Типовые задачи для подготовки к экзаменационной работе по курсу “Алгебра”, 2-ой модуль 2020/2021-го учебного года.

Версия 1.

Задачи по теории систем линейных уравнений

1. Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение), найдите ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

2. Можно ли заданную матрицу A представит в виде $A = LU$, где L — нижнетреугольная (то есть над диагональю нули) матрица с единицами на главной диагонали, а U — верхнетреугольная (то есть под диагональю нули) матрица? Если такое разложение возможно, то предъявите его, если нет, то объясните почему.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Номера по задачнику “Сборник задач по линейной алгебре” под редакцией И. В. Проскурякова:

708. Пользуясь методом исключения неизвестных, исследовать совместность и найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25, \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40, \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65, \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95. \end{cases}$$

742. Определить, какие из строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 25, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 40, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 65, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 95. \end{cases}$$

Задачи по аналитической геометрии

1. В ортонормированном базисе даны векторы $a\{1,4,1\}, b\{2,1,3\}, c\{-2,0,3\}$. Найти вектор y такой, что $y \perp a, (y,c) = 2, (y,b) = 9$.

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p+3q, b = p-2q$, если $|p| = 2, |q| = 3, \widehat{(p,q)} = \frac{\pi}{3}$.

3. Даны вершины треугольника $A(-5,3), B(7,8), C(-2,-1)$. Составить уравнения следующих прямых: медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. Система координат прямоугольная декартова.

4. Даны точки $E(2,1,0), F(0,2,1), G(1,2,0), H(1,0,-2)$. Найти:
   (а) объем пирамиды $EFGH$;
   (б) длину высоты, проведенной из вершины H.

5. Проверить, что прямые $a: 2x = y+1 = z+2, b: x-1 = -1-y = z$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение той плоскости. Найти расстояние от точки $A(1,4,-2)$ до этой плоскости.

6. Найти угол между прямой
$$\begin{cases} 2x+2y+3z+5=0 \\ x-2y+z+7=0 \end{cases}$$
и плоскостью $3x+y-4z-15=0$, а также координаты точки их пересечения.

7. Найти точку M', симметричную точке $M(-1,2,0)$ относительно прямой $\frac{x+1/2}{1}=\frac{y+7/2}{-1/3}=\frac{z-2}{2}$.

8. Найти точку M', симметричную точке $M(3,3,3)$ относительно плоскости $8x+6y+8z-25=0$.

9. Даны точки $P(1,2,0), Q(1,0,2), R(2,1,0), S(0,-2,1)$. Найти:
(а) объем пирамиды $PQRS$;
(б) угол между плоскостями (PQS) и (QRS).

10. Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$ и $x=6t+9, y=-2t, z=-t+2$. Вычислить расстояние между ними.

Следующие номера по задачнику Г. Д. Ким и Л. В. Крицков “Алгебра и аналитическая геометрия, том I”:

25.62 а) Доказать тождество
$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]=\mathbf{b}\,(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}\,(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

25.65. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $[\mathbf{a},\mathbf{x}]=\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ имело решение. Найти общее решение этого уравнения.

25.67. Рассматривается система уравнений
$$[\mathbf{a_1},\mathbf{x}]=\mathbf{b_1}, [\mathbf{a_2},\mathbf{x}]=\mathbf{b_2},$$
В которой $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{b_1},\mathbf{b_2}$ – заданные векторы, причём $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ не коллинеарны.

Показать, что условия
$$(\mathbf{a_1},\mathbf{b_1})=0, (\mathbf{a_2},\mathbf{b_2})=0, (\mathbf{a_1},\mathbf{b_2})+(\mathbf{a_2},\mathbf{b_1})=0,$$
необходимы для разрешимости этой системы.

При выполнении указанных условий и условия $(\mathbf{a_1},\mathbf{b_2})\neq 0$ найти общее решение системы.

27.33. Две плоскости заданы своими параметрическими уравнениями:
$$\begin{cases} x=x_1+a_1u+a_2v \\ y=y_1+b_1u+b_2v, \\ z=z_1+c_1u+c_2v; \end{cases} \quad \begin{cases} x=x_2+a_3u+a_4v \\ y=y_2+b_3u+b_4v, \\ z=z_2+c_3u+c_4v; \end{cases}$$
С помощью рангов матриц
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \text{и } B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x_2-x_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & y_2-y_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & z_2-z_1 \end{pmatrix}$$
выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

27.42. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+2y+3z-4=0,\ 3x+z-5=0$ и отсекающей на осях Oy и Oz ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

29.97. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x+y-4z+5=0$ и отстоящей от точки $(1,2,0)$ на расстоянии, равном $\sqrt{21}$.

31.8. Написать уравнение прямой, лежащей в плоскости Oyz, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Oz отрезок, равный 3.

33.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\mathbf{r_1})$ и перпендикулярной к прямой $\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\mathbf{a}t$.

33.8. Найти точку пересечения прямой $\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\mathbf{a}t$ с плоскостью $\mathbf{r}=\mathbf{r_1}+\mathbf{b}u+\mathbf{c}v$.

33.15. Найти точку, симметричную точке $M_0(\mathbf{r_0})$ относительно прямой $\mathbf{r}=\mathbf{r_1}+\mathbf{a}t$.

Задачи по подстановкам, комплексным числам и общей алгебре

1. Разложить подстановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ в произведение циклов, выяснить ее четность. Определить порядок этой подстановки, вычислить σ^{744}.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} (-2+4i)x + 3yi = -10 + 21i \\ (1+5i)x + (1-2i)y = 14 + 19i \end{cases}$.

3. Решить уравнение $z^2 - (7+i)z + (18+i) = 0$.

4. Пусть $z = -\sqrt{3} - i$. Вычислить значение $\sqrt[7]{z^3}$, для которого число $\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i}$ имеет аргумент $\frac{9\pi}{28}$. Найди модуль этого числа.

5. Является ли отображение $\phi : X \to Y$, где $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, Y = \mathbb{Z}, \phi\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = a + b + c$, инъективным, сюръективным, биективным?

6. Является ли (a) группоидом, (b) полугруппой, (c) моноидом, (d) группой множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции $a \circ b = a + b - 5$? Ответ обосновать.

7. Является ли отображение $\phi(7^a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ гомоморфизмом групп, если первая группа — это множество $G = \{7^a, a \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения, а вторая группа — множество $H = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \right\}$ с операцией сложения? Является ли это отображение изоморфизмом?

Номера по задачнику “Сборник задач по алгебре” под редакцией А. И. Кострикина, издание 2009-го года:

20.4 г) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1 - 2i; \end{cases}$.

22.7 к, л, м) Вычислить:

$$\sqrt[8]{16}$$

$$\sqrt[6]{-27}$$

$$\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$$

54.1 а, б) Ассоциативна ли операция $*$ на множестве M, если

$$M = \mathbb{N},\ x * y = x^y;$$

$$M = \mathbb{N},\ x * y = \text{НОД}(x, y);$$

55.17 а, б) Какие из отображений групп $f : \mathbb{C}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ являются гомоморфизмами:

$$f(z) = |z|;$$

$$f(z) = 2|z|.$$

55.30. Пусть G – множество всех вещественных чисел, отличных от -1. Доказать, что G является группой относительно операции

$$x \cdot y = x + y + xy.$$

56.3 а, в) Найти порядок элемента группы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_5;$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*.$$