Oefening 1

Welk van onderstaande verzamelingen is gelijk aan de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)^{46}(x-2)^{27}(x-3)^2(x-4) < 0\}$?

(A) $]1,2[\cup]2,3[\cup]3,4[$ (B) $]1,2[\cup]3,4[$ (C) $]2,3[\cup]3,4[$ (D) $]2,4[$

Oplossing: C

juist beantwoord: 58 %

0 voor $x = 1$ 0 voor $x = 3$

$$(x-1)^{46} \cdot (x-2)^{27} \cdot (x-3)^{2} \cdot (x-4) < 0$$

→ even macht → altijd +

$$(x-2)^{27} < 0 \iff (x-2) < 0$$

	1	2	3	4	5
$x-2$	−	0	+	+	+
$x-4$	−	−	−	0	+
	+	0	−	0	+

\+ − +

$]2,3[\;\cup\;]3,4[$

C

Oefening 2

Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\ln(x^2)}$.

(A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

Oplossing: B
juist beantwoord: 70 %

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\ln(x^2)} \overset{\substack{\wedge \\ H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2x \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} x \cdot e^x$$

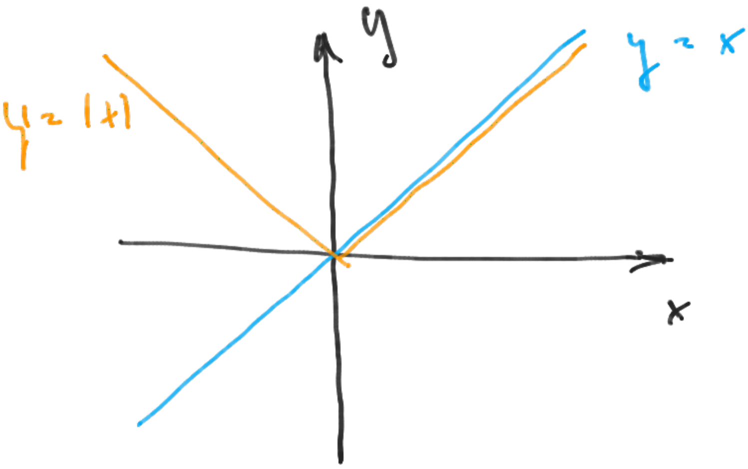
$$= 0$$

B

Oefening 3
Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = x \cdot |x|$. Bepaal $f'(-1)$.

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

Oplossing: D
juist beantwoord: 74 %



voor $x > 0 \Rightarrow f(x) = x^2$

$x < 0 \Rightarrow f(x) = -x^2 \quad (x.(-x))$

$f'(x) = (-x^2) = -2x \Rightarrow x < 0$

$f'(-1) = -2(-1) = 2$

D

Oefening 4

Bereken $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

Oplossing: C
juist beantwoord: 60 %

$$\int x e^{-x^2} dx \Rightarrow \quad u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2} = x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}(-e^{u}) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} = \frac{-1}{2e^{x^2}}$$

$$\frac{-1}{2e^{x^2}} \Bigg|_0^{\sqrt{\ln 2}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^{(\sqrt{\ln 2})^2}} - \frac{1}{1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

C

Oefening 5

Voor welke waarde van de parameter $a \in \mathbb{R}_0^+$ is de oppervlakte van het gebied dat begrensd wordt door de x–as en de parabool met vergelijking $y = -ax^2 + 2ax$ gelijk aan $\frac{3}{4}$?

(A) voor geen enkele a

(B) voor $a = \frac{9}{16}$

(C) voor $a = 1$

(D) voor $a = \frac{25}{12}$

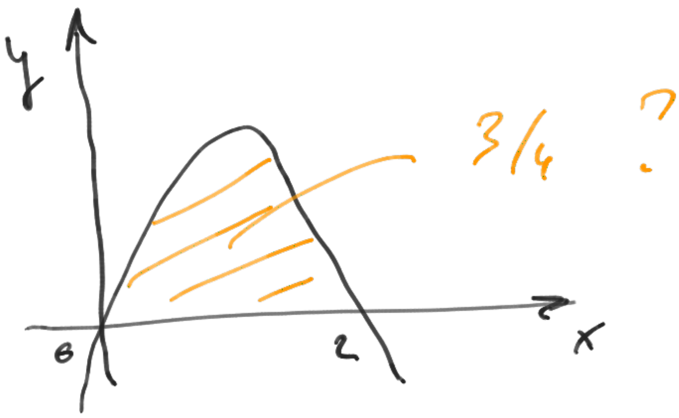
Oplossing: B
juist beantwoord: 78 %

Nulpunten:

$-ax^2 + 2ax = 0$

$ax(-x+2) = 0$

$\hookrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x+2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$



$$\int_0^2 (-ax^2 + 2ax)\,dx$$

$$= \left[-a\frac{x^3}{3} + 2a\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -a\frac{8}{3} + 2a\frac{4}{2}$$

$$= -\frac{8}{3}a + 4a = \left(-\frac{8}{3} + \frac{12}{3}\right)a = \frac{4}{3}a$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}a = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}} \quad (B)$$

Oefening 6

In de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel xyz beschouwen we het vlak v met vergelijking $3x+2y+z=0$. Welk van onderstaande vergelijkingen is een vergelijking van een vlak dat loodrecht staat op het vlak v?

(A) $2x-3y=0$ (B) $2x+3y=0$ (C) $2x-3y-z=0$ (D) $2x+3y-z=0$

Oplossing: A juist beantwoord: 76 %

Normaalvector v : $n = (3, 2, 1)$

vlakken $\perp$ $\Rightarrow$ inproduct normaalvectoren $= 0$

A: $n_A = (2, -3, 0)$

$\Rightarrow 2.3 + 2(-3) + 1.0 = 0$ ✓ A

B: $n_B = (2, 3, 0)$

$2.3 + 2.3 + 1.0 \neq 0$ ✗

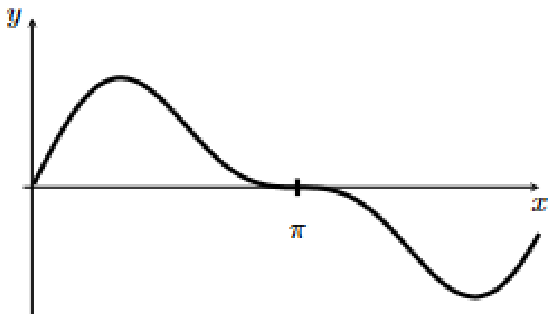
C: $n_C = (2, -3, -1)$

$2.3 + 2(-3) + 1(-1) \neq 0$ ✗

D: $n_D = (2, 3, -1)$

$2.3 + 3.2 + 1(-1) \neq 0$ ✗

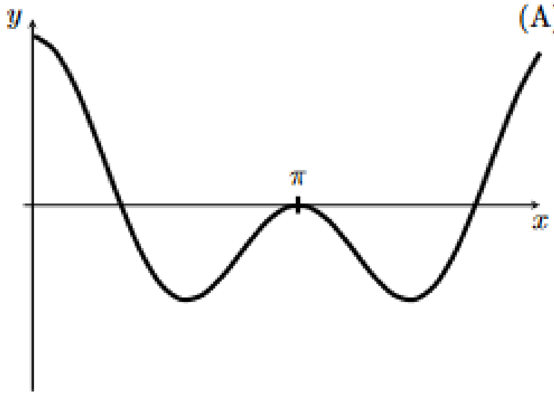
Oefening 7
Gegeven is de grafiek van de **afgeleide functie** f' van een functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ met $f(\pi) = 0$.



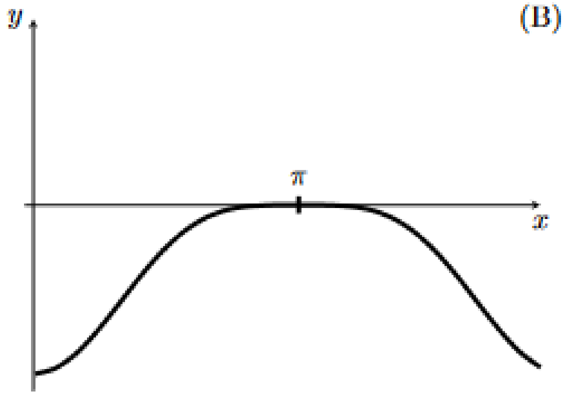
$f'(x) = 0 \to$ min of max

Eén van onderstaande grafieken is de grafiek van de functie f. Welke grafiek is dat?

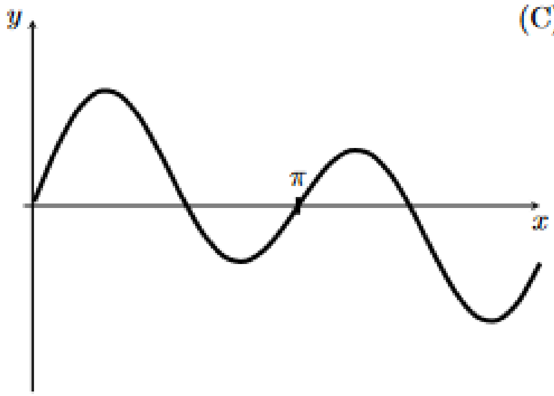
(A)



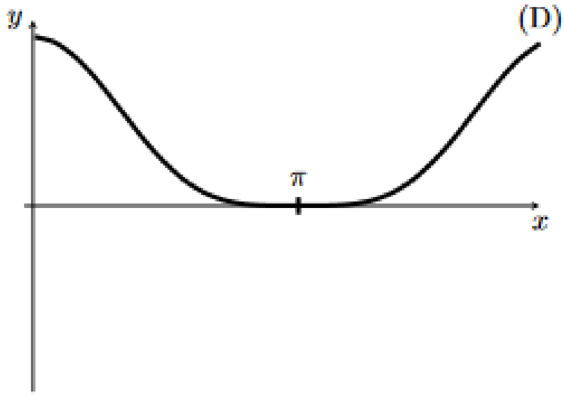
(B)



(C)



(D)



Oplossing: B
juist beantwoord: 78 %

x	0		π	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	min / max	$\nearrow$	min / max	$\searrow$

B

Oefening 8

Voor elke waarde van $\lambda \in \mathbb{R}$ zijn twee vectoren in $\mathbb{R}^3$ gegeven: $\vec{a}_\lambda(1, -2, \lambda)$ en $\vec{b}_\lambda\left(\frac{2\lambda}{3}, -4, 6\right)$. Voor $\lambda = \lambda_1$ zijn de vectoren $\vec{a}_{\lambda_1}$ en $\vec{b}_{\lambda_1}$ evenwijdig, terwijl voor $\lambda = \lambda_2$ de vectoren $\vec{a}_{\lambda_2}$ en $\vec{b}_{\lambda_2}$ loodrecht op elkaar staan. Waaraan is $\lambda_1 + \lambda_2$ gelijk?

(A) $\frac{13}{9}$ (B) $\frac{11}{7}$ (C) $\frac{9}{5}$ (D) $\frac{7}{3}$

Oplossing: C
juist beantwoord: 82 %

λ_1 = evenwijdig ⇒ veelvoud

$1 \to \frac{2}{3}\lambda_1$ | | $1 \to 2$

$-2 \to -4$ | $\times 2$ | $-2 \to -4$

$\lambda_1 \to 6$ | $\Rightarrow \lambda_1 = 3$ | $3 \to 6$

λ_2 = loodrecht ⇒ inproduct = 0

$$x_1 . x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

$$1 . \frac{2}{3}\lambda_2 + (-2)(-4) + \lambda_2 . 6 = 0$$

$$\left(\frac{2}{3} + 6\right)\lambda_2 + 8 = 0$$

$$\frac{20}{3}\lambda_2 = -8 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-24}{20} = -\frac{6}{5}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3 - \frac{6}{5} = \frac{15}{5} - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$$

C

Oefening 9

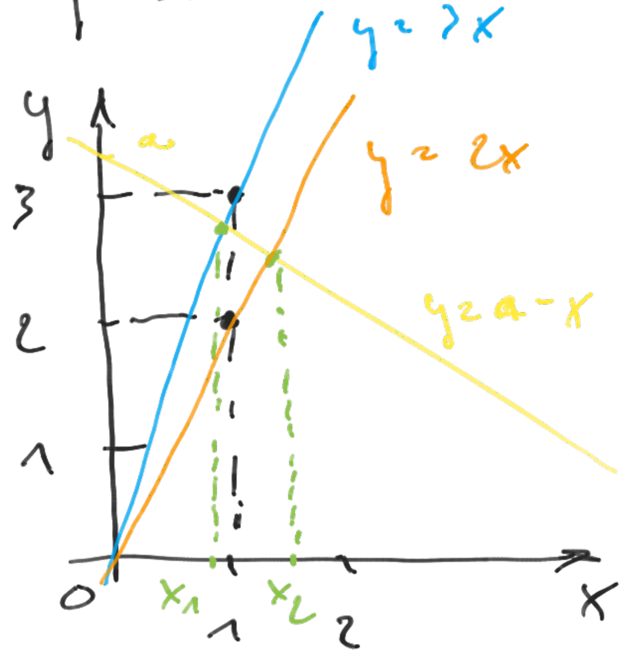
In het vlak met cartesiaans assenstelsel xy beschouwen we het gebied begrensd door de rechten met vergelijkingen $y = 2x$, $y = 3x$ en $x + y = a$, met het getal a een strikt positief reëel getal. Bepaal de oppervlakte van dit gebied.

(A) $\frac{a}{12}$ (B) $\frac{a}{9}$ (C) $\frac{a^2}{24}$ (D) $\frac{a^2}{12}$

Oplossing: C
juist beantwoord: 60 %

$y = 2x$ $\quad y = a - x$ met $a > 0$

$y = 3x$



$x_1 \Rightarrow$ $\quad 3x = a - x$

$4x = a$

$x = \frac{a}{4}$

$x_2 \Rightarrow$ $\quad 2x = a - x$

$3x = a$

$x = \frac{a}{3}$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} b . h = \frac{1}{2} a (x_1) = \frac{1}{2} a . \frac{a}{4} = \frac{a^2}{8}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} b . h = \frac{1}{2} a (x_2) = \frac{1}{2} a . \frac{a}{3} = \frac{a^2}{6}$$

$$A = \Delta_2 - \Delta_1 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12}\right) = \frac{a^2}{2} . \frac{1}{12}$$

$$= \frac{a^2}{24}$$

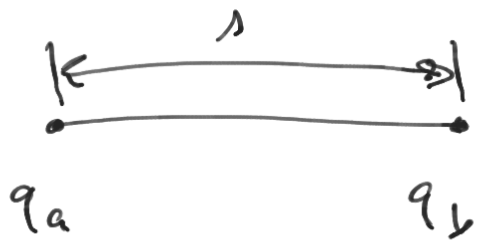
C

Oefening 10

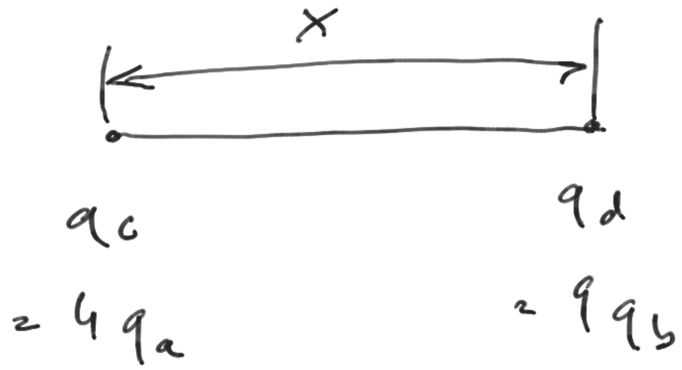
De Coulombkracht tussen twee puntladingen q_1 en q_2 op een afstand r van elkaar is gegeven door $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$, met k een constante. We beschouwen nu vier puntladingen q_a, q_b, $q_c = 4q_a$ en $q_d = 9q_b$, waarbij q_a en q_b op een afstand s van mekaar staan. Op welke afstand moeten we de ladingen q_c en q_d van elkaar zetten opdat ze dezelfde onderlinge Coulombkracht zouden ondervinden als q_a en q_b ?

(A) $6s$ (B) $13s$ (C) $36s$ (D) $1296s$

Oplossing: A
juist beantwoord: 85 %



$$F_1 = k \cdot \frac{q_a q_b}{s^2}$$



$$F_2 = k \cdot \frac{4q_a \cdot 9q_b}{x^2}$$

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \cancel{k}\frac{\cancel{q_a}\cancel{q_b}}{s^2} = \cancel{k}\frac{4\cancel{q_a}\,9\cancel{q_b}}{x^2}$$

$$\frac{1}{s^2} = \frac{36}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 36s^2$$

$$\boxed{x = \sqrt{36s^2} = 6s}$$

A

Oefening 11
Hoeveel oplossingen heeft volgende vergelijking in $x \in [0, \pi]$?

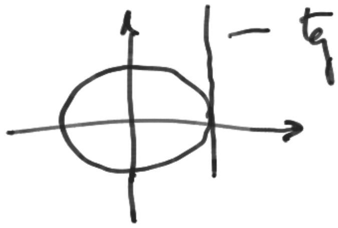
$$(\sin x - 2024 \cos x)\ \ln\left(x^2 - 6x + \frac{19}{2}\right) = 0$$

(A) precies één (B) precies twee (C) precies drie (D) precies vier

Oplossing: B
juist beantwoord: 43 %

$\sin x - 2024 \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 2024 \cos x$

$\Rightarrow \operatorname{tg} x = 2024$



$\operatorname{tg} x = 2024$

$\Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$

1 waarde!

$\ln\left(x^2 - 6x + \frac{19}{2}\right) = 0 \Rightarrow \ln(1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + \frac{19}{2} = 1 \Rightarrow x^2 - 6x + \frac{19}{2} - \frac{2}{2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x - \frac{17}{2} = 0$

$x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{6^2 - 4 . 1 . 17/2}}{2 . 1} = 3 \pm \dfrac{\sqrt{36 - 2 . 17}}{2}$

$= 3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $<$ $3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✗ $\rightarrow x > \pi$; $3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓ $\rightarrow x < \pi$

1 waarde

$\Rightarrow$ precies 2 waarden!

B

Oefening 12
De veelterm P is een veelterm van graad 3, waarover het volgende gegeven is:

- de hoogstegraadscoëfficiënt van P is 1;
- de afgeleide veelterm P' is deelbaar door $x-1$ en $x-2$;
- de veelterm P is deelbaar door $x-2$.

Bereken $P(0)$.

(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

Oplossing: A
juist beantwoord: 71 %

$\Rightarrow 1x^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow P'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

Deelbaar door $(x-1)$ en $(x-2)$

$\Rightarrow 3(x-1)(x-2) = P'(x)$

$3(x^2 - 2x - x + 2)$

$3x^2 - 9x + 6 = P'(x)$

$\Rightarrow 2b = -9 \Rightarrow b = -\frac{9}{2}$

$\Rightarrow c = 6$

$P(2) = 0 = 2^3 - \frac{9}{2}2^2 + 6.2 + d = 0$

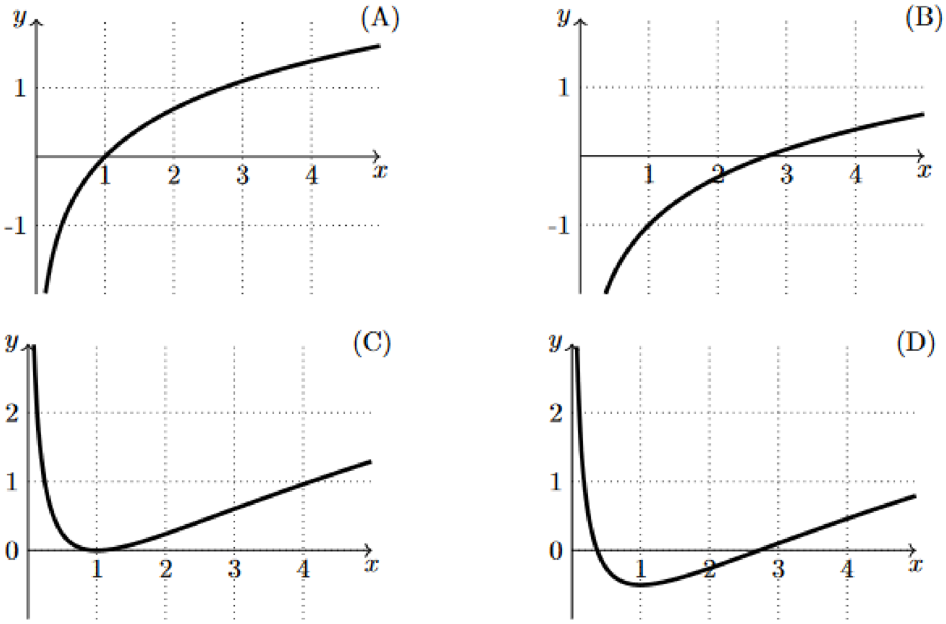
$8 - 18 + 12 + d = 2 + d = 0$

$\Rightarrow d = -2$

$P(0) = -2$ A

Oefening 13

Welke van onderstaande figuren kan de grafiek voorstellen van de functie $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = \int_e^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt$?



Oplossing: D

juist beantwoord: 55 %

$$u = \ln t \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow du = \frac{dt}{t}$$

$$\int u\, du = \frac{u^2}{2} = \frac{(\ln t)^2}{2}$$

$$\left.\frac{(\ln t)^2}{2}\right|_e^x = \frac{(\ln x)^2}{2} - \frac{(\ln(e))^2}{2}$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$A \to \ln x$

$C \to \frac{(\ln x)^2}{2} \longrightarrow D = \frac{(\ln x)^2}{2} - \frac{1}{2}$

D

Oefening 14
We beschouwen het stelsel in de onbekenden $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} 2z & + & iw & = & 1+3i \\ iz & + & w & = & 5i \end{cases}$$

Bepaal $|z+w|^2$.

(A) 9 (B) 20 (C) 25 (D) 26

Oplossing: C
juist beantwoord: 68 %

$$2z + iw = 1+3i$$
$$(iz + w = 5i) \times (-i)$$
$$3z + 0 = 6+3i \Rightarrow \boxed{z = 2+i}$$
$$i(2+i) + w = 5i$$
$$2i - 1 + w = 5i$$
$$\boxed{w = 1+3i}$$
$$z + w = 2+i+1+3i = 3+4i$$
$$|z+w| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$|z+w|^2 = 5^2 = 25$$

C

Oefening 15

Het complex getal $z = a + 2i$ heeft een reëel deel a dat voldoet aan $0 < a < 1$. Het getal z^3 kan geschreven worden als $z^3 = b + ci$ met $b, c \in \mathbb{R}$. Wat weet je over de tekens van b en c?

(A) $b > 0$ en $c > 0$ (B) $b < 0$ en $c > 0$ (C) $b < 0$ en $c < 0$ (D) $b > 0$ en $c < 0$

Oplossing: C
juist beantwoord: 68 %

$$z = a + 2i$$

$$z^3 = a^3 + 3a^2(2i) + 3a(2i)^2 + (2i)^3$$

$$= a^3 + 6a^2 i - 6a - 8i$$

$$= \underbrace{(a^3 - 6a)}_{<0} + \underbrace{(6a^2 - 8)}_{<0} i$$

b c

C

$(a+b)^3$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

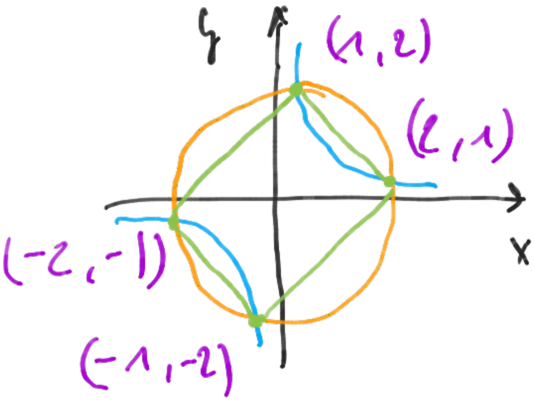
Oefening 16

In het vlak met cartesiaans assenstelsel xy beschouwen we de hyperbool met vergelijking $xy = 2$ en de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 5$. Deze krommen snijden elkaar in 4 punten. Bepaal de oppervlakte van de vierhoek bepaald door deze vier snijpunten.

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

Oplossing: B

juist beantwoord: 68 %



$$y = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{2^2}{x^2} = 5$$

$$\Rightarrow x^4 + 4 = 5x^2$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x \begin{cases} \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{cases} \Leftarrow$$

$$y \begin{cases} \pm \frac{2}{2} = \pm 1 \\ \pm \frac{2}{1} = \pm 2 \end{cases}$$

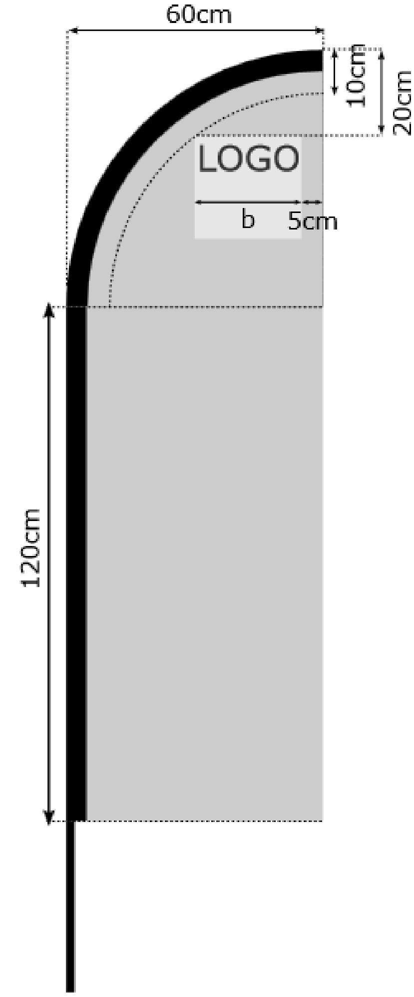
$$d[(-2,-1),(1,2)] = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$d((1,2),(2,1)] = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} . \sqrt{2} = 3.2 = 6$$

B

Oefening 17



We wensen een beachflag te ontwerpen zoals aangegeven op de figuur. De vlag is opgebouwd uit een rechthoek met breedte 60 cm en hoogte 120 cm, met daarboven een kwartcirkel met straal 60 cm. We wensen een rechthoekig logo te plaatsen op een afstand van 20 cm onder het bovenste punt, 10 cm van de cirkelrand, en 5 cm van de rechterrand. Wat is de breedte b van het logo?

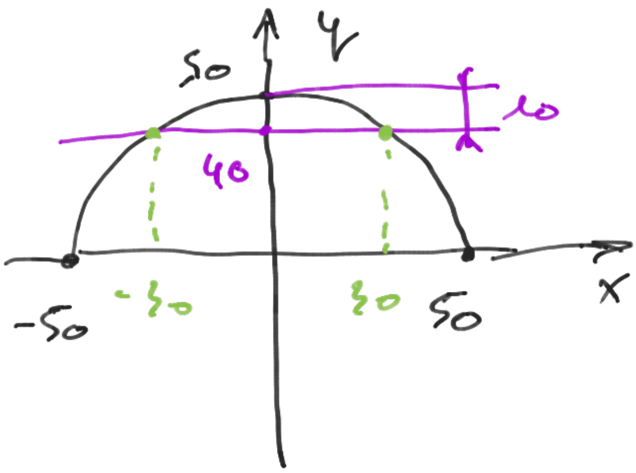
(A) $10\sqrt{5}$ cm

(B) 25 cm

(C) 8π cm

(D) $15\sqrt{3}$ cm

Oplossing: B
juist beantwoord: 59 %



$x^2 + y^2 = 50^2$

$y = 40$

$x^2 + 40^2 = 50^2$

$x^2 = 2500 - 1600 = 900$

$\Rightarrow x = \sqrt{900} = 30$

$\Rightarrow 30 - 5 = 25$ cm

B

Oefening 18
In het vlak met cartesiaans assenstelsel xy beschouwen we de parabool met als vergelijking $y = 4 - x^2$ met top in het punt A. We construeren nu een gelijkzijdige driehoek ABC waarbij ook de hoekpunten B en C op de parabool liggen. Wat is de vergelijking van de rechte BC?

(A) $y = 1$ (B) $y = \sqrt{2}$ (C) $y = \sqrt{3}$ (D) $y = 2$

Oplossing: A
juist beantwoord: 54 %

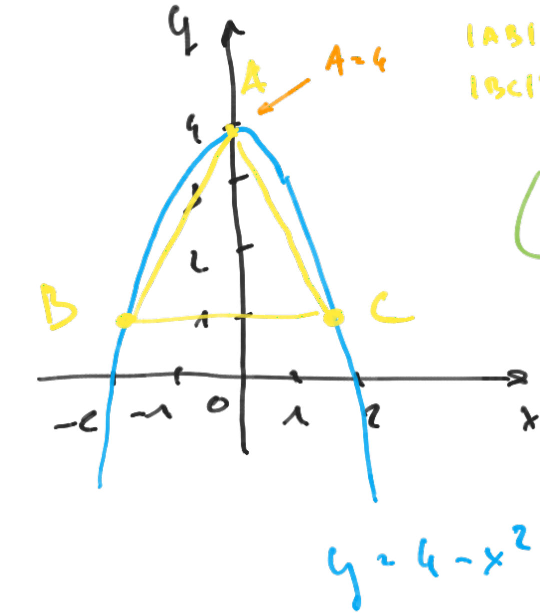
$y = 4 - x^2 \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$

$\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow A = 4$

$|AC| = |BC| = |AB|$

$|AC|^2 = (x_C - 0)^2 + (y_C - 4)^2$
$|AB|^2 = (x_B - 0)^2 + (y_C - 4)^2$
$|BC|^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2$

EN $x_B = -x_C$
$y_B = y_C$
$\hookrightarrow$ horizontale lijn



$\boxed{|BC| = x_C - x_B = x_C - (-x_C) = 2x_C}$

$|BC|^2 = |AC|^2 = 4x_C^2 = x_C^2 + (y_C - 4)^2$

$\Rightarrow 3x_C^2 = (y_C - 4)^2$

$\Rightarrow \pm\sqrt{3}\, x_C = y_C - 4 \quad \begin{cases} y = \sqrt{3}x + 4 \\ y = -\sqrt{3}x + 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \cancel{4} - x^2 = \sqrt{3}x + \cancel{4}$

$\Rightarrow x^2 + \sqrt{3}x = 0 \Rightarrow x(x + \sqrt{3}) = 0$

$\hookrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow y = 4 - x^2 = 4 - (\sqrt{3})^2 = 1$

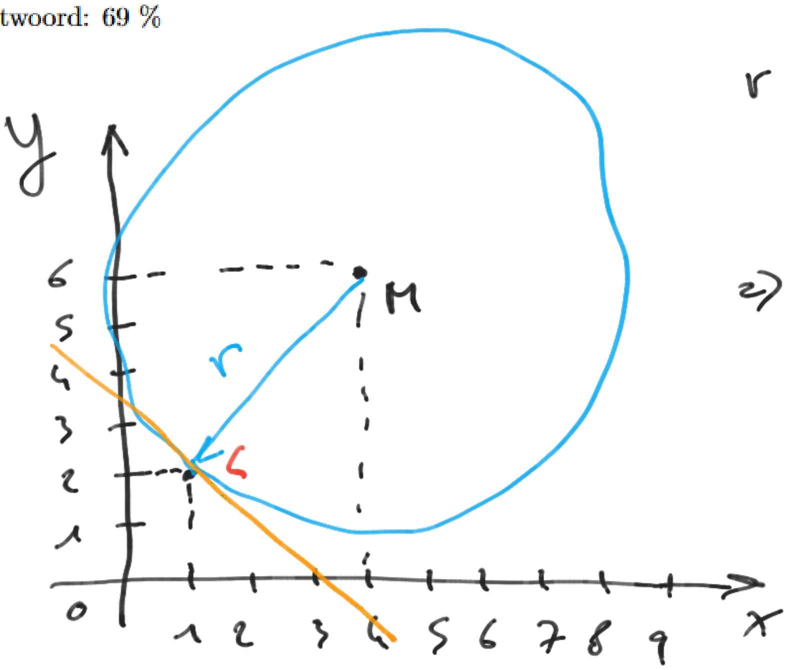
A

Oefening 19

In het vlak met cartesiaans assenstelsel xy beschouwen we de cirkel met middelpunt $M(4, 6)$ door het punt $P(1, 2)$. De rechte r is de raaklijn aan de cirkel in het punt P. Bepaal de x-coördinaat van het snijpunt van de rechte r met de x-as.

(A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{13}{5}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) $\frac{11}{3}$

Oplossing: D
juist beantwoord: 69 %



$$r^2 = (4-1)^2 + (6-2)^2$$
$$= 3^2 + 4^2 = 25$$
$$\Rightarrow r = 5$$

Straal : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$

raaklijn : $m_r = \frac{-1}{m} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$

$$y - y_0 = m_r (x - x_0)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 1) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 2 = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

D

$$\Rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{3}{4}x = \frac{11}{4} \Rightarrow x = \frac{11}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

Oefening 20

Een vaas bevat n gele en n blauwe ballen. Voor elk natuurlijk getal $n > 2$ definiëren we $P(n)$ als de kans om precies twee blauwe ballen te nemen als we vier ballen uit de vaas nemen zonder terugleggen. Wat is de waarde van de limiet $\lim_{n\to+\infty} P(n)$?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

Oplossing: C

juist beantwoord: 50 %

4 ballen uit $2n \Rightarrow C_{2n}^{4} = \dfrac{(2n)!}{(2n-4)!\,4!}$

$$\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!} = C_{2n}^{4}$$

2 ballen uit $n \Rightarrow C_{n}^{2} = \dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}$

$$\frac{n.(n-1)}{2} = C_n^2$$

2 gele en 2 blauwe $= C_n^2 . C_n^2 = \left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^2$

$$P(n) = \frac{\text{\# gunstige}}{\text{\# mogelijke}} = \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2}{\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}}$$

$$= \frac{n^2(n-1)^2}{4} \cdot \frac{4.3.2.1}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}$$

$$= 6\,\frac{n^2(n^2-2n+1)}{(4n^2-2n)(4n^2-3n-2n+6)}$$

$$= 6\,\frac{n^4-2n^3+n^2}{16n^4+\ldots}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \rightarrow$ delen door $n^4 \Rightarrow \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$ C

Oefening 21

Voor de stockage van chemische stoffen willen we een cilindervormig vat met een volume van 8π m^3 ontwerpen. Het materiaal voor de zijwanden kost 16000 €/m^2 en dat voor de bodem en het deksel 1000 €/m^2. We zoeken het cilindervormig vat met de kleinste materiaalkost. Welke van onderstaande uitspraken is dan geldig voor de oppervlakte A van de bodem?

(A) $A \leq 12\,\text{m}^2$ (B) $12\,\text{m}^2 \leq A < 25\,\text{m}^2$ (C) $25\,\text{m}^2 \leq A < 50\,\text{m}^2$ (D) $50\,\text{m}^2 \leq A$

Oplossing: D

juist beantwoord: 30 %

Kost zijwand → 16000 €/m²

Kost deksel / bodem → 1000 €/m²

↳ opp deksel en bodem zo groot mogelijk nemen

D: 50 m² ≤ A of A ≥ 50 m²

D

$V = 8\cancel{\pi} = \cancel{\pi} r^2 . h \Rightarrow \boxed{h = \frac{8}{r^2}}$

Kost zijwand: $2\pi r . h . 16000 = 2\pi r . \frac{8}{r^2} . 16000 = \frac{256000\,\pi}{r}$

Kost bodem + deksel: $2(\pi r^2) . 1000 = 2000\,\pi r^2$

Totaal: $\frac{256000\,\pi}{r} + 2000\,\pi r^2 = K$

Minimale K $\Rightarrow K' = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-256000\,\pi}{r^2} + 2 . 2000\,\pi r$

$\times r^2 \Rightarrow 0 = -256000\,\pi + 4000\,\pi r^3$

$\Rightarrow 4000\,\cancel{\pi} r^3 = 256000\,\cancel{\pi}$

$\Rightarrow r^3 = \frac{256000}{4000} = 64 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{64} = 4}$

$\boxed{A = \pi r^2 = \pi . 4^2 = 3{,}14 . 16 = 50{,}24\ \text{m}^2}$

D

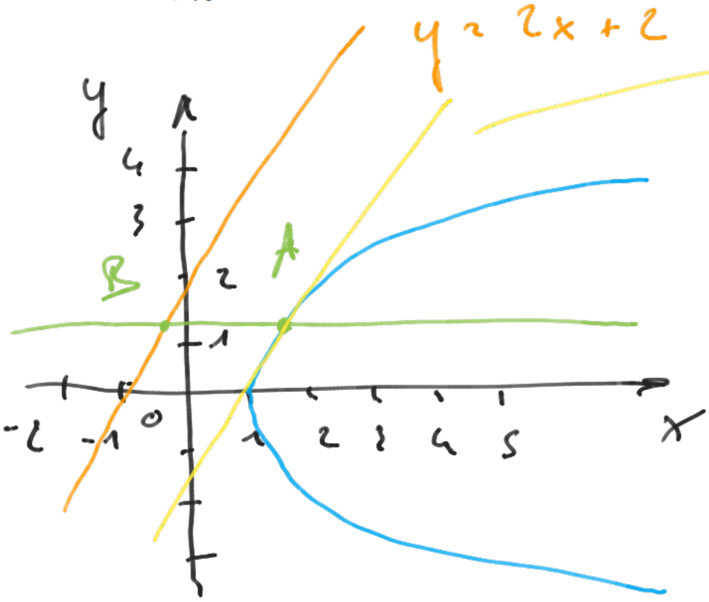
Oefening 22

In het vlak met cartesiaans assenstelsel xy beschouwen we de parabool met de vergelijking $x = y^2 + 1$ en de rechte met vergelijking $y = 2x + 2$. Een horizontale rechte snijdt de parabool in het punt A en de rechte in het punt B. Wat is de kleinst mogelijke waarde voor de lengte van het lijnstuk $[AB]$?

(A) $\frac{31}{16}$ (B) 2 (C) $\frac{33}{16}$ (D) $\frac{17}{8}$

Oplossing: A

juist beantwoord: 43 %



kortst mogelijk = raaklijn zelfde rico!

$x = y^2 + 1$

$y = \sqrt{x-1}$

$y' = \left((x-1)^{1/2}\right)'$

$= \frac{1}{2} \cdot (x-1)^{-1/2}$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 2$

$\Rightarrow (1)^2 = (4\sqrt{x-1})^2$

$1 = 16(x-1)$

$1 = 16x - 16$

$16x = 17$

$\boxed{x = \frac{17}{16}}$

$y = \sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{17}{16} - \frac{16}{16}}$

$\boxed{y = \frac{1}{4}}$

$\frac{1}{4} = 2x + 2$

$2x = \frac{1}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{7}{4}$

$\Rightarrow x = -\frac{7}{8} = -\frac{14}{16}$

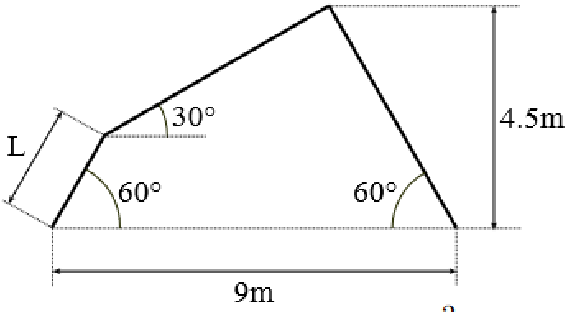
$AB = \frac{17}{16} - \left(-\frac{14}{16}\right)$

$= \frac{31}{16}$

A

Oefening 23

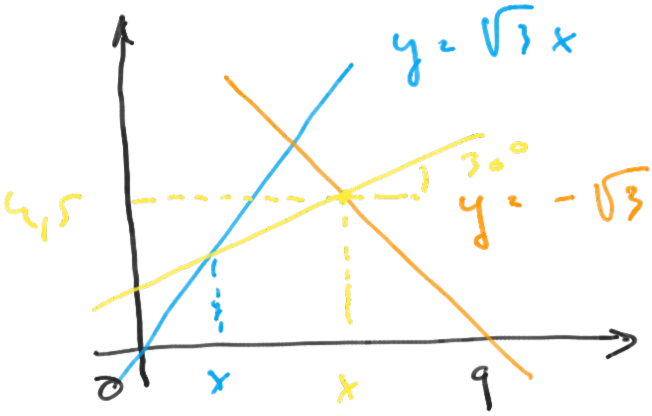
Een architect ontwerpt een dak voor een huis. De stedenbouwkundige voorschriften leggen vast dat het dak 4,5 meter hoog en 9 meter breed moet zijn. Onderstaande figuur toont een doorsnede van het dak, namelijk een zadeldak met een extra knik, waardoor drie dakvlakken ontstaan. Het eerste en derde dakvlak maken een hoek van 60° met de horizontale, het tweede dakvlak een hoek van 30°. Bepaal de lengte L van het eerste dakvlak.



$$\left.\begin{array}{l} tg\,60^\circ = \sqrt{3} \\ tg\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \text{rico}$$

(A) $3(2\sqrt{3}-3)$ m (B) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2)$ m (C) $\frac{2}{3}(\sqrt{3}-1)$ m (D) $\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$ m

Oplossing: A
juist beantwoord: 25 %



$$\frac{9}{2} = -\sqrt{3}x + 9\sqrt{3}$$

$$\frac{9}{2} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}x$$

$$x = 9 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$y - \frac{9}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - 9 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3} + 6$$

$$\sqrt{3}x = \frac{x}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3} + 6 \quad (\times\sqrt{3}) \Rightarrow 3x = x - 9 + 6\sqrt{3}$$

$$2x = -9 + 6\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{9}{2} + 3\sqrt{3}$$

$$L = \frac{x}{\cos 60^\circ} = \frac{x}{1/2} = 2x = -9 + 6\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3} - 9$$

$$= 3(2\sqrt{3} - 3)$$

A

Oefening 24

Rangschik volgende reële getallen van klein naar groot:

$$a = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \, \mathrm{d}x$$

$$b = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin\left(x^2\right) \, \mathrm{d}x$$

$$c = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) \, \mathrm{d}x$$

(A) $a = b < c$

(B) $a < b = c$

(C) $a = c < b$

(D) $b < a = c$

Oplossing: A

juist beantwoord: 40 %

a: Stel $u = x - \frac{1}{2} \Rightarrow du = dx$, $x = 0 \to u = -1/2$, $x = 1/2 \to u = 0$

$$\Rightarrow \int_{-1/2}^{0} \sin(u^2)\, du = \int_0^{1/2} \sin(u^2)\, du$$

wegens symmetrie

$\Rightarrow (x)^2 = (-x)^2$

c: Stel $v = x + \frac{1}{2} \Rightarrow dv = dx$, $x = 0 \to v = 1/2$, $x = 1/2 \to v = 1$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^{1} \sin(v^2)\, dv$$

Oppervlakte: $\sin(0 \to 1/2) < \sin(1/2 \to 1)$

$x^2 \to \sin(0 \to 1/4) < \sin(1/4 \to 1)$

$$\Rightarrow \text{opp}: \int_0^{1/2} \sin(x^2)\, dx < \int_{1/2}^{1} \sin(x^2)\, dx$$

$\Rightarrow a = b < c$ A

Oefening 25

Gegeven de driedimensionale ruimte met een cartesiaans assenstelsel xyz en het vlak α met vergelijking $x + 2y + 3z = 29$. Spiegel het punt $P(5, -2, 0)$ t.o.v. het vlak α. Wat is de x-coördinaat van het gespiegelde punt?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

Oplossing: D
juist beantwoord: 44 %

Projectie P op α = Q

Afstand tot het vlak : $D = \dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Normaal α = $n = (a, b, c)$

Q → verplaatsing vanaf P // D en = D

Eenheidsnormaal : $\hat{n} = \dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Verplaatsing = $v = D.\hat{n} = \dfrac{ax_1+by_1+cz_1-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot \dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$Q = P - v = \left(x_1 - \dfrac{a(ax_1+by_1+cz_1-d)}{a^2+b^2+c^2},\ y_1 - \dfrac{b(\ \ )}{a^2+b^2+c^2},\ z_1 - \dfrac{c(\ \ )}{a^2+b^2+c^2}\right)$

$ax_1 + by_1 + cz_1 - d = 1.5 + 2(-2) + 3.0 - 29 = -28$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

$Q = \left(5 - \dfrac{-28}{14},\ -2 - \dfrac{-28.2}{14},\ 0 - \dfrac{-28.3}{14}\right) = (7, 2, 6)$

Spiegeling ⇒ P'

P → Q

$\Delta x = Q_x - P_x = 7 - 5 = 2$

$\Delta y = Q_y - P_y = 2 - (-2) = 4$

$\Delta z = Q_z - P_z = 6 - 0 = 6$

Q → P'

$P'_x = Q_x + \Delta x = 7 + 2 = 9$

$P'_y = Q_y + \Delta y = 2 + 4 = 6$

$P'_z = Q_z + \Delta z = 6 + 6 = 12$

⇒ P' (9, 6, 12) D

Oefening 26

Hoeveel natuurlijke getallen groter dan 60 000 000 kan je vormen met de acht cijfers 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 7?

(A) 140 (B) 1120 (C) 5040 (D) 20 160

Oplossing: A

juist beantwoord: 51 %

$\underbrace{60\,000\,000}_{8 \text{ cijfers}}$ → eerste cijfer moet 7 zijn

1: $C_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!\,3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6}^{2} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$

$= 7 \cdot 5 = 35$

3: $C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 4$

2: 1

⇒ $35 \cdot 4 \cdot 1 = 140$ A

<u>Of</u>: $\frac{7!}{3!\,3!\,1!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 1}$

$= 7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$

Oefening 27
Gegeven is de vergelijking

$$(x-a)^2(x^2-b)=0$$

in de onbekende $x \in \mathbb{R}$ en met parameters $a, b \in \mathbb{R}$. Het aantal **verschillende** reële oplossingen van de vergelijking is afhankelijk van de waarden van a en b. Waaraan kan dit aantal **niet** gelijk zijn?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Oplossing: D
juist beantwoord: 64 %

$$x^2 - b = (x-\sqrt{b})(x+\sqrt{b})$$

$$\hookrightarrow x^2 - b = 0 \quad \begin{cases} x = -\sqrt{b} \\ x = +\sqrt{b} \end{cases}$$

$$(x-a)^2 = 0 \rightarrow x = a$$

Max 3 verschillende oplossinge

$\Rightarrow$ D

Oefening 28

Gegeven is de functie $f : [-3, +\infty[\to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = -3 + |x| \cdot \sqrt{x+3}$. De grafiek heeft naast het punt $P(-3, -3)$ nog twee andere snijpunten met de eerste bissectrice $y = x$. Wat is de som van de x-coördinaten van deze twee andere snijpunten?

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3

Oplossing: C
juist beantwoord: 52 %

Stel $\sqrt{x+3} = t \Rightarrow x = t^2 - 3$

$x < 0$:

$x = -3 - x\sqrt{x+3}$

$t^2 \cancel{-3} = \cancel{-3} - (t^2-3)\cdot t$

$t^2 = -t^3 + 3t$

$t^3 + t^2 - 3t = 0$

$t(t^2 + t - 3) = 0$

$t = 0 \Rightarrow x = -3$

$t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1(-3)}}{2\cdot 1}$

$t = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$t > 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$x = t^2 - 3 = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 3$

$= \dfrac{1}{4}(1 + 13 - 2\sqrt{13}) - 3$

$= \dfrac{14}{4} - \dfrac{\sqrt{13}}{2} - \dfrac{12}{4}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$x > 0$

$x = -3 + x\sqrt{x+3}$

$t^2 \cancel{-3} = \cancel{-3} + (t^2-3)\cdot t$

$t^2 = t^3 - 3t$

$t^3 - t^2 - 3t = 0$

$t(t^2 - t - 3) = 0$

$t = 0 \Rightarrow x = -3$

$t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1(-3)}}{2\cdot 1}$

$t = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$t > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$x = t^2 - 3 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 3$

$= \dfrac{1}{4}(1 + 13 + 2\sqrt{13}) - 3$

$= \dfrac{14}{4} + \dfrac{\sqrt{13}}{2} - \dfrac{12}{4}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{13}}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{13}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

C

Oefening 29

Alle leden van een supportersvereniging gingen naar minstens één van de drie wedstrijden kijken van hun ploeg. Vijf leden waren aanwezig bij de eerste wedstrijd, zes leden waren aanwezig bij de tweede wedstrijd en zeven leden waren aanwezig bij de derde wedstrijd. Uit hoeveel leden bestaat de supportersvereniging minimaal als je weet dat geen enkel lid bij juist twee wedstrijden aanwezig was?

(A) 7 (B) 8 (C) 12 (D) 18

→ of slechts 1, of alle 3

x

Oplossing: B
juist beantwoord: 78 %

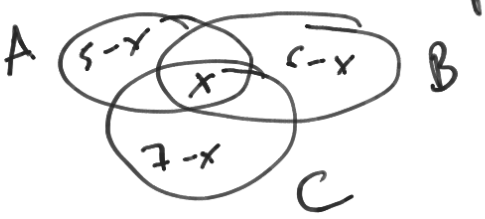
$A = 5, \quad B = 6, \quad C = 7$

Alleen wedstrijd

$1: \quad A - x = 5 - x = W_1$

$2: \quad B - x = 6 - x = W_2$

$3: \quad C - x = 7 - x = W_3$



Totaal leden $= A \cup B \cup C$

$= 5 - x + 6 - x + 7 - x + x$

$= 18 - 2x$

Minimaal ⇒ x kan niet groter zijn dan de kleinste set

$\Rightarrow x \leq 5 \quad (W_1)$

Stel $x = 5 \Rightarrow 18 - 2 \cdot 5 = 18 - 10 = 5$

$W_1 = 5 - 5 = 0$ leden

$W_2 = 6 - 5 = 1$ leden

$W_3 = 7 - 5 = 2$ leden

$x = 5$ leden

$1 + 2 + 5 = 8$ leden

B

Oefening 30

Gegeven zijn de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met als functievoorschrift $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3}x^2\right) + 3 - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ en een parabool met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$. De parameters $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$ zijn zo gekozen dat de parabool door de oorsprong gaat en bij $x = 1$ de grafiek van de functie f loodrecht snijdt. Bepaal $3a + 2b + c$.

(A) -5 (B) -3 (C) 3 (D) 5

$\Rightarrow x = 0, y = 0 \rightarrow \boxed{c = 0}$

Oplossing: D

juist beantwoord: 43 %

$$x = 1: \ f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3 - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} + 3 - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 3$$

$$\Rightarrow P(1, 3)$$

$\rightarrow$ raaklijnen ook $\perp$ op elkaar!

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2\pi}} \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}x^2\right)\right) \cdot \cancel{2}x \cdot \frac{\cancel{\pi}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} x \sin\left(\frac{\pi}{3}x^2\right)$$

$$f'(1) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{rico raaklijn } \perp = -\frac{1}{-1/2} = 2$$

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow a + b = 3 \quad (c = 0!)$$

$$(2a + b = 2 \mid - \quad (f'(1))$$

$$-a + 0 = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow -1 + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$3a + 2b + c = 3(-1) + 2 \cdot 4 + 0$$

$$= -3 + 8 + 0$$

$$= 5$$

D