Задачи для подготовки к контрольной работе по алгебре

Подготовила Анна Першина, БПИ172
aapershina_1@edu.hse.ru, vk.com/Nechka266

Аналитическую геометрию подготовили:
Редникина Дарья и Михалева Анна

2 модуль, 2018 год

Задачи по теории систем линейных уравнений

1. см. решение задачи 10 из нулевика 1 модуля

2. Пусть $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, эти матрицы действительно удовлетворяют условию задачи.

Найдем их произведение и выясним, может ли оно быть равно матрице A.

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ax & bx+c \end{pmatrix} = A \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ ax = 4, \\ b = 1, \\ bx + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \\ c = -1, \\ x = 2 \end{cases}$$

То есть у получившейся системы есть решение, а значит, матрицу A можно разложить в произведение верхнетреугольной матрицы $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ответ: да.

Задачи по аналитической геометрии

1. Пусть $y = (x_1, x_2, x_3)$. В ортонормированном базисе произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат, поэтому условие задачи эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} (y, a) = 0 = x_1 + 4x_2 + x_3, \\ (y, b) = 9 = 2x_1 + x_2 + 3x_3, \\ (y, c) = 2 = -2x_1 = 3x_3 \end{cases}.$$

Решим ее методом Гаусса: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{43}{7} & \frac{86}{7} \end{array}\right)$

Ответ: (2, -1, 2)

2. Задание:

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p + 3q,\ b = p - 2q$, если $|p| = 2,\ |q| = 3,\ \angle(p, q) = \dfrac{\pi}{3}$

Решение:

Искомая площадь параллелограмма – векторное произведение по модулю:

$$S = |[p + 3q,\ p - 2q]| = |[p, p] - 2[p, q] + 3[q, p] - 6[q, q]| = | - 2[p, q] - 3[p, q]| = | - 5[p, q]|$$

Т.к $[p, q] = |p| \cdot |q| \cdot \sin\angle(p, q) = 3\sqrt{3}$, то $| - 5[p, q]| = 15\sqrt{3}$

Ответ:

$15\sqrt{3}$

3. Задание:

Дан треугольник: $A(-5, 3), B(7, 8), C(-2, -1)$

Составить уравнение следующих прямых: медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A.

1. Составим уравнения всех сторон треугольника, используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

AB: $5x - 12y + 61 = 0$
BC: $x - y + 1 = 0$
AC: $4x + 3y + 11 = 0$

Найдем координаты точки E как середины отрезка BC.
$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = 2,5$
$y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = 3,5$

Тогда уравнение AE:

$\frac{3x}{2} + \frac{15y}{2} - 15 = 0$

2. Уравнения биссектрис углов между прямыми $Ax + By + C = 0A1x + B_1y + C_1 = 0$:
Уравнение биссектрис внутреннего и внешнего угла имеет вид:

$|\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}| = |\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}|$
$\frac{3x}{2} + \frac{11y}{2} - 9 = 0$

3. Составим уравнение высоты AD.
Она проходит через точку A(-5,3) и перпендикулярна прямой BC. Из условия перпендикулярности:

$k_AD = -\frac{1}{k_BC} = -1$
$y - y_1 = k(x - x_1)$
$AD : y + 5 = -(x - 3)$
$y + x + 2 = 0$

Ответ: медиана: $\frac{3x}{2} + \frac{15y}{2} - 15 = 0$; биссектриса: $\frac{3x}{2} + \frac{11y}{2} - 9 = 0$; высота: $y + x + 2 = 0$.

4. Задание:

Даны точки: $E(2, 1, 0), F(0, 2, 1), G(1, 2, 0), H(1, 0, -2)$.
Найти объем пирамиды EFGH
Длину высоты, проведенной из вершины H.

Объем пирамиды

Найдем координаты векторов (неколлинеарных) по формуле $A_1A_2 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$:

EF: $(-2, 1, 1)$
EG: $(-1, 1, 0)$
EH: $(-1, -1, -2)$

Тогда объем пирамиды, построенной на этих векторах, равен:
$V = \frac{1}{6} \cdot |det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} | = \frac{|4|}{6} = \frac{2}{3}$

Высота пирамиды из вершины H

Найдем площадь основания EFG:

$EF(-2, 1, 1)$
$FG(1, 0, -1)$

Найдем векторное произведение векторов.

$$EF \times FG = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -j - i - k$$

Найдем модуль полученного вектора:

$|-j - i - k| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

Площадь треугольника-основания:

$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

Так как $V = \frac{S \cdot h}{3}$, то высота
$h = \frac{3 \cdot V}{S} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}$

Ответ: Объем пирамиды равен $\frac{2}{3}$. Высота из точки H равна $\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}$.

5. Задание:

Проверить, что прямые $a : 2x = y + 1 = z + 2,\ b : x - 1 = -y - 1 = z$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение той плоскости. Найти расстояние от точки $A(1, 4, -2)$ до этой плоскости.

Решение:

Критерий принадлежности двух прямых одной плоскости:

Прямые L_1, L_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $< \overline{M_1M_2},\ \overline{s_1},\ \overline{s_2} >= 0$ ($\overline{s_1},\ \overline{s_2}$ — направляющие векторы двух прямых, $\overline{M_1M_2}$ — вектор прямой, соединяющей две произвольные точки прямых).

$a : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$
$b : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$

Используем приведенный выше критерий для проверки принадлежности прямых a и b одной плоскости.

$$\vec{s_1}\{1,2,2\},\ \vec{s_2}\{-1,1,-1\}$$
$$M_1(0,-1,-2) \in a,\ M_2(1,-1,0) \in b$$
$$\overline{M_1M_2}\{1,0,2\}$$

Проведем вычисления:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

Уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D = 0$, где (A, B, C) – координаты вектора - нормали к плоскости.
Для нахождения уравнения плоскости можно взять три точки M1, M2 и M3, которые не лежат на одной прямой и подставить их координаты в матрицу:

$$\begin{vmatrix} x - x1 & y - y1 & z - z1 \\ x2 - x1 & y2 - y1 & z2 - z1 \\ x3 - x1 & y3 - y1 & z3 - z1 \end{vmatrix} = 0$$

Ответ:

Здесь должен быть 0, по видимому в нулевике опечатка. Алгоритм решения приведен выше.

6. Задание:

Найти угол между прямой и плоскостью, а также координаты точки их перечения.

Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, - это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Определение угла между прямой и плоскостью позволяет заключить, что угол между прямой и плоскостью представляет собой угол между двумя пересекающимися прямыми: самой прямой и ее проекцией на плоскость. Следовательно, угол между прямой и плоскостью есть острый угол.

$\alpha = arcsin\frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}$

Уравнение прямой находится приравниваяя уравнения плоскостей и нахождения точки, через которую проходит прямая.

$2x + 2y + 3z + 5 = x - 2y + z + 7$
$x + 4y + 2z - 2 = 0$

Получим точку M(0, 0, 1)
Направляющий вектор прямой ортогонален нормальным векторам плоскостей.
Поэтому найдем вектор $\vec{p}$, который находится как векторное произведение нормалей.

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8i + j - 6k$$

Тогда уравнение выглядит следующим образом:

$\frac{x}{8} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-6}$

$sin\alpha = \frac{|a_x \cdot n_x + a_y \cdot n_y + a_z \cdot n_z|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}} = \frac{49}{\sqrt{2626}}$

Ответ: угол между прямой и влоскостью равен $arcsin\frac{49}{\sqrt{2626}}$.

7. Задание:

Найти точку M', симметричную точке $M(-1, 2, 0)$ относительно прямой $\frac{x+1/2}{1} = \frac{y+7/2}{-1/3} = \frac{z-2}{2}$

Решение:

В условии дано уравнение канонического вида прямой, обозначим ее l. Сразу видно, что направляющий вектор прямой (обычно обозначается как p) $\vec{p}\{1, \frac{-1}{3}, 2\}$, а точка (обозначим ее M_0), $M_0 \in l$, имеет координаты $M_0(\frac{-1}{2}, \frac{-7}{2}, 2)$.

Точка M' (искомая), должна лежать на перпендикулярной прямой к l, проведенной через точку M на таком же расстоянии от l, что и точка M.

Составим уравнение плоскости, перпендикулярной к l, проходящей через M. Т.е нам надо найти $\alpha : \ l \perp \alpha, \ M \in \alpha$. Что нам для этого надо? Направляющий вектор и точка $\in \alpha$. Точка есть ($M(-1, 2, 0)$, смотри условие), вектор нормали и есть направляющий вектор $\vec{p}$ прямой l.

Теорема: Если в пространстве задана точка $M(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору нормали $\vec{n}\{A, B, C\}$ имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Воспользуемся написанным выше и получим

$$1(x + \frac{1}{2}) + \frac{-1}{3}(y + \frac{7}{2}) + 2(z - 2) = 0$$
$$x - \frac{1}{3} \cdot y + 2z - \frac{14}{3} = 0$$

Найдем точку пересечения прямой и плоскости $\alpha \cap l = M_1(x_1, y_1, z_1)$. Для этого запишем уравнение прямой l в параметрическом виде:

$$l = \begin{cases} x = 1 \cdot t - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \cdot t - \frac{7}{2} \\ z = 2 \cdot t + 2 \end{cases} \tag{1}$$

Подставим значения x, y, z в уравнение плоскости и найдем t:

$$t - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3} \cdot t - \frac{7}{2}) + 2(2 \cdot t + 2) - \frac{14}{3} = 0$$
$$t = 0$$

Таким образом подставим значение $t = 0$ в (1) и найдем координаты точки пересечения плоскости α и прямой l: $M_1(-1/2, -7/2, 2)$. Пусть координаты неизвестной точки $M'(x', y', z')$. Тогда

$$x_1 = \frac{x' + x}{2},\ x' = 2 \cdot x_1 - x = -1 + 1 = 0$$
$$y_1 = \frac{y' + y}{2},\ y' = 2 \cdot y_1 - y = -7 - 2 = -9$$
$$z_1 = \frac{z' + z}{2},\ z' = 2 \cdot z_1 - z = 4 - 0 = 4$$

где $M(x, y, z) = M(-1, 2, 0)$

Ответ: $M'(0, -9, 4)$

8. Задание:

Найти точку M', симметричную точке $M(3, 3, 3)$ относительно плоскости
$\alpha : 8x + 6y + 8z - 25 = 0$

Решение:

Запишем уравнение прямой $a \perp \alpha, M \in a$ в параметрическом виде. Из условия $\vec{n}\{8, 6, 8\}$ – это нормаль вектор плоскости и направляющий вектор прямой a

$$a = \begin{cases} x = 8 \cdot t + 3 \\ y = 6 \cdot t + 3 \\ z = 8 \cdot t + 3 \end{cases}$$

$a \cap \alpha = M_1(x_1, y_1, z_1)$. Найдем точку пересечения (смотри теорему из 7 задачи).

$$8(8t + 3) + 6(6t + 3) + 8(8t + 3) - 25 = 0$$
$$t = \frac{-1}{4}$$
$$M_1(1, 3/2, 1)$$

Найдем искомую симметричную точку M'.Пусть координаты неизвестной точки $M'(x', y', z')$. Тогда

$$x_1 = \frac{x' + x}{2},\ x' = 2 \cdot x_1 - x = 2 - 3 = -1$$
$$y_1 = \frac{y' + y}{2},\ y' = 2 \cdot y_1 - y = 3 - 3 = 0$$
$$z_1 = \frac{z' + z}{2},\ z' = 2 \cdot z_1 - z = 2 - 3 = -1$$

Ответ: $M'(-1, 0, -1)$

9. Задание:

Даны точки $P(1, 2, 0),\ Q(1, 0, 2),\ R(2, 1, 0),\ S(0, -2, 1)$. Найти:

1. Объем пирамиды $PQRS$
2. Угол между плоскостями (PQS) и (QRS)

Решение:

1. Найдем объем пирамиды. Для этого нам надо знать координаты неколлинеарных векторов
$$\overline{PQ}\{0, -2, 2\}$$
$$\overline{PR}\{1, -1, 0\}$$
$$\overline{PS}\{-1, -4, 1\}$$
Воспользуемся формулой (определитель берем по модулю)
$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{|-8|}{6} = \frac{4}{3}$$

2. Найдем угол между плоскостями. Найдем кординаты нормаль-векторов:
$$n_{PQS} = PQ \times PS = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$n_{QRS} = QR \times QS = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$
По формуле узнаем угол:
$$\cos\alpha = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2} \cdot \sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}} = \frac{17}{\sqrt{385}}$$

Ответ:

1. $\frac{4}{3}$
2. $\alpha = arccos\frac{17}{\sqrt{385}}$

10. Задание:

Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ и $x = 6t + 9,\ y = -2t,\ z = -t + 2$. Вычислить расстояние между ними

Решение:

По двум данным уравнениям прямых:

1. $a: \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$: направляющий вектор $\vec{a_1}\{3, 2, 2\}$ и $A \in a : A(-5, -5, 1)$

2. $b: \ x = 6t + 9, \ y = -2t, \ z = -t + 2$: направляющий вектор $\vec{b_1}\{6, -2, -1\}$ и $B \in b$: $B(9, 0, 2)$

По этим данным найдем вектор $\overline{AB}\{14, 5, 1\}$(из координат конца вычитаем координату начала).

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ и $\overline{AB}$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 85$$

Делаем вывод что прямые a и b лежат не в одной плоскости.

Теперь вычислим расстояние между скрещивающимися прямыми. Вычислим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2i + 15j - 18k$$

Тогда уравнение плоскости χ, проходящей через прямую b параллельно a, через точку B

$$2(x - 9) + 15y - 18(z - 2) = 2x + 15y - 18z + 18 = 0$$

Используем формулу для вычисления расстояния от точки A до плоскости χ:

$$\rho = \frac{|2 \cdot -5 + 15 \cdot -5 + -18 \cdot 1 + 18|}{\sqrt{4 + 225 + 324}} = \frac{85}{\sqrt{553}}$$

Ответ:

$\frac{85}{\sqrt{553}}$

Задачи по подстановкам, комплексным числам и общей алгебре

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3\,5\,7\,8\,9)(2)(4\,6)$. Эта подстановка является четной как произведение двух нечетных и четного циклов. Ее порядок равен НОК(6, 2, 1) = 6. Тогда $\sigma^{744} = \sigma^{124 \cdot 6} = e$.

2. Пусть $x = a + bi$, $y = c + di$. Тогда данная система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} (a + bi)(-2 + 4i) + 3i \cdot (c + di) = -10 + 21i, \\ (1 + 5i)(a + bi) + (1 - 2i)(c + di) = 14 + 19i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 4b - 3d = -10, \\ -2bi + 4ai + 3ci = 21i, \\ a - 5b + c + d = 14, \\ bi + 5ai + di - 2ci = 19i \end{cases}$$

— приравняли действительные и мнимые части.
Решим систему относительно четырех действительных неизвестных a, b, c, d методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 0 & -3 & -10 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 21 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 14 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & -10 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{10} & \frac{37}{10} & \frac{83}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{186}{11} & -\frac{466}{11} \end{array}\right) \Rightarrow a = \tfrac{243}{62}, b = -\tfrac{83}{62}, c = \tfrac{82}{93}, d = \tfrac{233}{93}$$

Ответ: $x = \dfrac{243}{62} - i \cdot \dfrac{83}{62},\ y = \dfrac{82}{93} + i \cdot \dfrac{233}{93}$

3. $z^2 - (7+i)z + (18+i) = 0$
$D = b^2 - 4ac = (7+i)^2 - 4(18+i) = -24 + 10i = (5i+1)^2 \Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{(7+i) \pm (5i+1)}{2}$
Ответ: $\{4+3i, 3-2i\}$

5. Данное отображение не является инъективным, так как у любой точки из Y более одного прообраза (а именно, в каждое целое число при отображении ϕ бесконечно много различных матриц из X, так как любое целое число представимо в виде суммы трех целых чисел бесконечным количеством способов), а значит, биективным оно тоже не может быть. Но сюръективным ϕ является, так как у любого числа есть матрицы, которые в него отобразятся.

6. Данное множество с бинарной операцией является группоидом по определению. Теперь проверим последовательно выполнение следующих свойств:
1) $a \circ (b \circ c) = a + (b + c - 5) = a + b + c - 5 = (a + b - 5) + c = (a \circ b) \circ c$ — ассоциативность выполнена, множество является полугруппой;
2) $\exists e \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z}, e \circ a = a = a \circ e$ — существование нейтрального элемента. Таким элементом является число 5 $\Rightarrow$ данное множество является моноидом.
3) $\forall a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{Z} : a \circ b = e = 5$ — существование обратного элемента. Это свойство тоже выполнено, так как для произвольного $a \in \mathbb{Z}$ таким b будет число $(10 - a)$: действительно, $a \circ b = a + (10 - a) - 5 = 5$. Значит, группой такое множество тоже является.

Ответ: да, для всех пунктов.

7. Проверим необходимое условие того, что отображение является гомоморфизмом, а именно, что ϕ уважает операцию:

$\phi(7^a \cdot 7^b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \phi(7^{a+b}) = \phi(7^a) \cdot \phi(7^b) \Rightarrow$ Для того, чтобы ϕ было еще и изоморфизмом, необходима биективность, но она не выполнена: ϕ инъективно, так как у любой матрицы не более одного прообраза, но не сюръективно, так как ни в какую матрицу вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a \neq 0$, ничего не переходит.