VWO
B
DEEL 1

GETAL & RUIMTE

1

NOORDHOFF UITGEVERS

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo B deel 1
Samen met de delen 2, 3 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld.
De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur.
De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken, waarbij opgemerkt moet worden dat in het laatste hoofdstuk van deel 3 een keuzeonderwerp wordt aangeboden en dat in het vierde hoofdstuk van deel 4 de examentraining aan bod komt.
In de vier hoofdstukken van dit boek, die elk een studielast van ongeveer 30 uur hebben, komen gedeelten van de domeinen B (Functies, grafieken en vergelijkingen), C (Differentiaal- integraalrekening) en E (Meetkunde met coördinaten) aan de orde.
Afhankelijk van de verdeling van de studielast over de leerjaren kan deel 2 geheel of gedeeltelijk in de tweede helft van het vierde leerjaar worden doorgenomen.

Opbouw
Ook in de elfde editie is gekozen voor een paragraaf voorkennis waarmee elk hoofdstuk begint. In deze paragraaf wordt de voor het hoofdstuk vereiste voorkennis aangeboden. Elke paragraaf wordt afgesloten met een terugblik. In deze terugblik worden alle aspecten van de paragraaf op een rijtje gezet, vaak toegelicht met enkele voorbeelden. Aan het eind van elk hoofdstuk staat de diagnostische toets, die per paragraaf de basisvaardigheden toetst. Achter in het boek staan de gemengde opgaven, opgaven uit de Wiskunde Olympiade en het trefwoordenregister.

Testopgaven en denkopgaven
Nieuw in deze editie zijn de testopgaven en de denkopgaven.
Met de testopgaven, aangegeven met een T, wordt een vorm van differentiatie aangeboden.
Leerlingen kunnen na het foutloos maken van een testopgave enkele opgaven overslaan.
De denkopgaven zijn aangegeven met een D en bieden een probleem aan dat bij de behandelde theorie hoort, maar dat vaak door de iets andere invalshoek of het ontbreken van tussenstappen een extra beroep doet op het denkvermogen van de leerling.
Met de opgaven uit de Wiskunde Olympiade krijgen de leerlingen extra training met het oplossen van wiskundeproblemen.

Online materiaal
Het docentenpakket online bevat een studiewijzer bij elk hoofdstuk. Verder is onder meer het presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen.
Nieuw in online is een oefenproefwerk bij elk hoofdstuk.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2014

Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit voorgaande hoofdstukken die je in het hoofdstuk paraat moet hebben.

O 2 **Oriënterende opgave**
Opgaven waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

T 3 [►►6] **Testopgave**
Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder gaan met de opgave die achter ►► staat.

4 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R 5 **Reflecterende opgave**
In een reflectieopgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A 6 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

D 7 **Denkopgave**
Een D-opgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt in de opgave een probleem op een iets andere manier gepresenteerd.

[►GR]
Verwijzing naar een module in de handleiding bij de grafische rekenmachine.

[►WERKBLAD]
Verwijzing naar een werkblad.

[►DEMO]
Verwijzing naar een demo.

Inhoud

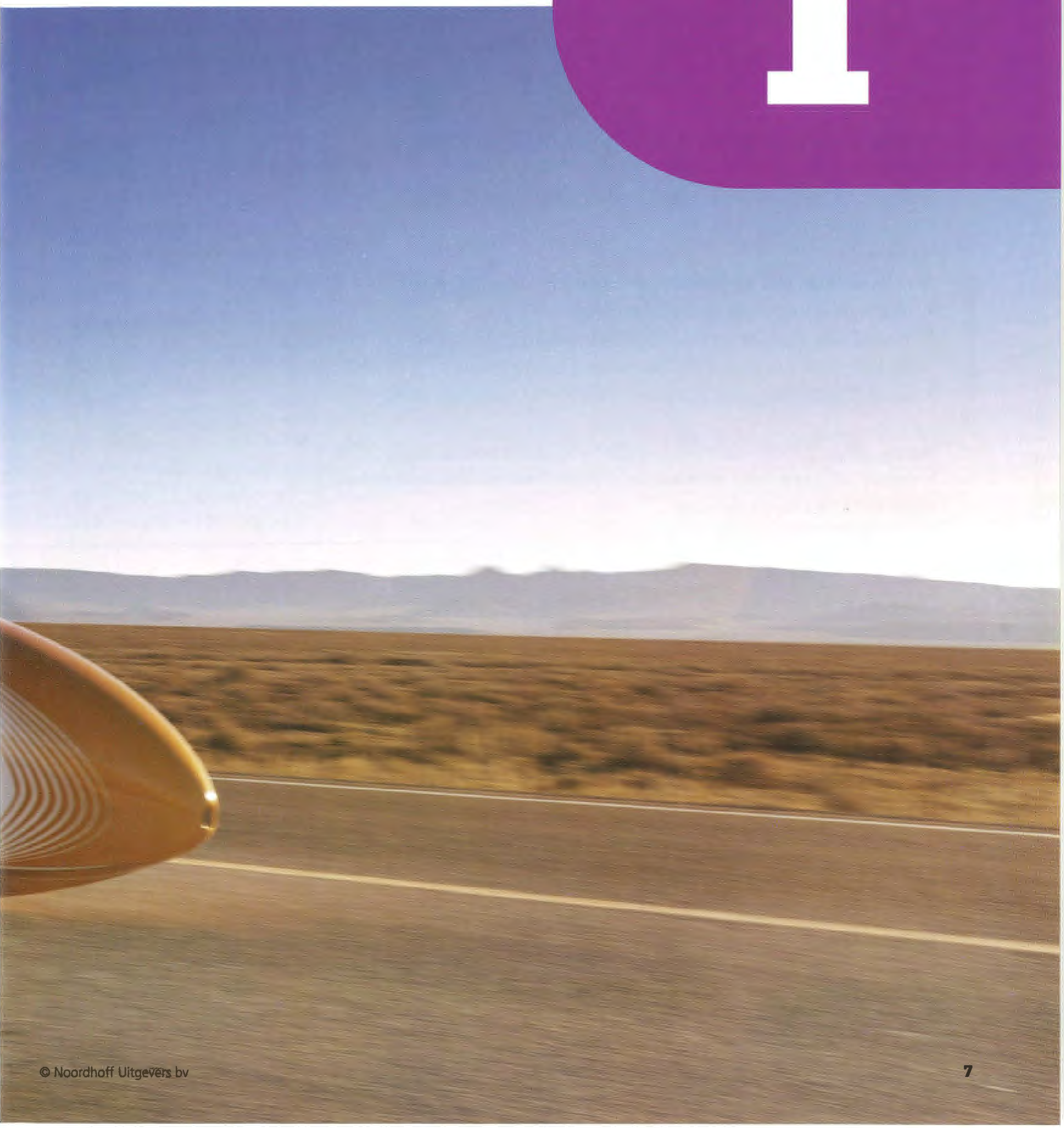
Bij een constante snelheid is de afgelegde weg een lineaire functie van de tijd. Door op twee tijdstippen te meten welke afstand is afgelegd, is de formule bij deze functie op te stellen. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn. Zo is bij elke lineaire functie de formule op te stellen als je van twee punten van de grafiek de coördinaten weet.

Wat leer je?

- Opstellen van de formule van een lijn waarvan twee punten zijn gegeven.
- Werken met functies en vergelijkingen met een parameter.
- Wat het domein en het bereik van een functie is.
- Het begrip inverse functie
- Hoe je met de grafische rekenmachine vergelijkingen en ongelijkheden oplost en extreme waarden berekent.

Functies en grafieken

1



1

Voorkennis Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden

Theorie A Lineaire vergelijkingen

De vergelijking $6x - 8 = 2x - 7$ is een voorbeeld van een lineaire vergelijking. In deze vergelijking is x de **variabele**. Je lost zo'n vergelijking als volgt op.

$6x - 8 = 2x - 7$ — Term met x naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid.

$4x = 1$ — Deel linker- en rechterlid door het getal dat voor x staat.

$x = \frac{1}{4}$

In plaats van $x = \frac{1}{4}$ is een oplossing van de vergelijking, zeggen we ook $x = \frac{1}{4}$ **voldoet**.
Gebruik bij het oplossen van lineaire vergelijkingen het volgende werkschema.

Vervang je in een vergelijking de variabele door een getal en klopt het, dan zeggen we dat het getal voldoet aan de vergelijking. Het getal is dus een oplossing van de vergelijking.

Vul je een getal in voor de variabele en klopt het niet, dan zeggen we dat het getal niet aan de vergelijking voldoet.

Werkschema: het oplossen van lineaire vergelijkingen

1 Werk de haakjes en de breuken weg.
2 Breng alle termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Bij de vergelijking $\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ staan zowel haakjes als breuken. Je kunt eerst de haakjes wegwerken en dan de breuken, maar het kan ook andersom.

Vermenigvuldigen van $\frac{2}{3}(x - 4)$ met 15 betekent $15 \cdot \frac{2}{3}(x - 4) = 10(x - 4)$.

Eerst de haakjes, dan de breuken

$\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$

$\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = \frac{2}{5}x + 1$ $\quad \times 15$

$10x - 40 = 6x + 15$

$4x = 55$

$x = \frac{55}{4} = 13\frac{3}{4}$

Eerst de breuken, dan de haakjes

$\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ $\quad \times 15$

$10(x - 4) = 3(2x + 5)$

$10x - 40 = 6x + 15$

$4x = 55$

$x = \frac{55}{4} = 13\frac{3}{4}$

1 Los op.

a $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$

b $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$

c $\dfrac{2t - 3}{4} = t - 1\frac{1}{3}$

d $1{,}6(2x - 1) = 1{,}4x - 2$

e $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$

f $5 - \dfrac{3t - 1}{6} = \dfrac{5t + 1}{4} - \dfrac{2t + 3}{3}$

Theorie B Lineaire ongelijkheden

Voorbeelden van lineaire ongelijkheden zijn $2x - 1 < 5x + 3$, $6a + 5 \geq 8 - (a + 3)$ en $\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}(p - 5) \leq p + 2$.

Denk bij het oplossen van lineaire ongelijkheden aan het omklappen van het teken < of > in het geval je het linker- en rechterlid door een negatief getal deelt.
Zo krijg je bij het oplossen van $2x - 1 < 5x + 3$

$2x - 1 < 5x + 3$
$-3x < 4$ — Omdat je beide leden door −3 deelt, klapt het teken < om in >.
$x > -1\frac{1}{3}$

$5 < 6$
$5 + 2 < 6 + 2$
$5 - 2 < 6 - 2$
$5 \cdot 2 < 6 \cdot 2$
$5 \cdot -2 > 6 \cdot -2$
$5 : -2 > 6 : -2$

Gebruik bij het oplossen van lineaire ongelijkheden het volgende werkschema.

Werkschema: het oplossen van lineaire ongelijkheden
1. Werk de haakjes en de breuken weg.
2. Breng alle termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
3. Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat. Als dit getal negatief is, dan klap je het teken < of > om.

Voorbeeld

Los op.

a $6a + 5 \geq 8 - (a + 3)$

b $\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}(p - 5) \leq p + 2$

Uitwerking

a $6a + 5 \geq 8 - (a + 3)$
$6a + 5 \geq 8 - a - 3$
$7a \geq 0$
$a \geq 0$ ← Je deelt door 7, dus het teken klapt niet om.

b $\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}(p - 5) \leq p + 2$ × 12
$9p - 8(p - 5) \leq 12p + 24$
$9p - 8p + 40 \leq 12p + 24$
$-11p \leq -16$
$p \geq 1\frac{5}{11}$ ← Je deelt door −11, dus het teken klapt om.

2 Los op.

a $3x > 5x$

b $\frac{1}{6}x + 3 < \frac{1}{2}x - 2$

c $\dfrac{3p - 4}{3} \leq 2p - 1\frac{1}{6}$

d $1{,}5(1{,}6x - 2) < 2{,}5(1{,}4x - 3)$

e $\frac{3}{8}(5x - 2) > \frac{1}{4}(2x - 5)$

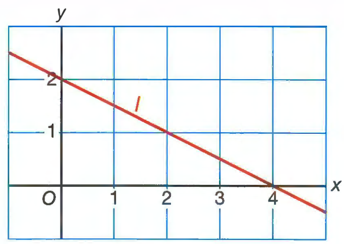
f $10 - \dfrac{2a - 3}{6} \geq \dfrac{4a - 1}{5} - \dfrac{3a + 2}{15}$

1.1 Lineaire functies

Theorie A De grafische rekenmachine

[▶ GR] Bij het vak wiskunde werk je regelmatig met de grafische rekenmachine (GR). In de handleiding GR staat hoe je dit apparaat kunt gebruiken.
Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

O 1 **a** Gegeven is de lijn k: $y = 2x + 3$.
Welke informatie geeft het getal 2 over de lijn k?
En het getal 3?
b In figuur 1.1 is de lijn l getekend. Stel de formule op van l.
c Stel de formule op van de lijn m die door het punt $(0, -1)$ gaat en evenwijdig is met de lijn l in figuur 1.1.



figuur 1.1

Theorie B Richtingscoëfficiënt

De algemene vorm van een **lineaire functie** f is $f(x) = ax + b$ met a ongelijk aan 0. De grafiek van f is een rechte lijn.
De **richtingscoëfficiënt** is a en het snijpunt met de y-as is $(0, b)$.

Is $a = 0$ dan heb je met een **constante functie** te maken.

Van de lijn l: $y = 3x + 4$ is de richtingscoëfficiënt 3.
Notatie $\text{rc}_l = 3$.
De lijn m: $y = 3x - 2$ is **evenwijdig** met de lijn l, want ze hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.

$\text{rc}_l = 3$ betekent:
1 naar rechts en 3 omhoog.

Van de lijn n: $y = 5$ is de richtingscoëfficiënt 0.
Dus de lijn n is een **horizontale lijn**.

n: $y = 5$ ofwel
n: $y = 0x + 5$.

De formule van een functie wordt ook het **functievoorschrift** van de functie genoemd.

De lineaire functie met functievoorschrift $f(x) = ax + b$ heeft als grafiek de rechte lijn $y = ax + b$. Van deze lijn is a de richtingscoëfficiënt en $(0, b)$ het snijpunt met de y-as.
Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

De lijn $y = b$ is de horizontale lijn door het punt $(0, b)$.
Van een horizontale lijn is de richtingscoëfficiënt 0.

Voorbeeld

Stel de formule op van de lijn k door het punt $A(18, 7)$ die evenwijdig is met de lijn m: $y = \frac{1}{2}x + 13$.

Uitwerking

Stel k: $y = ax + b$.

$k // m$, dus $a = \text{rc}_m = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(18, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 18 + b = 7 \\ 9 + b = 7 \\ b = -2 \end{array}$$

Dus k: $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Opgave 2 is een testopgave.
Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld begrijpt, maak dan de T-opgave. Gaat dit foutloos, dan kun je verder gaan met de opgave die achter ►► staat. Lukt opgave 2 niet, ga dan verder met opgave 3. Je kunt de testopgave ook overslaan en meteen met opgave 3 verdergaan.

T 2 [►► 6]

a De lijn k gaat door het punt $A(4, 3)$ en is evenwijdig met de lijn l: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
Stel de formule op van k.

b De lijn m: $y = ax + 3$ gaat door het punt $B(-4, 2)$.
Bereken a.

c De lijn n: $y = 2\frac{1}{2}x + b$ snijdt de x-as in hetzelfde punt als de lijn p: $y = -1\frac{1}{2}x + 6$.
Bereken b.

3 **a** De lijn l gaat door het punt $A(-2, 3)$ en $\text{rc}_l = -2$.
Stel de formule op van l.

b De lijn k gaat door het punt $B(-5, 21)$ en is evenwijdig met de lijn m: $y = 4x - 6$.
Stel de vergelijking op van k.

In plaats van
de formule van de lijn
zeggen we ook wel
de vergelijking van
de lijn.

4 De lijn p gaat door het punt $C(-18, 30)$ en is evenwijdig met de lijn q: $y = -\frac{1}{3}x$.

a Stel de formule op van p.

b In welk punt snijdt p de x-as? En in welk punt de y-as?

5 Gegeven is de lijn k: $y = ax + 10$.

a Bereken a in het geval k de x-as in het punt $P(-20, 0)$ snijdt.

b Bereken a in het geval k door het punt $Q(2, -4)$ gaat.

c Is er een a waarvoor k door het punt $O(0, 0)$ gaat? Licht toe.

A 6 Gegeven zijn de lijnen k: $y = \frac{1}{2}x + 2$, l: $y = ax - 4$ en m: $y = -2x + b$.

a Voor welke b ligt het punt $P(-8, 0)$ op m?

b Voor welke a en b zijn m en l evenwijdige lijnen en ligt het punt $Q(10, 7)$ op m?

c Voor welke a en b gaan alle drie de lijnen door het punt $R(8, 6)$?

d Voor welke a en b snijden k, l en m elkaar in hetzelfde punt op de x-as?

D 7 Gegeven zijn de lijnen k: $y = ax + 1$ en l: $y = 2ax - 2a$. Alle lijnen k gaan door het punt A en alle lijnen l gaan door het punt B.

a Geef de coördinaten van A en B.

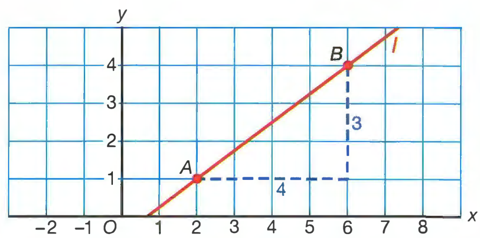
b Voor welke waarde van a snijden k en l elkaar in het punt A? En voor welke a in het punt B?

c Voor welke waarde van a snijden k en l elkaar in het punt C met $x_C = 10$? Wat is de y-coördinaat van C?

O 8 De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$. Zie figuur 1.2.

a Voor de lijn l geldt:
ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog,
dus
ga je 1 naar rechts, dan ga je ... omhoog.
Dus rc_l = ...

b In figuur 1.2 zie je $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$ en $y_B - y_A = 4 - 1 = 3$.
Hoe kun je met $y_B - y_A$ en $x_B - x_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?



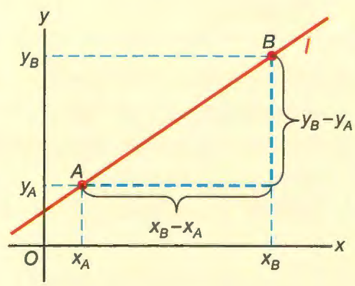
figuur 1.2 Met behulp van de coördinaten van de punten A en B kun je rc_l berekenen.

Theorie C Een lijn door twee gegeven punten

Van een lijn l waarvan de coördinaten van twee punten bekend zijn, is de richtingscoëfficiënt te berekenen.

Voor de lijn l in figuur 1.3 geldt:
Ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog.
Dus ga je 1 naar rechts, dan ga je $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog,

dus $rc_l = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



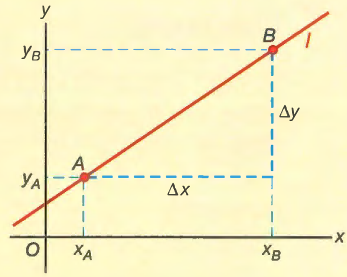
figuur 1.3

Dus de richtingscoëfficiënt van de lijn l door A en B bereken je door de toename van de y-coördinaten te delen door de toename van de x-coördinaten.

Dus $\mathrm{rc}_l = \dfrac{\text{toename van de } y\text{-coördinaten}}{\text{bijbehorende toename van de } x\text{-coördinaten}}$.

Voor de toename van de y-coördinaten schrijven we Δy.
De bijbehorende toename van de x-coördinaten is Δx.

$$\mathrm{rc}_l = \frac{y(\text{rechterpunt}) - y(\text{linkerpunt})}{x(\text{rechterpunt}) - x(\text{linkerpunt})}$$



figuur 1.4

De richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten A en B is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Voorbeeld

Stel de formule op van de lijn l door de punten $A(2, -1)$ en $B(6, 5)$.

Uitwerking
Stel l: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5 - -1}{6 - 2} = 1\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

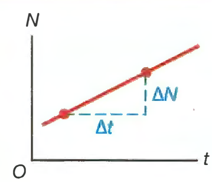
Dus l: $y = 1\frac{1}{2}x - 4$.

Neem je $\Delta y = -1 - 5 = -6$ dan is de bijbehorende $\Delta x = 2 - 6 = -4$. Ook nu is $\mathrm{rc}_l = 1\frac{1}{2}$.

Voor het berekenen van b kun je ook de coördinaten van B gebruiken.

Bij toepassingen worden meestal andere letters dan x en y gebruikt.
In de formule $N = at + b$ is N **uitgedrukt in** t.
De formule geeft een **lineair verband** tussen N en t.
We zeggen ook wel N is een lineaire functie van t.

Zijn bij twee waarden van t de bijbehorende waarden van N gegeven, dan kun je de formule van N als functie van t opstellen.



$\mathrm{rc} = \dfrac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}}$

Is N een lineaire functie van t, dan is $N = at + b$ met $a = \dfrac{\Delta N}{\Delta t}$.

Bij $y = ax + b$ is
- y een functie van x
- y uitgedrukt in x.

1

Voorbeeld

Een auto begint op $t = 0$ te remmen zo, dat de snelheid lineair afneemt.
Op $t = 2$ is de snelheid 90 km/uur, drie seconden later is de snelheid 45 km/uur.
Druk de snelheid v in km/uur uit in de tijd t in seconden.

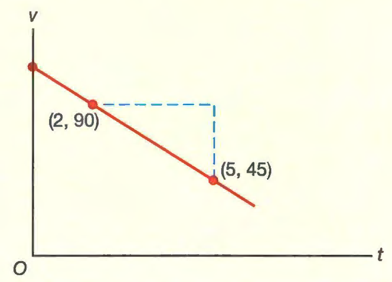
Uitwerking

Stel $v = at + b$.

$$\left.\begin{array}{l} t = 2 \text{ en } v = 90 \\ t = 5 \text{ en } v = 45 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{45 - 90}{5 - 2} = -15$$

$$\left.\begin{array}{l} v = -15t + b \\ t = 2 \text{ en } v = 90 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -15 \cdot 2 + b = 90 \\ -30 + b = 90 \\ b = 120 \end{array}$$

Dus $v = -15t + 120$.



T 9 [►►13]

a De lijn k gaat door de punten $A(8, 8)$ en $B(20, 11)$ en de lijn l gaat door de punten $C(2, 14)$ en $D(50, -10)$.
Stel van de lijnen k en l de formule op en bereken de coördinaten van het snijpunt E van deze lijnen.

b Tussen M en N bestaat een lineair verband.
Voor $M = 5$ is $N = 62$ en voor $M = 20$ is $N = 86$.
Druk N uit in M en druk M uit in N.

10 Stel de vergelijking op van de lijn

a l door de punten $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$

b k door de punten $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$

c m door de punten $E(5, 3)$ en $F(-7, 3)$

d n door de punten $G(180, 360)$ en $H(160, 250)$.

11 **a** K is een lineaire functie van m.
Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.
Schrijf K als functie van m.

b F is een lineaire functie van R.
Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$.
Stel de formule op van F.

c In een assenstelsel met een horizontale n-as en een verticale g-as is de lijn door de punten $(6, 35)$ en $(10, 49)$ getekend.
Stel de formule op van deze lijn.

12 Tussen p en q bestaat een lineair verband.
Bij $q = 150$ hoort $p = 7{,}75$ en bij $q = 425$ hoort $p = 2{,}25$.

a Druk p uit in q en druk q uit in p.

b Bereken p voor $q = 250$ en bereken q voor $p = 4{,}25$.

A 13 Een auto rijdt met constante snelheid. Om 14:12 uur passeert de auto hectometerpaal 164,0 en om 14:18 uur paal 152,8.
Tussen het getal h op de hectometerpalen en de tijd t in minuten bestaat een lineair verband.
Neem $t = 0$ om 14:00 uur.

a Stel de formule op van h als functie van t.
b Hoe laat passeert de auto hectometerpaal 156,7?

D 14 Toon aan dat elke lijn door de punten $A(p, p+1)$ en $B(2p, p+2)$ met $p \neq 0$ de negatieve x-as snijdt.

O 15 De functie f geeft voor elke x de afstand tussen de getallen x en 0 op de getallenlijn. Dus $f(3) = 3$ en $f(-3) = 3$.

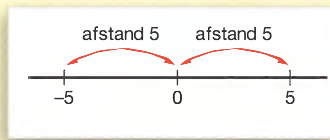
a Vul de tabel verder in.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$		3						3	

b Teken de grafiek van f.

Theorie D Modulusfuncties

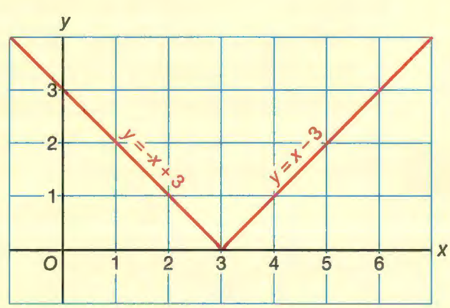
Er zijn twee getallen op de getallenlijn met afstand 5 tot 0.
Dat zijn −5 en 5.
We zeggen dat de **modulus** van 5 gelijk is aan 5 en dat de modulus van −5 gelijk is aan 5. Notatie $|5| = 5$ en $|-5| = 5$.
In plaats van modulus zeggen we ook wel **absolute waarde**.
Dus de absolute waarde van −10 is 10.



$|x|$ is de absolute waarde ofwel de modulus van x.
$|x|$ is de afstand van het getal x tot 0 op de getallenlijn.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ als } x \geq 0 \\ -x \text{ als } x < 0 \end{cases}$$

Voor de **modulusfunctie** $f(x) = |x - 3|$ geldt dus
$f(x) = x - 3$ als $x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 3$ en
$f(x) = -x + 3$ als $x - 3 < 0$, dus als $x < 3$.
De grafiek van f bestaat uit twee halve lijnen, zie figuur 1.5.



figuur 1.5

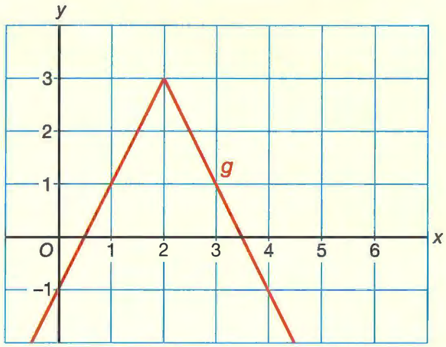
1

Voorbeeld

Teken de grafiek van $g(x) = 3 - |2x - 4|$.

Uitwerking

$g(x) = 3 - |2x - 4| = 3 - (2x - 4) = 3 - 2x + 4 = -2x + 7$ als $2x - 4 \geq 0$, dus als $x \geq 2$.
$g(x) = 3 - |2x - 4| = 3 - (-2x + 4) = 3 + 2x - 4 = 2x - 1$ als $2x - 4 < 0$, dus als $x < 2$.



16 Teken in verschillende figuren de grafiek van

a $f(x) = |\frac{1}{2}x - 1|$

b $g(x) = -|2x - 6|$

c $h(x) = 2 - |\frac{1}{3}x - 2|$

d $k(x) = 5 - |6 - 1\frac{1}{2}x|$

17 Gegeven is de functie f met het functievoorschrift $f(x) = x + 2 - |2x - 1|$.

a Teken de grafiek van f.

b Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafiek van f en de x-as.

A 18 De grafiek van $f(x) = ax - 1 - |3x - 4|$ gaat door het punt $(1, 0)$.

a Bereken a en teken de grafiek van f.

b De lijn $y = x$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B. Bereken de coördinaten van A en B.

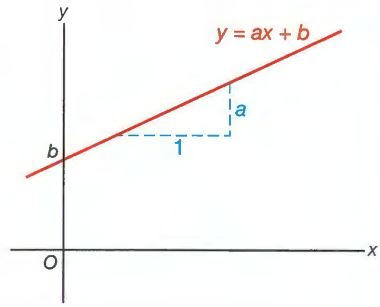
c Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = px$ geen enkel punt met de grafiek van f gemeen?

D 19 Teken de grafiek van $f(x) = 4 - |3 - |2x - 6||$.

Terugblik

Richtingscoëfficiënt

Bij een lineaire functie hoort een formule van de vorm $y = ax + b$ met $a \neq 0$.
De grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt a.
rc $= a$ betekent 1 naar rechts en a omhoog.



De lijn $y = ax + b$ snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

De lijn k: $y = 4$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 4)$.
Van een horizontale lijn is rc $= 0$.

Het opstellen van de formule van een lijn

Van de lijn m door $B(-1, 4)$ en $C(5, -8)$ krijg je de formule als volgt.

Stel m: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \dfrac{4 - -8}{-1 - 5} = -2$.

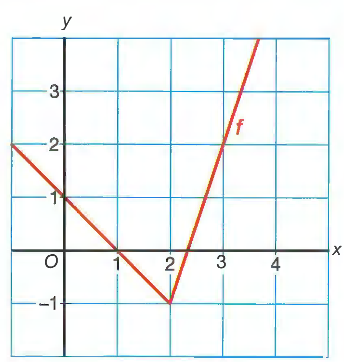
$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } B(-1, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -1 + b = 4 \\ 2 + b = 4 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus m: $y = -2x + 2$.

Bij toepassingen komen andere letters dan x en y voor.
Is het te betalen bedrag B een lineaire functie van het gasgebruik g, dan hoort hierbij de formule $B = ag + b$ met $a = \dfrac{\Delta B}{\Delta g}$.

Modulusfuncties

De functie $f(x) = x - 3 + |2x - 4|$ is een voorbeeld van een modulusfunctie.
Omdat $|2x - 4| = 2x - 4$ als $2x - 4 \geq 0$, dus als $x \geq 2$, is $f(x) = x - 3 + 2x - 4 = 3x - 7$ als $x \geq 2$.
Omdat $|2x - 4| = -2x + 4$ als $2x - 4 < 0$, dus als $x < 2$, is $f(x) = x - 3 - 2x + 4 = -x + 1$ als $x < 2$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.



1.2 Tweedegraadsvergelijkingen

O 20 **a** Het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25x = 0$ gaat anders dan het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25 = 0$.
Licht dit toe.

b Wat kun je zeggen van de oplossing van de vergelijking $4x^2 + 25 = 0$?

c Licht toe dat het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 0$ anders gaat dan het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 8$.

Theorie A Typen tweedegraadsvergelijkingen

De algemene vorm van een **kwadratische vergelijking**, ofwel **tweedegraadsvergelijking** is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$. Bij het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen kun je gebruikmaken van onderstaand schema. In het schema wordt onderscheid gemaakt tussen vergelijkingen met twee en met drie termen.

$a \neq 0$ betekent a niet gelijk aan nul.

Het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen	
Twee termen	
$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ *Aanpak*: breng x buiten haakjes. **a** $5x^2 - 7x = 0$ $x(5x - 7) = 0$ $x = 0 \vee 5x = 7$ $x = 0 \vee x = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ **b** $3x = x^2$ $3x - x^2 = 0$ $x(3 - x) = 0$ $x = 0 \vee x = 3$	$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ *Aanpak*: herleid tot de vorm $x^2 =$ getal. **a** $3x^2 - 30 = 0$ $3x^2 = 30$ $x^2 = 10$ $x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$ **b** $4x^2 + 40 = 0$ $4x^2 = -40$ $x^2 = -10$ geen oplossing
Drie termen $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$	
Het linkerlid is te ontbinden *Aanpak*: ontbind het linkerlid. **a** $x^2 - 6x - 7 = 0$ $(x + 1)(x - 7) = 0$ $x = -1 \vee x = 7$ **b** $x^2 = x + 6$ $x^2 - x - 6 = 0$ $(x + 2)(x - 3) = 0$ $x = -2 \vee x = 3$	Het linkerlid is niet te ontbinden *Aanpak*: gebruik de *abc*-formule of ga kwadraatafsplitsen. **a** $2x^2 - 5x - 7 = 0$ $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$ $x = \frac{5 - 9}{4} = -1 \vee x = \frac{5 + 9}{4} = 3\frac{1}{2}$ **b** $x^2 + 7x + 2 = 0$ $(x + 3\frac{1}{2})^2 - (3\frac{1}{2})^2 + 2 = 0$ $(x + 3\frac{1}{2})^2 = 10\frac{1}{4}$ $x + 3\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{41}{4}} \vee x + 3\frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{41}{4}}$ $x = -3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{41} \vee x = -3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{41}$

Het stap voor stap oplossen van een vergelijking, zoals in het schema op de vorige bladzijde is gedaan, heet **algebraïsch oplossen**.
De opdracht **bereken exact de oplossingen** betekent dat je langs algebraïsche weg de oplossingen berekent en deze niet benadert.

Je laat dus oplossingen als $x = \sqrt{3}$ en $x = \frac{1}{7}$ staan.

Oplossingen als $x = \dfrac{18}{12}$ en $x = \dfrac{2 - \sqrt{36}}{4}$ vereenvoudig je.

Dus $x = \dfrac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ en $x = \dfrac{2 - \sqrt{36}}{4} = \dfrac{2 - 6}{4} = -1$.

Door bij de oplossing $x = \dfrac{8 - \sqrt{48}}{4}$ een **factor voor het wortelteken te brengen**, krijg je

$$x = \frac{8 - \sqrt{48}}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}.$$

Denk er dus aan om bij wortels een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken te brengen.

Breng een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken,
dus niet $\sqrt{48} = 2\sqrt{12}$,
maar wel $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Bij de ***abc*-formule** is aan de **discriminant** D te zien hoeveel oplossingen er zijn:
voor $D < 0$ is er geen oplossing
voor $D = 0$ is er één oplossing
voor $D > 0$ zijn er twee oplossingen.

De *abc*-formule
$ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$
geeft
$x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} \vee$
$x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
met $D = b^2 - 4ac$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $(2x + 1)^2 = 25$
b $3x^2 - 6 = 3x$
c $4x^2 = 6x - 2$
d $x^2 - 3 = 5x$

Uitwerking

a $(2x + 1)^2 = 25$
$2x + 1 = 5 \vee 2x + 1 = -5$
$2x = 4 \vee 2x = -6$
$x = 2 \vee x = -3$

b $3x^2 - 6 = 3x$
$3x^2 - 3x - 6 = 0$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x + 1)(x - 2) = 0$
$x = -1 \vee x = 2$

c $4x^2 = 6x - 2$
$4x^2 - 6x + 2 = 0$
$2x^2 - 3x + 1 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$
$x = \dfrac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \dfrac{3 + 1}{4} = 1$

d $x^2 - 3 = 5x$
$x^2 - 5x - 3 = 0$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 - (2\frac{1}{2})^2 - 3 = 0$
$(x - 2\frac{1}{2})^2 = 9\frac{1}{4}$
$x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{37}{4}} \vee x - 2\frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{37}{4}}$
$x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37} \vee x = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37}$

Probeer bij een tweedegraadsvergelijking met drie termen eerst te ontbinden in factoren. Lukt dat niet, gebruik dan pas de *abc*-formule of kwadraatafsplitsen.

R 21 In deze opgave ga je de *abc*-formule bewijzen. Dat gaat met behulp van kwadraatafsplitsen. Je begint met $ax^2 + bx + c = 0$.
Links en rechts delen door a geeft $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Vervolgens krijg je $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$.
a Licht de laatste stap toe.
b Maak het bewijs af.

T 22 [▶ ▶ 27] Los algebraïsch op.
a $2x^2 - 13x = 3(x - 10)$
b $3x^2 + 2x + 7 = 7(x + 1)$
c $100(x^2 - 1) = 525$
d $2(x - 3)^2 = 3x - 10$
e $5(4x - 1)(6x - 5) = 0$
f $\frac{1}{4}(2x - 3)^2 - 3 = 1$

23 Bereken exact de oplossingen.
a $(3x - 2)^2 = 36$
b $(4 - \frac{1}{2}x)^2 = 9$
c $x^2 + 6 = 5x$
d $x(x - 1) = 12$
e $2x^2 = 5x$
f $x^2 + 4 = 1$

24 Los algebraïsch op.
a $3x^2 - 6x = 24$
b $3x^2 - 6x = -3(x - 6)$
c $2x^2 - 3x = 2$
d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$
e $x^2 - 3x = 5(x - 3)$
f $2x^2 - 5x = 3x$

25 Bereken exact de oplossingen.
a $6 - x^2 = -2$
b $2x^2 = 9x + 5$
c $3(x + 2)^2 + 5 = 80$
d $\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 3 = 5$
e $-(2x - 1)^2 + 5 = 1$
f $8 - 3(4x - 5)^2 = 5$

26 Bereken exact de oplossingen.
a $x^2 - 5x = 0$
b $x^2 - 5x = 14$
c $x^2 - 5 = 14$
d $x^2 - 5 = 14x$
e $(2x - 1)(3x + 6) = 0$
f $(2x - 1)(3x + 6) = 9x$
g $3x(2x - 1) = 6$
h $3x(2x - 1) = 6 - 9x$

A 27 Bereken exact de oplossingen.
a $(x + 3)^2 = 16x$
b $(2x + 3)^2 = -16$
c $2(x + 3)^2 = -4x$
d $(2x + 3)(4 - x) = 9$
e $(-4x + 3)^2 = 36$
f $-4(x + 3)^2 = 4x$
g $x^2 - (x + 1)^2 = (x + 3)^2$
h $(x + 3)^2 + (x + 2)^2 = 25$

Geschiedenis Babylonisch rekenen

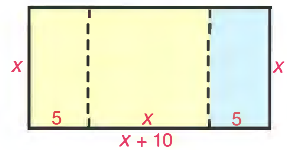
Ruim 5000 jaar geleden losten de Babyloniërs reeds kwadratische vergelijkingen op. Deze vergelijkingen stonden op kleitabletten en werden gesteld in de vorm van een raadsel. Wat opvalt is dat de Babyloniërs geen problemen hadden met het optellen van lengten en oppervlakten.
Voorbeeld: Wat is de zijde van een vierkant waarvan de oppervlakte vermeerderd met tien zijden gelijk is aan dertig eenheden?
Om deze zijde te berekenen moet de vergelijking $x^2 + 10x = 30$ worden opgelost. De Babyloniërs losten dit vraagstuk op met behulp van de figuur hiernaast. In onze notatie ziet de berekening er als volgt uit.

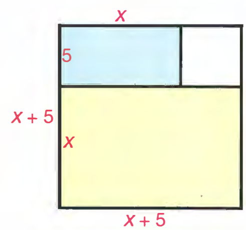
$x(x + 10) = 30$
$(x + 5)^2 = 30 + 5^2$
$x + 5 = \sqrt{55}$, dus $x = \sqrt{55} - 5$

Je kunt dus zeggen dat de Babyloniërs de volgende elegante versie van de *abc*-formule gebruikten.

$x^2 + bx = c$ geeft $x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2} - \frac{1}{2}b$.

Voor het benaderen van $\sqrt{55}$ hadden de Babyloniërs de volgende methode. Neem als eerste schatting 7. Het product van 7 en $\frac{55}{7}$ is 55. Omdat 7 kleiner is dan $\sqrt{55}$, is $\frac{55}{7}$ groter dan $\sqrt{55}$. Neem als volgende schatting het gemiddelde van 7 en $\frac{55}{7}$.
Dus $\frac{1}{2}\left(7 + \frac{55}{7}\right) = 7\frac{3}{7}$ is een betere schatting van $\sqrt{55}$.





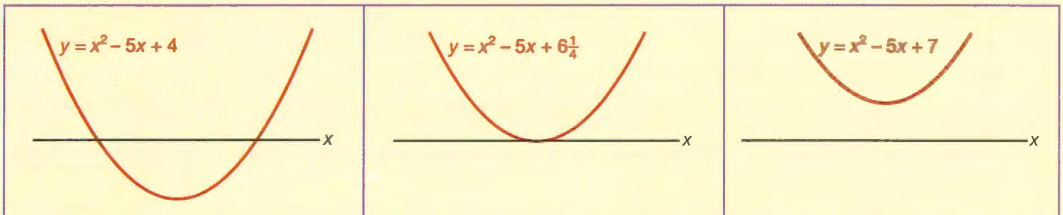
D 28 Zie het geschiedeniskader over het Babylonisch rekenen.
a Los op deze manier de vergelijkingen $x^2 + 8x = 20$ en $x^2 + 18x = 20$ op.
b Laat zien hoe met behulp van de *abc*-formule uit $x^2 + bx = c$ de oplossing $x = \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} - \frac{1}{2}b$ is af te leiden.
c Uit $x^2 + bx = c$ is met behulp van kwadraatafsplitsen de oplossing $x = \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} - \frac{1}{2}b$ af te leiden.
Toon dit aan.

O 29 Gegeven is de vergelijking $x^2 + px - 6 = 0$.
a Neem $p = -1$ en bereken de oplossingen van de vergelijking.
b Neem $p = 2$. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking?
c Beredeneer dat de vergelijking $x^2 + px - 6 = 0$ voor elke p twee oplossingen heeft.

Theorie B Vergelijkingen met een parameter

In de vergelijking $x^2 - 5x + p = 0$ heet p een **parameter**.
Met behulp van de parameter p worden oneindig veel vergelijkingen genoteerd.
Neem je in deze vergelijking $p = 4$, dan krijg je $x^2 - 5x + 4 = 0$.
Oplossen geeft $(x - 1)(x - 4) = 0$
$x = 1 \vee x = 4$
Neem je $p = 7$, dan krijg je $x^2 - 5x + 7 = 0$. Deze vergelijking heeft geen oplossing, want $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3 < 0$.
Met behulp van de discriminant $D = b^2 - 4ac$ van de vergelijking $x^2 - 5x + p = 0$ bereken je voor welke p de vergelijking twee, één of geen oplossingen heeft.

> Een parameter is een hulpvariabele.
> Parameter spreek je uit met de klemtoon op de tweede lettergreep.



De vergelijking $x^2 - 5x + 4 = 0$ heeft twee oplossingen, dus de parabool $y = x^2 - 5x + 4$ snijdt de x-as in twee punten.	De vergelijking $x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} = 0$ heeft één oplossing, dus de parabool $y = x^2 - 5x + 6\frac{1}{4}$ raakt de x-as.	De vergelijking $x^2 - 5x + 7 = 0$ heeft geen oplossing, dus de parabool $y = x^2 - 5x + 7$ ligt geheel boven de x-as.

Voorbeeld

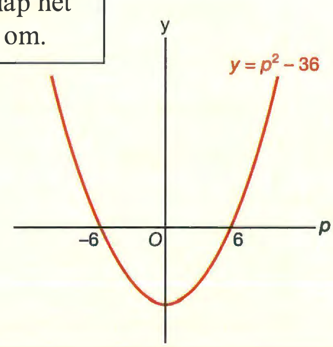
a Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 - 5x + p = 0$ twee oplossingen heeft.
b Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 + px + 9 = 0$ twee oplossingen heeft.

Uitwerking

a $\left.\begin{array}{l} D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 25 - 4p \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 25 - 4p > 0 \\ -4p > -25 \\ p < 6\frac{1}{4} \end{array}$

> Deel door −4, dus klap het teken om.

b $\left.\begin{array}{l} D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = p^2 - 36 \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p^2 - 36 > 0 \\ p^2 > 36 \\ p < -6 \vee p > 6 \end{array}$



30 Bereken voor welke p de vergelijking twee oplossingen heeft.

a $x^2 - 7x + p = 0$
b $2x^2 - 5x - p = 0$
c $-3x^2 + 4x - p = 0$
d $\frac{1}{4}x^2 - 3x + p = 0$

31 **a** Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 + px + 25 = 0$ twee oplossingen heeft.
b Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 + px + 4 = 0$ geen oplossing heeft.
c Toon aan dat de vergelijking $-2x^2 + px + 3 = 0$ voor elke p twee oplossingen heeft.

32 **a** Van de vergelijking $x^2 + 2x + p = 0$ is $x = 1$ een oplossing. Bereken p en de andere oplossing.
b Van de vergelijking $px^2 - 11x + 10 = 0$ is $x = 2$ een oplossing. Bereken p en de andere oplossing.

33 Als geldt $p < 5$ en bovendien $p \neq 0$, dan noteren we dit als $p < 0 \vee 0 < p < 5$.
a Noteer op dezelfde manier $p > -3$ en bovendien $p \neq 0$.
b Noteer op dezelfde manier $-4 < p < 4$ en bovendien $p \neq 0$.

34 Gegeven is de vergelijking $px^2 + 3x + 1 = 0$.
a Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking voor $p = 0$?
b Licht toe dat de voorwaarde $p \neq 0$ nodig is als je de discriminant van de vergelijking wilt berekenen.
c Toon aan dat de vergelijking twee oplossingen heeft voor $p < 0 \vee 0 < p < 2\frac{1}{4}$.

35 Bereken voor welke p de vergelijking
a $px^2 + 5x + 2 = 0$ twee oplossingen heeft
b $px^2 - 3x - 4 = 0$ twee oplossingen heeft.

A 36 Bereken exact voor welke p de vergelijking
a $2x^2 + x + p = 0$ geen oplossing heeft
b $px^2 + x + p = 0$ twee oplossingen heeft
c $2x^2 + px + 1 = 0$ twee oplossingen heeft.

A 37 **a** De vergelijking $px^2 + 6x + 9 = 0$ heeft één oplossing. Bereken p en de bijbehorende oplossing.
b De vergelijking $x^2 + px + 1 = 0$ heeft één oplossing. Bereken p en de bijbehorende oplossing.

D 38 Stel een tweedegraadsvergelijking op met de parameter p die twee oplossingen heeft voor $-4 < p < 0 \vee p > 0$.

Terugblik

Typen tweedegraadsvergelijkingen

De algemene vorm van een tweedegraadsvergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$.
Deze vergelijkingen moet je algebraïsch, dat wil zeggen stap voor stap, kunnen oplossen.

Overzicht tweedegraadsvergelijkingen	
Twee termen	
$ax^2 + bx = 0$ Breng x buiten haakjes. $3x^2 - 7x = 0$ $x(3x - 7) = 0$ $x = 0 \vee 3x = 7$ $x = 0 \vee x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$	**$ax^2 + c = 0$** Herleid tot de vorm $x^2 =$ getal. $3x^2 - 75 = 0$ $3x^2 = 75$ $x^2 = 25$ $x = 5 \vee x = -5$
Drie termen $ax^2 + bx + c = 0$	
Het linkerlid is te ontbinden Ontbind het linkerlid. $x^2 - 5x - 14 = 0$ $(x + 2)(x - 7) = 0$ $x = -2 \vee x = 7$	Het linkerlid is niet te ontbinden Gebruik de *abc*-formule of ga kwadraatafsplitsen. $3x^2 - 2x - 2 = 0$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 28$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ $x = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \vee x = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$

Als er exacte oplossingen worden gevraagd, dan ga je algebraïsch te werk en benader je de oplossingen niet.

Vergelijkingen met een parameter

Het getal p in de vergelijking $2x^2 + px + 8 = 0$ heet een parameter.
Op deze manier zijn oneindig veel vergelijkingen genoteerd.
Zo krijg je voor $p = 10$ de vergelijking $2x^2 + 10x + 8 = 0$.
Deze vergelijking heeft twee oplossingen want $D = 10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 36 > 0$.
Neem je $p = 5$ dan krijg je $2x^2 + 5x + 8 = 0$.
Deze vergelijking heeft geen oplossing, want $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = -39 < 0$.
Om te berekenen voor welke p de vergelijking $2x^2 + px + 8 = 0$ twee oplossingen heeft, gebruik je dat moet gelden $D > 0$. Je krijgt $p^2 - 64 > 0$, ofwel $p^2 > 64$ en hieruit volgt $p < -8 \vee p > 8$.

Om te berekenen voor welke p de vergelijking $px^2 + 6x + 3 = 0$ twee oplossingen heeft, bedenk je eerst dat voor $p = 0$ de vergelijking over gaat in $6x + 3 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing. Voor $p \neq 0$ krijg je
$D = 36 - 12p$.

$$\begin{aligned} D > 0 \text{ geeft } \quad & 36 - 12p > 0 \\ & -12p > -36 \\ & p < 3 \end{aligned}$$

Dus de vergelijking $px^2 + 6x + 3 = 0$ heeft twee oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < 3$.

1.3 Extreme waarden en inverse functies

O 39 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx$ met $a \neq 0$.

a Los op $f(x) = 0$ en licht toe dat hieruit volgt $x_{top} = -\dfrac{b}{2a}$.

b Licht toe dat ook voor de parabool $y = ax^2 + bx + c$ geldt $x_{top} = -\dfrac{b}{2a}$.

Theorie A Extreme waarden

De algemene vorm van een **tweedegraadsfunctie**, ofwel **kwadratische functie** f is $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$.
De grafiek is een **parabool.**
Voor $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool** en voor $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool.**
Van de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is de x-coördinaat van de top te berekenen met de formule $x_{top} = -\dfrac{b}{2a}$.
Let erop dat deze formule alleen voor tweedegraadsfuncties geldt.

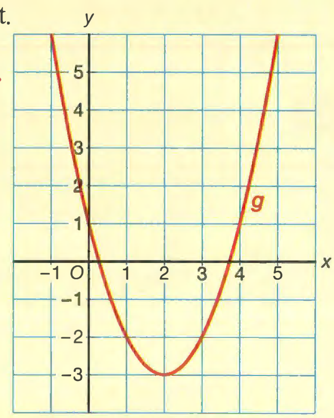
Van de grafiek van de tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is $x_{top} = -\dfrac{b}{2a}$. Verder is $y_{top} = f(x_{top})$.

Bij de functie $g(x) = x^2 - 4x + 1$ krijg je

$x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ en

$y_{top} = g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$. Zie figuur 1.6.

Omdat −3 de kleinste functiewaarde is van g zeggen we: het **minimum** van g is −3. Notatie: min. is $g(2) = -3$.
Bij een bergparabool is er sprake van een **maximum.**
Maxima en minima heten **extreme waarden** of kortweg **extremen.**



figuur 1.6

Voorbeeld

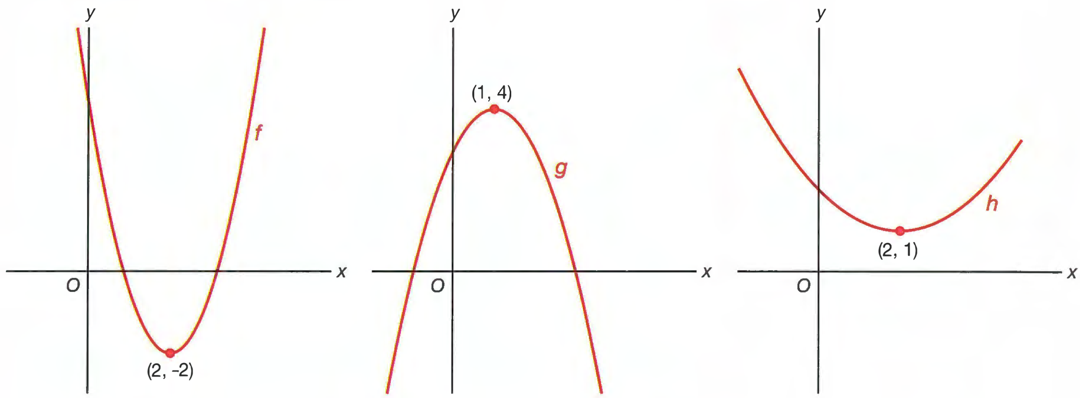
Bereken de extreme waarde van de functie $f(x) = -0{,}6x^2 + 2{,}4x - 1$.

Uitwerking

$x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2{,}4}{-1{,}2} = 2$ geeft $y_{top} = -0{,}6 \cdot 2^2 + 2{,}4 \cdot 2 - 1 = 1{,}4$
$-0{,}6 < 0$, dus bergparabool en max. is $f(2) = 1{,}4$.

Een maximum is een grootste functiewaarde, dus een maximum is een y-coördinaat.

40 In figuur 1.7 zijn de grafieken van de functies f, g en h getekend.
De coördinaten van de toppen staan in de figuur.
De extreme waarde van f noteer je als min. is $f(2) = -2$.
Geef de extreme waarden van g en h.



figuur 1.7

41 Bereken de extreme waarde.

a $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b $g(x) = 2x^2 + 6x + 3$

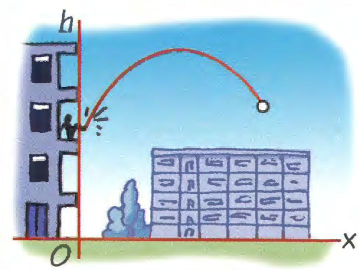
c $h(x) = -0{,}3x^2 + 6x - 2$

d $k(x) = 4x^2 + 14x$

O 42 Arie trapt een bal weg vanaf een balkon op 5 meter hoogte.
Bij de baan van de bal hoort de formule $h = -0{,}01x^2 + 0{,}4x + 5$. Hierin zijn h en x in meter. Zie figuur 1.8.

a Hoe hoog komt de bal maximaal?

b Hoeveel meter verderop komt de bal op de grond?



figuur 1.8

Theorie B Domein en bereik

In praktische situaties heb je vaak maar met een gedeelte van een parabool te maken. In opgave 42 heb je hiervan een voorbeeld gezien.
Omdat de bal 50 meter verderop op de grond komt, geldt de formule dus voor $0 \leq x \leq 50$. We zeggen dat het **domein** het **gesloten interval** nul vijftig is.
Notatie domein = [0, 50].
Een **interval** is een stuk van de getallenlijn.
Met gesloten geven we aan dat de getallen 0 en 50 er bij horen. In de notatie zie je dat aan de teksthaken [en].
In opgave 42 heb je gezien dat de maximale hoogte van de bal 9 meter is.
Voor de baan van de bal geldt dus $0 \leq h \leq 9$. We zeggen dat het **bereik** het gesloten interval nul negen is. Notatie bereik = [0, 9].

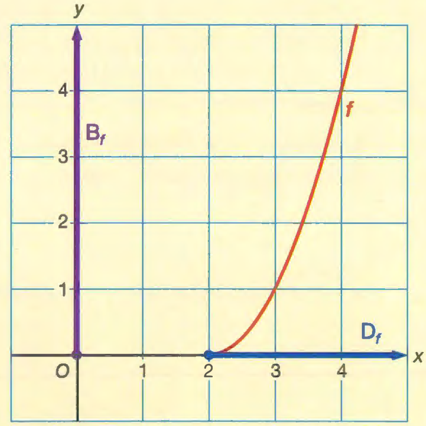
Het domein van een functie bestaat uit alle originelen.
Het bereik van een functie bestaat uit alle functiewaarden.

Behalve gesloten intervallen zijn er ook open intervallen. Bij een **open interval** horen de grenzen er niet bij. Open intervallen worden met de haken $\langle$ en $\rangle$ genoteerd. Zo bestaat het interval $\langle -3, -1 \rangle$ uit alle getallen tussen -3 en -1. In figuur 1.9 is dit interval aangegeven boven een getallenlijn. Aan de open rondjes bij -3 en -1 zie je dat de getallen -3 en -1 niet bij het interval horen.
Ook zie je de intervallen $[0, 1\rangle$ en $[3, 6]$.

figuur 1.9 De intervallen, $\langle -3, -1\rangle$, $[0, 1\rangle$ en $[3, 6]$.

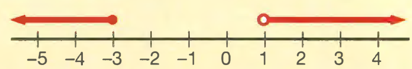
Het interval $[0, 1\rangle$ spreek je uit als het links gesloten rechts open interval nul één.

Verder zijn er **oneindig grote intervallen**.
Heb je te maken met de functie $f(x) = (x - 2)^2$ waarbij $x \geq 2$ dan wordt het domein van f genoteerd als $D_f = [2, \rightarrow\rangle$. Spreek uit: het domein van f is het links gesloten interval twee oneindig.
Het bereik van f is $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.



figuur 1.10

In figuur 1.11 zie je nog de intervallen $\langle \leftarrow, -3]$ en $\langle 1, \rightarrow\rangle$.
Bij $\langle \leftarrow, -3]$ is de uitspraak: het rechts gesloten interval min oneindig min drie.
Het interval $\langle \leftarrow, \rightarrow\rangle$ wordt genoteerd als $\mathbb{R}$.



figuur 1.11 De intervallen $\langle \leftarrow, -3]$ en $\langle 1, \rightarrow\rangle$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}4x^2 - 2{,}8x + 2$.
Neem $D_f = [0, 8]$ en bereken B_f.

Aanpak
Bereken van de grafiek de coördinaten van de eindpunten en de top.
Schets de grafiek en lees het bereik af uit de schets.

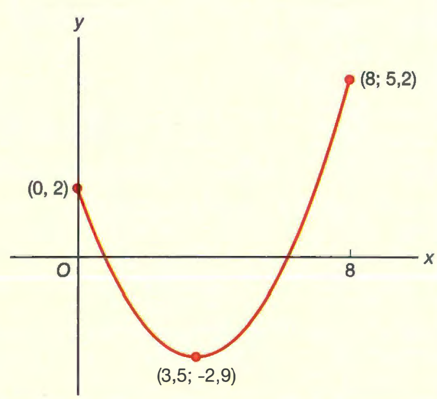
Uitwerking
$f(0) = 2$ en $f(8) = 0{,}4 \cdot 8^2 - 2{,}8 \cdot 8 + 2 = 5{,}2$

$x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2{,}8}{0{,}8} = 3{,}5$ en

$y_{top} = f(3{,}5) = 0{,}4 \cdot 3{,}5^2 - 2{,}8 \cdot 3{,}5 + 2 = -2{,}9$

Zie de schets hiernaast.

$B_f = [-2{,}9; 5{,}2]$



43 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x - 3$.

a Neem $D_f = [-1, 6]$ en bereken B_f.

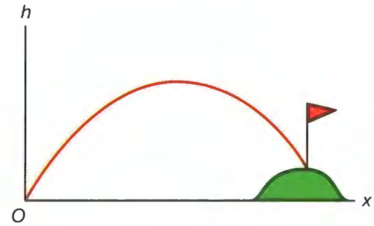
b Neem $D_f = [4, 8]$ en bereken B_f.

44 Bereken het bereik van de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ met $D_f = [-3, 4]$.

A 45 Joost slaat een golfbal vanaf de tee naar een green die 3,0 meter hoger ligt dan de tee. De baan van de bal is gegeven door de formule $h = -0{,}004x^2 + 0{,}62x$. Hierin zijn h en x in meter.

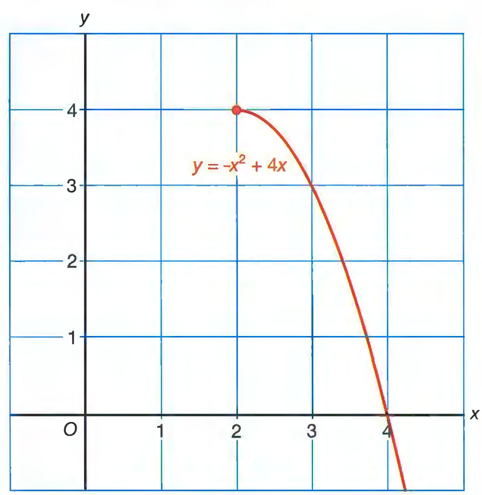
a Bereken het domein van h.

b Bereken het bereik van h.



figuur 1.12

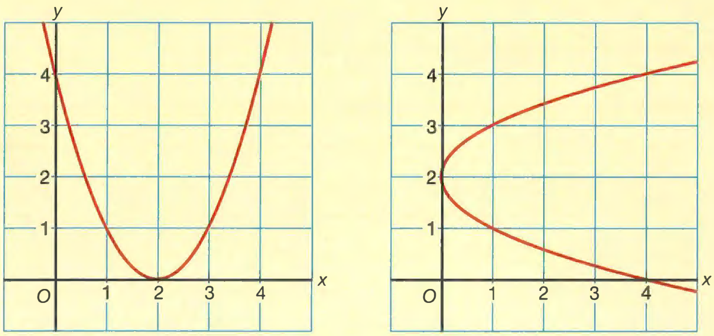
O 46 In figuur 1.13 is de grafiek van de halve parabool $y = -x^2 + 4x$ getekend.
Neem deze figuur over en teken het spiegelbeeld van de halve parabool bij spiegeling in de lijn $y = x$.



figuur 1.13

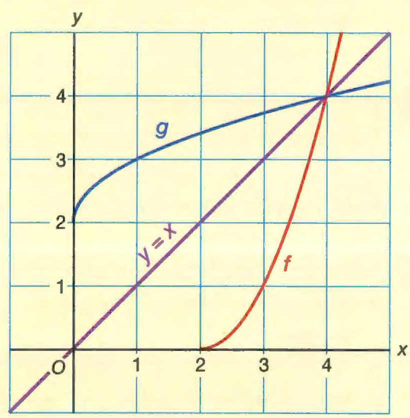
Theorie C Functie en inverse functie

In figuur 1.14a is de parabool $y = (x - 2)^2$ getekend. Deze parabool is de grafiek van een functie. Je hebt met een functie (van x naar y) te maken als bij elke waarde van x hoogstens één waarde van y hoort. De grafiek in figuur 1.14b is dus niet de grafiek van een functie, er horen immers bij positieve waarden van x telkens twee waarden van y.



figuur 1.14 Bij de grafiek in figuur a hoort de formule $y = (x - 2)^2$ en bij de grafiek in figuur b hoort de formule $x = (y - 2)^2$. De grafiek in figuur a is de grafiek van een functie van x naar y. De grafiek in figuur b is niet de grafiek van een functie van x naar y.

De grafieken in figuur 1.14 zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.
Ook de grafieken van f en g in figuur 1.15 zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$. Hier zijn f en g beide een functie. De grafiek van f is de helft van de parabool $y = (x - 2)^2$. Het domein is $[2, \rightarrow\rangle$.



figuur 1.15 De grafieken van de functies f en g zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

Door bij een tweedegraadsfunctie het domein te beperken kan de grafiek na spiegeling in de lijn $y = x$ de grafiek van een functie zijn. We zeggen dan dat de functie een **inverse** heeft. De **inverse functie** van een functie f noteren we met f^{inv}.

Functies f en g met de eigenschap dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ zijn elkaars inverse.
Notatie: $g = f^{\text{inv}}$ en $f = g^{\text{inv}}$.

1

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}4x^2 - 2{,}8x + 2$.
Bereken de kleinste waarde van a waarvoor de functie f met $D_f = [a, \rightarrow\rangle$ een inverse functie heeft en teken in één figuur voor deze waarde van a de grafieken van f en f^{inv}.

Aanpak
Gebruik de coördinaten van de top van de grafiek.

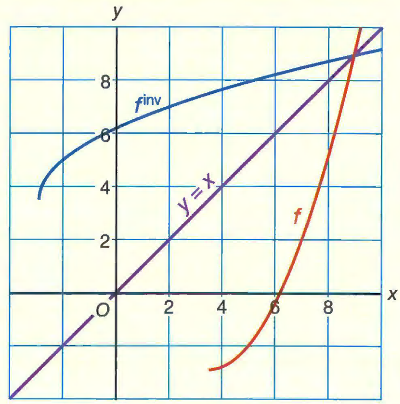
Uitwerking

Parabool met $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2{,}8}{0{,}8} = 3{,}5$, dus $a = 3{,}5$.

x	3,5	5	7	9
$f(x)$	−2,9	−2	2	9,2

x	−2,9	−2	2	9,2
$f^{\text{inv}}(x)$	3,5	5	7	9

Zie de figuur hiernaast.



47 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x - 3$.
Bereken de kleinste waarde van a waarvoor de functie f met $D_f = [a, \rightarrow\rangle$ een inverse functie heeft en teken in één figuur voor deze waarde van a de grafieken van f en f^{inv}.

48 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 4x$.

a Neem $D_f = \langle\leftarrow, -2]$ en teken de grafieken van f en f^{inv} in één figuur.
b Neem $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en bereken $f^{\text{inv}}(5)$.
c De grafieken van f en f^{inv} met $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ hebben precies één punt gemeenschappelijk.
Licht dit toe.
d Bereken voor welke waarden van a de grafieken van f en f^{inv} met $D_f = \langle\leftarrow, a]$ precies één punt gemeenschappelijk hebben.

D 49 **a** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}x + 2$.
Stel het functievoorschrift op van f^{inv}.
b Gegeven is de functie $g(x) = 3 - x$ met $D_g = [1, \rightarrow\rangle$.
Stel het functievoorschrift op van g^{inv}.

Terugblik

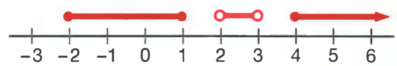
1

Extreme waarden

De grafiek van een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ is een parabool.
Voor $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.
Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool.
De functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ heeft een minimum.
Met de formule $x_{top} = -\frac{b}{2a}$ krijg je $x_{top} = -\frac{-6}{4} = 1\frac{1}{2}$, dus $y_{top} = f\left(1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$.

Dus het minimum van f is $2\frac{1}{2}$ voor $x = 1\frac{1}{2}$. Notatie: min. is $f\left(1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$.
Maxima en minima heten extreme waarden.

Intervallen



Een interval is een stuk van de getallenlijn.
Het interval $[-2, 1]$ is een voorbeeld van een gesloten interval. De getallen -2 en 1 horen bij dit interval.
Bij het open interval $\langle 2, 3\rangle$ horen de getallen 2 en 3 niet bij het interval.
Bij $[4, \rightarrow\rangle$ heb je te maken met een oneindig groot interval, het links gesloten interval vier oneindig.

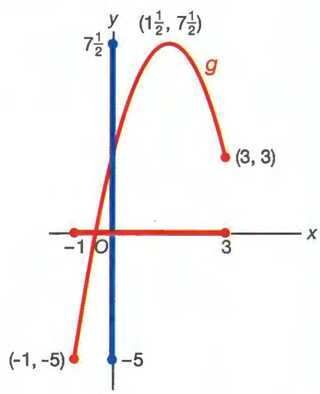
Domein en bereik

Bij een functie vormen alle originelen samen het domein van de functie. Alle functiewaarden samen vormen het bereik.
Bij een gegeven domein is het bereik te berekenen.
Om bij de functie $g(x) = -2x^2 + 6x + 3$ met $D_g = [-1, 3]$ het bereik te vinden, bereken je eerst van de grafiek de coördinaten van de eindpunten en de top. Je krijgt $g(-1) = -5$ en $g(3) = 3$, dus de eindpunten zijn $(-1, -5)$ en $(3, 3)$.

$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-4} = 1\frac{1}{2}$ en

$y_{top} = g(1\frac{1}{2}) = -2 \cdot (1\frac{1}{2})^2 + 6 \cdot 1\frac{1}{2} + 3 = 7\frac{1}{2}$,

dus de top is $\left(1\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$.



Vervolgens maak je een schets van de grafiek. Zie hiernaast.
Lees af: het bereik is $B_g = [-5, 7\frac{1}{2}]$.

Functie en inverse functie

Functies f en g met de eigenschap dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ zijn elkaars inverse. Notatie: $g = f^{inv}$ en $f = g^{inv}$.
Beperk je bij de functie $g(x) = -2x^2 + 6x + 3$ het domein tot het interval $\langle\leftarrow, 1\frac{1}{2}]$, dan heeft g een inverse. De grafiek van de inverse functie g^{inv} krijg je door de grafiek van g te spiegelen in de lijn $y = x$. Gebruik hierbij tabellen zoals

x	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$
$g(x)$	-5	3	7	$7\frac{1}{2}$

x	-5	3	7	$7\frac{1}{2}$
$g^{inv}(x)$	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$

1.4 Tweedegraadsfuncties met een parameter

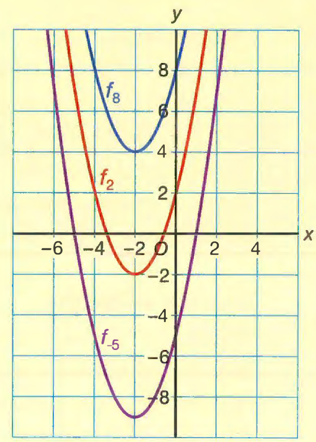
O 50 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x + p$.

a Neem $p = 1$ en bereken de coördinaten van de top van de grafiek van de functie die je krijgt.

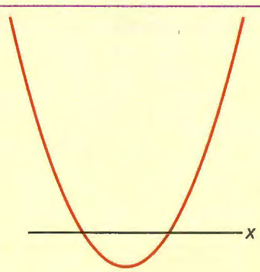
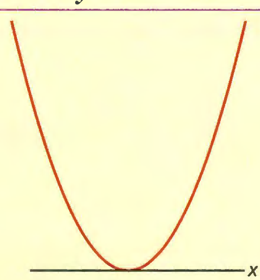
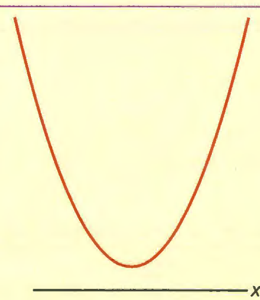
b Onderzoek bij welke waarde van p de top van de grafiek op de x-as ligt.

Theorie A Discriminanten met een parameter

Omdat je bij $f(x) = x^2 + 4x + p$ voor elke waarde van de parameter p een andere functie krijgt, heb je met oneindig veel functies te maken. Om al deze functies in één keer te noteren, schrijven we $f_p(x) = x^2 + 4x + p$.
Zo krijg je voor $p = 2$ de functie $f_2(x) = x^2 + 4x + 2$,
voor $p = 8$ de functie $f_8(x) = x^2 + 4x + 8$
en voor $p = -5$ de functie $f_{-5}(x) = x^2 + 4x - 5$. In de figuur hiernaast zie je de grafieken van deze drie functies.
De ligging van de grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ ten opzichte van de x-as hangt af van p. Je kunt je bijvoorbeeld afvragen voor welke waarden van p de grafiek geen snijpunten met de x-as heeft.
Om deze vraag te beantwoorden is het schema hieronder van belang. Hierin is te zien hoe de ligging van een dalparabool $y = ax^2 + bx + c$ ten opzichte van de x-as afhangt van de discriminant $D = b^2 - 4ac$.



figuur 1.16

De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ met $a > 0$		
		
twee snijpunten met de x-as $D > 0$	één snijpunt (raakpunt) met de x-as $D = 0$	geen snijpunt met de x-as $D < 0$

De grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ heeft geen snijpunten met de x-as als $D < 0$.

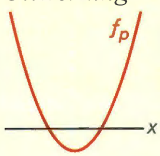
Omdat $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 16 - 4p$ krijg je
$$\begin{aligned} 16 - 4p &< 0 \\ -4p &< -16 \\ p &> 4 \end{aligned}$$

Dus de grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ heeft voor $p > 4$ geen snijpunten met de x-as.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2x^2 - 10x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p de functie f_p een negatief minimum heeft.

Uitwerking



$$\left.\begin{array}{l} \text{Er moet gelden } D > 0 \\ D = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 100 - 8p \end{array}\right\} \begin{aligned} 100 - 8p &> 0 \\ -8p &> -100 \\ p &< 12\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

51 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2x^2 - 6x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p
- **a** de grafiek van f_p de x-as raakt
- **b** f_p een negatief minimum heeft.

R 52 Maak een schema zoals op de vorige bladzijde, maar nu voor bergparabolen.

53 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p
- **a** de top van de grafiek van f_p op de x-as ligt
- **b** het maximum van f_p kleiner is dan 0.

A 54 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 3x^2 + px + 3$.
Bereken algebraïsch voor welke p
- **a** de top van de grafiek van f_p op de x-as ligt
- **b** f_p een negatief minimum heeft.

O 55 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 4x^2 + px + 5$.
Toon aan dat $x_{top} = -\frac{1}{8}p$ en dat $y_{top} = -\frac{1}{16}p^2 + 5$.

1

Theorie B Extremen met een parameter

In opgave 55 heb je gezien dat bij de functies $f_p(x) = 4x^2 + px + 5$ geldt $y_{top} = -\frac{1}{16}p^2 + 5$.
Als gegeven is dat het minimum van f_p gelijk is aan 1, dan geldt dus $-\frac{1}{16}p^2 + 5 = 1$. Hiermee is p te berekenen.

Voorbeeld

Van de functie $f_p(x) = 2x^2 + px + 3$ is het minimum 1.
Bereken p algebraïsch.

Uitwerking

$$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}p \quad \leftarrow \quad \boxed{-\frac{p}{4} = -\frac{1}{4}p}$$

$$y_{top} = f_p(-\tfrac{1}{4}p) = 2 \cdot (-\tfrac{1}{4}p)^2 + p \cdot -\tfrac{1}{4}p + 3$$

$$= 2 \cdot \tfrac{1}{16}p^2 - \tfrac{1}{4}p^2 + 3$$

$$= \tfrac{1}{8}p^2 - \tfrac{1}{4}p^2 + 3$$

$$= -\tfrac{1}{8}p^2 + 3$$

$$\left(-\tfrac{1}{4}p\right)^2 = \left(-\tfrac{1}{4}\right)^2 \cdot p^2 = \tfrac{1}{16}p^2$$

Het minimum is 1 geeft $-\frac{1}{8}p^2 + 3 = 1$

$-\frac{1}{8}p^2 = -2$

$p^2 = 16$

$p = 4 \vee p = -4$

56 Van de functie $f_p(x) = -2x^2 + px + 1$ is het maximum 9.
Bereken p algebraïsch.

57 De top van de grafiek van $f_p(x) = x^2 + px + 3$ ligt op de lijn $y = x + 1$.
Bereken p algebraïsch.

58 Van de functie $f_p(x) = px^2 + 6x + 1$ is de extreme waarde -2.
- **a** Bereken p algebraïsch.
- **b** Is de extreme waarde een maximum of een minimum?

D 59 De top van de grafiek van $f_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + q$ ligt op de parabool $y = x^2 + x + 1$.
- **a** Druk q uit in p.
- **b** Bereken voor welke p en q de x-coördinaat van de top van de grafiek van f_p gelijk is aan 2.

O 60 **a** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^2 + px + 7$.

Toon aan dat $x_{top} = -\frac{1}{2}p$ en dat hieruit volgt $p = -2x_{top}$.

Met $p = -2x_{top}$ is p uitgedrukt in x_{top}.

Druk bij de volgende functies p uit in x_{top}.

b $f_p(x) = 2x^2 + px - 3$

c $f_p(x) = -3x^2 + 4px + 4$

d $f_p(x) = px^2 + 6x - 1$

e $f_p(x) = p^2x^2 + 4px + 2$

Theorie C Kromme door toppen

Bij de functies $f_p(x) = px^2 + 4x - 3$ zijn x_{top} en y_{top} uit te drukken in p.

Je krijgt $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2p} = -\frac{2}{p}$ en

$$y_{top} = f_p\left(-\frac{2}{p}\right) = p \cdot \left(-\frac{2}{p}\right)^2 + 4 \cdot -\frac{2}{p} - 3 = p \cdot \frac{4}{p^2} - \frac{8}{p} - 3 = \frac{4}{p} - \frac{8}{p} - 3 = -\frac{4}{p} - 3.$$

Je kunt nu y_{top} uitdrukken in x_{top}.

Uit $x_{top} = -\frac{2}{p}$ volgt $p = -\frac{2}{x_{top}}$.

Substitueren van $p = -\frac{2}{x_{top}}$ in $y_{top} = -\frac{4}{p} - 3$ geeft

$$y_{top} = -\frac{4}{-\frac{2}{x_{top}}} - 3 = -4 \cdot -\frac{x_{top}}{2} - 3 = 2 \cdot x_{top} - 3.$$

Substitueren betekent vervangen door.

Hieruit volgt dat alle toppen van de parabolen $y = px^2 + 4x - 3$ op de lijn $y = 2x - 3$ liggen.

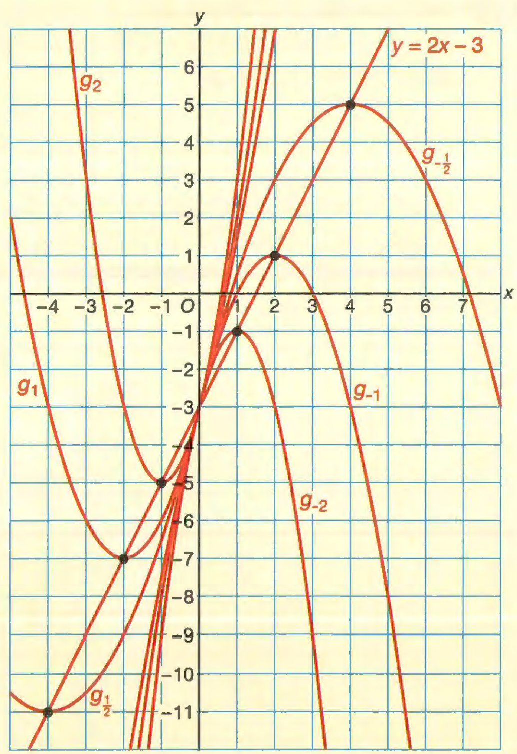
Om de formule van de lijn $y = 2x - 3$ te krijgen heb je $p = -\frac{2}{x_{top}}$ gesubstitueerd in de formule $y_{top} = -\frac{4}{p} - 3$.

Je had $p = -\frac{2}{x_{top}}$ ook kunnen invullen in de formule $y_{top} = p \cdot x_{top}^2 + 4 \cdot x_{top} - 3$.

Dit geeft $y_{top} = -\frac{2}{x_{top}} \cdot x_{top}^2 + 4 \cdot x_{top} - 3 =$

$-2 \cdot x_{top} + 4 \cdot x_{top} - 3 = 2 \cdot x_{top} - 3$.

Met $y = 2x - 3$ is de formule gevonden van de kromme waarop de toppen van de parabolen $y = px^2 + 4x - 3$ liggen.
De gevraagde kromme is hier een lijn.



figuur 1.17

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px - 5$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

Uitwerking

$$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -\frac{p}{\frac{1}{2}} = -2p, \text{ dus } p = -\tfrac{1}{2}x_{top}.$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{top} = \frac{1}{4}x_{top}{}^2 + px_{top} - 5 \\ p = -\frac{1}{2}x_{top} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_{top} = \frac{1}{4}x_{top}{}^2 + -\frac{1}{2}x_{top} \cdot x_{top} - 5 \\ y_{top} = \frac{1}{4}x_{top}{}^2 - \frac{1}{2}x_{top}{}^2 - 5 \\ y_{top} = -\frac{1}{4}x_{top}{}^2 - 5 \end{array}$$

Dus de formule van de kromme is $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

61 Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

a $f_p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + px - 6$

b $f_p(x) = px^2 + 6x + p$

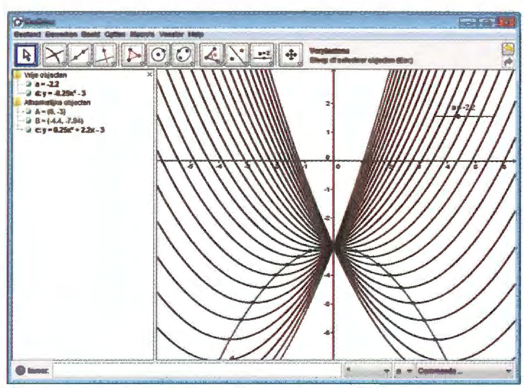
c $f_p(x) = p^2x^2 - 2px + 3$

d $f_p(x) = px^2 - px + 1$

A 62 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -x^2 + px + 2p$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

Informatief Parameters met GeoGebra

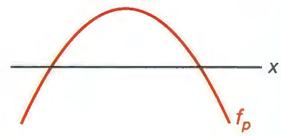
De tekening hiernaast is gemaakt met het programma GeoGebra. In het digitale boek staat een link naar een filmpje waarin je kunt zien hoe dat is gedaan.



Terugblik

Discriminanten met een parameter

Met $f_p(x) = -x^2 + 3x + p$ worden oneindig veel functies aangegeven.
Neem je de parameter $p = 2$ dan krijg je $f_2(x) = -x^2 + 3x + 2$.
Zoek je functies f_p met een positief maximum, dan gebruik je $D > 0$.
Je hebt immers te maken met een bergparabool waarvan de top boven de x-as ligt. Zie de figuur hiernaast.
Omdat $D = 3^2 - 4 \cdot -1 \cdot p = 9 + 4p$ krijg je
$9 + 4p > 0$, dus $p > -2\frac{1}{4}$.



Extremen met een parameter

Om te berekenen voor welke waarde van p het maximum van de functie $f_p(x) = -x^2 + px + p$ gelijk is aan 3, druk je eerst x_{top} en vervolgens y_{top} uit in p.

Je krijgt $x_{top} = -\dfrac{p}{-2} = \frac{1}{2}p$, dus

$y_{top} = -(\frac{1}{2}p)^2 + p \cdot \frac{1}{2}p + p = -\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p^2 + p = \frac{1}{4}p^2 + p.$

Omdat het maximum gelijk is aan 3 krijg je $\frac{1}{4}p^2 + p = 3$.

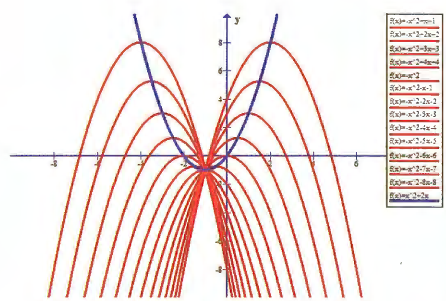
Dit geeft
$$p^2 + 4p - 12 = 0$$
$$(p - 2)(p + 6) = 0$$
$$p = 2 \vee p = -6$$

Dus het maximum van de functie $f_p(x) = -x^2 + px + p$ is gelijk aan 3 voor $p = 2 \vee p = -6$.

Kromme door toppen

De toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = -x^2 + px + p$ liggen op een kromme. De formule van deze kromme krijg je door eerst p uit te drukken in x_{top} en vervolgens y_{top} uit te drukken in x_{top}.
Uit $x_{top} = \frac{1}{2}p$ volgt $p = 2 \cdot x_{top}$.
Substitutie van $p = 2 \cdot x_{top}$ in de formule van f geeft

$$y_{top} = -{x_{top}}^2 + 2 \cdot x_{top} \cdot x_{top} + 2 \cdot x_{top}$$
$$= -{x_{top}}^2 + 2 \cdot {x_{top}}^2 + 2 \cdot x_{top}$$
$$= {x_{top}}^2 + 2 \cdot x_{top}$$



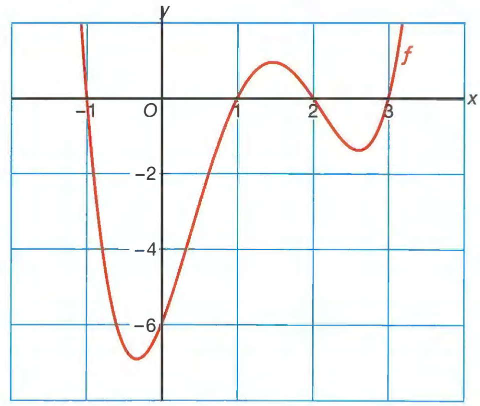
Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = x^2 + 2x$.

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

O 63 In figuur 1.18 is de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ getekend.

a Lees de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x-as af uit de figuur.

b Controleer dat de afgelezen x-coördinaten oplossingen zijn van de vergelijking $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.

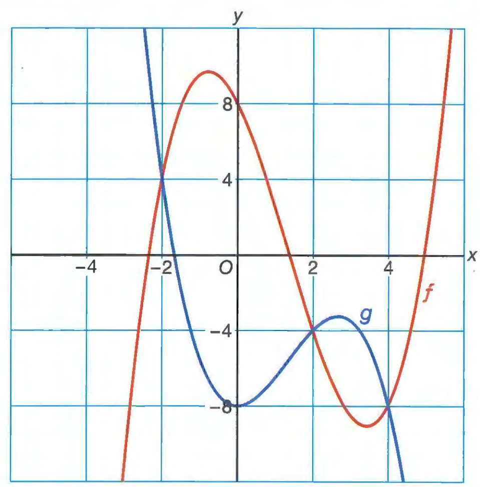


figuur 1.18

O 64 In figuur 1.19 zijn de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8$ getekend.

a Lees de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken af uit de figuur.

b Geef de oplossing van de vergelijking $\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8$.



figuur 1.19

Theorie A Toppen en snijpunten met de GR

Op de GR kun je grafieken van functies **plotten** en vervolgens benaderingen berekenen van x-coördinaten van snijpunten. Deze x-coördinaten zijn oplossingen van een vergelijking. Het oplossen van een vergelijking op de GR met behulp van grafieken heet **grafisch-numeriek oplossen**. Aan de vraagstelling is te zien of je een vergelijking algebraïsch moet oplossen, of dat je grafisch-numeriek te werk mag gaan.

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je met drie soorten opdrachten te maken krijgen.
- Bij de opdracht 'Los algebraïsch op' moet je de vergelijking stap voor stap oplossen. De oplossingen moet je soms benaderen.
- Bij de opdracht 'Bereken exact de oplossingen' moet je algebraïsch te werk gaan en mag je de oplossingen niet benaderen.
- Bij de opdracht 'Los op' of 'Bereken de oplossingen' mag je de werkwijze zelf kiezen. Het is dus toegestaan om grafisch-numeriek op te lossen. Je krijgt dan meestal benaderingen van oplossingen.

[▶ GR] Neem de module **Formules, grafieken en tabellen** en de module **Toppen en snijpunten** door.

Werkschema: Hoe noteer je de uitwerking bij het gebruik van de GR?

1 Vermeld de formules die je invoert.
2 Noteer de gebruikte optie en het resultaat dat de GR geeft.
3 Beantwoord de gestelde vraag.

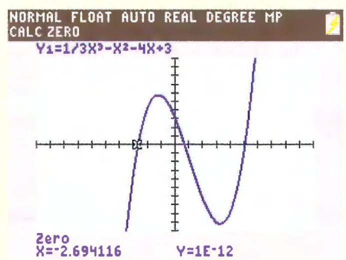
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 3$.
Rond in deze opgave de antwoorden af op twee decimalen.

a Los op $f(x) = 0$.
b Bereken de extreme waarden van f.
c Los op $f(x) = x - 2$.

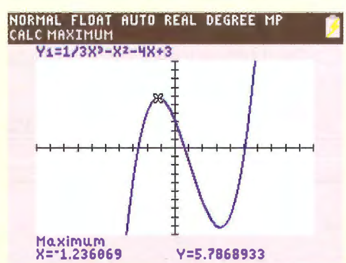
Uitwerking

a Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 3$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft
$x \approx -2{,}69 \vee x \approx 0{,}66 \vee x \approx 5{,}03$.



b De optie maximum geeft $x \approx -1{,}24$ en $y \approx 5{,}79$.
De optie minimum geeft $x \approx 3{,}24$ en $y \approx -9{,}12$.
Dus max. is $f(-1{,}24) \approx 5{,}79$ en min. is $f(3{,}24) \approx -9{,}12$.

c Voer in $y_2 = x - 2$.
Intersect geeft $x \approx -3{,}19 \vee x \approx 0{,}89 \vee x \approx 5{,}30$.



65 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 4$.
Rond in deze opgave de antwoorden af op twee decimalen.

a Los op $f(x) = 0$.
b Bereken de extreme waarden van f.
c Los op $f(x) = -x + 3$.

66 Los op. Geef de oplossingen zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

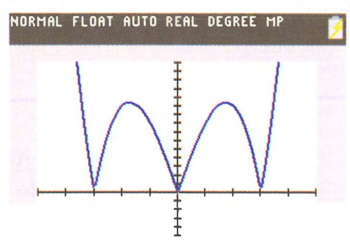
a $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$
b $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$
c $0{,}4x^3 + 2x^2 + x - 2 = x + 2$
d $0{,}2x^5 - x^4 + 4x^2 = 0{,}2x + 3$

67 Bereken van de volgende functies de extreme waarden. Rond af op twee decimalen.

a $f(x) = 0{,}2x^4 - x^3 - x^2 + 8x + 2$
b $g(x) = -1\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 40x - 28$

68 Gegeven is de functie $f(x) = |x^3 - 9x|$.
Op het GR-scherm hiernaast is de grafiek van f geplot.
Hiervoor is ingevoerd $y_1 = \text{abs}(x^3 - 9x)$ met Xmin = −5, Xmax = 5, Ymin = −5 en Ymax = 15.
Op de TI zit abs in het MATH-NUM-menu.
Op de Casio zit Abs in het OPTN-NUM-menu.
Los de volgende vergelijkingen op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $|x^3 - 9x| = 5$
b $|x^3 - 9x| = x + 5$



figuur 1.20

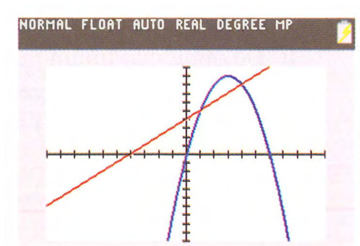
A 69 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $0{,}5x^3 - 5x^2 + 20 = 0$
b $0{,}1x^4 + 0{,}1x^3 - 12x^2 + 50 = 25x$
c $|x^4 - x^3 + x - 5| = x + 3$
d $|x^3 - 5x^2 - 2x + 24| = 20$

A 70 De top van de grafiek van $f_p(x) = 2x^2 + p^2x + p$ ligt op de lijn $y = 8x + 4$.
Bereken p en de bijbehorende extreme waarde. Rond zo nodig af op drie decimalen.

O 71 Op het GR-scherm hiernaast zijn de grafieken van $f(x) = -x^2 + 6x$ en $g(x) = x + 4$ geplot.

a Bereken de oplossingen van de vergelijking $-x^2 + 6x = x + 4$.
b Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g?



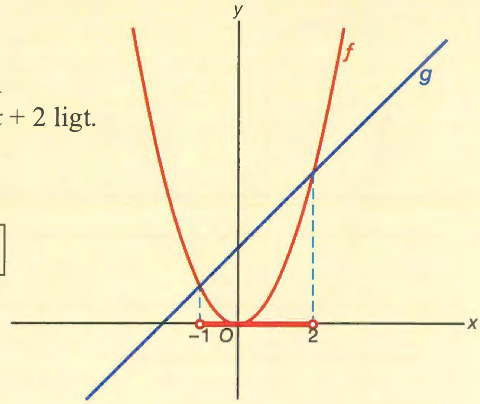
figuur 1.21

Theorie B Ongelijkheden oplossen

In opgave 71 heb je gekeken voor welke waarden van x de grafiek van $f(x) = -x^2 + 6x$ boven die van $g(x) = x + 4$ ligt. Daarmee heb je de ongelijkheid $-x^2 + 6x > x + 4$ opgelost.

De oplossing van de ongelijkheid $x^2 < x + 2$ is uit figuur 1.22 af te lezen. Je kijkt voor welke waarden van x de grafiek van $f(x) = x^2$ onder die van $g(x) = x + 2$ ligt. Op de x-as lees je af $x^2 < x + 2$ geeft $-1 < x < 2$.

x ligt tussen −1 en 2.



figuur 1.22 Op de x-as is aangegeven waar $f(x) < g(x)$ is.

Ook kun je aflezen $x^2 \geq x + 2$ geeft $x \leq -1 \vee x \geq 2$.

Bij het oplossen van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ heb je de oplossing van de vergelijking $f(x) = g(x)$ en een schets van de grafieken van f en g nodig. Nadat je de vergelijking hebt opgelost, lees je uit de schets af voor welke waarden van x de grafiek van f onder die van g ligt.

Bij het oplossen van een ongelijkheid lees je het antwoord af op de x-as.
Bij $f(x) < g(x)$ kijk je waar de grafiek van f onder die van g ligt.
Bij $f(x) > g(x)$ kijk je waar de grafiek van f boven die van g ligt.

Ook bij het oplossen van ongelijkheden kun je aan de vraagstelling zien of je algebraïsch te werk moet gaan, of dat je de grafisch-numerieke aanpak mag kiezen.

Werkschema: het oplossen van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$

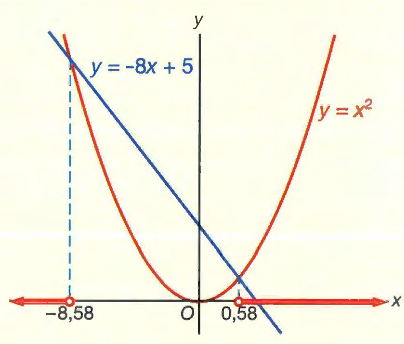
1. Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.
2. Schets de grafieken van f en g.
3. Geef op de x-as aan waar de grafiek van f onder die van g ligt.
4. Geef de oplossing van de ongelijkheid.

Voorbeeld

Los op $x^2 > -8x + 5$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

Uitwerking
Voer in $y_1 = x^2$ en $y_2 = -8x + 5$.
Intersect geeft $x \approx -8{,}58$ en $x \approx 0{,}58$.

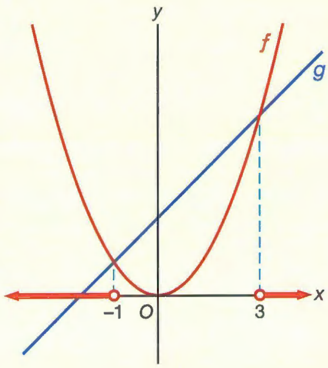
Zie de figuur hiernaast.
$x^2 > -8x + 5$ geeft $x < -8{,}58 \vee x > 0{,}58$



Voorbeeld

Los algebraïsch op $x^2 > 2x + 3$.

Uitwerking



$$\underbrace{x^2}_{f(x)} > \underbrace{2x+3}_{g(x)}$$

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \lor x = 3$$

$x^2 > 2x + 3$ geeft $x < -1 \lor x > 3$.

72 Los op. Rond in het antwoord zo nodig af op drie decimalen.

a $x^2 - 3x \leq 14$

b $x^2 + 2x > 11$

c $8x^2 + 6x - 35 \geq 0$

d $x^3 + 4{,}5x^2 < 19x + 60$

73 Los algebraïsch op.

a $x^4 > 81$

b $x^3 < -8$

c $\frac{1}{2}x^4 + 1 < 9$

d $\frac{1}{3}(x-1)^3 > 9$

A 74 Los op. Rond in het antwoord zo nodig af op twee decimalen.

a $0{,}1x^3 - 2x^2 + 8x + 10 \geq -x + 15$

b $-0{,}5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 8 \geq x + 7$

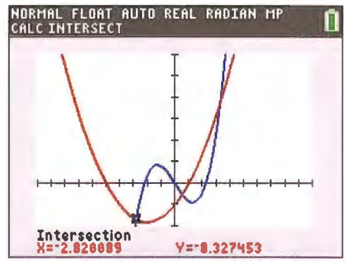
c $|x^3 - 10x| \leq 2x + 8$

d $|x^4 + x^2 - 5x - 10| \leq 8 - |2x - 4|$

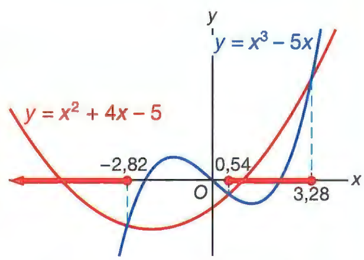
Terugblik

Vergelijkingen en ongelijkheden grafisch-numeriek oplossen

Elke vergelijking is grafisch-numeriek op te lossen. Je voert daarbij op de GR de formules y_1 = linkerlid en y_2 = rechterlid in. Vervolgens plot je de grafieken en met de optie intersect bereken je de coördinaten van de snijpunten. De x-coördinaten van de snijpunten zijn de oplossingen van de vergelijking.



Zo voer je voor het grafisch-numeriek oplossen van de vergelijking $x^3 - 5x = x^2 + 4x - 5$ de formules $y_1 = x^3 - 5x$ en $y_2 = x^2 + 4x - 5$ in. Kies het venster zo, dat alle snijpunten op het scherm te zien zijn. Zie het GR-scherm hiernaast.
De optie intersect geeft de oplossingen $x \approx -2{,}82$, $x \approx 0{,}54$ en $x \approx 3{,}28$. Hierbij is afgerond op twee decimalen.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) kun je gebruiken als het linker- of rechterlid nul is.

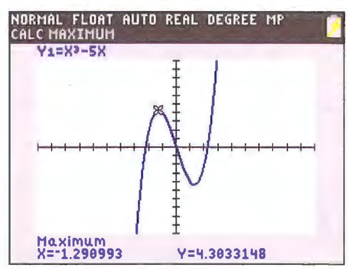


Voor het oplossen van de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ ga je als volgt te werk:

- Los op $f(x) = g(x)$.
- Schets de grafieken van f en g.
- Geef op de x-as aan waar de grafiek van f boven die van g ligt.
- Geef de oplossing van de ongelijkheid.

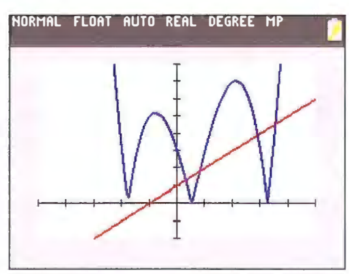
Voor de schets bij de ongelijkheid $x^3 - 5x \leq x^2 + 4x - 5$ gebruik je het GR-scherm hierboven.
$x^3 - 5x \leq x^2 + 4x - 5$ geeft $x \leq -2{,}82 \vee 0{,}54 \leq x \leq 3{,}28$

Toppen berekenen met de GR



Om de toppen van de grafiek van $f(x) = x^3 - 5x$ met de GR te berekenen, gebruik je de opties minimum en maximum. Je krijgt max. is $f(-1{,}29) \approx 4{,}30$ en min. is $f(1{,}29) \approx -4{,}30$.

Modulusongelijkheden



Om de modulusongelijkheid $|x^3 - 2x^2 - 5x + 3| \leq x + 1$ op te lossen voer je in $y_1 = \text{abs}(x^3 - 2x^2 - 5x + 3)$ en $y_2 = x + 1$. Op de TI zit abs in het MATH-NUM-menu en op de Casio zit Abs in het OPTN-NUM-menu. In het scherm hiernaast is Xmin = −5, Xmax = 5, Ymin = −2 en Ymax = 8 genomen.
Intersect geeft $x \approx 0{,}31$, $x \approx 0{,}81$, $x \approx 2{,}90$ en $x \approx 3{,}54$.
Dus $|x^3 - 2x^2 - 5x + 3| \leq x + 1$ geeft
$0{,}31 \leq x \leq 0{,}81 \vee 2{,}90 \leq x \leq 3{,}54$.

1

Diagnostische toets

1.1 Lineaire functies

1 **a** De lijn k gaat door het punt $A(-1, 6)$ en $rc_k = 2$.
Stel de formule op van k.
b De lijn l gaat door het punt $B(9, 3)$ en is evenwijdig met de lijn m: $y = -\frac{1}{2}x + 4$.
Stel de formule op van l.
c De lijn n: $y = ax + 5$ snijdt de x-as in het punt $(-10, 0)$.
Bereken a.

2 **a** Stel de vergelijking op van de lijn k door de punten $A(-5, 2)$ en $B(3, -2)$.
b Stel de formule op van de lijn l door de punten $P(40, 60)$ en $Q(65, 135)$.

3 W is een lineaire functie van t.
Voor $t = 4$ is $W = 500$ en voor $t = 12$ is $W = 2900$.
a Schrijf W als functie van t.
b Bereken W voor $t = 5{,}2$.

4 Gegeven is de functie $f(x) = 2x + 1 - |3x - 6|$.
a Teken de grafiek van f.
b Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafiek van f en de x-as.

1.2 Tweedegraadsvergelijkingen

5 Bereken exact de oplossingen.
a $3x^2 - x = 0$
b $3x^2 - 9x = 12$
c $3x^2 - x = 2$
d $x^2 + 14 = 16$
e $(2x - 3)^2 = 81$
f $(3x + 2)(x - 1) = 0$
g $x^2 = 7x + 13$
h $(3x + 2)(x - 1) = x(x + 5)$
i $(x + 2)^2 = 3x + 7$
j $(x - 3)^2 - (x + 1)^2 = (x - 4)^2$

6 Bereken voor welke p de vergelijking
a $2x^2 + 4x + p = 0$ geen oplossing heeft
b $3x^2 + px + 17 = 0$ twee oplossingen heeft
c $px^2 + 2x + 5 = 0$ twee oplossingen heeft.

7 De vergelijking $px^2 - 6x + 12 = 0$ heeft één oplossing.
Bereken p en de bijbehorende oplossing.

1.3 Extreme waarden en inverse functies

8 Bereken de extreme waarde.

a $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$

b $g(x) = -0{,}4x^2 + 4x - 3$

9 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}6x^2 - 4{,}8x + 3$.

a Neem $D_f = [0, 5]$ en bereken B_f.

b Neem $D_f = [2, 10]$ en bereken B_f.

10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4\frac{1}{2}$.
Bereken de grootste waarde van a waarvoor de functie f met $D_f = \langle\leftarrow, a]$ een inverse functie heeft en teken in één figuur voor deze waarde van a de grafieken van f en f^{inv}.

1.4 Tweedegraadsfuncties met een parameter

11 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -x^2 + px - 3$.
Bereken algebraïsch voor welke p

a de top van de grafiek van f_p op de x-as ligt

b f_p een positief maximum heeft.

12 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^2 + px + 6p$.

a Bereken voor welke p de extreme waarde gelijk is aan -13.

b Bereken voor welke waarden van p de top van de grafiek van f_p op de lijn $l\colon y = -5x + 10$ ligt.

13 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = x^2 + 2px + p$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

14 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + x^2 + 2x - 5$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de nulpunten en de extreme waarden van f.

15 Los op. Geef de oplossingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^4 - 4x^2 = 0{,}5x - 2$

b $|x^3 - 3x| = -\frac{1}{2}x + 2$

16 Los op. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

a $x^2 + 5x \leq x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

b $10 - |4 - 3x| < |x^3 - 4x^2 + x|$