Бондар Денис. Варіант 10

Написати програму обчислення (2n + 1)!! (n > 0). Вхідні дані: n = 2

---

1. Написати рекурсивну SIPL-функцію

```
func f(N) = if N<=0 then 1 else (2 * N + 1) * f(N - 1)
```

---

2. Побудувати семантичний терм

$\varphi = IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ S^2(mult, S^2(add, S^2(mult, \bar{2}, N \Rightarrow),\ \ \bar{1}),\ \ S^N(f, S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))))$

---

3. Побудувати 3 апроксимації

$f_0 = \perp$

$f_1 = \varphi(f_0) = \varphi(\perp) = IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ S^2(mult, S^2(add, S^2(mult, \bar{2}, N \Rightarrow),\ \ \bar{1}),\ \ S^N(\perp, S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))))$

$= IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp)$

$f_2 = \varphi(f_1) = IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ S^2(mult, S^2(add, S^2(mult, \bar{2}, N \Rightarrow),\ \ \bar{1}),\ \ S^N(IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp), S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))))$

$$f_1(st) = \begin{cases} \bar{1}, & N <= 0 \\ \perp, & otherwise \end{cases}$$

$$f_2(st) = \begin{cases} \bar{1}, & N <= 0 \\ N - 1 & \\ \perp, & otherwise \end{cases}$$

---

4. Провести тестування побудованих апроксимацій на вхідних даних $\boldsymbol{st} = [\boldsymbol{N} \longmapsto \mathbf{2}]$

$f_0(st) \uparrow$
$f_1(st) = IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp)$

Обчислимо значення умови:
$S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0})(st) = leq\big(N \Rightarrow (st), \bar{0}(st)\big) = leq(2,\ \ 0) = false$

отже,
$f_1(st) = IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp) = \perp (st) \uparrow$
$f_2(st) = IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ S^2(mult, S^2(add, S^2(mult, \bar{2}, N \Rightarrow),\ \ \bar{1}),\ \ S^N(IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp), S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))))$(st)

Обчислимо значення умови:
$S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0})(st) = leq\big(N \Rightarrow (st), \bar{0}(st)\big) = leq(2,\ \ 0) = false$

отже,
$f_2(st) = S^2(mult, S^2(add, S^2(mult, \bar{2}, N \Rightarrow), 1), S^N(IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp), S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1})))$(st) =
mult ($S^2(add, S^2(mult, \bar{2}, N \Rightarrow), 1)$, $S^N(IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp), S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))$(st))(st)

Обчислимо спочатку значення другого аргументу:

$$S^N(IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp), S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))(\mathrm{st})) = IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp)(st\nabla[N \longmapsto S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1})(st)]) =$$
$$= IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp)(st\nabla[N \longmapsto sub(2\ , 1)(st)]) =$$
$$IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp)([N \longmapsto 1])$$

Обчислимо значення умови:
$S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0})(st) = leq\big(N \Rightarrow (st), \bar{0}(st)\big) = leq(1,\ \ 0) = false$

отже,
$f_3(st) = S^2(mult, S^2(add, S^2(mult, \bar{2}, N \Rightarrow), 1), S^N(IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp), S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1})))$(st) =
mult ($S^2(add, S^2(mult, \bar{2}, N \Rightarrow), 1)$, $S^N(IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ \perp), S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))$(st))(st)

Обчислимо спочатку значення другого аргументу:

$$S^N(IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \overline{0}),\ \ \overline{1},\ \ \bot), S^2(sub, N \Rightarrow, \overline{1}))(\mathrm{st})) = IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \overline{0}),\ \ \overline{1},\ \ \bot)(st\nabla[N \longmapsto S^2(sub, N \Rightarrow, \overline{1})(st)]) =$$
$$= IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \overline{0}),\ \ \overline{1},\ \ \bot)(st\nabla[N \longmapsto sub(1\ , 1)(st)]) =$$
$$IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \overline{0}),\ \ \overline{1},\ \ \bot)([N \longmapsto 0])$$

Обчислимо значення умови:
$S^2(leq, N \Rightarrow, \overline{0})(st) = leq\big(N \Rightarrow (st), \overline{0}(st)\big) = leq(0,\ \ 0) = true$

Таким чином, $IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \overline{0}),\ \ \overline{1},\ \ \bot)([N \longmapsto 0])$ = 1

mult ($S^2(add, S^2(mult, \overline{2}, N \Rightarrow),\ \ \overline{1})$, $\overline{1}$)(st) = mult(add(mult($\overline{2}, N \Rightarrow$) , $\overline{1}$) , $\overline{1}$) =
= mult(add(mult($\overline{2}$, $\overline{1}$) , $\overline{1}$) , $\overline{1}$) = 3

mult ($S^2(add, S^2(mult, \overline{2}, N \Rightarrow),\ \ \overline{3})$, $\overline{1}$)(st) = mult(add(mult($\overline{2}, N \Rightarrow$) , $\overline{1}$) , $\overline{1}$) =
= mult(add(mult($\overline{2}$, $\overline{2}$) , $\overline{1}$) , $\overline{3}$) = 15

5. Довести правильність рекурсивної програми

За наведеними вище апроксимаціями можна припустити, що k-та апроксимація матиме наступний загальний вигляд:

$$f_k(st) = \begin{cases} (2N+1)!!, & N \le k \\ \perp, otherwise \end{cases}$$

Доведемо це твердження методом математичної індукції

1) База індукції

$f_0(st) = \begin{cases} (2N+1)!!, & N \le 0 \\ \perp, otherwise \end{cases}$, що очевидно вірно

$f_1(st) = \begin{cases} (2N+1)!!, & N \le 1 \\ \perp, otherwise \end{cases}$, що теж очевидно вірно

---

2) Крок індукції

Припустимо, що твердження виконується для $k \le n, n \ge 1$, і доведемо, що воно виконується для $k = n+1$

За неперервністю (отже, і монотонністю) оператора φ маємо, що якщо $f_n(st) \downarrow$, то $f_{n+1}(st) \downarrow = f_n(st) \downarrow$
Таким чином, залишається довести, що $f_{n+1}(st) = (2N+3)!!, N \le n+1$, та $f_{n+1}(st) \uparrow, N > n+1$

Нехай $st = [N \mapsto \text{n}]$. Тоді

$$f_{n+1}(st) = \varphi(f_n)(st) = IF(S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0}),\ \ \bar{1},\ \ S^2(mult, S^2(add, S^2(mult, \bar{2}, N \Rightarrow),\ \ \bar{1}),\ \ S^N(f_n, S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1}))))$$

Умова:

$S^2(leq, N \Rightarrow, \bar{0})(st) = leq\big(N \Rightarrow (st), \bar{0}(st)\big) = leq(N \Rightarrow (st), 0)$

Обчислимо третій аргумент композиції IF на стані st:

$S^N(f_n, S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1})(st)$

Стан для суперпозиції буде:

$$st` = st\nabla[N \longmapsto S^2(sub, N \Rightarrow, \bar{1})(st)] = st\nabla\big[N \longmapsto sub\big(N \Rightarrow (st), \bar{1}(st)\big)\big] =$$
$$= st\nabla[XN \longmapsto sub(n, 1)] = st\nabla[N \longmapsto n - 1]$$

Розглянемо значення $f_n(st`)$ в залежності від значення x

- Якщо $x \leq n + 1$, то $x - 1 \leq n$, отже, $f_n(st) = (2x + 1)!!$ за припущенням
  Тоді результат $f_{n+1}(st) = (2(x + 1)1)!! = (2x + 3)!!$
- Якщо $x > n + 1$, то $x - 1 > n$, отже, $f_n(st) \uparrow$ і також $f_{n+1}(st) \uparrow$, що й треба було показати.

В усіх випадках показано, що результат буде відповідний, отже твердження доведено.
Якщо ми розглянемо ланцюг апроксимацій, то границею і буде шукана функція $(2n + 1)!!$.

Теоретичні результати, використані в пункті

◉ *Рекурсивні визначення* – це такі визначення, в правій частині яких використовується посилання на поняття, що визначається. Такі визначення мають вид $x = \varphi(x)$

Рекурсивне визначення можна тлумачити

- *операційно*, тобто вказати алгоритм, за яким можна обчислити рекурсивно визначений об'єкт
- *денотаційно*, тобто як рівняння, розв'язком якого є нерухомі точки (НТ) оператора φ

◉ *Метод послідовних наближень*

Береться початкове наближення d_0. Далі обчислюється послідовність наближень $d_1 = \varphi(d_0), d_0 = \varphi(d_1), \ldots$

За результат береться границя обчисленої послідовності: $d = \lim\limits_{i \epsilon \omega} d_i$

◉ *Множина $D -$ ω-область (індуктивна множина, ω-домен)*, якщо

- на D введено частковий порядок ≤
- в D існує найменший елемент ⊥
- D є повною ЧВМ

◉ Відображення φ: D → D, задане на ЧВМ (D, ≤), – *неперервне за Гейне*, якщо ∀ ланцюга $\{d_i\}_{i \epsilon \omega}$ з D виконується рівність

$$\varphi\left(\coprod_{i \epsilon \omega} d_i\right) = \coprod_{i \epsilon \omega} \varphi(d_i)$$

◉ Відображення φ: D → D – монотонне, якщо $\forall d_0, d_1 \epsilon D: d_0 \leq d_1 \Rightarrow \varphi(d_0) \leq \varphi(d_1)$

∆ Лема 1

Нехай $(D, \leq)$ – ЧВМ та φ: D → D – неперервне відображення. Тоді φ – *монотонне*

▲ Теорема Кнастера-Тарського-Кліні

Нехай $D - \omega$-*область*, φ: D → D – неперервне відображення, задане на цій області. Тоді існує найменша нерухома точка φ, яка позначається $lfp\varphi$ та для якої справедлива наступна формула:

$$lfp\varphi = \coprod_{i\epsilon\omega} \varphi^{(i)}(\perp)$$

де $\varphi^{(i)}(\perp) = \perp, \varphi^{(i+1)}(\perp) = \varphi\left(\varphi^{(i)}(\perp)\right), i\epsilon\omega$

Ця теорема стверджує наявність найменшого розв'язку рекурсивного рівняння, який може бути знайдений методом послідовних наближень.

Операцію взяття найменшої нерухомої точки (ННТ) можна трактувати як оператор lfp: $[D \overset{C}{\to} D] \to D$, де $[D \overset{C}{\to} D]$ - множина неперервних відображень із D в D.

△ Монотонність lfp

Відображення lfp: $[D \overset{C}{\to} D] \to D$ монотонне, тобто $\forall g, h \,\epsilon \left[D \overset{C}{\to} D\right] g \;\leq_F h \Longrightarrow lfp(g) \leq_D lpf(h)$

▲ Неперервність lfp

Якщо $D - \omega$-*область*, то відображення lfp на ній – неперервне, тобто $lfp \,\epsilon\, [[D \overset{C}{\to} D] \overset{C}{\to} D]$.

Література, використана в теоретичній частині: **М. С. Нікітченко. Теорія програмування. Частина 1**.