Знайти наближене значення $y(2)$ модифікованим методом Ейлера, крок 1

$$y''' + x(y'')^2 - y^2x^3 - 2 = 0$$

$$y(1) = 2; \quad y'(1) = 3; \quad y''(1) = -1$$

Введемо заміну, щоб диф. р-ння було першого порядку

$u_1 = y$

$u_2 = y'$ $\qquad\qquad u_1' = u_2$

$u_3 = y''$, $\quad x_0 = 1$ $\qquad u_2' = u_3$

Перепишемо:

$$\begin{cases} u_3' + x u_3^2 - u_1^2 x^3 - 2 = 0 \\ u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_1 = y \\ u_1(x_0) = 2 \\ u_2(x_0) = 3 \\ u_3(x_0) = -1 \end{cases}$$

$x_1 = 2$

$u_1(x_1)$ – ?

Модифікований метод Ейлера

$x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + h/2$

$y_{n+1/2} = y_n + h/2\ f(x_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + h\ f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$

$u_1(x_1) - ?$

$x_{0,5} = x_0 + h/2 = 1 + 1/2 = 1,5$

$u_1(x_{0,5}) = u_1(x_0) + h/2\ u_2(x_0) =$

$= 2 + 1/2 \cdot 3 = 3,5$

$u_2(x_{0,5}) = u_2(x_0) + h/2\,(u_3(x_0)) =$

$= 3 + 1/2 \cdot (-1) = 3 - 0,5 = 2,5$

$u_1(x_1) = u_1(x_0) + h \cdot u_2(x_{0,5}) =$

$= 2 + 1 \cdot 2,5 = 4,5 = y(2)$

Відповідь: $y(2) = 4,5$

Знайти перше наближення розв'язку методом Пікара

$$y'' - y' \ln(x) + x^2 y = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 2$$

Так як метод Пікара використовується для диф. рівнянь першого порядку, введемо заміну

$U_1 = y \quad U_2 = y'$

$$\begin{cases} U_2' - U_2 \ln(x) + x^2 U_1 = 0 \\ U_1' = U_2 \\ U_1(0) = 1 \\ U_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_2' = -x^2 U_1 + U_2 \ln(x) \\ U_1' = U_2 \\ U_1(0) = 1 \\ U_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$u_2^{(1)}(x) = u_2^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, u_1^{(0)}, u_2^{(0)})dx =$$

$$= 0 + \int_0^x (-x^2 u_1^{(0)} + u_2^{(0)} \ln(x))dx =$$

$$= \int_0^x (-x^2 \cdot 1 + 0 \cdot \ln(x))dx =$$

$$= \int_0^x -x^2 dx = -\frac{x^3}{3}$$

$$u_2^{(1)}(x) = (u_1')^{(1)}(x) = \boxed{-\frac{x^3}{3} = y'}$$

$$y = -\int \frac{x^3}{3} = -\frac{x^4}{12}$$

Відповідь: $y_1(x) = -\frac{x^4}{12}$

Покласти крок рівним 1 та за допомогою скінченно-різницевого методу звести до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна буде розв'язати прогонкою

$$y'' - 4y'x = 0$$

$$y(0) = -1$$

$$y'(2) - y(2) = 1$$

$[a, b] = [0, 2]$ $\quad x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

0) $y_0 = 1$; $y_1 = ?$

i) $y'(x_i) = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Використаємо р-ння:

$$\begin{cases} \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{1^2} - 4 \cdot \dfrac{y_2 - y_1}{1} \cdot \overset{1}{x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{y_2 - y_1}{1} - y_2 = 1 \qquad \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} \\[2ex] y_0 = -1 \end{cases}$$

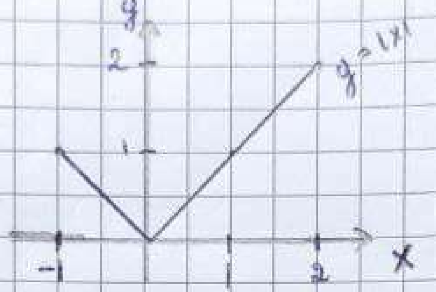
$$\begin{cases} y_2 - 2y_1 + y_0 - 4y_2 + 4y_1 = 0 \\ -y_1 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 + 2y_1 - 3y_2 = 0 \\ y_1 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \text{Відповідь}$$

Побудувати багаточлен найкращого рівномірного наближення 1-го степеня для функції $|x|$ на проміжку $[-1;\ 2]$. Знайти відхилення та точки чебишевського альтернансу.



$[a, b] = [-1, 2]$

Дві точки чебишевського альтернансу: 2 і 0

$\sup[a,b]$ $\inf[a,b]$

Неперервна, випукла на $[a, b]$ функція $f(x)$ наближається многочленом 1-го степеня $Q_1(x) = a_0 + a_1 x$

За теоремою Чебишева:

$$f(a) - (a_0 + a_1 a) = L \Delta f$$

$$f(d) - (a_0 + a_1 d) = -L \Delta f$$

$$f(b) - (a_0 + a_1 b) = L \Delta f$$

Маємо:

Точки a і b утворюють $y = x$, третю точкою d візьмемо точку найдальшу від $y=x$, а саме -1

$f(2) - a_0 - a_1 \cdot 2 = \lambda \Delta f$

$f(-1) - a_0 - a_1 \cdot (-1) = \lambda \Delta f$

$f(0) - a_0 - a_1 \cdot 0 = -\lambda \Delta f$

$$\begin{cases} 2 - a_0 - 2a_1 = \lambda \Delta f \\ 1 - a_0 + a_1 = \lambda \Delta f \\ -a_0 = -\lambda \Delta f \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - a_0 - 2a_1 = a_0 \\ 1 - a_0 + a_1 = a_0 \end{cases} \quad \begin{cases} -a_0 - a_1 = -1 \\ -2a_0 + a_1 = -1 \end{cases}$$

$-3a_0 = -2 \quad a_0 = 2/3 \Rightarrow a_1 = 1/3$

Тоді: $Q_1^0 = 1/3\, x + 2/3$

Відхилення: $\Delta f = \max\limits_{x \in [-1;2]} \left(|x| - x/3 - 2/3 \right) =$

$= \frac{2}{3}$