Oefening 1

De euclidische deling van de veelterm $ax^2 + bx + c$ (met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$) door $x + 2$ heeft als quotiënt $2x + 3$ en rest $r \in \mathbb{R}_0$. Wat is de waarde van b in deze veelterm?

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7

Oplossing: D

juist beantwoord: 91 %

$(x+2)(2x+3) + r$

$2x^2 + 3x + 4x + 6 + r$

$2x^2 + \underline{7x} + 6 + r$

Oefening 2

Beschouw het volgende stelsel vergelijkingen in de onbekenden $x, y \in \mathbb{R}$ en met parameter $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 5a\,. \end{cases}$$

Voor hoeveel waarden van a heeft het stelsel oneindig veel oplossingen (x, y)?

(A) 0 ✓ (B) juist 1 (C) juist 2 (D) oneindig veel

Oplossing: B

juist beantwoord: 85 %

$$(2x - 3y = 5) \times 3$$
$$-6x + 9y = 5a$$

$$6x - 9y = 15$$
$$-6x + 9y = 5a$$
$$0 + 0 = 15 + 5a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{15}{5} = -3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = -15 \end{cases} \times -3$$

geen onafhankelijke vergelijkingen!

$\Rightarrow \infty$ veel oplossingen

Oefening 3

Steven heeft een bedrag van 3000 euro belegd in twee verschillende delen. Het eerste deel werd belegd tegen een interest van 1 % per jaar, het tweede deel tegen een interest van 2 % per jaar. Na één jaar had Steven in totaal 54 euro interest. Hoeveel bedraagt het grootste van de twee delen die hij belegd heeft?

(A) 1800 euro (B) 2000 euro (C) 2200 euro ✓ (D) 2400 euro

Oplossing: D

juist beantwoord: 94 %

$$x \cdot 0{,}01 + y \cdot 0{,}02 = 54$$

$$\frac{x}{100} + \frac{2y}{100} = 54 \Rightarrow x + 2y = 5400$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5400 \\ (-x - y = -3000) \end{cases} \quad x\ -1$$

$$0 + y = \underline{2400}$$

Oefening 4

Gegeven het vlak met cartesiaans assenstelsel xy met daarin de rechte met parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

en de rechte met cartesiaanse vergelijking $2y - p = px$, waarbij p het reëel getal is zodat beide rechten evenwijdig zijn. Waaraan is p gelijk?

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

Oplossing: D
juist beantwoord: 82 %

$$\lambda = x + 2 = y + 1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = x + 2$$
$$\lambda = y + 1$$

$$0 = x - y + 1 \Rightarrow y = x + 1$$

$$2y - p = px \Rightarrow 2y = px + p$$

$$\Rightarrow y = \frac{p}{2}x + \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = \boxed{2}$$

Oefening 5

Welke van de volgende limieten is gelijk aan 0?

(A) $\lim_{x\to 0}\left(x^2\left(\frac{1}{x^4}-3\right)\right)$ (B) $\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ (C) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}$ (D) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{x^2+4x}$

Oplossing: C

juist beantwoord: 78 %

A : $\frac{x^2}{x^4} - 3x^2 = \frac{1}{x^2} - 3x^2 \Rightarrow \infty$

B : $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

C : $e^{-x^2} \Rightarrow$

$x = 0 \Rightarrow e^0 = 1$

$x = -1 \Rightarrow e^{-1} = 1/e < 1$

$x = -2 \Rightarrow e^{-2} = 1/e^2 < 1/e$

$x = -3 \Rightarrow e^{-3} = 1/e^3 < 1/e^2$

$x = -\infty \Rightarrow e^{-\infty} = 1/e^{\infty} = 0$

D : $/x^2 \Rightarrow \frac{1 - 2/x^2}{1 + 4/x} \Rightarrow 1$

Oefening 6

Bereken de afgeleide van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = e^{2x\sin(2x)}$.

(A) $2(\sin(2x) + 2x\cos(2x))\, e^{2x\sin(2x)}$

(B) $2(\sin(2x) + x\cos(2x))\, e^{2x\sin(2x)}$

(C) $e^{2\cos(2x)}$

(D) $e^{4\cos(2x)}$

Oplossing: A

juist beantwoord: 93 %

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u = 2x \sin(2x)$$

$$\frac{du}{dx} = 2\sin(2x) + 2x\cos(2x) \cdot 2$$

$$= 2(\sin(2x) + 2x\cos(2x))$$

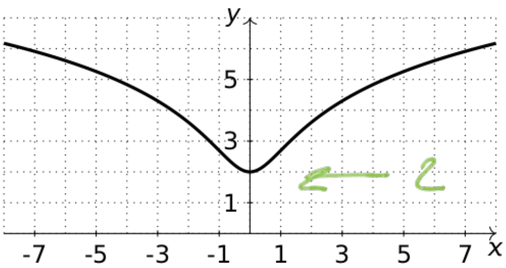
$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = (e^u)' = e^u \Rightarrow e^{2x\sin(2x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(\sin(2x) + 2x\cos(2x))\, e^{2x\sin(2x)}$$

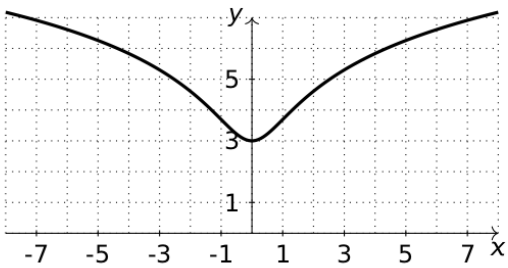
Oefening 7

Welke van onderstaande figuren toont de grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = 2 + \ln(x^2 + 1)$?

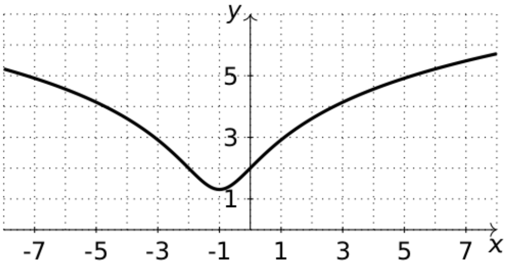
(A)



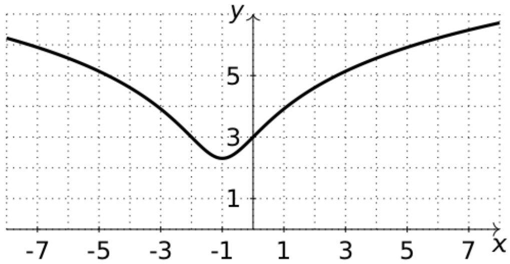
(B)



(C)



(D)



Oplossing: A
juist beantwoord: 84 %

$f(0) = 2 + \ln(0+1) = 2 + \ln(1) = \underline{2+0}$

Oefening 8
Bepaal de integraal $\int_1^e \frac{1+3\sqrt[4]{x}}{x}\,dx$.

(A) $12\sqrt[4]{e}-12$ (B) $12\sqrt[4]{e}-11$ (C) $\frac{9}{4}-\frac{9}{4\sqrt[4]{e^7}}$ (D) $\frac{13}{4}-\frac{9}{4\sqrt[4]{e^7}}$

Oplossing: B
juist beantwoord: 85 %

$$\int \frac{1}{x}\,dx + 3\int \frac{x^{1/4}}{x}\,dx$$

$$\ln x + 3\int x^{\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{4}\right)}\,dx$$

$$\ln x + 3\int x^{-3/4}\,dx$$

$$\ln x + 3\left(\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}+\frac{4}{4}\right)}\,x^{\left(-\frac{3}{4}+\frac{4}{4}\right)}\right)$$

$$\ln x + 3\left(4\,x^{1/4}\right)$$

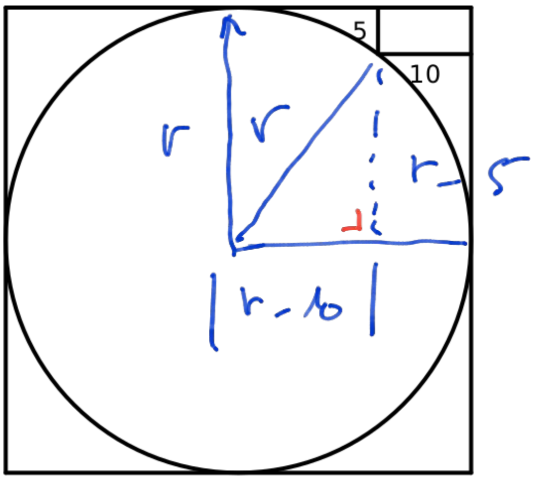
$$\Rightarrow \left(\ln x + 12\sqrt[4]{x}\right)\Big|_1^e$$

$$= \left(\ln(e) + 12\sqrt[4]{e}\right) - \left(\ln(1) + 12\right)$$

$$= 1 + 12\sqrt[4]{e} - 0 - 12 = \boxed{12\sqrt[4]{e} - 11}$$

Oefening 9

De figuur toont een vierkant en een ingeschreven cirkel. In de rechterbovenhoek van het vierkant tekenen we een rechthoek met zijden 10 en 5. We stellen vast dat de rechthoek helemaal buiten de cirkel ligt en dat één hoekpunt van de rechthoek op de cirkel ligt. Wat is de straal van de cirkel?



(A) 25 ✓

(B) $15\sqrt{3}$

(C) 8π

(D) $20\sqrt{2}$

Oplossing: A
juist beantwoord: 57 %

$$r^2 = (r-10)^2 + (r-5)^2$$

$$\cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 100 - 20r + r^2 + 25 - 10r$$

$$0 = r^2 - 30r + 125$$

$$r = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4 \cdot 1 \cdot 125}}{2}$$

$$= 15 \pm \frac{\sqrt{900 - 500}}{2} = 15 \pm \frac{\sqrt{400}}{2}$$

$$= 15 \pm 10 \begin{cases} 25 & ✓ \\ 5 & ✗ \end{cases}$$

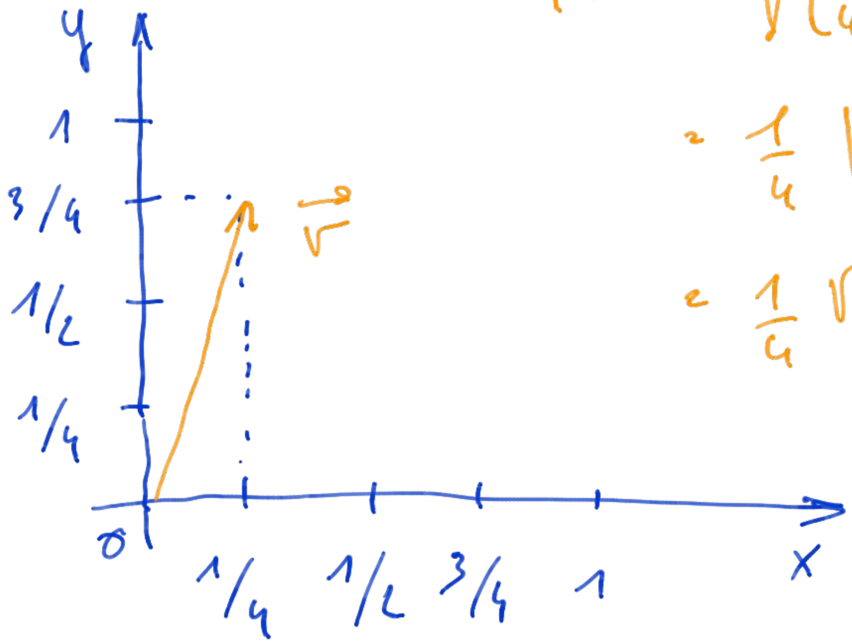
Oefening 10

In het xy-vlak beschouwen we de vector $\vec{v} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. De vector $\vec{p}$ met lengte $||\vec{p}|| = 10$ heeft dezelfde richting en zin als de vector $\vec{v}$. Bepaal de x-coördinaat van $\vec{p}$.

(A) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\sqrt{10}$ (D) 10

Oplossing: C
juist beantwoord: 80 %

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{1^2 + 3^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10}$$



$$\frac{\cancel{1/4}\sqrt{10}}{10} = \frac{\cancel{1/4}}{x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}}$$

schuine zijde

grondvlak

Oefening 11
Beschouw de complexe getallen

$$z_1 = -1 + i \quad \text{en} \quad z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Welke van de volgende complexe getallen ligt het verste van de oorsprong in het complexe vlak?

(A) z_1 (B) z_2 ✓ (C) $z_1 \cdot z_2$ (D) $z_1 + z_2$

Oplossing: C
juist beantwoord: 68 %

$z_1 \Rightarrow \quad r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$

$z_2 \Rightarrow \quad r = \underline{\underline{2}} \qquad \alpha = -\frac{\pi}{6}$

$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

$\frac{9\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}$

$\frac{7\pi}{12}$

$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{-\frac{\pi}{6}}$

$= 2\sqrt{2}\, e^{7\pi/12}$

$\approx \underline{\underline{2{,}8}}\, e^{7\pi/12}$ ✓

$z_1 + z_2 = -1 + i + 2\frac{\sqrt{3}}{2} - i\, 2 \cdot \frac{1}{2}$

$= \sqrt{3} - 1 + 0i$

$\approx \underline{\underline{0{,}7}}$

Oefening 12

Gegeven is het vlak met daarin de gelijkzijdige driehoek ABC. Kies het punt D zodat $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. Welke van onderstaande uitspraken over de driehoek ADC is dan geldig?

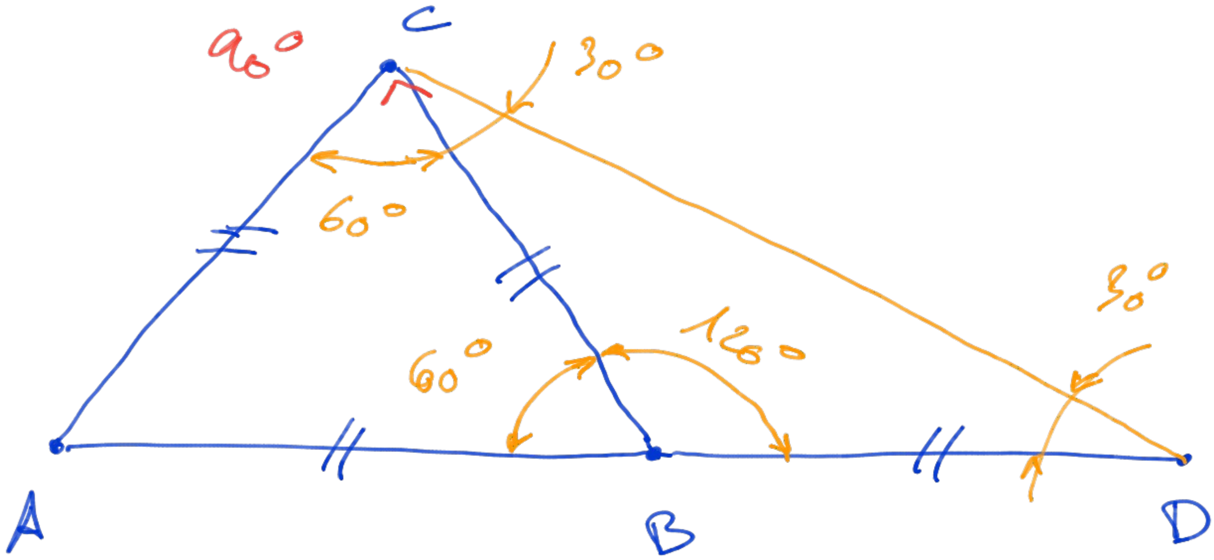
(A) De driehoek is een gelijkbenige driehoek.

(B) De driehoek is een scherphoekige driehoek die niet gelijkbenig is.

✓ (C) De driehoek is een rechthoekige driehoek die niet gelijkbenig is.

(D) De driehoek is een stomphoekige driehoek die niet gelijkbenig is.

Oplossing: C
juist beantwoord: 63 %



Oefening 13

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = 2x^2 + px + p - 1$ en de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Bepaal de verzameling van alle waarden van $p \in \mathbb{R}$ waarvoor de grafieken van f en g geen gemeenschappelijke punten hebben.

(A) $\{2, 6\}$ (B) $\{3, 4, 5\}$ (C) $[3, 5]$ ✓ (D) $]2, 6[$

Oplossing: D
juist beantwoord: 76 %

$$2x^2 + px + p - 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + (p-2)x + (p-2) = 0$$

$D = 0 \Rightarrow$ 1 punt gemeenschappelijk

$$(p-2)^2 - 4.1.(p-2) = p^2 + 4 - 4p - 4p + 8$$

$$= p^2 - 8p + 12$$

$$p = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4.1.12}}{2} = 4 \pm \frac{\sqrt{16}}{2} \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dus bij $p \Rightarrow 2 \leq p \leq 6$
hebben beide grafieken minstens
1 punt gemeenschappelijk, anders
niet

$\Rightarrow p \Rightarrow]2, 6[$ geen gemeenschappelijke
punten

Oefening 14

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = -e^{x^2-3x}$. Het getal m is het maximum van deze functie f. Welke van onderstaande uitspraken over m is dan geldig?

(A) $m \leq -1$ ✗ (B) $-1 < m \leq -e^{-1}$ ✗ (C) $-e^{-1} < m \leq -e^{-2}$ ✗ (D) $-e^{-2} < m$ ✓

Oplossing: D

juist beantwoord: 63 %

$$\max \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u = x^2 - 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 3$$

$$\Rightarrow \frac{d(-e^u)}{du} = -e^u$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^{x^2-3x} \cdot (2x-3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -e^{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)\right)} = -e^{\left(\frac{9}{4} - \frac{18}{4}\right)} = -e^{-9/4}$$

m

$$\simeq -\frac{1}{e^2} \simeq -\frac{1}{9} = -0{,}111$$

$$\boxed{\frac{1}{e^2} > \frac{1}{e^{9/4}} = \frac{1}{e^2 \cdot e^{1/4}} \Rightarrow -\frac{1}{e^2} < \frac{-1}{e^{9/4}}}$$

Oefening 15

Zij x_1 en x_2 twee verschillende oplossingen van de vergelijking $\sin(2x+\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Waaraan kan $x_1 - x_2$ **niet** gelijk zijn?

✓ (A) $\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) π

Oplossing: A
juist beantwoord: 56 %

$$\sin(2x+\pi) = -\sin(2x) \Rightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x = -45^\circ = -\frac{\pi}{4} \qquad 2x = -135^\circ = -\frac{3\pi}{4}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + k\,2\pi \qquad x = -\frac{3\pi}{8} + k\,2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \dots -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \dots$$

Kleinste verschil $= \frac{7\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{\pi}{8}$ kan niet

$$\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{5\pi}{8} - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\pi \Rightarrow \frac{7\pi}{8} - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{8\pi}{8} = \pi$$

Oefening 16

Gegeven is volgende matrixvergelijking in de onbekenden $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Welke van onderstaande uitspraken is geldig?

(A) De matrixvergelijking heeft geen oplossing.

(B) De matrixvergelijking heeft juist één oplossing.

✓ (C) De matrixvergelijking heeft oneindig veel oplossingen. Voor elke oplossing geldt dat $b \neq 1$.

(D) De matrixvergelijking heeft oneindig veel oplossingen. Voor elke oplossing geldt dat $c \neq 1$.

Oplossing: C

juist beantwoord: 50 %

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+b+3c & a+b+c & 2a+0b+2c \\ 0+d+3e & 0+d+e & 0+0d+2e \\ 0+0+3f & 0+0+f & 0+0+2f \end{pmatrix}$$

$3a+b+3c=2 \qquad a+b+c=0 \qquad 2a+2c=2$

$d+3e=2 \qquad d+e=1 \qquad 2e=1$

$3f=6 \qquad \boxed{f=2} \qquad 2f=4$

$a+c=1$

$\boxed{e=1/2}$

$3a+3c=3$

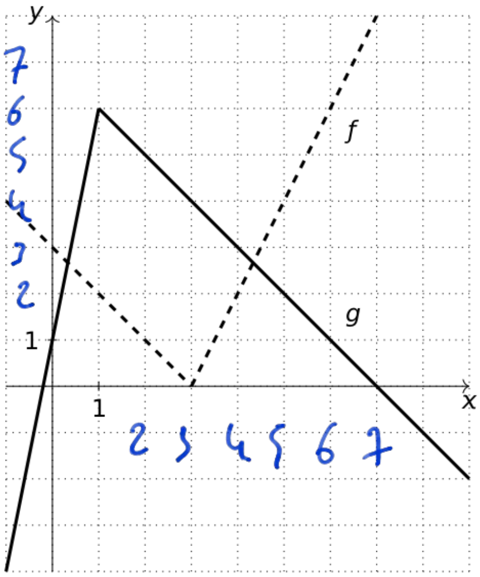
$\boxed{d=1/2}$

$b+3=2 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

a en c niet te bepalen ⇒ ∞ veel oplossingen

Oefening 17

Gegeven zijn de grafieken van de functies $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. We noteren met w de functie met voorschrift $w(x)=f(x)\,g(x)$. Bepaal de afgeleide $w'(4)$.



$x \geq 4$

$f(x) = -x + 7$

$g(x) = 2x + b$

$g = 0 \Rightarrow x = 3$

$\Rightarrow 0 = 2.3 + b$

$\Rightarrow b = -6$

$\Rightarrow g(x) = 2x - 6$

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ ✓ (C) 4 (D) 8

Oplossing: C
juist beantwoord: 77 %

$\Rightarrow f(x)\,g(x) = (-x+7)(2x-6) = w(x)$

$= -2x^2 + 6x + 14x - 42$

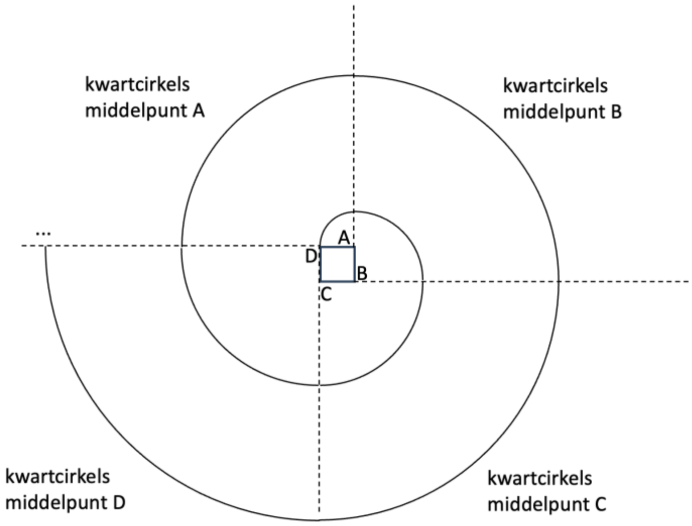
$= -2x^2 + 20x - 42$

$(w(x))' = -4x + 20$

$w'(4) = -4(4) + 20 = -16 + 20 = 4$

Oefening 18

Gegeven een vierkant, met hoekpunten A, B, C en D en zijde 1. We construeren een spiraal, via een aaneenschakeling van kwartcirkels, waarbij het middelpunt van de cirkels achtereenvolgens A, B, C en D is, een constructie die we nadien herhalen. Bijhorende figuur illustreert deze constructie voor 2 windingen van de spiraal (we hebben hier dus vanuit elk hoekpunt van het vierkant twee kwartcirkels geconstrueerd). Bepaal de totale lengte van de eerste 25 windingen van deze spiraal.



$A \to r = 1$
$B \to r = 2$
$C \to r = 3$
$D \to r = 4$
$A \to r = 5$

1 winding → $4 \times 25 = 100$

(A) 2400π (B) 2425π (C) 2500π (D) 2525π

Oplossing: D
juist beantwoord: 66 %

lengte 1 $= \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi}{2} r$

totaal voor 25 : $\frac{\pi}{2}\left(1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100\right)$

101

101

$\frac{n}{2}(n+1) = \frac{100}{2}(100+1)$

$= 50 \cdot 101$

$= 5050$

$\frac{\pi}{2} \cdot 5050 = \boxed{2525\,\pi}$

Oefening 19

Bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $P(2,2)$ aan de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$.

(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$

Oplossing: C
juist beantwoord: 64 %

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$$
$$y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2$$
$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + \underbrace{29 - 25}_{= +4}$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} M = (5,-2) \\ r = 5 \end{cases}$$

bovenkant cirkel

$$\text{of } y = -2 + \sqrt{25 - (x-5)^2}$$
$$= -2 + \sqrt{25 - x^2 - 25 + 10x}$$
$$= -2 + \sqrt{10x - x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}} = \frac{5 - x}{\sqrt{10x - x^2}}$$

$$\Rightarrow \text{rico} \rightarrow \frac{5-2}{\sqrt{20-4}} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Oefening 20

Een object hangt aan een veer en beweegt op en neer, waarbij de hoogte h van het object als functie van de tijd t gegeven wordt door $h(t) = 5A + A\sin(\omega t)$, met A een positieve constante en $\omega = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{s}^{-1}$. De totale afstand afgelegd door dit object tussen het tijdstip $t = 0\,\mathrm{s}$ en $t = 215\,\mathrm{s}$ noemen we d. In welk van onderstaande intervallen ligt d?

(A) $[20A, 30A[$ (B) $[30A, 40A[$ ✓ (C) $[40A, 50A[$ (D) $[50A, 100A[$

Oplossing: C
juist beantwoord: 53 %

$$v = \frac{dh}{dt} = 0 + A\cdot\omega\cos(\omega t) = A\cdot\frac{\pi}{10}\cos\left(\frac{\pi}{10}\cdot t\right)$$

$$d = \int_0^t |v(t)|\,dt = \int_0^t \left|A\frac{\pi}{10}\cos\left(\frac{\pi}{10}\cdot t\right)\right| dt = A\cdot\frac{\pi}{10}\int_0^t \left|\cos\left(\frac{\pi}{10}\cdot t\right)\right| dt$$

↳ absolute waarde anders = 0 over 1 periode!

$\Rightarrow$ $|\cos|$ = periodiek om de 10 s

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{10}(t+10)\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{10}t + \pi\right)\right| = \left|-\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)\right|$$

$\Rightarrow$ over 1 periode $\Rightarrow t = 0 \rightarrow t = 10$

$$\int_0^{10} \left|\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)\right| dt \quad \Big| \quad \theta = \frac{\pi}{10}t \Rightarrow d\theta = \frac{\pi}{10}dt \Rightarrow dt = \frac{10}{\pi}d\theta$$

$t = 0 \Rightarrow \theta = 0$, $t = 10 \Rightarrow \theta = \pi$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} |\cos\theta|\,\frac{10}{\pi}\,d\theta$$

$0 \Rightarrow \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = +$

$\pi/2 \Rightarrow \pi \Rightarrow \cos\theta = -$

$\rightarrow -\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{10}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\,d\theta\right] = \frac{10}{\pi}\left[\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} - \sin\theta\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

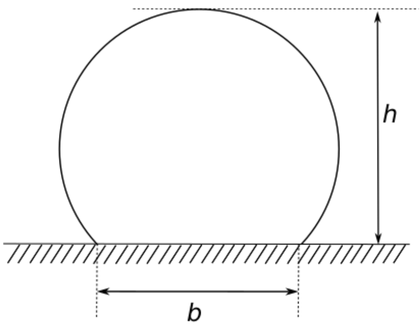
$$= \frac{10}{\pi}\left[(1-0) - (0-1)\right] = \boxed{\frac{20}{\pi}} \Rightarrow \boxed{d_p = A\cdot\frac{\pi}{10}\cdot\frac{20}{\pi} = 2A}$$

Aantal periodes: $\frac{215}{10} = 21{,}5$

$\Rightarrow d = 21{,}5 \cdot 2A = 43A \rightarrow$ tussen $40A$ en $50A$

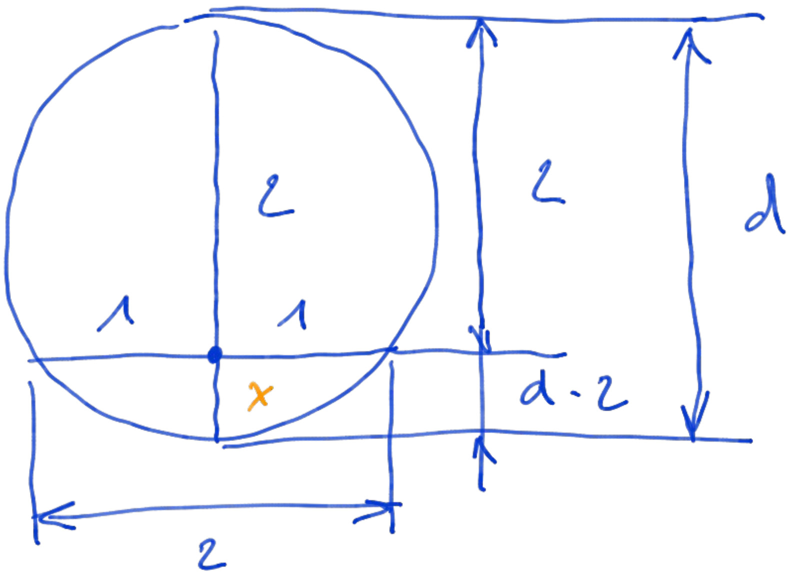
Oefening 21

In een speeltuin ligt een cilindervormige horizontale buis deels ingegraven in de grond. In de buis is aarde aangebracht tot op het zelfde niveau als de omgeving buiten de buis. Onderstaande figuur toont een dwarsdoorsnede van deze buis met daarop aangeduid de hoogte h van de doorgang en de breedte b van de horizontale onderkant. Als je weet dat zowel de hoogte h als breedte b gelijk zijn aan 2 m, hoe diep is de buis dan ingegraven?



(A) 0,25 m (B) 0,4 m (C) 0,5 m (D) 0,75 m

Oplossing: C
juist beantwoord: 38 %



$x = d - 2$

$= \text{diepte}$

$$2(d-2) = 1 \cdot 1 \Rightarrow d - 2 = \frac{1}{2} = \boxed{0{,}5\ \text{m}}$$

Oefening 22

Wat is de som van de reële oplossingen van de vergelijking $t = 1 + \dfrac{t^2-1}{1+\sqrt{t^4-7t^2+16}}$?

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 6

Oplossing: C

juist beantwoord: 33 %

$\to$ 0 als $\boxed{t = 1\ !}$

$$\cancel{t-1} = \frac{\cancel{(t-1)}(t+1)}{1+\sqrt{}} \Rightarrow \frac{1}{t+1} = \frac{1}{1+\sqrt{}}$$

$$\Rightarrow t + \cancel{1} = \cancel{1} + \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \left(t = \sqrt{t^4 - 7t^2 + 16} = \sqrt{(t^2-4)^2 + t^2}\right)^2$$

$$\cancel{t^2} = (t^2-4)^2 + \cancel{t^2}$$

$$0 = t^4 - 8t^2 + 16$$

$$t^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4.16.1}}{2.1} = 4 \Rightarrow \boxed{t = 2}$$

$$t \neq -2 \Rightarrow -2 \neq 1 + \frac{(-2)^2 - 1}{1+\sqrt{(-2)^4 - 7(-2)^2 + 16}}$$

$$\neq 1 + \frac{3}{1+\sqrt{16-28+16}}$$

$$\neq 1 + \frac{3}{1+\sqrt{4}} = 1 + \frac{3}{3}$$

$$\neq 2$$

Som

$t = 1$ en $t = 2$

$2 + 1 = \boxed{3}$

Oefening 23

In de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel xyz beschouwen we de rechten r en s met parametervergelijkingen

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 1 + 2k \, , \qquad k \in \mathbb{R}, \\ z = 2k \end{cases}$$

richtingsvector $R_1 = (4,2,2)$
steunvector $S_1 = (1,1,0)$

$$s \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2m \\ y = 3 + m \, , \qquad m \in \mathbb{R}. \\ z = m \end{cases}$$

$R_2 = (2,1,1) \Rightarrow \times 2 = (4,2,2)$
$S_2 = (4,3,0)$

lijnen parallel

Het vlak v is het vlak waartoe zowel de rechte r als de rechte s behoren. Welk van onderstaande punten ligt in het vlak v?

(A) (0, 0, 0) (B) (0, 0, 1) (C) (0, 0, 2) (D) (0, 0, 3)

Oplossing: B
juist beantwoord: 48 %

normaal vector vlak

vector tussen S_1 en S_2 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = V$

vectorieel product $\Rightarrow \perp$ op vlak $\Rightarrow R_2 \times V = \vec{n}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 - 1.2 \\ 1.3 - 2.0 \\ 2.2 - 1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

vergelijking vlak $= \vec{n} \, (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

neem voor $\vec{A} \to S_1$

$\Rightarrow -2(x-1) + 3(y-1) + 1(z-0) = 0$

$-2x + 2 + 3y - 3 + z = 0$

$-2x + 3y + z - 1 = 0$

Controle: S_2 in vlak: $-2.4 + 3.3 + 0 - 1 = 0$

$-8 + 9 - 1 = 0$

A: $0 + 0 + 0 - 1 \neq 0$

B: $0 + 0 + 1 - 1 = 0$

C: $0 + 0 + 2 - 1 \neq 0$

D: $0 + 0 + 3 - 1 \neq 0$

Oefening 24

Gegeven is het vlak met cartesiaans assenstelsel xy en de vectoren $\vec{v}_1 = (1,1)$ en $\vec{v}_2 = \left(\log_3(\sqrt{3}-1), \log_3(\frac{1+\sqrt{3}}{2})\right)$.

Welk van onderstaande uitspraken over deze vectoren is geldig?

(A) De vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ zijn evenwijdig.

(B) De vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ maken een scherpe hoek.

(C) De vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ staan loodrecht op elkaar.

(D) De vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ maken een stompe hoek.

Oplossing: C

juist beantwoord: 38 %

$\Rightarrow 1 = \log_3 3$

$\perp \Rightarrow$ inproduct $= 0$

$1 \cdot \log_3(\sqrt{3}-1) + 1 \log_3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

$\log_3(\sqrt{3}-1) + \log_3(1+\sqrt{3}) - \log_3 2 = 0$

$\log_3((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)) - \log_3 2 = 0$

$\log_3((\sqrt{3})^2 - 1^2) - \log_3 2 = 0$

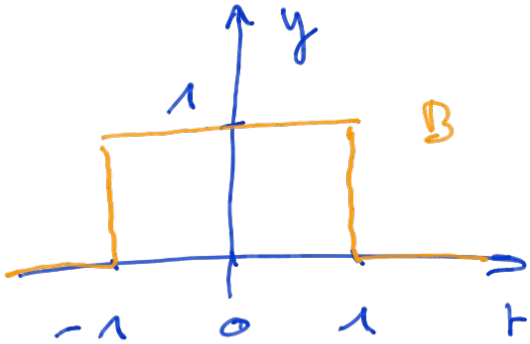
$\log_3(2) - \log_3(2) = 0$

Oefening 25

Definieer de functie $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $B(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{als } |t| > 1 \end{cases}$.

Wat is de waarde van $\displaystyle\int_0^{2025} \left[2B\left(\frac{t}{2}\right) + B\big(2(t-2025)\big) \right] \mathrm{d}t$?

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 5



Oplossing: C

juist beantwoord: 40 %

① $B\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow -2 \leq t \leq 2 \Rightarrow B\left(\frac{t}{2}\right) = 1$

② $B\big(2(t-2025)\big) \Rightarrow$ $2024 - 2025 = -1$

$2026 - 2025 = 1$

$\to$ $2(2024{,}5 - 2025) = -1$

$2(2025{,}5 - 2025) = 1$

③ $$\int_0^2 2\underbrace{B\left(\frac{t}{2}\right)}_{1} dt + \int_{2024{,}5}^{2025} \underbrace{B\big(2(t-2025)\big)}_{1} dt$$

$$2t \Big|_0^2 + t \Big|_{2024{,}5}^{2025}$$

$$4 + (2025 - 2024{,}5) = 4 + 0{,}5 = 4{,}5$$

$$= \boxed{\frac{9}{2}}$$

Oefening 26

Wat is de verzameling van alle drietallen $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die voldoen aan onderstaand stelsel?

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0 \\ 12x - 6y + 12z = 6(1-x) \end{cases} \rightarrow 18x - 6y + 12z - 6 = 0$$

$$\parallel$$

(A) $\{(1, 4, 1)\}$

(B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -3x - 2z + 1\}$

(C) $\left\{\left(r, s, \frac{1-3r+s}{2}\right) \mid r, s \in \mathbb{R}\right\}$ ✓

(D) $\mathbb{R}^3$

$(1) \times 6 \Rightarrow 18x - 6y + 12z - 6 = 0$

Oplossing: C

juist beantwoord: 62 %

Vergelijkingen zijn niet onafhankelijk !

$\Leftrightarrow \infty$ veel oplossingen

x en y ⇒ vrije parameters

$\Rightarrow z = \frac{1 - 3x + y}{2}$

of, met $x = r$ en $y = s$ met $r, s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left[\frac{1 - 3r + s}{2} \right]$

C

Oefening 27

Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met functievoorschrift $f(x) = (x+1)^3$. Stel dat F de primitieve functie is van de functie f waarvoor $F(0) = 0$. Waaraan is $F(1)$ dan gelijk?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{15}{4}$ (D) 8

Oplossing: C

juist beantwoord: 90 %

$$\int (x+1)^3 \, d(x+1) = \frac{1}{4}(x+1)^4 + C = F$$

$$\Rightarrow F(0) = 0 = \frac{1}{4}(0+1)^4 + C$$

$$0 = \frac{1}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{4}(x+1)^4 - \frac{1}{4}$$

$$F(1) = \frac{1}{4}(1+1)^4 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{15}{4}}$$

Oefening 28

Veronderstel dat je een auto aankoopt. Noteer T voor de tijd gedurende dewelke die wagen zonder defect zal werken; T wordt uitgedrukt in jaren. Voor elk natuurlijk getal n noteren we met $P(T \geqslant n)$ de kans dat T groter dan of gelijk is aan n jaren. Er is gegeven dat $P(T \geqslant n) = \dfrac{2}{n+2}$. Bepaal de kans dat de auto voor het eerst een defect heeft in de loop van het derde jaar.

✓ (A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

Oplossing: A

juist beantwoord: 37 %

In het derde jaar $\Rightarrow P(2 < T < 3)$

$\hookrightarrow$ tussen $t = 2$ en $t = 3$

$$= P(T > 2) - P(T > 3)$$

$$P(T > 2) = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(T > 3) = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow P(2 < T < 3) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5}{10} - \frac{4}{10}$$

$$= \boxed{\frac{1}{10}}$$

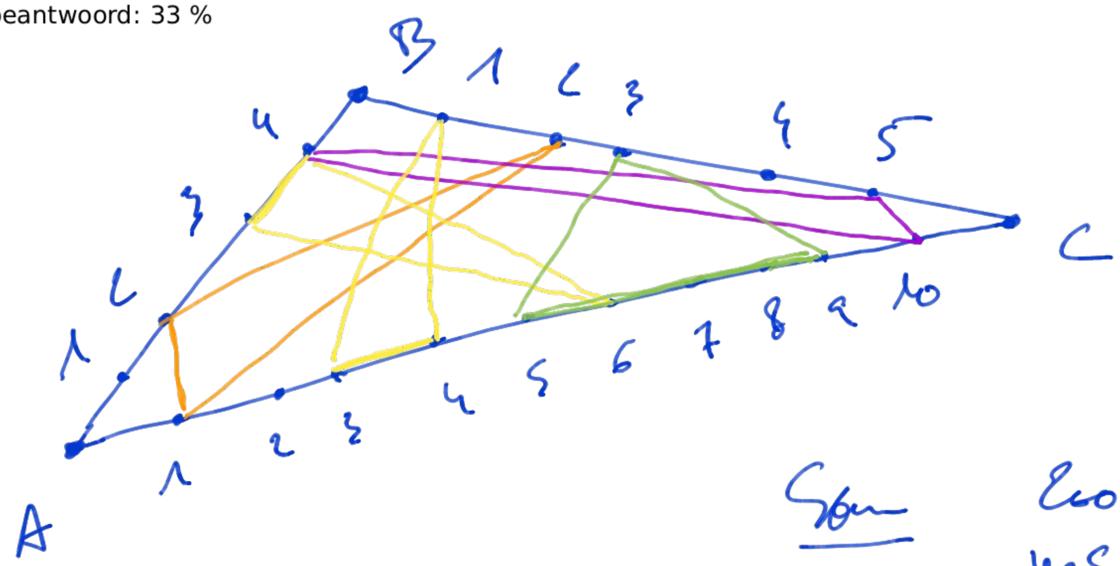
Oefening 29

Op de zijden van een driehoek *ABC* kiezen we 19 verschillende punten op de volgende manier: geen enkel punt valt samen met een hoekpunt, op de zijde *AB* kiezen we 4 punten, op de zijde *BC* 5 punten en op de zijde *AC* 10 punten. Hoeveel verschillende driehoeken kan je construeren door 3 punten van de gekozen 19 punten met elkaar te verbinden?

(A) 200 (B) 835 (C) 1470 (D) 1800

Oplossing: B

juist beantwoord: 33 %



1 punt op elke zijde

$10 \times 5 \times 4 = 200$

2 punten op één zijde

AC: $C_{10}^{2} \cdot 9 = \frac{10!}{2!(10-2)!} \cdot 9 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 9 = 9 \cdot 45 = 405$

AB: $C_{4}^{2} \cdot 15 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 15 = 6 \cdot 15 = 90$

BC: $C_{5}^{2} \cdot 14 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot 14 = 10 \cdot 14 = 140$

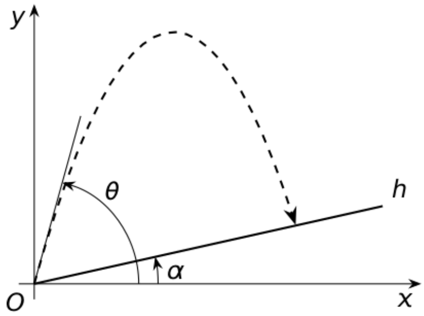
Som

200
405
140
90

$\boxed{835}$

Oefening 30

De figuur toont in stippellijn de baan van een knikker die vanaf positie O bergop geschoten wordt op een vlak h. Het vlak h maakt een vaste hellingshoek $\alpha \in \,]0, \pi/2[$ ten opzichte van het horizontaal vlak. De knikker wordt afgeschoten onder een variabele hoek $\theta \in \,]\alpha, \pi/2[$ met het horizontaal vlak.



$$x = \frac{2 v_0^2 \cdot \cos^2\theta}{g} \underbrace{(\mathrm{tg}\,\theta - \mathrm{tg}\,\alpha)}$$

$\sin(\theta - \alpha)$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta}{\cos\theta\cos\alpha}$$

In een model waarbij de wrijving wordt verwaarloosd, geldt volgend verband tussen de x-coördinaat van het punt waar de knikker op de helling landt, de hoeken α en θ en de beginsnelheid v_0:

$\tan\alpha - \tan\theta = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x$, waarbij g de valversnelling is.

We noemen θ_{max} de hoek waarbij de knikker bij een gegeven hoek α en beginsnelheid v_0 zo ver mogelijk van de beginpositie O op het hellend vlak terecht komt. Welke van volgende uitdrukkingen is dan voldaan?

(A) $\tan(2\alpha)\tan(\theta_{max}) = 1$.

(B) $\tan(\alpha)\tan(2\theta_{max}) = 1$.

(C) $\tan(2\alpha)\tan(\theta_{max}) = -1$.

(D) $\tan(\alpha)\tan(2\theta_{max}) = -1$.

Oplossing: D
juist beantwoord: 29 %

$$\Rightarrow x = \underbrace{\frac{2v_0^2}{g\cdot\cos\alpha}} \cdot \underbrace{\cos\theta \cdot \sin(\theta-\alpha)}$$

constant

$$\sin(\theta-\alpha)\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\theta-\alpha+\theta) + \sin(\theta-\alpha-\theta)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sin(2\theta-\alpha) + \sin(-\alpha)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sin(2\theta-\alpha) - \underbrace{\sin(\alpha)}_{\text{constant}}\Big)$$

max als $\sin(2\theta-\alpha) = \max$

$$\Rightarrow \sin(2\theta-\alpha) = 1 \Rightarrow 2\theta - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = \theta_{max}$$

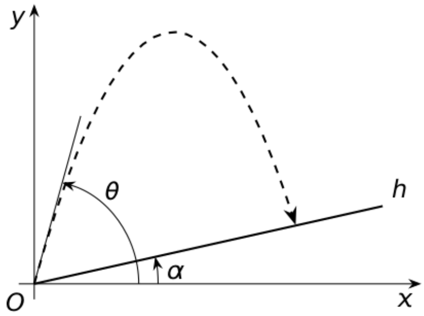
$$\boxed{\mathrm{tg}(2\theta_{max})} = \mathrm{tg}\left(2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\mathrm{cotg}(\alpha)$$

$$\boxed{= -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \left(-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right) = -1 \quad \text{D}$$

Oefening 30

De figuur toont in stippellijn de baan van een knikker die vanaf positie O bergop geschoten wordt op een vlak h. Het vlak h maakt een vaste hellingshoek $\alpha \in]0, \pi/2[$ ten opzichte van het horizontaal vlak. De knikker wordt afgeschoten onder een variabele hoek $\theta \in]\alpha, \pi/2[$ met het horizontaal vlak.



$$\begin{cases} v_{0x} = v_x = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \Rightarrow v_y = v_0 \sin\theta - g.t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta . t \\ y = v_0 \sin\theta . t - g\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

In een model waarbij de wrijving wordt verwaarloosd, geldt volgend verband tussen de x-coördinaat van het punt waar de knikker op de helling landt, de hoeken α en θ en de beginsnelheid v_0:

$\tan\alpha - \tan\theta = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x$, waarbij g de valversnelling is.

We noemen θ_{max} de hoek waarbij de knikker bij een gegeven hoek α en beginsnelheid v_0 zo ver mogelijk van de beginpositie O op het hellend vlak terecht komt. Welke van volgende uitdrukkingen is dan voldaan?

(A) $\tan(2\alpha)\tan(\theta_{max}) = 1$.

(B) $\tan(\alpha)\tan(2\theta_{max}) = 1$.

(C) $\tan(2\alpha)\tan(\theta_{max}) = -1$.

(D) $\tan(\alpha)\tan(2\theta_{max}) = -1$.

Oplossing: D
juist beantwoord: 29 %

Impact als $y = x . tg\alpha$

$\Rightarrow v_0 \sin\theta . \cancel{t} - g\dfrac{t^{\cancel{2}}}{2} = v_0 \cos\theta . \cancel{t} . tg\alpha$

$\Rightarrow t = \dfrac{2}{g}(v_0 \sin\theta - v_0 \cos\theta . tg\alpha)$

$t = \dfrac{2v_0}{g}(\sin\theta - \cos\theta\, tg\alpha)$

$s(\text{op } h) = \dfrac{x}{\cos\alpha} = \dfrac{v_0 \cos\theta . t}{\cos\alpha}$

$(\cos^2\theta)' = -2\cos\theta\sin\theta = -\sin(2\theta)$

$= \dfrac{v_0\cos\theta}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{2v_0}{g}(\sin\theta - \cos\theta\, tg\alpha)$

$= \dfrac{2v_0^2}{g\cos\alpha} \cdot \underline{\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta\, tg\alpha)}$

$f(\theta) \to$ max als $f'(\theta) = 0$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta) - \cos^2\theta\, tg\alpha$

$f'(\theta) = \cos(2\theta) - (-\sin(2\theta)) . tg\alpha = 0$

$\Rightarrow tg\alpha = -\dfrac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = -\dfrac{1}{tg(2\theta)} \Rightarrow \boxed{tg\alpha . tg(2\theta) = -1}$