

MINISTERIET FOR BØRN, UNDERVISNING OG LIGESTILLING STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

Matematisk formelsamling

stx B-niveau Denne udgave af Matematisk formelsamling stx B-niveau er udgivet af Undervisningsministeriet og gjort tilgængelig på uvm.dk.

Formelsamlingen er udarbejdet i et samarbejde mellem Matematiklærerforeningen og Undervisningsministeriet, Styrelsen for Undervisning og Kvalitet, maj 2018

Kopiering til andet end personlig brug må kun ske efter aftale med Copy-Dan.

ISBN: 978-87-603-3165-7

Forfattere: Gert Schomacker, Jesper Bang-Jensen, Bodil Bruun og Jørgen Dejgaard

Forord:

"Matematisk formelsamling stx B" er udarbejdet til brug for eksaminanderne ved den skriftlige prøve og i undervisningen på stx i matematik på B-niveau.

Formelsamlingen indeholder de emner, der forekommer i læreplanen for matematik på B-niveau på stx inden for både kernestof og supplerende stof.

For overblikkets skyld er medtaget formler for areal og rumfang af en række elementærgeometriske figurer.

Endvidere indeholder formelsamlingen en liste over matematiske standardsymboler.

Hensigten hermed er dels at give eleverne et hurtigt overblik, dels at bidrage til, at undervisere og forfattere af undervisningsmaterialer kan anvende ensartet notation, symbolsprog og terminologi. Listen over matematiske standardsymboler går derfor ud over kernestoffet, men holder sig dog inden for det matematiske univers i gymnasiet og på hf.

En række af formlerne i formelsamlingen er kun anvendelige under visse forudsætninger (fx at nævneren i en brøk er forskellig fra 0). Sådanne forudsætninger er af hensyn til overskueligheden ikke eksplicit nævnt.

Figurerne er medtaget som illustration til formlerne, og den enkelte figur anskueliggør ofte ét blandt flere mulige tilfælde.

Betydningen af de størrelser, der indgår i formlerne, er ikke altid forklaret, men vil dog være det i tilfælde, hvor betydningen ikke følger umiddelbart af skik og brug i den matematiske litteratur.

Birte Iversen

Undervisningsministeriet, Styrelsen for Undervisning og Kvalitet, Kontor for Prøver, Eksamen og Test Maj 2018

Indhold

Procent- og rentesregning	5
Indekstal	5
Proportionalitet	6
Brøkregler	6
Kvadratsætninger	7
Potensregneregler	7
Ensvinklede trekanter	8
Retvinklet trekant	8
Vilkårlig trekant	9
Vektorer i planen	10
Linjer, cirkler og parabler	13
Lineære funktioner	17
Andengradspolynomier	17
Logaritmefunktioner	18
Eksponentielt voksende funktioner	19
Eksponentielt aftagende funktioner	20
Potensfunktioner	21
Trigonometriske funktioner	22
Differentialregning	23
Afledede funktioner	24
Grupperede observationer	25
Ugrupperede observationer	26
Lineær regression	28
Kombinatorik	29
Sandsynlighedsregning	30
Binomialfordeling	31
Pascals trekant	33
Multiplikationstabel	34
Areal og omkreds, rumfang og overflade	35
Matematiske standardsymboler	36
Stikordsregister	42

Procent- og rentesregning

Begyndelsesværdi B Slutværdi S

 $(1) S = B \cdot (1+r)$

Vækstrate r

 $(2) r = \frac{S}{B} - 1$

Procentvis ændring p

(3) $p\% = r \cdot 100\%$

Kapitalformel Startkapital K_0 Rente p% pr. termin Kapital K efter n terminer (4) $K = K_0 \cdot (1+r)^n$, hvor $r = \frac{p}{100}$

Annuitetsopsparing
Terminsindbetaling b
Rentefod r
Antal indbetalinger n
Kapital A efter sidste
indbetaling

 $(5) A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Annuitetslån
Hovedstol G
Rentefod r
Antal terminsydelser n
Terminsydelse y

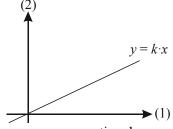
(6) $y = G \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$

Indekstal

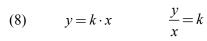
Værdi	В	S
Indekstal	$I_{\scriptscriptstyle B}$	I_S

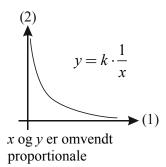
(7)
$$I_S = \frac{S}{B} \cdot I_B \qquad S = \frac{I_S}{I_B} \cdot B$$

Proportionalitet



x og y er proportionale Proportionalitetsfaktor k





$$(9) y = k \cdot \frac{1}{x} x \cdot y = k$$

Brøkregler

$$(10) \qquad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$(11) \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$(12) \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$(13) \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$(14) \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Kvadratsætninger

(15)
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b$$

(16)
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$$

(17)
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Potensregneregler

$$(18) a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(19) \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(20) \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(21) \qquad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$(22) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

(23)
$$a^0 = 1$$

$$(24) a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$(25) a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$(26) \qquad \sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$$

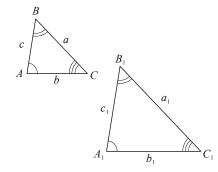
$$(27) \qquad \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$$

$$(28) \qquad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$(29) \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$(30) \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Ensvinklede trekanter



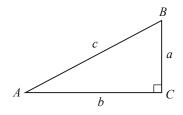
(31)
$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$$

$$a_1 = k \cdot a$$

$$(32) b_1 = k \cdot b$$

$$c_1 = k \cdot c$$

Retvinklet trekant



Pythagoras' sætning

(33)
$$c^2 = a^2 + b^2$$

cosinus

(34)
$$\cos(A) = \frac{b}{c}$$

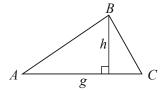
sinus

(35)
$$\sin(A) = \frac{c}{c}$$

tangens

$$(36) \qquad \tan(A) = \frac{a}{b}$$

Vilkårlig trekant

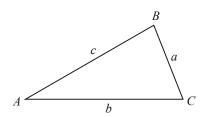


Trekantens vinkelsum

(37)
$$A + B + C = 180^{\circ}$$

Trekantens areal T

$$(38) T = \frac{1}{2}h \cdot g$$



cosinusrelation

(39)
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(C)$$

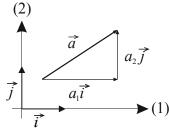
sinusrelation

(40)
$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Trekantens areal T

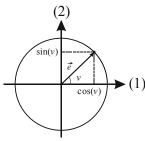
$$(41) T = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin(C)$$

Vektorer i planen



Koordinatsættet for vektor \vec{a} hvor $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

(42)
$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



Enhedsvektor

$$(43) \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

Enhedsvektor \vec{e} ensrettet med \vec{a}

$$(44) \qquad \vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



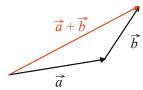
Længden af vektor \vec{a}

(45)
$$|\vec{a}| = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



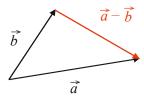
Multiplikation af vektor \vec{a} med tallet k

(46)
$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$$



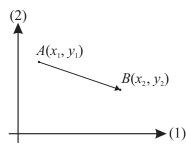
Summen af to vektorer

$$(47) \qquad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$



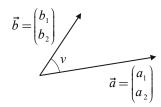
Differensen mellem to vektorer

(48)
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$



Koordinatsættet for vektor \overrightarrow{AB}

$$(49) \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



Skalarproduktet (prikproduktet) af \vec{a} og \vec{b}

$$(50) \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

(51)
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

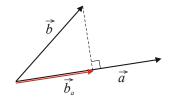
(52)
$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Ortogonale vektorer

(53)
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Kvadratet på en vektor

$$(54) \qquad \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

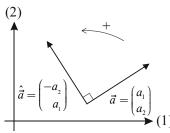


Projektionen af \vec{b} på \vec{a}

$$(55) \qquad \vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Længden af projektionen

$$(56) \qquad |\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



Tværvektoren til \vec{a}

(57)
$$\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

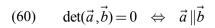
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

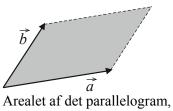
Determinanten for vektorparret (\vec{a}, \vec{b})

(58)
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

(59)
$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

Parallelle vektorer

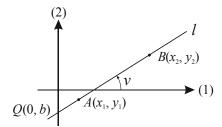




Arealet af det parallelogram som udspændes af \vec{a} og \vec{b}

(61)
$$A = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$$

Linjer, cirkler og parabler



Ligning for linjen l gennem Q(0,b) med hældningskoefficient a

 $(62) y = a \cdot x + b$

Hældningskoefficient (stigningstal) a for linjen l gennem $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$

(63) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Skæring med y-aksen

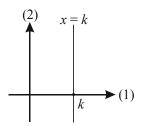
 $(64) b = y_1 - a \cdot x_1$

Ligning for linjen l gennem $A(x_1, y_1)$ med hældningskoefficient a

(65) $y = a \cdot (x - x_1) + y_1$

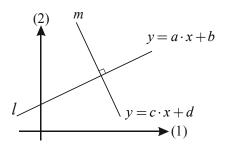
Hældningsvinklen v er vinklen fra førsteaksen til l regnet med fortegn

 $(66) a = \tan(v)$



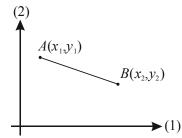
Ligning for lodret linje

(67) x = k



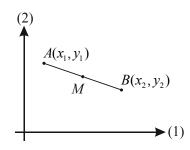
Ortogonale linjer l og m

(68) $l \perp m \Leftrightarrow a \cdot c = -1$



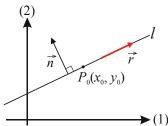
Afstand |AB| mellem to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$

(69) $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Midtpunkt *M* for linjestykke *AB*

(70)
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

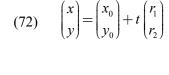


Ligning for linjen l gennem P_0 med normalvektor

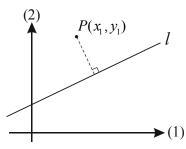
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Parameter fremstilling for linjen l gennem P_0 med

retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$

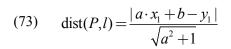


(71) $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$

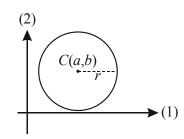


Afstand dist(P,l) fra punktet $P(x_1, y_1)$ til linjen l med ligningen $y = a \cdot x + b$

Afstand dist(P,l) fra punktet $P(x_1, y_1)$ til linjen l med ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

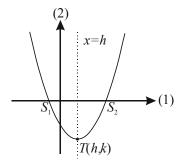


(74) $\operatorname{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



Ligning for cirkel med centrum i C(a,b) og radius r

(75)
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Ligning for parabel med symmetriakse parallel med andenaksen

(76)
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - h)^2 + k$$

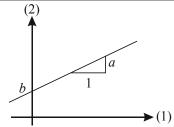
Toppunkt T

(77)
$$T(h,k) = T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right), \quad d = b^2 - 4ac$$

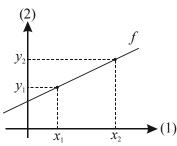
Skæringspunkter S_1 og S_2 med førsteaksen

(78)
$$S_1\left(\frac{-b-\sqrt{d}}{2a},0\right), S_2\left(\frac{-b+\sqrt{d}}{2a},0\right)$$

Lineære funktioner



Førstegradspolynomium, lineær funktion f



Hældningskoefficienten a (stigningstallet) ud fra to punkter på grafen (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

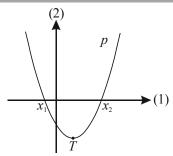
Skæring med y-aksen

 $f(x) = a \cdot x + b$ (79)

$$(80) \qquad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

 $(81) b = y_1 - a \cdot x_1$

Andengradspolynomier



Andengradspolynomium p med nulpunkterne (rødder) x_1 og x_2

Nulpunkter (rødder) i p

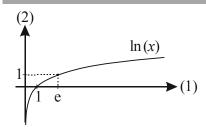
Toppunkt T

(82)
$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$
$$= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

(83)
$$x_{1} = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, \ x_{2} = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a},$$
hvor $d = b^{2} - 4ac$

$$(84) T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$$

Logaritmefunktioner



Grafen for den naturlige logaritmefunktion

(85)
$$ln(x) \rightarrow -\infty$$
 for $x \rightarrow 0$

(86)
$$ln(x) \to \infty$$
 for $x \to \infty$

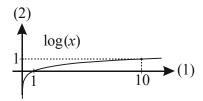
(87)
$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

(88)
$$ln(e) = 1$$

(89)
$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

(90)
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

(91)
$$\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$$



Grafen for logaritmefunktionen med grundtal 10

(92)
$$\log(x) \to -\infty$$
 for $x \to 0$

(93)
$$\log(x) \to \infty$$
 for $x \to \infty$

(94)
$$y = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^y$$

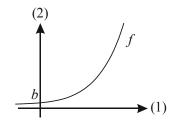
(95)
$$\log(10) = 1$$

(96)
$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

(97)
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

(98)
$$\log(a^r) = r \cdot \log(a)$$

Eksponentielt voksende funktioner



Grafen for en eksponentielt voksende funktion fa > 1vækstraten r > 0k > 0

(99)
$$f(x) = b \cdot a^{x}$$
$$= b \cdot (1+r)^{x}$$
$$= b \cdot e^{k \cdot x}, \text{ hvor } k = \ln(a)$$

(100) $f(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$

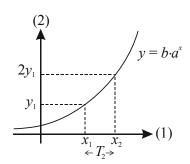
(101)
$$f(x) \rightarrow 0$$
 for $x \rightarrow -\infty$

Fremskrivningsfaktoren a ud fra to punkter på grafen (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

Skæring med y-aksen

(102)
$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$$

(103) $b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$

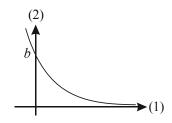


Fordoblingskonstanten T_2

$$(104) T_2 = x_2 - x_1$$

(105)
$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{k}$$

Eksponentielt aftagende funktioner



Grafen for en eksponentielt aftagende funktion f0 < a < 1vækstraten r < 0k < 0

(106)
$$f(x) = b \cdot a^{x}$$
$$= b \cdot (1+r)^{x}$$
$$= b \cdot e^{k \cdot x}, \text{ hvor } k = \ln(a)$$

(107)
$$f(x) \rightarrow 0$$
 for $x \rightarrow \infty$

(108)
$$f(x) \to \infty$$
 for $x \to -\infty$

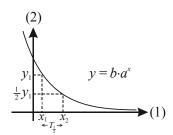
Fremskrivningsfaktoren a ud fra to punkter på grafen

 (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

(109) $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$

Skæring med y-aksen

(110)
$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$



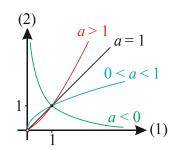
Halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}}$

$$(111) \quad T_{\frac{1}{2}} = x_2 - x_1$$

(112)
$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{k}$$

Potensfunktioner

Potensfunktion



Grafer for $f(x) = x^a$

 $(113) f(x) = b \cdot x^a$

Bestemmelse af tallet a ud fra to punkter på grafen (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

Når x ganges med tallet $1+r_x$, så ganges f(x) med tallet $1+r_y$

Når x ganges med tallet k, så ganges f(x) med tallet k^a

(114)
$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)}$$

$$(115) b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

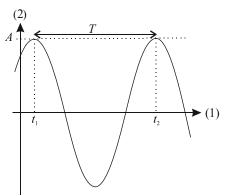
$$(116) \quad 1 + r_v = (1 + r_x)^a$$

$$(117) f(k \cdot x) = k^a \cdot f(x)$$

Trigonometriske funktioner

 ${\it Harmonisk svingning} f$

(118)
$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



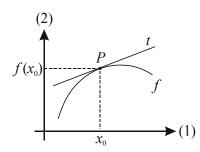
Graf for harmonisk svingning f med amplitude A og periode (svingningstid) T

$$(119) T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$$

Differentialregning

Differentialkvotienten $f'(x_0)$ for funktionen f i tallet x_0

(120)
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Ligning for tangenten t til grafen for f i $P(x_0, f(x_0))$

(121) $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ eller $y = a \cdot x + b$ hvor $a = f'(x_0)$ og $b = y_0 - a \cdot x_0$

Regneregler for differentiation

$$(122) \quad (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

(123)
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

(124)
$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

(125)
$$(f(x) \cdot g(x))' =$$
$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

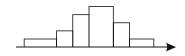
(126)
$$(f(a \cdot x + b))' = a \cdot f'(a \cdot x + b)$$

Afledede funktioner

		Funktion $y = f(x)$	Afledet funktion $y' = f'(x) = \frac{d}{dx}$
Lineær funktion	(127) (128)	$a \cdot x + b$ k	а 0
Logaritmefunktion	(129)	ln(x)	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Eksponentialfunktioner	(130)	e^x	e ^x
	(131)	e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
	(132)	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
Potensfunktioner	(133)	χ^a	$a \cdot x^{a-1}$
	(134)	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
		$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
Trigonometriske funktioner	(136)	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	(137)	$\sin(x)$	$\cos(x)$

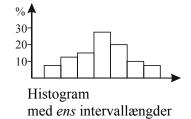
Grupperede observationer

10%

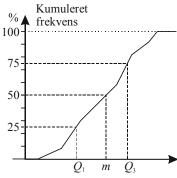


Histogram

(138) Arealet af en blok svarer til intervallets frekvens



(139) Højden af en blok svarer til intervallets frekvens

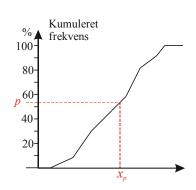


Sumkurve

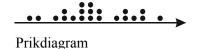
(140) Q_1 : nedre kvartil, 25% -fraktilen m: median, 50% -fraktilen

 Q_3 : øvre kvartil, 75% -fraktilen

 x_p : p% -fraktilen



Ugrupperede observationer



(141) Observationerne afsat på en tallinje



(142) min: mindste observation



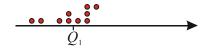
(143) max: største observation

Variationsbredde

(144) max - min



(145) *m*: median (midterste observation, når antallet af observationer er ulige, ellers tallet midt mellem de to midterste observationer)



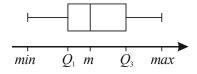
(146) Q_1 : nedre kvartil (medianen for den nederste halvdel af observationerne)



(147) Q_3 : øvre kvartil (medianen for den øverste halvdel af observationerne)

Kvartilbredde

(148) $Q_3 - Q_1$



(149) Boksplot, kassediagram (boksens højde er uden betydning)

Kvartilsæt

(150) (Q_1, m, Q_3)

Udvidet kvartilsæt

(151) (min, Q_1, m, Q_3, max)

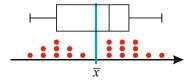
Outlier

(152) Observation, der ligger mere end halvanden kvartilbredde under nedre kvartil eller mere end halvanden kvartilbredde over øvre kvartil

Middeltal \overline{x} for observationssættet $x_1, x_2, ..., x_n$ (153) $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

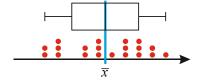
Spredning af en stikprøve $x_1, x_2, ..., x_n$ fra en population

(154) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$ $= \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}}$



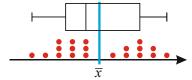
Venstreskæv fordeling

(155) Middeltal mindre end medianen $\bar{x} < m$



Ikke-skæv fordeling

(156) Middeltal lig med medianen $\bar{x} = m$



Højreskæv fordeling

(157) Middeltal større end medianen $\bar{x} > m$

Lineær regression

Tabel med observerede data

(158)

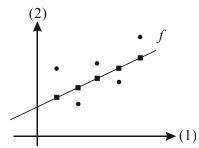
x	x_{l}	x_2	x_3	 \mathcal{X}_n
У	\mathcal{Y}_1	\mathcal{Y}_2	\mathcal{Y}_3	 \mathcal{Y}_n

Regressionslinje

(159)Bedste rette linje, graf for $f(x) = a \cdot x + \vec{b}$

Punktplot og bedste rette linje

(160)



- observerede datapunkter modelpunkter

Residual

Forskel mellem observeret y-værdi og (161)tilsvarende y-værdi i model

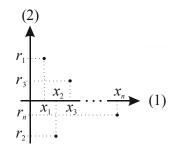
Residualtabel

(162)

х	x_1	x_2	 \mathcal{X}_n
Residual	$r_1 = y_1 - f(x_1)$	$r_2 = y_2 - f(x_2)$	 $r_n = y_n - f(x_n)$

Residualplot

(163)



Residualspredning

164)
$$s = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2}{n - 2}}$$

Kombinatorik

Multiplikationsprincip Antal mulige måder at vælge både ét element fra N og et element fra M, hvor N består af *n* elementer og *M* består af *m* elementer

(165) $n \cdot m$

Additionsprincip Antal mulige måder at vælge

enten ét element fra N eller ét element fra M, hvor N består af *n* elementer og *M* består af *m* elementer

(166)n+m

Fakultet

 $(167) \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Permutationer Antal muligheder for udvælgelse af r elementer blandt *n* elementer, når rækkefølgen har betydning (168) $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Kombinationer Antal muligheder for udvælgelse af r elementer blandt *n* elementer, når rækkefølgen ikke har betydning

(169) $K(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Sandsynlighedsregning

Sandsynlighedsfelt med udfaldsrum U og sandsynligheder p

(170) (U, p)

Udfaldsrum $U \mod n$ udfald

(171) Mængden af alle udfald $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Summen af alle sandsynligheder

(172) $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$

Sandsynlighedstabel

(173) Udfald u_1 u_2 u_3 ... u_n Sandsynlighed p_1 p_2 p_3 ... p_n

Hændelse A med k udfald fra U

(174) Mængde af k udfald fra U

Sandsynlighed for hændelse A

(175) Summen af de k udfalds sandsynligheder

Symmetrisk sandsynlighedsfelt

Alle sandsynligheder er lige store

(176)
$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$$

Sandsynlighed for udvælgelse af et element fra A

(177)
$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{antal\ gunstige}{antal\ mulige}$$

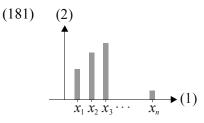
Sandsynlighed ved kombination af uafhængige hændelser A og B (178) $P(\text{både } A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$

Sandsynlighed ved kombination af hændelser *A* og *B*, som ikke har noget fælles udfald (179) P(A eller B) = P(A) + P(B)

Sandsynlighedsfordelingstabel for en stokastisk variabel *X*

80)	\mathcal{X}_{i}	x_1	x_2	x_3	 X_n
	$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	 p_{n}

Søjlediagram. Højde af søjle svarer til sandsynlighed af udfald



(1

Middelværdi af en stokastisk variabel X

(182)
$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$
$$= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Varians af en stokastisk variabel X

(183)
$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$
$$= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

Spredning af en stokastisk variabel X

(184)
$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$$

Binomial for deling

Binomialfordelt stokastisk variabel *X* med antalsparameter *n* og sandsynlighedsparameter *p*

$$(185) \quad X \sim b(n,p)$$

Binomialkoefficient K(n,r)

(186)
$$K(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(187)
$$K(n,r) = K(n,n-r)$$

Sandsynlighedsfunktion for binomialfordelt stokastisk variabel X

(188)
$$P(X=r) = K(n,r) \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Middelværdi μ

$$(189) \quad \mu = n \cdot p$$

Spredning σ

$$(190) \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Statistisk usikkerhed i stikprøver

Antal elementer i stikprøven n

95% konfidensinterval for populationens sandsynlighedsparameter p estimeret ud fra stikprøveandelen \hat{p}

(191)
$$\left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}\right]$$

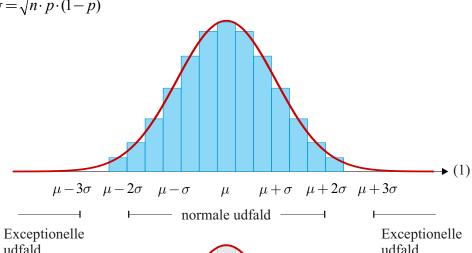
Normalfordelingsapproksimation til binomialfordelt stokastisk variabel X med middelværdi

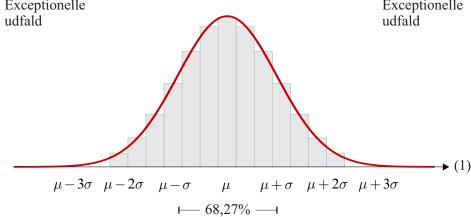
(192)

$$\mu = n \cdot p$$

og spredning

 $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$





— 95,45% ——— 99,73% ——— K(0,0) K(1,0) K(1,1) K(2,0) K(2,1) K(2,2) K(3,0) K(3,1) K(3,2) K(3,3) K(4,0) K(4,1) K(4,2) K(4,3) K(4,4) K(5,0) K(5,1) K(5,2) K(5,3) K(5,4) K(5,5) K(6,0) K(6,1) K(6,2) K(6,3) K(6,4) K(6,5) K(6,6) K(7,0) K(7,1) K(7,2) K(7,3) K(7,4) K(7,5) K(7,6) K(7,7) K(8,0) K(8,1) K(8,2) K(8,3) K(8,4) K(8,5) K(8,6) K(8,7) K(8,8)

10 10 8 1

Multi	nlikatio	nstabel
IVILLI	Dillizatio	115tabel

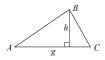
1	1	O	1	1
(1	ソ	4)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

Røde tal: Kvadrattal

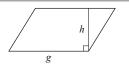
Areal og omkreds, rumfang og overflade af geometriske figurer

Trekant



- h højde
- grundlinje g
- areal \boldsymbol{A}
- $A = \frac{1}{2}h \cdot g$

Parallelogram



- højde h
- grundlinje g
- \boldsymbol{A} areal
- $A = h \cdot g$

Trapez



- højde h
- parallelle sider *a*, *b*
- Aareal
- $A = \frac{1}{2}h \cdot (a+b)$

Cirkel



- r radius
- areal \boldsymbol{A}
- $A = \pi r^2$
- 0 omkreds
- $O = 2\pi r$

Kugle



- radius r
- overflade O
- $O = 4\pi r^2$
- Vrumfang
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Cylinder



- højde h
- grundfladeradius r
- 0 krum overflade
- $O = 2\pi r \cdot h$
- Vrumfang
- $V = \pi r^2 \cdot h$

 $O = \pi r \cdot s$

Kegle



højde h

V

- sidelinje S
- grundfladeradius r
- krum overflade 0

 - $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ rumfang

Matematiske standardsymboler

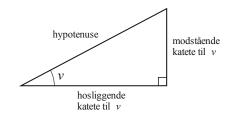
	•		
Symbol	Betydning	Eksempler, bem	ærkninger m.v.
{.,.,,}	mængde på listeform	{-5,0,3,10},{2,4	.,6,},{,-1,0,1,}
\mathbb{N}	mængden af naturlige tal	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3,\}$	
$\mathbb Z$	mængden af hele tal	$\mathbb{Z} = \{, -2, -1, 0, 1\}$,2,}
\mathbb{Q}	mængden af rationale tal	tal, der kan skrive	es $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$
\mathbb{R}	mængden af reelle tal		
€	tilhører / er element i	$2 \in \mathbb{N}$	
[a;b]	lukket interval	$[1;3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le$	$\leq x \leq 3$
]a;b]	halvåbent interval	$]1;3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < \infty\}$	$< x \le 3$
[a;b[halvåbent interval	$[1;3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le$	$\leq x < 3$
]a;b[åbent interval	$]1;3[=\{x\in\mathbb{R}\mid 1$	$\langle x \langle 3 \rangle$
\subset	er en ægte delmængde af	$\big\{1,2,3\big\} \subset N$	
\cap	fællesmængde	$A \cap B$	$A \bigcirc B$
U	Foreningsmængde	$A \cup B$	$A \bigcirc B$
\	mængdedifferens	$A \backslash B$	$A \bigcirc B$
\overline{A}	komplementærmængde	$U \backslash A$	U A
Ø	den tomme mængde		
	disjunkte mængder	$A \cap B = \emptyset$	$A \bigcirc B$
×	mængdeprodukt	[-10;10]×[-10;1	0]
٨	"og" i betydningen "både og" (konjunktion)	$x < 2 \land y = 5$	
V	"eller" i betydningen "og/eller" (disjunktion)	$x < 2 \lor x > 5$	

Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
\Rightarrow	"medfører", "hvis så" (implikation)	$x = 2 \implies x^2 = 4$
\Leftrightarrow	"ensbetydende", "hvis og kun hvis" (biimplikation)	$x^2 = 4 \iff x = -2 \lor x = 2$
$\sum_{i=1}^{n} a_{i}$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$	$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
n!	n fakultet, n udråbstegn	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \text{for } n \ge 1$ $0! = 1$
f(x)	funktionsværdi af x ved funktionen f	$f(x) = \sqrt{2x+1}$, så er $f(4) = 3$.
Dm(f)	definitions mængden for f	
Vm(f)	værdimængden for f	
$f \circ g$	sammensat funktion	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
f^{-1}	omvendt (invers funktion)	$s = f(t) \iff t = f^{-1}(s)$
log(x)	logaritmefunktionen med grundtal 10	$y = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^y$
ln(x)	den naturlige logaritme- funktion	$y = \ln(x) \iff x = e^y$
e ^x	den naturlige eksponential- funktion	e ^x betegnes også exp(x)
a^x	eksponentialfunktionen med grundtal a , $a>0$	$b \cdot a^x$ kaldes undertiden for en eksponentialfunktion eller en eksponentiel udvikling
x^a	potensfunktion	$b \cdot x^a$ kaldes undertiden for en potensfunktion eller en potensudvikling
x	numerisk (absolut) værdi af x	3 =3, $ -7 =7 x betegnes også abs(x)$
$\sin(x)$	sinus	
$\cos(x)$	cosinus	
tan(x)	tangens	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

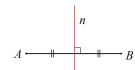
Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
$\sin^{-1}(y)$	omvendt funktion til sinus	$\sin^{-1}(y) = x \iff \sin(x) = y$
		$\sin^{-1}(0,5) = 30^{\circ}$
		sin ⁻¹ betegnes også Arcsin
$\cos^{-1}(y)$	omvendt funktion til cosinus	$\cos^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \cos(x) = y$
		$\cos^{-1}(0,5) = 60^{\circ}$
		cos ⁻¹ betegnes også Arccos
$\tan^{-1}(y)$	omvendt funktion til tangens	$\tan^{-1}(y) = x \iff \tan(x) = y$
		$\tan^{-1}(1) = 45^{\circ}$
		tan ⁻¹ betegnes også Arctan
$\lim_{x\to x_0}f(x)$	grænseværdien af $f(x)$	$\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$
$\lim_{x\to\infty}f(x)$	for x gående mod x_0 grænseværdien af $f(x)$	
$x \to \infty$	for x gående mod ∞	$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
$f(x) \to a$	f(x) går mod a	$\sqrt{x+1} \rightarrow 2 \text{ for } x \rightarrow 3$
for $x \to x_0$	for x gående mod x_0	$\sqrt{x+1} \rightarrow 2 \text{ 101 } x \rightarrow 3$
$f(x) \to a$	f(x) går mod a	$e^{-x} \to 0$ for $x \to \infty$
for $x \to \infty$	for x gående mod ∞	A
Δx	x-tilvækst	$\Delta x = x - x_0$
$\Delta y, \Delta f$	funktionstilvækst for $y = f(x)$	$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta f}{\Delta x}$	differenskvotient for $y = f(y)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$\Delta x \Delta x$	y = f(x)	
$f'(x_0)$	differentialkvotienten for $y = f(x)$ i x_0	$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
	•	$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
a.l.		hotograph $G'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx G(x)$
f'	afledet funktion af $y = f(x)$	betegnes $f'(x)$, y' , $\frac{d}{dx}f(x)$,
		$\frac{d}{dx}(f(x)), \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}, \left(\sqrt{3x^2+1}\right)'$
$f^{(n)}$	den <i>n</i> 'te afledede funktion af	$f^{(2)}(x)$ skrives ofte $f''(x)$, y''
-	y = f(x)	eller $\frac{d^2y}{dx^2}$
		dx^2

Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
AB	linjestykket AB	
AB	længden af linjestykket AB	
\widehat{AB}	cirkelbuen \widehat{AB}	
$ \widehat{AB} $	længden af cirkelbuen \widehat{AB}	
\vec{a} , \overrightarrow{AB}	vektor	
$ \overrightarrow{a} , \overrightarrow{AB} $	længden af vektoren	
$\hat{\vec{a}}$	tværvektor	betegnelsen \hat{a} kan også anvendes
$\vec{a}\cdot\vec{b}$	skalarprodukt, prikprodukt	betegnelsen $\vec{a} \cdot \vec{b}$ benyttes også
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$	determinanten for vektor- parret (\vec{a}, \vec{b})	betegnelsen $\det(\vec{a}, \vec{b})$ benyttes også
1	"er vinkelret på"	$l \perp m$ læses også " l og m er ortogonale"
$\angle A$	vinkel A	$\angle A = 110^{\circ} \text{ eller } A = 110^{\circ}$
$\angle ABD$	vinkel B i trekant ABD	A D
$\angle(\vec{a},\vec{b})$	vinklen v mellem \vec{a} og \vec{b} , hvor $0^{\circ} \le v \le 180^{\circ}$	\vec{a} \vec{b}
	vinklen fra \vec{a} til \vec{b}	$ \begin{array}{c} \overrightarrow{a} \\ -115^{\circ} \\ 245^{\circ} \\ \overrightarrow{b} \end{array} $

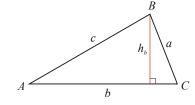
retvinklet trekant



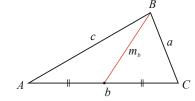
midtnormalen *n* for linjestykket *AB*



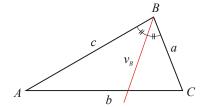
 h_b højden fra B på siden b eller dens forlængelse



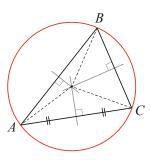
 m_b medianen fra B på siden b



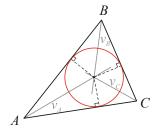
 v_B vinkelhalveringslinjen for vinkel B



trekant *ABC*'s omskrevne cirkel



trekant *ABC*'s indskrevne cirkel



Stikordsregister

Su.	Roi usi egistei				
A	additionsprincip	29	G	grupperede observationer	25
	afledet funktion	24, 38		grænseværdi	38
	afstand mellem				
	- punkt og linje	14	H	halveringskonstant	20
	- to punkter	15		harmonisk svingning	22
	areal			histogram	25
	- cirkel	35		hældningskoefficient	13, 17
	- parallelogram	35		hældningsvinklen	13
	- trapez	35		hændelse	30
	- trekant	35		højde	35, 40
				højreskæv	27
B	bedste rette linje	28			
	binomialfordeling	31	I	ikke-skæv	27
	binomialkoefficient	31		indekstal	5
	boksplot	26		indskreven cirkel	41
	brøkregler	6			
			K	kapitalformel	5
C	cirkel	35		kegle	35
	cirklens ligning	15		kombinationer	29
	cosinus	8, 37		konfidensinterval	32
	cosinusrelation	9		kugle	35
	cylinder	35		kvadratsætninger	7
				kvartil	25, 26, 27
D	determinant	12		kvartilbredde	26
	differensen mellem vektorer	11		kvartilsæt	26
	differenskvotient	38			
	differentialkvotient	23, 38	L	lineær funktion	17
				lineær regression	28
E	eksponentiel funktion			linjens ligning	13
	- aftagende	20		lodret linje, ligning	13
	- voksende	19		logaritmefunktioner	18
	enhedsvektor	10		længde af vektor	10
	ensvinklede trekanter	8			
	exceptionelle udfald	32	M	median (statistik)	25, 26
				median (trekant)	40
F	fakultet	29, 37		middeltal	27
	fordoblingskonstant	19		middelværdi	31
	fremskrivningsfaktor	19, 20		midtnormal	40
	førstegradspolynomium	17		midtpunkt	14

	multiplikationsprincip	29	R	0	28 28
N	nedre kvartil	25	regressionslinje 25 residual		28
1	normale udfald	32		residualplot	28
	normalfordeling	32		residualspredning	28
	normalvektor	15		retningsvektor	15
	nulpunkter	17		retvinklet trekant	8, 40
	пагранки	1 /		rod, rødder	17
O	omkreds, cirkel	35		rumfang af	1 /
J	omskreven cirkel	41		- cylinder	35
	omvendt proportionalitet	6		- kegle	35
	ortogonal, vinkelret	39		- kugle	35
	ortogonale linjer	14		Rugio	33
	ortogonale vektorer	11	S	sandsynlighed	30, 31
	outlier	, ,		sinus	8, 37
	overflade	_,		sinusrelation	9
	- cylinder	35		skæringspunkt m. førsteakser	
	- kegle	35		skalafaktor	8
	- kugle	35		skalarprodukt	11, 39
	C			spredning	27, 31
P	p% -fraktilen	25		statistisk usikkerhed	32
	parabel	16		stokastisk variabel	31, 32
	parallelle vektorer	12		sum af vektorer	11
	parallelogram	35		sumkurve	25
Pascals trekant		33		symboler	36
permutationer		29		symmetrisk sandsynlighedsfelt 3	
potensfunktioner		21		søjlediagram	31
	potensregneregler	7			
	prikdiagram	26	T	tangens	8, 37
	prikprodukt	11, 39		tangent til graf	23
	procent-procent tilvækst	21		toppunkt	16, 17
	procentregning	5		trapez	35
	projektionen	12		trigonometriske funktioner	22
	proportionalitet	6		tværvektor	12
			U	uafhængige hændelser	30
			-	udfaldsrum	30
				udvidet kvartilsæt	26
				ugrupperede observationer	26
				- **	

V	varians	31
	variationsbredde	26
	vektorer i planen	10
	venstreskæv fordeling	27
	vilkårlig trekant	9
	vinkelhalveringslinje	40
	vinkelret, ortogonal	39
	vinkelsum i trekant	9
	vinkler	39
	vækstrate	5, 19, 20
Ø	øvre kvartil	26