מטריצה הופכית $(A|I) = (A^{-1}|I)$

דרגת מטריצה מספר השורות השונות מאפס לאחר דירוג

דטרמיננטה det $|A|$

כלל קרמר

מרחבים וקטוריים

צירופים ליניאריים / פרישה / תלות

בסיס / מימד / דרגה

וקטור קואורדינטות

ע"ע / ו"ע / לכסון

שקות

העתקות ליניאריות

גרעין / ~~[illegible]~~ תמונה של העתקה ליניארית

חח ערכית / על / איזומורפיזם

5 שאלות לבחור 3

Null Row Col rank ker

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$2-4 \quad -3+5$

$4-6$

מטריצה משוחלפת

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(kA)^T = kA^T$

4) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

מטריצה הפוכה

כאשר $A \cdot B = I$ אז $A \cdot B = B \cdot A$

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3) $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

דטרמיננטות

1) החלפת שורות מוסיפים מינוס

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

2) כפל שורה בסקלר (אז) כופלים ב- $\frac{1}{k}$

3) הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת

3) $R_2 \to R_2 + 3R_1$ לא משנה ערך הdet

$R_2 \to 3R_2 + R_1$ כופלים ב- $\frac{1}{3}$

4) מטריצה משולשת עליונה / תחתונה

4) שווה למכפלת איברי האלכסון

5) אם יש שורת אפסים 2) $\det = 0$

6) $|A^T| = |A|$

7) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

8) $|AB| = |A| \cdot |B|$

9) $|A^n| = |A|^n$

10) $|kA_{n\times n}| = k^n |A_{n\times n}|$

כלל קרמר

רק כ/ש למערכת יש פתרון יחיד

$\boxed{|A| \neq 0}$

$$A\left(\begin{array}{cc|c} \overset{x}{5} & \overset{y}{-2} & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{3}{19}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{3}{19}$$

מרחב וקטורי

1) R^n $\quad R^3 = (a_1, a_2 a_3) \mid \in R)$

$R^3 = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mid \in R\right)$

2) $M_{m\times n}$ אוסף כל מטריצות עם m שורות ו- n עמודות

3) P_n $\quad P(n) = a_0 x^0 + a_1 x^1 \dots a_n x^n$

תנאי תת מרחב

1) $\bar{0} \in W$

2) סגור לחיבור

3) סגור לכפל בסקלר

צירופים לינאריים

$w\begin{pmatrix}2\\-11\\-6\\12\end{pmatrix}$ $a\cdot u\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\\4\end{pmatrix}$ $b\cdot v\begin{pmatrix}1\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} a\cdot u & b\cdot v & w \end{array}\right)$

w צירוף לינארי
של u, v

$C\begin{pmatrix}2 & -10\\6 & 12\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$

$C = bB + aA$

$$\begin{aligned} 2 &= b\cdot 1 + a\cdot 0\\ -10 &= b\cdot 3 + a\cdot 1\\ 6 &= b\cdot 4 + a\cdot 3\\ 12 &= b\cdot 5 + a\cdot 2 \end{aligned}$$

u צירוף לינארי
של v, w

= $u \in \text{span}(A)$

כלומר u הוא
צ"ל של A

בסיס ומימד

$$\begin{pmatrix}6 & 4 & 3\\2 & 5 & 2\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\\ \begin{pmatrix}6 & 2 & 1\\0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \end{array}$$

$B = \{u_1, u_3\}$

$\dim(A) = 2$

בסיס של הקבוצות שקולות

בסיס = קבוצה פורשת min

// = // בת"ל max

Rank col Row Null

Null

מצמצמים את המטריצה לצורה מדרגת של אפסים
ומציגים את הפתרון הכללי:

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z - w \\ 2z \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$Null(A) = \begin{pmatrix} -z - w \\ 2z \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$span(Null(A)) = \left\{ z\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{(Nul)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

col / Row

col : העמודות המובילות

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$col(A) = span(u_1\ u_2\ u_4)$$

$$B(col(A)) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$dim(col(A)) = 3$$

Row

כדי לרשום אותו יש להפוך את השורות בעלי האיברים המובילים כווקטורים

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Row(A) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$B(Row(A)) = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Rank

דרגת מטריצה

מספר העמודות המובילות

~~ערכים עצמיים~~

ע"ע / ו"ע / מ"ע

① ערכים עצמיים:

$$P_{(A)}\lambda = \det(A-\lambda I)$$

$$P_{(A)}\lambda = 0$$

ע"ע $(t-1)(t-2)(t-4)$

② מרחבים עצמיים:

$$W_\lambda = Null(A-\lambda I)$$

המרחב העצמי הוא המרחב שמכיל את הפתרון הכללי

$\boxed{t=1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

מ"ע $= span\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ו"ע $= u_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ וקטורים עצמיים:

הוקטור העצמי הוא הבסיס של המרחב העצמי

ריבוי אלגברי של λ ע"ע

מספר הפעמים ש-λ מופיע כשורש של הפולינום האופייני: $\lambda^3(\lambda-1)^2$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=0 \quad \lambda_3=0 \quad \lambda_4=1 \quad \lambda_5=1$

$Alg(0)=3 \quad Alg(1)=2$

ריבוי גיאומטרי של λ ע"ע

הוא הממד הש"ך לע"ע λ

$geo(\lambda) = \dim(V_\lambda)$

לכסינות

מטריצה A לכסינה אם ורק אם
הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי בכל ערך
עצמי.

$$P^{-1}AP = D$$

D – מטריצה לכסונית / ע"ע

P – הבסיסים של המ"ע

חשב $A^{200}\cdot V$

V הוא צירוף ליניארי של ו"ע

אם:
$$A\cdot V = \lambda\cdot V$$
$$A^{200}\cdot V = \lambda^{200}\cdot V$$
$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda^{200}\cdot x \\ \lambda^{200}\cdot y \\ \lambda^{200}\cdot z \end{pmatrix}$$

חשב $\det(3\cdot A^{100})$

$A_{3\times3}$ היא לכסינה:

$$P^{-1}AP = D$$
$$A = PDP^{-1}$$
$$3^3\,|A^{100}|$$
$$9\,|PDP^{-1}|^{100}$$
$$9\,|PD\cancel{P^{-1}}\cancel{P}D\cancel{P^{-1}}\cancel{P}DP^{-1}\cdots|$$
$$9\,|PD^{100}P^{-1}|$$
$$9\cdot \cancel{|P|}\,|D|^{100}\,\cancel{|P^{-1}|}$$

העתקות ליניאריות

כדי להוכיח ש-T מסוימת היא ליניארית
יש להוכיח ש:

1) $T(u_1+u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

2) $kT(u_1) = T(k\cdot u_1)$

גרעין של העתקה Ker

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\ker) = 1$

$B\ \ker = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

תמונה של הגרעין Im

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(Im) = 2$

$B_{\cancel{ker}\ Im} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

חח"ע / על

T נקראת חד חד ערכית אם לאחר הדירוג
כל העמודות מובילות

T נקראת על אם אחרי הדירוג אין שורת אפסים

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$3 \times \underline{\underline{3}}$ $\quad \underline{\underline{3}} \times 2$ $\Rightarrow 3 \times 3$

$4 \times \underline{\underline{2}} = \underline{\underline{2}} \times 3 \Rightarrow 4 \times 3$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \times \end{pmatrix}$$

$2 \times \underline{\underline{3}}$ $\quad \underline{\underline{3}} \times 1000$ $\quad 2 \times 2$