Oefening 1

Welke van onderstaande uitspraken over de vergelijking $|x^2 - 4| = 3x$ in $x \in \mathbb{R}$ is geldig?

(A) De vergelijking $|x^2 - 4| = 3x$ in $x \in \mathbb{R}$ heeft juist twee oplossingen, die beide positief zijn.

(B) De vergelijking $|x^2 - 4| = 3x$ in $x \in \mathbb{R}$ heeft juist twee oplossingen, waarvan er slechts één positief is.

(C) De vergelijking $|x^2 - 4| = 3x$ in $x \in \mathbb{R}$ heeft juist vier oplossingen, die alle positief zijn.

(D) De vergelijking $|x^2 - 4| = 3x$ in $x \in \mathbb{R}$ heeft juist vier oplossingen, waarvan er juist twee positief zijn.

Oplossing: A

juist beantwoord: 41 %

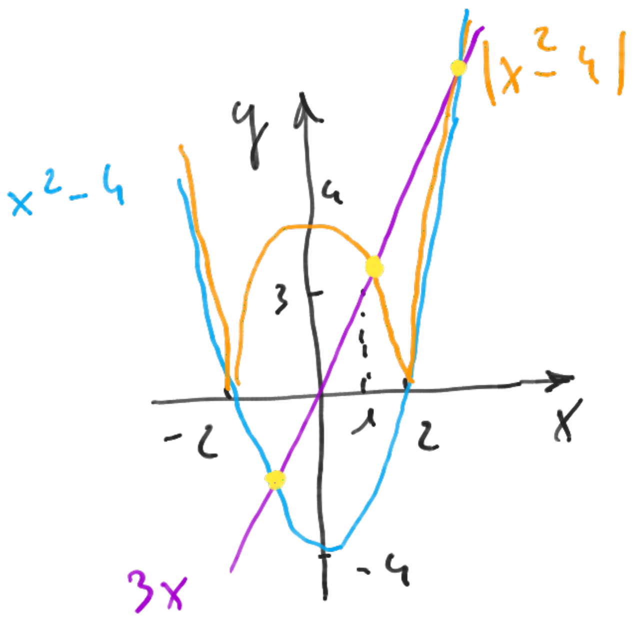
Enkel positieve x bekijken

$|x^2-4|$ altijd positief

$3x$ = rechte → max 2 snijpunten

$x^2-4 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x^2=4 \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$

$x=0 \Rightarrow y=-4$



$$x^2-4=3x$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot1(-4)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2} \begin{cases} 8/2=4 \\ -2/2=-1 \end{cases}$$

x = +1 wegens symmetrie!

$x=4: \; |4^2-4| = 3\cdot4 \Rightarrow 12=12$

$x=1: \; |1-4| = 3\cdot1 \Rightarrow 3=3$

Oefening 2

Gegeven is de functie $f :]2, +\infty[\to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = \dfrac{4x+1}{x-2}$. Verder is a het getal waarvoor $f'(a) = -1$. Bepaal $f(a)$.

(A) 1 (B) 5 (C) 7 (D) 13

Oplossing: C

juist beantwoord: 58 %

$$f'(x) = \frac{4(x-2)-(4x+1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{4x-8-4x-1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-9}{(x-2)^2}$$

$$f'(a) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{-9}{(a-2)^2}$$

$$-[a^2-4a+4] = -9$$

$$-a^2+4a+5 = 0$$

$$a^2-4a-5 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1}$$

$$= 2 \pm \sqrt{\frac{16+20}{4}} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3$$

$$\Rightarrow a = 2+3 = 5$$

$$f(5) = \frac{4\cdot 5+1}{5-2} = \frac{21}{3} = \boxed{7}$$

Oefening 3

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = e^{x^2-1}$. Bepaal $f''(1)$, d.w.z. de tweede afgeleide van de functie f in 1.

(A) 1 (B) 2 (C) 4 ✓ (D) 6

Oplossing: D

juist beantwoord: 72 %

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$f(x) = e^{x^2-1} = e^u$$

$$f'(x) = e^u \cdot 2x = e^{x^2-1} \cdot 2x$$

$$f''(x) = (e^u \cdot 2x)\, 2x + e^{x^2-1} \cdot 2$$

$$= e^{x^2-1} \cdot 4x^2 + e^{x^2-1} \cdot 2$$

$$= e^{x^2-1}(4x^2+2)$$

$$f''(1) = e^{1-1}(4 \cdot 1 + 2) = \boxed{6}$$

Oefening 4

Bepaal volgende limiet: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)}$.

(A) 0 ✓ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $+\infty$

Oplossing: B

juist beantwoord: 60 %

$$\ln \sqrt{x} = \ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1/2\, \cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}} = \frac{1}{2}$$

Oefening 5

Bepaal $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+4\sin x}\,dx$.

(A) $\frac{\ln 3}{4}$ (B) $\frac{\ln 4}{4}$ (C) $\frac{\ln 6}{4}$ (D) $\ln 6$

Oplossing: A
juist beantwoord: 70 %

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \Rightarrow d(\sin x) = \cos x\, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{2+4\sin x} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{d(2+4\sin x)}{2+4\sin x}$$

$$= \frac{1}{4} \ln(2+4\sin x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(2+4.1) - \ln(2+0)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(6) - \ln(2)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln \frac{6}{2}\right]$$

$$= \frac{\ln 3}{4}$$

Oefening 6
Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Wat kan je besluiten over A^{2024}?

(A) De matrix A^{2024} is gelijk aan de nulmatrix.

(B) De matrix A^{2024} is gelijk aan de eenheidsmatrix.

(C) De matrix A^{2024} is gelijk aan de matrix A.

✓ (D) De matrix A^{2024} is gelijk aan de matrix A^2.

1 rij opgeschoven

Oplossing: D
juist beantwoord: 32 %

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

=

cyclisch

$$\Rightarrow A^3 = I$$

↳ iedere 3e macht zal I opleveren!

$$\frac{2024}{3} = 674 \text{, rest } 2$$

$$\Rightarrow A^{2024} = A^2$$

Oefening 7

Er is gegeven dat $\sin x = \frac{1}{4}$ met $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ en $\sin y = -\frac{1}{3}$ met $-\frac{\pi}{2} < y < 0$. Waaraan is $\sin(x+y)$ dan gelijk? Alle hoeken worden uitgedrukt in radialen.

(A) $\frac{-\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$ (C) $\frac{-\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}$ (D) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}$

Oplossing: D

juist beantwoord: 39 %

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin y = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

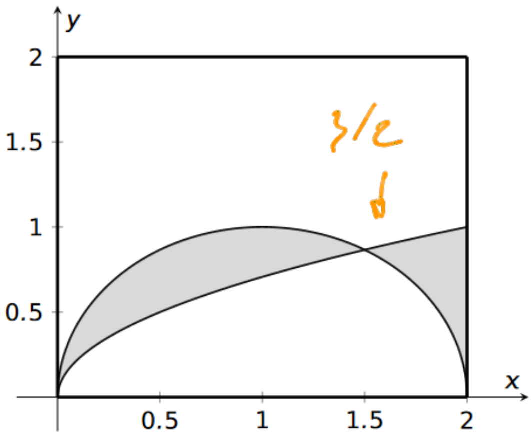
$$\cos y = +\frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\sin(x+y) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3} + \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}$$

Oefening 8

De onderstaande figuur toont een halve cirkel met straal 1, de grafiek van de functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ en een vierkant waarvan de zijde lengte 2 heeft. Welke van de volgende uitdrukkingen is gelijk aan de oppervlakte van het grijze gebied?



(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1-(x-1)^2}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx - \int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(\sqrt{1-(x-1)^2}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx$

(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}\left(1-\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx - \int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(1-\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx$

(C) $\displaystyle\int_0^{2}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx - \int_0^{2}\sqrt{\frac{x}{2}}\,dx$

(D) $\displaystyle\int_0^{2}\left(1-\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2}\sqrt{\frac{x}{2}}\,dx$

Oplossing: A

juist beantwoord: 72 %

cirkel : $(x-1)^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-(x-1)^2}$

snijpunt : $\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{1-(x-1)^2}\right)^2$

$\frac{x}{2} = 1-(x-1)^2 \Rightarrow x = 2 - 2x^2 + 4x - 2$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x = 0$

$x(2x-3) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ 2x-3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$

* 0 - 3/2

opp 0 - opp

$\displaystyle\int_0^{3/2}\left(\sqrt{1-(x^2-1)} - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx$

* 3/2 - 2

opp - opp 0 $\Rightarrow \displaystyle\int_{3/2}^{2}\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{1-(x^2-1)}\right)dx$

$= -\displaystyle\int_{3/2}^{2}\left(\sqrt{1-(x^2-1)} - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx$

Oefening 9

Voor welke waarde(n) van de parameter $h \in \mathbb{R}$ heeft deze matrixvergelijking in $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ precies één oplossing?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \\ 3h \end{pmatrix}$$

(A) voor geen enkele waarde van de parameter $h \in \mathbb{R}$

(B) enkel voor $h = 0$

(C) enkel voor $h = 4$

✓ (D) voor alle $h \neq 4$

Oplossing: D
juist beantwoord: 39 %

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$

$0 + x_2 + 2x_3 = -2$

$2x_1 + 3x_2 + hx_3 = 3h$

$+$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$

$12 = 3 \cdot 4$

$\Rightarrow h = 4$

Slechts 2 onafhankelijke vergelijkingen en 3 onbekenden $\Rightarrow \infty$ veel oplossingen

$\Rightarrow h \neq 4 \rightarrow$ 3 vgl^n – 3 onb.

$\Rightarrow$ 1 oplossing

Oefening 10

We beschikken over twee dozen van een zadenmengeling van twee soorten zaden. De verhouding in aantal zaden van de eerste soort ten opzichte van de tweede soort is in de eerste doos $\frac{4}{3}$. De verhouding in de tweede doos is $\frac{2}{5}$. De tweede doos bevat twee keer zoveel zaden als de eerste doos. Alle zaden van de eerste doos worden nu samengevoegd met alle zaden van de tweede doos. Wat is de verhouding van het aantal zaden van de eerste soort ten opzichte van de tweede soort in deze nieuwe mengeling?

✓ (A) $\frac{8}{13}$ (B) $\frac{32}{45}$ (C) $\frac{26}{15}$ (D) $\frac{32}{15}$

Oplossing: A
juist beantwoord: 58 %

Zaden A en B in doos 1, 2A en 2B in 2

D_1 : $\frac{A}{B} = \frac{4}{3}$ D_2 : $\frac{2A}{2B} = \frac{2}{5}$

$3A = 4B$ $10A = 4B$

$D_1 + D_2 \rightarrow 13A = 8B$

$\Rightarrow \boxed{\frac{A}{B} = \frac{8}{13}}$

Oefening 11

Voor welke waarden van de parameter $a \in \mathbb{R}$ geldt de ongelijkheid $x^2 + 8x > a(x-1)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$?

(A) $a < 4$ (B) $4 < a < 16$ (C) $16 < a$ (D) $a = 4$ en $a = 16$

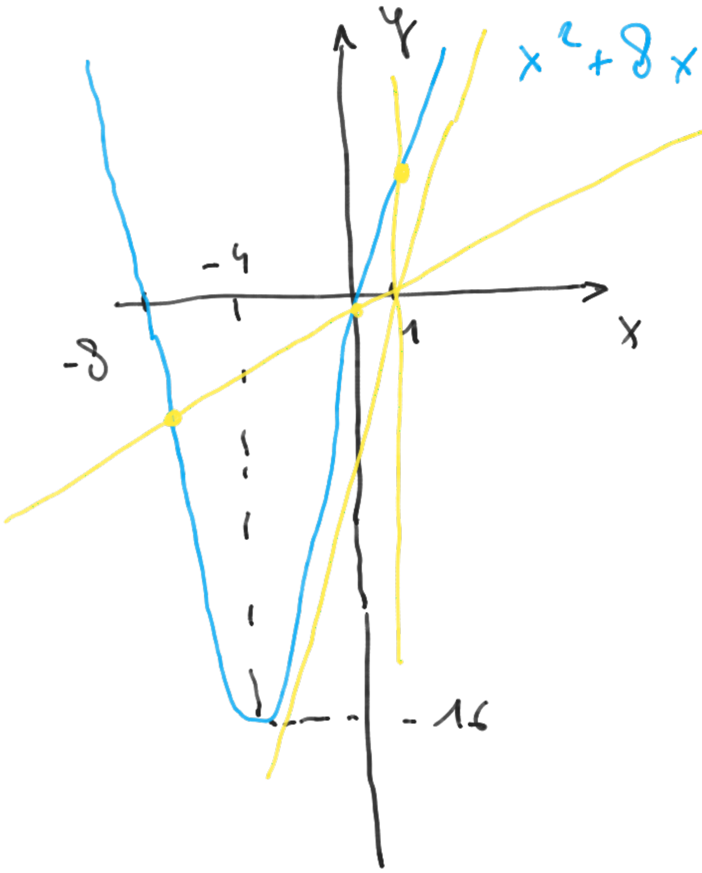
Oplossing: B

juist beantwoord: 58 %

$x^2 + 8x \Rightarrow x(x+8) = 0$ $\Rightarrow x = 0$ of $x = -8$

$x = -4 \Rightarrow y = (-4)^2 + 8(-4)$

$= 16 - 32 = -16$



$a(x-1) = 0$

$\Rightarrow$ nulpunt $= 1$

$\Rightarrow$ onafhankelijk van a $\Rightarrow$ de rechte gaat door $(1,0)$

draaipunt

$\underbrace{x^2 + 8x}_{} > a\underbrace{(x-1)}_{}$

parabool boven rechte

$\Rightarrow$ moet een interval zijn

$\Rightarrow$ B

Oefening 12

De parameter $a \in \mathbb{R}$ in de vergelijking $az^2 + (2-4i)z - 4i = 0$ met onbekende $z \in \mathbb{C}$ is zodanig gekozen dat $z = 2i$ een oplossing is van deze vergelijking. Bepaal de tweede oplossing van de vergelijking.

(A) $-2i$ (B) -2 ✓ (C) -1 (D) 2

Oplossing: C
juist beantwoord: 61 %

$$z = 2i \Rightarrow a(2i)^2 + (2-4i)(2i) - 4i = 0$$

$$-4a + 4i + 8 - 4i = 0$$

$$\Rightarrow 8 = 4a \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{4} = 2}$$

$$\Rightarrow 2z^2 + (2-4i)z - 4i = 0$$

$$/2: \quad z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$$

$$(z-2i)(z-(b+ci)) = 0$$

$$z^2 + (-b-ci-2i)z + 2bi - 2c$$

$$\Rightarrow 1 - 2i = -b - ci - 2i$$

$$\hookrightarrow c = 0$$

$$\hookrightarrow b = -1$$

$$-2i = 2bi - 2c$$

$$= 2(-1)i - 2 \cdot 0 \quad ✓$$

$$2^e \text{ wortel} = \boxed{-1}$$

Oefening 13

In $\mathbb{R}^3$ met een cartesiaans assenstelsel xyz, zijn voor elke waarde van $\lambda \in \mathbb{R}$ twee punten gegeven: $P_\lambda(1, 0, 2\lambda)$ en $Q_\lambda(-\lambda, 1, 1)$. Kies λ zodat de afstand tussen de twee punten minimaal is. Hoe groot is deze minimale afstand?

(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ✓ (C) $\frac{\sqrt{70}}{5}$ (D) $\sqrt{3}$

Oplossing: C
juist beantwoord: 43 %

Afstand $= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

$d = \sqrt{(1+\lambda)^2+(0-1)^2+(2\lambda-1)^2}$

$= \sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+1+4\lambda^2+1-4\lambda}$

$= \sqrt{5\lambda^2-2\lambda+3}$

d minimaal → afgeleide = 0

$\left((5\lambda^2-2\lambda+3)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5\lambda^2-2\lambda+3}}\cdot(10\lambda-2)$

$= 0 \Rightarrow$ als teller $= 0$

$\Rightarrow 10\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}}$

$\Rightarrow d = \sqrt{5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{2}{5} + 3} = \sqrt{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}+\frac{15}{5}}$

$= \sqrt{\frac{14}{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{70}}{5}}$

Oefening 14

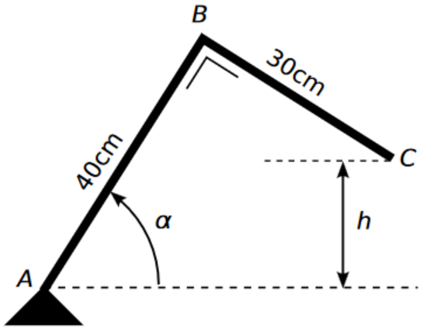
De figuur toont een robotarm die bestaat uit twee staven AB en BC die aan mekaar gelast zijn zodat deze steeds een rechte hoek vormen. De robotarm wordt aangestuurd door een motor in het punt A. De motor laat toe om de hoek α tussen de horizontale en de staaf AB in te stellen tussen 45° en 90°. Het verband tussen de hoogte h van het punt C en de hoek α kan geschreven worden als $h(\alpha) = h_0 \sin(\alpha - \beta)$ met $h_0 = 50\,\text{cm}$. Bepaal $\tan\beta$.

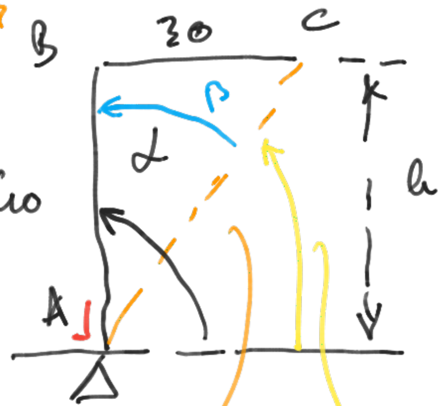
(A) $\tan\beta = \frac{3}{5}$

(B) $\tan\beta = \frac{3}{4}$

(C) $\tan\beta = \frac{4}{5}$

(D) $\tan\beta = \frac{4}{3}$





Oplossing: B
juist beantwoord: 49 %

$= \sqrt{40^2 + 30^2}$

$= \sqrt{1600 + 900}$

$= 50$ cm

$\alpha - \beta$

$h = h_0 \sin(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow \text{tg}\,\beta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

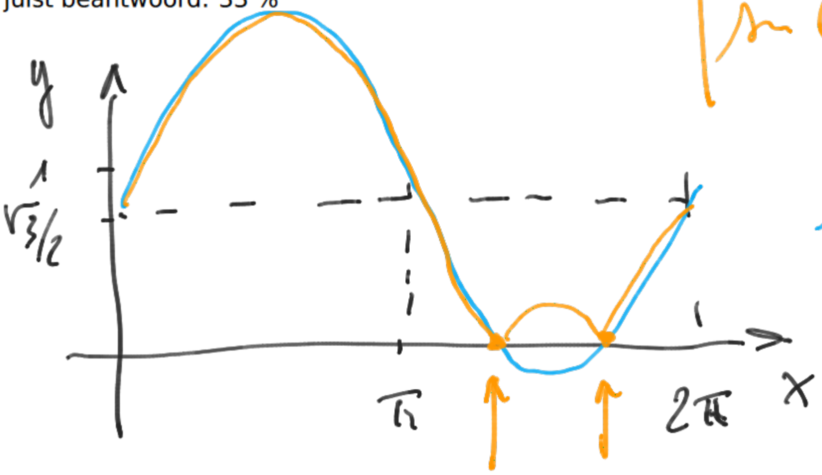
Oefening 15

Gegeven is de functie $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = \left|\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right|$ en domein $[0, 2\pi]$. Wat is de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as?

(A) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ (B) $\sqrt{3}\pi$ ✓ (C) $2 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ (D) $2 + \sqrt{3}\pi$

Oplossing: C

juist beantwoord: 33 %



$\left|\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x < \begin{array}{l} \frac{4\pi}{3} \ (240°) \\ \frac{5\pi}{3} \ (300°) \end{array}$

$$\Rightarrow A = \int_0^{4\pi/3} \left(\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx - \int_{4\pi/3}^{5\pi/3} \left(\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx$$

$$+ \int_{5\pi/3}^{2\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx$$

$$= \left(-\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\Big|_0^{4\pi/3} - \left(-\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\Big|_{4\pi/3}^{5\pi/3}$$

$$+ \left(-\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\Big|_{5\pi/3}^{2\pi}$$

$$= 2 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Oefening 16

Hoeveel buigpunten vertoont de grafiek van de functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ met voorschrift $f(x)=x^6+2x^5-x^4+3x-5$?

(A) precies 1 ✓ (B) precies 2 (C) precies 3 (D) meer dan 3

Oplossing: B
juist beantwoord: 25 %

Buigpunten: $f''(x)=0$ + wisselt van teken

$f'(x) = 6x^5 + 10x^4 - 4x^3 + 3$

$f''(x) = 30x^4 + 40x^3 - 12x^2 = 0$

$= 2x^2(15x^2+20x-6) = 0$

$\hookrightarrow x = 0$

wisselt niet van teken! → geen buigpunt

$D = 20^2 - 4.15(-6) = 400 + 360 = 760$

$\Rightarrow x = \dfrac{-20 \pm \sqrt{760}}{2.15} = -\dfrac{2}{3} \pm \sqrt{\dfrac{760}{900}} = -0{,}66 \pm 0{,}92$

$x \begin{cases} -1{,}58 \\ +0{,}26 \end{cases}$ → wisselt wel van teken → 2 buigpunten

⇒ totaal ⇒ 2 buigpunten!

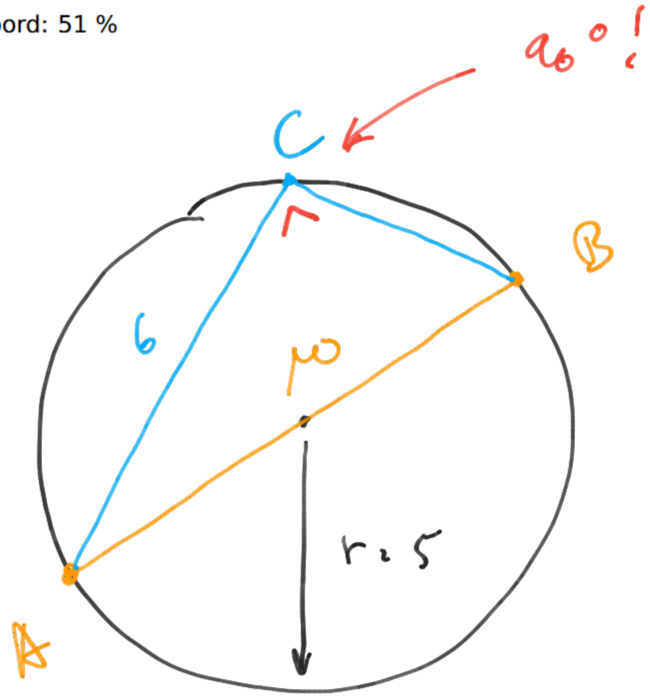
Oefening 17

Gegeven is een cirkel met straal 5 met daarop de punten A, B en C. De rechte AB gaat door het middelpunt van de cirkel, en de afstand van A tot C is 6. Bepaal de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten A, B en C.

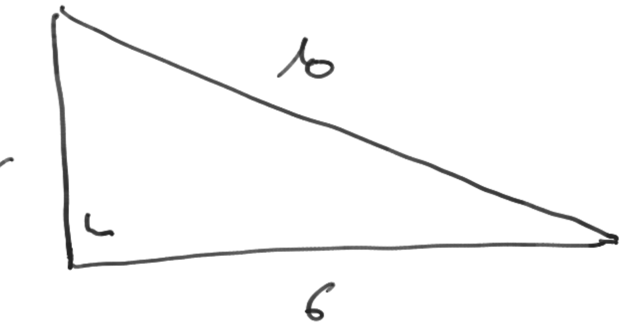
(A) 12 (B) 15 (C) 20 (D) 24

Oplossing: D

juist beantwoord: 51 %



$\Rightarrow$



$\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

$A = \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$

Oefening 18

We noemen twee natuurlijke getallen onderling ondeelbaar als ze geen gemeenschappelijke delers hebben behalve 1. Hoeveel getallen bevat de lijst van de natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, ..., 2024 die onderling ondeelbaar zijn met 20?

(A) 102 (B) 506 (C) 608 ✓ (D) 810

Oplossing: D

juist beantwoord: 49 %

⇒ Hoeveel veelvouden van 20 in 2024?

→ $\frac{202\cancel{4}}{2\cancel{0}} = 101$

20 → deelbaar door
20
10
5
$\cancel{4}$ = 2.2
2
1

veelvouden van 10 : $\frac{202\cancel{4}}{1\cancel{0}} = \underline{202}$

5 : $\frac{2020}{5} = \underline{404}$

4 : $\frac{2024}{4} = 506$ ✗

2 : $\frac{2024}{2} = \underline{1012}$

10 = 2.5

⇒ teveel (dubbel geteld, 1 keer bij 2 en 1 keer bij 5)

→ 1012 + 404 − 202 = 1214 = deelbaar door 2 en 5

⇒ niet deelbaar door 2 en 5 ⇒ $2024 - 1214 = \boxed{810}$

Oefening 19

In $\mathbb{R}^2$ met cartesiaans assenstelsel xy beschouwen we de kromme met vergelijking $y = 4x^3 - x^2 - 3x + 1$. De raaklijnen aan deze kromme in de punten A en B staan loodrecht op de eerste bissectrice. Bepaal de x-coördinaat van het middelpunt van het lijnstuk $[A, B]$.

(A) 0 (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{5}{12}$

Oplossing: B

Auteur: Stefaan Caenepeel

juist beantwoord: 46 %

1e bissectrice : rico = 1 $\Rightarrow \perp \rightarrow$ rico = −1

rico $\rightarrow f'(x)$

$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 3 = -1$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 2x - 2 \qquad /2$$

$$6x^2 - x - 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6(-1)}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{1}{12} \pm \frac{\sqrt{25}}{12} = \frac{1}{12} \pm \frac{5}{12} < \begin{matrix} 6/12 = 1/2 \\ -4/12 = -1/3 \end{matrix}$$

Dus A en B $\rightarrow$ 1/2 en −1/3

$$\text{middelpunt} = \frac{A+B}{2} = \frac{1/2 + (-1/3)}{2}$$

$$= \frac{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

Oefening 20

In $\mathbb{R}^2$ met cartesiaans assenstelsel xy beschouwen we de parabool P met vergelijking $y = \frac{x^2}{6}$. Wat is de straal van de grootste cirkel met middelpunt op de positieve y-as, die enkel de oorsprong $O(0,0)$ gemeen heeft met de parabool P?

(A) 1 (B) 2 ✓ (C) 3 (D) 4

Oplossing: C
juist beantwoord: 50 %

$\Rightarrow$ enkel raakpunt in $(0,0)$

$C: x^2 + (y-a)^2 = r^2$

$\Rightarrow$ in punt $(0,0)$: $0 + (0-a)^2 = r^2$

$\Rightarrow a = r$

$\Rightarrow C: x^2 + (y-r)^2 = r^2$

Snijpunt C en P $\rightarrow$ $y = \frac{x^2}{6}$ in C

$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{x^2}{6} - r\right)^2 = r^2$

$x^2 + \left(\frac{x^4}{36} - \frac{2x^2}{6}r + \cancel{r^2}\right) = \cancel{r^2}$

$= \frac{x^4}{36} + x^2\left(1 - \frac{1}{3}r\right) = \underbrace{x^2}_{\text{snijpunt in }(0,0)}\underbrace{\left(\frac{x^2}{36} + 1 - \frac{1}{3}r\right)}_{} = 0$

snijpunt in $(0,0)$

mag geen andere oplossing hebben dan $x = 0$ $\Rightarrow \frac{0}{36} + 1 - \frac{1}{3}r = 0$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{3}r \Rightarrow \boxed{r = 3}$

Oefening 21

In $\mathbb{R}^3$ met cartesiaans assenstelsel xyz beschouwen we het vlak met vergelijking $x + ky + 3z = 11$ en de rechte met vergelijking $\frac{x}{7} = \frac{y-3}{k} = \frac{2z-1}{4k}$ waarbij $k \in \mathbb{R}_0$ een parameter is. Bepaal de waarden voor k waarvoor de rechte evenwijdig is aan het vlak. Wat is de som van deze k-waarden?

(A) -12 ✓(B) -6 (C) 6 (D) 12

Oplossing: B
juist beantwoord: 49 %

$x = 7r, \ y = 3 + kr, \ z = \frac{4kr + 1}{2} = 2kr + \frac{1}{2}$

richtingsvector rechte : $(7, k, 2k)$

richtingsvector vlak : $(1, k, 3)$

rechte // aan vlak → RV ⊥ op elkaar

⇒ inproduct = 0

$7 \cdot 1 + k^2 + 3 \cdot 2k = 0$

$k^2 + 6k + 7 = 0$

$\Rightarrow k = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$

$= -3 \pm \frac{\sqrt{36 - 28}}{2} = -3 \pm \frac{\sqrt{8}}{2}$

$= -3 \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$

$k_1 + k_2 = (-3 - \sqrt{2}) + (-3 + \sqrt{2}) = \boxed{-6}$

Oefening 22

Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $\sin^2 x + \cos^2(2x) + \sin^2(3x) + \cos^2(4x) + \ldots + \sin^2(2023x) + \cos^2(2024x) = 2024$ in het interval $[0, 2\pi]$? De hoeken worden uitgedrukt in radialen.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Oplossing: C
juist beantwoord: 42 %

Allemaal kwadraten → waardes tussen 0 en 1

De argumenten gaan van $1x \to 2024x$

→ er zijn dus in totaal 2024 termen die allemaal maximum 1 kunnen zijn en de totale som = 2024 ⇒ iedere term moet dus gelijk zijn aan 1.

$\sin = \pm 1 \to \sin \frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$

$\cos = \pm 1 \to \cos 0$ en π

2 $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} : \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2(\pi) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{2}\right) + \ldots \\ x = \frac{3\pi}{2} : \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2(3\pi) + \sin^2\left(\frac{9\pi}{2}\right) + \cos^2(6\pi) + \ldots \end{cases}$

$x = 0$ en $x = \pi$ ✗ → $\sin(0) = 0$
$\sin(\pi) = 0$

Oefening 23

Veronderstel dat de functie f de primitieve functie is van de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ waarbij $f(0) = 2$. Voor welke $n \in \mathbb{N}$ is $|n - f(10)|$ minimaal?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

Oplossing: C
juist beantwoord: 41 %

Primitieve functie → $\int g(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int x(1+x^2)^{-1/2}\,dx = \int (1+x^2)^{-1/2}\,\frac{d(x^2+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1/2} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\Rightarrow f(0) = 2 = \sqrt{1+0} + C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(10) = \sqrt{101} + 1 \approx 11$$ ← zeer dicht bij 11

$\sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow 11^2 = 121$

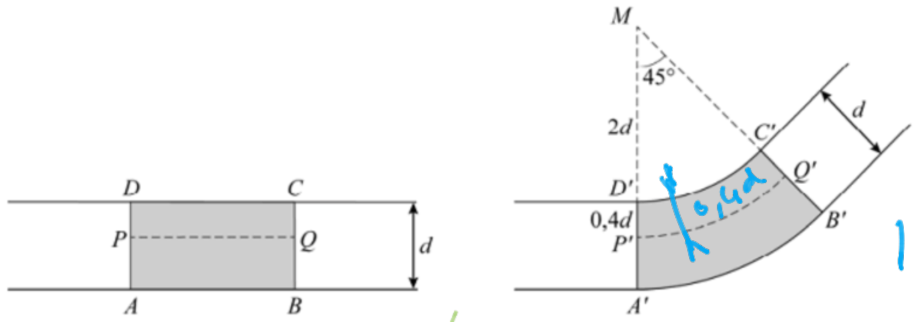
$|n - f(10)|$ minimaal → dichtst bij 0
want altijd positief

$|11 - 11{,}0\ldots| \approx 0$

↳ $n = 11$

Oefening 24

Een metalen plaat met een dikte van d wordt gebogen over een hoek van 45°. Vóór de buiging stelt rechthoek $ABCD$ het vooraanzicht van de plaat voor. Na buiging is deze rechthoek vervormd tot de vorm $A'B'C'D'$. De boog $C'D'$ ligt op een cirkel met middelpunt M en straal $2d$ en de boog $A'B'$ ligt op een cirkel met zelfde middelpunt en straal $3d$. De boog $P'Q'$ is de vervorming van de lijn PQ en ligt op een afstand $0{,}4d$ van de boog $C'D'$. De lijn PQ is de neutrale lijn: de lengte blijft ongewijzigd na buiging. Hoeveel procent is de oppervlakte van $A'B'C'D'$ groter dan de oppervlakte van $ABCD$ (afgerond tot het dichtste geheel getal)?



$45° = \frac{\pi}{4}$ rad

$|PQ| = \frac{\pi}{4} \cdot 2{,}4\,d$

(A) 2% (B) 3% (C) 4% (D) 5%

opp cirkel $= \pi r^2$

opp sector $=$

$\pi r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{r^2\theta}{2}$

Oplossing: C
juist beantwoord: 43 %

$\text{Opp } 1 = d \cdot |PQ| = d^2 \cdot \frac{12}{5} \frac{\pi}{4}$

$\text{Opp } 2 =$

$$= \frac{(3d)^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{(2d)^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \cdot 5d^2$$

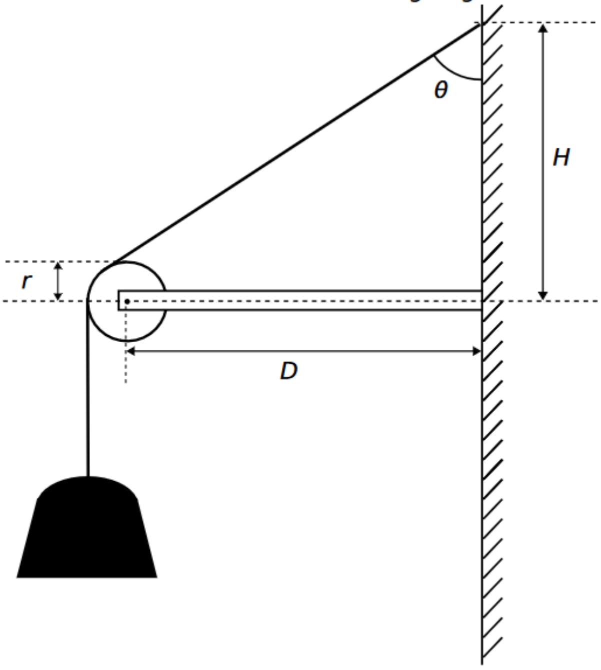
$$\frac{\text{Opp } 2}{\text{Opp } 1} = \frac{\cancel{\frac{\pi}{8}} \cdot 5\cancel{d^2}}{\cancel{d^2}\,\frac{12}{5}\,\cancel{\frac{\pi}{4}}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{20}{12} = \frac{100}{96}$$

4 verschil op 100

$\Rightarrow \boxed{4\%}$

Oefening 25

De figuur toont een hanglamp die via een kabel over een katrol vastgemaakt is aan de muur. De kabel maakt een hoek θ met de muur en hangt verder gespannen over de katrol. De katrol heeft een straal r en het centrum van de katrol is op een horizontale afstand D van de muur bevestigd. De verticale afstand tussen het bevestigingspunt van de kabel aan de muur enerzijds en het centrum van de katrol anderzijds, noemen we H. Welk van onderstaande uitdrukkingen geeft het verband tussen H, r, D en θ?

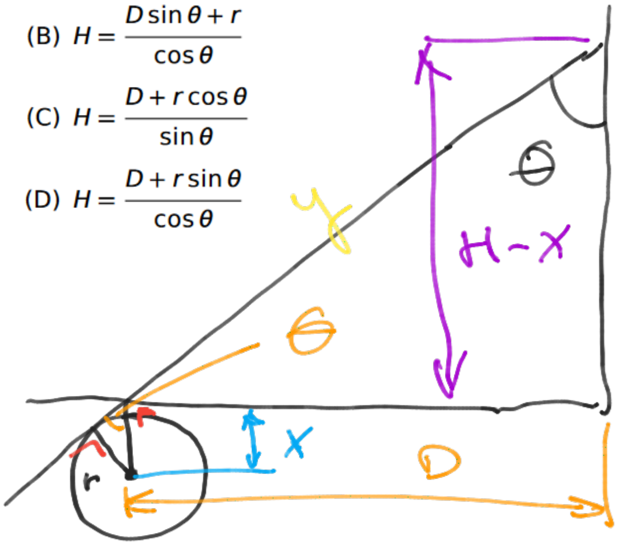


(A) $H = \dfrac{D\cos\theta + r}{\sin\theta}$

(B) $H = \dfrac{D\sin\theta + r}{\cos\theta}$

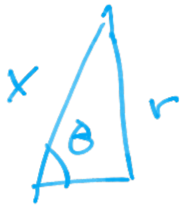
(C) $H = \dfrac{D + r\cos\theta}{\sin\theta}$

(D) $H = \dfrac{D + r\sin\theta}{\cos\theta}$



Oplossing: A

juist beantwoord: 50 %



$$x \sin\theta = r \Rightarrow x = \frac{r}{\sin\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} y \cdot \cos\theta &= H - x \\ y \cdot \sin\theta &= D \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{(H-x)}{\cos\theta} = \frac{D}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow H - x = \frac{D\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$H - \frac{r}{\sin\theta} = \frac{D\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{D\cos\theta + r}{\sin\theta}}$$

Oefening 26

In $\mathbb{R}^2$ met cartesiaans assenstelsel xy beschouwen we de figuur die bestaat uit de punten (x, y) die voldoen aan $|x| + |2y| \leq 2$. Bepaal de oppervlakte van deze figuur.

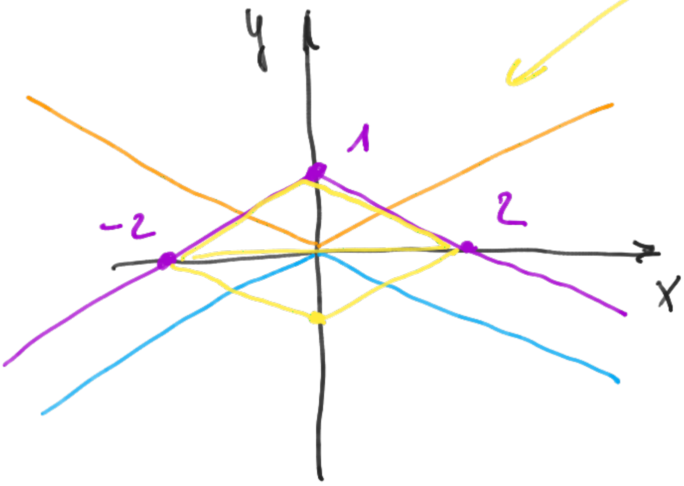
(A) 1 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 4

Oplossing: D
juist beantwoord: 31 %

$$|x| + |2y| \leq 2 \Rightarrow |2y| \leq 2 - |x|$$

$$\Rightarrow |y| \leq 1 - \frac{|x|}{2}$$

$$\begin{cases} |y| = y \\ |-y| = y \end{cases}$$



$\frac{|x|}{2}$

$1 - \frac{|x|}{2} \Rightarrow y = 0$
$x = 2, -2$

$-\frac{|x|}{2}$

$\Rightarrow x = 0$
$y = 1$

Δ: basis = 4, hoogte = 1 $\Big\}$ $A = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$

Opp = $2 \cdot \Delta = 2 \cdot 2 = \boxed{4}$

Oefening 27

Op een examen heeft elke vraag vier antwoordmogelijkheden: a, b, c en d. Bij elke vraag is er precies één juist antwoord. Je krijgt de volgende informatie over dit examen.

- Als het antwoord op vraag 10 gelijk is aan a, dan is het antwoord op vraag 11 gelijk aan d.
- Als het antwoord op vraag 12 gelijk is aan a, dan is het antwoord op vraag 11 gelijk aan d.

Wat kan je dan met zekerheid besluiten?

(A) Als het antwoord op vraag 12 gelijk is aan a, dan is het antwoord op vraag 10 gelijk aan a.

(B) Als het antwoord op vraag 11 gelijk is aan a, dan is het antwoord op vraag 10 niet gelijk aan a.

(C) Als het antwoord op vraag 11 gelijk is aan a, dan hebben vragen 10 en 12 een verschillend antwoord.

(D) Als vragen 10 en 12 een verschillend antwoord hebben, dan is het antwoord op vraag 11 niet gelijk aan d.

Oplossing: B
juist beantwoord: 63 %

$V10 = a \rightarrow V11 = d$ (1)

$V12 = a \rightarrow V11 = d$ (2)

(2) impliceert niet (1)

A) $V12 = a$ dan $V10 = a$? ✗

Valt niet af te leiden uit gegevens

B) $V11 = a \Rightarrow V10 \neq a$ → (1) ✓

$\Rightarrow V11 \neq d \Rightarrow V10 \neq a$

C) $V11 = a \Rightarrow V10 \neq V12$

Er is niets gegeven dat voor V10 en V12 een verschillend antwoord afdwingt ✗

D) $V10 \neq V12 \Rightarrow V11 \neq d$

(1) en (2) ⇒ dit is de omgekeerde relatie, die is niet gegeven! ✗

Oefening 28

We willen een lijst met n verschillende getallen van klein naar groot sorteren. We noemen deze lijst $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. We volgen hierbij onderstaande werkwijze en starten bij $i = 1$.

1. Zoek het kleinste getal in het deel van de lijst startend bij a_i tot en met het laatste element van de rij.
2. Wissel dit kleinste getal met het getal op positie i. Indien het kleinste getal op positie i staat, dan hoef je dus niets te doen.
3. Tel 1 op bij i.
4. Als $i = n$, stop. Als $i \neq n$, herhaal dan de stappen 1 t.e.m. 3.

We passen deze werkwijze toe op de lijst $[4, -3, 2, 5, -5, 6]$. Wat is het element op positie 4 van de lijst nadat je de stappen 1 t.e.m. 3, drie keer uitgevoerd hebt?

(A) -3 (B) 2 (C) 4 ✓ (D) 5

Oplossing: D
juist beantwoord: 76 %

Dit is gekend als "selection sort"

(1) $i = 1$ → kleinste $= -5$
wissel 4 en -5

→ $[-5, -3, 2, 5, 4, 6]$

(2) $i = 2$ → kleinste $= -3$, staat al goed

(3) $i = 3$ → kleinste $= 2$, staat al goed

→ $[-5, -3, 2, \boxed{5}, 4, 6]$

Oefening 29

Gegeven is een willekeurige (4×4)-matrix A, de matrix $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en de matrix $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Welk van de onderstaande matrices heeft

- als eerste rij de eerste rij van matrix A,
- als tweede rij het dubbele van de vierde rij van matrix A,
- als derde rij de derde rij van matrix A,
- en als vierde rij de tweede rij van matrix A?

$M_1 A$

(A) AM_1 (B) AM_2 (C) M_1A (D) M_2A

Oplossing: C
juist beantwoord: 60 %

$$\underset{M_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 26 & 28 & 30 & 32 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Oefening 30

Waaraan is $\prod_{k=0}^{2024} i^k = i^0 i^1 i^2 \cdots i^{2024}$ gelijk, waarbij i de imaginaire eenheid is?

(A) -1 (B) 1 (C) $-i$ (D) i

Oplossing: B
juist beantwoord: 60 %

$i^0 = 1$ $i^4 = 1$

$i^1 = i$ $i^5 = i$

$i^2 = -1$ $i^6 = -1$

$i^3 = -i$ $i^7 = -i$

$\downarrow$

$i^0 \cdot i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 = 1 \cdot i \cdot (-1)(-i) = -1$

$\frac{2024}{4} = 506 =$ even

$\Rightarrow (-1)^{506} = 1$