega naboja »v mejni ploskvi«.



Mejni pogoj polja E. Za sklenjeno krivuljo, ki seže v oba medija, izberemo rob pravokotnika z daljšo osnovnico δl, ki je vzporedna z mejo, vzdolž enotskega vektorja $\mathbf{t}$, njegovo višino pa določa razdalja med T_+ in T_-. Glavnino h krivuljnemu integralu prispevata napetosti vzdolž osnovnic pravokotnika; po zgornji jo ovrednoti produkt $E_t(T_+)\delta l$, po spodnji pa produkt $-E_t(T_-)\delta l$. Od tu sledi ocena krivuljnega integrala vektorja $\mathbf{E}$, v limiti »$\delta l \to 0$« pa še nova ugotovitev,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} E_t \mathrm{d}l = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}\to\delta\mathcal{L}} E_t(T_+)\delta l - E_t(T_-)\delta l \cong 0 \xrightarrow{\delta l\to 0} E_t(T_+) - E_t(T_-) = 0.$$

Njeno sporočilo je: tangentna komponenta vektorja $\mathbf{E}$ je na meji dveh medijev zvezna, ali: tangentni komponenti vektorja $\mathbf{E}$ sta na obeh straneh meje enaki. Enotski vektor $\mathbf{t}$ je le eden iz množice tangentnih vektorjev, vsem pa je skupno, da so

pravokotni na enotski vektor $\mathbf{n}$ normale. Vpeljemo še tangentni vektor $\boldsymbol{\tau}$, da velja $\mathbf{t} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}$, da trojka enotskih vektorjev $\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}$ in $\mathbf{n}$ tvori ortogonalno bazo v točki T, in ugotovljeno zapišemo še takole:

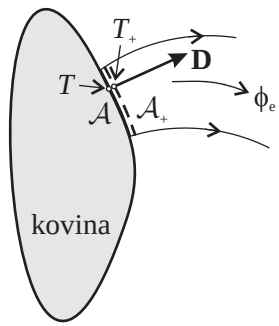
$$E_t(T_+) - E_t(T_-) = 0 \quad \text{in} \quad E_\tau(T_+) - E_\tau(T_-) = 0 \quad \text{ali} \quad \mathbf{n} \times \big(\mathbf{E}(T_+) - \mathbf{E}(T_-)\big) = \mathbf{0}.$$

Meja prevodnik – dielektrik. V praksi so prevodniki v izolacijskem plašču ali pa imajo izolacijski premaz (površinska zaščita, nevarnost dotika, ...). Redko se srečujemo s povsem golo površino prevodnika, ki je takrat v stiku z zrakom. Zrak je često razumljen kot izolant (v računih nastopa kot prazen prostor), sicer pa je šibko prevoden in rahlo polarizabilen. Kaj sporočata mejna pogoja? Naj je dielektrik prva in prevodnik druga snov. Elektrostatičnega polja v prevodniku ni,

6:22

$$E_t(T_-) = 0 \quad \text{in} \quad D_n(T_-) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t(T_+) = 0 \quad \text{in} \quad D_n(T_+) = \sigma_{\text{pro.}}(T) \quad \Rightarrow \quad E_n(T_+) = D_n(T_+)/\varepsilon_1 = \sigma_{\text{pro.}}(T)/\varepsilon_1.$$

Normalna komponenta vektorja gostote električnega pretoka nad površino prevodnika številsko ustreza površinski gostoti naboja »v površini«, tangentna komponenta tik nad njo pa je enaka nič; vektor električne poljske jakosti je tam normalni vektor in določen z dielektričnostjo medija ob prevodniku. Zadnja relacija spominja na primer prevodnika v praznem prostoru, le da prejšnjo dielektričnost ε_0 tokrat zamenjuje dielektričnost ε_1 okoliškega izolanta. Še nekaj: naj je ploskev $\mathcal{A}$ del površine prevodnika, ploskev $\mathcal{A}_+$ pa njej identična tik ob prevodniku:



$$D_n(T_+) = \sigma_{\text{pro.}}(T) \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{A}_+} D_n(T_+)\mathrm{d}a = \int_{\mathcal{A}_+} \sigma_{\text{pro.}}(T)\mathrm{d}a \quad \Rightarrow \quad \phi_\mathrm{e} = Q_{\text{pro.}}.$$

Če to navežemo na gostotnice in pretočne cevke električnega pretoka, potem ugotavljamo, da imajo prve in druge svoje izstopno mesto na površini prevodnika, kjer je naboj pozitiven, vstopno mesto pa tam, kjer je naboj negativen. V žargonu rečemo, da se del naboja enega telesa skozi pretočne cevke »naveže« na sebi nasproten naboj na drugem telesu. Takšna interpretacija bo pomembna pri definiciji kapacitivnosti in delnih kapacitivnosti med prevodnimi telesi.

Meja dielektrik – dielektrik. Ta je aktualna v primerih večslojne, plastnovite izolacije (kabli, navitja transformatorjev, motorjev, razne izvedbe kondenzatorjev, ...). V mislih imejmo stik dveh »idealnih« dielektrikov (realni so namreč vedno

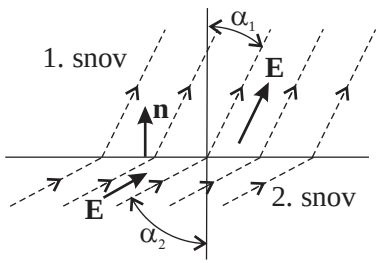
29:25

delno prevodni in jih kot takšne v okviru elektrostatičnega polja ne moremo adekvatno obravnavati). V takšnem primeru ne moremo govoriti o prostem naboju na/ob meji. Oba mejna pogoja imata takrat homogeno obliko,

$$D_n(T_+) - D_n(T_-) = 0 \quad \text{in} \quad E_t(T_+) - E_t(T_-) = 0.$$

Govorimo o zveznosti normalne komponente gostote pretoka in zveznosti tangentne komponente poljske jakosti. Pogoj za drugo tangentno komponento jakosti opuščamo, ker lahko tangentni osi v točki T vedno tako zavrtimo okoli normale, da je komponenta E_τ enaka nič. Nadalje privzemimo še linearnost dielektrikov, ki ju takrat opredeljujeta dielektričnosti ε_1 in ε_2. Pogoja zapišemo tudi takole:

$$E_t(T_+) = E_t(T_-) \quad \text{in} \quad \varepsilon_1 E_n(T_+) = \varepsilon_2 E_n(T_-) \quad \Rightarrow \quad E_n(T_+)/E_n(T_-) = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \,.$$



Razmerje normalnih komponent poljske jakosti z obeh strani meje je obratnosorazmerno razmerju dielektričnosti (večja dielektričnost, manjša normalna komponenta poljske jakosti in obratno). Opravimo deljenje levih in desnih strani enačb (ob pogoju, da nobena od komponent ni enaka nič):

$$\frac{E_t(T_+)}{\varepsilon_1 E_n(T_+)} = \frac{E_t(T_-)}{\varepsilon_2 E_n(T_-)} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_t(T_+)}{E_n(T_+)} : \frac{E_t(T_-)}{E_n(T_-)} = \varepsilon_1 : \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

V kvocientih tangentnih in normalnih komponent vektorjev prepoznavamo tangensa kotov, ki ga vektorja električnih poljskih jakosti v obeh točkah oklepata z vektorjem normale. Sporočilo je: na meji dielektrikov se silnice »prelomijo«, na meji »doživi« polje spremembo smeri. Mediju večje dielektričnosti pritiče večji kot. Izjemi sta slučaja, ko je polje v enem mediju povsem tangentno (takšno je potem tudi v drugem) in ko je v enem mediju povsem normalno (takšno je potem tudi v drugem). Sprememba se odraža tudi v absolutnih vrednostih poljskih jakostih z obeh strani meje,

$$\frac{E(T_+)}{E(T_-)} = \sqrt{\frac{E_t^2(T_+) + E_n^2(T_+)}{E_t^2(T_-) + E_n^2(T_-)}} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha_1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha_2}} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\,.$$

Če v homogeno polje jakosti E_0 v zraku (ε_0) vstavimo poševno, pod kotom $\alpha_0 = 45°$, stekleno ploščico dielektričnosti $\varepsilon_\mathrm{r} = 5$, oklepajo silnice polja v njej z normalo kot $\alpha_1 = \operatorname{arctg}(\varepsilon_\mathrm{r} \operatorname{tg}\alpha_0) \cong 78{,}7°$; jakost polja E_1 v stekleni ploščici in jakost polja E_0 izven nje sta v razmerju

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\sin\alpha_0}{\sin(\operatorname{arctg}(\varepsilon_\mathrm{r}\operatorname{tg}\alpha_0))} \cong 0{,}72.$$

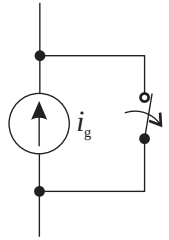
Ni težko ugotoviti, da se pri $\alpha_0 \to 0$ to razmerje bliža vrednosti 1, pri $\alpha_0 \to \pi/2$ pa vrednosti $1/\varepsilon_\mathrm{r}$, kar ustreza sporočilom obeh mejnih pogojev. Podobni odnosi veljajo tudi ob neravni meji, saj je, gledano lokalno, vsako polje homogeno in vsaka kriva meja je v lokalnem smislu ravna.

§16. Električni vir ter kapacitivnost in kondenzator

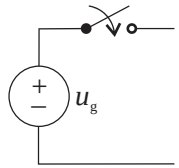
Razdelek predstavlja krajši »skok« v električna vezja: govorili bomo o električnih virih (generatorjih) in o kondenzatorju, o dveh osnovnih aktivnih elementih in o prvem iz vrste pasivnih elementov električnih vezij. Poznamo dva vira, tokovni in napetostni vir, vsak od njiju pa skupaj s kondenzatorjem že oblikuje preprosto električno vezje.

36:37

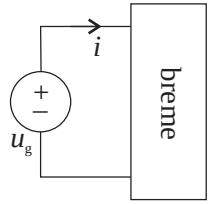
Električni vir. Ker je vprašanje virov kompleksno, se bomo v začetku zadovoljili le z osnovnimi informacijami. Same vire smo že omenjali, v smislu: med elektrodi kondenzatorja priključimo vir, ki ga naelektri. Omenili smo influenčni generator oziroma možnost ločevanja nabojev s pomočjo influence. In ravno ločevanje $\pm$ nabojev je pojav, ki opredeljuje električni vir: da ima vir zmožnost razdvajanja nabojev oziroma potiskanja mobilnih nosilcev naboja z enega na drugo mesto. Kaj se z razdvojenimi naboji in zaradi njih kasneje dogaja, je odvisno od strukture, ki jo priključimo med sponki vira. Če je to kondenzator, se ta elektri (polni ali prazni), če priključimo sijalko, ta sveti, če upor, se ta segreva, če motor, se mu zgane rotor, ... Procesi, ki ženejo ločitev nabojev, so različni: pri bateriji je to elektrokemični proces, pri termočlenu toplota, pri vakuumski fotodiodi ali polprevodniški sončni celici je to svetloba, pri tornem elektrenju je to drgnjenje, pri generatorju parna turbina. Razumevanje takšnih struktur zahteva posebna znanja fizike, kemije ter mehanike in presega problemski okvir osnov elektrotehnike. Od vsega tega bomo za nadaljevanje potrebovali opredelitvi dveh idealnih virov, idealnega tokovnega in idealnega napetostnega vira. Že pridevnik »idealni« nas opozarja, da so resnični viri verjetno drugačni, da pa se lahko idealnima v določeni meri tudi dovolj dobro približajo. Akumulator ni idealen napetostni vir, se mu pa zelo dobro približa, če breme, ki ga napaja, ni energijsko preveč potratno. Influenčni generator ni idealen tokovni vir, se mu pa približa, če le breme ni šibko električno prevodno. Podobne omejitve srečamo tudi pri drugih virih. Resničnost vira je nekaj, s čimer moramo računati, idealnost vira pa idealizacija ali poenostavljena resničnost. Med električne vire sodijo tudi posebna elektronska vezja (usmerniki, funkcijski generatorji, ...) v vlogah tokovnega ali napetostnega vira. Prednost teh virov je v tem, da se uspejo, znotraj svojih energijskih zmožnosti, izredno približati lastnostim obeh idealnih virov.



IDEALNI TOKOVNI VIR. Tokovni vir je dvopol, ki zagotavlja predpisan električni tok i_g od ene k drugi sponki vira. Tok i_g kot časovna funkcija je lahko konstanta (enosmerni tok), lahko je izmenična (kosinusna funkcija dane amplitude, frekvence in faze), lahko je žagasta, impulzna ali kako drugače oblikovana funkcija (funkcijski generator). Simbol tokovnega vira kot strnjenega elementa električnih vezij je krog s puščico, ki označuje referenčno smer toka. Ob simbol pripišemo tok vira. Vzporedno k viru dodamo sklenjeno stikalo. S tem želimo poudariti, da na tokovni vir najprej priključimo porabnik (breme) in zatem šele odpremo stikalo in s tem tok vira preusmerimo skozi breme. Enako velja pri odklopu bremena: najprej sklenemo stikalo, zatem pa šele odklopimo breme. V shemah električnih vezjih stikala ne rišemo, se pa zavedamo, da je tokovni vir, sam kot tak, brez vzporedno vezanega stikala, fizikalni nesmisel.

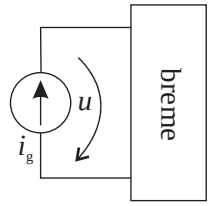


IDEALNI NAPETOSTNI VIR. Napetostni vir je dvopol, ki med referenčno (+) sponko in referenčno (−) sponko vira zagotavlja električno napetost u_g. Napetost u_g kot časovna funkcija je lahko konstanta (enosmerna napetost), lahko je izmenična (sinusna funkcija dane amplitude, frekvence in faze), lahko je trikotne, trapezne ali druge oblike. Simbol napetostnega vira kot strnjenega elementa električnih vezij je krog s polaritetama $\pm$. Ob simbol pripišemo napetost vira. Zaporedno k viru dodamo odprto stikalo. Poudariti želimo, da na napetostni vir najprej priključimo porabnik in šele zatem sklenemo stikalo. Enako velja pri odklopu bremena: najprej odpremo stikalo, zatem pa odklopimo breme. V shemah vezij to stikalo praviloma opuščamo.



Delo in moč vira. Delo in moč vira sta določljiva šele z bremenom, ki ga priključimo med njegovi sponki. Delo $\mathrm{d}A_g$ vira v času $\mathrm{d}t$ določa produkt napetosti med sponkama in naboja, ki v tem času steče skozi vir. Delo je:

$$\mathrm{d}A_g = u\mathrm{d}Q \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{d}A_g = u_g i \mathrm{d}t}_{\text{napetostni vir}} \quad \text{ali} \quad \underbrace{\mathrm{d}A_g = u i_g \mathrm{d}t}_{\text{tokovni vir}}$$



Drug pomemben podatek je (trenutna) moč vira oziroma energijski tok iz vira (v breme):

$$p_g = \mathrm{d}A_g/\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \underbrace{p_g = u_g i}_{\text{napetostni vir}} \quad \text{ali} \quad \underbrace{p_g = u i_g}_{\text{tokovni vir}}$$

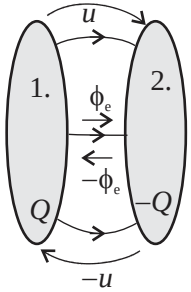
Moč vira določa produkt referenčno označene napetosti in referenčno označenega toka. Integral moči med trenutkoma t_1 in t_2 je delo vira:

$$A_{\mathrm{g}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p_{\mathrm{g}}(t)\mathrm{d}t.$$

Delo vira je običajno pozitivno, lahko pa se zgodi, da je v določenem časovnem intervalu tudi negativno; odvisno spet od bremena, ki ga nanj priključimo. Vir je lahko elektrokemični ali elektromehanski, lahko je elektronsko vezje ali kak drug sistem. Če je delo akumulatorja v danem časovnem intervalu negativno, se akumulator takrat polni; morebiti je bil nanj priključen omrežni polnilec, ki s tokom v nasprotni smeri sproži elektrokemični proces v obratni smeri, da se elektrodi regenerirata, kar v nadaljevanju omogoča koriščenje akumulatorja kot vira.

8:13

Kapacitivnost. S pojmom kapacitivnost smo se srečali, ko smo govorili o napetosti med elektrodama in o njenem odnosu z nasprotnima nabojema na elektrodah (pri ploščnem in krogelnem kondenzatorju ter koaksialnem kablu). Podobno tudi pri dvovodu, ekscentričnem kablu in nadzemnem vodu; prostor med elektrodama je bil takrat prazen (ε_0). Kasneje smo obravnavali krogelni kondenzator, ki je imel med elektrodama izolant z relativno dielektričnost ε_{r}. Ugotovili smo, da se je njegova kapacitivnost zaradi tega povečala ravno za faktor ε_{r}. Sklepamo, da je tako tudi v vseh drugih sistemih, v katerih je medelektrodni prostor v celoti zapolnjen z enovitim izolantom. Brž ko je izolantov med elektrodama več, zadeve niso več tako preproste.



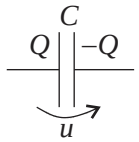
DEFINICIJA KAPACITIVNOSTI. Iz potreb, ki bodo še sledile, se moramo dogovoriti za nekoliko strožjo definicijo kapacitivnosti sistema dveh prevodnih teles. Prepoznan sorazmernostni odnos $Q = Cu$ bomo zamenjali z relacijo $\phi_{\mathrm{e}} = Cu$, v kateri bo ϕ_{e} pomenil celoten električni pretok od prvega k drugemu telesu, u pa napetost med prvim in drugim telesom. Iz enačbe za izvornost vektorja **D** namreč vemo, da je električni pretok skozi ploskev, ki obkroža naboj, številsko enak temu naboju. Kapacitivnost C sistema dveh prevodnih teles bo »po novem« določal kvocient ϕ_{e}/u,

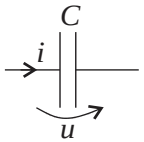
$$C = \frac{\phi_\mathrm{e}}{u} = \frac{-\phi_\mathrm{e}}{-u},$$

oziroma kvocient električnega pretoka $-\phi_\mathrm{e}$ od drugega k prvemu ter napetost $-u$ med drugim in prvim telesom.

Kondenzator kot strnjen ali koncentriran element električnih vezij. Pred tem omenjeni primeri kondenzatorjev so preprosti snovno-geometrijski sestavi. Električna polja v njih so enostavna in tudi pot do iskane kapacitivnosti je kratka. Kondenzatorji v resničnih elektromagnetnih strukturah ali električnih vezjih imajo praviloma precej bolj strukturirano snovno-geometrijsko zgradbo in tudi določanje električnega polja v njih ni enostavno opravilo. Poleg fizične ravni je tu še simbolna: da sistemu dveh prevodnih teles z dielektrično okolico priredimo simbol z ustreznimi oznakami. Kot simbol se uporablja stilizirana podoba plošč s priključkoma. Temu po potrebi dodajamo C za kapacitivnost, u za označeno napetost ter Q in $-Q$ za naboja na elektrodah (lahko tudi še zvezo $Q = Cu$ ter kasnejša izraza za moč in energijo). Kondenzator kot strnjen element je brez snovnih in geometrijskih značilnic; je nič-dimenzionalni (0D) element, ki ga določajo le oznake in relacije. Pri strnjenem elementu ne govorimo o električnem polju, ampak le še o količinah kot so kapacitivnost, napetost, naboj, energija in moč.

9:51





Polnilni tok. Kondenzator ni le v stanju stalne naelektritve, ampak se ta praviloma bolj ali manj dinamično spreminja. Kako se naelektritev $\pm Q$ spreminja, je odvisno od električne strukture, v katero je vključen. Najosnovnejši je primer, ko je med priključka kondenzatorja vezan vir dinamične, časovno spremenljive električne napetosti $u = u(t)$. Dinamiki te napetosti sorazmerno sledita tudi naboja, $\pm Q(t) = \pm Cu(t)$. Tu vpletemo zakon o ohranitvi elektrine: če na elektrodo z naelektritvijo Q priteka naboj z intenzivnostjo i, potem je $i = Q' = Cu'$, in enako velja za elektrodo z naelektritvijo $-Q$, s katere naboj odteka z intenzivnostjo i, da je $i = -(-Q') = Cu'$. In ravno to je enačba kondenzatorja,

8:11

$$i = Q' = Cu' \quad \Rightarrow \quad Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad u(t_2) - u(t_1) = \frac{1}{C}\int_{t_1}^{t_2} i(t)\mathrm{d}t,$$

tok je sorazmeren odvodu napetosti, in obratno, da je razlika napetosti med novim (t_2) in starim časom (t_1) sorazmerna pritečenemu naboju na prvo oziroma odtečenemu naboju z druge elektrode.

Polnilna moč. Polnilni tok govori o polnjenju ali praznjenju kondenzatorja (spreminjanju njegove naelektritve), polnilna moč pa o energijskem toku, ki je potreben, da se to dogaja. Za to je zaslužen vir, na katerega je kondenzator priključen. S to temo posegamo v kasnejšo, o električni energiji, vendar smo tako blizu nje, da si upamo nekaj spregovoriti tudi o tem. Takole: v času dt odteče iz negativne elektrode kondenzatorja naboj $dQ = idt$, na pozitivno pa temu enak naboj priteče. V času dt opravi vir za ta prenos električno delo $u\mathrm{d}Q = ui\mathrm{d}t$ z močjo ui; tej moči rečemo kar moč elektrenja p_e,

$$p_\mathrm{e} = ui = Cuu' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}Cu^2\right) \quad \Rightarrow \quad A_\mathrm{g}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p_\mathrm{e}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}Cu^2\right) = \tfrac{1}{2}Cu^2(t_2) - \tfrac{1}{2}Cu^2(t_1).$$

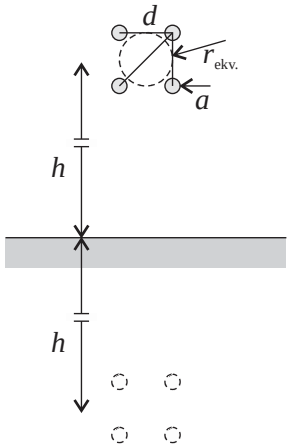
Vir v časovnem intervalu (t_1, t_2) opravi delo, ki je enako razliki (kakor se bo kasneje izkazalo) akumuliranih električnih energij v kondenzatorju med časoma t_1 in t_2. V intervalu pozitivne moči opravi delo vir, v intervalu negativne moči pa vir energijo sprejme. Kaj vidimo? Vir energijo odda ali sprejme, enako tudi kondenzator. Kondenzator je očitno element, ki je sprejeto zmožen tudi oddati: ko energijo sprejema, je v bremenskem režimu, ko jo oddaja, pa je v generatorskem režimu. Ob tem se odpirajo še druga vprašanja, ki jih hranimo za kasneje. Čas je za zgled!

30:50

Snop vodnikov nad zemljo. Snop galvansko povezanih vzporednih vodnikov je zanimiv pri visokonapetostnem prenosu električne energije in služi zmanjšanju termičnih, zvočnih in svetlobnih učinkov ioniziranega zraka (korone) ob vodnikih. V slovenskem prostoru je uveljavljena izvedba faznega ali linijskega vodnika kot »dvojčka«; drugje tudi kot »trojčka« ali »četvorčka«. Lotimo se kar snopa štirih. Privzemimo, da so vodniki polmerov a na medosnih oddaljenostih d, d in $d\sqrt{2}$ in obešeni okoli sredinske višine h nad zemljo, da velja: $a \ll d \ll h$. Brez večje napake lahko privzamemo, da so naboji na vodnikih (skoraj) enaki; njim nasprotni so na zemlji, njim zrcalni pa okoli globine h pod zemljo. Potencial kateregakoli od vodnikov v snopu zapišemo kot vsoto prispevkov osmih linijskih nabojev z naelektritvami $\pm\, q/4$,

$$V_{\text{snopa}} \cong \frac{(q/4)}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(2h)^4}{ad^3\sqrt{2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{\sqrt[4]{ad^3\sqrt{2}}} \;\Rightarrow\; C = \frac{ql}{V_{\text{snopa}}} \cong \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(2h/\sqrt[4]{ad^3\sqrt{2}}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(2h/r_{\text{ekv.}})}.$$

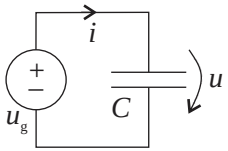
Izraz za kapacitivnost četvorčka do zemlje spominja na kapacitivnost ekvivalentnega vodnika do zemlje, katerega radij $r_{\text{ekv.}}$ ustreza geometrijski srednji vrednosti izmer a, d, d ter $d\sqrt{2}$. Snop vodnikov daje vtis debelejšega vodnika, $r_{\text{ekv.}} \gg a$. V področju snopa se poprečna vrednost poljske jakosti očitno zmanjša, zato se posledično zmanjšajo tudi učinki korone.

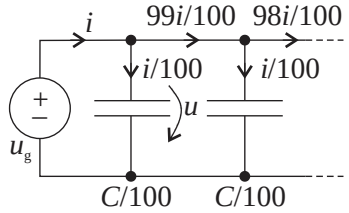


Nadaljujmo s primerom, ko na začetku trase med snop vodnikov in zemljo priključimo generator sinusne napetostni $u(t) = U_{\text{m}} \sin \omega t$ (U_{m} je amplituda, $\omega = 2\pi f$ je krožna frekvenca in f je frekvenca). Polnilni tok i je kosinusna funkcija,

$$i = Cu' = \omega C U_{\text{m}} \cos \omega t = I_{\text{m}} \cos \omega t,$$

z amplitudo $I_{\text{m}} = \omega C U_{\text{m}}$. Pri $a = 2$ cm in $d = 40$ cm je $r_{\text{ekv.}} = 20{,}6$ cm, pri $h = 20$ m in $l = 100$ km je $C = 1{,}05$ μF. Pri $U_{\text{m}} = 300$ kV in $f = 50$ Hz je $I_{\text{m}} = 99$ A. Vstopni tok v traso ni majhen, skoraj 100 A znaša njegova amplituda. Kaj pa na koncu, na polovici, na četrtini, na treh četrtinah trase? Na koncu trase je tok nič, saj je snop tam odprt, na polovici je tok verjetno polovičen, na treh četrtinah četrtinski in na prvi četrtini tričetrtinski. Amplituda toka v snopu proti koncu trase usiha od 100 A na 75 A, na 50 A, na 25 A do 0A. Kaj je sporočilo? Trasi pripada strnjen element s kapacitivnostjo C; mogli bi ji prirediti štiri s kapacitivnostmi $C/4$, morda še več. Na kaj merimo? Geometrijskih značilnosti en sam strnjen element nima, jih pa lahko delno povrnemo z več manjšimi. To storimo tako, da npr. vsakemu km trase priredimo kondenzator s kapacitivnostjo $C/100$; vsakega od njih polni tok $i/100$. Veriga stotih kondenzatorjev delno vrača izgubljeno krajevno porazdeljenost naboja, saj je polnilni tok po vsakem naslednjem kondenzatorju za $i/100$ manjši.

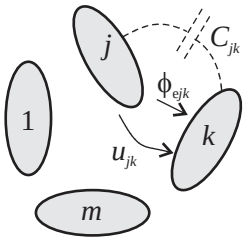




Ravnokar smo nakazali možnost modeliranja linijske strukture. Porazdeljeni kapacitivnosti se bodo kasneje pridružile še porazdeljene prevodnost, upornost in induktivnost, kar bo terjalo dopolnitev predstavljenega verižnega modela. Prejšnjo linearno padajočo porazdelitev toka vzdolž snopa vodnikov moramo zato razumeti kot približek. Tovrstno modeliranje je pomembno pri analizi napetostno-tokovnih razmer na vodih, ki služijo prenosu električne energije ali signalov. Vzdolž

vodov se odvija elektromagnetno valovanje in z njim povezani odboj, zvonjenje, presluh, disperzija in še drugi pojavi, ki določajo prenosne karakteristike vodov, prenosu električne energije in signalov pa postavljajo tudi določene omejitve.

24:05



Delne kapacitivnosti in modelno C-vezje. S sistemom dveh prevodnih teles ni bilo težav: določili smo kapacitivnost, sprejeli strnjen element in kaj izrazili, izračunali ali premislili. Postavlja se vprašanje, kako postopati, ko je prevodnih teles več? Pri treh telesih imamo tri naboje in šest napetosti, pri štirih štiri naboje in dvanajst napetosti, pri petih pet nabojev in dvajset napetosti, pri m telesih pa m nabojev in $m(m-1)$ napetosti. V želji po iskanju kapacitivnosti smo v zadregi: kvocient katerega naboja in katere napetosti vzeti, kako to poimenovati in čemu bo to služilo? Brez fizikalne predstave o polju v prostoru med prevodniki ne gre! Takole. Kaj je skupnega izbranima prevodnima telesoma j in k? Gotovo gostotnice in pretočne cevke, ki »začenjajo« na enem in »končujejo« na drugem telesu. Med njima sta električna pretoka in električni napetosti, da velja $\phi_{\mathrm{e}jk} = -\phi_{\mathrm{e}kj}$ in $u_{jk} = -u_{kj}$. V teh količinah kaže iskati vezi med telesoma j in k. Pričakovati je, da sta napetostim sorazmerna tudi pretoka. Če je tako, potem je smiselno vpeljati količnik,

$$C_{jk} = \frac{\phi_{\mathrm{e}jk}}{u_{jk}} = \frac{-\phi_{\mathrm{e}kj}}{-u_{kj}} = \frac{\phi_{\mathrm{e}kj}}{u_{kj}} = C_{kj},$$

imenovali ga bomo delna kapacitivnost. Delne kapacitivnosti so paroma enake; različnih je le $m(m-1)/2$. To pa že vodi v modelno, t. i. C vezje, ki ima toliko spojišč, kot je teles, stilizirane plošče, ki imajo skupno spojišče, pa predstavljajo dele površine telesa, na katerih so naboji, ki se prek pretočnih cevk navezujejo na sebi nasprotne naboje na sosednjih telesih.

Smo pred novim vprašanjem: kako te delne kapacitivnosti določiti? Očitno imamo v mislih električno zaključen sistem, da je naelektritev m prevodnih teles uravnotežena, $Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_m = 0$. Opravila pri določanju kapacitivnosti bomo predstavili na primeru treh teles z naboji Q_1, Q_2 in $Q_3 = -Q_1 - Q_2$. Potenciale teles je možno izraziti z vsoto prispevkov, te pa s pomočjo potencialnih koeficientov p_{jk}:

$$V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \quad \text{in} \quad V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \quad \text{ter} \quad V_3 = p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2,$$

Če izberemo tretje telo kot referenčno, sta napetosti do njega določeni z napetostnimi koeficienti n_{jk} v obliki

$$u_{13} = V_1 - V_3 = n_{11}Q_1 + n_{12}Q_2 \quad \text{in} \quad u_{23} = V_2 - V_3 = n_{21}Q_1 + n_{22}Q_2 \quad \text{ter} \quad u_{12} = u_{13} - u_{23},$$

obratno pa tudi naboja,

$$Q_1 = \frac{n_{22}u_{13} - n_{12}u_{23}}{\Delta} \quad \text{in} \quad Q_2 = \frac{-n_{21}u_{13} + n_{11}u_{23}}{\Delta}, \quad \text{pri} \quad \Delta = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21},$$

ki ju moremo izraziti s pretoki, delnimi kapacitivnostmi in napetostmi:

$$Q_1 = \phi_{\mathrm{e}12} + \phi_{\mathrm{e}13} = C_{12}u_{12} + C_{13}u_{13} = C_{12}(u_{13} - u_{23}) + C_{13}u_{13} = (C_{12} + C_{13})u_{13} - C_{12}u_{23},$$

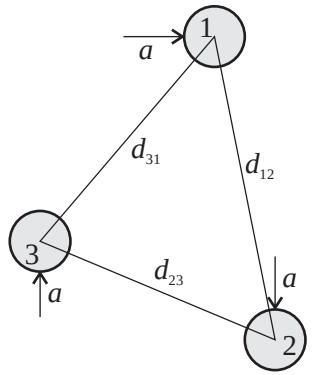
$$Q_2 = \phi_{\mathrm{e}21} + \phi_{\mathrm{e}23} = C_{21}u_{21} + C_{23}u_{23} = C_{12}(u_{23} - u_{13}) + C_{23}u_{23} = -C_{12}u_{13} + (C_{12} + C_{23})u_{23}.$$

Iz primerjave koeficientov sledijo delne kapacitivnosti:

$$C_{12} = \frac{n_{12}}{\Delta} = \frac{n_{21}}{\Delta} \quad \text{in} \quad C_{13} = \frac{n_{22} - n_{12}}{\Delta} \quad \text{in} \quad C_{23} = \frac{n_{11} - n_{21}}{\Delta}.$$

Zaradi $C_{12} = C_{21}$ je tudi $n_{12} = n_{21}$.

TRIFAZNI VOD. Nazoren primer za predstavitev opravil pri določanju delnih kapacitivnosti je sistem treh vrvi polmera a z medosnimi razdaljami d_{12}, d_{13} in d_{23}. Če višine obešanja vrvi krepko presegajo njihove medosne oddaljenosti, smemo vpliv zemlje zanemariti. Na vrveh predpostavimo naboje Q_1, Q_2 in $Q_3 = -Q_1 - Q_2$. Potenciali vrvi so



$$V_1 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{a} + \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{d_{12}} + \frac{Q_3}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{d_{13}} + K_0 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{d_{13}}{a} + \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{d_{13}}{d_{12}} + K_0,$$

$$V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{d_{12}} + \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{a} + \frac{Q_3}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{d_{23}} + K_0 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{d_{23}}{d_{12}} + \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{d_{23}}{a} + K_0,$$

$$V_3 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{d_{13}} + \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{d_{23}} + \frac{Q_3}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{1\,\mathrm{m}}{a} + K_0 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{a}{d_{13}} + \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{a}{d_{23}} + K_0$$

in določeni le do aditivne konstante K_0 natančno. Iz njih sledijo napetosti in napetostni koeficienti:

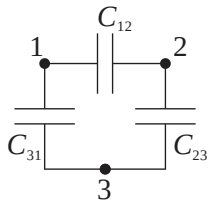
$$u_{13} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{d_{13}^2}{a^2} + \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{d_{13}d_{23}}{ad_{12}} = n_{11}Q_1 + n_{12}Q_2 \quad \text{in} \quad u_{23} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{d_{13}d_{23}}{ad_{12}} + \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{d_{23}^2}{a^2} = n_{21}Q_1 + n_{22}Q_2.$$

Determinanta napetostnih koeficientov je

$$\Delta = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} = 4\left(\ln\frac{d_{13}}{a}\right)\left(\ln\frac{d_{23}}{a}\right) - \left(\ln\frac{d_{13}d_{23}}{ad_{12}}\right)^2,$$

kapacitivnosti pa so:

$$C_{12} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\Delta}\ln\frac{d_{13}d_{23}}{ad_{12}} \quad \text{in} \quad C_{13} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\Delta}\ln\frac{d_{12}d_{23}}{ad_{13}} \quad \text{ter} \quad C_{23} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\Delta}\ln\frac{d_{12}d_{13}}{ad_{23}}.$$



Sistemu vrvi smo določili modelno vezje treh kondenzatorjev. Ker pa so kapacitivnosti parametri, ki so porazdeljeni vzdolž trase, moremo npr. vsakemu kilometru prirediti ustrezne deleže celotnih kapacitivnosti, kar vodi v verižno vezje. Največkrat so vrvi na nosilcih stebrov razmeščene v dokaj podobnih medosnih razdaljah. Vzemimo, da je d poprečna medosna razdalja; delne kapacitivnosti so takrat enake in določene s preprostim izrazom:

$$C = C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{3\ln(d/a)}.$$

Predpostavimo, da so na enem koncu med vrvi priključene napetosti trifaznega sistema,

$$u_{12} = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \alpha) \quad \text{in} \quad u_{23} = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \alpha - 2\pi/3) \quad \text{ter} \quad u_{31} = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \alpha + 2\pi/3),$$

katerih vsota je vsak trenutek enaka nič, drugi konci vrvi pa so odprti. Naboju Q_1 na prvi vrvi ustreza v modelnem vezju vsota nabojev na ploščah, ki pripadata tej vrvi,

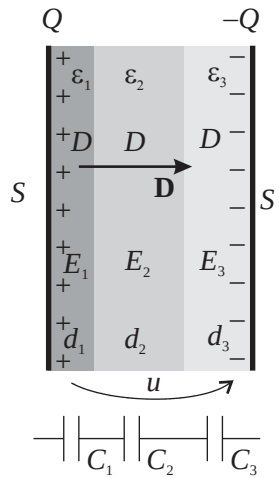
$$Q_1 = C_{12}u_{12} + C_{13}u_{13} = C(u_{12} + u_{13}) = CU_\mathrm{m}(\cos(\omega t + \alpha) - \cos(\omega t + \alpha + 2\pi/3)) =$$
$$CU_\mathrm{m}(\cos(\omega t + \alpha) + \cos(\omega t + \alpha - \pi/3)) = \sqrt{3}CU_\mathrm{m}\cos(\omega t + \alpha - \pi/6),$$

vstopni tok v njo pa je

$$i_1 = Q_1' = -\sqrt{3}\omega CU_\mathrm{m}\sin(\omega t + \alpha - \pi/6).$$

Brž ko želimo upoštevati še zemljo, se v modelnem vezju pojavijo tri nove delne kapacitivnosti, in sicer, kapacitivnosti posameznih vrvi do zemlje. Kot referenčno je takrat primerno izbrati zemljo. Upoštevamo še zrcalne naboje, zapišemo potenciale vrvi, ki so hkrati že napetosti do zemlje, in po tu prikazanem postopku določimo šest delnih kapacitivnosti. Potencialnih oziroma napetostnih koeficientov je tokrat devet; tri kapacitivnosti so medfaze, tri pa dozemeljne.

Kondenzator z več izolanti. Dosedanji primeri so bili takšni, da je bil prostor okoli prevodnikov enovit. Zelo hitro pa naletimo na težave, če je izolantov več. K sreči je nekaj praktičnih primerov, ki ne delajo preglavic, zato si jih poglejmo.



PLOŠČNI KONDENZATOR Z VEČ IZOLANTI. Srečamo ga pri folijskih kondenzatorjih: med dve prevodni foliji je vstavljenih več plasti izolacije, vse skupaj pa je zavito v svitek. To shematično povzema ploščni kondenzator z več dielektriki; naj so trije, debelin d_1, d_2 in d_3 in dielektričnosti ε_1, ε_2 in ε_3. Pri naelektritvi plošč z $\pm Q$ »prečka« električni pretok meje dielektrikov pravokotno; gostota pretoka je v vseh treh izolantih enaka, različne pa so poljske jakosti. V izolantu večje dielektričnosti je jakost manjša in obratno. Če z D označimo normalno komponento vektorja gostote elektičnega pretoka, z E_1, E_2 in E_3 pa normalne komponente vektorja električne poljske jakosti v izolantih, dobimo sledeče:

$$u = E_1 d_1 + E_2 d_2 + E_3 d_3 = \frac{D}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{D}{\varepsilon_2} d_2 + \frac{D}{\varepsilon_3} d_3 = \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S}\right) Q = \frac{Q}{C}.$$

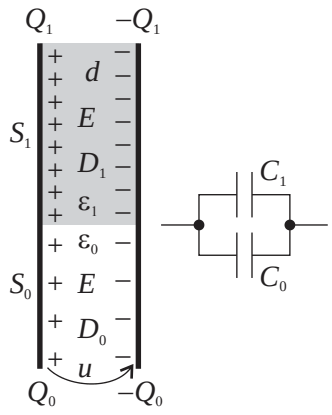
Recipročna vrednost celotne kapacitivnosti je enaka vsoti recipročnih delnih kapacitivnosti, ki pripadajo podprostorom,

$$C^{-1} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S} = \frac{1}{\varepsilon_1 S/d_1} + \frac{1}{\varepsilon_2 S/d_2} + \frac{1}{\varepsilon_3 S/d_3} = C_1^{-1} + C_2^{-1} + C_3^{-1}.$$

Resnično, če med plasti vstavimo nevtralne prevodne folije, prepoznamo tri zaporedno vezane ploščne kondenzatorje s kapacitivnostmi C_1, C_2 in C_3. Kratka formula razkriva odnos med posameznimi in nadomestno kapacitivnostjo zaporedno povezanih kondenzatorjev.

KOAKSIALNI KABEL Z DVOSLOJNO IZOLACIJO. Soroden primer srečamo pri energetskih kablih, pri katerih je žila obdana npr. z dvema slojema izolacije, čemur sledi oklop kabla. Običajno ima notranja plast večjo dielektričnost kot zunanja, da se na ta način zmanjša poljska jakost ob žili. Po prejšnjem zgledu moremo vsakemu sloju prirediti delno kapacitivnost, tokrat po formuli za koaksialni kabel. Če so a, b in c radiji, ki določajo področji izolantov z dielektričnostma ε_1 in ε_2, potem so:

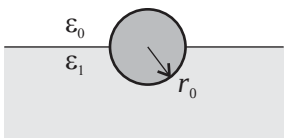
$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_1 l}{\ln(b/a)} \quad \text{in} \quad C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_2 l}{\ln(c/b)} \quad \text{ter} \quad C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$



PLOŠČNI KONDENZATOR Z DELNO VSTAVLJENIM IZOLANTOM. Če med plošči naelektrenega kondenzatorja z razmikom d vstavimo izolant enake debeline in dielektričnosti ε_1 le delno (do polovice, tretjine), se polji v izolantu in zraku razlikujeta v čem? Napetost u med ploščama je enaka integralu poljske jakosti, iz česar sledi, da sta jakosti v obeh prostorih med ploščama enaki u/d, različni pa sta gostoti pretokov. Če sta S_0 in S_1 delni površini plošč, potem sta normalni komponenti gostote pretoka v obeh prostorih tisti, ki v duhu mejnega pogoja določata tudi množini nabojev na površinah S_0 in S_1:

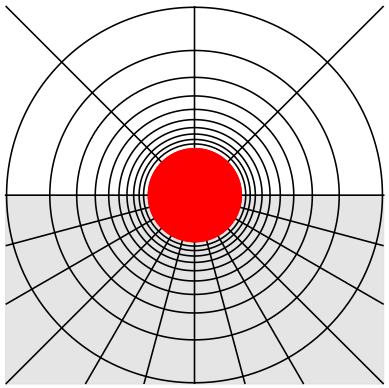
$$Q = Q_0 + Q_1 = D_0 S_0 + D_1 S_1 = \left(\varepsilon_0 \frac{u}{d} S_0 + \varepsilon_1 \frac{u}{d} S_1\right) = \left(\frac{\varepsilon_0 S_0}{d} + \frac{\varepsilon_1 S_1}{d}\right) u = (C_0 + C_1) u = C u \quad \Rightarrow \quad C = C_0 + C_1.$$

V oklepaju prepoznamo kapacitivnost in delni kapacitivnosti, ki pripadata podprostoroma. Primeru moremo prirediti modelno vezje vzporedno vezanih kondenzatorjev; njima pripada nadomestna kapacitivnost, ki je enaka vsoti delnih.



PLAVAJOČA KROGLA. Osamljeno naelektreno prevodno kroglo smo že obravnavali in ji določili kapacitivnost do neskončne okolice ($4\pi\varepsilon_0 r_0$). Privzemimo, da je krogla votla in da plava do polovice potopljena v veliki posodi z oljem dielektričnosti ε_1. Polkrogelni področji oblikujeta prostora dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev; sledijo kapacitivnosti:

$$C_0 = 2\pi\varepsilon_0 r_0 \quad \text{in} \quad C_1 = 2\pi\varepsilon_1 r_0 \quad \text{ter} \quad C = C_1 + C_2 = 2\pi(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) r_0.$$



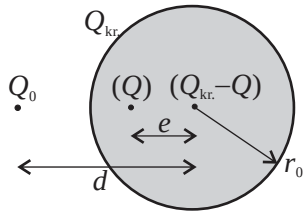
ekvipotencialke in gostotnice polja naelektrene plavajoče krogle

Kaj je tem primerom skupnega? Meja med izolanti se: a) ujema z ekvipotencialkami ali b) ujema z mejami pretočnih cevk električnega pretoka, ko bi bil izolant enovit. Na podlagi tega sledita dve interpretaciji: a) kot sistema zaporedno in b) kot sistema vzporedno vezanih kondenzatorjev. Brž ko temu ni več tako, se stvari zapletejo in jih brez ustreznih teoretičnih prijemov in numeričnih postopkov ne moremo razrešiti. – Vse to pa žal presega okvir osnov elektrotehnike.

§17. Zrcaljenje

21:58

Razdelek ne prinaša novih znanj, ampak skozi niz primerov predstavi tehniko zrcaljenja, ki ni značilnost elektrostatike, ampak jo srečamo tudi pri zahtevnejših strukturah, od tokovnih polj, magnetike in elektrodinamike ter vse do valovanja in antenskih struktur. Gre za idejo, ki ponuja bogate možnosti in jih kaže v danih okoliščinah »pametno« izkoristiti. Prve korake v to smer smo že storili: ko smo v elektrostatično polje vnesli prevodnik, spoznali influenco, tehniko okovinjanja ekvipotencialk, ... Sem sodijo naboji, ki smo jih prepoznali kot matematične ekvivalente za naboje, ki se sicer nahajajo na kroglah, valjnih ali ravnih površinah, njihovo navidezno mesto pa je v zrcalnih legah. – Pojdimo k primerom!

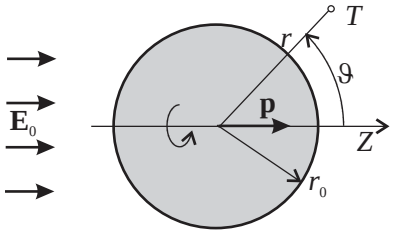


Točkasti naboj pred naelektreno kroglo. Lahko je to prašni delec, ki se znajde ob naelektreni krogli. Delec z nabojem Q_0 naj se nahaja na oddaljenosti d od centra kovinske krogle polmera r_0, ki ima naboj $Q_{\mathrm{kr.}}$. Sklepanje je zelo kratko. Da bo površina krogle ekvipotencialka, je v zrcalni legi $e = r_0^2/d$ potreben naboj $Q = -r_0 Q_0/d$. Ta očitno ne zagotavlja pravega naboja na krogli, zato je v njenem centru potreben še naboj $Q_{\mathrm{kr.}} - Q$; zadnja naboja sta navidezna. Potencial krogle ($V_{\mathrm{kr.}}$) določa zadnji naboj, saj je vsota potencialnih prispevkov prvih dveh enaka nič. Kaj smo počeli? Dodali smo naboj ter za njim še enega in skrbeli, da je površina krogle ekvipotencialka in da je na njej dan naboj $Q_{\mathrm{kr.}}$. V tem primeru je zajeta vsa »umetnost« zrcaljenja: da dodajamo navidezne vire in skrbimo, da so razmere na površini prevodnika takšne, kot morajo biti. Postopek nas je pripeljal do relevantnih nabojev, Q_0, Q in $Q_{\mathrm{kr.}} - Q$, ki so odgovorni za razmere na in v okolici krogle. Možna vprašanja so: sila na delec, potencial krogle, gostota naboja nekje na površini krogle, ... Odgovorimo kar na prvega. Izrazimo odbojno silo na delec z vhodnimi podatki:

$$F_{\mathrm{e}} = Q_0\left(\frac{Q_{\mathrm{kr.}} - Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (d-e)^2}\right) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{dQ_{\mathrm{kr.}} - r_0 Q_0}{d^3} - \frac{d r_0 Q_0}{(d^2 - r_0^2)^2}\right).$$

Če je pri določenih podatkih odbojna sila negativna, pomeni da je sila privlačna. Kadar je krogla nevtralna, $Q_{\mathrm{kr.}} = 0$, je sila vedno privlačna (prašni delec vleče h krogli):

$$F_{\mathrm{e}} = -\frac{r_0 d Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d^4} + \frac{1}{(d^2 - r_0^2)^2}\right).$$



Nevtralna krogla v homogenem polju. Nadalje naj je delec z nabojem Q_0 zelo stran od nevtralne krogle. Njegovo polje je v okolici krogle skoraj homogeno in ima jakost $E_{0z} = Q_0/4\pi\varepsilon_0 d^2$; navidezna naboja Q in $-Q$ sta tako blizu skupaj, da oblikujeta dipol z momentom

$$p_z = -Qe = -(-r_0 Q_0/d)(r_0^2/d) = r_0^3 Q_0/d^2 = 4\pi\varepsilon_0 r_0^3 E_{0z}.$$

Sporočilo je: če v homogeno polje jakosti E_{0z} vstavimo nevtralno kovinsko kroglo polmera r_0, bo reakcijsko polje naboja na krogli učinkovalo v zunanjost kot dipol z momentom p_z, ki bi se nahajal v centru krogle. S tem spoznanjem pa že lahko zapišemo funkcijo potenciala ob krogli; združiti je potrebno že znane izraze:

$$V(r,\vartheta) = \overbrace{-E_{0z}\,\underbrace{r\cos\vartheta}_{z} + K}^{\text{homogeno polje}} + \overbrace{\underbrace{r_0^3 E_{0z}}_{\frac{p_z}{4\pi\varepsilon_0}}\frac{\cos\vartheta}{r^2}}^{\text{polje dipola}} = -E_{0z} r\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right)\cos\vartheta + K.$$

Konstanta K pomeni vrednost potenciala v točki, v kateri leži kasneje središče krogle; K ustreza tudi potencialu krogle: $V(r_0,\vartheta) = K$. Brž sledita še komponenti poljske jakosti,

$$E_r(r,\vartheta) = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_{0z}\left(1 + 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right)\cos\vartheta \quad \text{in} \quad E_\vartheta(r,\vartheta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = E_{0z}\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right)\sin\vartheta.$$

Na površini krogle je ploskovna gostota naboja

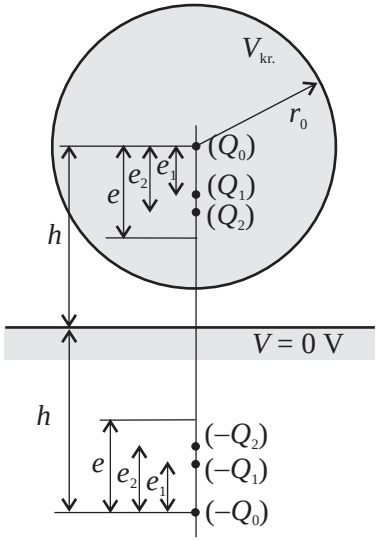
$$\sigma(\vartheta) = \varepsilon_0 E_r(r_0,\vartheta) = 3E_{0z}\varepsilon_0\cos\vartheta.$$

Ta določa tudi jakost polja ob prevodniku; v točkah $\vartheta = 0$ in π ob površini je ta absolutno največja, trikratnik absolutne jakosti homogenega polja. V primeru, da bi krogla imela nek presežni naboj $Q_{\mathrm{kr.}}$, bi bil v njeni okolici potencial

$$V_{\mathrm{novi}}(r,\vartheta) = \frac{Q_{\mathrm{kr.}}}{4\pi\varepsilon_0 r} - E_{0z} r\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right)\cos\vartheta + K.$$

Naelektrena krogla nad prevodno podlago. Razmere v okolici osamljene naelektrene krogle poznamo: naelektritev s površine deluje v prostor tako kot navidezni naboj iz njenega centra. Vemo tudi, da je v primeru ravne prevodne podlage potrebno upoštevati še zrcalni naboj. Ti dve zadevi bo v nadaljevanju potrebno primerno povezati. Primer je praktičen: nikoli nimamo osamljene krogle, vedno je v bližini zemlja s potencialom 0 V.

17:35



Naj ima krogla polmera r_0 potencial $V_{\text{kr.}}$, njeno središče naj bo na višini h nad podlago. Razmislek gre takole. Naredimo se nevedne in na podlago pozabimo; naboj na krogli bo $Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 r_0 V_{\text{kr.}}$. Za ta naboj pa podlaga ni ekvipotencialka; da bi bila, moramo pod podlago umestiti namišljeni naboj $-Q_0$ v globino h. Ta poruši razmere na krogli. Da bo potencial krogle ($V_{\text{kr.}}$) ostal nespremenjen, moramo ekscentrično v kroglo, na oddaljenost $e_1 = r_0^2/2h$ pod center, uvesti namišljen naboj $Q_1 = r_0 Q_0/2h$. Za ta naboj podlaga ni ekvipotencialka. Da bi bila, moramo pod podlago umestiti namišljeni naboj $-Q_1$ v globino $h - e_1$. Ta naboj poruši razmere na krogli; da bi potencial krogle ostal nespremenjen, moramo ekscentrično v kroglo, na $e_2 = r_0^2/(2h - e_1)$ pod center, uvesti namišljen naboj $Q_2 = r_0 Q_1/(2h - e_1)$. »Igra« gre v nedogled. Dodajamo nove naboje in lovimo stanji, da sta prevodni površini ekvipotencialni. Nove lokacije in novi naboji sledijo zaporedjema:

$$e_1 = r_0^2/2h \;\Rightarrow\; e_2 = r_0^2/(2h - e_1) \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; e_{n+1} = r_0^2/(2h - e_n) \ldots$$

$$Q_1 = r_0 Q_0/2h \;\Rightarrow\; Q_2 = r_0 Q_1/(2h - e_1) \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; Q_{n+1} = r_0 Q_n/(2h - e_n) \ldots$$

Zaporedji sta konvegentni; lokacije novih in novih nabojev se zgoščajo k e:

$$e = \lim_{n\to\infty} e_{n+1} = r_0^2\Big/\Big(2h - \lim_{n\to\infty} e_n\Big) = r_0^2/(2h - e) \;\Rightarrow\; e = h - \sqrt{h^2 - r_0^2}.$$

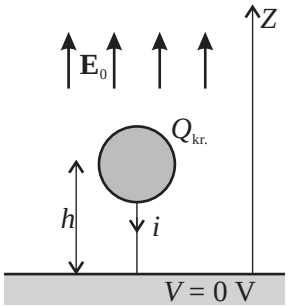
Vsak novi naboj je omejen z oceno, ki govori o geometrijskemu zaporedju

$$Q_{n+1} = r_0 Q_n/(2h - e_n) < r_0 Q_n/(2h - e) \;\Rightarrow\; Q_{n+1} < \left(\frac{r_0}{2h - e}\right)^n Q_0.$$

Celoten naboj na krogli je neskončna vsota, ki konvergira, saj je $r_0/(2h - e) < 1$. Izrazimo naboj na krogli. Ta ustreza vsoti namišljenih nabojev v notranjosti krogle; do predznaka enaka množina naboja je na površini prevodne podlage:

$$Q_{\text{kr.}} = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \cdots = \underbrace{4\pi\varepsilon_0 r_0 \left(1 + \frac{r_0}{2h} + \frac{r_0^2}{2h(2h-e_1)} + \frac{r_0^3}{2h(2h-e_1)(2h-e_2)} + \cdots\right)}_{C\text{−kapacitivnost sistema krogla−podlaga}} V_{\text{kr.}}\,.$$

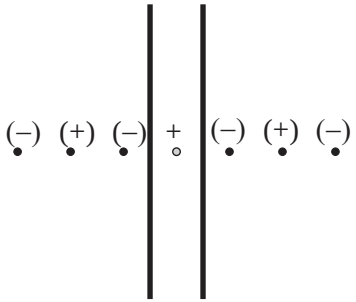
Koliko sumandov bo dovolj za dober rezultat, je odvisno od razmerja $r_0/2h$. Če je krogla blizu tal, gotovo več, sicer pa je dovolj že nekaj prvih sumandov.



Influenčni generator. Pojdimo s prevodno kroglo pod daljnovod, kjer je polje nad tlemi dokaj homogeno; določa naj ga časovna funkcija $E_z(t) = E_{z0}\cos\omega t$. Kroglo povežimo z zemljo prek žice in kovinske palice, ki jo zarinemo v tla. V žici se bo pojavil električni tok. Dobili smo influenčni tokovni generator. Določimo tok iz krogle v tla. Potencial krogle je 0 V, saj je ozemljena. Potencial krogle določajo naboji in kapacitivnost sistema krogla-zemlja ter polje daljnovodnega sistema (potencialni delež neznatnega naboja na sami žici pri tem zanemarjamo),

$$\frac{Q_{\text{kr.}}}{C} + hE_{z0}\cos\omega t = 0\ \text{V} \quad\Rightarrow\quad Q_{\text{kr.}} = ChE_{z0}\cos\omega t \quad\Rightarrow\quad i = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{kr.}}}{\mathrm{d}t} = \omega ChE_{z0}\sin\omega t.$$

Pri jakosti polja 10 kV/m, frekvenci 50 Hz, polmeru krogle 0,5 m in višini 5 m, je amplituda toka v žici približno 9,2 mA. Če v žično povezavo med kroglo in zemljo vključimo ampermeter, bo inštrument ta tok izmeril, če vključimo nepotratno sijalko, bo ta svetila. Energijske zmožnosti takšnega influenčnega generatorja ta hip še ne zmoremo oceniti.

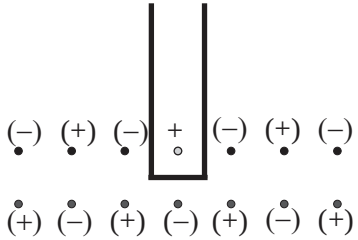


Vodnik med ozemljenima stenama. Imejmo dve vzporedni ozemljeni prevodni steni, ki si stojita na oddaljenosti d, v sredini med njima pa tanek vodnik polmera $a \ll d$. Določimo niz nabojev, ki so potrebni za izračun polja med stenama. Gostota naboja na žici naj je q. Če na levo steno za hip »pozabimo«, potrebujemo izza desne na oddaljenosti d od vodnika naboj $-q$; za ta dva naboja pa leva stena ni ekvipotencialna. Da bo, rabimo izza leve stene naboj $-q$ na oddaljenosti d in naboj q na oddaljenosti $2d$ od vodnika. Z dodatkom teh dveh nabojev se porušijo razmere na desni steni, zato izza nje dodamo naboj q na oddaljenosti $2d$ in naboj $-q$ na oddaljenosti $3d$. Igra se tako nadaljuje. Izrisal se je niz alternirajočih nabojev ($\pm q$) na medsebojnih oddaljenostih d, ki je odgovoren za električno polje med vodnikom in stenama. Določimo

kapacitivnost sistema vodnik-obe steni. Iz potenciala vodnika, ki ga določata radij vodnika, njegova oddaljenost od sten in neskončen produkt števil oblike $(k^2-1)/k^2$, sledi kapacitivnost/m oziroma c:

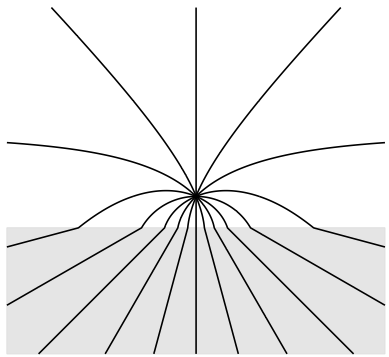
$$V_{\text{vodnika}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\left(\frac{d}{a}\right)\left(\frac{d}{2d}\right)\left(\frac{3d}{2d}\right)\left(\frac{3d}{4d}\right)\left(\frac{5d}{4d}\right)\ldots\right) \cong \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(0{,}637\cdot\frac{d}{a}\right) \;\Rightarrow\; c = \frac{q}{V_{\text{vodnika}}} \cong \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(0{,}637\cdot\frac{d}{a}\right)}.$$

Vodnik v globokem žlebu. Če med prevodni steni iz prejšnjega primera postavimo pod vodnik prevodno dno, dobimo vodnik v globokem žlebu. Razdalje vodnika do vseh sten naj so kar enake. Prejšnji niz nabojev je potrebno nadgraditi z zrcalnim, ki se nahaja pod njim na oddaljenosti d; šele takrat bo tudi dno ekvipotencialna površina. Zapišimo potencial vodnika za ta primer in določimo kapacitivnost:



$$V_{\text{vodnika}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\left(\frac{d}{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2\ldots\right) \cong \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(0{,}585\cdot\frac{d}{a}\right) \;\Rightarrow\; c \cong \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(0{,}585\cdot\frac{d}{a}\right)}.$$

Nepopolno zrcaljenje ... je zrcaljenje, ki se ne zgodi »v celoti«, ampak le delno. Srečamo ga v primeru nabojev, ki so nad dielektričnim polprostorom. Naj je točkast naboj Q na višini h nad dielektrikom z relativno dielektričnostjo ε_r. Z malo več teorije se da pokazati, da je polje **E** nad dielektrikom enako vsoti polj naboja Q in namišljenega naboja $Q_{\text{pol.}} = -\beta Q$, ki bi se nahajal v zrcalni legi na globini h. Faktor β ustreza razmerju $(\varepsilon_\mathrm{r}-1)/(\varepsilon_\mathrm{r}+1)$. Naboj $Q_{\text{pol.}}$ predstavlja učinek vezanih nabojev ob površini dielektrika, katerih porazdelitev $\sigma_{\text{pol.}}$ je do faktorja β podobna porazdelitvi prostih nabojev, če bi bil dielektrik zamenjan s prevodnikom. Ima pa ta naboj tudi učinek na polje v dielektriku. Izkaže se, da je rezultančno polje **E** v dielektriku takšno, kot da bi z mesta originalnega naboja učinkoval naboj $Q + Q_{\text{pol.}} = (1-\beta)Q$. Nadalje dokažimo, da takšna rešitev ustreza mejnima pogojema. Izberimo si neko točko T_+ tik nad dielektrikom in točko T_- tik pod njo, že v dielektriku. Oddaljenosti teh točk do nabojev Q, $-\beta Q$ in $(1-\beta)Q$ sta praktično enaki; to enako oddaljenost označimo s p, $p \geq h$. Izrazimo tangentni komponenti poljske jakosti v obeh točkah:



gostotnice električnega polja premega naboja nad dielektrično podlago

$$E_t(T_+) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 p^2}\frac{\sqrt{p^2-h^2}}{p} + \frac{-\beta Q}{4\pi\varepsilon_0 p^2}\frac{\sqrt{p^2-h^2}}{p} = \frac{(1-\beta)Q}{4\pi\varepsilon_0 p^2}\frac{\sqrt{p^2-h^2}}{p} \quad \text{in} \quad E_t(T_-) = \frac{(1-\beta)Q}{4\pi\varepsilon_0 p^2}\frac{\sqrt{p^2-h^2}}{p}.$$

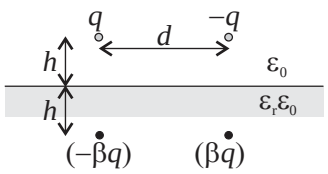
Ujemanje tangentnih komponent električne poljske jakosti ob meji je očitno. Izrazimo v točkah še normalni komponenti gostote električnega pretoka (normala naj je usmerjena iz navzgor dielektričnega polprostora):

$$D_n(T_+) = \varepsilon_0\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 p^2}\frac{h}{p} + \frac{-\beta Q}{4\pi\varepsilon_0 p^2}\frac{h}{p}\right) = -\frac{(1+\beta)Q}{4\pi p^2}\frac{h}{p} \quad \text{in} \quad D_n(T_-) = -\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\frac{(1-\beta)Q}{4\pi\varepsilon_0 p^2}\frac{h}{p} = -\varepsilon_\mathrm{r}\frac{(1-\beta)Q}{4\pi p^2}\frac{h}{p}.$$

Upoštevajoč relacijo $\beta = (\varepsilon_\mathrm{r}-1)/(\varepsilon_\mathrm{r}+1)$, je zagotovljeno tudi ujemanje normalnih komponent gostote električnega pretoka na meji.

11:59

Dvovod nad dielektrično podlago. Za zgled nepopolnega zrcaljenja imejmo dvovod žic polmera a in medosne razdalje $d \gg a$, ki se nahaja na višini h nad dielektričnim polprostorom. Naelektritvi žic naj določata gostoti $\pm q$. Potencial leve žice je do predznaka enak potencialu desne žice:



$$V_\mathrm{leve} = -V_\mathrm{desne} \cong \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a} - \frac{\beta q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{d^2+(2h)^2}}{2h} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{d}{a} - \beta\ln\frac{\sqrt{d^2+(2h)^2}}{2h}\right).$$

Od tu sledi kapacitivnost dvovoda

$$C = \frac{ql}{V_\mathrm{leve} - V_\mathrm{desne}} \cong \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\left(\ln\frac{d}{a} - \beta\ln\frac{\sqrt{d^2+(2h)^2}}{2h}\right)},$$

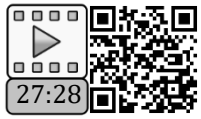
ki je večja, kot če dielektrika ne bi bilo, $\beta = 0$. V skrajnem primeru, ko je $\varepsilon_\mathrm{r} \gg 1 \Rightarrow \beta \cong 1$, je kapacitivnost tolikšna, kot da bi se dvovod nahajal nad prevodno podlago,

$$C \cong \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{2hd}{a\sqrt{d^2+(2h)^2}}}.$$

§18. Električna energija

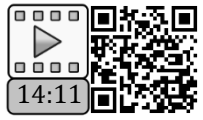
Pojem električna energija smo že omenjali, vendar bolj informativno – le toliko, da smo nanjo opozorili, »odrivali« pa v čas, ko bo na voljo dovolj potrebnega predznanja. Gotovo je delo električne sile pojem, ki se najtesnje dotika električne energije. Šele njena razjasnitev bo pretekle razdelke ustrezno pojasnila in jim dala potrebno veljavo. Na pravo mesto bo postavila tako Coulombovo silo, s katero smo razpravo o elektrostatiki začeli, kot tudi pomen električnega polja, ki je odločilno zaznamovalo dosedanja opravila. Začnimo z lažjimi vprašanji!

Elektritev prevodnega telesa. V elektrotehniki je prevodno telo najpogostejše mesto presežne množine naboja; nahaja se tik pod površino do globine nekaj atomov. V praksi se elektritev vrši s pomočjo tokovnih ali napetostnih virov, ni pa to edini način. Za začetek imejmo nevtralno prevodno telo, ki z oddaljeno okolico oblikuje sistem s kapacitivnostjo C. Naj bo elektritev sledeča. V telo usmerimo curek naelektrenih delcev, katerih kinetične energije naj so tolikšne, da ga ravno še dosežejo. V času elektritve se spreminja množina naboja na telesu, z njo pa tudi električni potencial telesa. Naj je $Q_{\text{konč.}}$ končna množina naboja, ki je na telo prispela do zaključka elektrenja. Če je bila v določenem trenutku elektritve množina že prispelega naboja Q, je bil električni potencial V telesa takrat enak ravno Q/C. Ko »tik za tem« prispe na telo naboj $\mathrm{d}Q$, pridobi ta potencialno energijo $\mathrm{d}QV = (Q/C)\mathrm{d}Q$, ki je številsko enaka delu $\mathrm{d}A_{\mathrm{z}}$ zunanje sile, ki je delcu s tem nabojem dala potrebno kinetično energijo, da je prispel na telo: $\mathrm{d}A_{\mathrm{z}} = (Q/C)\mathrm{d}Q$. Delo zunanje sile za prihod vseh diferencialnih nabojev na telo je enaka integralu



$$A_{\mathrm{z}} = \int_0^{Q_{\text{konč.}}} \mathrm{d}A_{\mathrm{z}} = \frac{1}{C}\int_0^{Q_{\text{konč.}}} Q\mathrm{d}Q = \frac{Q_{\text{konč.}}^2}{2C}.$$

Razlektritev prevodnega telesa. Izkušnjo imamo, da se naelektreno telo prej ko slej razelektri. Omislimo si »scenarij«, in sicer, da naboji s telesa odhajajo zaradi odbojnih sil med istorodnimi naboji na telesu. Naj je pred začetkom procesa



razelektrenja na telesu naboj $Q_{\text{zač.}}$, in nadalje še, da je do nekega trenutka s telesa že odšlo Q naboja. V tistem trenutku je telo imelo še $(Q_{\text{zač.}} - Q)$ naboja in potencial $(Q_{\text{zač.}} - Q)/C$. Ko »tik za tem« odide naboj $\mathrm{d}Q$, ga bo preostali naboj odrival, pospeševal in mu do nekje daleč stran povečal kinetično energijo, ki bo številsko enaka njegovi potencialni energiji tik pred odhodom, oziroma delu, ki ga je za to opravila električna sila, $\mathrm{d}A_{\mathrm{e}} = ((Q_{\text{zač.}} - Q)/C)\mathrm{d}Q$. Proces odhodov nabojev se odvija, dokler naboj na telesu ne usahne. Coulombova sila je v procesu razelektritve opravila delo, ki je enako integralu

$$A_{\mathrm{e}} = \int_0^{Q_{\text{zač.}}} \mathrm{d}A_{\mathrm{e.}} = \frac{1}{C}\int_0^{Q_{\text{zač.}}} (Q_{\text{zač.}} - Q)\mathrm{d}Q = \frac{Q_{\text{zač.}}^2}{2C}.$$

Električna energija. Tokrat oba procesa, elektrenje in razelektritev, »povežimo«, in sicer, da procesu elektrenja sledi proces razelektritve, da je končni naboj ($Q_{\text{konč.}}$) enak naboju na začetku procesa razelektrenja ($Q_{\text{zač.}}$). Iz predhodnih izrazov sledi razvidna enakost,

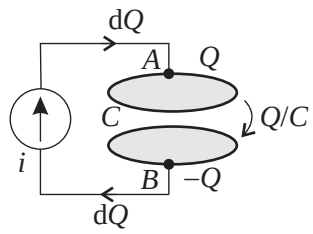
$$A_{\mathrm{z}} = \left.\frac{Q_{\text{konč.}}^2}{2C}\right|_{Q_{\text{konč.}}=Q_{\text{zač.}}} = \frac{Q_{\text{zač.}}^2}{2C} = A_{\mathrm{e}}.$$

Vloženo delo zunanjih sil ob elektritvi se je pri razelektitvi v celoti »prelilo« v kinetično energijo naelektrenih delcev. To pomeni, da se je ob elektrenju vzpostavljal sistem, ki je prejemal in sprejel določeno množino energije, ter jo kasneje, ob razelektrenju, oddajal in v celoti oddal. Tej energiji, ki se je v sistemu postopoma »kopičila« in v nadaljevanju postopoma »kopnela«, rečemo električna energija W_{e}. O njej trenutno še nič ne vemo, vemo le, da jo lahko sistemu nabojev v vsakem trenutku pripišemo in ovrednotimo z izrazi

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2}.$$

Govorimo o energiji, ki je v danem trenutku t v sistemu akumulirana, ne vemo pa, kje ta energija je, kje je je več, kje je je manj, itn? Odpira se kar nekaj vprašanj, na katera bo potrebno odgovoriti. Tudi se ne ukvarjamo časovnimi funkcijami $W_{\mathrm{e}} = W_{\mathrm{e}}(t)$, $Q = Q(t)$ in $V = V(t)$; te so gotovo odvisne od dinamik elektritve in razelektritve. Zadnja oblika $(CV^2/2)$

zapisa akumulirane energije spominja na sorodne izraze v fiziki: za kinetično energijo ($mw^2/2$) telesa ali prožnostno energijo ($kx^2/2$) vzmeti.



Elektritev kondenzatorja. Naj telesi A in B oblikujeta kondenzator s kapacitivnostjo C. Med predhodno nevtralni telesi priključimo tokovni vir, ki z intenzivnostjo i črpa naboj s telesa B in ga potiska na telo A. Naj je v trenutku t na telesu A naboj Q, na telesu B pa njemu nasproten naboj $-Q$. V tem trenutku je med telesoma napetost $u = Q/C$. Naj v naslednjem intervalu dt prenese generator iz telesa B na telo A naboj $\mathrm{d}Q = i\mathrm{d}t$. Vir opravi pri tem delo $\mathrm{d}A_\mathrm{g} = \mathrm{d}Qu = (Q/C)\mathrm{d}Q$, med trenutkoma $t_1$in t_2 pa delo

$$A_\mathrm{g}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}A_\mathrm{g} = \int_{t_1}^{t_2} (Q/C)\mathrm{d}Q = \frac{Q^2(t_2)}{2C} - \frac{Q^2(t_1)}{2C} = \frac{Cu^2(t_2)}{2} - \frac{Cu^2(t_1)}{2}.$$

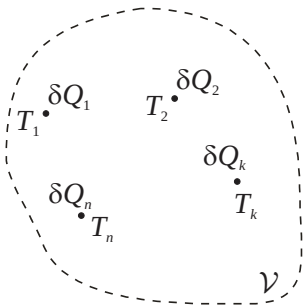
Zapis je dovolj splošen in ponuja v razmislek več možnosti – tudi takšni, ki spominjata na elektrenje in razelektrenje prevodnega telesa iz začetka razdelka. Če je $t_1$trenutek, ko je kondenzator razelektren, brez naboja, in t_2 trenutek, do katerega generator prenese naboj Q, da ima telo A naboj Q, telo B pa naboj $-Q$, potem je delo, ki ga je generator pri tem opravil, enako $Q^2/2C$. Če bi se v nadaljevanju toku vira spremenil predznak, da bi generator črpal naboj s telesa A nazaj na telo B, dokler ne postaneta telesi nevtralni, bi vir opravil delo $-Q^2/2C$, kar pomeni, da bi vir prejel toliko energije, kot je pred tem opravil dela, da je kondenzator naelektril z nabojema $\pm Q$. Tudi ta primera nas navajata na misel, da se je delo vira akumuliralo v energijo sistema naelektrenih teles, kasneje pa se je ta vrnila nazaj v vir. Govorimo o reverzibilnem procesu. Kondenzator očitno predstavlja sistem, ki je zmožen sprejeti energijo, jo zadržati in jo ob primerni priliki vrniti istemu ali drugim sistemom, ki so v povezavi z njim. Po tem razmisleku moremo delo vira med zaporednima trenutkoma zapisati tudi takole:

$$A_\mathrm{g}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}A_\mathrm{g} = \frac{Q^2(t_2)}{2C} - \frac{Q^2(t_1)}{2C} = W_\mathrm{e}(t_2) - W_\mathrm{e}(t_1),$$

pri čemer je delo vira enako razliki električnih energij, ki ju določa zapis

$$W_{\mathrm{e}}(t) = \frac{Q^2(t)}{2C} = \frac{Q(t)u(t)}{2} = \frac{Cu^2(t)}{2}.$$

Oba primera, tako elektrenje in razelektritev prevodnega telesa kot elektrenje in razelektritev kondenzatorja s pomočjo vira, sta idealizirana, kajti izmenjava energije nikoli ne poteka idealno, brez energijskih izgub. Končno se tudi izmenjava energije med utežjo in vzmetjo, ko sta v igri kinetična prve in prožnostna druge, ne vrši idealno, sporoča pa, da je vzmet zmožna energijo sprejeti in jo oddati in enako tudi utež, jo oddati in kasneje sprejeti, da sta utež in vzmet podsistema, ki sta zmožna energijo spreje(ma)ti in jo tudi odda(ja)ti.



Elektritev prostora. Krajša zgleda elektrenja in razelektritve sta posebna primera, iz katerih si še ne moremo dovoliti posplošitve: kako je z energijo v primeru poljubne porazdelitve naboja v prostoru? – In prav to bo naše novo vprašanje. Naj je $\mathcal{V}$ prostor, v katerega zunanja sila dostavlja naboje. Za te prvi hip privzemimo, da so točkasti, npr. $\delta Q_1, \delta Q_2, \ldots, \delta Q_n$, katerih iznosi so primerno majhni – da se bo dalo kasneje, z limitama $n \to \infty$ in $\delta Q_k \to 0$, približati makroskopsko zvezni elektritvi prostora. Naj je $\mathcal{V}$ v začetku prazen. Zunanja sila za vnos naboja δQ_1 do točke T_1 ne opravi dela. Za vnos naboja δQ_2 do točke T_2 opravi delo $\delta A_{\mathrm{z}2} = \delta Q_2 \delta V_1(T_2)$, ki je številsko enako pridobljeni potencialni energiji – pri tem pomeni $\delta V_1(T_2)$ potencial prvega na mestu drugega naboja. Ob vnosu k-tega opravi zunanja sila delo

$$\delta A_{\mathrm{z}k} = \delta Q_k(\delta V_1(T_k) + \delta V_2(T_k) + \cdots + \delta V_{k-1}(T_k)),$$

pri vnosu zadnjega pa delo

$$\delta A_{\mathrm{z}n} = \delta Q_n(\delta V_1(T_n) + \delta V_2(T_n) + \cdots + \delta V_{n-1}(T_n)).$$

Celotno opravljeno delo za elektritev prostora je enako vsoti del,

$$A_{\mathrm{z}} = \sum_{k=1}^{n} \delta A_{\mathrm{z}k} = \sum_{k=1}^{n} \delta Q_k \sum_{j=1}^{k-1} \delta V_j(T_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \delta Q_k \delta V_j(T_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\delta Q_k \delta Q_j}{4\pi\varepsilon_0 R_{jk}},$$

kjer pomeni R_{jk} razdaljo med nabojema j in k.

Zapis dela A_z kot vsote vseh možnih mešanih členov sporoča, da za delo ni pomemben vrstni red »prihodov«. Enako velja tudi v primeru, ko bi nabojem, zaradi sil med njimi, dopustili »odhode«. Delo električnih sil bi bilo enako prejšnjemu delu zunanjih sil, oboje pa med obema procesoma akumulirani električni energiji, $A_\mathrm{e} = A_\mathrm{z} = W_\mathrm{e}$. Slednje bi, pri odhajanju v enakem vrstnem redu kot pri prihajanju, zapisali takole:

$$A_\mathrm{e} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \delta Q_k \delta V_j(T_k) = A_\mathrm{z} = W_\mathrm{e}.$$

Z združitvijo obeh vsot dobimo

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \delta Q_k \delta V_j(T_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \delta Q_k \delta V_j(T_k) \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \delta Q_k \left(\sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} \delta V_j(T_k) \right).$$

Za konec ostaja še limitni postopek, ko gresta $n \to \infty$ in $\delta Q_k \to 0$, ko se želimo z njim približati makroskopsko zveznemu elektrenju prostora. Če bodo naboji vse manjši, bodo vse manjši tudi potencialni prispevki, kakor tudi prispevek $\delta V_k(T_k)$, ki v vsoti potencialnih prispevkov manjka. Izostaja lastni prispevek, ki je (ob predstavi točkastega naboja kot krogelnega oblaka) navzgor omejen s kvadratom njegovega radija, ki prav tako limitira k nič. Od tod sledi:

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta Q_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \delta Q_k \left(\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta Q_k \to 0}} \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} \delta V_j(T_k) \right) = \frac{1}{2} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta Q_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \delta Q_k V(T_k) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} V(T) \mathrm{d}Q(T) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} V \mathrm{d}Q.$$

Ugotavljamo, da akumulirano električno energijo daje polovička produkta naboja in potenciala na njegovem mestu, ko integracija »obišče« vse naboje v prostoru $\mathcal{V}$.

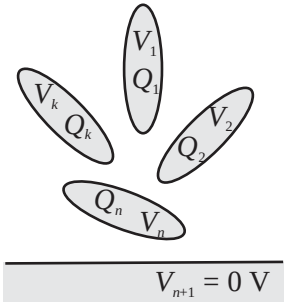
Opravimo ta postopek pri kondenzatorju. Naboj Q je na telesu A s potencialom V_A, naboj $-Q$ je na telesu B s potencialom V_B. Ko integracija obišče telo A (površino $\mathcal{A}$) s potencialom V_A, in zatem še telo B (površino $\mathcal{B}$) s potencialom V_B, sledi

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} V \mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} V_A \mathrm{d}Q + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} V_B \mathrm{d}Q = \frac{1}{2}(V_A Q + V_B(-Q)) = \frac{1}{2} Q(V_A - V_B) = \frac{1}{2} Q u$$

oziroma rezultat, kot ga poznamo iz razmišljanja o elektrenju kondenzatorja s tokovnim virom.

9:40

Energija v sistemu naelektrenih teles. To je primer, ki je v elektrotehniki najbolj pogost: srečujemo ga pri telesih ali vodnikih nad zemljo ali pri vodnikih v oklopljenih strukturah. Naj so naboji Q_1, Q_2, ... , Q_n na telesih s potenciali V_1, V_2, ... , V_n, naboj $Q_{n+1} = -Q_1 - Q_2 - \cdots - Q_n$ pa na zemlji oziroma oklopu s potencialom $V_{n+1} = 0$ V. Ko z integracijo preletimo vsa telesa, sledi:



$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathcal{A}_1} V_1 \mathrm{d}Q + \int_{\mathcal{A}_2} V_2 \mathrm{d}Q + \cdots + \int_{\mathcal{A}_n} V_n \mathrm{d}Q + \int_{\mathcal{A}_{n+1}} V_{n+1} \mathrm{d}Q\right) = \frac{1}{2}(V_1 Q_1 + V_2 Q_2 + \cdots + V_n Q_n).$$

Rezultat je preprost: pomembni so naboji in potenciali teles, opozoriti pa moramo, da vsak sumand zase nič ne pomeni. Zakaj? Ne moremo namreč reči, da k-ti sumand pripada »energiji« k-tega telesa, saj bi bilo to krivično do $(n+1)$-ega, ki ni brez naboja, pa tudi njegov izhodiščni potencial $V_{n+1} = 0$ V ni argument, če vemo, da je električni potencial definiran na podlagi izbire referenčnega mesta. Primeri se tudi lahko, da je kak od sumandov v vsoti negativen in smo zaradi tega v zadregi. Vsi ti zlobni primeri kažejo na to, da ima edini pravi pomen le vsota, torej W_e. Poglejmo, kako je zgornjo vsoto v luči delnih kapacitivnosti. Da bo pisanja manj, si izberimo dvožilni oklopljen kabel, $V_3 = 0$ V. Modelno vezje tvorijo trije kondenzatorji, en z medžilno kapacitivnostjo in dva s kapacitivnostma žil do oklopa:

$$\begin{aligned} W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}(V_1 Q_1 + V_2 Q_2) &= \frac{1}{2}V_1\big(C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3)\big) + \frac{1}{2}V_2\big(C_{21}(V_2 - V_1) + C_{23}(V_2 - V_3)\big) = \\ &= \frac{1}{2}C_{12}(V_1 - V_2)^2 + \frac{1}{2}C_{13}(V_1 - V_3)^2 + \frac{1}{2}C_{23}(V_2 - V_3)^2 = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}C_{12}u_{12}^2}_{W_{\mathrm{e}12}} + \underbrace{\frac{1}{2}C_{13}u_{13}^2}_{W_{\mathrm{e}13}} + \underbrace{\frac{1}{2}C_{23}u_{23}^2}_{W_{\mathrm{e}23}}. \end{aligned}$$

Končna vsota je precej drugačna: vsoto tvorijo le nenegativni sumandi, ki – na nivoju modela – pomenijo energije v treh elektrostatičnih sistemih. Če med seboj povežemo tri kondenzatorje s kapacitivnostmi C_{12}, C_{23} in C_{13} ter vezje na enega od možnih načinov priključimo na vir, se ti naelektrijo, imajo napetosti u_{12}, u_{23} in u_{13} in tudi svoje energije.

Gostota električne energije. Ostaja vprašanje, kje je energija, ki jo vrednoti zapis

23:00

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} V\mathrm{d}Q,$$

kje je te energije več, kje manj, kje nič? Odgovor na to da nova količina: gostota električne energije. Še tretjič se vrnimo h kondenzatorju, sistemu dveh prevodnih teles: telo A naj ima potencial V_A in naboj Q, telo B pa potencial V_B in naboj $-Q$. Energija sistema je $Qu/2$. Med telesoma si omislimo $n-1$ ekvipotencialk s potenciali V_1, V_2, ... , V_k, ... V_{n-1} in napetostmi oziroma potencialnimi razlikami δu_1, δu_2, ... , δu_k, ... δu_n. Te ekvipotencialke virtualno okovinimo. Na njihovih površinah se zgodi influenca: na površinah, ki so obrnjene k telesu A, se influirajo naboji $-Q$, na površinah, ki so obrnjene k telesu B, pa naboji Q. Od prej vemo, da okovinjanje ne spremeni polja, in da pari nabojev $\pm Q$ med sosednjimi ekvipotencialkami predstavljajo n avtonomnih sistemov. Ovrednotimo energijo:

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} V\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}(QV_A + (-Q+Q)V_1 + (-Q+Q)V_2 + \cdots + (-Q+Q)V_{n-1} + (-Q)V_B) =$$

$$= \overbrace{\frac{1}{2}Q\underbrace{(V_A - V_1)}_{\delta u_1}}^{\delta W_\mathrm{e1}} + \overbrace{\frac{1}{2}Q\underbrace{(V_1 - V_2)}_{\delta u_2}}^{\delta W_\mathrm{e2}} + \cdots + \overbrace{\frac{1}{2}Q\underbrace{(V_{n-2} - V_{n-1})}_{\delta u_{n-1}}}^{\delta W_{\mathrm{e}n-1}} + \overbrace{\frac{1}{2}Q\underbrace{(V_{n-1} - V_B)}_{\delta u_n}}^{\delta W_{\mathrm{e}n}} = \frac{1}{2}Q\sum_{k=1}^{n}\delta u_k = \frac{1}{2}Qu.$$

Akumulacija energije se z okovinjanjem očitno ni spremenila, še vedno je enaka $Qu/2$. Če na začetku še nismo poznali odgovora, kje je energija, nam sedaj razcep na n energij sporoča, da je energija v teh avtonomnih sistemih, v dolgem nizu n kondenzatorjev, da je potemtakem v prostoru med telesoma A in B tako sedaj kot tudi že pred okovinjanjem. Če bi se v prvem prostoru zgodila razelektritev, npr. z dotikom telesa A s prvo okovinjeno ekvipotencialko, bi v ostalih prostorih ostalo polje nespremenjeno (avtonomnost), nova energija pa bi bila manjša ravno za člen δW_e1.

Kaj spoznavamo? Virtualno okovinjanje je razmislek o energiji preusmerilo v prostor, kjer so sile in polje, po novem pa je tam tudi energija. Če je energijo W_e mogoče razumeti kot porazdeljeno v nizu n kondenzatorjev, je novo vprašanje, kako

je s porazdelitvijo energije v k-tem kondenzatorju. Družini ekvipotencialk pridružimo še družino cevk, ki celoten pretok $\phi_\mathrm{e} = Q$ zberejo v m cevk s pretoki $\delta\phi_{\mathrm{e}1}$, ... $\delta\phi_{\mathrm{e}j}$, ... $\delta\phi_{\mathrm{e}m}$. Celotno energijo v kondenzatorju zapišemo takole:

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q\delta u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \delta u_k \sum_{j=1}^{m} \delta\phi_{\mathrm{e}j} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \delta u_k \delta\phi_{\mathrm{e}j}.$$

Indeksni par (j, k) določa izsek v j-ti cevki, ki leži med $(k-1)$-vo in k-to ekvipotencialko. Če sta n in m zelo veliki števili, so ti izseki majhne prizme; splošna, z indeksoma j in k, ima vektor osnovnice $\delta\mathbf{a}_{jk}$ in vektor višine $\delta\mathbf{l}_{jk}$ ter prostornino $\delta v_{jk} = \delta\mathbf{a}_{jk} \cdot \delta\mathbf{l}_{jk}$. Vsled majhnosti prizem moremo delni pretok in delno napetost zapisati približno kot

$$\delta\phi_{\mathrm{e}j} \cong \mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{a}_{jk} \quad \text{in} \quad \delta u_k \cong \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{l}_{jk},$$

produkt, $\delta u_k \delta\phi_{\mathrm{e}j}$ pa kot

$$\delta u_k \delta\phi_{\mathrm{e}j} \cong \left(\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{a}_{jk}\right)\left(\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{l}_{jk}\right) = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\left(\delta\mathbf{a}_{jk} \cdot \delta\mathbf{l}_{jk}\right) = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\delta v_{jk}.$$

Ker so trije od štirih vektorjev kolinearni, jih smemo poljubno premeščati; izbiremo tisto obliko, ki »spoji« geometrijska oziroma poljska vektorja. V limiti, ko stremita n in m k neskončnosti, se dvojna vsota, ki preleti vse prizme med telesoma A in B, bliža integralu po prostoru, kjer je polje:

$$W_\mathrm{e} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\delta v_{jk} = \int_{\mathcal{V}} \tfrac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\mathrm{d}v.$$

Podintegralska funkcija je ravno tisto, kar smo iskali, gostota električne energije:

$$w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \quad \Rightarrow \quad W_\mathrm{e} = \int_{\mathcal{V}} w_\mathrm{e}\mathrm{d}v.$$

Gostota energije daje točen odgovor: kjer je polje močnejše, je tudi več energije. V elektrostatiki je polje v prevodnikih enako nič, zato tam tudi ni energije. Precej bolj zagonetno pa je vprašanje: kako na določeno mesto v prostoru energija sploh pride, če že ugotavljamo, da tam je. Tega odgovora nam elektrostatika ne da; za to potrebujemo še magnetiko in elektrodinamiko.

Dielektrik in energija. V dosedanjih primerih elektrenja, ob katerih smo govorili o energiji in delu, nismo eksplicitno izpostavljali izolanta, dielektrika. Vsakokrat bi bilo lahko v bližini tudi poljubno izolacijsko telo, da je le linearno – da sta si jakost polja in polarizacija sorazmerna. To pomeni, da moremo rezultat za gostoto energije uporabiti tudi v prostorih, ki jih zapolnjujejo različni linearni dielektriki. Gostoto energije zapisujemo v sledečih različicah:

$$w_\mathrm{e} = \tfrac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \varepsilon E^2/2 = D^2/2\varepsilon.$$

Gostoto energije v dielektriku moremo razcepiti v dva dela,

$$w_\mathrm{e} = \varepsilon E^2/2 = \varepsilon_0 E^2/2 + \varepsilon_0\chi_\mathrm{e}E^2/2,$$

Prvi sumand pomeni gostoto energije v »praznem« prostoru, drugi del pa gostoto polarizacijske energije v dielektriku, ki se kaže v zasuku dipolov in v raztegu dipolnih ($\pm$) parov oziroma v raztegu »električnih vzmeti«. Pri dielektrikih visoke susceptibilnosti je večina energije shranjene ravno v teh električnih vzmeteh.

Nelinearno elektrenje. V primeru, ko je odnos med poljem **E** in polarizacijo **P** oziroma gostoto električnega pretoka **D** nelinearen, so razmere povsem drugačne. Pri kondenzatorju s takšnim izolantom se ta anomalija kaže tudi v odnosu med Q in u, ki tokrat ni linearen, temveč funkcijski, da je $u = f(Q)$. Vir, ki elektri takšen kondenzator, opravi v intervalu časa delo, ki ustreza energijskemu vložku za elektrenje,

$$A_\mathrm{g}(t_1, t_2) = W_\mathrm{elek.}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u\mathrm{d}Q.$$

Take energijske procese srečamo v časovno hitro spreminjajočih električnih poljih. Njihova posebnost je v tem, da niso reverzibilni, da je vrnjena energija manjša od vložene; razlika se izraža kot toplota. Ta efekt se izkorišča v mikrovalovni pečici, pri dielektričnem segrevanju, pri varjenju plastik ... . – Podobne energijske procese bomo srečali tudi v magnetiki (bolj znane kot histerezne izgube). Funkcijska zveza $u = f(Q)$ ni eksaktna, ampak empirična in je pogojena z dinamiko. Pri hitro spreminjajočih poljih se dogaja to, da polarizacija ne sledi polju, ampak kasni. Model kasnjenja naboja (pretoka

oziroma polarizacije) za napetostjo (poljsko jakostjo) v izmeničnih razmerah aproksimativno opišeta fazno zamaknjeni sinusni funkciji $u(t) = U_\mathrm{m} \sin \omega t$ in $Q(t) = Q_\mathrm{m} \sin(\omega t - \alpha)$. Maksimum naboja fazno zaostaja za maksimumom napetosti za kot α. Izračunajmo vloženo energijo v kondenzator s takšnim dielektrikom v času ene periode, $T = 1/f = 2\pi/\omega$:

$$W_\mathrm{elek.}(t_1, t_1 + T) = \int_{t_1}^{t_1+T} u\mathrm{d}Q = \omega U_\mathrm{m} Q_\mathrm{m} \int_{t_1}^{t_1+T} \sin \omega t \cos(\omega t - \alpha)\, \mathrm{d}t = \pi U_\mathrm{m} Q_\mathrm{m} \sin \alpha.$$

Vložena energija se manifestira kot toplota; govorimo o povprečni moči dielektričnih izgub:

$$P_\mathrm{diel.} = \frac{W_\mathrm{elek.}(t_1, t_1 + T)}{T} = \pi f U_\mathrm{m} Q_\mathrm{m} \sin \alpha = \tfrac{1}{2} \omega U_\mathrm{m} Q_\mathrm{m} \sin \alpha.$$

Dodatna okoliščina je še dejstvo, da je frekvenčno odvisen tudi kot zaostajanja, $\alpha = \alpha(\omega)$. Poleg dielektričnih obstajajo še toplotne izgube kot posledica izolacijskega toka v izolantu.

Če v energijski vložek $W_\mathrm{elek.}(t_1, t_2)$, ki ga določa integral $u\mathrm{d}Q$ med časoma t_1 in t_2, vstopimo s shemo ekvipotencialk in pretočnih cevk (enako kot pri električni energiji), dobimo za gostoto energijskega vložka $w_\mathrm{elek.}(t_1, t_2)$ integral,

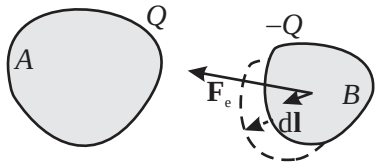
$$W_\mathrm{elek.}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u\mathrm{d}Q = \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\left(\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}_t \mathbf{D} \right)}_{w_\mathrm{elek.}(t_1, t_2)} \mathrm{d}v.$$

Diferencial $\mathrm{d}_t \mathbf{D} = (\partial \mathbf{D}/\partial t)\mathrm{d}t$ je časovni diferencial vektorja $\mathbf{D}$. Na tem mestu bomo s to obliko integracije zaključili, bolj pa se ji bomo posvetili pri procesu nelinearnega magnetenja feromagnetnih snovi. Govorili bomo o histereznih izgubah, ki pridejo v transformatorjih in motorjih do izraza že pri omrežni frekvenci (50 Hz).

§19. Gibalni procesi v elektrostatičnem polju

31:11

Razdelek posvečamo premikom prevodnih in dielektričnih objektov v luči sile, dela in energije. Teh pojmov smo se tudi sicer vseskozi dotikali, govorili smo o delcu v električnem polju, o delu električne sile, električni napetosti in potencialu, o interakcijah polje – prevodnik in polje – izolant, o tlaku na površini prevodnika, o delu vira in energiji za elektrenje ter električni energiji, v tem razdelku pa bo prilika, da te še čvrsteje povežemo in spregovorimo o interakciji elektrostatično polje – neelektrični sistem. Začeli bomo s preprostimi primeri, tem pa bomo postopoma dodajali nove okoliščine.



Premik v avtonomnem sistemu. Kot avtonomni sistem razumemo sistem brez virov. Tej okoliščini ustrezajo primeri naelektrenih teles, ki imajo v bližini tudi dielektrične objekte. Najenostavnejši je kondenzator, primer dveh naelektrenih teles, telesa A z nabojem Q in telesa B z nabojem $-Q$. Sila $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ med njima je privlačna. Privzemimo, da je telo A trdno vpeto, telesu B pa pod vplivom te sile dopuščamo premik $\delta\mathbf{l}$. Ta se zgodi vzdolž sile, če pa je ob njem ovira, poševna pregrada, se zgodi premik tangentno ob njej. Ob premiku $\delta\mathbf{l}$ opravi električna sila delo $\delta A_\mathrm{e} = \mathbf{F}_\mathrm{e}\cdot\delta\mathbf{l}$. Če ni drugih dejavnikov, gre delo v vsakem primeru na račun zmanjšanja električne energije $W_\mathrm{e} = Q^2/2C$. Res je: če se telesi zbližata, se kapacitivnost C poveča, napetost u se zmanjša in za δW_e se spremeni tudi akumulirana energija,

$$\delta A_\mathrm{e} + \delta W_\mathrm{e} = \mathbf{F}_\mathrm{e}\cdot\delta\mathbf{l} + \delta W_\mathrm{e} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F}_\mathrm{e}\cdot\delta\mathbf{l} = -\delta W_\mathrm{e},$$

opravljeno delo je enako upadku akumulirane energije. Velja tudi obratno: če zunanja sila $\mathbf{F}_\mathrm{z}$ telo B oddalji od telesa A, se zmanjša kapacitivnost, zunanja sila pa opravi delo $\delta A_\mathrm{z} = -\delta A_\mathrm{e}$, ki se odrazi v porastu akumulirane energije: $\delta W_\mathrm{e} = \delta A_\mathrm{z}$. Določimo še silo $\mathbf{F}_\mathrm{e} = \left(F_{\mathrm{e}x}, F_{\mathrm{e}y}, F_{\mathrm{e}z}\right)$. Oviro postavimo tako, da se lahko telo B pomakne le vzdolž osi X, npr. za δx. Pišimo:

$$\mathbf{F}_\mathrm{e}\cdot\delta\mathbf{l} = \left(F_{\mathrm{e}x}, F_{\mathrm{e}y}, F_{\mathrm{e}z}\right)\cdot(\delta x, 0, 0) = F_{\mathrm{e}x}\delta x = -\delta W_\mathrm{e} \quad\Rightarrow\quad F_{\mathrm{e}x} = -\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta W_\mathrm{e}}{\delta x} = -\frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial x}.$$

Podobno storimo še za ostali komponenti,

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = \left(F_{\mathrm{e}x}, F_{\mathrm{e}y}, F_{\mathrm{e}z}\right) = -\left(\frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial x}, \frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial y}, \frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial z}\right).$$

Če poznamo odvisnost kapacitivnosti od lege telesa B glede na telo A, torej $C = C(x, y, z)$, je

$$F_{\mathrm{e}x} = -\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x} = \cdots = \tfrac{1}{2}u^2\frac{\partial C}{\partial x}$$

in podobno tudi ostali komponenti; u je napetost med telesoma v legi, v kateri določamo silo.

Če se vrnemo na začetek, k torzijski tehtnici, s katero je Coulomb meril električno silo med naelektrenima kroglicama in potrdil kvadratično zakonitost, kot jo poznamo, potem po opisanem zaključujemo, da je v ozadju električne sile dejansko električna energija oziroma energija električnega polja, ki je v prostoru okoli naelektrenih teles. Preverimo to na primeru simetričnega dvovoda. Kapacitivnost dvovoda poznamo,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{d-e}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{d+\sqrt{d^2-4a^2}}{2a}} \quad \text{pri} \quad e = \tfrac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2-4a^2}\right).$$

Če dopuščamo, da se ena žica približa drugi, da se spremeni medosna razdalja d, potem je

$$F_{\mathrm{e}d} = -\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}d} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(\frac{(ql)^2}{2C}\right) = -\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\left(\ln\frac{d+\sqrt{d^2-4a^2}}{2a}\right) = -\frac{q^2 l/2\pi\varepsilon_0}{\sqrt{d^2-4a^2}} = -\frac{q^2 l/2\pi\varepsilon_0}{(d-2e)}.$$

Resnično: namišljena naboja, ki sta si vsaksebi za $d - 2e$, sta primeren model tudi za silo; minus govori o privleku.

Premik v sistemu z virom. Začnimo s sistemom dveh prevodnih teles, med katera je priključen vir z napetostjo u. Sila med njima je privlačna. Ob premiku telesa B k telesu A za $\delta\mathbf{l}$ opravi sila $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ delo $\delta A_{\mathrm{e}} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}} \cdot \delta\mathbf{l}$, poveča se kapacitivnost in skozi vir steče dodaten naboj δQ, ki poveča naelektritvi na $\pm(Q + \delta Q)$; poveča se energija in vir opravi delo $\delta A_{\mathrm{g}} = \delta Q u$,

$$\delta A_{\mathrm{e}} + \delta W_{\mathrm{e}} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}} \cdot \delta\mathbf{l} + \overbrace{\tfrac{1}{2}(Q+\delta Q)u - \tfrac{1}{2}Qu}^{\delta W_{\mathrm{e}}} = \delta A_{\mathrm{g}} = \overbrace{\delta Q u}^{2\delta W_{\mathrm{e}}} \quad \Rightarrow \quad \delta A_{\mathrm{e}} = \delta W_{\mathrm{e}} \quad \text{in} \quad \mathbf{F}_{\mathrm{e}} \cdot \delta\mathbf{l} = \delta W_{\mathrm{e}}.$$

Povečanje akumulacije je enako delu za premik. Ko vir opravi delo dveh joulov, gre joul za premik in joul za akumulacijo. Velja tudi obratno: če zunanja sila $\mathbf{F}_{\mathrm{z}}$ telo B odmakne od telesa A, opravi delo $\delta A_{\mathrm{z}} = -\delta A_{\mathrm{e}}$ in za toliko se zmanjša tudi

akumulacija energije, $\delta W_\mathrm{e} = \delta A_\mathrm{e} = -\delta A_\mathrm{z}$, vir pa prejme energijo $2\delta A_\mathrm{z}$. Relacija med silo in energijo se tokrat razlikuje le v predznaku,

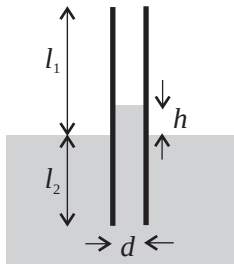
$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = \left(F_{\mathrm{e}x}, F_{\mathrm{e}y}, F_{\mathrm{e}z}\right) = \left(\frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial x}, \frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial y}, \frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial z}\right).$$

Pri znani funkciji kapacitivnosti $C = C(x, y, z)$ sledijo tudi komponente sile; prva je

$$F_{\mathrm{e}x} = \frac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}Cu^2\right) = \tfrac{1}{2}u^2\frac{\partial C}{\partial x}$$

in podobno tudi ostali dve.

Obravnavajmo še ploščni kondenzator, ki je delno potopljen v olje z relativno dielektričnostjo ε_r. Prvič sta plošči delno pokončno potopljeni, drugič pa je vodoravno potopljena le ena plošča. Ako je razmik d med ploščama nespremenljiv, je premik olja edina možnost gibalnega procesa. Obakrat se namreč gladina olja med ploščama rahlo dvigne: do višine h, ki jo določa ravnovesje električne sile in sile težnosti. Gladino olja med ploščama smatrajmo kot ravno, čeravno vemo, da zaradi površinske napetosti olje ne omoči plošč pod pravim kotom, in tudi polje med ploščama ni povsem homogeno.



POKONČNI PLOŠČI. Razmere lahko interpretiramo kot vezje dveh vzporednih kondenzatorjev, ki imata plošče dolžine l (v list) in višin $l_1 - h$ in $l_2 + h$:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 l(l_1 - h)}{d} \quad \text{in} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} l(l_2 + h)}{d} \;\Rightarrow\; C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 l}{d}\big((l_1 - h) + \varepsilon_\mathrm{r}(l_2 + h)\big).$$

Odvod kapacitivnosti po h da dvižno električno silo

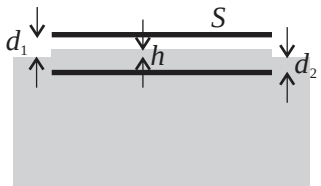
$$F_{\mathrm{e}h} = \tfrac{1}{2}u^2\frac{\partial C}{\partial h} = \tfrac{1}{2}u^2\frac{\varepsilon_0 l(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)}{d} = \tfrac{1}{2}\frac{(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}\left(\frac{u}{d}\right)^2 ld = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)E_t^2 ld$$

in tlak oziroma ploskovno silo, ki dvigne olje med ploščama v smeri pravokotnice (normale) na gladino,

$$f_{\mathrm{e}n} = \frac{F_{\mathrm{e}h}}{ld} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)E_t^2.$$

Če vpletemo še težnostni pospešek g in gostoto olja ρ, sledi iz ravnovesja sil sam dvig gladine,

$$F_{eh} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\left(\frac{u}{d}\right)^2 ld = \rho hdlg = F_g \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{2\rho g}\left(\frac{u}{d}\right)^2.$$



VODORAVNI PLOŠČI. Razmere interpretiramo tokrat kot vezje dveh zaporednih kondenzatorjev, ki imata plošče s površino S ter z medsebojnima razmakoma $d_1 - h$ in $d_2 + h$:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 - h} \quad \text{in} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d_2 + h} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d_1 - h + \varepsilon_r(d_2 + h)}.$$

Odvod kapacitivnosti po h da dvižno električno silo,

$$F_{eh} = \tfrac{1}{2}u^2\frac{\partial C}{\partial h} = \tfrac{1}{2}u^2\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r(\varepsilon_r - 1)S}{\left(d_1 - h + \varepsilon_r(d_2 + h)\right)^2} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\left(\frac{Q}{S}\right)^2 S = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{D_n^2}{\varepsilon_0(\varepsilon_0\varepsilon_r)}S$$

in tlak oziroma ploskovno silo, ki dvigne olje v prostoru med ploščama,

$$f_{en} = \frac{F_{eh}}{S} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{D_n^2}{\varepsilon_0(\varepsilon_0\varepsilon_r)}.$$

Izrazimo dvig gladine še tukaj:

$$F_{eh} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\left(\frac{Q}{S}\right)^2 S = \rho hSg = F_g \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{2\rho g}\left(\frac{Q}{S}\right)^2.$$

Dolžni smo pojasniti fizikalno ozadje dviga gladine olja. Spomnimo se razdelka o dipolih, kjer smo govorili o sili na dipol v električnem polju. Spoznali smo težnjo električne sile, povleči dipol v območje močnejšega polja. Če polarizirano olje predstavimo z množico dipolov, potem je povsem razumljivo, da se olje iz zunanjosti kondenzatorja, kjer je polje šibko, povleče v prostor med ploščama, kjer je polje močnejše. Obravnavani primeri premikov so najosnovnejši, mogli pa bi jih formalno razširiti na več objektov in tudi več virov. To, kar bi otežilo izračune, je iskanje funkcijske odvisnosti $W_e(x, y, z)$.

Ploskovne sile. Predstavljeni primeri so bili osredotočeni na sile, ki deluje na telo kot celoto, zadnja dva pa kažeta tudi na mesta delovanja teh sil – na površine teles namreč. Za silo $\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}$ na površini prevodnega telesa ugotovljamo, da je vedno usmerjena pravokotno iz prevodnika,

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{e}(T)/\delta a = \mathbf{f}_\mathrm{e}(T) = \mathbf{n}\sigma^2(T)/2\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad f_{en}(T) = \sigma^2(T)/2\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_n^2(T_+) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(T_+),$$

in številsko enaka gostoti električne energije tik ob prevodniku. V začetku razdelka smo spoznali, da sta energija in sila v tesni zvezi, zadnja relacija pa sporoča, da sta v tesni zvezi tudi gostota energije in tlak; to opažamo v izrazih za ploskovni sili, ko je objekt premika dielektrik,

$$f_{en} = \frac{F_{eh}}{ld} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)E_t^2 \quad \text{in} \quad f_{en} = \frac{F_{eh}}{S} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\frac{D_n^2}{\varepsilon_0(\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r})}.$$

Če izraza nekoliko preoblikujemo, ju moremo zapisati tudi takole:

$$f_{en} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}E_t^2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_t^2 \quad \text{in} \quad f_{en} = \tfrac{1}{2}\frac{D_n^2}{\varepsilon_0} - \tfrac{1}{2}\frac{D_n^2}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}.$$

Opazimo, da je ploskovna sila enaka razliki gostot energije z obeh strani meje dielektrikov: v prvem primeru, ko je polje tangentno in se tangentni del poljske jakosti na meji ohranja (mejni pogoj polja E_t), ali ko je polje normalno in se na meji ohranja normalni del gostote električnega pretoka (mejni pogoj polja D_n). Polje ob meji dveh dielektrikov v splošnem ni niti tangentno niti normalno, ampak poševno (prelom silnic in gostotnic). Pričakovati je, da bodo v primeru, ko se v polju znajde npr. oljna kaplica, na njeni površini delovale ploskovne sile, ki jih bo določal izraz, ki združuje oba prejšnja,

$$f_{en} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)E_t^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\frac{D_n^2}{\varepsilon_0(\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r})} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} - \varepsilon_0)\left(E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_0(\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r})}\right).$$

Končno je lahko ta kapljica ali dielektrični objekt ($\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r} \to \varepsilon_2$) obkrožen z nekim drugim dielektrikom ($\varepsilon_0 \to \varepsilon_1$); takrat na njuni meji deluje sila s ploskovno gostoto

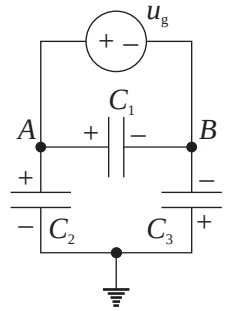
$$f_{en} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left(E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right).$$

Ploskovna sila je vedno usmerjena v prostor z manjšo dielektričnostjo. Ko omenjena kapljica leti skozi električno polje, se zaradi ploskovnih sil deformira. Do kolikšne mere, je odvisno tudi od drugih sil: težnosti, zračnega upora, površinske napetosti, ... – Vsekakor zelo povezan problem. Kot sklep razprave o silah zadostuje že to, da vemo za njih in da vemo, kaj jih določa. Kasneje bomo spoznali njim podobne ploskovne sile na mejah magnetnih materialov, ki so mnogo močnejše od električnih. Pokazati bomo, da so ploskovne magnetne sile osrednje nosilke navora v elektromotorju.

§20. Kondenzatorska vezja

31:46

Električno vezje ne zveni tuje. Poznamo tudi že nekaj elementov, to so kondenzator ter tokovni in napetostni vir. Ker s tem razdelkom zaokrožujemo elektrostatiko, je prav, da namenimo nekaj besed najpreprostejšim, to so kondenzatorska oziroma C vezja. Osredotočili se bomo le na tista, v katerih vladajo elektrostatične razmere. To je v resnici omejitev, saj se v okviru njih ne moremo ukvarjati s procesi elektritev (razelektritev), ki jih spremljajo električni toki. »Čistih« C vezij v praksi ni, zato govorimo o njih le pogojno. Navkljub vsemu se izkaže, da je analiza takšnih struktur dobra popotnica za nadaljevanje: ko bo električna vezja oblikovala paleta aktivnih in pasivnih elementov. Ker je v vezju strnjenih elementov važno le stanje integralnih količin, v kondenzatorskih vezjih so to naboji, napetosti in energije, bodo matematična orodja v C vezjih temu primerno enostavna. Problematiko osvetljujejo sledeči značilni primeri.



PRVI PRIMER. Kondenzatorji s kapacitivnostmi C_1, C_2 in C_3 so vezani v zanko. Spojišče med drugim in tretjim je ozemljeno. Med sponki A in B je vezan vir z napetostjo u_g. Določimo vse naboje, napetosti in energije kondenzatorjev. Ob priključitvi vira steče skozenj določena množina naboja, ki se naseli na levo ploščo prvega in zgornjo ploščo drugega; enaka množina naboja odide z desne plošče prvega in zgornje plošče tretjega kondenzatorja, ali drugače: vsota nabojev na ploščah, ki so povezane z virom, mora biti uravnotežena, kajti vir v sistem ne vnaša nabojev, temveč le obstoječe prerazporedi:

$$Q_1 + Q_2 - Q_1 - Q_3 = 0,$$

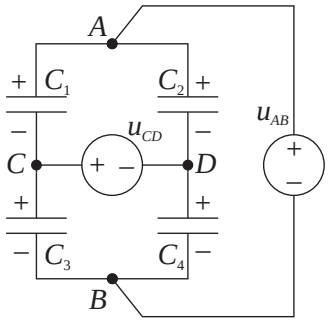
istočasno sta se med spodnjo ploščo drugega in spodnjo ploščo tretjega izmenjala naboja, da je

$$-Q_2 + Q_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_3 \quad \Rightarrow \quad C_2 u_2 = C_3 u_3.$$

Med napetostmi velja očiten odnos, iz katerega sledita še druga in tretja napetost,

$$u_1 = u_g = u_2 + u_3 \quad \Rightarrow \quad u_g = \left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right) u_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{C_3 u_g}{C_2 + C_3} = V_A \quad \Rightarrow \quad u_3 = \frac{C_2 u_g}{C_2 + C_3} = -V_B\,.$$

Leva sponka vira je na potencialu V_A, desna na potencialu V_B; sledijo še naboji, $Q_k = C_k u_k$, in energije, $W_{ek} = Q_k u_k / 2$.



DRUGI PRIMER. Štirje kondenzatorji s kapacitivnostmi C_1, C_2, C_3 in C_4 so povezani v zanko med spojišči A, B, C in D. Med spojišči A in B priključimo vir z napetostjo u_{AB}, med sponki C in D pa vir z napetostjo u_{CD}. Če bi poznali npr. napetost u_1, bi (zaradi bilanc napetosti v treh zankah) poznali tudi ostale tri napetosti:

$$u_2 = u_1 + u_{CD} \quad \text{in} \quad u_3 = u_{AB} - u_1 \quad \text{in} \quad u_4 = u_{AB} - u_1 - u_{CD}.$$

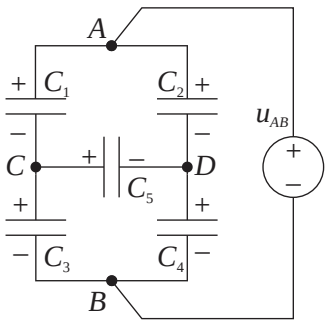
Skozi vir z napetostjo u_{AB} se je preselil naboj $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$, skozi vir z napetostjo u_{CD} pa naboj $-Q_1 + Q_3 = Q_2 - Q_4$. Sporočilo enačb je: $Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0$. Če v slednjo vstavimo zgornje napetosti, sledi

$$C_1 u_1 + C_2(u_1 + u_{CD}) - C_3(u_{AB} - u_1) - C_4(u_{AB} - u_1 - u_{CD}) = 0,$$

po ureditvi pa

$$u_1 = \frac{(C_3 + C_4)u_{AB} - (C_2 + C_4)u_{CD}}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} = \frac{(C_3 + C_4)u_{AB}}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} - \frac{(C_2 + C_4)u_{CD}}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Vrednost prve in ostalih napetosti določata napetosti obeh virov. Govorimo o superpoziciji, ki velja v linearnih vezjih povsem splošno: če je v vezju več virov, prispeva k vsaki napetosti vsak vir svoj neodvisni delež. Ko za dane podatke izračunamo prvo napetost, sledijo iz nje še ostale, nadalje vsi naboji in vse energije.



TRETJI PRIMER. Vezje je podobno prejšnjemu, s tem, da je namesto vira v prečni veji kondenzator s kapacitivnostjo C_5. Takšni vezavi sorodnih elementov rečemo mostična; ime ji daje prispodoba pete veje kot »mostu« med spojiščema C in D. Naloga je naslednja: naj sta kapacitivnosti prvega in četrtega kondenzatorja enaki, $C_1 = C_4$, iščemo pa ostale tri, C_2, C_3 in C_5, da bodo akumulirane energije v vseh kondenzatorjih enake. Energiji v prvem in četrtem kondenzatorju bosta enaki le, če bosta enaki tudi njuni napetosti, $u_1 = u_4$. Iz bilanc napetosti v dveh zankah skozi vir sledi

$$u_2 = u_{AB} - u_4 \quad \text{in} \quad u_3 = u_{AB} - u_1 \quad \Rightarrow \quad u_2 = u_3,$$

kar pomeni, da bosta energiji v drugem in tretjem kondenzatorju enaki le, če bo $C_2 = C_3$. Izenačiti moramo še tri energije

$$\tfrac{1}{2}C_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2}C_2 u_2^2 = \tfrac{1}{2}C_5 u_5^2 = \tfrac{1}{2}C_5(u_2 - u_1)^2.$$

Ključen je odnos med prvima dvema napetostma. Brž ko ga ugotovimo, sledita ustrezna C_2 in C_5. Vse napetostne relacije smo izčrpali. Pot nadaljujmo z naboji. Spojišče C povezuje plošče prvega, tretjega in petega kondenzatorja. Ob priključitvi vira na vezje se izvršijo premiki nabojev, torej tudi med ploščami teh treh kondenzatorjev, da je $-Q_1 + Q_3 + Q_5 = 0$, ali

$$-C_1u_1 + C_3u_3 + C_5u_5 = -C_1u_1 + C_2u_2 + C_5(u_2 - u_1) = 0.$$

Iz enakosti energij sledita

$$C_2u_2 = \frac{C_1u_1^2}{u_2} \quad \text{in} \quad C_5(u_2 - u_1) = \frac{C_1u_1^2}{(u_2 - u_1)}.$$

Ko vnesemo to v zgornjo enačbo, dobimo

$$-C_1u_1 + C_2u_2 + C_5(u_2 - u_1) = -C_1u_1 + \frac{C_1u_1^2}{u_2} + \frac{C_1u_1^2}{(u_2 - u_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1u_1 - 3u_1u_2 + u_2u_2 = 0$$

in dalje še

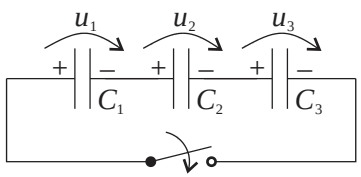
$$\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 - 3\left(\frac{u_1}{u_2}\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{u_1}{u_2}\right) = k = \tfrac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right) = \begin{cases} 2{,}618 \\ 0{,}382 \end{cases}.$$

Iz enakosti energij sledita

$$C_2 = k^2C_1 \quad \text{in} \quad C_5 = kC_1.$$

Da bodo imeli kondenzatorji pri $C_1 = C_4$ enake energije, morajo veljati sledeča razmerja:

$$C_1 : C_2 : C_3 : C_4 : C_5 = 1 : k^2 : k^2 : 1 : k.$$



ČETRTI PRIMER. Kondenzatorje s kapacitivnostmi $C_1 = 2\ \mu\text{F}$ in $C_2 = 3\ \mu\text{F}$ ter $C_3 = 6\ \mu\text{F}$ predhodno naelektrimo z virom napetosti $u = 10\ \text{V}$ in jih verižno povežemo, zatem pa sklenemo stikalo. Določimo razmere v novonastalem vezju. Ob sklenitvi stikala bo prišlo do izmenjave nabojev med ploščami, ki so med seboj električno povezane; vzpostavi se novo stanje, ki ga določajo nove napetosti, u_1, u_2 in u_3, in novi naboji, $\pm C_1u_1$, $\pm C_2u_2$ in $\pm C_3u_3$. Veljati mora: vsota napetosti v novem vezju je enaka nič in vsote nabojev na ploščah, ki so električno povezane, so tolikšne, kot so bile pred sklenitvijo stikala (ohranitev naboja):

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$
$$-C_1u_1 + C_2u_2 = -C_1u + C_2u = 10\ \mu\text{C} \quad \Rightarrow \quad -2u_1 + 3u_2 = 10\ \text{V},$$
$$-C_2u_2 + C_3u_3 = -C_2u + C_3u = 30\ \mu\text{C} \quad \Rightarrow \quad -3u_2 + 6u_3 = 30\ \text{V},$$
$$(-C_3u_3 + C_1u_1 = -C_3u + C_1u = -40\ \mu\text{C}).$$

Ena od zadnjih treh enačb je odveč, saj je zajeta v ostalih dveh. Iz prvih treh sledijo napetosti: $u_1 = -5$ V in $u_2 = 0$ V ter $u_3 = 5$ V. Da je ena od njih enaka nič, je zgolj slučaj. Bolj pomembno je tole: energija v kondenzatorjih pred sklenitvijo stikala je 100 μJ + 150 μJ + 300 μJ = 550 μJ, po sklenitvi pa le še 25 μJ + 0 μJ + 75 μJ = 100 μJ. Katerokoli C vezje bi vzeli v analizo, vsakokrat bi beležili določen energijski defekt; v našem primeru znaša 450 μJ. Kam je ta energija šla, žal še ne moremo ugotoviti, ali bolj točno: elektrostatično polje in modelno kondenzatorsko vezje sta za to vprašanje »prekratka« – odpreti bo potrebno nova poglavja, najprej poglavje o tokovnem polju in njegovem termičnem učinku v prevodni snovi, za njim pa še druga.

Tokovno polje in enosmerna vezja

§21. Konduktivni tok (10)

§22. Mejni pogoji tokovnega polja (3)

§23. Električna prevodnost – upornost in upor (11)

§24. Elementi enosmernih električnih vezij (9)

§25. Analiza enosmernih električnih vezij (4)

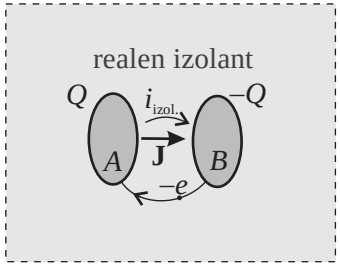
§26. Teoremi o enosmernih električnih vezij (5)

§21. Konduktivni tok

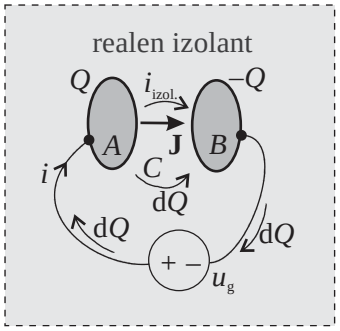
Uvod v tokovno polje. V elektrotehniki se največkrat srečujemo s prevodniškim oziroma konduktivnim tokom. S tema imenoma označujemo tok v kovinah in drugih trdih snoveh, v katerih so nosilci prosti elektroni, v elektrolitih in drugih tekočinah, v katerih so nosilci ioni, izjemoma pa tudi v plinih, v katerih so nosilci ioni in prosti elektroni. Za konduktivni tok veljata dve empirični ugotovitvi: linearni zakon upora, ki ga povzema Ohmov zakon, in termični učinek tega toka, ki ga povzema Joulov zakon. Zakonitosti žal ne veljata splošno, saj imata kar nekaj izjem. V plinih je linearnost že vprašljiva in tudi vsa prejeta energija se ne odrazi izključno v toploti. Glavni količini tokovnega polja sta vektor gostote električnega toka $\mathbf{J}$ in električni tok i. Osrednja relacija tega polja je zveza med vektorjema $\mathbf{J}$ in $\mathbf{E}$, ki odstira nove vsebine: prevodniške lastnosti snovi, termični učinek, pomen temperature, realna prevodnik in izolant, mejna pogoja, prevodnost, upornost in upor kot element električnih vezij, ponikalna upornost, realna električna vira, analiza enosmernih (uporovnih) vezij in še teoremi električnih vezij. Tudi tu si bosta roko podajala dva osnovna pojma, polje in vezje, kot dve sliki iste problematike.

11:45

Prevodniški tok v luči elektrostatike. Vprašanje konduktivnega toka želimo navezati na pretekle vsebine: da bo novo dopolnitev in nadgradnja starega. V preteklosti smo večkrat imeli primer kondenzatorja, sistema dveh prevodnih teles, telesa A z nabojem Q in telesa B z nabojem $-Q$, med njima pa zrak ali kak izolant. Niti zrak niti izolanti niso idealni, saj so tudi v njih prosti naboji, največkrat elektroni. Ti se zaradi električnega polja pomikajo od negativne k pozitivni elektrodi in siromašijo naelektritvi teles, posledično popuščata napetost in polje med njima, kar vodi k zmanjševanju akumulirane energije. Gostota prostih elektronov v izolantu je izredno majhna, v primerjavi s kovinami je manjša za okvirno dvajset dekadičnih razredov; pa vendar, govorimo o tokovni gostoti $\mathbf{J}$ in o izolacijskem toku $i = i_{\text{izol.}}$, zaradi česar se vsak realen kondenzator v določenem času izprazni. Nekoliko drugače je, če je med telesi stalno priključen napetostni vir. Tudi v tem primeru redki prosti naboji v izolantu migrirajo od telesa B k telesu A, vendar se $\pm$ naelektritev teles ne spremeni, saj je $\pm Q$ določen z relacijo $Q = Cu_{\text{g}}$. Zaslugo za to ima vir, ki upadanje $\pm$ naelektritev teles zaradi migracij skozi izolant sproti



5:13



kompenzira s pomikanjem elektronov od telesa A skozi vir nazaj k telesu B. Pri tem opravlja delo: za prenos naboja $\mathrm{d}Q$ v času $\mathrm{d}t$ opravi vir delo $\mathrm{d}A_\mathrm{g} = \mathrm{d}Q u_\mathrm{g}$. Vir skozi sebe, izolant in priključka vzdržuje električni krogotok z jakostjo $i = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ in z močjo $p_\mathrm{g} = i u_\mathrm{g}$. Kaj spoznavamo? »Popolne elektrostatike ni!« Če želimo v nekem sistemu vzdrževati stanje časovne nespremenljivosti električnega polja, moramo imeti na voljo vir, električnemu sopotno tokovno polje pa »vzeti v zakup«. Obe polji sta očitno neločljivo povezani. K sreči nam zaradi tega ne bo potrebno določenih spoznanj bistveno spremeniti, dopolniti pa vsekakor.

Model trkov. Zadnja opisa sporočata, da lahko tokovno polje pričakujemo praktično povsod, v izolantih in prevodnikih, v snoveh z več ali manj prostimi nosilci. Njihove prevodniške lastnosti zadovoljivo pojasni model trkov. Temo začnimo z Ohmovim opažanjem. Ugotovil je, da je tok skozi žico, ki jo je priključil med sponki vira, sorazmeren napetosti: $i \propto u$. Pri žici dolžine l in preseka S sledi, da sta sorazmerni tudi tokovna gostota in jakost polja, $J \propto E$. Zaradi sile $\delta F_\mathrm{e} = |\rho| E \delta v$ na oblak prostih elektronov $\rho \delta v$ v žici in zveze $J = |\rho| w$ sta potem sorazmerni tudi hitrost in sila, $w \propto \delta F_\mathrm{e}$. Od tod izhaja, da stalna električna sila oblaka elektronov ne uspe pospešiti; očitno zato ne, ker ji nasprotuje sila upora $\delta \mathbf{F}_\mathrm{u}$, $\delta \mathbf{F}_\mathrm{e} + \delta \mathbf{F}_\mathrm{u} = \mathbf{0}$. To dalje pomeni, da je tudi sila upora sorazmerna hitrosti, da je $\delta F_\mathrm{u} \propto w$, kar kaže na ozadje, na linearni zakon upora, ki je žal le empiričen, in kot tak nima ustrezne teoretične podlage. Zaradi tega ima relacija $J \propto E$ zgolj in samo kvalitativno, ne pa tudi kvantitativno vrednost. Razlaga relacije $J \propto E$ sloni na modelu oziroma predstavi o trkih, ki jih doživljajo npr. prosti elektroni med gibanjem v medatomskem prostoru, skozi katerega jih potiska električna sila $-e\mathbf{E}$. »Trk« elektrona v atom je mišljen kot njegov vdor v področje matičnih elektronov, iz katerega ga ti nato z odbojno električno silo izrinejo. Ob tem dogodku izgubi elektron del svoje kinetične energije, kar se odrazi v prirastku notranje energije atoma (toplota).

Ostajamo pri oblaku prostih delcev z nabojem $\rho \delta v$. Zapišimo gibalno enačbo: $\delta m \dot{\mathbf{w}} = \delta \mathbf{F}_\mathrm{u} + \rho \delta v \mathbf{E}$; δm je masa prostih delcev v oblaku s prostornino δv, $\dot{\mathbf{w}}$ je pospešek oblaka, $\delta \mathbf{F}_\mathrm{u} = -K \mathbf{w} \delta v$ je zaviralna sila in K je konstanta upora. Sledi:

$$\dot{\mathbf{w}} + (K \delta v / \delta m)\, \mathbf{w} = (\rho \delta v / \delta m) \mathbf{E}.$$

Privzemimo, da v trenutku t_0 električno polje usahne. Usahne tudi potisna sila in oblak se zaustavi. Proces opiše enačba, katere rešitev je eksponentna funkcija. Identična rešitev velja za vsako od komponent hitrosti:

$$\dot{\mathbf{w}} + \underbrace{(K\delta v/\delta m)}_{1/T_\mathrm{t}}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{t}(\mathrm{d}w_x/\mathrm{d}t) + w_x = 0 \quad \Rightarrow \quad w_x(t) = w_x(t_0)\mathrm{e}^{-(t-t_0)/T_\mathrm{t}}, \ldots\ w_y(t), w_z(t)$$

Pri tem je T_t t. i. relaksacijski čas, ki je za kovine okoli 10^{-14} s (za pline okoli 10^{-9} s). Oblaku delcev se hitrost v tem času zmanjša na vrednost $w_x(t_0)/\mathrm{e}$, na 36 % izhodiščne hitrosti. Relaksacijski čas T_t ustreza »času prostega preleta« oziroma času med »zaporednima trkoma«. Tega časa ne določa hitrost oblaka, ampak termična hitrost elektronov, ki je posledica notranje energije snovi. Pri termični hitrosti nekaj sto km/s in času prostega preleta reda 10^{-14} s je opravljena pot nekaj desetink nm, kar okvirno ustreza medatomskim razdaljam.

Specifična električna prevodnost. Vrnimo se h gibalni enačbi. Upoštevajmo, da stalna električna sila ne uspe pospešiti oblaka prostih delcev, npr. elektronov, da je $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$; sledi

$$(K\delta v/\delta m)\mathbf{w} = \mathbf{w}/T_\mathrm{t} = (\rho\delta v/\delta m)\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = (\rho T_\mathrm{t}\delta v/\delta m)\mathbf{E} = \mu\mathbf{E}.$$

Hitrost $\mathbf{w}$ je sorazmerna jakosti $\mathbf{E}$ in konstanta μ je mobilnost prostih elektronov. Vpletemo še enačbo $\mathbf{J} = \rho\mathbf{w}$ in izrazimo gostoto ρ ter maso δm oblaka s pomočjo prostorninske gostote n prostih elektronov, mase m_e in naboja $-e$ elektrona, pa že dobimo iskan odnos,

$$\rho\mathbf{w} = \mathbf{J} = (\rho^2 T_\mathrm{t}\delta v/\delta m)\mathbf{E} = ((-ne)^2 T_\mathrm{t}\delta v/(nm_\mathrm{e})\delta v)\mathbf{E} = (nT_\mathrm{t}e^2/m_\mathrm{e})\mathbf{E} = \gamma\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \gamma = nT_\mathrm{t}e^2/m_\mathrm{e}.$$

Sorazmernostna konstanta med $\mathbf{J}$ in $\mathbf{E}$ je t. i. specifična električna prevodnost $\gamma = nT_\mathrm{t}e^2/m_\mathrm{e}$ in se izraža v A/Vm oziroma v S/m (siemens/meter). Enačba je preprosta, vendar žal neuporabna, saj sta n in T_t za določeno snov le okvirna podatka. Pa vendar, enačba potrjuje pričakovanja modela trkov: da je prevodnost snovi večja, če je v njej več prostih nosilcev, če je čas prostega preleta daljši in če je masa nosilcev manjša. Enačba ima v resnici zgolj kvalitativno vrednost; pravo vrednost specifične prevodnosti določene snovi daje šele ustrezna meritev. Če med konca palice dolžine l in preseka S priključimo vir ter merimo tok i skozi palico in napetost u med koncema palice, dobimo s kratkim računom tudi specifično električno prevodnost snovi, iz katere je palica: $\gamma = J/E = (i/S)/(u/l) = (l/S)(i/u)$.

53:33

Ohmov zakon. S tem imenom označujemo relacijo

$$!!!\ \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}\ !!!\,,$$

ki jo utemeljujeta model trkov in Ohmova empirična ugotovitev, da sta si tok skozi prevodniški kanal in napetost med koncema kanala sorazmerna. Enostavna relacija ima daljnosežne posledice, saj se zajeda v vsa področja elektrotehnike. V svoji preprostosti skriva tudi nekaj »pasti«. Temu služijo klicaji, ki nas opozarjajo na empirično izkušnjo. Poudariti velja, da relacija $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ ni zakon, ki bi pojasnjeval elektromagnetni pojav, ampak govori o interakciji polje-snov; podobno kot njej podobna relacija $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ v dielektrikih (v magnetikih opravi to relacija $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$). Ravno to, interakcija polje-snov, je središčno, kajti elektrotehnika ni nič drugega kot »umetnost« uporabe različnih materialov (prevodnikov, dielektrikov, magnetikov) za doseganje ciljev, ki jih ponuja naravi imanenten elektromagnetni pojav, elektrotehnika pa je veda, ki ve in zna to s pridom in predvsem v dobrobit tudi izkoristiti.

Specifična električna upornost in njena temperaturna odvisnost. Temperatura ima pomemben vpliv na prevodniške lastnosti materialov. Del tega odkrije že enačba $\gamma = nT_\mathrm{t}e^2/m_\mathrm{e}$. Pri višji temperaturi je atomska struktura nemirnejša; čas prostega preleta je krajši in manjša je zato tudi specifična prevodnost. V praksi se pogosto navaja podatek za specifično električno upornost $\rho = 1/\gamma$. Enota zanjo je $\mathrm{Vm/A} = \Omega\mathrm{m}$ (ohm-meter). Temperaturna odvisnost specifične upornosti je od snovi do snovi različna in v domeni meritev. V širšem področju okrog sobne temperature ($20°\mathrm{C} \pm 100°\mathrm{C}$) je funkcijska odvisnost specifične električne upornosti skoraj linearna; podajamo jo v sledeči obliki:

$$\rho(T) = \rho(20°\mathrm{C})\big(1 + \alpha(T - 20°\mathrm{C})\big) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\rho(T) - \rho(20°\mathrm{C})}{\rho(20°\mathrm{C})} : (T - 20°\mathrm{C}).$$

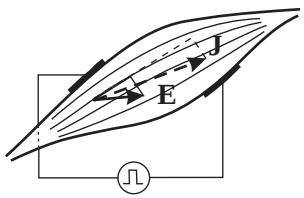
α je temperaturni količnik in govori o relativnem povečanju specifične upornosti na °C. Baker ima α približno 0,0039/°C, kar pomeni, da je specifična upornost navitja v elektromotorju pri delovni temperaturi $T = 80°\mathrm{C}$ približno za ¼ višja kot pri temperaturi 20°C. Včasih koristimo tudi kvadratično aproksimacijo, ki ima dva temperaturna količnika, α in β:

$$\rho(T) = \rho(20°\mathrm{C})(1 + \alpha(T - 20°\mathrm{C}) + \beta(T - 20°\mathrm{C})^2).$$

Pri večini kovin je značilno naraščanje specifične upornosti s temperaturo; pri tališču skokovito naraste in se z višanjem te viša še naprej. Izjema sta oglje in grafit. Obema se specifična električna upornost manjša, od neke temperature dalje pa veča. Posebnost je tudi na spodnjem delu temperaturne skale. Z nižanjem temperature proti absolutni ničli se specifična upornost manjša in pri svojski temperaturi snovi pade na vrednost 0 Ωm, superprevodnost. Superprevodnost je kvantni pojav, ki za specialne keramike postaja aktualen že v bližini sobne temperature. Tabela podaja specifične prevodnosti, za nekatere snovi pa tudi temperaturni količnik.

medij	γ(MS/m)	α(1/°C)		medij	γ(S/m)
supraprevodnik	∞	–		morska voda	$3-5$
srebro	61,4	0,00361		germanij	2,3
baker	56,5	0,0039		silicij	$3{,}9 \cdot 10^{-4}$
zlato	41,0	0,0034		voda	$2 \cdot 10^{-4}$
aluminij	35,4	0,0041		zemlja	$10^{-4} - 10^{-2}$
jeklo	$5-10$	0,0045		bakelit	$\approx 10^{-9}$
konstantan	2,04	0,00003		steklo	$\approx 10^{-12}$
živo srebro	1,06	0,0009		guma	$\approx 10^{-15}$
grafit	0,1	–0,0004		silicijev dioksid	$\approx 10^{-17}$
oglje	0,0263	–0,0013		vakuum	0

V elektrostatiki smo izpostavili težavo, da prevodnih snovi ne zmoremo med seboj razločevati; ločevali smo jih le opisno, kot snovi z veliko in snovi z izrazito premalo prostimi naboji. Tabela to vrzel zapolnjuje, vendar le delno; v njej namreč ne znamo potegniti črte in reči: do tu so prevodniki, od tu dalje pa izolanti. To nam bo uspelo kasneje, ko bomo vpletli še časovno dinamiko, in spoznali, da je meja med prevodniki in izolanti v resnici premakljiva.



Nehomogenost, nelinearnost, anizotropnost. S temi pojmi smo se srečali pri dielektričnosti. Tam so se stvari nanašale na odnos med **D** in **E**, tu pa se nanašajo na odnos med **J** in **E**. Zelo pogost vzrok nehomogenosti je temperatura. Vodnik se zaradi toka v njem segreva. Zaradi odvajanja toplote v okolico je površina vodnika hladnejša od sredice; gostota toka je zato ob površini večja kot v sredici. Pri postopku indukcijskega segrevanja je potrebno k električnemu dodati še toplotni račun. Tako združena določata časovno dinamiko temperaturnega polja v objektu.

Dokler je električna sila edini dejavnik toka, se z nelinearnostjo praktično ne srečamo, postane pa aktualna, ko na nosilce naboja delujejo še druge sile; nekaj o tem tudi v nadaljevanju.

Anizotropnost srečamo v bioloških sistemih. Mišica, tkivo in podobne snovi so anizotropne zaradi vlaknaste strukture. Izkaže se, da je električna prevodnost ($\gamma_\parallel$) vzdolž vlaken praviloma večja, kot prevodnost ($\gamma_\perp$) prečno na vlakna. V tem primeru je za vzdolžno gostoto toka ($\mathbf{J}_\parallel$) odgovoren vzdolžni del poljske jakosti ($\mathbf{E}_\parallel$), za prečno gostoto ($\mathbf{J}_\perp$) pa prečni del jakosti ($\mathbf{E}_\perp$), da je $\mathbf{J} = \mathbf{J}_\parallel + \mathbf{J}_\perp = \gamma_\parallel \mathbf{E}_\parallel + \gamma_\perp \mathbf{E}_\perp$. Anizotropnost se kaže v tem, da vektorja gostote in jakosti nista vzporedna in tudi družini ekvipotencialk in gostotnic si nista ortogonalni. Anizotropni so tudi kristali in razčični kompoziti.

14:14

Joulov zakon. Vrnimo se k oblaku $\rho\delta v$ nosilcev, ki se pod vplivom poljske jakosti pomika skozi snov s hitrostjo **w**. Nanj deluje sila $\rho\mathbf{E}\delta v$, ki ga v diferencialu časa dt premakne za diferencial poti $\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{w}\mathrm{d}t$. Električna sila opravi pri tem delo

$$\mathrm{d}A_\mathrm{e} = \rho\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}\delta v = \rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}t\delta v = (\mathbf{J}\cdot\mathbf{E})\mathrm{d}t\delta v.$$

Ker električni sili vseskozi oponira sila upora, se to delo odrazi v porastu notranje energije:

$$\mathrm{d}A_\mathrm{e} = (\mathbf{J}\cdot\mathbf{E})\mathrm{d}t\delta v = \mathrm{d}W_\mathrm{not.}.$$

Kvocient električnega dela in časa je električna moč. Če se omejimo zgolj na termični učinek, je ta enaka moči sproščanja toplote, kar ustreza izvorni vsebini Joulovega zakona. To je tudi razlog, da električni moči δp_e rečemo kar joulska moč,

$$\delta p_\mathrm{j} = \delta p_\mathrm{e} = \mathrm{d}A_\mathrm{e}/\mathrm{d}t = (\mathbf{J}\cdot\mathbf{E})\delta v = \wp_\mathrm{j}\delta v \quad\Rightarrow\quad \wp_\mathrm{j} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}.$$

Prostorninsko gostoto $\wp_\mathrm{j}$ moči določa produkt poljskih vektorjev, $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$, moč p_j v prostoru $\mathcal{V}$ pa integral gostote te moči:

$$p_\mathrm{j} = \int_{\mathcal{V}} \wp_\mathrm{j}\mathrm{d}v.$$

Kadar v konduktivnem kanalu velja Ohmov zakon, zapišemo gostoto moči tudi takole:

$$\wp_\mathrm{j} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = \gamma E^2 = J^2/\gamma.$$

Pri še sprejemljivi gostoti toka $4\mathrm{MA/m^2}$ v bakru s specifično prevodnostjo 56,5 MS/m je gostota moči kar 283 $\mathrm{kW/m^3}$. Pri tolikšni gostoti se v navitjih transformatorja s 300 kg bakra (0,336 $\mathrm{m^3}$) sprošča toplota z močjo 95,2 kW.

Ohmov zakon v razširjeni obliki. Pri modelu trkov smo se sklicevali na jakost $\mathbf{E}$ oziroma na električno silo. Ta pa ni edina, ki lahko deluje na proste naboje. V začetku smo pri Lorentzovi sili omenjali tudi magnetno silo, ob predstavitvi idealnih virov pa opozorili še na druge, neelektrične sile. Razširjen Ohmov zakon govori ravno o tem, da v zvezo $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ vključimo vse sile: električno in magnetno, k njima pa dodamo še generatorsko silo, ki ima izvor v toploti ali svetlobi ali v kemičnih in drugih procesih. Celotno silo na oblak nabojev $\delta Q = \rho\delta v$, ki ima hitrost $\mathbf{w}$, zapišemo takole:

10:07

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{cel.} = \delta\mathbf{F}_\mathrm{L} + \delta\mathbf{F}_\mathrm{g} = \delta Q(\mathbf{E} + \mathbf{w}\times\mathbf{B}) + \delta\mathbf{F}_\mathrm{g}.$$

Generatorski sili $\delta\mathbf{F}_\mathrm{g}$ nadalje priredimo sorazmeren vektor $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g} = \delta\mathbf{F}_\mathrm{g}/\delta Q$ in pišemo:

$$\delta\mathbf{F}_\mathrm{cel.} = \delta Q\left(\mathbf{E} + \mathbf{w}\times\mathbf{B} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}\right).$$

Vektor $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ ima enoto V/m; zanj smo uporabili kaligrafsko črko, da ga ne bi zamenjevali za poljsko jakost, ki to ni. Celotna sila $\delta\mathbf{F}_\mathrm{cel.}$ je tisto, kar vodi v posplošeno obliko, da dosedanji $\mathbf{E}$ razširimo v izraz $\mathbf{E} + \mathbf{w}\times\mathbf{B} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ in dobimo Ohmov zakon v razširjeni obliki,

$$\mathbf{J} = \gamma\left(\mathbf{E} + \mathbf{w}\times\mathbf{B} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}\right) = \gamma\left(\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{J}}{\rho}\right)\times\mathbf{B} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}\right) \;\Rightarrow\; \frac{\mathbf{J}}{\gamma} - \frac{\mathbf{J}}{\rho}\times\mathbf{B} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}.$$

Novost sta dva člena, ki vsebujeta gostoto $\mathbf{J}$, vendar prvi člen pogosto prevladuje. Če je bakren vodnik ($\gamma = 56{,}5$ MS/m, $\rho = -1{,}34\cdot 10^{10}$ $\mathrm{C/m^3}$) izpostavljen magnetnemu polju gostote $B = 1$ T (kar ni malo), je prvi člen kar 237-krat vejši od

drugega. V takšnih primerih bomo kot razširjeno obliko Ohmovega zakona razumeli že zvezo $\mathbf{J} = \gamma\left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}\right)$. Srečamo pa tudi izjeme; takšen je Hallov pojav, ki ga izkoriščamo za merjenje gostote magnetnega pretoka – več o njem v magnetiki.

Ohmov zakon v dinamičnih razmerah. V mislih imamo odzivnost prevodne strukture oziroma veljavnost Ohmovega zakona v primeru dinamičnih sil. Dinamiko npr. izmeničnih (sinusnih) sil pogosto vrednotimo s frekvenco f oziroma s periodo $T = 1/f$, odzivnost pa z reakcijskim časom, ki ga primerno oceni relaksacijski čas T_t. Pri $T_\mathrm{t} \ll T$ je odziv prostih nabojev praktično sočasen, uporaba Ohmovega zakona pa upravičena. Celo pri $f = 1$ THz je perioda $T = 10^{-12}$ s čas, ki še vedno krepko presega relaksacijski čas v kovinah.

24:18

Praznjenje kondenzatorja. Opremljeni z Ohmovim in Joulovim zakonom se vrnimo v začetek tega razdelka. Govorili smo o kondenzatorju, o sistemu dveh prevodnih teles, telesa A z nabojem Q in telesa B z nabojem $-Q$, ki ju obkroža zrak ali kak izolant, in ugotovili, da se zaradi izolacijskega toka kondenzator prejkoslej izprazni. Oglejmo si časovno odvijanje tega procesa. Naboja $\pm Q$ sta torej časovni funkciji, $Q = Q(t)$, enako napetost $u = u(t)$, podobno pa tudi polja $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ in $\mathbf{J}$, ki so v linearnem izolantu dielektričnosti ε in prevodnosti γ povezana takole: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ in $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$. Če s sklenjeno ploskvijo $\mathcal{A}$ obkrožimo telo A, izrazimo Q in uporabimo kontinuitetno enačbo, dobimo:

$$Q = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \varepsilon \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{\varepsilon}{\gamma}\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{\varepsilon}{\gamma} i = -\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma}{\varepsilon}Q = 0.$$

Pridobljena zveza sporoča, da je časovni odvod naboja sorazmeren naboju; iz matematike pa vemo, da ima to lasnost eksponentna funkcija sledeče splošne oblike $Q(t) = K\mathrm{e}^{\lambda t}$, kjer sta K in λ še neznani konstanti. Če z nastavkom za $Q(t)$ vstopimo v zgornjo enačbo, dobimo konstanto λ:

$$Q(t) = K\mathrm{e}^{\lambda t} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = K\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} \;\Rightarrow\; \underbrace{K\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}}_{\mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\underbrace{K\mathrm{e}^{\lambda t}}_{Q(t)} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{\gamma}{\varepsilon} = -\frac{1}{\tau} \;\Rightarrow\; \tau = \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Konstanta λ ima enoto s^{-1}, njej recipročni τ pa enoto s. Funkcija naboja je že malo bolj dorečena: $Q(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Iščemo še konstanto K. Če sta ob času t_0 na telesih naboja $\pm Q_0$, sta poznani tudi konstanta K in iskana funkcija $Q(t)$:

$$Q(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau} \;\Rightarrow\; Q(t_0) = Q_0 = K\mathrm{e}^{-t_0/\tau} \;\Rightarrow\; K = Q_0\mathrm{e}^{t_0/\tau} \;\Rightarrow\; Q(t) = Q_0\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}.$$

Množini nabojev na telesih se torej eksponentno zmanjšujeta. Dinamiko tega procesa določa t. i. časovna konstanta τ, ki je odvisna od prevodnosti in dielektričnosti vmesnega prostora. Če je med telesoma suh zrak z okvirnima podatkoma $\gamma \approx 10^{-12}$ S/m in $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm, potem je $\tau \approx 8{,}85$ s. V tem času se tako naboj kot napetost med telesoma zmanjšata na cca 36% začetnih vrednosti. Podobno se dogaja tudi s poljem. Vektor jakosti v točki T zapišemo takole:

$$\mathbf{E}(T,t) = \mathbf{E}(T,t_0)\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}.$$

Če joulsko moč integriramo prek časa praznitve, dobimo gostoto joulske energije v točki T:

$$w_\mathrm{j}(T) = \int_{t_0}^{\infty} \mathscr{p}_\mathrm{j}\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{\infty} \gamma E^2(T,t)\mathrm{d}t = \gamma E^2(T,t_0)\int_{t_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2(t-t_0)/\tau}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\gamma\tau E^2(T,t_0) = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2(T,t_0).$$

Rezultat je zanimiv: prvotno akumulirana električna energija v neposredni okolici točke T se v doglednem času v celoti pretvori v toploto v tej isti okolici. Energija ostaja na svojem mestu, le obliko spreminja. Zaslugo za to ima homogenost izolanta med telesoma. V nasprotnem, ko bi bilo med telesoma več izolantov, bi prvotno akumulirane električne energije v njih v splošnem ne ostale v celoti v njih, ampak bi prišlo do delne selitve električne energije iz enih v toploto v drugih izolantih. Odgovorov na ta izziv nam tokovno polje žal ne da. Selitev energije skozi prostor je eden od najpomembnejših elektromagnetnih pojavov, ki je povezan z magnetnim poljem, elektromagnetno indukcijo in valovanjem, o čemer še nič ne vemo, se pa v to smer pomikamo.

V nadaljevanju se bomo ukvarjali s časovno stalnim tokovnim poljem in uporovnimi vezji, nadgrajevali elektrostatično polje in se pripravljali na poglavje o magnetnem polju. Polje časovno stalnega toka smo opredelili v uvodnem poglavju in ugotovili, da zanj velja okrnjena kontinuitetna enačba

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = 0.$$

iz tega razdelka pa vemo, da je gostota **J** v neposredni povezavi z jakostjo **E**, slednja pa s potencialom in napetostjo. K že poznanim odnosom se torej pridružujejo le še neizvornost tokovne gostote in Ohmov ter Joulov zakon.

§22. Mejni pogoji tokovnega polja

7:14

Obširen uvod – kot v elektrostatiki – verjetno ni potreben. Tokrat se sprašujemo po lastnostih vektorjev **E**, **D** in **J** na meji prevodno-dielektričnih medijev. Izhajamo iz splošnih zakonitosti:

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}} E_t \mathrm{d}l = 0 \quad \text{in} \quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} D_n \mathrm{d}a = Q_{\text{not. pro.}} \quad \text{ter} \quad \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{A}} J_n \mathrm{d}a = 0.$$

Spet si omislimo tri točke, nadpovršinsko T_+ v 1. snovi, podpovršinsko T_- v 2. snovi in površinsko točko T. Normalo **n** mejne površine v točki T usmerimo v 1. snov.

10:16

Mejni pogoji vektorjev E, D in J. Mejna pogoja vektorjih **E**, **D** poznamo že iz elektrostatike,

$$E_t(T_+) - E_t(T_-) = 0 \quad \text{in} \quad E_\tau(T_+) - E_\tau(T_-) = 0 \quad \text{ali} \quad \mathbf{n}\times\big(\mathbf{E}(T_+) - \mathbf{E}(T_-)\big) = \mathbf{0},$$

$$D_n(T_+) - D_n(T_-) = \sigma_{\text{pro.}}(T) \quad \text{ali} \quad \mathbf{n}\cdot\big(\mathbf{D}(T_+) - \mathbf{D}(T_-)\big) = \sigma_{\text{pro.}}(T),$$

$$J_n(T_+) - J_n(T_-) = 0 \quad \text{ali} \quad \mathbf{n}\cdot\big(\mathbf{J}(T_+) - \mathbf{J}(T_-)\big) = 0,$$

pri vektorju **J** pa je dovolj, da se sklicujemo na izhodišče, ki je podobno kot pri vektorju **D**, le da je pri njem desna stran enaka nič. Zadnji sporoča: na meji dveh medijev je normalna komponenta tokovne gostote zvezna. Za nadaljevanje bosta sporočilni združitvi dveh mejnih pogojev v luči linearnih zvez $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ in $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ in snovnih konstant γ_1 in γ_2 ter ε_1 in ε_2. Združimo najprej prvi in tretji pogoj. Tangentni osi zavrtimo okoli normale tako, da je $E_\tau = 0$, in v tretji pogoj uvedemo obe prevodnosti, pa dobimo:

$$E_t(T_+) = E_t(T_-) \quad \text{in} \quad J_n(T_+) = J_n(T_-) \quad \text{in} \quad \gamma_1 E_n(T_+) = \gamma_2 E_n(T_-).$$

Opravimo deljenje levih in desnih strani prve in zadnje enačbe:

$$\frac{E_t(T_+)}{\gamma_1 E_n(T_+)} = \frac{E_t(T_-)}{\gamma_2 E_n(T_-)} \;\Rightarrow\; \frac{E_t(T_+)}{E_n(T_+)} : \frac{E_t(T_-)}{E_n(T_-)} = \gamma_1 : \gamma_2 \;\Rightarrow\; \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Spoznavamo, da se silnice oziroma tokovnice tokovnega polja na meji lomijo. Nekaj podobnega kot v elektrostatiki, le da razmerje dielektričnosti tu zamenjuje razmerje specifičnih električnih prevodnosti. Združimo še drugi in tretji pogoj:

$$D_n(T_+) - D_n(T_-) = \sigma_{\text{pro.}}(T) \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} J_n(T_+) - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} J_n(T_-) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\right) J_n(T) = \sigma_{\text{pro.}}(T).$$

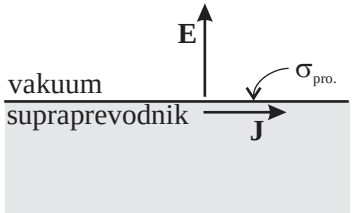
Normalna komponenta tokovne gostote in gostota prostega naboja sta si na meji v razmerju, ki ga določajo štiri snovne konstante. Relacija je statična in ne pove, kako se ta naboj na meji vzpostavi. Odgovor najdemo, ko analiziramo prehodni pojav, ki ga sproži priključitev tokovne strukture na vir (z odključitvijo se sproži nov prehodni pojav, v katerem mejo ta naboj tudi zapusti). V luči mejnih pogojev si oglejmo tri značilne primere.

4:39

STIK KOVINA – KOVINA. Ker je dielektričnost kovin enaka ε_0, je zveza med gostoto toka in gostoto naboja na meji sledeča:

$$\varepsilon_0 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_2} J_n(T) = \sigma_{\text{pro.}}(T).$$

Sporočilo: če prehaja tok iz boljšega v slabši prevodnik, ima meja presežek pozitivnega, sicer pa presežek negativnega naboja. Primer. Grafitna ščetka na kolektorskem stroju (motorju, generatorju) povezuje bakreni površini na statorju in rotorju; na stičnih ploskvah ščetke z bakrom sta vzpostavljeni dve nasprotni naelektritvi. Obloga prostega naboja pa se pojavlja tudi na mejah izolantov, vendar je neznatna, saj je tudi tokovna gostota v izolantih praviloma izjemno majhna.



STIK SUPERPREVODNIK – VAKUUM. Namenoma začenjamo s skrajnostma, s stikom superprevodnika in vakuuma, z medijema, ki si ju včasih izposodimo kot idealizaciji dobrega prevodnika in dobrega izolanta. Takšna idealizacija izračune praviloma poenostavi, končnih rezultatov pa bistveno ne oddalji od resnice. Prvi medij bodi vakuum, drugi pa bodi superprevodnik. V vakuumu ($\gamma = 0$) je $J = 0$, v superprevodniku ($\gamma = \infty$) pa je $E = 0$. Zaradi $J_n(T_+) = 0$ je $J_n(T_-) = 0$. V superprevodniku je tokovno polje ob meji čisto tangentno, $\mathbf{J}(T_-) = \mathbf{t}\, J_t(T_-)$ in $\alpha_2 = \pi/2$. To pomeni, da je površina superprevodnika ograja pretočnih cevk tokovnega polja v njem. Zaradi $E_t(T_-) = 0$ je $E_t(T_+) = 0$; v vakuumu je električno polje ob meji normalno,

5:53

$\mathbf{E}(T_+) = \mathbf{n}E_n(T_+)$ in $\alpha_1 = 0$. Električno polje ob površini superprevodnika spominja na razmere v elektrostatiki. Površina je ekvipotencialka; na površini je naboj z gostoto $\sigma_{\text{pro.}}(T) = \varepsilon_0 E_n(T_+)$.

STIK PREVODNIK – IZOLANT. Vakuum tokrat zamenjajmo npr. s suhim zrakom, ki ima specifično prevodnost $\gamma_1 \cong 10^{-12}$ S/m, superprevodnik pa z jeklom, ki ima $\gamma_2 \cong 10^7$ S/m. Izberimo si dve povsem praktični vrednosti, da sta $E_n(T_+) = 1$ MV/m in $J_t(T_-) = 1$ MA/m^2. Upoštevajoč snovne konstante sta $J_n(T_+) \cong 1$ μA/m^2 in $E_t(T_-) \cong 100$ mV/m; zaradi zveznosti sta $J_n(T_-) \cong 1$ μA/m^2 in $E_t(T_+) \cong 100$ mV/m. Izračunajmo oba tangensa: $\operatorname{tg}\alpha_1 \cong 10^{-7}$ in $\operatorname{tg}\alpha_2 \cong 10^{12}$, očitno sta $\alpha_1 \cong 0$ in $\alpha_2 \cong \pi/2$, kar je približek razmer na meji vakuum-supraprevodnik. Nekaj pa je kljub vsemu drugače: površina kovine ni več ekvipotencialna, saj se vrednost potenciala vzdolž toka zmanjšuje tako, kot to določa tangentni del poljske jakosti; v tem številskem primeru bi se vrednost potenciala na dolžini 10 metrov zmanjšala za 1 V. Naboj na površini ima gostoto $\sigma_{\text{pro.}}(T) = \varepsilon_0\big(E_n(T_+) - E_n(T_-)\big) \cong \varepsilon_0 E_n(T_+)$. Opisano stanje je aktualno ob vseh žičnih strukturah, ki so samostojne ali v vlogi povezovanja posameznih sklopov in naprav.

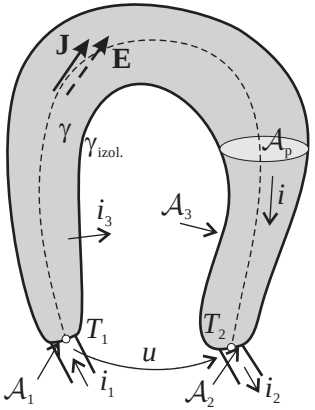
21:06

5:41

17:28

§23. Električna prevodnost – upornost in upor

Tu bomo izsledke o tokovnem polju usmerili v nova pojma, v električno upornost in električno prevodnost, ter spoznali upor (upornik) kot strnjen element električnih vezij. Vse to bomo zatem navezali na elektrotehniške strukture, spoznali različna modelna vezja, ki vključujejo že poznane elemente, in jih podkrepili s tokovno-napetostnimi relacijami.



Konduktivni kanal. Kot konduktivni kanal razumemo prevodno strukturo, ki jo obdaja izolant. Kanal upodablja zavita tuba, ki ima vstopno ploskev $\mathcal{A}_1$, izstopno ploskev $\mathcal{A}_2$ in plašč $\mathcal{A}_3$; unija teh oblikuje sklenjeno ploskev $\mathcal{A}$. Ko med konca kanala priključimo vir, se v njem vzpostavi glavni, v izolantu pa parazitni del tokovnega polja. Koliko tega je zunaj kanala, je odvisno od specifičnih električnih prevodnosti kanala in izolanta ter razsežnosti plašča. Če je razmerje $\gamma/\gamma_{\text{izol.}}$ izrazito v korist kanala, površina plašča pa ne pretirano velika, je ujetost tokovnega polja v kanal skoraj popolna. Iz neizvornosti časovno stalnega tokovnega polja izhaja sledeče:

$$\oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \overbrace{\int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}^{-i_1} + \overbrace{\int_{\mathcal{A}_2} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}^{i_2} + \overbrace{\int_{\mathcal{A}_3} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}^{i_3=i_{\text{izol.}}} = 0 \quad\Rightarrow\quad -i_1 + i_2 + \overbrace{i_{\text{izol.}}}^{\approx 0} = 0 \quad\Rightarrow\quad i_1 \cong i_2 \cong i$$

Govorimo o toku i, ki se skozi kanal praktično ohranja in ustreza integralu tokovne gostote $\mathbf{J}$ skozi katerokoli presečno ploskev $\mathcal{A}_{\text{p}}$, napetost u kanala pa določa integral poljske jakosti vzdolž krivulje od začetka (T_1) do konca kanala (T_2):

$$i = \int_{\mathcal{A}_{\text{p}}} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \quad \text{in} \quad u = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Tok i skozi kanal in napetost u kanala sta integralni količini, ki v nadaljevanju v celoti nadomestita poljska vektorja $\mathbf{J}$ in $\mathbf{E}$. Količini sta tudi merljivi, prva z ampermetrom in druga z voltmetrom. Klasični, elektromehanski instrumeti delujejo na principu magnetne sile, modernejši pa so posebna elektronska vezja z digitalnim prikazovalnikom merjene količine.

Električna prevodnost in električna upornost. Če v prevodnem kanalu velja linearen odnos med gostoto **J** in jakostjo **E**, se ta prenese tudi na odnos med tokom i skozi kanal in napetostjo u vzdolž kanala (Ohmova empirična ugotovitev). V takem primeru vpeljemo dva kvocienta, električno prevodnost G in njej recipročno električno upornost R kanala,

$$G = i/u \quad \text{in} \quad R = u/i \quad \Rightarrow \quad GR = 1.$$

Enota električne upornosti je Ω (ohm), enota električne prevodnosti pa S (siemens ali »mho«). V primeru ravnega kanala dolžine l, preseka S in specifične prevodnosti γ sta prevodnost $G = i/u = JS/El = \gamma S/l$ in $R = l/\gamma S$. Težava se pojavi pri kanalih zahtevnejših oblik. V pomoč nam je lahko poznavanje družin ekvipotencialk ali gostotnic. Pri napetosti $\mathrm{d}u$ med bližnjima ekvipotencialkama je $\mathrm{d}R = \mathrm{d}u/i$ diferencialna upornost plasti, njen integral pa je celotna upornost R kanala,

$$u = \int \mathrm{d}u = i \int \mathrm{d}R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{u}{i} = \int \mathrm{d}R.$$

Drugo možnost ponujajo pretočne cevke. Pri toku $\mathrm{d}i$ v diferencialni pretočni cevki je diferencialna prevodnost cevke $\mathrm{d}G = \mathrm{d}i/u$, njen integral pa celotna prevodnost G kanala,

$$i = \int \mathrm{d}i = u \int \mathrm{d}G \quad \Rightarrow \quad G = \frac{i}{u} = \int \mathrm{d}G.$$

IZOLACIJSKA UPORNOST KOAKSIALNEGA KABLA. Kabel dolžine l, radija žile a in notranjega radija plašča b naj ima enovit izolant s specifično prevodnostjo γ. Določimo izolacijsko upornost med žilo in plaščem. Ekvipotencialke med njima so soosni valji. Diferencialna upornost plasti debeline $\mathrm{d}\rho$ med valjema praktično enakih površin $2\pi\rho l$ je $\mathrm{d}R = \mathrm{d}\rho/(\gamma 2\pi\rho l)$, zato je

$$R = \int \mathrm{d}R = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\rho}{\gamma 2\pi\rho l} = \frac{\ln b/a}{2\pi\gamma l}.$$

PREVODNOST TOROIDNEGA OBROČA. Tok v toroidnem obroču (kratkostičnem ovoju) naj poganja inducirana napetost (o njej bomo govorili v okviru elektrodinamike). Obroč naj ima pravokotni presek (notranji radij obroča je a, zunanji radij je b, debelina obroča je c). Obroč naj je iz snovi s specifično prevodnostjo γ. Gostotnice so krožnice polmera ρ; tokovne cevke so radialne plasti debeline $\mathrm{d}\rho$ in širine c. Diferencialna prevodnost plasti je $\mathrm{d}G = \gamma c \mathrm{d}\rho/(2\pi\rho)$, zato je

$$G = \int \mathrm{d}G = \int_a^b \frac{\gamma c \mathrm{d}\rho}{2\pi\rho} = \frac{\gamma c \ln b/a}{2\pi}.$$

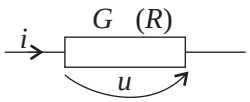
13:48

Joulska moč. Krajevno porazdelitev joulske moči v konduktivnem kanaku določa gostota $\wp_\mathrm{j} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$, celotno joulsko moč p_j v njem pa njen integral. Izrazimo to moč. V časa $\mathrm{d}t$ vstopi in hkrati iz kanala izstopi enaka množina naboja $\mathrm{d}Q$; premik enake množine $\mathrm{d}Q$ se zgodi znotraj kanala tudi med katerimakoli ekvipotencialkama s potencialno razliko $\mathrm{d}u$. Delo vira $\mathrm{d}A_\mathrm{g}$ je enako integralu dela električnih sil ($\mathrm{d}Q\mathrm{d}u$) od začetka do konca kanala,

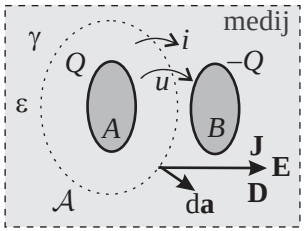
$$\mathrm{d}A_\mathrm{g} = \mathrm{d}A_\mathrm{e} = \int_{\text{začetek}}^{\text{konec}} \mathrm{d}Q\mathrm{d}u = \mathrm{d}Q \int_{\text{začetek}}^{\text{konec}} \mathrm{d}u = \mathrm{d}Qu \;\Rightarrow\; p_\mathrm{g} = \mathrm{d}A_\mathrm{g}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}Qu/\mathrm{d}t = iu = p_\mathrm{j}.$$

To delo opravi vir z močjo p_g, ki ustreza produktu iu oziroma joulski moči p_j. Če je konduktivni kanal linearen, se joulska moč izraža tudi s kvadratom napetosti ali toka,

$$p_\mathrm{j} = iu = Gu^2 = Ri^2.$$



Upor – strnjen element. Konduktivnemu kanalu priredimo upor kot strnjen element električnih vezij, ki se pridružuje prejšnjim elementom, kondenzatorju in idealnemu tokovnemu ter idealnemu napetostnemu viru. Simbol upora oziroma upornika tvorijo pravokotnik, ki stilizira kanal, in priključka (simbol dopolnijo napetost, tok in prevodnost ali upornost).



Dualnost. Od začetka poglavja izpostavljamo hkratnost dveh polj, električnega in tokovnega, ki z identičnima relacijama, $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ in $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, dajeta povod za iskanje dualnosti. Vrnimo se k primeru kovinskih teles A in B, med katerima je enovit izolant dielektričnosti ε in specifične električne prevodnosti γ. Če sta telesi naelektreni z naboja $\pm Q$ in imata medsebojno kapacitivnost C, je med njima napetost $u = Q/C$. Zaradi nje se med telesoma formira električni tok $i = Gu$, ki ga določa električna prevodnost G prevodnega kanala med njima. Telo A nadalje obkrožimo s sklenjeno ploskvijo $\mathcal{A}$ in pišimo:

32:12

$$i = \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \gamma \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \oint_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{\gamma}{\varepsilon} Q \quad \Rightarrow \quad Gu = i = \frac{\gamma}{\varepsilon} Q = \frac{\gamma}{\varepsilon} Cu \quad \Rightarrow \quad \frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Opazimo, da se dualnost polj $(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ in $(\mathbf{J}, \mathbf{E})$ odrazi tudi v dualnosti sistemskih parametrov G in C. Izolacijsko prevodnost (upornost) koaksialnega kabla, ki smo jo pred tem določali s pomočjo integracije, dobimo po zgornji zvezi takoj, saj izraz za kapacitivnost kabla že poznamo:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln b/a} \quad \text{in} \quad G = \frac{\gamma}{\varepsilon} C = \frac{2\pi\gamma l}{\ln b/a} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\ln b/a}{2\pi\gamma l}$$

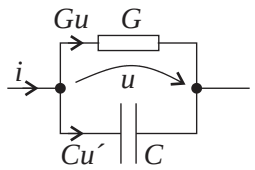
Izkoristimo dualnost za določitev izolacijske prevodnosti med žicama simetričnega dvovoda:

$$C = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln \dfrac{d + \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2a}} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{\gamma}{\varepsilon} C = \frac{\pi\gamma l}{\ln \dfrac{d + \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2a}}.$$

Podobno še pri krogelnem in drugih kondenzatorjih, če je le izolant med elektrodama enovit. Dualnost lahko smiselno prenesemo tudi na delne izolacijske prevodnosti med kovinskimi telesi (delne po analogiji z delnimi kapacitivnostmi).

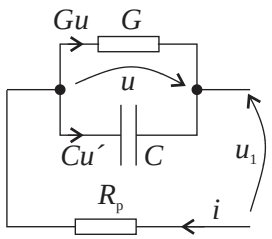
6:10

Nadomestno vezje kondenzatorja. Zaradi izolanta, ki je kanal za izolacijski tok, je kondenzator hkrati kondenzator in upor. Modelno vezje prostora med elektrodama določa vzporedno vezje upora in kondenzatorja, saj je napetost tista, ki narekuje tako električno kot tudi tokovno polje v njem. Vstopni tok v kondenzator je vsota dveh tokov,



$$i = Cu' + Gu,$$

polnilnega toka Cu', ki polni vstopno ter prazni izstopno elektrodo, in izolacijskega toka Gu, ki prehaja k drugi elektrodi. V enosmernih razmerah $(u' = 0, i = Gu)$ je v kondenzatorju akumulirana električna energija $W_\mathrm{e} = Cu^2/2 = C(i/G)^2/2$, sicer pa se vede kot upor. Nadomestno vezje kondenzatorja je nadgradnja predstavljenega modela. Zaporedno k njemu dodamo še upor z upornostjo R_p, ki predstavlja upornost priključnih žičk in obeh elektrod. Prejšnja enačba dobi obliko $i = C(u_1 - R_\mathrm{p} i)' + G(u_1 - R_\mathrm{p} i)$, v kateri je $u_1 = u + R_\mathrm{p} i$ napetost med priključnima sponkama kondenzatorja. Kasneje bo zaradi pojava elektromagnetne indukcije potrebno to vezje dopolniti še z enim elementom – s tuljavo.



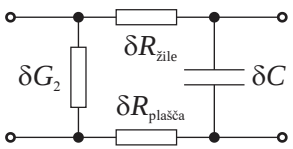
Kvaliteta izolanta. Kvaliteto izolanta dielektričnosti ε in izolacijske sp. prevodnosti γ vrednotimo v dinamičnih pogojih; te pogosto opisuje sinusna oziroma kosinusna funkcija. Če na vir z napetostjo $u(t) = U_\mathrm{m} \sin \omega t$ priključimo kondenzator s takim izolantom (in zanemarimo upornost elektrod ter priključkov), je tok skozi vir sledeč:

$$i = i_C + i_G = Cu' + Gu \quad \Rightarrow \quad i(t) = \underbrace{\omega C U_\mathrm{m}}_{I_{\mathrm{m}C}} \cos \omega t + \underbrace{G U_\mathrm{m}}_{I_{\mathrm{m}G}} \sin \omega t = I_{\mathrm{m}C} \cos \omega t + I_{\mathrm{m}G} \sin \omega t.$$

Od razmerja amplitud obeh delnih tokov je odvisna kvaliteta izolanta; če prevladuje polnilni nad izolacijskim, govorimo o dobrem, sicer pa o slabem izolantu. Njuno razmerje je:

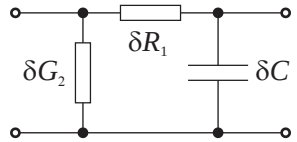
$$\frac{I_{\mathrm{m}C}}{I_{\mathrm{m}G}} = \frac{\omega C U_\mathrm{m}}{G U_\mathrm{m}} = \frac{\omega C}{G} = \frac{\omega \varepsilon}{\gamma}.$$

Kvaliteta izolanta očitno ni odvisna le od njunih snovnih lastnosti, ampak tudi od dinamike, ki jo določa krožna frekvenca ω. Pri nižjih frekvencah je kvaliteta nižja, pri višjih pa višja. Vendar ne v celoti. Pri energiji električnega polja smo omenili dielektrične izgube, ki so posledica kasnjenja polarizacije za poljsko jakostjo. Te izgube se pridružujejo joulskim, kar daje vtis, da ima izolant večjo prevodnost, s tem pa nižjo kvaliteto. Pri kondenzatorju z več izolanti se prično zadeve zapletati. Modelno vezje še vedno tvorijo kondenzatorji in upori, vendar nadomestnih kapacitivnosti in prevodnosti – v statičnem smislu – ni več mogoče določiti. Namesto njiju vstopi nova količina, t. i. admitanca, vendar o njej kasneje.

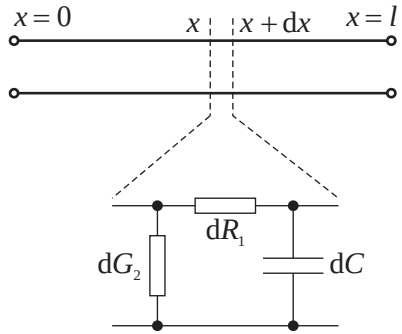


Nadomestno vezje linije. Linijo oblikuje sistem dveh vodnikov. Lahko je to simetrični dvovod, koaksialni vod, vodnik nad prevodno podlago, trakasta linija, ... V vsakem primeru je to element, ki služi povezovanju električnih sklopov. Za potrebe elektrostatike smo ta element modelirali s kondenzatorjem, za polnilni tok pa je bil prikladnejši model linije z več kondenzatorji. S spoznanji o tokovnem polju v prevodnikih in izolantih bo očitno potrebno ta model nadgraditi. Če ima linija dolžino l, potem je naslednji korak, da jo razdelimo na več krajših odsekov dolžine δl, vsakega pa predstavimo z vezjem osnovnih elementov tako, da povzemajo naravi električnega in tokovnega polja. Primer. Izberimo koaksialni vod: a je radij žile, b je notranji in c je zunanji radij plašča, γ_1 in γ_2 sta sp. prevodnosti žile oziroma plašča in izolanta, ε pa je dielektričnost izolanta. Za odsek voda dolžine δl velja sledeče:

$$\delta R_1 = \underbrace{\frac{\delta l}{\pi\gamma_1 a^2}}_{\delta R_{\text{žile}}} + \underbrace{\frac{\delta l}{\pi\gamma_1 (c^2 - b^2)}}_{\delta R_{\text{plašča}}} = r_1 \delta l \quad \text{in} \quad \delta C = \frac{2\pi\varepsilon\delta l}{\ln(b/a)} = c\delta l \quad \text{ter} \quad \delta G_2 = \frac{2\pi\gamma_2\delta l}{\ln(b/a)} = g_2 \delta l\,.$$



Modelno vezje odseka je dvovhodno vezje, ki ga lahko predstavimo na več načinov. Upornostim žile in plašča namenimo ločena upora, lahko pa ju združimo; kondenzator in upor izolanta damo k levemu ali k desnemu vhodu, ali pa prvega k levemu in drugega k desnemu vhodu. Nobena razporeditev elementov ni v prednosti. Pogosto se odločamo za združitev vzdolžnih elementov, prečna pa postavimo k desnemu vhodu. Vezje je primerno le v enosmernih razmerah; v dinamičnih vstopi v modelno vezje še tuljava, ki dodatno zaznamuje vezi med stranema dvovhodnega vezja. Splošno namreč velja, da je modelno vezje določene elektromagnetne strukture ustrezno takrat, kadar z elementi, napetostmi, toki, energijami in močmi verno odslikuje stanje elektromagnetnega polja v prostoru.



Linija kot 1D vezje. Pri študiju enosmernih napetostno-tokovnih razmer na liniji storimo naslednje: linijo predstavimo z verižnim nizom diferencialnih dvovhodnih celic. Posebnost modela je, da sta napetost med vodnikoma in tok skozi njiju po novem funkciji koordinate x, $u(x)$ in $i(x)$, ki določa splošno mesto na liniji med začetkom ($x = 0$) in koncem ($x = l$). Če uvedba strnjenih elementov odvzame 3D geometrijo (značilno za polja), se z vzdolžno koordinato x ta v eni dimenziji (1D) »vrača« nazaj. Vzdolžni element v splošni diferencialni celici je diferencialni upor z upornostjo $\mathrm{d}R_1 = r_1 \mathrm{d}x$, prečna elementa pa sta diferencialni upor s prevodnostjo $\mathrm{d}G_2 = g_2 \mathrm{d}x$ in kondezator s kapacitivnostjo $\mathrm{d}C = c\mathrm{d}x$. Vhodni količini v to celico sta $u(x)$ in $i(x)$, izhodni pa $u(x + \mathrm{d}x)$ in $i(x + \mathrm{d}x)$. Za splošno celico zapišimo oba Kirchhoffova zakona,

$$-u(x) + r_1 i(x)\mathrm{d}x + u(x + \mathrm{d}x) = 0 \quad \text{in} \quad -i(x) + g_2 u(x)\mathrm{d}x + i(x + \mathrm{d}x) = 0.$$

V drugi enačbi izostane polnilni tok kondenzatorja, saj so razmere enosmerne, sledi:

$$\frac{u(x + \mathrm{d}x) - u(x)}{\mathrm{d}x} = u'(x) = -r_1 i(x) \quad \text{in} \quad \frac{i(x + \mathrm{d}x) - i(x)}{\mathrm{d}x} = i'(x) = -g_2 u(x).$$

Ko odvajamo prvo in upoštevamo drugo ali obratno, dobimo dve podobni enačbi:

$$u''(x) = s^2 u(x) \quad \text{in} \quad i''(x) = s^2 i(x) \quad \text{pri tem je} \quad s^2 = r_1 g_2.$$

Enačbi sta posebni obliki telegrafske enačbe; slednjo bomo spoznali pri opisu linije v dinamičnih razmerah. Konstanto s določata vzdolžna upornost in prečna prevodnost linije. Poiščimo rešitev prve enačbe. Iz izkušenj z odvajanjem vemo, da je eksponentna funkcija takšna, da je njen prvi ali višji odvod sorazmeren njej sami, zato je

$$u(x) = A\mathrm{e}^{sx} + B\mathrm{e}^{-sx} \quad \Rightarrow \quad i(x) = -\frac{u'(x)}{r_1} = \frac{s}{r_1}(-A\mathrm{e}^{sx} + B\mathrm{e}^{-sx}).$$

Konstanti A in B postaneta določljivi, če vemo, kaj je na začetku linije in kaj na njenem koncu. Lahko je na enem koncu vir, na drugem breme (upor), lahko pa sta vira na obeh konceh. Izberimo primer, da je na začetku ($x = 0$) enosmerni vir z napetostjo u_g, $u(0) = u_\mathrm{g}$, na koncu ($x = l$), pa so odprte sponke, $i(l) = 0$. Sledi:

$$u(0) = A\mathrm{e}^{s0} + B\mathrm{e}^{-s0} = A + B = u_\mathrm{g} \quad \Rightarrow \quad i(l) = \frac{s}{r_1}\left(-A\mathrm{e}^{sl} + B\mathrm{e}^{-sl}\right) = 0.$$

Iz druge enačbe dobimo odnos med konstantama, z vnosom v prvo pa še obe konstanti,

$$A = B\mathrm{e}^{-2sl} \quad \Rightarrow \quad B\left(1 + \mathrm{e}^{-2sl}\right) = u_\mathrm{g} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{u_\mathrm{g}}{1 + \mathrm{e}^{-2sl}} \quad \text{in} \quad A = \frac{u_\mathrm{g}\mathrm{e}^{-2sl}}{1 + \mathrm{e}^{-2sl}}.$$

Izberimo dve vprašanji: kolikšen je tok na začetku in kolikšna je napetost na koncu linije? Pišemo:

$$i(0) = \frac{s}{r_1}(A\mathrm{e}^{s0} - B\mathrm{e}^{-s0}) = u_\mathrm{g}\sqrt{g_2/r_1}\,\mathrm{th}(\sqrt{r_1 g_2}\,l) \quad \text{in} \quad u(l) = A\mathrm{e}^{sl} + B\mathrm{e}^{-sl} = \frac{u_\mathrm{g}}{\mathrm{ch}(r_1 g_2 l)}.$$

Kolikšen je tok na začetku in kolikšna je napetost na koncu odprte linije, je odvisno od r_1 in g_2. Če je izolant idealen, $g_2 \to 0$, je vhodni tok enak nič, izhodna napetost pa enaka vhodni; če sta žili idealni, $r_1 \to 0$, je vhodni tok enak $u_\mathrm{g} g_2 l$, izhodna napetost pa je enaka vhodni; ko so žili in izolant stvarni, $r_1 g_2 > 0$, pa je izhodna napetost ustrezno manjša od vhodne. V enosmernih razmerah kapacitivnost c očitno ne odigra svoje vloge. Moremo pa pridobljen rezultat za $u(x)$ uporabiti za določitev akumulacije električne energije na trasi dvovoda,

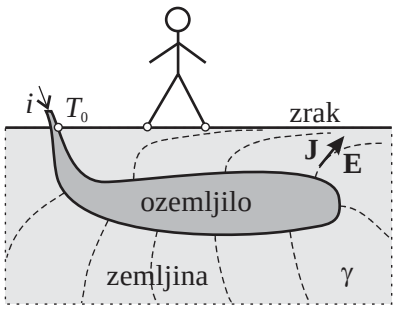
$$W_\mathrm{e} = \int_{x=0}^{x=l} \tfrac{1}{2}cu^2(x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}c\int_{x=0}^{x=l} u^2(x)\mathrm{d}x.$$

Ozemljevanje je pomembno z vidika varovanja ljudi in zaščite naprav. To je tehniški ukrep, ki zmanjšuje možnosti, da bi razne kovinske strukture (ohišja, ograje) zašle v okoliščine, ki bi v področju gibanja ljudi ali nameščanja naprav tlakovale pogoje za elektromagnetna polja, ki so nevarna za ljudi in naprave. Nevarnost so strele, kratki stiki in različne okvare. Da je morebitnih težav čim manj, je potrebno poskrbeti za kvalitetno ozemljevanje in čvrst galvanski stik kovinskih delov z zemljo. Izkaže se, da je problematika tesno povezana s ponikalno oziroma ozemljitveno upornostjo.

18:44

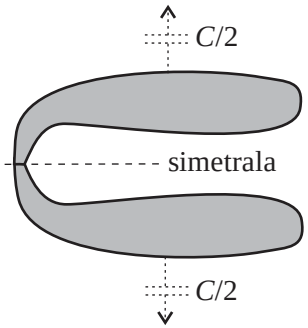
Kot ozemljilo smatramo v zemljo zakopano kovinsko telo, do katerega iz površja vodi priključni vodnik. Predpostavimo določen tok i, ki iz naprave (morda strelovoda) vstopa v ozemljilo, iz njega pa v zemljo. Da dobimo določen občutek za oblikovanost tokovnega polja v zemlji, se ozrimo na razmere na meji dveh prevodnikov. Pri ozemljilu imamo dve meji: mejo prevodnik – zemlja in mejo zemlja – zrak. Za obe meji velja, da sta razmerji specifičnih prevodnosti stičnih medijev zelo različni. Ozemljilo s sp. prevodnostjo $\approx 10^7$ S/m, zemlja s sp. prevodnostjo $\approx 10^{-2}$ S/m in zrak s sp. prevodnostjo $\approx 10^{-12}$ S/m. Tokovnice pod površjem ozemljila so praktično tangentne, v zemljo pa vstopajo praktično pod pravim kotom. Tokovnice s spodnje strani ozemljila tonejo v globino, one z zgornje strani pa se pnejo proti površju, vendar se meji le tangentno približajo in širijo vstran od ozemljila. Slika tokovnic v zemlji asociira na ponikanje, zato temu toku pravimo ponikalni tok; od tod tudi ime ponikalna upornost. Zemljina ob ozemljilu nikakor ni homogena, je plastovita, vmes je kamenje, prod, ... V izračunih bomo privzeli homogeno zemljino s specifično prevodnostjo γ. Ozemljilo ima nek potencial, ki ustreza napetosti do neskončne okolice, kvocient tega potenciala in toka pa določa ponikalno upornost,

9:40



$$V_{\text{oz.}} = \int_{T_0}^{T_\infty} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{oz.}} = \frac{V_{\text{oz.}}}{i} \quad \Rightarrow \quad u_{\text{koraka}} = \int_{\text{korak}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Pomembna je tudi napetost »razkoraka«, t. i. napetost koraka. Če smo »na koraku« ob ozemljilu strelovoda, ko se vanj ujame strela, smo gotovo v nevarnosti. Da bo ta napetost čim manjša, mora biti ponikalna upornost kar najmanjša. Kako to doseči? Tal si ne moremo izbirati, so takšna kot so. Edino, na kar imamo vpliv, je izbira primerne geometrije ozemljila.

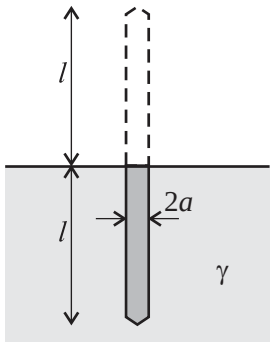


Tehnika določanja ponikalne upornosti. Slika ponikalnega polja asociira na polje dveh simetričnih teles, tega v zemlji in njemu zrcalnega nad zemljo. Če uspemo simetričnemu kovinskemu telesu določiti kapacitivnost C do neskončnosti in vzamemo polovico njene vrednosti ter uporabimo dualnost, zamenjamo ε z γ, dobimo ponikalno upornost,

$$\frac{C/2}{G_{\text{oz.}}} = \frac{R_{\text{oz.}}C}{2} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{oz.}} = \frac{2\varepsilon}{\gamma C}$$

PALIČASTO OZEMLJILO. Srečali smo se z naelektreno daljico dolžine $2l$, ki nosi naboj Q, in povedali, da je izraz za potencial možno uporabiti kot aproksimacijo pri tanki naelektreni palici. Naj je ta polmera a. Oceno za potencial palice dobimo, če splošno točko (ρ, z) približamo površini, npr. v točko $T_0(a, 0)$ na sredini palice,

$$V(\rho, z) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon l}\ln\frac{\sqrt{\rho^2 + (z+l)^2} + z + l}{\sqrt{\rho^2 + (z-l)^2} + z - l} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{palice}} \cong \frac{Q}{8\pi\varepsilon l}\ln\frac{\sqrt{a^2 + l^2} + l}{\sqrt{a^2 + l^2} - l} \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{2l}{a}\left(= \frac{Q}{C}\right).$$



Upoštevali smo tole: da je $a \ll l$ in da je takrat $\sqrt{a^2 + l^2} - l \approx 2a^2/l$. Če v zemljo zarinemo palico dolžine l in polmera a, dobimo paličasto ozemljilo, simetrično telo pa je palica dolžine $2l$. Njeno kapacitivnost vstavimo v dualno zvezo; dobimo

$$C = \frac{4\pi\varepsilon l}{\ln(2l/a)} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{oz.}} = \frac{2\varepsilon}{\gamma C} = \frac{\ln(2l/a)}{2\pi\gamma l}.$$

Iz izraza je razviden učinek geometrije: ugodnejša je daljša in debelejša palica. Učinek »debele« palice lahko ustvarimo z npr. štirimi palicami, ki jih vzporedno zarinemo v zemljo skozi točke, ki ležijo v ogljiščih kvadrata s stranico d. Pri tem se spomnimo analize snopa štirih vodnikov nad zemljo. Ugotovili smo, da četvorčku pripada ekvivalentni radij, ki je precej večji od polmera žic, $r_{\text{ekv.}} = \left(ad^3\sqrt{2}\right)^{1/4}$. Ponikalna upornost električno spojenega štiripaličnega ozemljila je

$$R_{\text{oz.}} = \ln(2l/r_{\text{ekv.}})/2\pi\gamma l.$$

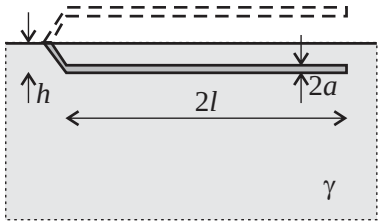
TRAČNO OZEMLJILO. To ozemljilo je najpogostejše in se ga uporablja pri stanovanjskih hišah. Stran od priključne omarice se v okvirno meter globok jarek dolžine cca 20 m položi ozemljilni vodnik. Ponovno izhajamo iz naelektrene palice dolžine

$2l$. Če je vkopna globina h, potem je simetrično telo par vzporednih vodnikov dolžine $2l$, ki je v razmiku $2h$. Uporabimo formulo za potencial palice in mu prištejemo še potencialni prispevek druge palice,

$$V_{\text{dveh palic}} \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{2l}{a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{2l}{2h} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{2l}{\sqrt{2ah}},$$

saj je tudi $2h \ll 2l$. Od tu sledita kapacitivnost in ponikalna upornost,

$$C = \frac{4\pi\varepsilon l}{\ln\left(2l/\sqrt{2ah}\right)} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{oz.}} = \frac{2\varepsilon}{\gamma C} = \frac{\ln\left(2l/\sqrt{2ha}\right)}{2\pi\gamma l} \quad \text{ali} \quad R_{\text{oz.}} = \frac{\ln\left(2l/\sqrt{2hr_{\text{ekv.}}}\right)}{2\pi\gamma l}.$$



Kadar so tla bolj peščena, se v jarek položi več vodnikov. V tem primeru priredimo snopu vodnikov ekvivalenti radij, ki v formuli nadomesti polmer a. Možen je tudi vkop več vodnikov, ki so razpeljani v več smeri; razvod vodnikov spominja na zvezdo, ki se pri velikem številu vodnikov navidezno približuje »plošči« polmera $2l$.

PLOŠČNO OZEMLJILO. Začnimo z naelektreno ploščo polmera a. Prizemimo, da ima elektrina Q na njej enakomerno gostoto. Določimo potencial centra plošče. Naelektritev plošče lahko predstavimo z nizom naelektrenih koncentričnih kolobarjev. Splošni kolobar ima polmer r, diferencialno širino $\mathrm{d}r$ in naboj $(Q/\pi a^2)2\pi r\mathrm{d}r = 2Qr\mathrm{d}r/a^2$. Zapišemo splošen prispevek k potencialu v centru plošče in ga integriramo,

$$\mathrm{d}V_{\text{centra}} = \frac{2Qr\mathrm{d}r/a^2}{4\pi\varepsilon r} = \frac{Q\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon a^2} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{centra}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\int_0^a \mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon a}\left(= \frac{Q}{C}\right).$$

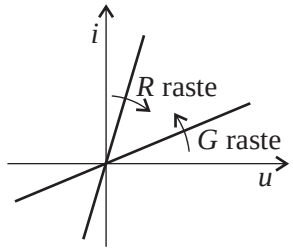
Prekršek je, če trdimo, da je potencial plošče enak potencialu centra. V grobem približku drži, vendar je grob približek že tudi privzetek, da je naboj po plošči enakomerno razporejen. To zadevo bomo na koncu pojasnili, sedaj pa nadaljujmo z računom. Grob približek kapacitivnosti je $2\pi\varepsilon a$. Če je plošča globoko v zemlji, na globini $h \gg a$, je ponikalna upornost $1/2\pi\gamma a$. Če pa je plošča tik pod površjem, $h \ll a$, je ponikalna upornost dvojna, $1/\pi\gamma a$, saj je za ponikalni tok na voljo le pol prostora. Prišli smo do formule, ki žal ni točna, ampak le orientacijska. Kaj smo pri računu vede spregledali? Gotovo to, da naboj na plošči nima enakomerne gostote, ampak je ob njenem robu gostota občutno večja kot v osrednjem delu.

Da bi ta problem razrešili, moramo ploščo (disk) vzeti kot potlačen rotacijski elipsoid. Nadaljevanju naloge na tem nivoju nismo kos, se pa izkaže, da je celoten disk takrat ekvipotencialna ploskev. Izvajanje privede do lepe formule za ponikalno upornost, $R_{\text{oz.}} = 1/4\gamma a$, ki pa je – presenetljivo – zelo blizu grobe ocene; groba ocena daje namreč za cca 30% previsok rezultat in ga lahko razumemo kot pesimistično oceno. Praktična izvedba ploščnega ozemljila ni plošča, ampak mreža prekrižanih vodnikov. Za določitev ponikalne upornosti mrežnega ozemljila priredimo njenim gabaritom ekvivalentno ploščo. Če je mrežin ekvivalentni radij 10 m, prevodnost tal pa 0,01 S/m, je $R_{\text{oz.}} = 2{,}5$ ohma.

Vsi izračuni ozemljitvene upornosti so zgolj in samo orientacijski; predvsem iz razloga, ker so tla nekaj, kar se prek leta spreminja. Ker imamo sušna in mokra obdobja, moramo vsa ozemljila ustrezno predimenzionirati, da smo s pričakovanji o ponikalni upornosti in zasledovani varnosti še vedno na varni strani.

§24. Elementi enosmernih električnih vezij

Elementov električnih vezij je veliko. Tu se bomo omejili na tiste, ki so pomembni v razmerah časovno stalnih napetosti in tokov (enosmerna vezja), sicer pa jih redno srečujemo tudi v drugih električnih vezjih. Elemente razvrščamo v skupini aktivnih (generatorji, viri) in pasivnih (porabniki, bremena). Glede na (u, i) diagram delimo elemente vezij med linearne in nelinearne, glede na število priključnih sponk pa med dvopolne in večpolne. Tri dvopolne elemente že poznamo, to so linearni upor ter idealni napetostni in idealni tokovni vir. Tem bomo pridružili še linearni vir, nekaj nelinearnih bremen in primer nelinearnega vira. Pred kratkim smo spoznali štiripolni element, linijo oziroma dvovod, v elektrostatiki pa tudi kondenzator in vezje delnih kapacitivnosti, ki ima formalno toliko priključnih sponk, kolikor je prevodnih teles.



Linearni upor. Določa ga linearna zveza med napetostjo in tokom, $i = Gu$. V (u, i) diagramu – z napetostjo u na abscisi in s tokom i na ordinati – jo upodablja premica skozi izhodišče; strmejša premica pripada uporu z manjšo upornostjo.

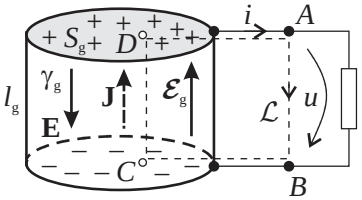
Električni vir. V okviru elektrostatike smo predstavili idealni tokovni in idealni napetostni vir. Pri tem smo omenili tudi fizikalna ozadja, kot npr. kemični procesi, svetloba, toplota, idr. Električni viri so tudi različni elektromehanski sistemi in elektronska vezja. Problematika električnih virov je obsežna in zahtevna poznavanje mehanike, fizike, kemije in celotne elektrotehnike, zato želimo v okviru osnov elektrotehnike opredeliti zgolj glavne značilnice, ki so različnim električnim virom skupne. Najprej se bomo seznanili osnovami najzgodnejšega enosmernega vira.

Voltov člen tvorijo razredčena žveplena kislina (elektrolit) in vanjo potopljeni bakrova in cinkova elektroda. Elektrolit raztaplja elektrodi; v elektrolit vstopajo kationi kovin, ki se zadržujejo ob matičnih elektrodah, pod površinama elektrod pa se zbirajo prosti elektroni. Ob površini vsake elektrode se gradita sloja nasprotnih nabojev, katerih električno polje je usmerjeno k elektrodi. Električni polji raztapljanji elektrod zavirata in končno tudi ustavita. Vzpostavi se par elektrodnih

napetosti: vsaka od njih med elektrolitom izza sloja kationov in elektrodo. Ker so elektrodne napetosti za različne kovine različne, vse pa so negativne, je skupna električna napetost med elektrodama enaka razliki njunih elektrodnih napetosti. Ker je cinkova elektrodna napetost nižja od bakrove, je cinkova elektroda katoda, bakrova pa anoda Voltovega člena. Brž ko med elektrodi priključimo breme, krenejo elektroni iz katode skozi breme k anodi. Hkrati z njimi se zganejo tudi ioni v elektrolitu: vodikovi ioni se pomikajo k bakrovi elektrodi in se z elektroni z nje vežejo v vodik, sulfatni ioni pa h katodi in se s cinkovimi ioni vežejo v cinkov sulfat. Zmanjševanje sloja cinkovih ionov sproži proces ponovnega raztapljanja cinka, kar vodi v njegovo postopno »izgorevanje«.

Elektrokemičnim procesom v Voltovem členu moremo prirediti elektrotehniški model vira. V prostoru med elektrodama so prisotne neelektrične sile, ki ločujejo ($\pm$) naboje; te sile pooseblja generatorsko polje $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$; ločeni ($\pm$) naboji ustvarjajo v prostoru med elektrodama električno polje jakosti $\mathbf{E}$, ki oponira polju $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$; v prostoru med elektrodama se razvije tokovno polje z gostoto $\mathbf{J}$, ki jo določa vektorska vsota električne in neelektrične sile oziroma polje $\mathbf{E} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$.

27:35



Linearni električni vir. Pri njem se opiramo na Ohmov zakon v razširjeni obliki, $\mathbf{J} = \gamma\left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}\right)$, ki v prevodnem kanalu določa odnos med tokom in silo na proste nosilce. Kot prostorski model vira izberimo cilinder dolžine l_g in preseka S_g, ki je iz snovi s sp. prevodnostjo γ_g. Na dnu in vrhu cilindra sta krožni elektrodi, ki vodita do priključnih sponk vira. Vzdolž cilindra deluje neelektrična sila, ki jo pooseblaja polje $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$. Ta s silo $\delta Q \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ generira presežek pozitivnega naboja na zgornji in enak presežek negativnega na spodnji elektrodi, ta naboja pa ustvarjata električno polje $\mathbf{E}$, ki oponira polju $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$. Nadalje privzemimo, da so polja $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$, $\mathbf{J}$ in $\mathbf{E}$ v cilindru homogena. Zasnovan model in privzete homogenosti so velike poenostavitve. Geomertije resničnih virov sploh niso enostavne, tudi zgradba Voltovega člena ni, pa tudi neeelektričnih sil oziroma polj $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ pogosto ne zmoremo ustrezno matematično zapisati. Kljub temu se izkaže, da je poenostavljen model linearnega vira povsem ustrezen, predvsem pa dovolj nazoren.

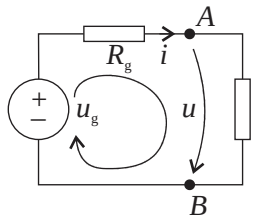
LINEARNI NAPETOSTNI VIR. Ko na opisano strukturo priključimo breme, se v zanki (skozi vir in breme) vzpostavi tok i, med elektrodama oziroma priključnima sponkama pa napetost $u_{AB} = u$. Za električno poljsko jakost v sklenjeni zanki velja

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}_{u} + \underbrace{\int_B^C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}_{\cong 0} + \int_C^D \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \underbrace{\int_D^A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}_{\cong 0} = 0;$$

pri tem smo predpostavili, da sta elektrodi odlično prevodni (zato znak $\cong 0$). Izpišimo tretjo napetost:

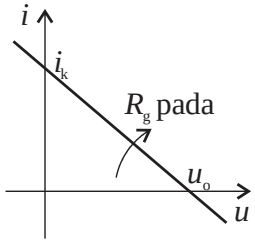
$$\int_C^D \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_C^D \frac{\mathbf{J}}{\gamma_\mathrm{g}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} - \underbrace{\int_C^D \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}_{u_\mathrm{g}} = \frac{i/S_\mathrm{g}}{\gamma_\mathrm{g}} l_\mathrm{g} - u_\mathrm{g} = \left(\frac{l_\mathrm{g}}{\gamma_\mathrm{g} S_\mathrm{g}}\right) i - u_\mathrm{g} = R_\mathrm{g} i - u_\mathrm{g}.$$

V prvem sumandu smo upoštevali homogenost tokovnega polja in prepoznali električno upornost R_g cilindra. Integral polja $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ je t. i. notranja napetost vira u_g. Če to zanesemo v zgornjo relacijo, dobimo enačbo linearnega napetostnega vira,



$$u + R_\mathrm{g} i - u_\mathrm{g} = 0.$$

Enačba ponuja modelno vezje: oblikujejo ga vir z napetostjo u_g, upor z upornostjo R_g in breme. Vezje levo od sponk A in B je nadomestno vezje linearnega vira. V (u, i) diagramu mu pripada poševna premica; njen nagib določa t. i. notranja upornost vira R_g. Sporočilna je tudi njena implicitna oblika,



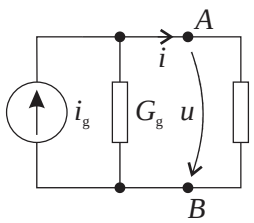
$$\frac{u}{u_\mathrm{g}} + \frac{i}{(u_\mathrm{g}/R_\mathrm{g})} = 1.$$

Imenovalca določata presečišči premice z osema. Presečišče na abscisi je točka odprtih sponk vira, $i = 0, u_\mathrm{o} = u_\mathrm{g}$ – ko je upornost bremena neskončna. Presečišče na ordinati je točka kratkega stika, $u = 0, i_\mathrm{k} = u_\mathrm{g}/R_\mathrm{g} = G_\mathrm{g} u_\mathrm{g}$ – ko je upornost bremena enaka nič. Pomembno je sprejeti, da so enačba, modelno vezje in (u, i) karakteristika trije enakovredni »obrazi« tega vira. V primeru, da je notranja upornost zanemarljiva, govorimo o praktično idealnem napetostnem viru.

16:27

LINEARNI TOKOVNI VIR. Tudi pri njem izhajamo iz iste enačbe, le da jo zapišemo nekoliko drugače:

$$\mathbf{J} = \gamma_\mathrm{g}\left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}\right) = \gamma_\mathrm{g}\mathbf{E} + \boldsymbol{\mathcal{J}}_\mathrm{g} \quad \text{kjer je } \boldsymbol{\mathcal{J}}_\mathrm{g} = \gamma_\mathrm{g}\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}.$$

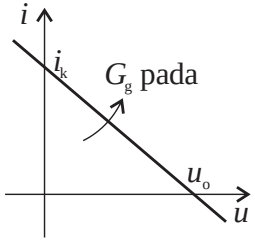


Vektor $\boldsymbol{\mathcal{J}}_\mathrm{g}$ predstavlja neodvisno tokovno gostoto. Gostota $\mathbf{J}$ je vsota gostote $\boldsymbol{\mathcal{J}}_\mathrm{g}$, ki je usmerjena navzgor, in gostote $\gamma_\mathrm{g}\mathbf{E}$, ki je usmerjena navzdol. Če v cilindru izberemo presek $\mathcal{A}$ z navzgor usmerjeno normalo in po njem integriramo gostoto toka, dobimo tok i vzdolž cilindra:

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{A}} \gamma_\mathrm{g}\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \underbrace{\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\mathcal{J}}_\mathrm{g}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a}}_{i_\mathrm{g}} = -\gamma_\mathrm{g}\left(u/l_\mathrm{g}\right)S_\mathrm{g} + i_\mathrm{g} = -\left(\frac{\gamma_\mathrm{g}S_\mathrm{g}}{l_\mathrm{g}}\right)u + i_\mathrm{g} = -G_\mathrm{g}u + i_\mathrm{g} = i.$$

V prvem sumandu smo upoštevali, da je polje $\mathbf{E}$ usmerjeno navzdol, zato minus, in prepoznali električno prevodnost G_g cilindra. Integral gostote $\boldsymbol{\mathcal{J}}_\mathrm{g}$ je t. i. notranji tok vira i_g. Dobili smo enačbo linearnega tokovnega vira,

$$i + G_\mathrm{g}u - i_\mathrm{g} = 0.$$



Enačba ponuja modelno vezje: tvorijo ga vir s tokom i_g, upor s prevodnostjo G_g in breme. Vezje levo od sponk A in B je nadomestno vezje linearnega tokovnega vira; v (u, i) diagramu mu ustreza poševna premica; nagib določa t. i. notranja prevodnost vira G_g. Nekaj pove še implicitna oblika,

$$\frac{u}{\left(i_\mathrm{g}/G_\mathrm{g}\right)} + \frac{i}{i_\mathrm{g}} = 1.$$

Imenovalca določata presečišči premice z osema. Presečišče na ordinati je točka kratkega stika vira, $u = 0, i_\mathrm{k} = i_\mathrm{g}$ – ko je upornost bremena enaka nič. Presečišče na abscisi je točka odprtih sponk vira, $i = 0, u_\mathrm{o} = i_\mathrm{g}/G_\mathrm{g} = R_\mathrm{g}i_\mathrm{g}$ – ko je upornost bremena neskončna. Tudi tu je pomembno, da so enačba, modelno vezje in (u, i) karakteristika trije enakovredni obrazi vira. V primeru, da je notranja prevodnost zanemarljiva, govorimo o praktično idealnem tokovnem viru.

9:19

EKVIVALENTNOST VIROV. Iz predstavitve virov izberimo enačbi virov v odsečni obliki,

$$\frac{u}{u_\mathrm{g}} + \frac{i}{\left(u_\mathrm{g}/R_\mathrm{g}\right)} = 1 \quad \text{in} \quad \frac{u}{\left(i_\mathrm{g}/G_\mathrm{g}\right)} + \frac{i}{i_\mathrm{g}} = 1,$$

ki govorita v resnici o istem viru, da je torej $u_\mathrm{g} = R_\mathrm{g} i_\mathrm{g} = R_\mathrm{g} i_\mathrm{k} = u_\mathrm{o}$. Dalje tudi velja

$$\frac{u}{u_\mathrm{o}} + \frac{i}{i_\mathrm{k}} = 1 \quad \text{pri} \quad u_\mathrm{o} = R_\mathrm{g} i_\mathrm{k}.$$

Vir je en sam: 1) z zgornjo enačbo, 2) z (u, i) karakteristiko, ki jo določa premica skozi znani točki vira, $(0, u_\mathrm{o})$ in $(i_\mathrm{k}, 0)$, in 3) z dvema nadomestnima vezjema, zaporednim vezjem napetostnega vira in upora ali vzporednim vezjem tokovnega vira in upora. Katero od vezij izberemo, je stvar prikladnosti, z stališča bremena pa sta enakovredni.

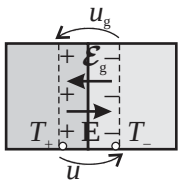
Naj ima 1,5 voltna baterija notranjo upornost 50 mΩ. Predstavimo jo ali z virom napetosti 1,5 V in zaporednim uporom upornosti 50 mΩ ali pa z virom toka 30 A in vzporednim uporom upornosti 50 mΩ. Z uporabo ekvivalentnosti moremo skupini virov prirediti nadomestni vir. Vire združujemo s ciljem, da pridobimo vir z višjo napetostjo ali pa vir z večjim tokom. Če bi 18 enakih baterij želeli uporabiti za vir z napetostjo odprtih sponk 9 V, bi po tri baterije vezali vzporedno, trojke pa zatem vezali zaporedno; dobili bi vir z notranjo upornostjo 0,1 Ω.

Kontaktna napetost. Energijo elektrona v atomu kovine določa vsota njegove električne potencialne energije in njegove kinetične energije. Energije elektronov pri absolutni ničli (0 K) ne presegajo Fermijevega energijskega nivoja W_F; ta ima (na račun potencialne energije) vedno negativno vrednost. Energija W_F je lastna snovi in jo določa zgradba atoma. Iznosu $|W_\mathrm{F}|$ ustreza izstopno delo $W_\mathrm{izs.}$ in pomeni energijo, ki bi jo moral elektron z energijo W_F pridobiti, da bi izstopil iz snovi in dosegel vakuumski nivo (0 eV). To dodatno energijo lahko elektronu zagotovita toplota ali svetloba. Pri temperaturah iznad absolutne ničle so energije posameznih elektronov seveda tudi iznad W_F, kar pomeni, da je zanje potrebna izstopna energija temu ustrezno manjša.

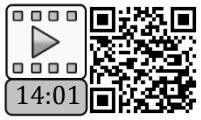
Kontaktno napetost označuje kvantno-električni pojav, ki se zgodi ob metalurškem spoju kovin z različnima vrednostma izstopnih del oziroma Fermijevih nivojev. Pride namreč do migracije elektronov prek spoja oziroma difuzije elektronov

iz kovine z višjim v kovino z nižjim Fermijevim nivojem. Difuziji nadalje pripišemo difuzijsko polje $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$, ki določa silo $-e\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ na migrirajoče elektrone. Ko postaneta presežek elektronov v prvi in primanjkljaj elektronov v drugi kovini tolikšna, da njuno električno polje $\mathbf{E}$ zavre nadaljnjo migracijo, se med kovinama vzpostavi termodinamično ravnovesje, pri katerem elektroni stik kovin še vedno prestopajo, vendar v obe smeri uravnoteženo. Takrat integralu poljske jakosti $\mathbf{E}$ od T_+ do T_- ustreza električna napetost u, integralu polja $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ od T_- do T_+ pa njej enaka generatorska (notranja) napetost u_g,

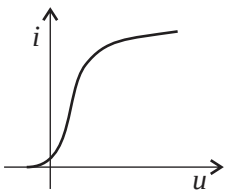
$$u = \int_{T_+}^{T_-} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{in} \quad u_\mathrm{g} = \int_{T_-}^{T_+} \boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{ter} \quad u = u_\mathrm{g}.$$



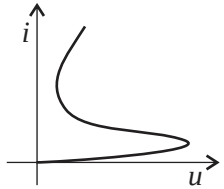
Situacija spominja na model napetostnega vira, ki pa še ne pomeni pravega vira. Če bi med kovini priključili tretjo, v vlogi bremena, bi v zanki ne bilo toka. Razlog je v novih kontaktnih napetostih prvih dveh kovin s tretjo. Če imajo vsi trije stiki kovin enake zunanje pogoje (temperatura, svetloba), je vsota njihovih generatoskih napetosti v sklenjeni zanki enaka nič. Razmere se spremenijo, če se enega od stikov npr. segreva, ostalih dveh pa ne. V zanki se pojavi rezultančna napetost, ki je posledica spremenjenih energij elektronov z obeh strani ogrevanega spoja, v zanki treh kovin pa tok. Prek ogrevanega stika se vrši stalna difuzija elektronov iz ene kovine v drugo, ki jo energijsko vzdržuje na spoj dovajana toplota.



Nelinearni dvopoli. V elektrotehniki imamo mnogo elementov, pri katerih odnos med tokom in napetostjo ni linearen. Razlogi za nelinearnost so zelo različni in imajo korenine v različnih fizikalnih, kemičnih ali kvantnih procesih znotraj prevodnega kanala.



Zgodnja elektrotehnika je slonela na vakuumskih elementih. Pri vakuumski diodi je katoda ogrevana, zato iz nje izstopajo elektroni; te zatem električno polje med anodo in katodo pospešeno vleče k anodi. Vzpostavljen prevoden kanal nima nikakršnih podobnosti z linearnim kanalom, kar se nazorno vidi tudi v odvisnosti $i(u)$. Karakteristiko diode zaznamuje več detajlov: rep v drugem kvadrantu je diodino generatorsko področje (odvisno je od osvetljenosti in ogretosti katode), spodnje koleno, strmina in zgornje koleno ter zasičenje – ko izstop elektronov iz katode porastu napetosti več ne sledi.

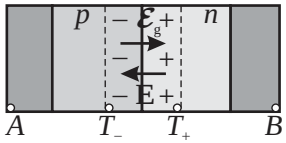


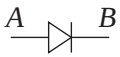
Nelinearna je fluorescentna sijalka. Za vžig potrebuje precej višjo napetost (poljsko jakost) – ta sproži verižno ionizacijo, posledično se okrepi ionski tok, pomnožijo se trki med molekulami plina in sijalka zasveti. Po vžigu ji za svetenje zadošča že občutno nižja napetost.

Pojmov upornost in prevodnost pri teh in vseh drugih nelinearnih elementih ne uporabljamo; zamenjujeta ju dva druga: kvocient i/u kot funkcija totalne prevodnosti in kvocient $\mathrm{d}i/\mathrm{d}u$ kot funkcija inkrementalne (diferencialne) prevodnosti ter njima recipročni totalna upornost u/i oziroma inkrementalna upornost $\mathrm{d}u/\mathrm{d}i$.

Sodobno elektrotehniko so skoraj na vseh področjih preplavili polprevodniški elementi. Razlaga principov delovanja in obnašanja teh elementov posega v kvantno fiziko; pomembna so energijska stanja nosilcev naboja, kontaktne napetosti, koncentracije in difuzija. Osnovni dvopolni elementi so dioda, fotodioda, sončna celica, prebojna dioda, ..., tem sledijo še tripolni, kot so bipolarni tranzistor, JFET, MOSFET tranzistor, ... Tu se bomo omejili na pasivni nelinearni element, diodo, in aktivni nelinearen vir, sončno celico.

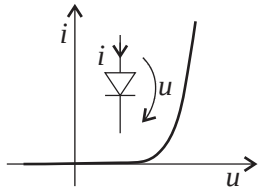
POLPREVODNIŠKA DIODA. Osnova diode je metalurški spoj polprevodnika p, s primesmi akceptorjev, ki mu pridodajo vrzeli v valenčnem energijskem pasu, in polprevodnika n, s primesmi donorjev, ki mu pridodajo proste elektrone v prevodnem energijskem pasu. Takemu stiku rečemo kratko spoj p-n. V nedopiranem polprevodniku je t. i. Fermijev energijski nivo približno v sredini med energijskim dnom prevodnega in energijskim vrhom valenčnega pasu. V p-tipu polprevodnika je Fermijev nivo pomaknjen k valenčnemu pasu, v n-tipu pa k prevodnemu pasu. Izmik Fermijevih nivojev, ki ga pogojujeta višji koncentraciji vrzeli v valenčnem pasu v p-tipu in elektronov v prevodnem pasu v n-tipu, je razlog za prehod prostih elektronov iz prevodnega pasu tipa n v prevodni pas tipa p in prehod vrzeli iz valenčnega pasu tipa p v valenčni pas tipa n. V smislu modela električnega vira moremo oba prehoda pripisati delovanju neelektričnih sil $\pm e\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ oziroma polju $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$, ki je ob spoju usmerjena od p- k n-tipu. Ob spoju se vzpostavita oblogi nasprotnih nabojev z električnim poljem $\mathbf{E}$ v obratni





smeri, ki difuziji nabojev skozi spoj tudi zaustavi. Med točkama izza oblog se vzpostavi električna napetost, ki ustreza integralu jakosti **E** od T_+do T_-, in njej enaka notranja (neelektrična) napetost, ki ustreza integralu jakosti $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ od T_- do T_+.

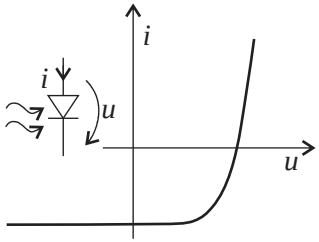
Spoj p-n kot tak še ni primeren za vključitev v električno vezje; priključni površini na krajiščih spoja je potrebno namreč še metalizirati, kar strukturo razširi z novima spojema in novima notranjima in električnima napetostma. Smiselno je, da sta metalizaciji izvedeni z isto kovino, da se »krog« treh energijskih stopnic od točke A do B zaključi (0 J). Med sponkama A in B razširjene strukture velja, da sta tako integral jakosti **E** od A do B kot tudi integral jakosti $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ od B do A enaka nič.



Če med sponki diode priključimo enosmerni vir nastavljive napetosti u, je od te napetosti odvisen tudi tok i skozi njo. Ob upoštevanju polprevodniške strukture se ugotovi, da je diodina (u, i) relacija eksponentna; določa jo funkcija

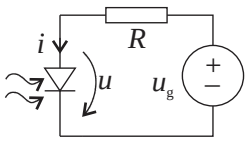
$$i(u) = i_S(\exp(u/u_T) - 1),$$

pri čemer sta i_S tok nasičenja in u_T termična napetost; v podrobnosti obeh količin in izpeljavo funkcijskega odnosa se tu ne moremo spuščati. V področju $u < 0$ (zaporna smer) je diodin tok zanemarljiv, omejuje ga tok i_S, ki je neznaten glede na tok v področju $u > 0$ (prevodna smer). Dioda se vede kot »ventil«, ki je v prevodni smeri diode odprt, v zaporni smeri diode pa zaprt oziroma neprevoden.



SONČNA CELICA. Polprevodniška dioda postane sončna celica, če na njen spoj p-n vpada svetloba. Karakteristika sončne celice je identična karakteristiki neosvetljene diode, le da je pomaknjena navzdol za vrednost, ki jo določa svetlobni tok. Imejmo zanko: osvetljena dioda, upor in vir z napetostjo u_g. Pri toku i je enačba zanke sledeča:

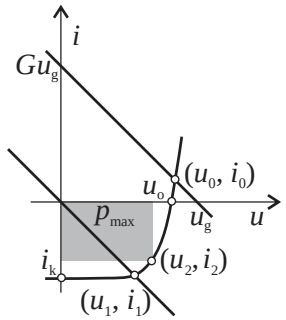
$$u - u_\mathrm{g} + Ri(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad i(u) = Gu_\mathrm{g} - Gu.$$



Z $i(u)$ smo označili odvisnost toka od napetosti na diodi. Rešitev enačbe najdemo grafično. Če v diodin (u, i) diagram vrišemo premico, ki jo določa desna stran enačbe, seka ta absciso v točki $(u_\mathrm{g}, 0)$, ordinato pa v točki $(0, Gu_\mathrm{g})$, dobimo točko (u_0, i_0), ki pove, kolikšna sta tok v zanki in napetost na diodi. Nadalje privzemimo, da je napetost vira nič, $u_\mathrm{g} = 0$,

$$i(u) = -Gu,$$

in vrišimo še premico, ki tokrat prečka izhodišče. Ta premica seka karakteristiko diode v točki (u_1, i_1). Kaj ugotavljamo? Osvetljena dioda je vir, ki žene v zanki tok $-i_1$ od + polaritete diode (anode) skozi upor k − polariteti diode (katodi) ter dalje skozi diodo do njene anode. Na uporu je napetost u_1 in v njem se sprošča toplota $-i_1 u_1 > 0$. Četrti diodin kvadrant je očitno njeno generatorsko področje, ki ga tokrat ne določa premica, kot pri linearnem viru, ampak konveksni del (u, i) karakteristike osvetljene diode, ki leži med točko napetosti odprtih sponk $(u_\mathrm{o}, 0)$ in točko toka kratkega stika $(0, i_\mathrm{k})$. Če prevodnost bremena spreminjamo (npr. drsni upor), najdemo točko (u_2, i_2), v kateri ima produkt $-i_2 u_2$, ki je moč na bremenu, maksimalno vrednost. Osvetljeni diodi priredimo modelno vezje. Zapišimo diodin tok kot vsoto toka kratkega stika i_k in toka neosvetljene diode $i_\mathrm{neos.}$,



$$i = i_\mathrm{k} + i_\mathrm{neos.}.$$

Modelno vezje je očitno tokovni vir s tokom i_k in njemu vzporedno vezana neosvetljena dioda.

Ob osvetljevanju spoja p-n prejmejo elektroni v valenčnih pasovih energije, ki zadoščajo za preskoke v prevodna pasova. Zaradi spremenjenih koncentracij elektronov v prevodnih in vrzeli v valenčnih pasovih se pojavita dodatni difuzijski sili $\pm e\delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ in dodatna poljska jakost $\delta\mathbf{E}$. Izkaže se, da sta vektorski polji $\delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ in $\delta\mathbf{E}$ ob spoju p-n usmerjeni nasprotno poljema $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\mathrm{g}$ in $\mathbf{E}$ (v termodinamičnem ravnovesju) in sta tisti polji, ki v električnem viru – kot modelu osvetljene diode – določata relevantno neelektrično in relevantno električno silo na proste naboje.

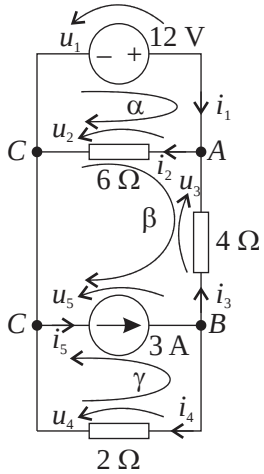
Elektromehanski in elektronski viri. Razumevanje teh virov zahteva znanja iz električnih strojev in elektronike, ne moremo pa mimo njih, ne da bi jih vsaj omenili. Odlikujejo jih zaželjene (u, i) karakteristike: da napetostni vir zagotavlja čim bolj konstantno napetost, tokovni vir pa čim bolj konstanten tok, ne glede na izbiro porabnika. Posebno področje so elektronski viri, ki ne zadovoljujejo le potreb po dobrih enosmernih virih, ampak zmorejo ponuditi tudi toke in napetosti različnih časovnih oblik, od sinusnih, impulznih, žagastih, trapeznih in drugih oblik.

21:23

§25. Analiza enosmernih električnih vezij

Podobne teme smo obravnavali na koncu poglavja o elektrostatičnem polju; govorili smo o kondenzatorskih ali C vezjih; tokrat bo tekla beseda o analizi uporovnih ali R vezij. Opravila bodo zelo podobna, le da bo zakon o ohranitvi naboja, kot enega od izhodišč, zamenjal zakon spojišča oziroma prvi Kirchhoffov zakon, ki ima korenine spet v zakonu o ohranitvi naboja. Drugo izhodišče ostaja zakon sklenjene zanke oziroma drugi Kirchhoffov zakon. Analiza R vezij zajema vprašanje tokov, napetosti in moči; analiza C vezij je bila podobna, vprašanja so se nanašala na naboje, napetosti in energije. Novost, ki jo tokrat uvajamo, je predstavitev različnih postopkov za analizo, ki bodo aktualni tudi še kasneje, pri analizi vezij časovno spremenljivih napetosti in tokov, posledično pa tudi spremenljivih moči in energij. In kakšna je vloga kondenzatorja v R vezju v ustaljenem stanju: nikakršna. Če ga sprejemamo kot idealnega, pomeni tokovno prekinitev oziroma odprte sponke, napetost, naboj in energijo pa mu določajo napetosti na bližnjih elementih. Če ga jemljemo kot realnega, je ta za R vezje upor; njegov tok je izolacijski in pomeni osnovo za določitev naboja in energije v njem.

19:59



Postopek vejnih tokov in napetosti. Lahko bi mu rekli tudi neposredni postopek, saj daje že v prvem koraku odgovore na stanja elementov v vezju. Drugače je pri drugih dveh postopkih, ki v prvem koraku posredujeta vrednosti reduciranih neznank (potenciale vozlišč ali toke v zankah), po krajših računih pa tudi vse ostalo. Električno vezje je zvezje aktivnih in pasivnih elementov, ki se nahajajo v vejah, te pa so s spojišči (vozlišči, razvejišči) povezane v funkcijsko celoto. Veja ima enega ali več elementov. Če je v veji le upor, sta neposredni neznanki ali tok ali napetost veje, če je v veji idealni tokovni vir, je neznanka veje le napetost vira, če pa je v veji idealen napetostni vir, je neznanka veje le še tok vira. Če je v veji več uporov, jih združimo v enega, in podobno tudi, če je v njej več virov, saj si s tem olajšamo zapisovanje potrebnih enačb.

PRIMER. Dano vezje ima pet elementov in pet vej ter tri vozlišča; levo je »dvojno«, kratka vez ga povezuje v eno spojišče. Označimo napetosti in toke ter tri spojišča in tri zanke: (A, B, C) in (α, β, γ). Zapišimo tokovne enačbe:

$$A\colon -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad \text{in} \quad B\colon i_3 + i_4 - 3\ \text{A} = 0 \quad \text{in} \quad C\colon i_1 - i_2 - i_4 + 3\ \text{A} = 0.$$

Enačbe so linearno odvisne: vsota dveh da tretjo, kar pomeni, da brez škode eno opustimo – naj je to zadnja. Iz tega sledi splošno pravilo. Če ima vezje s spojišč, zapišemo $s - 1$ tokovnih enačb. Spojiščni zakon je tako izčrpan. Pot nadaljujemo z zančnim zakonom; zapišemo bilance napetosti v zankah:

$$\alpha\colon -12\ \text{V} + u_2 = 0 \quad \text{in} \quad \beta\colon -u_2 - u_3 + u_5 = 0 \quad \text{in} \quad \gamma\colon -u_4 + u_5 = 0.$$

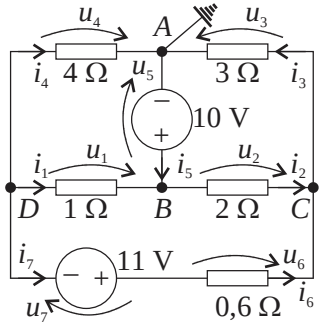
V vejah z upori naj so neznanke toki. Dve zgornji in zadnje tri tvorijo sistem linearnih enačb. S postopkom nasprotnih koeficientov ali s postopkom eliminacije pridobimo rešitve sistema enačb in tudi rešitve za ostale količine v vezju:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 - i_3 = 0, \\ i_3 + i_4 - 3\ \text{A} = 0, \\ -12\ \text{V} + 6\ \Omega \cdot i_2 = 0, \\ -6\ \Omega \cdot i_2 - 4\ \Omega \cdot i_3 + u_5 = 0, \\ -2\ \Omega \cdot i_4 + u_5 = 0, \end{cases} \xrightarrow{\text{rešitve}} \begin{cases} i_1 = 3\ \text{A}, \quad u_1 = 12\ \text{V}, \quad p_1 = i_1 u_1 = 36\ \text{W}, \\ i_2 = 2\ \text{A}, \quad u_2 = 12\ \text{V}, \quad p_2 = i_2 u_2 = 24\ \text{W}, \\ i_3 = -1\ \text{A}, \quad u_3 = -4\ \text{V}, \quad p_3 = i_3 u_3 = 4\ \text{W}, \\ i_4 = 4\ \text{A}, \quad u_4 = 8\ \text{V}, \quad p_4 = i_4 u_4 = 32\ \text{W}, \\ u_5 = 8\ \text{V}, \quad i_5 = 3\ \text{A}, \quad p_5 = i_5 u_5 = 24\ \text{W}. \end{cases}$$

Prva in zadnja moč sta moči virov, vmesne pa moči v uporih. Očitno je vsota generiranih moči enaka vsoti bremenskih moči; to moremo sprejeti kot test pravilnosti postopkov (Tellegenov stavek). Pri tem ne zmoremo ugotoviti, koliko moči je kateri vir posredoval kateremu uporu, da pa se ugotoviti, kolikšen del toka (napetosti) bremena je prispeval kateri vir (stavek superpozicije).

21:04

Postopek spojiščnih potencialov. Električna vezja imajo pogosto eno od spojišč ozemljeno, na potencialu 0 V. Pri vezjih brez ozemljitve (mobilna vezja) si eno od spojišč izberemo kot referenčno. Postopek spojiščnih potencialov je postopek reduciranih neznank; sloni na tokovnih Kirchhoffovih enačbah, saj je napetostnim zadoščeno že s samim potencialom, ki je definiran na osnovi lasnosti, da je vsota napetosti v sklenjeni zanki enak nič.



PRIMER. Vezje ima šest vej in štiri spojišča; ima dva napetostna vira in pet uporov. Ugodno je, da eno od sponk idealnega napetostnega vira izberemo kot spojišče s potencialom 0 V, naj je to spojišče A; s tem je potencial spojišča B znan, 10 V, neznana pa sta potenciala spojišč C in D. Izhajamo iz spojiščnih enačb:

$$C: -i_2 + i_3 - i_6 = 0 \quad \text{in} \quad D: i_1 + i_4 + i_6 = 0.$$

V naslednjem koraku izrazimo toke s potenciali,

$$i_1 = \frac{V_D - 10\ \text{V}}{1\ \Omega},\ i_2 = \frac{10\ \text{V} - V_C}{2\ \Omega},\ i_3 = \frac{V_C - 0\ \text{V}}{3\ \Omega},\ i_4 = \frac{V_D - 0\ \text{V}}{4\ \Omega},\ i_6 = \frac{V_D + 11\ \text{V} - V_C}{0{,}6\ \Omega},$$

in jih vstavimo v zgornji enačbi ter uredimo:

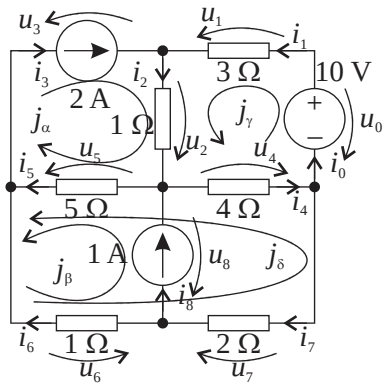
$$\begin{cases} 9V_C - 6V_D = 84\ \text{V}, \\ -12V_C + 21V_D = -60\ \text{V}. \end{cases}$$

Potenciala sta $V_C = 12$ V in $V_D = 4$ V; temu sledijo toki, napetosti in moči po elementih:

$$\begin{cases} i_1 = -6\ \text{A}, \quad u_1 = -6\ \text{V}, \quad p_1 = i_1 u_1 = 36\ \text{W}, \\ i_2 = -1\ \text{A}, \quad u_2 = -2\ \text{V}, \quad p_2 = i_2 u_2 = 2\ \text{W}, \\ i_3 = 4\ \text{A}, \quad u_3 = 12\ \text{V}, \quad p_3 = i_3 u_3 = 48\ \text{W} \\ i_4 = 1\ \text{A}, \quad u_4 = 4\ \text{V}, \quad p_4 = i_4 u_4 = 4\ \text{W}, \\ i_5 = 5\ \text{A}, \quad u_5 = 10\ \text{V}, \quad p_5 = i_5 u_5 = 50\ \text{W}, \\ i_6 = 5\ \text{A}, \quad u_6 = 3\ \text{V}, \quad p_6 = i_6 u_6 = 15\ \text{W}, \\ i_7 = 5\ \text{A}, \quad u_7 = 11\ \text{V}, \quad p_7 = i_7 u_7 = 55\ \text{W}. \end{cases}$$

32:12

Spet ugotavljamo, da sta vsoti moči virov enaki vsoti moči v uporih.



Postopek zančnih tokov. Na vezje lahko gledamo kot na zloženko vej ali kot na zloženko zank. Izbrane zanke oblikujejo »okna«. V njih označimo zančne toke j_α, j_β, ... Z njimi izrazimo vejne toke i_1, i_2, ... , kot vsote ali razlike zančnih tokov, ki gredo skozi isto vejo. Značilnost vsakega zančnega toka je, da v določeno spojišče vstopa in izstopa; zančni tok že sam po sebi izpolnjuje zakon spojišča. Pri njihovi uporabi se opiramo le še na zakon zanke. Napotek je, da zapišemo enačbe le v zankah neznanih zančnih tokov. Če je v zanki zančnega toka tokovni vir, je njen zančni tok že znan, zato zančne enačbe v njej ne pišemo. Pri oblikovanju zank gledamo na to, da gre zančni tok skozi tokovni vir le enkrat.

PRIMER. Vezje ima osem vej, pet spojišč in štiri okna. Glede na to, da sta v vezju dva tokovna vira, sta zančna toka v levih oknih že znana, $j_\alpha = 2$ A in $j_\beta = 1$ A. Zgornje desno okno bodi zanka s prvim neznanim zančnim tokom j_γ, spodnji okni

pa združimo v večje okno s tokom j_δ, da skozi spodnji tokovni vir ne bi šla dva zančna toka. (To bi vsekakor smeli storiti, le da bi to terjalo vpeljavo nove neznanke, napetosti med sponkama tega vira.) Zapišimo potrebni zančni enačbi,

$$\gamma: -10\ \mathrm{V} + 3\ \Omega \cdot j_\gamma + 1\ \Omega \cdot \left(j_\gamma + 2\ \mathrm{A}\right) + 4\ \Omega \cdot \left(j_\gamma - j_\delta\right) = 0 \ \Rightarrow\ 4j_\gamma - 2j_\delta = 4\ \mathrm{A},$$

$$\delta: 4\ \Omega \cdot \left(j_\delta - j_\gamma\right) + 5\ \Omega \cdot (2\ \mathrm{A} + 1\ \mathrm{A} + j_\delta) + 1\ \Omega \cdot (1\ \mathrm{A} + j_\delta) + 2\ \Omega \cdot j_\delta = 0 \ \Rightarrow\ -2j_\gamma + 6j_\delta = -8\ \mathrm{A}.$$

Zančna toka sta $j_\gamma = 0{,}4$ A in $j_\delta = -1{,}2$ A, njima pa sledijo še toki, napetosti in moči:

$$\begin{cases} i_0 = 0{,}4\ \mathrm{A}, \quad u_0 = 10\ \mathrm{V}, \quad p_0 = i_0 u_0 = 4\ \mathrm{W}, \\ i_1 = 0{,}4\ \mathrm{A}, \quad u_1 = 1{,}2\ \mathrm{V}, \quad p_1 = i_1 u_1 = 0{,}48\ \mathrm{W}, \\ i_2 = 2{,}4\ \mathrm{A}, \quad u_2 = 2{,}4\ \mathrm{V}, \quad p_2 = i_2 u_2 = 5{,}76\ \mathrm{W}, \\ i_3 = 2\ \mathrm{A}, \quad u_3 = 11{,}4\ \mathrm{V}, \quad p_3 = i_3 u_3 = 22{,}8\ \mathrm{W} \\ i_4 = 1{,}6\ \mathrm{A}, \quad u_4 = 6{,}4\ \mathrm{V}, \quad p_4 = i_4 u_4 = 10{,}24\ \mathrm{W}, \\ i_5 = 1{,}8\ \mathrm{A}, \quad u_5 = 9\ \mathrm{V}, \quad p_5 = i_5 u_5 = 16{,}2\ \mathrm{W}, \\ i_6 = -0{,}2\ \mathrm{A}, \quad u_6 = -0{,}2\ \mathrm{V}, \quad p_6 = i_6 u_6 = 0{,}04\ \mathrm{W}, \\ i_7 = 1{,}2\ \mathrm{A}, \quad u_7 = 2{,}4\ \mathrm{V}, \quad p_7 = i_7 u_7 = 2{,}88\ \mathrm{W} \\ i_8 = 1\ \mathrm{A}, \quad u_8 = 8{,}8\ \mathrm{V}, \quad p_8 = i_8 u_8 = 8{,}8\ \mathrm{W}. \end{cases}$$

Ponovno ugotovimo, da je bilanca moči virov in bremen uravnotežena.

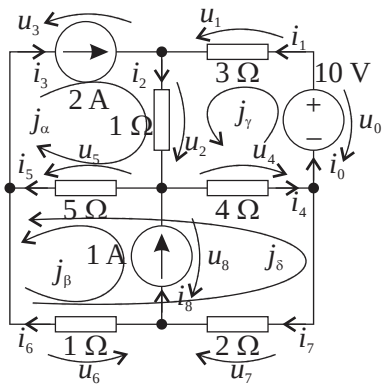
§26. Teoremi o enosmernih električnih vezjih

4:43

Stavki, teoremi ali izreki govorijo o lasnostih enosmernih vezij. Njihova sporočila uporabimo, kadar želimo analizo vezja poenostaviti ali jo prikrojiti specifičnim vprašanjem. V dopolnjeni obliki imajo ti izreki pomen tudi v splošnih električnih vezjih. Spoznali bomo teorema o superpoziciji in nadomestitvi, Tellegenov, Theveninov in Nortonov teorem ter teorem o prilagoditvi oziroma maksimalni moči.

13:04

Superpozicija. S tem pojmom smo se srečali na ravni polja, ko smo potencial ali poljsko jakost skupine nabojev zapisali z vsoto prispevkov posameznih. Vlogo povzročiteljev tokov, napetosti in potencialov v vezju prevzamejo tokrat viri. Stavek pravi: če je vezje z več viri linearno, moremo tokove, napetosti in potencialne izraziti z vsotami prispevkov posameznih virov. Delež posameznega vira dobimo tako, da ostale vire deaktiviramo, to pomeni, da vse napetostne vire nadomestimo s sklenjenimi stikali, vse tokovne vire pa z odprtimi stikali. Za potrditev te možnosti izberimo prejšnje vezje.



PRIMER. Vezje smo reševali s postopkom zančnih tokov. Enačbi za zančna toka zapišimo z jakostmi virov, z u_0 i_3 in i_8.

$$\gamma: -u_0 + 3\ \Omega \cdot j_\gamma + 1\ \Omega \cdot \left(j_\gamma + i_3\right) + 4\ \Omega \cdot \left(j_\gamma - j_\delta\right) = 0,$$

$$\delta: 4\ \Omega \cdot \left(j_\delta - j_\gamma\right) + 5\ \Omega \cdot \left(i_3 + i_8 + j_\delta\right) + 1\ \Omega \cdot \left(i_8 + j_\delta\right) + 2\ \Omega \cdot j_\delta = 0.$$

Po ureditvi sledita enačbi in rešitvi:

$$\gamma: 4j_\gamma - 2j_\delta = 0{,}5\ \mathrm{S} \cdot u_0 - 0{,}5 \cdot i_3 \quad \text{in} \quad \delta: -2j_\gamma + 6j_\delta = -2{,}5 \cdot i_3 - 3 \cdot i_8$$

$$j_\gamma = \underbrace{0{,}15\ \mathrm{S} \cdot u_0}_{\text{1. vir}} \underbrace{-0{,}4 \cdot i_3}_{\text{2. vir}} \underbrace{-0{,}3 \cdot i_8}_{\text{3. vir}} = j_\gamma^{(1)} + j_\gamma^{(2)} + j_\gamma^{(3)}$$

$$j_\delta = \underbrace{0{,}05\ \mathrm{S} \cdot u_0}_{\text{1. vir}} \underbrace{-0{,}55 \cdot i_3}_{\text{2. vir}} \underbrace{-0{,}6 \cdot i_8}_{\text{3. vir}} = j_\delta^{(1)} + j_\delta^{(2)} + j_\delta^{(3)}$$

Razcepa sporočata vsebino superpozicije: da je zančna toka možno predstaviti z vsotama treh neodvisnih delnih rešitev; enako tudi vejne toke, napetosti in potenciale. Pogoj za veljavnost superpozicije je linearnost; brž ko katerikoli element izkazuje nelinearnost, da (u, i) karakteristika ni premica, razcep rešitve v vsoto delnih ni možen.

Nadomestitev. Stavek o nadomestitvi pravi, da v primeru, ko v vezju poznamo ali izmerimo tok neke veje, lahko to vejo zamenjamo s tokovnim virom te jakosti. Podobno tudi, ko poznamo ali izmerimo napetost veje, lahko to vejo zamenjamo z napetostnim virom te napetosti. Stavek še pravi: v prvem ali drugem primeru se razmere v preostalem delu vezja ne spremenijo. Stavek pride prav takrat, ko je v vezju kak nelinearen element in analize vezja računsko (brez numerike) ne moremo opraviti. Če poznamo ali izmerimo tok ali napetost tega elementa, ga zamenjamo z ustreznim virom in zatem opravimo izračun po enem od predstavljenih postopkov.

7:18

Tellegen. Ta stavek govori o uravnoteženosti moči v električnem vezju. V enosmernem vezju je dvoje elementov: so viri in bremena. Zgledi iz prejšnjega razdelka številsko izpričujejo uravnoteženost moči virov z ene in bremen z druge strani. Spomnimo se: toke in napetosti na bremenih smo označili v isto smer, takšni označitvi rečemo bremenska, na virih pa v nasprotni smeri, takšni rečemo generatorska označitev. Če na vseh e elementih označimo toke in napetosti na bremenski način, se produktom $i_p u_p$ na virih spremenijo predznaki in velja sledeče:

18:00

$$\sum_{l=1}^{e} i_l u_l = 0.$$

Kadar je v vezju več virov, se lahko zgodi, da je produkt $i_p u_p$ kakega od virov celo pozitiven; to pomeni, da je vir takrat v bremenskem režimu, da energijo sprejema; akumulatorska baterija se takrat polni, preostali del vezja pa je njen polnilec. Če je v veji k več elementov, od tega je vsaj en pasiven in vsaj en aktiven, potem je pri bremenskem načinu označitve toka in napetosti veje produkt enak razliki bremenske in generatorske moči v veji,

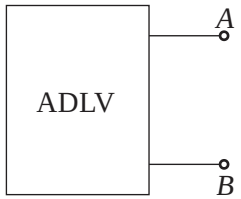
$$i_k u_k = p_{\mathrm{b}k} - p_{\mathrm{g}k},$$

kar iz predhodnega evidentno izhaja. Kadar je produkt $i_k u_k$ pozitiven, je veja v bremenskem režimu in to moč iz ostalega vezja sprejema, če je negativen, je veja v generatorskem režimu in energijo v ostalo vezje oddaja. Če ima vezje n vej, je bilanco moči vezja moč zapisati tudi takole:

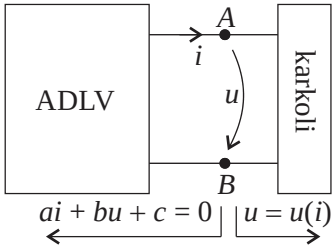
$$\sum_{k=1}^{n} i_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(p_{\mathrm{b}k} - p_{\mathrm{g}k}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} p_{\mathrm{g}k} = \sum_{k=1}^{n} p_{\mathrm{b}k}.$$

Linearnost vezja za Tellegenov stavek ni pogoj, saj smo ugotovili, da je tudi pri nelinearnem elementu za moč odgovoren zgolj produkt njegovega toka in njegove napetosti. V dinamičnih razmerah se bodo uporom pridružili še kondenzatorji in tuljave, prvi z močmi polnjenja prostora z električno energijo in druge z močmi polnjenja prostora z magnetno energijo. Bo pa takrat tudi prilika, da opozorimo na meje veljavnosti takšne bilance moči. Izkazalo se bo, da to zelo dobro velja za večino elektromagnetnih struktur, ne pa za vse. Manjkajoči del moči v močnostni bilanci je moč, ki zapusti vezje v obliki elektromagnetnega valovanja.

39:17



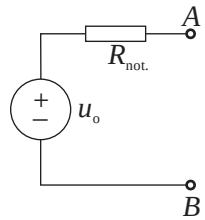
Thevenin in Norton. To sta stavka, ki se naslavljata na aktivno dvopolno linearno vezje (ADLV). Velikokrat se pokaže potreba po analizi razmer na bremenu ali na nelinearnem elementu, ki ga priključujemo na takšno vezje. Vsakokratna analiza celotnega vezja bi bila potratna, zato si pomagamo s tema stavkoma in ADL vezje nadomestimo z ekvivalentnim Theveninovim ali z ekvivalentnim Nortonovim nadomestnim vezjem; prvega pooseblja linearni napetostni vir, drugega linearni tokovni vir. Glede na to, da poznamo karakteristiki obeh virov in tudi ekvivalentnost (zamenljivost), poznamo s tem tudi zamenljivost »Nortona« in »Thevenina«.



Razmišljamo takole: naj ima ADL vezje n vej, zunanja, bremenska pa je veja $n+1$. Ker je breme zaenkrat še »karkoli«, zapišemo odnos med napetostjo u in tokom i na njem funkcijsko, kot $u = u(i)$. Sestavljena struktura (ADLV in breme) ima skupaj $n+2$ neznank: i_1, i_2, ... , i_n, i in u. Kirchhoffovih enačb pri neposrednem postopku je toliko, kot je vej, torej $n+1$. Če se opremo postopka eliminacije, potem iz sistema enačb izločimo neznanko i_1, zatem i_2 in tako naprej do i_n.

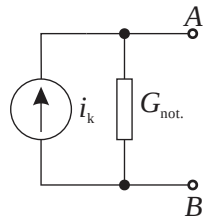
Ostane ena enačba, z neznankama i in u, ki povzema strukturo ADLV. Enačba je linearna; zapišimo jo v implicitni obliki, njej pa dodamo še enačbo bremena,

$$ai + bu + c = 0 \quad \text{in} \quad u = u(i).$$



Do konstant a, b in c pridemo, sklicujoč se na možnost, da je breme karkoli, lahko je tudi odprto ali sklenjeno stikalo. Če je breme odprto stikalo, je $i = 0$, napetost u pa je napetost odprtih sponk u_{o} ADLV, sledi: $bu_{\text{o}} + c = 0$, $b = -c/u_{\text{o}}$. Če je breme sklenjeno stikalo, je $u = 0$, tok i pa je tok kratkega stika i_{k} ALDV, sledi: $ai_{\text{k}} + c = 0$, $a = -c/i_{\text{k}}$. Če to zanesemo v zgornjo enačbo, se konstanta c okrajša in ostane:

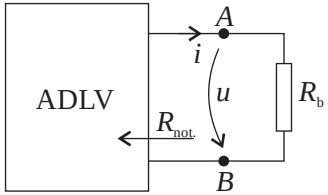
$$\frac{i}{i_{\text{k}}} + \frac{u}{u_{\text{o}}} = 1 \quad \text{in} \quad u = u(i).$$

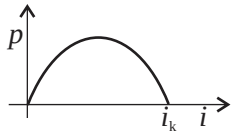


V levi enačbi prepoznavamo enačbo linearnega vira. Če je to napetostni vir, ga oblikujeta vir z napetostjo u_{o} in njemu zaporedni upor z upornostjo $u_{\text{o}}/i_{\text{k}}$, če je to tokovni vir, pa vir s tokom i_{k} in njemu vzporedni upor prevodnosti $i_{\text{k}}/u_{\text{o}}$. Prvi možnosti rečemo Theveninovo nadomestno vezje, drugi pa Nortonovo nadomestno vezje ADLV. Napetosti odprtih sponk rečemo Theveninova napetost, toku kratkega stika pa Nortonov tok.

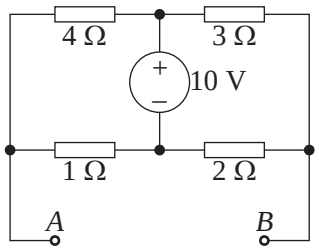
Kot zadnje si za karkoli izberimo idealni napetostni vir z napetostjo u_{o}. Takrat v zanki ni toka, saj je upor upornosti $u_{\text{o}}/i_{\text{k}}$ med viroma z enakima napetostma v protistiku. Oslonimo se na stavek o superpoziciji, saj so vsi elementi sestavljenega vezja linearni. Če deaktiviramo zunanji vir, bo tok $i^{(1)} = i_{\text{k}}$, enak toku kratkega stika, če pa deaktiviramo notranje vire v ADLV, dobimo DLV oziroma uporovno vezje. Tok skozi sponki A in B bo takrat $i^{(2)} = -i_{\text{k}}$, če naj je $i^{(1)} + i^{(2)} = 0$. Če pa je pri napetosti u_{o} na sponkah uporovnega vezja tok v vezje $-(-i_{\text{k}}) = i_{\text{k}}$, je upornost DL vezja enaka $u_{\text{o}}/i_{\text{k}} = R_{\text{not.}}$, enaka je t. i. notranji upornosti uporovnega vezja pri deaktivirani virih v njem. Elemente obeh nadomestnih vezij ni težko najti: določiti je potrebno dve od količin u_{o}, i_{k} in $R_{\text{not.}}$; kateri dve, je stvar izbire. Zgled uporabe obeh stavkov bomo združili z vsebino naslednjega teorema.

28:25

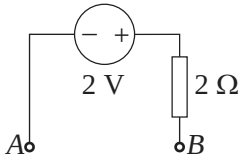




Prilagoditev. Tudi stavek prilagoditve oziroma stavek maksimalne moči se naslavlja na ADLV. Navezuje se na vprašanje: kolikšno največjo moč je sposobno ADLV posredovati bremenu. To vprašanje je pomembno tudi v dinamičnih razmerah, s čimer se bomo ukvarjali v okviru izmeničnih vezij. Glede na to, da poznamo nadomestno vezje ADLV, bo razmislek zelo kratek. Vprašanje obrnimo in se vprašajmo, kolikšno upornost R_b naj ima breme, ki ga nameravamo priključiti na ADLV, da bo iz njega prejemalo največjo moč? Izrazimo moč v bremenu: $p = iu = i(u_\mathrm{o} - R_\mathrm{not.}i) = iu_\mathrm{o} - R_\mathrm{not.}i^2 = p(i)$. Moč je funkcija toka skozi breme; podaja jo navzdol obrnjena parabola, ki ima ničli pri $i_1 = 0$ in $i_2 = u_\mathrm{o}/R_\mathrm{not.} = i_\mathrm{k}$. Maksimum moči je dosežen pri toku $(i_1 + i_2)/2 = u_\mathrm{o}/2R_\mathrm{not.} = i_\mathrm{k}/2$; skozi breme bo tok tolikšen takrat, ko bo upornost $R_\mathrm{b} = R_\mathrm{not.}$, ko bo breme (uporovno) prilagojeno na ADLV. Napetost in tok bremena bosta takrat $u_\mathrm{o}/2$ in $i_\mathrm{k}/2$ moč p pa $p_\mathrm{max.} = u_\mathrm{o}i_\mathrm{k}/4$.



PRIMER. Za zgled zadnjim trem teoremom izbiramo mostično vezje. 1) Napetost odprtih sponk med A in B? Toka v levi in desni zanki sta enaka 2 A. Napetost na uporu 4 Ω v levo je 8 V, napetost na uporu 3 Ω v desno je 6 V. Napetost odprtih sponk je torej $u_\mathrm{o} = -2$ V. 2) Tok kratkega stika med sponkama A in B? Zgornja upora sta takrat vezana vzporedno in enako tudi spodnja. Upornost, ki jo »čuti« vir, je $(50/21)$ Ω. Tok skozi vir je $(21/5)$ A. Tok skozi upor 4 Ω v levo je $(3/7)(21/5)$ A $= (9/5)$ A, tok skozi upor 1 Ω v desno je $(2/3)(21/5)$ A $= (14/5)$ A. V kratkostični povezavi od A k B je tok $i_\mathrm{k} = (9/5)\ \mathrm{A} - (14/5)\ \mathrm{A} = -1$ A. Notranja upornost vezja med sponkama A in B je $R_\mathrm{not.} = u_\mathrm{o}/i_\mathrm{k} = 2$ Ω. Če pa vir v vezju deaktiviramo, da ga zamenjamo s sklenjenim stikalom, sta leva upora vezana vzporedno, enako tudi desna upora, in nadomestna upornost $R_\mathrm{not.}$ je $(4/5)\ \Omega + (6/5)\ \Omega = 2\ \Omega$. Moč na prilagojenem bremenu $R_\mathrm{b} = R_\mathrm{not.} = 2\ \Omega$ bo takrat maksimalna, $p_\mathrm{max.} = u_\mathrm{o}i_\mathrm{k}/4 = 0{,}5$ W.



22:27

Viri

[1] W. J. Duffin: Electricity and Magnetism, McGraw-Hill Book Company, London, New York, ... , 1990,

[2] R.P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: The Faynman lectures on Physics, Addison- Wesley, 1972,

[3] D. J. Griffiths: Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall, New Jersey, 1999,

[4] O. D. Jefimenko: Causality electromagnetic induction and gravitation, Electret Scientific Company, Star City, 2000,

[5] J. C. Maxwell: A treatise on electricity and magnetism, 1873, DoverPublications, 1954,

[6] M. A. Plonus: Applied Electromagnetics, McGraw-Hill Book Company, London, New York, ... , 1986,

[7] B. D. Popović: Osnovi elektrotehniki I in II, Građevinska knjiga, Beograd, 1986,

[8] E. M. Purcell: Electricity and Magnetism, Berkelley phyisics course - volume 2, 1963,

[9] A. R. Sinigoj: Osnove elektromagnetike, Založba FE-FRI, Ljubljana, 1996,

[10] J. A. Stratton: Electromagnetic theory, McGraw-Hill, New York, 1941,

[11] I. E. Tamm: Osnovy tjeorii električestva, Gostehizdat, Moskva 1949,

[12] F. T. Ulaby: Fundamentals of applied electromagnetics 2004 Media Edition, Pearson Prentice Hall, London, 2004.

Učbenik Osnove elektrotehnike I je namenjen študentom prvega letnika študija elektrotehnike. Snov dveh poglavij je razdeljena v šestindvajset razdelkov. Poleg teoretičnih vsebin posreduje tudi vrsto praktičnih zgledov. Učbenik je opremljen s slikami magnetnih in tokovnih polj, ki podpirajo matematične zapise in pripomorejo k boljšemu razumevanju snovi – skupaj s posnetki predavanj in eksperimentov ter naborom rešenih nalog in gradiv, ki so dostopna prek spleta, tvori zaokroženo celoto. V učbeniku uporabljena matematična orodja so zahtevnejša, vendar jih študenti srečujejo še pri fiziki, teoretično pa poglobijo tudi pri matematiki.

Iztok Humar izvaja predavanja, vodi vaje in raziskovalno sodeluje na področjih Osnov elektrotehnike, Aplikativne elektromagnetike in Telekomunikacijskega inženiringa na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani. Na področju osnov elekrotehnike je soavtor dveh univerzitetnih učbenikov, soavtor štirih video učbenikov in dveh gimnazijskih e-učbenikov ter avtor treh skript za laboratorijske vaje.

Edi Bulić je asistent pri predmetih Osnove elektrotehnike in Elektromagnetika na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani. Raziskovalno se ukvarja z numeričnim reševanjem elektromagnetnih polj.

Anton Rafael Sinigoj je na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani vrsto let predaval Osnove elektrotehnike I in II ter Elektromagnetiko. Področje njegovega dela sta teorija elektromagnetnega polja in uporaba numeričnih metod v elektromagnetiki. Je avtor ali soavtor štirih univerzitetnih učbenikov, štirih video učbenikov, treh gimnazijskih učbenikov in dveh e-učbenikov ter različnih gradiv za vaje.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I

I. HUMAR

E. BULIČ

A.R. SINIGOJ

ISBN 978-961-243-333-8

9 789612 433338

ZALOŽBA FAKULTETE ZA ELEKTROTEHNIKO