**Oefening 1**

We noteren met $A^T$ de getransponeerde van een matrix $A$. Gegeven zijn de reële getallen $a$, $b$ en $c$ waarvoor de volgende gelijkheid geldt.

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & a \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c & a \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} b & c \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Welke van de volgende uitdrukkingen is dan gelijk aan $\frac{5}{3}$?

✓ (A) $b+c$ (B) $a+c$ (C) $b-c$ (D) $a-c$

Oplossing: A
juist beantwoord: 72 %

$$\begin{pmatrix} 3-2 & a-2 \\ 2-2c & 3-2a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2-2c \\ a-2 & 3-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= b \\ 2-2c &= c \\ a-2 &= 1 \\ 3-2a &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} & b = 1 \\ & 2 = 3c \Rightarrow c = \frac{2}{3} \\ & a = 3 \\ & 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}\right.$$

$$b + c = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

**Oefening 2**

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(t) = e^{-at}\sin(\omega t)$, waarbij $a$ en $\omega$ strikt positieve reële constanten zijn. Waaraan is $f'(0)$ dan gelijk?

(A) 1 ✓ (B) $\omega$ (C) $-a$ (D) $-a\omega$

Oplossing: B
juist beantwoord: 66 %

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$

$$-a e^{-at} \cdot \sin(\omega t) + e^{-at} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = f'(t)$$

$$\Rightarrow f'(0) = -a \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot \omega \cdot 1 = \boxed{\omega}$$

**Oefening 3**

Gegeven de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $g(x) = 3 + 2x + x^2$.
Voor welke strikt positieve waarde van $M$ geldt dat

$$\int_0^M f(x)\,dx = \int_0^M g(x)\,dx\,?$$

(A) 1 ✓ (B) $\sqrt{3}$ (C) 3 (D) $3\sqrt{3}$

Oplossing: B
juist beantwoord: 81 %

$$\int f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 = x^3 + \frac{x^2}{2} + x$$

$$\int g(x) = 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x$$

$0 \to M$ : 0 voor $x = 0$

$$\to \quad x^3 + \cancel{\frac{x^2}{2}} + x = \frac{x^3}{3} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + 3x$$

$$\frac{2}{3}x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x\left(\frac{x^2}{3} - 1\right) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x^2}{3} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\boxed{\Rightarrow x = +\sqrt{3}}$$

**Oefening 4**

Gegeven een stelsel met drie vergelijkingen in de onbekenden $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 10 & (1) \\ 4x + 4y + 4z &= 12 \longrightarrow /4 \Rightarrow x + y + z = 3 & (2) \\ 7x + 6y + hz &= 13 & (3) \end{cases}$$

Voor welke waarde van de parameter $h$ heeft dit stelsel geen oplossingen?

(A) 0 ✓(B) 5 (C) 8 (D) 21

Oplossing: B

juist beantwoord: 61 %

$(1)-(2)$ en $(3)-(2).7$

$$\begin{cases} 0 + y + 2z = 7 \\ x + y + z = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - x - z \\ 0 - y + (h-7)z = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + z = 4 \quad \Rightarrow x = z - 4 \\ x + y + z = 3 \\ x + (h-6)z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + z = 4 \\ x + y + 4 + x = 3 \\ (h-5)z = -1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow z = \dfrac{-1}{h-5}$ voor $h = 5 \to$ noemer $= 0$

onbepaald!

**Oefening 5**

Welke graad heeft volgende veelterm in $x \in \mathbb{R}$?

$$p(x) = \left(\sum_{k=0}^{3} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} (k-3)\, x^k\right)$$

(A) 6 ✓ (B) 9 (C) 10 (D) 21

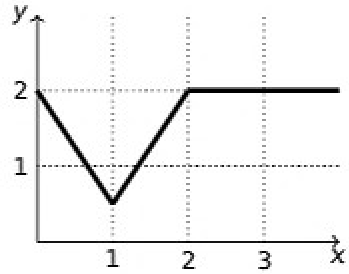
Oplossing: B
juist beantwoord: 51 %

$$\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}\right)\left(-2x - x^2 + 0x^3\right)$$

$$\boxed{x^7 \cdot x^2 = x^9}$$

**Oefening 6**

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ met haar grafiek in onderstaande figuur.

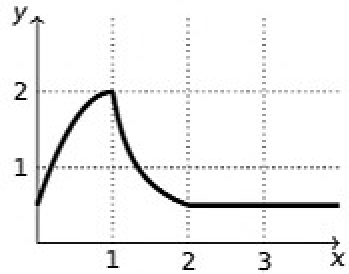


$x = 1 : y = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1/2} = 2$

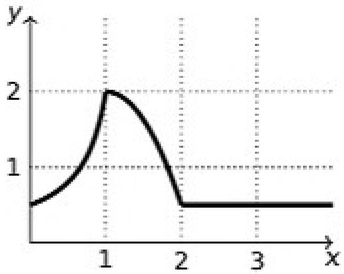
$x = 1/2 : y = 3/2 \Rightarrow 1/(3/2) = 2/3$

$x = 3/2 : y = 3/2 \Rightarrow 1/(3/2) = 2/3$

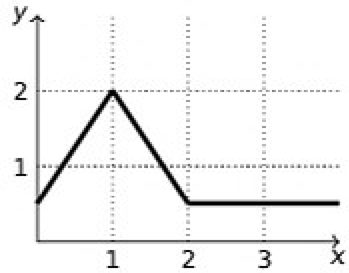
Welke van onderstaande figuren toont de grafiek van de functie $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ met $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$?



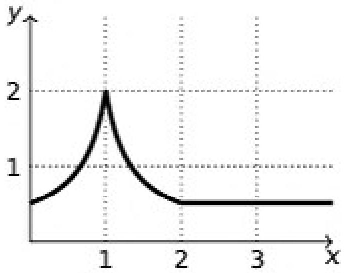
(A)



(B)



(C)



(D)

Oplossing: D
juist beantwoord: 66 %

$OF \Rightarrow [0,1] : f(x) \Rightarrow \text{rico} = \dfrac{2 - 1/2}{0 - 1} = \dfrac{3/2}{-1} = -\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}x + 2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{-\frac{3}{2}x + 2} = \dfrac{-2}{3x - 4}$

**Oefening 7**

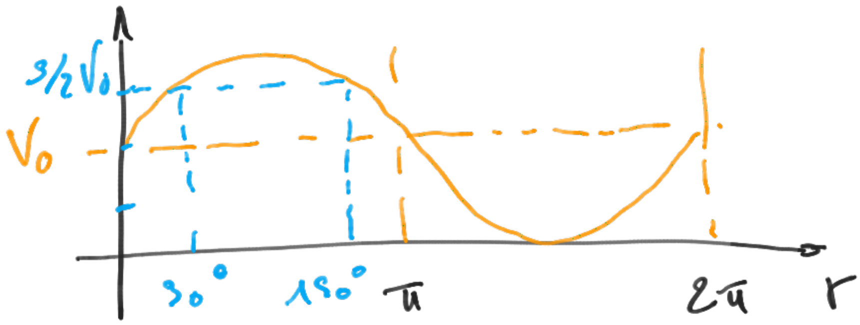
Gegeven is een periodisch elektrisch signaal met spanning $V(t) = V_0\left[1+\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]$. Hierbij hebben de amplitude $V_0$ en de periode $T$ een positieve constante waarde en stelt $t$ de tijd voor. Welke fractie van het tijdsinterval $[0,T]$ is de spanning $V(t)$ groter dan $\frac{3}{2}V_0$?

$0 \to 2\pi$

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$

Oplossing: D

juist beantwoord: 40 %




$\sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 30° \\ 150° \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \pi/6 \\ 5\pi/6 \end{matrix}\right\} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$

$= \frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow \frac{\cancel{2}/3\ \cancel{\pi}}{\cancel{2}\cancel{\pi}} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

**Oefening 8**
Gegeven zijn twee rechten $a$ en $b$ in $\mathbb{R}^3$.

$$a \leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-4} \qquad b \leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = -21 \\ 4y + 3z = 31 \end{cases} \Rightarrow \text{Stel } y = r$$

Wat is de onderlinge ligging van $a$ en $b$?

(A) samenvallend ✓ (B) evenwijdig en niet samenvallend (C) kruisend (D) snijdend

Oplossing: B
juist beantwoord: 58 %

$$b \rightarrow 3x - 2r = -21 \Rightarrow r = \frac{3x+21}{2}$$

$$4r + 3z = 31 \Rightarrow r = \frac{-3z+31}{4}$$

$$r = y$$

$$b \rightarrow \frac{3}{2}x + \frac{21}{2} = y = -\frac{3}{4}z + \frac{31}{4}$$

$$a \rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}y = -\frac{1}{4}z + \frac{3}{4}$$

$$b \times \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} = \frac{1}{3}y = -\frac{1}{4}z + \frac{31}{12}$$

$\Rightarrow$ evenwijdig

$\Rightarrow$ niet samenvallend ✓

**Oefening 9**

Beschouw een strikt stijgende functie $f : [1, 2] \to [3, 4]$ met het interval $[3, 4]$ als bereik. Welke van onderstaande beweringen is waar?

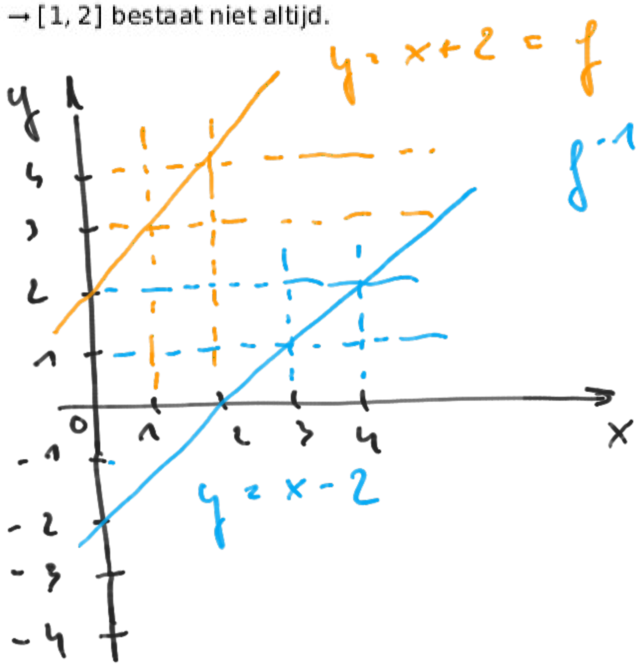
(A) De inverse functie $f^{-1} : [3, 4] \to [1, 2]$ bestaat altijd en is strikt stijgend.

(B) De inverse functie $f^{-1} : [3, 4] \to [1, 2]$ bestaat altijd en is strikt dalend.

(C) De inverse functie $f^{-1} : [3, 4] \to [1, 2]$ bestaat altijd maar hoeft niet strikt dalend of strikt stijgend te zijn.

(D) De inverse functie $f^{-1} : [3, 4] \to [1, 2]$ bestaat niet altijd.

Oplossing: A
juist beantwoord: 40 %




$f^{-1} \Rightarrow x = y - 2$

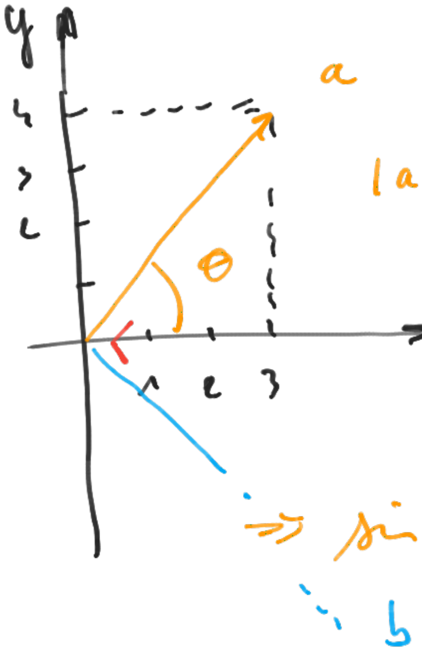
$\Rightarrow y = x - 2$

**Oefening 10**

Beschouw het vlak met cartesiaans assenstelsel $xy$ met daarin de vector $\vec{a}(3,4)$. De vector $\vec{b}$ staat loodrecht op de vector $\vec{a}$, heeft een lengte 10 en een positieve $x$-coördinaat. Waaraan is deze $x$-coördinaat van $\vec{b}$ gelijk?

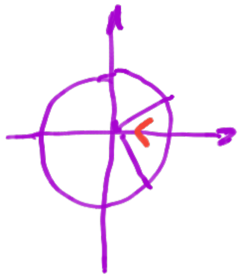
(A) 3 (B) 4 (C) 6 ✓ (D) 8

Oplossing: D
juist beantwoord: 48 %




$$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\rightarrow \sin\theta = \frac{4}{5}$$



$$\sin(\theta + 90^\circ) = -\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta + 90^\circ) = \sin(\theta)$$

$$\rightarrow \quad b_x = |b| \cdot \cos(\theta + 90^\circ) = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8$$

**Oefening 11**

Bepaal de verzameling van alle waarden $a \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(1-a^2)^2\, n^2 + a^3 n^4}}{n+n^2} = 8\,.$$

(A) de lege verzameling (B) $\{-3, 3\}$ (C) $\{3\}$ ✓ (D) $\{4\}$

Oplossing: D
juist beantwoord: 53 %

hoogste macht = $n^2$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(1-a)^2 \cdot \frac{n^2}{n^4} + a^3 \frac{n^4}{n^4}}}{\frac{n}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{0 + a^3}}{0 + 1} = 8 \Rightarrow \left(\sqrt{a^3}\right)^2 = (8)^2$$

$$a^3 = 64$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{64}$$

$$a = 4$$

**Oefening 12**

Een zuiver imaginair complex getal is een complex getal van de vorm $a\,i$ met $a$ een reëel getal verschillend van 0 en $i$ de imaginaire eenheid. Hoeveel verschillende zuiver imaginaire nulpunten (ook nulwaarden genoemd) heeft de veelterm $p(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + 4x + 4\sqrt{2}$?

(A) 0 (B) juist 1 (C) juist 2 (D) juist 3

Oplossing: C
juist beantwoord: 41 %

$$p(x) = x^2(x+\sqrt{2}) + 4(x+\sqrt{2})$$
$$= (x^2+4)(x+\sqrt{2})$$

$$p(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \\ x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$\pm\sqrt{x^2} = 2i$$

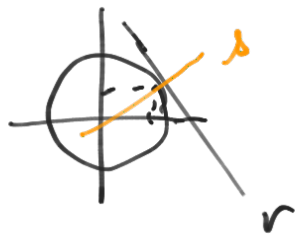
$$x \left\langle \begin{array}{l} 2i \\ -2i \end{array} \right.$$

**Oefening 13**

Beschouw het vlak met een orthonormaal assenstelsel met daarin de cirkel $\mathcal{C}$ met vergelijking $x^2 + y^2 = 10$. De rechte $\ell$ is de raaklijn aan $\mathcal{C}$ in het punt $(3, 1)$. Welk van onderstaande punten ligt op deze rechte $\ell$?

(A) $(1, 3)$ (B) $(1, \sqrt{10} + 3)$ (C) $(1, 2\sqrt{10})$ ✓ (D) $(1, 7)$

Oplossing: D
juist beantwoord: 59 %




$P(3,1)$ : $3^2 + 1^2 = 10$ ✓

rico : $s$ : $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$

$r$ : $\frac{-1}{1/3} = -3$

$\Rightarrow r$ : $y - y_0 = r(x - x_0)$

$y - 1 = -3(x - 3)$

$y = -3x + 9 + 1 = -3x + 10$

A: $3 = -3 \cdot 1 + 10$ ✗

B: $\sqrt{10} + 3 = -3 \cdot 1 + 10$ ✗

C: $2\sqrt{10} = -3 \cdot 1 + 10$ ✗

D: $7 = -3 \cdot 1 + 10$ ✓

**Oefening 14**

Merel legt dagelijks een vast traject af met de fiets. Met een speedpedelec is haar gemiddelde snelheid 60% hoger dan met haar stadsfiets. De tijdsduur die ze nodig heeft om het traject af te leggen is dan ook korter met de speedpedelec dan met de stadsfiets. Hoeveel korter is deze tijdsduur?

√ (A) De tijdsduur met de speedpedelec is 37,5% korter dan met de stadsfiets.

(B) De tijdsduur met de speedpedelec is 40% korter dan met de stadsfiets.

(C) De tijdsduur met de speedpedelec is 60% korter dan met de stadsfiets.

(D) De tijdsduur met de speedpedelec is 62,5% korter dan met de stadsfiets.

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$$

Oplossing: A
juist beantwoord: 52 %

$$v_s = v(1+0,6) = 1,6v = \frac{8}{5}v$$

$$\begin{cases} t_s = \dfrac{s}{v_s} = \dfrac{s}{8/5\, v} = \dfrac{5}{8}\dfrac{s}{v} \\ t = \dfrac{s}{v} \end{cases}$$

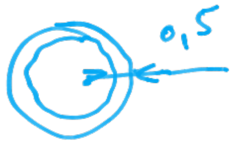
$$\Rightarrow t - t_s = \frac{s}{v} - \frac{5}{8}\frac{s}{v} = \frac{3}{8}\frac{s}{v}$$

$$\frac{3}{8} = 3 \cdot 0,125 = 0,375$$

$$\boxed{= 37,5\,\%}$$

**Oefening 15**

Een massieve cilindervormige stang heeft een diameter $d = 21\,\text{mm}$ en lengte $\ell = 50\,\text{mm}$. We noemen het volume van deze stang $V$. Om deze stang in een productieproces te gebruiken, wordt van elk oppervlak (dus zowel van de mantel als van het boven- en onderoppervlak) een laagje met dikte $t = 0{,}5\,\text{mm}$ weggefreesd. We noemen het volume van de stang na frezen $V'$. Waaraan is verhouding $\frac{V'}{V}$ gelijk?




(A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{8}$ ✓ (D) $\frac{8}{9}$

Oplossing: D

juist beantwoord: 54 %

$$V = \pi r^2 . \ell = \pi \left(\frac{21}{2}\right)^2 . 50$$

$$V' \Rightarrow \ell = 50 - 2.0{,}5 = 49\ \text{mm}$$

$$d = 21 - 2.0{,}5 = 21\ \text{mm}$$

$$V' = \pi \left(\frac{20}{2}\right)^2 . 49$$

$$V = \frac{\pi}{4} (20+1)^2\ 50 = \frac{\pi}{4} (400 + 1 + 40)\ 50$$

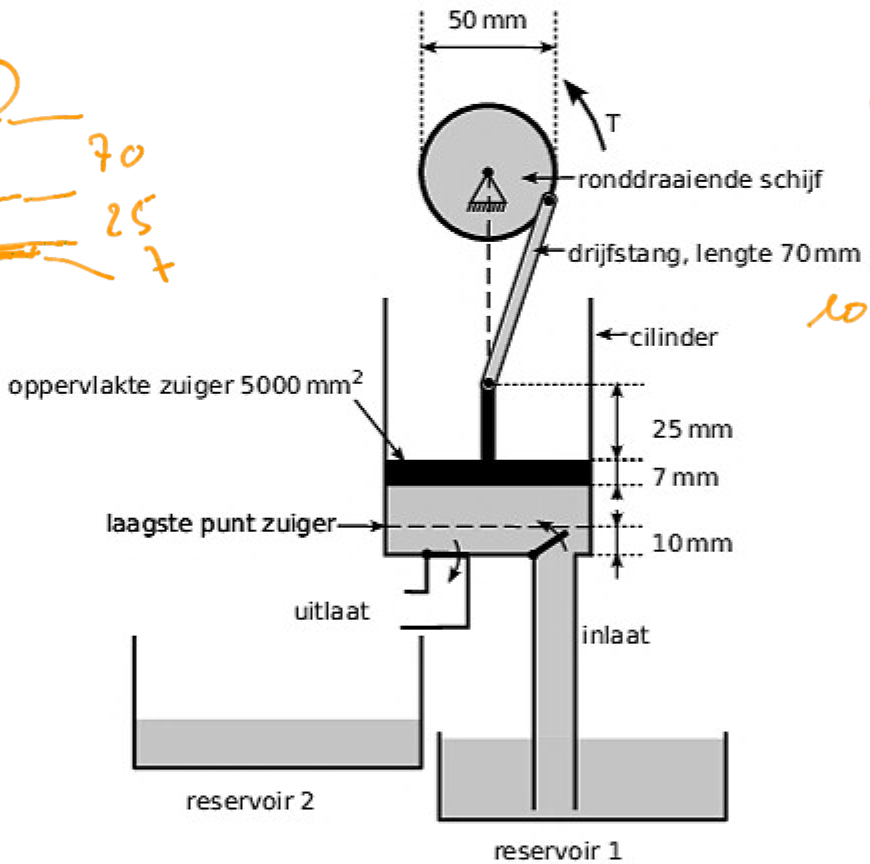
$$= \frac{\pi}{4} . 441 . 50 = \frac{\pi}{4} . 9 . 49 . 50$$

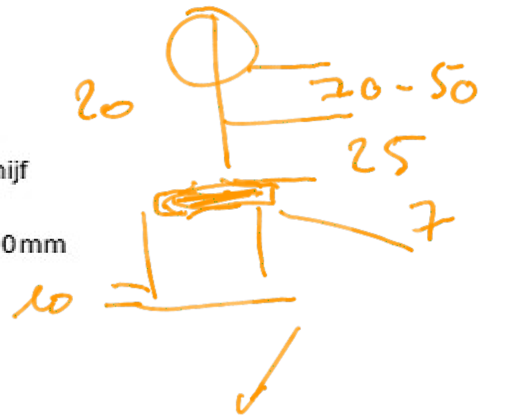
$$V' = \frac{\pi}{4}\ 400 . 49 = \pi . 100 . 49$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{\cancel{\pi} . 100 . \cancel{49}}{\frac{\cancel{\pi}}{4} . 9 . \cancel{49} . 50} = \frac{400}{9.50} = \frac{8.50}{9.50} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

**Oefening 16**

De figuur toont een zuigerpomp die een niet-samendrukbare vloeistof van reservoir 1 naar reservoir 2 pompt. De zuigerpomp bestaat uit een cilinder met twee kleppen in de bodem waarin een zuiger (zuigeroppervlakte $5000\,\text{mm}^2$ en dikte 7 mm) op en neer beweegt. Als de zuiger opwaarts beweegt, is de inlaatklep geopend (en de uitlaatklep gesloten) zodat de zuiger de vloeistof in de cilinder zuigt. Als de zuiger neerwaarts beweegt, is de uitlaatklep geopend (en de inlaatklep gesloten) zodat de zuiger de vloeistof naar de uitlaat duwt. De ruimte tussen de zuiger en de onderkant van de cilinder is steeds volledig gevuld met vloeistof. Op het laagste punt is er nog 10 mm tussen de zuiger en de onderkant van de cilinder. De zuiger beweegt op en neer doordat deze via zijn uiteinde (25 mm boven zuigeroppervlak) via een scharnierende drijfstang van 70 mm verbonden is met een schijf met diameter 50 mm die recht boven de zuiger staat en met constant toerental $T$ ronddraait in tegenwijzerzin. De zuigerpomp verpompt op 1 uur 6000 liter vloeistof. Bepaal het toerental $T$ uitgedrukt in toeren per minuut (tpm).


70
25
7
---
102

20
25
7
---
52

102
−52
---
50 mm

(A) $T = 400$ tpm (B) $T = 500$ tpm (C) $T = 625$ tpm (D) $T = 800$ tpm

Oplossing: A
juist beantwoord: 49 %

$6000\ \ell/h = \frac{6000}{60} = 100\ \ell/\text{min}$

$V/\text{slag} = 5000 \cdot 50 = 25000\ \text{mm}^2 = 25\ \text{cm}^2 = 0{,}25\ \text{dm}^3$
$= 0{,}25\ \ell$

$T = \frac{100\ \ell/\text{min}}{0{,}25\ \ell/\text{toer}} = 400\ \text{toeren}/\text{min}$

**Oefening 17**

Hoeveel verschillende reële oplossingen heeft de vergelijking $9^x + \frac{6}{3^x} = 7$?

(A) juist 0 (B) juist 1 ✓ (C) juist 2 (D) juist 3

Oplossing: C

juist beantwoord: 29 %

$(3^2)^x + \frac{6}{3^x} = 7 \Rightarrow (3^x)^2 + \frac{6}{3^x} = 7$

$\Rightarrow u = 3^x \Rightarrow u^2 - \frac{6}{u} = 7 \Rightarrow u^3 - 6 = 7u$

$u^3 - 7u - 6 = 0$

$u^3 - u - 6u - 6 = 0$

$u(u^2-1) - 6(u+1) = 0$

$u(u-1)(u+1) - 6(u+1) = 0$

$(u(u-1)-6)(u+1) = 0$

$(u^2-u-6)(u+1) = 0$

$\hookrightarrow \boxed{u = -1}$

$u = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$

$u = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$u < \begin{array}{l} 6/2 = \boxed{3} \\ -4/2 = \boxed{-2} \end{array}$

$\Rightarrow 1 = 3^x \Rightarrow x = 0$ ✓

$2 = 3^x \Rightarrow \ln(2) = x \ln(3)$

$x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ ✓

$-3 = 3^x$ ✗

$\hookrightarrow$ geen enkele macht van een positief getal is negatief!

**Oefening 18**

Bepaal het natuurlijk getal $n$ waarvoor geldt dat

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-2)^2} + \ldots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{(x-(n-1))^2} = 100.$$

(A) 50 (B) 100 (C) 150 ✓ (D) 200

Oplossing: D
juist beantwoord: 52 %

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2}\,dx = -x^{-1}\Big|_1^2 = -\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$u = x - 1$ grenzen: $\left.\begin{array}{l} 2-1 = 1 \\ 3-1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}$

$du = d(x-1) = dx$

$$\rightarrow n\left(\frac{1}{2}\right) = 100 \Rightarrow \boxed{n = 200}$$

**Oefening 19**

Rangschik volgende getallen van klein naar groot:

$$a = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(k+1)^{100}}$$

$$b = \sum_{k=1}^{100} \frac{k}{(k+1)!} = \sum \frac{k}{(k+1)\cdot k(k-1)!} = \sum \frac{1}{(k+1)(k-1)!}$$

$$c = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!}\right) = \sum \frac{(k+1)}{(k+1)!} - \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!}$$

(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $c < a < b$ (D) $c < b < a$

Oplossing: B

juist beantwoord: 44 %

$$(k+1)! > (k+1)(k-1)! \Rightarrow c < b$$

$$a = \sum \frac{1}{(k+1)^{100}} = \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{3^{100}} + \frac{1}{4^{100}} + \cdots$$

$$c = \sum \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$$\left.\right\} \quad x! < x^{100} \qquad a < c$$

$$\Rightarrow a < c < b$$

**Oefening 20**

Beschouw het vlak met cartesiaans assenstelsel $xy$ met daarin de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ en de rechte met vergelijking $3x + 4y = 100$. Beschouw het punt op de cirkel dat het dichtst bij deze rechte ligt. Wat is dan de afstand tussen dit punt en deze rechte?

(A) 12 √(B) 15 (C) 21 (D) 25

Oplossing: B
juist beantwoord: 55 %

$y = -\frac{3}{4}x + 25$

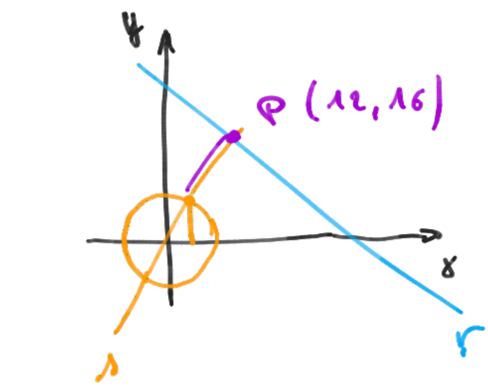
rico van straal ⊥ op rechte

$= -\frac{1}{-3/4} = \frac{4}{3} \Rightarrow s = \frac{4}{3}x$

snijpunt: $-\frac{3}{4}x + 25 = \frac{4}{3}x \Rightarrow \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right)x = 25$

$\left(\frac{16+9}{12}\right)x = 25 \Rightarrow x = 12$

$\Rightarrow y = \frac{4}{3}12 = 16$




$|OP| = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400}$

$= 20$

$\Rightarrow$ Afstand $= 20 - 5 = \boxed{15}$

**Oefening 21**

Een robot rijdt op een rechte lijn, met een snelheid $v$ die afhangt van de tijd $t$:

$v(t) = v_0 \sin(\omega t)\,[\cos(\omega t)]^{-\frac{1}{2}}$, met $\omega = 0{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$ en $v_0 = 1\,\mathrm{mm/s}$.

Als de robot op tijdstip $t = 0\,\mathrm{s}$ over het startpunt rijdt, hoever is de robot dan verwijderd van dit startpunt op tijdstip $t = \dfrac{2\pi}{3}\,\mathrm{s}$? Rond af tot 0,1 mm nauwkeurig.

√ (A) 1,2 mm (B) 1,8 mm (C) 2 mm (D) 2,8 mm

Oplossing: A

juist beantwoord: 38 %

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

$$\Rightarrow s = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} v_0 \sin(\omega t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos(\omega t)}}\,dt = v_0 \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{-d(\cos(\omega t))}{\omega \cdot \sqrt{\cos(\omega t)}}$$

$$= -\frac{v_0}{\omega} \cdot \frac{1}{1/2} \cdot \sqrt{\cos(\omega t)}\,\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= -\frac{1}{1/2} \cdot 2 \left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{2}\frac{3}{2}\pi\right)} - \sqrt{\cos(0)}\right)$$

$$= -4\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{1}\right) = -4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})$$

$$= 1{,}1715\ldots\,\mathrm{mm} \approx \boxed{1{,}2\,\mathrm{mm}}$$

**Oefening 22**

Beschouw de veeltermen $P(x) = \sum_{n=1}^{2023} x^{n-1}$ en $Q(x) = x - i$ met $i$ de imaginaire eenheid. Wat is de rest na deling van $P(x)$ door $Q(x)$?

(A) $-1$ (B) $1$ ✓ (C) $i$ (D) $-i$

Oplossing: C

juist beantwoord: 34 %

$$P(x) = \overset{x^0}{1} + x^1 + x^2 + \dots + x^{2022}$$

Reststelling:

$$P(i) = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2022}$$

$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 . i = -i$
$i^4 = i^2 . i^2 = 1$
$i^5 = i^4 . i = i$

$i^6 = i^4 . i^2 = -1$
$i^7 = i^4 i^3 = -i$
$i^8 = i^4 . i^4 = 1$
$i^9 = i^5 i^4 = i$

$i^{10} = i^5 . i^5 = i^2 = -1$
$i^{11} = i^6 i^5 = -i$
$i^{12} = i^6 . i^6 = 1$
$i^{13} = i^7 . i^6 = i$

macht deelbaar door 4 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ volgende $= i$
2 $\rightarrow$ $-1$ $\rightarrow$ volgende $= -i$

$2022/4 = 500 + \frac{11}{2}$ ✗ $\rightarrow i^{2022} = -1$
$2020/4 = 500 + 5$ ✓ $\rightarrow i^{2020} = 1 \Rightarrow i^{2021} = i$
$2018/4 = 500 + \frac{9}{4}$ ✗ $\rightarrow i^{2018} = -1 \Rightarrow i^{2019} = -i$
$2016/4 = 500 + 4$ ✓ $\rightarrow i^{2016} = 1 \Rightarrow i^{2017} = i$

$i^2 \rightarrow i^{2022}$

$$-1 - i + 1 + i - 1 + i - 1 + \dots \dots + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1$$

0

$$P(i) = 1 + i - 1 = \boxed{i}$$

**Oefening 23**

Gegeven de functies

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = 2^{10-x}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = (2\sqrt{2})^x$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ als } f(x) \geq g(x) \\ g(x) \text{ als } g(x) > f(x). \end{cases}$

Verder is het getal $a$, het getal waarvoor $f(a) = g(a)$.

Bepaal $\int_0^a h(x)\,dx$.

(A) $\frac{512}{\ln 2}$ (B) $\frac{720}{\ln 2}$ ✓ (C) $\frac{960}{\ln 2}$ (D) $\frac{1024}{\ln 2}$

Oplossing: C

juist beantwoord: 49 %

$g(x) = (2^{3/2})^x = 2^{(\frac{3}{2}x)}$

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2^{10-x} = 2^{(\frac{3}{2}x)}$

$\Rightarrow 10 - x = \frac{3}{2}x$

$20 - 2x = 3x$

$20 = 5x$

$\Rightarrow x = \frac{20}{5} = 4$

$a = 4$

$y = 2^{(10-4)} = 2^6 = 64$

$y = 2^{(\frac{3}{2}\cdot 4)} = 2^6 \Longleftrightarrow$

tussen 0 en a

$\Rightarrow h = f(x)$

$h = 2^{(10-x)}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

$\Rightarrow \int (a^x)'\,dx = \int a^x \ln(a)\,dx$

$\Rightarrow a^x = \ln(a) \int a^x\,dx$

$\Rightarrow \int a^x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

$10 - x = u$

$dx = -du$

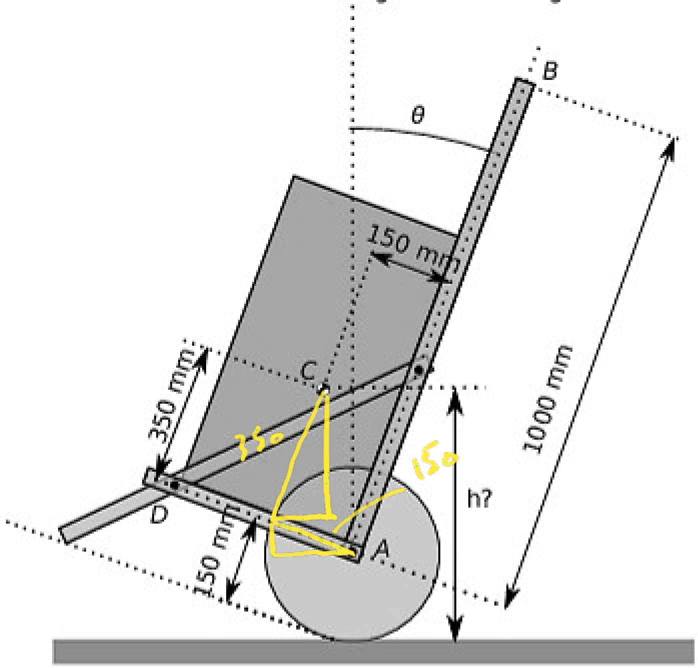
$$\int 2^{(10-x)}\,dx = -\int 2^u\,du = \frac{-2^u}{\ln(2)} + C$$

$$\Rightarrow -\frac{2^{(10-x)}}{\ln(2)}\Bigg|_0^4 = -\frac{2^{10}}{\ln(2)}\,\frac{1}{2^x}\Bigg|_0^4 = -\frac{2^{10}}{\ln(2)}\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^0}\right)$$

$$= -\frac{2^{10}}{\ln(2)}\left(\frac{1}{16} - \frac{16}{16}\right) = \frac{2^{10}\cdot 15}{\ln(2)\cdot 2^4} = \frac{2^6\cdot 15}{\ln(2)} = \frac{640 + 320}{\ln(2)} = \boxed{\frac{960}{\ln(2)}}$$

**Oefening 24**

Onderstaande figuur toont een zijaanzicht van een boodschappenkar op een horizontale vloer. De kar bestaat uit twee wielen met straal 150 mm, een centrale wielas door $A$, een frame $ABD$ en een zak (donkergrijze rechthoek op de figuur). De stangen $AB$ en $AD$ van het frame staan loodrecht op elkaar. Het frame met de zak is gekanteld en de stang $AB$ maakt een hoek $\theta$ met de verticale. De kar is gevuld met boodschappen en het zwaartepunt van de kar met boodschappen bevindt zich in het punt $C$, op 350 mm van de centrale as van de stang $AD$ en op 150 mm van de centrale as van de stang $AB$. Hoe hoog bevindt dit punt $C$ zich boven de vloer?



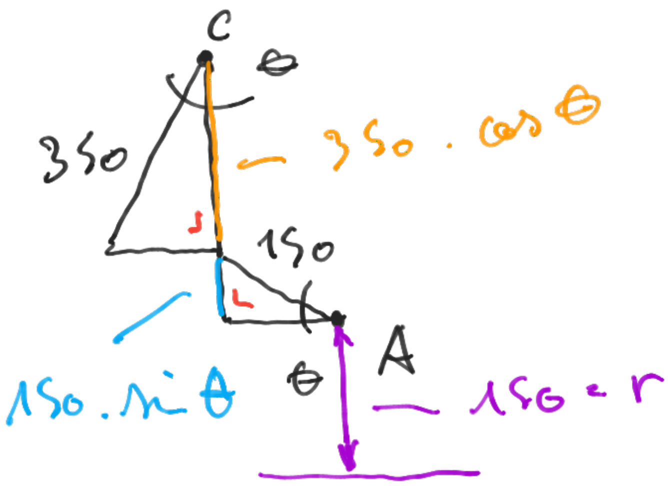

(A) $\dfrac{500}{\cos\theta}$ mm

(B) $\left(150 + \dfrac{350}{\cos\theta}\right)$ mm

(C) $(150 + 350\cos\theta)$ mm

(D) $(150 + 150\sin\theta + 350\cos\theta)$ mm

Oplossing: D
juist beantwoord: 20 %




$h = (150 + 150 \cdot \sin\theta + 350\cos\theta)$ mm

**Oefening 25**

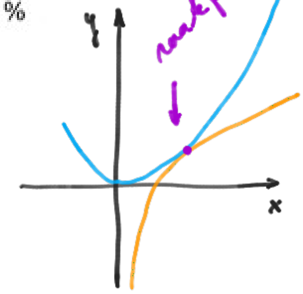
Bepaal de positieve constante $C$ zodat de verzameling $\{x \in \mathbb{R}_0^+ : \ln(x) = Cx^2\}$ precies één element bevat. In welk interval ligt $\frac{1}{C}$?

(A) $\left[4, \frac{9}{2}\right[$ (B) $\left[\frac{9}{2}, 5\right[$ (C) $\left[5, \frac{11}{2}\right[$ (D) $\left[\frac{11}{2}, 6\right[$

Oplossing: C

juist beantwoord: 30 %

raakpunt! → zelfde raaklijn!




① $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$(Cx^2)' = 2Cx$

$\frac{1}{x} = 2Cx \Rightarrow 2Cx^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2C}$

② $\ln(x) = Cx^2$

① + ② : $\ln(x) = \cancel{C} \cdot \frac{1}{2\cancel{C}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{1/2} = \sqrt{e}$

$y = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\ln(e)$

$y = \frac{1}{2}$

$C = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$

$\Rightarrow \frac{1}{C} = 2e = 2 \cdot 2{,}71828\ldots = 5{,}43656\ldots$

$> 5 \qquad < \frac{11}{2} = 5{,}5$

C

**Oefening 26**

Beschouw een reëel getal $x$ met $0 < x < 1$. In de decimale vorm van $x$ staan negen cijfers na de komma. De eerste acht cijfers na de komma zijn 0. Het negende cijfer na de komma is strikt groter dan 3. Het getal $x^2$ heeft een decimale vorm die begint met een aantal nullen na de komma. Hoeveel nullen staan er in deze decimale vorm van $x^2$ na de komma, vóór het eerste cijfer dat verschillend is van 0?

(A) 7 (B) 8 (C) 16 (D) 17

Oplossing: C

juist beantwoord: 62 %

$0,\overbrace{00000000}^{8}x$

$= x \cdot 10^{-9}$ met $x : ]3,9]$

$(4 \cdot 10^{-9})^2 = 16 \cdot 10^{-18} = 1,6 \cdot 10^{-17} \rightarrow 16$

$(9 \cdot 10^{-9})^2 = 81 \cdot 10^{-18} = 8,1 \cdot 10^{-17} \rightarrow 16$

**Oefening 27**

De vergelijking $x^2 - 6x + 3 = 0$ met onbekende $x \in \mathbb{R}$ heeft twee oplossingen die we noteren als $\tan(\alpha)$ en $\tan(\beta)$. Bepaal dan $\tan(\alpha + \beta)$.

(A) $-3$ (B) $-2$ (C) $2$ (D) $3$

Oplossing: A

juist beantwoord: 46 %

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = 3 \pm \frac{\sqrt{36 - 12}}{2}$$

$$= 3 \pm \sqrt{\frac{24}{4}} = 3 \pm \sqrt{6}$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\, \text{tg}\,\beta} = \frac{3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6}}{1 - (3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})}$$

$$= \frac{6}{1 - (9 - 6)} = \frac{6}{-2} = -3$$

**Oefening 28**

Een kansspel met een onvervalst muntstuk verloopt als volgt: bij het gooien van munt ontvangt men 1 euro, bij het gooien van kruis verliest men 1 euro. Wat is de kans dat na 10 speelbeurten de nettowinst precies 4 euro bedraagt?

(A) $\frac{45}{1024}$ ✓ (B) $\frac{15}{128}$ (C) $\frac{35}{256}$ (D) $\frac{105}{512}$

Oplossing: B
juist beantwoord: 36 %

Winst = 4 euro $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} +7 \text{ euro} \\ -3 \text{ euro} \end{array}\right\}$ 10 beurten

$\overline{+4 \text{ euro}}$

$p = \frac{1}{2}$ zowel kruis als munt

Binomiale verdeling

$\Rightarrow P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $n = 10$, $k = 7$

$$P(X=7) = C_{10}^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{(10-7)}$$

$$= \frac{10!}{7!\,(10-7)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{10 \cdot 3}{256} = \frac{5 \cdot 3}{128}$$

$$= \boxed{\frac{15}{128}}$$

**Oefening 29**

Gegeven de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-2023)$.

Wat is de waarde van $\dfrac{f\left(\frac{2023}{2}\right)}{f\left(\frac{2025}{2}\right)}$?

(A) $-\dfrac{1}{2023}$ (B) $-1$ (C) $1$ (D) $\dfrac{1}{2023}$

Oplossing: B

juist beantwoord: 39 %

$$f\left(\frac{2023}{2}\right) = \left(\frac{2023}{2}-\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2023}{2}-\frac{4}{2}\right)\cdots\left(\frac{2023}{2}-\frac{4046}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2021}{2}\right)\left(\frac{2019}{2}\right)\left(\frac{2017}{2}\right)\cdots\left(\frac{2021}{2}\right)\left(\frac{2023}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{2025}{2}\right) = \left(\frac{2025}{2}-\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2025}{2}-\frac{4}{2}\right)\cdots\left(\frac{2025}{2}-\frac{4046}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2023}{2}\right)\left(\frac{2021}{2}\right)\left(\frac{2019}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2021}{2}\right)$$

$$\frac{f\left(\frac{2023}{2}\right)}{f\left(\frac{2025}{2}\right)} = \frac{\cancel{\left(\frac{2021}{2}\right)}\cancel{\left(\frac{2019}{2}\right)}\cancel{\left(\frac{2017}{2}\right)}\cdots\cancel{\left(\frac{2021}{2}\right)}\cancel{\left(\frac{2023}{2}\right)}}{\cancel{\left(\frac{2023}{2}\right)}\cancel{\left(\frac{2021}{2}\right)}\cancel{\left(\frac{2019}{2}\right)}\cancel{\cdots}\underbrace{\cancel{\left(-\frac{2021}{2}\right)}}_{-1}}$$

$$= \boxed{-1}$$

**Oefening 30**

Er wordt een bewering gemaakt over een natuurlijk getal $n$. Over die bewering worden volgende uitspraken gedaan:

uitspraak $\alpha$: De bewering is waar als en slechts als $n$ even is. → × 6 = even, geen 4-voud
uitspraak $\beta$: De bewering is waar als $n$ even is. → × 6
uitspraak $\gamma$: De bewering is waar als en slechts als $n$ een viervoud is. → × 6
uitspraak $\delta$: De bewering is waar als $n$ een viervoud is. ✓

Als je weet dat slechts één van bovenstaande uitspraken correct is, welke moet dat dan zijn?

(A) uitspraak $\alpha$ (B) uitspraak $\beta$ (C) uitspraak $\gamma$ ✓ (D) uitspraak $\delta$

Oplossing: D
juist beantwoord: 18 %

Bewering: als n een viervoud is, dan is n even.

$\alpha$: bewering alleen waar voor even getallen, niet voor oneven.

$\beta$: bewering waar als n even is.
⇒ sommige of alle even getallen
⇒ sommig of alle oneven getallen (niet uitgesloten!)

$\gamma$: bewering alleen waar als en slechts als n een viervoud is.
⇒ 4, 8, 12, ...

$\delta$: bewering waar als n een viervoud is
⇒ sommige of alle viervouden
⇒ sommige of alle niet-viervouden (niet uitgesloten!)