Оглавление

Глава 1

Множества

Лекция 1: Операции над множествами

08.09.2023

1.1 Операции над множествами

Обозначение. $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству A.

$x \notin A$ означает, что элемент x не принадлежит множеству A.

Определение 1. $\emptyset$, пустое множество - множество, не содержащее ни одного элемента.

Определение 2. Множество B называют подмножеством A, если любой элемент B принадлежит A.

Обозначение. $B \subset A$

Пример. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Операции.

1. Пересечение множеств A и B - это множество из элементов принадлежащих A и B.

   Обозначение. $A \cap B$

2. Объединение множеств A и B - множество из элементов A или B.

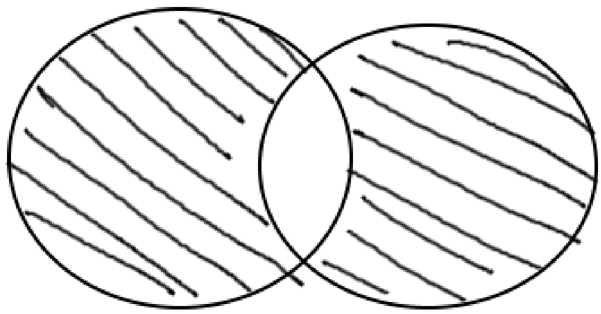
   Обозначение. $A \cup B$

3. Разность множеств A и B - множество элементов A, не принадлежащих B.

   Обозначение. $A \setminus B$

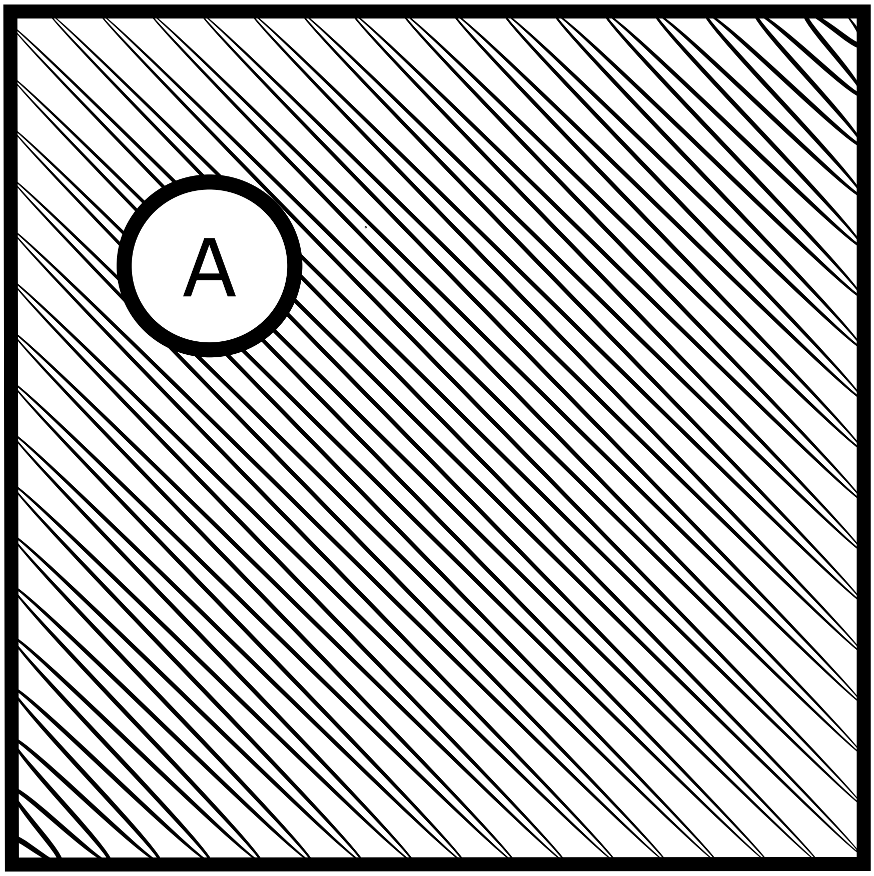
4. Симметрическая разность

Пример. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



5. Дополнение

Если предположить, что все множества являются поднмножествами некоторого универсального множества, дополнение множества A - это множество элементов U, не принадлежащих A.



Пример. $U = \mathbb{Z}$

A - множество чётных чисел

$\overline{A}$ - множество нечётных чисел

Порядок действий

1. Дополнение
2. Пересечение
3. Объединение, рахность, симметрическая разность

Приоритет слева направо.

Пример. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{3, 4\}$ $C = \{4, 5\}$

$\overline{A \cup B \cap \overline{C} \setminus \overline{B}}$

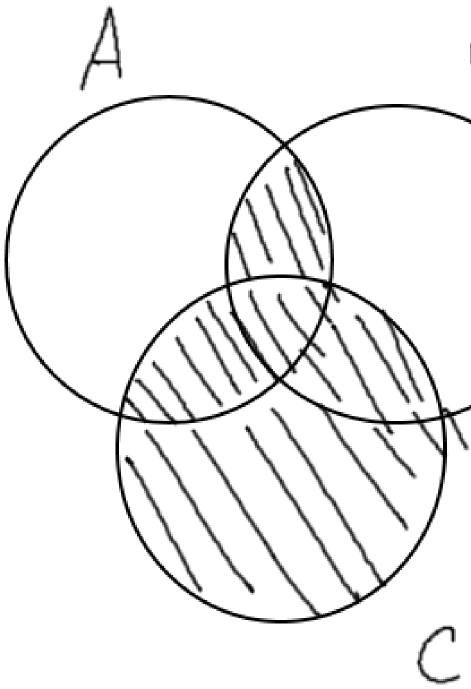
1. $\overline{C} = \{1, 2, 3\}$
2. $\overline{B} = \{1, 2, 5\}$
3. $B \cap \overline{C} = \{3\}$

4. $A \cup B \cap \overline{C} = \{1, 2, 3\}$
5. $A \cup B \cap \overline{C} \setminus \overline{B} = \{3\}$
6. $\overline{...} = \{1, 2, 4, 5\}$

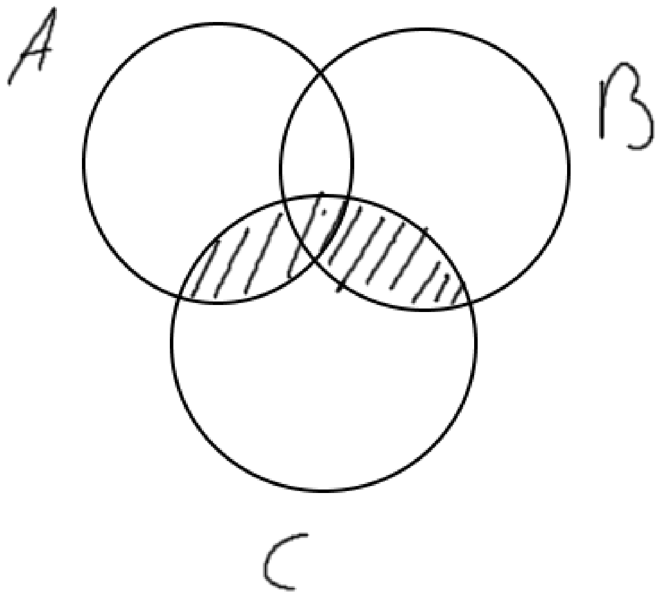
Свойства:

1. Дистрибутивность

   (a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$



   (b) $(A \cup B) \cap = (A \cap C) \cup (B \cap C)$



Доказательство. Положим $D = (A \cap B) \cup C$

$E = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Докажем, что $C \subset E$

Пусть $x \in D$, тогда выполняется

(a) $x \in A \cup B$ или

(b) $x \in C$

Если выполнено 1, то x $\in A \cup B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup C \in A \cap B \Rightarrow A \in B \Rightarrow x \in B \cup C \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Если выполнено 2, то $x \in C \Rightarrow x \in AcupC \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$x \in C \Rightarrow x \in B \cup c$

$x \in E \Rightarrow x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$

Случай 1. $x \notin C$

- $x \notin C$, $x \in A \cup C \Rightarrow x \in A$

- $x \neq C$, $x \in B \cup C => x \in B$

$=> x \in A \cap B = .x \in B$
Случай 2. $x \in C$
$=> x \in (A \cap B) \cup C => x \in D$ □

2. Законы де Моргана
   (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   (b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Прямым или декартовым произведеним множеств A и B называют множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$

Обозначение. $A \times B$

Пример. 1. $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y\}$
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$

2. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$
$A \times B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

3. $A = B = R$
$A \times B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

Св-во: между элементами множеств $(A \times B) \times C$ и $A \times (B\ timesC)$ есть взаимно однозначное соответствие.

Определение 3. $A \times B \times C$ - Это $(A \times B) \times C$
$A^n = A \times A \times ...A$

Пример. $0, 1^3$ элементов (0,0,0), (0,0,1), ..., (1,1,1)

1.2 Отображения

Определение 4. Отображением или функцией из множества X в множество Y называют правило, которое каждому элементу множества X сопоставляет ровно один элемент из множества Y.

Пример. 1. $X = \{a, b, c, d\}$ $Y = \{1, 2, 3\}$
$f(a) = 1$
$f(b) = 2$
$f(c) = 1$
$f(d) = 1$

2. $X = Y = \mathbb{R}$

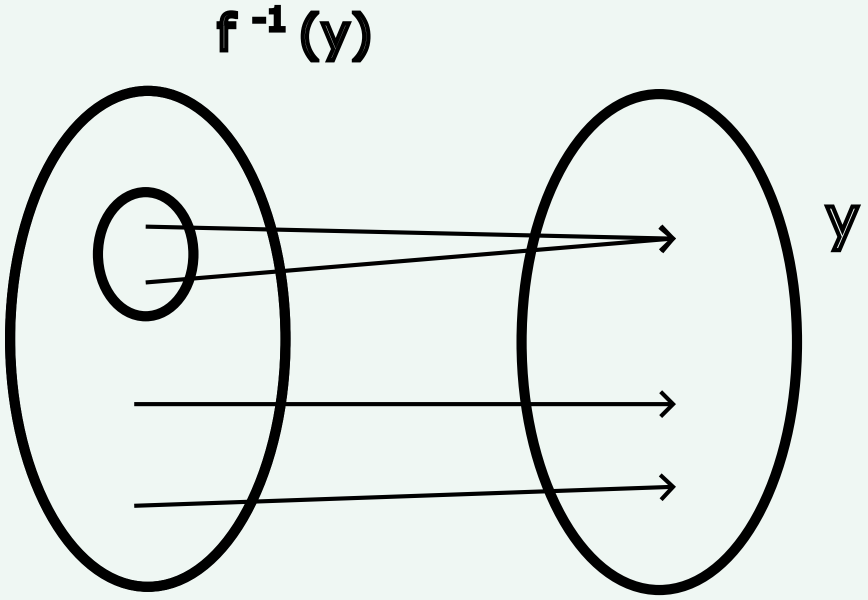
   $f(x) = x^2 =$

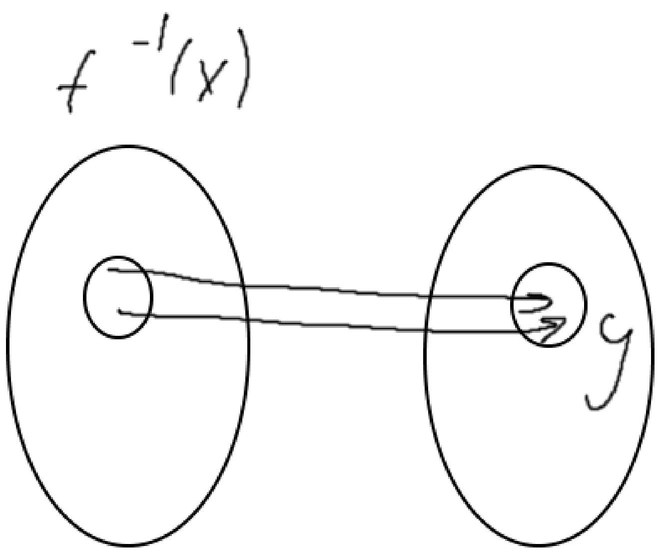
Определение 5. Образом отображения f называют множество элементов $f(x)$ т.к. $\{f(x) | x \in X\}$

Обозначение. $Imf, f(X)$

Определение 6. Прообразом элемента $y \in X$ называют множество элементов множества X, которые переходят в y, т.е.

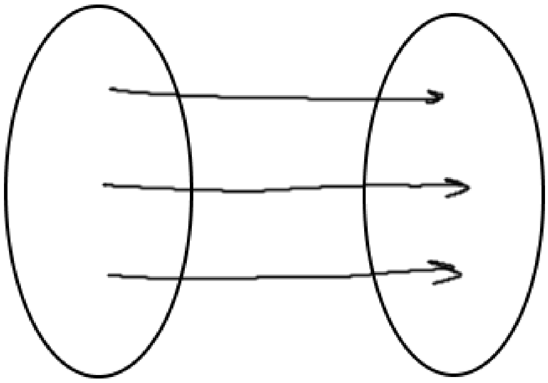
$\{x \in X | f(x) = y\}$





Обозначение. $f^{-1}(y)$
Если $y_1 \subset y$, то
$f^{-1}(y_1) = \{x \in X | f(x) \in y_1\}$

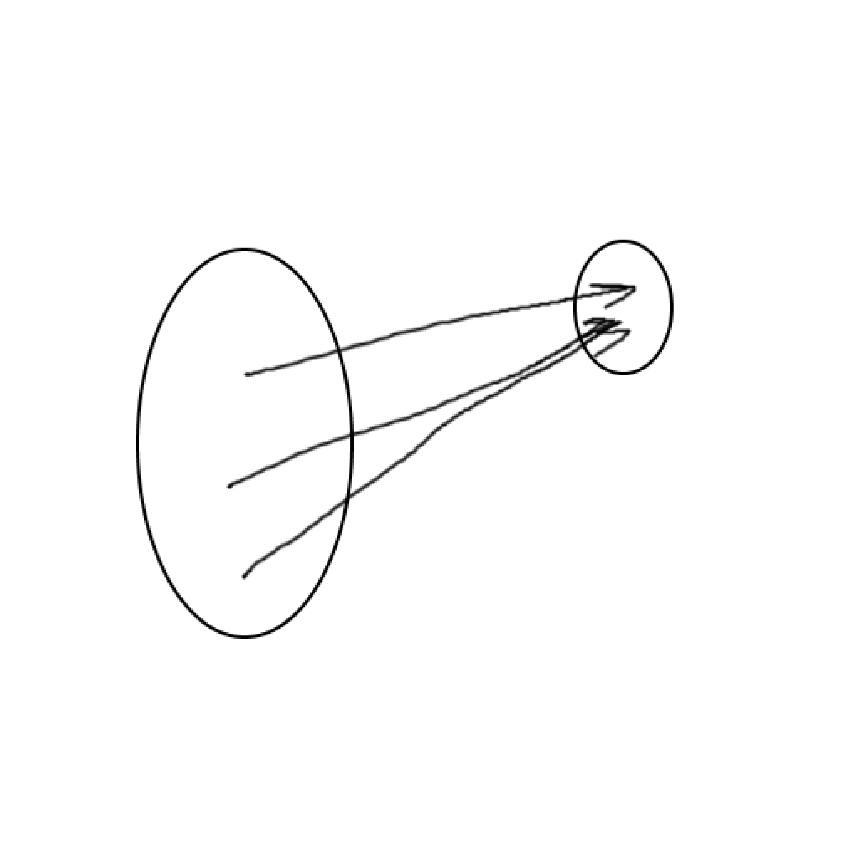
Определение 7. Отображением f называют иньективным, если прообраз любого элемента содержит не более одного элемента.



Др. названия:

- f - иньекция
- f является отображением в

Определение 8. Отображение f называется сюрьективным, если если прообраз любого элемента содержит хотя бы один элемент.



Др. названия:

- f - сюрьекция
- f является отображением на

Определение 9. Отображение f называется биективным, если прообраз любого элемента состоит ровно из одного элемента.

Др. названия:

- f - биекция
- f - взаимно однозначное отображение

Замечание. f биекция <=> f - инъекция и сюръекция.

Пример. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

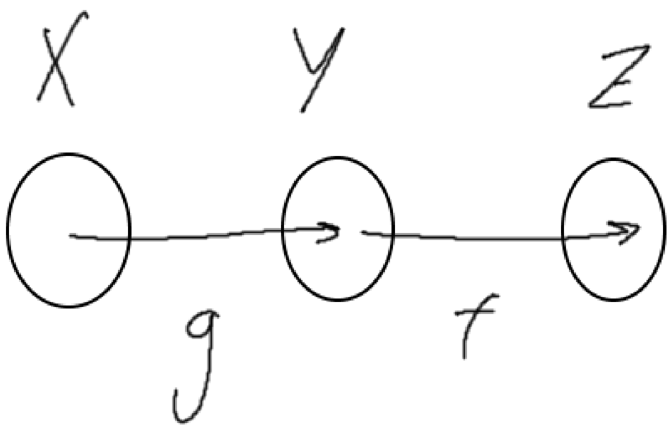
1. $f(x) = x + 1$ - биекция
2. $f(x) = x^2$ - не иньекция, не биекция

$f^{-1}(4) = \{2. - 2\}$
$f^{-1}(5) = \emptyset$
$\alpha \subset 2$

3. $f(x) = 2x$ - инъекция, не сюръекция
   $f^{-1} = \emptyset$
   $x_1 \neq x_2 => 2x_1 \neq 2x_2$
4. $f(x) = [\frac{x}{2}]$ не иньекция
   $[\frac{0}{2}] = [\frac{1}{2}]$
   $2n \in f^{-1}(n)$
   $=>$
   $f^{-1}(n) \neq \emptyset$

Определение 10. Тождественное отображение $e_x : x \to x_1, e_x(x) = x$

Определение 11. Пусть $y : X - Y, f : X \to Z$



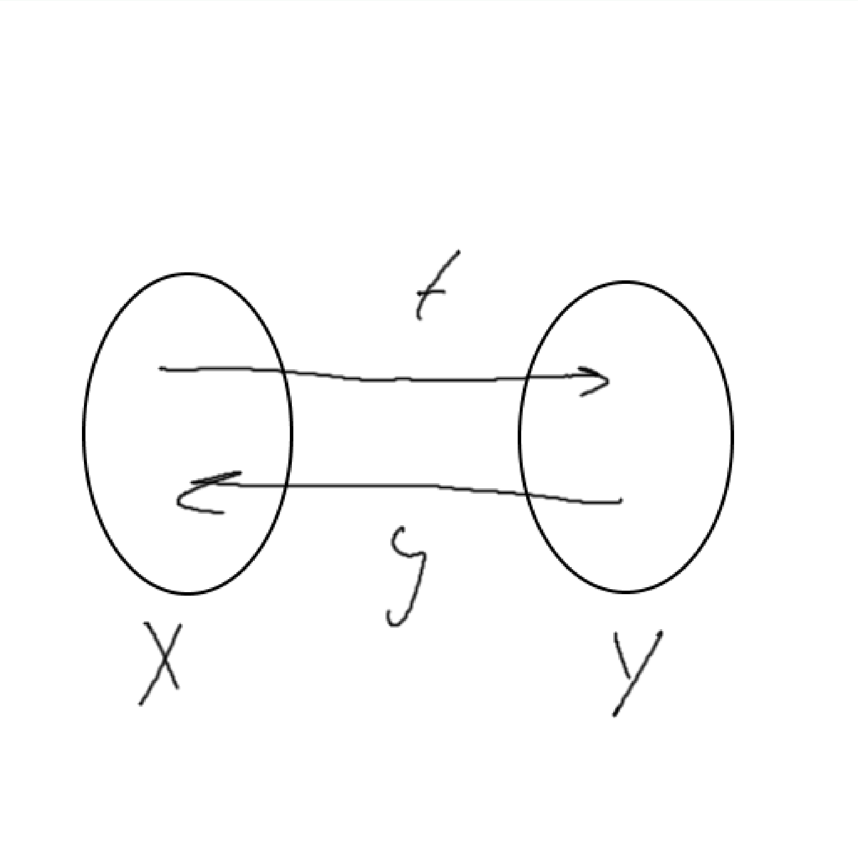
отображение композиция fog определяется как
$(fog)(x) = f(g(x))$

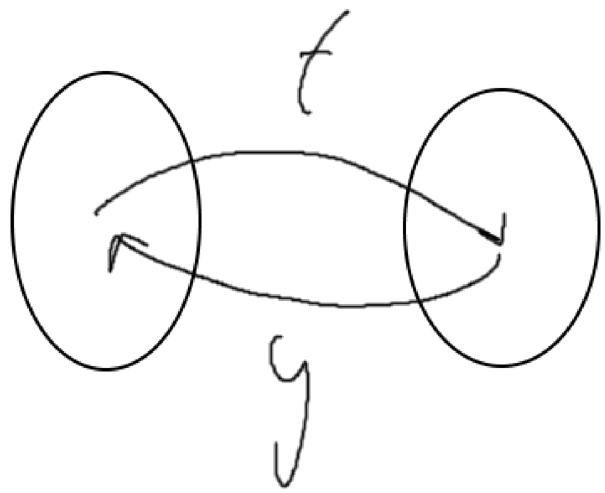
Пример. $X = Y = \mathbb{Z} = \mathbb{R}$
$f(x) = x + 1, y(x) = x$
$(fog)(x) = x^2 + 1$
$(gof)(x) = (x + 1)^2$

Замечание. $(fog)oh = fo(goh)$

Обозначение. $fogoh$

Определение 12. Пусть $f : X \to Y, y : Y \to V$
Отображение y называют образом к отображениб f, если
$fog = e$
$gof = e$





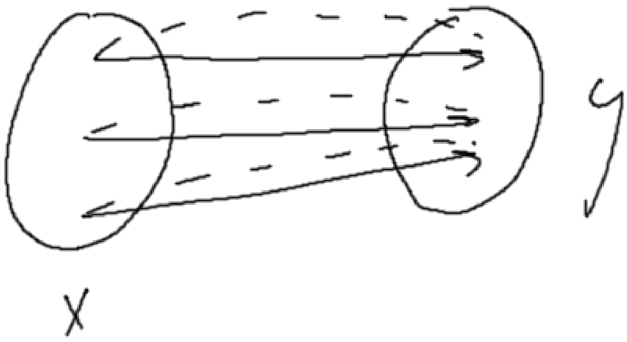
Пример. $X = Y = [0; +\infty]$
$f(x) = x^2, y(x) = \sqrt{x}$

Определение 13. Обратное отображение к f обозначается f^{-1}
(Корректность, т.е. единственность отображения обратных - ниже)

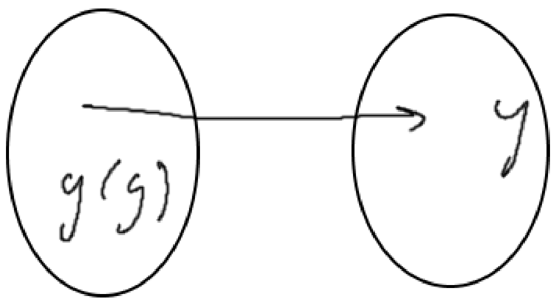
Теорема 1. (Существование обр. отображения)
Обратное отображение к f существует тогда и только тогда, когда f является биекцией.

Доказательство. 1. Доказать, что если f биекция, то существует y, обратное к f

Пусть $y \in X \exists! x$, такой, что $f(x) = y$



Положим $y(y) = x$



Теорема 2. (Единственности обратного отображения)

Пусть f - Биекция $X \to Y$. Тогда не существует различных отображений y_1, y_2 являющихся обратными к А.

Доказательство. Доказательство: Упражнение! □