1. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.
2. Теорема о нулях непрерывной функции.
3. Теорема Ферма.
4. Теорема Ролля.
5. Теоремы Коши и Лагранжа.
6. Первое правило Лопиталя.
7. Локальная формула Тейлора.
8. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

1 и 2

Теорема 2. *(первая теорема Вейерштрасса)*
Если f непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на нем, т.е. существует такое число M, что $|f(x)| \leqslant M$, при всех $x \in [a, b]$.

Доказательство. Допустим противное, что f неограничена на $[a, b]$. Тогда для $n \in N$ найдется на $[a, b]$ точка x_n такая, что

$$|f(x_n)| \geqslant n \ . \qquad (4)$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, имеющую конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0 \ ,$$

причем очевидно $a \leqslant x_0 \leqslant b$. В силу непрерывности функции f имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = f(x_0) \ ,$$

а это невозможно, так как из (4) следует, что $f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
Полученное противоречие доказывает теорему.

□

Теорема 3. *(вторая теорема Вейерштрасса)*
Если f непрерывна на $[a, b]$, то она достигает на нем своей верхней и нижней грани.

Доказательство. Пусть

$$M = \sup_{[a,b]} f \ .$$

В силу предыдущей теоремы M - конечное число. Допустим, что $f(x) < M$ при всех $x \in [a, b]$, т.е. верхняя грань не достигается. Тогда рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)} \ .$$

Так как знаменатель в ноль не обращается, то φ будет непрерывной на $[a, b]$ функцией, а значит, по предыдущей теореме она будет ограничена на $[a, b]$: $\varphi(x) \leqslant \gamma$, где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. Но отсюда находим, что

$$\frac{1}{M - \varphi(x)} \leqslant \gamma, \quad M - f(x) \geqslant \frac{1}{\gamma}, \quad f(x) \leqslant M - \frac{1}{\gamma} \text{ для всех } x \in [a, b] \ ,$$

т.е. число $M - \frac{1}{\gamma}$ оказывается верхней границей для f чего быть не может, ибо M есть наименьшая из верхних границ. Полученное противоречие доказывает, что в $[a, b]$ находится точка x_0 такая, что $f(x)_0 = M$. Аналогично доказывается утверждение о достигаемости нижней грани.

□

3. **Первая теорема Больцано — Коши.** *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения р а з н ы х з н а к о в. Тогда между a и b необходимо найдется точка c, в которой функция обращается в нуль:*

$$f(c) = 0 \qquad (a < c < b).$$

Теорема имеет очень простой геометрический смысл: если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси x на другую, то она п е р е с е к а е т эту ось (рис. 31).

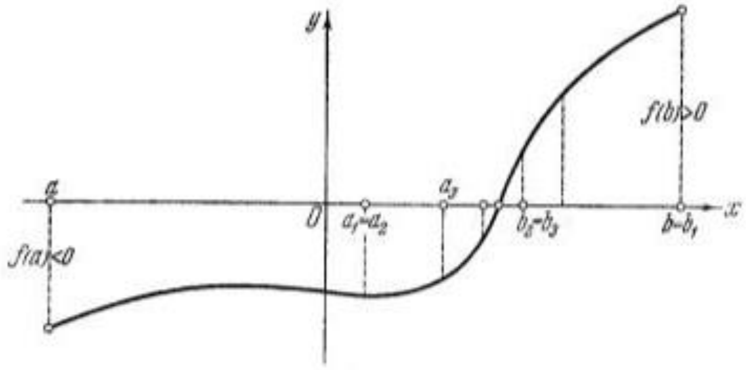

Рис. 31.

I-е д о к а з а т е л ь с т в о мы проведем по методу Б о л ь ц а н о **[41]** — последовательным делением промежутка. Для определенности положим, что $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$. Разделим промежуток $[a, b]$ пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Может случиться, что функция $f(x)$ обратится в нуль в этой точке, тогда теорема доказана: можно положить $c = \frac{a+b}{2}$. Пусть же $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$; тогда на концах одного из промежутков $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ функция будет принимать значения р а з н ы х з н а к о в (и притом отрицательное значение на левом конце и положительное — на правом). Обозначив этот промежуток через $[a_1, b_1]$, имеем

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0.$$

Разделим пополам промежуток $[a_1, b_1]$ и снова отбросим тот случай, когда $f(x)$ обращается в нуль в середине $\frac{a_1+b_1}{2}$ этого промежутка, ибо тогда теорема доказана. Обозначим через $[a_2, b_2]$ ту из половин промежутка, для которой

$$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0.$$

Продолжим этот процесс построения промежутков. При этом л и б о мы после конечного числа шагов наткнемся в качестве точки деления на точку, где функция обращается в нуль, — и доказательство теоремы завершится, — л и б о получим бесконечную последовательность вложенных один в другой промежутков. Остановимся на этом последнем случае. Тогда для n-го промежутка $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ будем иметь

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0, \tag{1}$$

причем длина его, очевидно, равна

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \tag{2}$$

Построенная последовательность промежутков удовлетворяет условиям л е м м ы о в л о ж е н н ы х п р о м е ж у т к а х **[38]**, ибо, ввиду (2), $\lim (b_n - a_n) = 0$; поэтому существует точка c из промежутка $[a, b]$, для которой

$$\lim a_n = \lim b_n = c.$$

Покажем, что именно эта точка удовлетворяет требованию теоремы.

Переходя к пределу в неравенствах (1) и используя при этом н е п р е р ы в н о с т ь функции (в частности, в точке $x = c$), получим, что одновременно

$$f(c) = \lim f(a_n) \leq 0 \quad \text{и} \quad f(c) = \lim f(b_n) \geq 0,$$

так что, действительно, $f(c) = 0$. Теорема доказана.

4.

Теорема Ферма

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке; имеет локальный экстремум во внутренней точке x_0 этого промежутка; дифференцируема в окрестности точки x_0. Если x_0 – точка локального максимума, то при переходе через эту точку производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\text{при} \quad x < x_0, \\ f'(x) < 0 \quad &\text{при} \quad x > x_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Если x_0 – точка локального минимума, то при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет свой знак с минуса на плюс:

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \quad &\text{при} \quad x < x_0, \\ f'(x) > 0 \quad &\text{при} \quad x > x_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f'(x_0) = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Предположим, что x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$. Тогда эта функция является возрастающей для значений x, расположенных на малых расстояниях слева от точки x_0 и, следовательно, $f'(x) > 0$ при $x < x_0$.

Поскольку функция $f(x)$ является убывающей для значений x, достаточно близких к точке x_0 и расположенных справа, то $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Таким образом, утверждение (10) доказано. Аналогичным образом устанавливается справедливость утверждения (11).

Теперь предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Поскольку функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то справа и слева от точки x_0 разность $f(x) - f(x_0)$ принимает значения противоположных знаков. Если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в окрестности точки x_0; если $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ убывает в окрестности точки x_0. В обоих случаях x_0 не является точкой экстремума и, таким образом, допущение $f'(x_0) \neq 0$ приводит к противоречию с условиями теоремы.

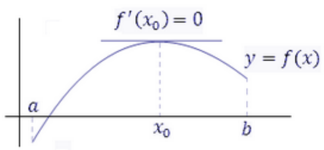

Рис. 1. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке экстремума параллельна оси $0x$.

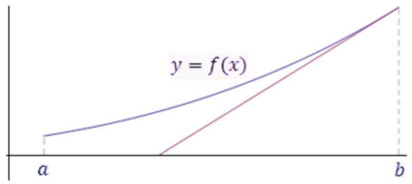

Рис. 2. Если функция принимает свое наибольшее (или наименьшее) значение не во внутренней точке промежутка, а на одном из его концов, то производная этой функции в точке экстремума не обязательно равна нулю.

5.

Теорема Ролля

Примеры

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в открытом промежутке (a, b), на концах этого промежутка сохраняет непрерывность и принимает одинаковые значения: $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю: $f'(c) = 0$.

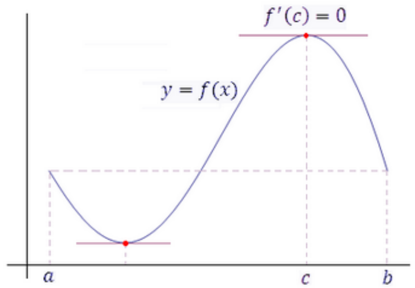

Рис. 3. Теорема Ролля устанавливает условия существования хотя бы одной точки c, в которой касательная к графику функции параллельна оси $0x$. Таких точек может быть несколько.

Доказательство. Если $f(x) = \text{const}$ в промежутке $[a, b]$, то $f'(x) = 0$ во всех точках этого промежутка. Иначе наибольшее значение M функции $f(x)$ превышает ее наименьшее значение m в промежутке $[a, b]$. Поскольку на концах этого промежутка функция $f(x)$ принимает одинаковые значения, то по крайней мере одно из значений, M или m, достигается во внутренней точке c промежутка $[a, b]$. Тогда по теореме Ферма $f'(x) = 0$.

Физическая интерпретация теоремы Ролля. Пусть функция $f(x)$ описывает смещение частицы из начального положения $f(a)$ в зависимости от времени x ее движения по прямой. Тогда производная $f'(c)$ представляет собой мгновенную скорость движения частицы в момент времени c. Возвращение частицы в исходное положение возможно только при ее остановке в некоторый момент и перемещении в обратном направлении.

Теорема Лагранжа

Примеры

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в открытом промежутке (a, b) и сохраняет непрерывность на концах этого промежутка. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция непрерывна и дифференцируема в промежутке $[a, b]$, а на его концах принимает одинаковые значения:

$$F(a) = F(b) = 0.$$

Тогда $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и, следовательно, существует точка $c \in (a, b)$, в которой производная функции $F(x)$ равна нулю:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Теорема Коши

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в замкнутом промежутке $[a,b]$; дифференцируемы в открытом промежутке (a,b); $g'(x) \neq 0$ в открытом промежутке (a,b). Тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{15}$$

Доказательство. Заметим, что $g(b)-g(a) \neq 0$. В противном случае – согласно теореме Ролля – производная $g'(x)$ обратилась бы в нуль в некоторой точке $c \in (a,b)$.
Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

которая удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и, в частности, принимает одинаковые значения на концах промежутка $[a,b]$:

$$F(a) = F(b) = 0.$$

Тогда существует точка $c \in (a,b)$, в которой

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Правило Лопиталя

Теорема 1.. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в промежутке (a,b); $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a,b)$; $f(x) \xrightarrow{x\to a} 0$ и $g(x) \xrightarrow{x\to a} 0$; существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, руководствуясь соображениями непрерывности:

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Так как $x \in (a,b)$, то по теореме Коши

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $c \in (a,x)$.

Поскольку существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, который равен

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

II Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n-го порядка включительно. Тогда для остаточного члена имеет место равенство

$R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ при $x \to x_0$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что существование производных $f^{(k)}(x_0),\ k=1,2,...,n,$ означает следующее: функция $f(x)$ имеет производные до $(n-1)$-го порядка в некоторой окрестности точки x_0, и имеет производную n-го порядка в самой точке x_0.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

В силу соотношений (2) к этому пределу можно $(n-1)$ раз применить правило Бернулли–Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=...=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

Учитывая все те же соотношения (2), последний предел можно записать как

$$\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}$$

Но этот предел есть не что иное как определение производной функции $R_n^{(n-1)}(x)$ в точке x_0, т.е. он равен $R_n^{(n)}(x_0)$. Но в силу (2) эта производная равна 0. Итак

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

Теорема доказана.

Выпишем формулу Тейлора с учётом доказанной теоремы:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right),\ \ x\to x_0. \quad (3)$$

Остаточный член в форме Лагранжа

Для контроля погрешности вычислений, основанных на использовании формулы Тейлора, полезно располагать различными формами представления остаточного члена, наиболее употребительной из которых является форма Лагранжа,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (1)$$

где c – некоторая точка, расположенная между x и x_0.

Если $f^{(n+1)}(c) \le M$, то

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \left|M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Чем меньше величина $|x-x_0|$, тем быстрее $R_n(x)$ убывает с ростом n. Это означает, что точность аппроксимации функции $f(x)$ многочленом

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

возрастает при малых значениях $|x-x_0|$ и с увеличением n.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Частным случаем этой формулы при $n = 0$ является теорема Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)\cdot(x-x_0).$$

Для доказательства формулы (1) рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k, \qquad (2)$$

где $z \in [x_0,x]$. (Если $x < x_0$, то полагаем, что $z \in [x,x_0]$).

Отметим, что

$$\varphi(x_0) = R_n(x), \quad \varphi(x) = 0.$$

Дифференцируя обе части равенства (2) по переменной z, получим

$$\varphi'(z) = -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}k(x-z)^{k-1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{(k-1)!}(x-z)^{k-1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Введем функцию $\psi(z) = (x-z)^{n+1}$, где $n+1>0$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и, следовательно, существует такая точка $c \in [x_0,x]$, что

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}.$$

Учитывая, что

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x_0) = R_n(x), \quad \varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

$$\psi(x) = 0, \quad \psi(x_0) = (x-x_0)^p, \quad \psi'(c) = -(n+1)(x-c)^n,$$

получим

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\frac{1}{(n+1)(x-c)^n}(x-x_0)^{n+1} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Нормальный сайтик: http://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/Calc1-ru/6/06.htm
Нормальный учебник: Фихтенгольц 1 том (есть в библиотеке)
Классный плейлист на ютубчике: https://www.youtube.com/watch?v=QUH7jICtlNY&list=PLFg1XD1ytVo1woruiCDxj-_YgXNP6Uw17