Разбор типовых задач к экзамену второго модуля по алгебре

2019-2020 учебный год

Задачи по теории систем линейных уравнений

№ 1

<u>Задание:</u> Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение), найдите ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

<u>Решение:</u> Заданная система эквивалентна уравнению $Ax = b$,
где $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

Методом Гаусса приведем матрицу $(A|b)$ к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\cdot\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathrm{II} \end{array} \to\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

По теореме Кронекера-Капелли система совместна тогда и только тогда, когда $Rg(A) = Rg(A|b)$.
В этой системе $Rg(A) = 2 = Rg(A|b) \Rightarrow$ она совместна.
Найдем решения системы:

$x_2 + x_4 - 6x_5 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 - x_4 + 6x_5$
$x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \Rightarrow x_1 = 5 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 5 - 4 - 4x_4 + 24x_5 - 2x_3 - 3x_5 = 1 - 2x_3 - 4x_4 + 21x_5$

$$x = \begin{pmatrix} 1 - 2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ -1 - x_4 + 6x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

ФСР соответствующей однородной СЛАУ, как можно заметить, уже посчитан, поэтому просто выпишем строки, входящие в ФСР:

-2	0	1	0	0
-4	-1	0	1	0
21	6	0	0	1

Ответ: Общее решение: $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix}-4\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix}21\\6\\0\\0\\1\end{pmatrix} x_5$; ФСР:

-2	0	1	0	0
-4	-1	0	1	0
21	6	0	0	1

№ 2

Задание: Можно ли заданную матрицу A представит в виде $A = LU$, где L — нижнетреугольная (то есть над диагональю нули) матрица с единицами на главной диагонали, а U — верхнетреугольная (то есть под диагональю нули) матрица? Если такое разложение возможно, то предъявите его, если нет, то объясните почему.

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 1\end{pmatrix}$$

Решение: Рассмотрим матрицы $L = \begin{pmatrix}1 & 0\\a & 1\end{pmatrix}$ и $U = \begin{pmatrix}b & c\\0 & d\end{pmatrix}$. Согласно условию это нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы соответственно. Тогда перемножим эти матрицы:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\a & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b & c\\0 & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b & c\\ab & ac+d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 1\end{pmatrix}$$

Отсюда:
$b = 2$
$c = 1$
$ab = 4 \Rightarrow a \cdot 2 = 4 \Rightarrow a = 2$
$ac + d = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 + d = 1 \Rightarrow d = -1$

Следовательно, такое разложение существует, и матрицы равны $L = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$ и $U = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$

Ответ: Разложение возможно, $L = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$ и $U = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$

Задачи по аналитической геометрии

№ 1

Задание: В ортонормированном базисе даны векторы $a\{1,4,1\}, b\{2,1,3\}, c\{-2,0,3\}$. Найти вектор y такой, что $y \perp a, (y,c) = 2, (y,b) = 9$.
Решение: Так как вектор y перпендикулярен вектору a, то их скалярное произведение равно 0. То есть получается система из трех уравнений:

$$\begin{cases}(y,a) = 0\\(y,b) = 9\\(y,c) = 2\end{cases}$$

Так как по условию векторы находятся в ОНБ, то скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат. Тогда система принимает следующий вид (примем здесь, что координаты вектора y равны (y_1, y_2, y_3)):

$$\begin{cases}y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot 4 + y_3 \cdot 1 = 0\\y_1 \cdot 2 + y_2 \cdot 1 + y_3 \cdot 3 = 9\\y_1 \cdot (-2) + y_2 \cdot 0 + y_3 \cdot 3 = 2\end{cases}$$

Полученную систему запишем в матричном виде и решим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 9\\ -2 & 0 & 3 & 2\end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -2\cdot\mathrm{I}\\ +2\cdot\mathrm{I}\end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -7 & 1 & 9\\ 0 & 8 & 5 & 2\end{array}\right)\begin{array}{c} \\ +\mathrm{III}\\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 6 & 11\\ 0 & 8 & 5 & 2\end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ -8\cdot\mathrm{II}\end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 6 & 11\\ 0 & 0 & -43 & -86\end{array}\right)$$

$-43y_3 = -86 \Rightarrow y_3 = 2$
$y_2 + 6y_3 = 11 \Rightarrow y_2 + 6 \cdot 2 = 11 \Rightarrow y_2 = -1$
$y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_1 + 4 \cdot (-1) + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 2$

Таким образом, искомый вектор равен $y\{2, -1, 2\}$

Ответ: $(2, -1, 2)$

№ 2

Задание: Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p + 3q, b = p - 2q$, если $|p| = 2, |q| = 3, \angle(p, q) = \frac{\pi}{3}$.
Решение: Как известно из свойств векторного произведения, модуль векторного произведения равен как раз площади параллелограмма, построенного на заданных векторах. Тогда просто посчитаем:
$|[a, b]| = |[p + 3q, p - 2q]| = |[p, p] + [3q, p] + [p, -2q] + [3q, -2q]| = |[p, p] + 3[q, p] - 2[p, q] - 6[q, q]| =$

$$= | - 3[p, q] - 2[p, q]| = | - 5[p, q]| = | - 5|p||q| \sin(\angle(p, q))| = | - 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}| = | - 15\sqrt{3}| = 15\sqrt{3}$$

Ответ: $15\sqrt{3}$

№ 3

Задание: Даны вершины треугольника $A(-5, 3), B(7, 8), C(-2, -1)$. Составить уравнения следующих прямых: медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. Система координат прямоугольная декартова.
Решение: Для того, чтобы составить все необходимые уравнения, составим вначале уравнения прямых, содержащих стороны треугольника. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки можно составить по формуле $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Составим уравнения:
$AB : \dfrac{x + 5}{7 + 5} = \dfrac{y - 3}{8 - 3} \Leftrightarrow \dfrac{x + 5}{12} = \dfrac{y - 3}{5} \Leftrightarrow 5x - 12y + 61 = 0$
$BC : \dfrac{x - 7}{-2 - 7} = \dfrac{y - 8}{-1 - 8} \Leftrightarrow \dfrac{x - 7}{-9} = \dfrac{y - 8}{-9} \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$
$AC : \dfrac{x + 5}{-2 + 5} = \dfrac{y - 3}{-1 - 3} \Leftrightarrow \dfrac{x + 5}{3} = \dfrac{y - 3}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y + 11 = 0$

Найдем координаты точки, являющейся серединой отрезка BC :
$x = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{5}{2}$
$y = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{7}{2}$
Медиана, проведенная из вершины A, проходит через саму точку A и через середину отрезка BC. Тогда можно составить уравнение медианы:
$\dfrac{x + 5}{2{,}5 + 5} = \dfrac{y - 3}{3{,}5 - 3} \Leftrightarrow \dfrac{x + 5}{7{,}5} = \dfrac{y - 3}{0{,}5} \Leftrightarrow x - 15y + 50 = 0$

Общее уравнение биссектрисы, проходящей между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, равно $\dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \dfrac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

Тогда уравнение биссектрисы между AB и AC равно:

$$\frac{5x - 12y + 61}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{4x + 3y + 11}{\sqrt{16 + 9}} \Leftrightarrow \frac{5x - 12y + 61}{13} = \frac{4x + 3y + 11}{5} \Leftrightarrow 3x + 11y - 18 = 0$$

Составим уравнение высоты, выходящей из вершины A. Назовем ее AD. Она проходит через точку A и является перпендикулярной прямой BC. По условию перпендикулярности

$k_{AD} = -\dfrac{1}{k_{BC}} = -1 \quad$ (k – коэффициент перед x)

$(y - y_1) = k_{AD}(x - x_1)$

$y - 3 = -x + 5$

$y + x - 8 = 0$

<u>Ответ:</u> уравнение медианы: $x - 15y + 50 = 0$, уравнение биссектрисы: $3x + 11y - 18 = 0$, уравнениие высоты: $y + x - 8 = 0$

№ 4

<u>Задание:</u> Даны точки $E(2, 1, 0), F(0, 2, 1), G(1, 2, 0), H(1, 0, -2)$. Найти:

(а) объем пирамиды $EFGH$;

(б) длину высоты, проведенной из вершины H.

<u>Решение:</u> (а) Объем тетраэдра, построенного на трех веторах, равен модулю смешанного произведения этих векторов, умноженного на $\frac{1}{6}$. Посчитаем координаты векторов

$EF : (-2, 1, 1)$

$EG : (-1, 1, 0)$

$EH : (-1, -1, -2)$

Посчитаем объем:

$$\frac{1}{6}|\langle EF, EG, EH\rangle| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(б) Так как уже посчитан объем, можно вычислить высоту из общей формулы объема пирамиды: $V = \dfrac{S \cdot h}{3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow h = \dfrac{2}{S}$

Посчитаем площадь грани, противоположной к H. Это площадь параллелограмма, построенного на двух векторах грани, поделенная на 2.

$EF(-2, 1, 1), EG(-1, 1, 0)$

$2S = |EF \times EG|$

$$EF \times EG = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i - j - k$$

$2S = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

$S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$h = \dfrac{2}{S} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

<u>Ответ:</u> $V = \dfrac{2}{3};\ h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

№ 5

Задание: Проверить, что прямые $a : 2x = y + 1 = z + 2, b : x - 1 = -1 - y = z$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение той плоскости. Найти расстояние от точки $A(1, 4, -2)$ до этой плоскости.

Решение: Перепишем уравнения в каноническом виде:

$a : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{2}$

$b : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$

Прямые лежат в одной плоскости, если компланарны их направляющие векторы и вектор, построенный на одной точке одной прямой и одной точке другой прямой. То есть их смешанное произведение равно нулю.

Направляющие векторы прямых a и b равны соответственно $(1, 2, 2)$ и $(-1, 1, -1)$. Рассмотрим точку $(0, -1, -2)$ прямой и точку $(1, -1, 0)$ второй прямой. Вектор, построенный на этих точках, равен $(1, 0, 2)$. Посчитаем смешанное произведение полученных трех векторов:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

Неожиданно получаем не 0, а 2, расстраиваемся, не находим ошибку, понимаем, что ошибка в условии, идем отдыхать, потому что остальные пункты задания решать не надо.

Все необходимые формулы для решения остального можно найти в презентации по аналитической геометрии, их всегда можно посмотреть там

Ответ: прямые не лежат в одной плоскости

№ 6

Задание: Найти угол между прямой

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 7 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью $3x + y - 4z - 15 = 0$, а также координаты точки их пересечения.

Решение: Посчитаем направляющий вектор прямой. Направляющий вектор прямой ортогонален направляющим векторам плоскости, поэтому его можно найти, как векторное произведение этих векторов:

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8i + j - 6k$, то есть вектор $s = (8, 1, -6)$

Теперь можно посчитать угол между прямой и плоскостью. Синус этого угла равен:

$\sin\varphi = \left|\dfrac{(n, s)}{|n||s|}\right|$, где n – нормальный вектор плоскости

$\sin\varphi = \left|\dfrac{3 \cdot 8 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot (-6)}{\sqrt{9+1+16}\sqrt{64+1+36}}\right| = \dfrac{49}{\sqrt{2626}}$

Точку пересечения прямой и плоскости можно найти из системы уравнений, составленной из двух уравнений прямой и уравнения плоскости:

$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x + y - 4z - 15 = 0 \end{cases}$

Решив эту систему, получим точку $(8/49;\ 99/49;\ -153/49)$

Ответ: $\arcsin\dfrac{49}{\sqrt{2626}}$; $(8/49;\ 99/49;\ -153/49)$

№ 7

Задание: Найти точку M', симметричную точке $M(-1,2,0)$ относительно прямой $\frac{x+1/2}{1} = \frac{y+7/2}{-1/3} = \frac{z-2}{2}$.
Решение: Найдем уравнение плоскости, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через точку M. Так как искомая плоскость перпендикулярна прямой, то можно взять в качестве ее вектора нормали направляющий вектор прямой: $n = (1, -1/3, 2)$. Тогда уравнение искомой плоскости равно:
$1(x+1) - 1/3(y-2) + 2(z-0) = 0$
$x + 1 - y/3 + 2/3 + 2z = 0$
$x - y/3 + 2z + 5/3 = 0$
Найдем точку M_0 пересечения прямой и плоскости. Для этого запишем параметрические уравнения прямой и подставим их в уравнение плоскости:
$$\begin{cases} x = -1/2 + t \\ y = -7/2 - t/3 \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$
$-1/2 + t - (-7/2 - t/3)/3 + 2(2+2t) + 5/3 = 0$
$t = -\dfrac{46}{57}$
Подставим и получим координаты точки M_0 :
$$\begin{cases} x = -1/2 + t = -149/114 \\ y = -7/2 - t/3 = -1105/342 \\ z = 2 + 2t = 22/57 \end{cases}$$
Так как M_0 является серединой отрезка MM', то:
$x_{M_0} = \dfrac{x_M + x_{M'}}{2} \Rightarrow x_{M'} = 2x_{M_0} - x_M = -92/57$
$y_{M_0} = \dfrac{y_M + y_{M'}}{2} \Rightarrow y_{M'} = 2y_{M_0} - y_M = -1447/171$
$z_{M_0} = \dfrac{z_M + z_{M'}}{2} \Rightarrow z_{M'} = 2z_{M_0} - z_M = 22/57$
Меня не оставляет подозрение, что где-то тут лажа с подсчетами... Но в целом алгоритм решения таких задач выглядит именно так.
Ответ: $(-92/57, -1447/171, 22/57)$

№ 8

Задание: Даны точки $P(1,2,0), Q(1,0,2), R(2,1,0), S(0,-2,1)$. Найти:
(а) объем пирамиды $PQRS$;
(б) угол между плоскостями (PQS) и (QRS).
Решение: (а) Объем тетраэдра, построенного на трех веторах, равен модулю смешанного произведения этих векторов, умноженного на $\frac{1}{6}$. Посчитаем координаты векторов
$PQ : (0, -2, 2)$
$PR : (1, -1, 0)$
$PS : (-1, -4, 1)$
Посчитаем объем:

$\frac{1}{6}|\langle EF, EG, EH\rangle| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{|-8|}{6} = \frac{4}{3}$

(б) Угол между плоскостями равен углу между их нормалями. Найдем нормали заданных плоскостей:

$PQS : PQ \times PS = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 6i - 2j - 2k$

$QRS : QR \times QS = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5i + 3j - k$

$\cos\varphi = \dfrac{6 \cdot (-5) + (-2) \cdot 3 + (-2 \cdot (-1))}{\sqrt{36+4+4}\sqrt{25+9+1}} = \dfrac{17}{\sqrt{385}}$

Ответ: $\frac{4}{3}$; $\arccos\frac{17}{\sqrt{385}}$

№ 9

Задание: Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ и $x = 6t+9, y = -2t, z = -t+2$. Вычислить расстояние между ними.

Решение: Проверим, лежат ли прямые в одной плоскости. Направляющие векторы прямых равны соответственно $(3, 2, -2)$ и $(6, -2, -1)$. Рассмотрим точку $(-5, -5, 1)$ одной прямой и точку $(9, 0, 2)$ второй прямой. Вектор, построенный на этих точках, равен $(14, 5, 1)$. Посчитаем смешанное произведение полученных трех векторов:

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -147 \Rightarrow$ прямые не лежат в одной плоскости, то есть они скрещивающиеся.

Расстояние между скрещивающимися прямыми вычисляется по формуле:

$\dfrac{|\langle s_1, s_2, M_1M_2\rangle|}{|s_1 \times s_2|}$

Смешанное произведение уже посчитано, осталось посчитать только векторное:

$s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6i + 9j - 18k$

Тогда расстояние равно:

$\dfrac{-147}{\sqrt{36+81+324}} = \dfrac{-147}{21} = -7$

Ответ: прямые скрещивающиеся; 7

Задачи по подстановкам, комплексным числам и общей алгебре

№ 1

Задание: Разложить подстановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ в произведение циклов, выяснить ее четность. Определить порядок этой подстановки, вычислить σ^{744}.

Решение: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 7\ 8\ 9)(2)(4\ 6)$. Подстановка является четной, а ее порядок равен НОК(6, 1, 2)=6.

$\sigma^{744} = \sigma^{124 \cdot 6} = e$

Ответ: (1 3 5 7 8 9)(2)(4 6), четная, порядок равен 6, $\sigma^{744} = e$

№ 2

Задание: Решить систему уравнений $\begin{cases}(-2+4i)x+3yi=-10+21i\\(1+5i)x+(1-2i)y=14+19i\end{cases}$

Решение: Пусть $x = a + bi, y = c + di$, тогда:

$$\begin{cases}(-2+4i)x+3yi=-10+21i\\(1+5i)x+(1-2i)y=14+19i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2a-4b-3d=-10\\-2bi+4ai+3ci=21i\\a-5b+c+d=14\\bi+5ai+di-2ci=19i\end{cases}$$

Четыре уравнения, четыре неизвестных, решается, как любая другая СЛАУ, поэтому просто выпишу ответ:

$a = \dfrac{243}{62}, b = -\dfrac{83}{62}, c = \dfrac{82}{93}, d = \dfrac{233}{93}$

Ответ: $x = \dfrac{243}{62} - \dfrac{83}{62}i, y = \dfrac{82}{93} + \dfrac{233}{93}i$

№ 3

Задание: Решить уравнение $z^2 - (7+i)z + (18+i) = 0$.

Решение: Посчитаем дискрименант:

$D = b^2 - 4ac = (7+i)^2 - 4(18+i) = -24 + 10i = (5i+1)^2 \Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{(7+i) \pm (5i+1)}{2}$

Ответ: $\{4 + 3i, 3 - 2i\}$

№ 5

Задание: Является ли отображение $\phi : X \to Y$, где $X = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}, Y = \mathbb{Z}$, $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a + b + c$, инъективным, сюръективным, биективным?

Решение:

Данное отображение не является инъективным, так как у любой точки из Y более одного прообраза (Например, для $Y = 6$ существует $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$), а значит, биективным оно тоже не может быть. Но сюръективным ϕ является, так как у любого числа есть матрицы, которые в него отобразятся.

Ответ: только сюрьективное

№ 6

Задание: Является ли (a) группоидом, (b) полугруппой, (c) моноидом, (d) группой множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции $a \circ b = a + b - 5$? Ответ обосновать.

Решение: Данное множество с бинарной операцией является группоидом по определению. Проверим следующие свойства:
1) $a \circ (b \circ c) = a + (b + c - 5) - 5 = a + b + c - 5 - 5 = (a + b - 5) + c - 5 = (a \circ b) \circ c$ — ассоциативность выполнена $\Rightarrow$ множество является полугруппой; 2) $\exists e \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z}, e \circ a = a = a \circ e$ — нейтральным элементом является число 5 $\Rightarrow$ данное множество является моноидом. 3) $\forall a in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z} : a \circ b = e = 5$ — существование обратного элемента. Это свойство тоже выполнено, так как для произвольного $a \in \mathbb{Z}$ таким b будет число $(10 - a)$: $a \circ b = a + (10 - a) - 5 = 5$. Значит, множество является группой.
Ответ: да во всех пунктах

№ 7

Задание: Является ли отображение $\phi(7^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix})$ гомоморфизмом групп, если первая группа — это множество $G = \{7^a, a \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения, а вторая группа — множество $H = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \right\}$ с операцией сложения? Является ли это отображение изоморфизмом?
Решение: Проверим, является ли отображение гомоморфизмом:
$\phi(7^a \cdot 7^b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a + b \end{pmatrix} = \phi(7^{a+b}) = \phi(7^a) + \phi(7^b) \Rightarrow$ отображение является гомоморфизмом
Чтобы отображение являлось изоморфизмом, необходимо чтобы оно было биективным, то есть инъективным и сюръективным одновременно. ϕ инъективно, так как у любой матрицы не более одного прообраза, но не сюръективно, так как ни в какую матрицу вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a \neq 0$ не переходит ни одно число из множества G
Ответ: только гомоморфизм