**Oefening 1**

Bepaal de afgeleide van de functie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ met voorschrift $f(x)=-2\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3}$.

(A) $f'(x)=\frac{-7}{3\sqrt[3]{x^{10}}}$ (B) $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt[3]{x^4}}$ ✓(C) $f'(x)=\frac{14}{3\sqrt[3]{x^{10}}}$ (D) $f'(x)=\frac{6}{7\sqrt[3]{x^{10}}}$

Oplossing: C

juist beantwoord: 86 %

$$-2\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3} = -2\,x^{2/3}\cdot x^{-3} = -2\,x^{2/3-9/3}$$

$$= -2\,x^{-7/3}$$

$$(x^u)' = u\cdot x^{(u-1)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2\cdot -\frac{7}{3}\,x^{-7/3-3/3}$$

$$= \frac{14}{3}\,x^{-10/3}$$

$$= \boxed{\frac{14}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^{10}}}}$$

**Oefening 2**

Bepaal de integraal $\int_1^e \frac{(2+\ln x)^2}{x}\,dx$.

(A) 2 (B) $\frac{13}{3}$ ✓ (C) $\frac{19}{3}$ (D) 9

Oplossing: C

juist beantwoord: 82 %

$$\frac{1}{x} = (\ln x)' = d(\ln x) \Rightarrow u = \ln x$$

$$\Rightarrow \int (2+u)^2\,du = \int (4 + 4u + u^2)\,du$$

$$= 4u + \frac{4u^2}{2} + \frac{u^3}{3}$$

$$= \left[4\ln x + 2(\ln x)^2 + \frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e$$

$\ln e = 1$ en $\ln 1 = 0$

$$= 4 + 2 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{12}{3} + \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{19}{3}}$$

**Oefening 3**

Van een veelterm $p(x) = 4x^3 - 35x^2 + 97x - 84$ weten we dat deze ontbonden kan worden als $p(x) = 4(x-3)(x-4)(x-k)$ voor een $k \in \mathbb{R}$. Bepaal $k$.

(A) $-7$ (B) $-\frac{7}{4}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D) $7$

Oplossing: C
juist beantwoord: 82 %

$$4(x-3)(x-4)(x-k)$$

$$4(x^2-4x-3x+12)(x-k)$$

$$4(x^2-7x+12)(x-k)$$

$$4(x^3-\underline{kx^2}-\underline{7x^2}+7kx+12x-12k)$$

$$4(x^3-(k+7)x^2+(7k+12)x-12k)$$

$$4x^3-(4k+28)x^2+(28k+48)x-\underline{48k}$$

$$-48k = -84$$

$$\Rightarrow k = \frac{84}{48} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

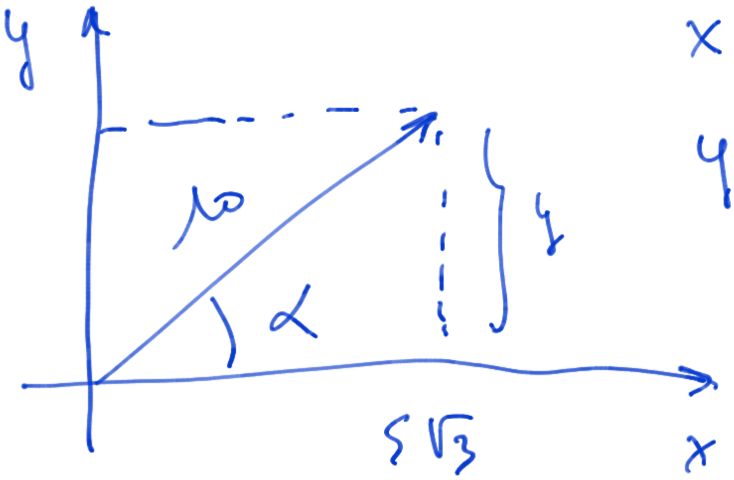
**Oefening 4**

Gegeven het vlak met cartesiaans assenstelsel $xy$ met daarin een vector $\vec{a}$ in het eerste kwadrant met lengte 10. Welke hoek met de positieve $x$-as moet deze vector maken zodanig dat de $x$-component van de vector gelijk is aan $5\sqrt{3}$?

(A) $\frac{\pi}{12}$ √ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

Oplossing: B

juist beantwoord: 78 %




$x = 10 \cos \alpha$

$y = 10 \sin \alpha$

$10^2 = (5\sqrt{3})^2 + y^2$

$100 = 25 . 3 + y^2$

$25 = y^2 \Rightarrow y = 5$

$\frac{y}{x} = tg\,\alpha = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ = \boxed{\frac{\pi}{6} \text{ rad}}$

**Oefening 5**

Gegeven de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel $xyz$ met daarin het vlak $\alpha \leftrightarrow 2x-3y+z+3=0$

en de rechte $r \leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{\lambda}{2} \\ y = -2 - \lambda \\ z = 4 - 4\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

normaalvector

$\vec{n} = (2,-3,1)$

$RV = (1/2, -1, -4)$

Wat is de onderlinge ligging van $\alpha$ en $r$?

(A) $r$ is evenwijdig met $\alpha$, maar ligt niet in $\alpha$.

(B) $r$ ligt in $\alpha$.

(C) $r$ staat loodrecht op $\alpha$.

(D) $r$ snijdt $\alpha$, maar staat niet loodrecht op $\alpha$.

Oplossing: A
juist beantwoord: 53 %

rechte // als $RV \perp \vec{n}$

$\Rightarrow$ inproduct

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{RV} = 2 \cdot \frac{1}{2} + (-3)(-1) + 1 \cdot (-4)$

$= 1 + 3 - 4 = 0$ $\quad r \,//\, \alpha$

ligt $r$ in $\alpha$ ?

$\Rightarrow$ Punt op $r$, kies $\lambda = 0$

$\Rightarrow P(-1,-2,4)$

invullen in $\alpha$

$\Rightarrow 2(-1) - 3(-2) + 4 + 3 = 0$

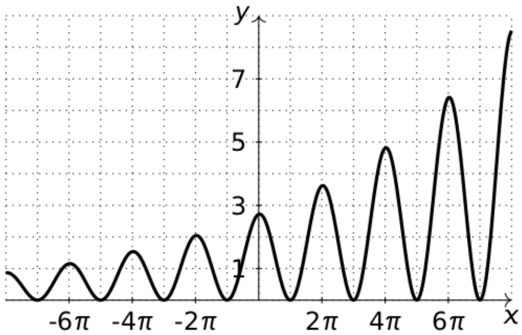
$-2 + 6 + 7 = 0$ $\quad$ $r$ niet in $\alpha$

$4 + 7 \neq 0$

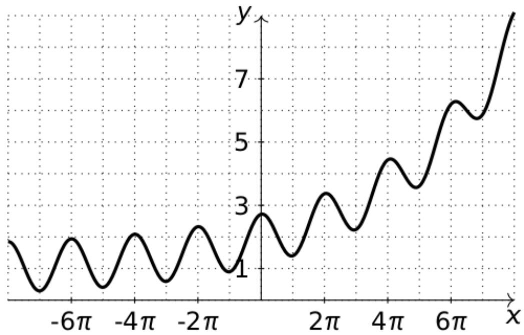
**Oefening 6**

Welke van onderstaande figuren toont de grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = e^{\cos x}$ ?

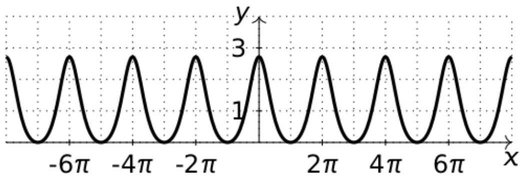
(A)



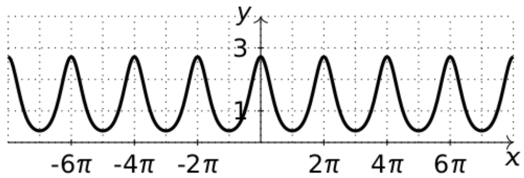

(B)




(C)




(D)




Oplossing: D

juist beantwoord: 84 %

$\cos x \rightarrow$ tussen $-1$ en $1$ $\Rightarrow$ A en B niet

$e^0 = 1 \quad e^1 = e \simeq 2{,}7 \quad e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq \frac{1}{2{,}7} \simeq 0{,}36$

voor $x = 0 \rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow e^1 = e$

voor $x = \pi \Rightarrow \cos \pi = -1 \Rightarrow e^{-1} \simeq 0{,}36$

D

**Oefening 7**

Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

in de onbekenden $a, b \in \mathbb{R}$. Hoeveel oplossingen $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ heeft dit stelsel?

(A) 0 (B) juist 1 (C) juist 2 (D) juist 4

Oplossing: C

juist beantwoord: 66 %

$$a = \frac{2}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{2^2}{b^2} - b^2 = 3$$

$$\Rightarrow 4 - b^4 = 3b^2 \Rightarrow b^4 + 3b^2 - 4 = 0$$

$$b^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$b^2 = \begin{cases} 1 \longrightarrow b = \pm 1 \\ -4 \quad \times \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a = \pm 2$$

$$(2, 1) \text{ en } (-2, -1)$$

**Oefening 8**

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = 3 - e^{\sin(1-x)}$. Bepaal de waarde van de parameter $p$ zodat de rechte met vergelijking $y = p(x-1) + 2$ een raaklijn is aan de grafiek van de functie $f$ in het punt $(1, 2)$.

(A) $-1$ (B) 0 (C) 1 (D) $e$

Oplossing: C

juist beantwoord: 64 %

$$f'(x) = -e^{\sin(1-x)} \cdot (\cos(1-x)) \cdot (-1)$$

$$= e^{\sin(1-x)} \cdot \cos(1-x)$$

$$f'(1) = e^{\sin(1-1)} \cdot \cos(1-1)$$

$$= e^0 \cdot 1 = 1$$

$\Rightarrow$ rico raaklijn $= 1$

$y = px - p + 2 \Rightarrow$ rico $= p$

$$\boxed{p = 1}$$

**Oefening 9**

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+2}$. Bepaal $f'(1) + f'(-1)$.

(A) $-3$ (B) $-1$ (C) $0$ (D) $3$

Oplossing: B

juist beantwoord: 75 %

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+x+2) - (x-1)^2(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{0 - 0}{16} = 0$$

$$f'(-1) = \frac{-4(1-1+2) - 4(-2+1)}{(1-1+2)^2}$$

$$= \frac{-8+4}{4} = -1$$

$$f'(1) + f'(-1) = 0 + (-1) = \boxed{-1}$$

**Oefening 10**

We noteren met $p$, $q$ en $r$ drie beweringen. De volgende drie verbanden tussen de beweringen zijn gegeven: $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ en ten slotte $r \Rightarrow p$. Welke van de volgende beweringen volgt hieruit?

(A) $p \Leftrightarrow q$ (B) $p$ (C) $q$ (D) $p \Rightarrow \neg r$

Oplossing: A
juist beantwoord: 65 %

$\Rightarrow$ als ... dan ...

$\Leftrightarrow$ als en slechts als (equivalent)

$\neg$ niet

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{als } p \text{ dan } q\\ \text{als } q \text{ dan } r\end{array}\right\} \Rightarrow p \Rightarrow r\\ \text{als } r \text{ dan } p\end{array}\right\} p \Leftrightarrow r$$

Dus ofwel zijn ze allemaal waar, ofwel allemaal onwaar.

(A) zeker juist ✓

(B) p kan onwaar zijn ✗

(C) q kan onwaar zijn ✗

(D) als p waar, dan r waar ✗

**Oefening 11**

In een badkamer staat de kraan van een spaardouchekop open en stroomt het water met een debiet van 6 $dm^3$ per minuut. De aanvoerleiding tussen de boiler en de douchekop heeft een doorsnede van 200 $mm^2$ en een lengte van 5,00 m. Hoelang duurt het gemiddeld voor het water om van de boiler naar de douchekop te stromen?

(A) 10 s (B) 20 s (C) 50 s (D) 100 s

Oplossing: A
juist beantwoord: 70 %

$6\ dm^3 = \frac{6}{1000}\ m^3$ of $6\ \ell$

$200\ mm^2 \times 5000\ mm = 1000000\ mm^3$

$= 1000\ cm^3$

$= 1\ dm^3 = 1\ \ell$

$6\ \ell / min \Rightarrow 1\ \ell$ per $1/6$ min

per 10 seconden

**Oefening 12**

Een robotarm is zo ingesteld dat deze een plaat roteert in het $xy$-vlak (cartesiaans assenstelsel). De plaat kan niet vervormen. De coördinaten $(x, y)$ van enkele punten van de plaat voor en na de manipulatie zijn gegeven in onderstaande tabel.

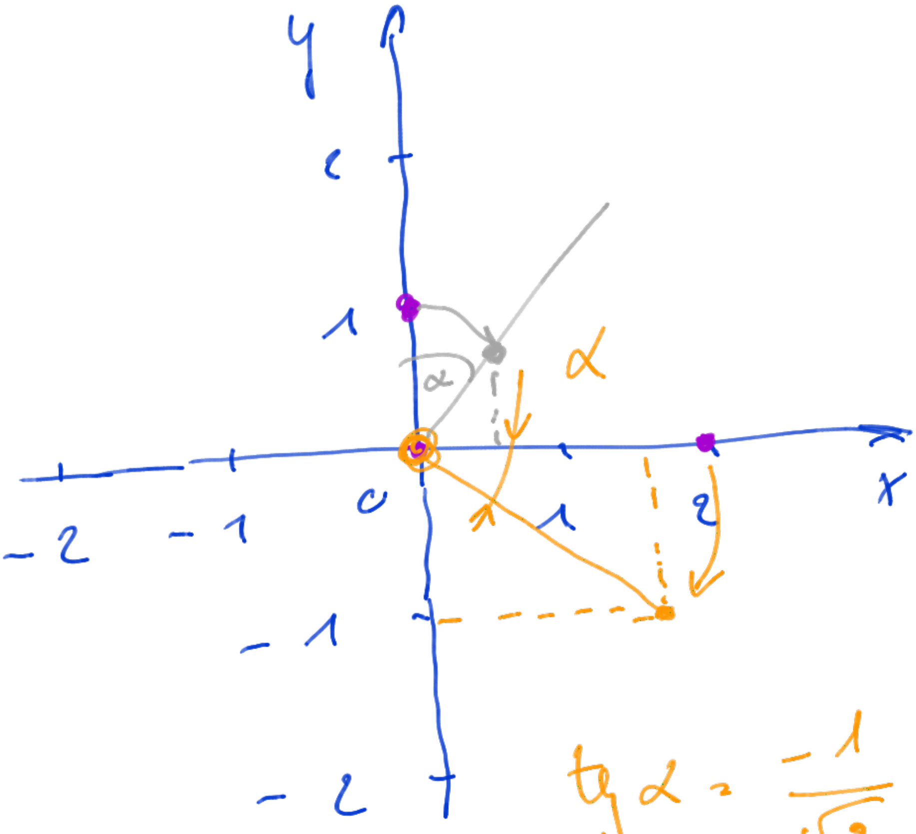
| punt | coördinaat voor manipulatie | coördinaat na manipulatie |
|---|---|---|
| $p_1$ | $(0, 0)$ | $(0, 0)$ |
| $p_2$ | $(2, 0)$ | $(\sqrt{3}, -1)$ |
| $p_3$ | $(0, 1)$ | ? |

Welke $x$-coördinaat heeft $p_3$ na rotatie?

✓ (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

Oplossing: A

juist beantwoord: 40 %




$\tan \alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \alpha = -30°$

$\Rightarrow x = 1 \cdot \sin 30° = \boxed{\frac{1}{2}}$

of $x = 1 \cdot \cos 60°$

**Oefening 13**

Het complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ voldoet aan de vergelijking $z(1+i) = 7\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Welke van de volgende waarden kan $\theta$ aannemen?

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{11\pi}{12}$ (C) $\frac{13\pi}{12}$ (D) $\frac{23\pi}{12}$

Oplossing: D

juist beantwoord: 37 %

$$1+i \Rightarrow r = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow z(1+i) = r\sqrt{2}\, e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} = 7\, e^{i\pi/6}$$

$$\Rightarrow r\sqrt{2} = 7 \Rightarrow r = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{24} - \frac{6\pi}{24}$$

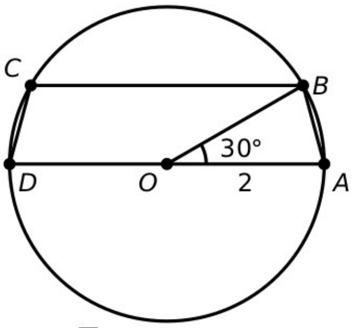
$$= -\frac{2\pi}{24} = -\frac{\pi}{12}$$

$$\theta + k2\pi = \theta + k\frac{24\pi}{12}$$

voor $k = 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{12} + \frac{24\pi}{12} = \boxed{\frac{23\pi}{12}}$

**Oefening 14**

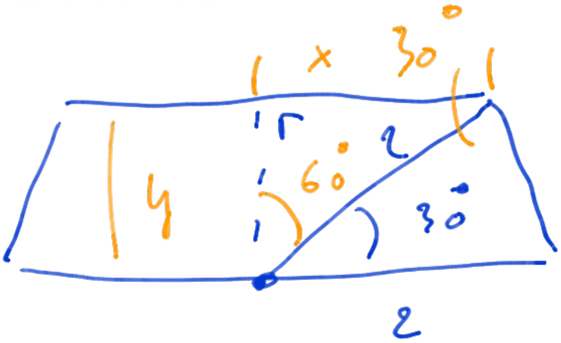
De vier hoekpunten van een trapezium $ABCD$ liggen op een cirkel met straal 2. Het middelpunt $O$ van de cirkel ligt op de zijde $[AD]$ en de hoek $\widehat{AOB}$ is 30°. Waaraan is de oppervlakte van het trapezium gelijk?




(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $2+\sqrt{3}$ (D) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

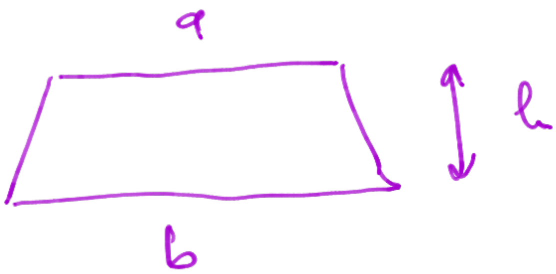
Oplossing: C

juist beantwoord: 67 %




$\Rightarrow x = 2 \cdot \cos 30^\circ = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow y = 2 \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$




$\Rightarrow h = 1$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow b = 4$

$$A = \left(\frac{a+b}{2}\right) h = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \boxed{2+\sqrt{3}}$$

**Oefening 15**

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = -(ax-1)^2 + 1$ met parameter $a \in \mathbb{R}$. Bepaal de verzameling van alle waarden van $a \in \mathbb{R}$ waarvoor het bereik van deze functie $]-\infty, 1]$ is.

(A) $\mathbb{R}_0^-$ (B) $\mathbb{R}_0^+$ (C) $\mathbb{R}_0$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Oplossing: C

juist beantwoord: 66 %

$a = 0 \Rightarrow -(-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow a \neq 0$

$a < 0 \Rightarrow \underbrace{-(-b)^2}_{\text{altijd } \leq 0} + 1 \Rightarrow$ ok

$a > 0 \Rightarrow \underbrace{-(+b)^2}_{\text{altijd } \leq 0} + 1 \Rightarrow$ ok

$\Rightarrow a \in \mathbb{R}_0$

**Oefening 16**

De vergelijking $\dfrac{1+e^x}{1-e^{-x}} = 6$ in $x \in \mathbb{R}$ heeft meer dan één, maar een eindig aantal oplossingen. Bepaal de som van die oplossingen.

(A) $\ln 5$ (B) $\ln 6$ (C) 5 (D) 6

Oplossing: B

juist beantwoord: 62 %

$$1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + e^x}{\frac{e^x - 1}{e^x}} = 6$$

$$\Rightarrow 1 + e^x = \frac{6e^x - 6}{e^x}$$

$$\Rightarrow e^x + (e^x)^2 = 6e^x - 6$$

$$(e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0$$

$$e^x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \begin{cases} 6/2 = 3 \\ 4/2 = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \\ e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \end{array}\right\} \quad \ln 3 + \ln 2$$

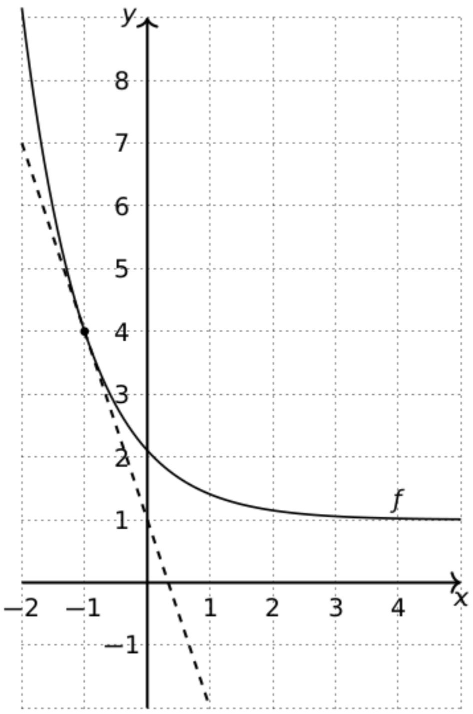
$$= \ln(3 \cdot 2)$$

$$= \boxed{\ln 6}$$

**Oefening 17**

Onderstaande figuur toont de grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (volle lijn) en de raaklijn aan de grafiek in het punt $(-1, 4)$ (streepjeslijn). De functie $g = f^{-1}$ is de inverse functie van $f$. Bepaal de afgeleide $g'(4)$.

(A) $-3$ ✓ (B) $-\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) 3




raaklijn door $(-1,4)$ en $(0,1)$

$$\text{rico} = \frac{4-1}{-1-0} = -3$$

$\Rightarrow$ raaklijn

$y - y_0 = r(x - x_0)$

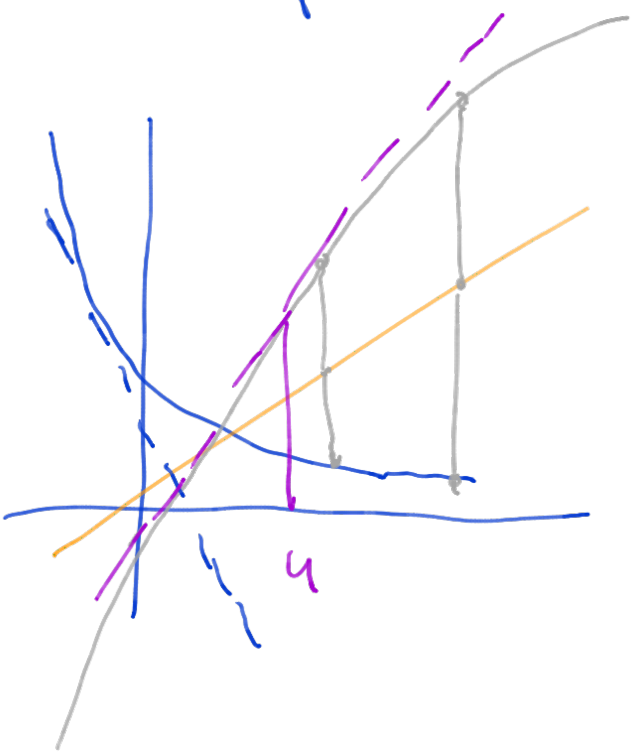
$y - 1 = -3(x - 0)$

$y = -3x + 1$

Oplossing: B
juist beantwoord: 50 %

Inverse functie = spiegelen rond 1e bissectrice

$y = x$




$\Rightarrow x = -3y + 1$

$x - 1 = -3y$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Afgeleide = rico

$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{3}}$

**Oefening 18**

Een $(2 \times 2)$-matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ voldoet aan $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wat kan je besluiten?

(A) Er geldt altijd dat $a = b = c = d = 0$.

(B) Er bestaan voorbeelden waarbij $a$, $b$, $c$ en $d$ niet alle vier nul zijn, maar er geldt altijd dat $b + c = 0$.

(C) Er bestaan voorbeelden waarbij $a$, $b$, $c$ en $d$ niet alle vier nul zijn, maar er geldt altijd dat $a + d = 0$.

(D) Er bestaan voorbeelden waarbij $a$, $b$, $c$ en $d$ niet alle vier nul zijn, maar er geldt altijd dat $a + b + c + d = 0$.

Oplossing: C
juist beantwoord: 45 %

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

$a^2 + bc = 0 \qquad a^2 = -bc$

$ab + bd = 0 \qquad b(a+d) = 0$

$ac + dc = 0 \qquad c(a+d) = 0$

$cb + d^2 = 0 \qquad d^2 = -bc$

→ b a c kunnen niet 0 te zijn

→ a+d altijd = 0

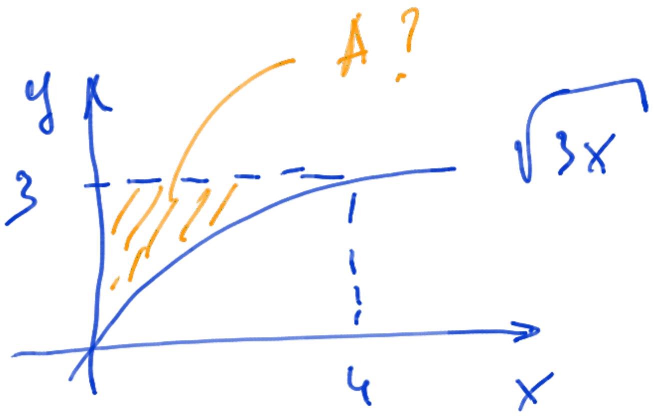
**Oefening 19**

Marie wil een muur van haar kamer in twee kleuren schilderen. Ze beschikt over een rechthoekige muur van 3 m hoog en 4 m lang. Met een projector projecteert ze de kromme met vergelijking $3x - y^2 = 0$ op de muur. Ze laat de $x$-as en de $y$-as respectievelijk samenvallen met de vloer en de linkerzijde van de rechthoekige muur. Verder zorgt ze ervoor dat het punt $(1,1)$ op 1 m van de grond en op 1 m van de linkerzijde van de rechthoekige muur ligt. Het gedeelte van de muur tussen de grafiek en het plafond wil ze okergeel schilderen. Hoeveel okergele verf heeft ze daarvoor bij benadering nodig als je weet dat er 200 ml verf nodig is per m$^2$ muur?

(A) 525 ml (B) 550 ml (C) 575 ml (D) 600 ml

Oplossing: D
juist beantwoord: 49 %

$$y^2 = 3x \Rightarrow y = \sqrt{3x}$$




$$A = 3\cdot 4 - \int_0^4 \sqrt{3x}\,dx$$

$$A = 12 - \sqrt{3}\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$$

$$= 12 - \sqrt{3}\int_0^4 x^{1/2}\,dx$$

$$= 12 - \sqrt{3}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,x^{1/2+1}\Big|_0^4$$

$$= 12 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^4$$

$$= 12 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{4^3}$$

$$= 12 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,8$$

$$200\cdot\left(12 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,8\right)$$

$$200\cdot\left(12 - \frac{16}{3}\cdot\frac{17}{10}\right)$$

$$200\left(12 - \frac{136}{15}\right)$$

$$200\left(\frac{180-136}{15}\right)$$

$$200\cdot\frac{44}{15} \approx 200\,\frac{45}{15}$$

$$\approx \boxed{600}$$

**Oefening 20**

Beschouw het stelsel met onbekenden $x, y, z \in \mathbb{R}$ en parameter $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + az = a + 1 \\ x + ay + z = a + 2 \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

Welke van onderstaande uitspraken is als enige **fout**?

(A) Voor $a = 2$ heeft het stelsel een unieke oplossing.

(B) Er bestaan minstens twee verschillende waarden voor $a$ waarvoor het stelsel geen oplossingen heeft.

(C) Er bestaan minstens twee verschillende waarden voor $a$ waarvoor het stelsel een unieke oplossing heeft.

(D) Er bestaat een unieke waarde voor $a$ waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

Oplossing: B
juist beantwoord: 30 %

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1(a-1) - 1(1-a) + a(1-a^2)$$
$$= a - 1 - 1 + a + a - a^3$$
$$= \underbrace{-a^3 + 3a - 2}_{=0 \text{ voor } a = 1}$$

Horner

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \det(A) = (a-1)(\underbrace{-a^2 - a + 2}_{=0 \text{ voor } a = 1})$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & -1 & -1 & 2 \\ 1 & & -1 & -2 \\ \hline & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \det(A) = (a-1)^2(-a-2)$$

$$\Rightarrow 0 \text{ voor } \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right\}$$

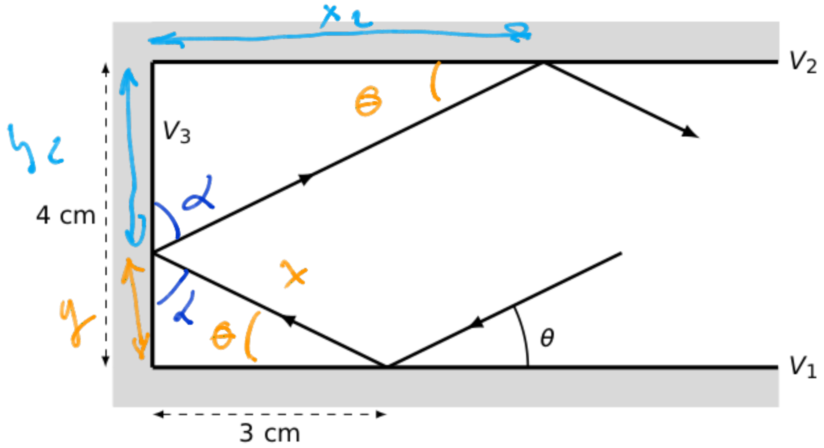
voor $a \neq 1$ en $a \neq -2$: unieke opl.

$a = 1$: geen opl

$a = -2$: $\infty$ veel opl.

**Oefening 21**

De figuur toont drie vlakke spiegels $V_1$, $V_2$ en $V_3$ die geplaatst zijn in een U-vorm. De spiegels $V_1$ en $V_2$ zijn evenwijdig gemonteerd op een afstand 4 cm van mekaar. Een lichtstraal valt in op de spiegel $V_1$ op een afstand 3 cm van de spiegel $V_3$, onder een hoek $\theta$ met $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. De gereflecteerde straal valt vervolgens in op de spiegel $V_3$, reflecteert nogmaals en komt uiteindelijk terecht op de wand $V_2$. Op welke afstand van $V_3$ valt de lichtstraal in op $V_2$?




$$x = \frac{3}{\cos\theta} = \frac{3}{\frac{2}{\sqrt5}} = \frac{3\sqrt5}{2}$$

$$y^2 = x^2 - 3^2 = \frac{9\cdot5}{4} - 9 = \frac{9\cdot5 - 9\cdot4}{4}$$

$$y^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

(A) $2\sqrt{5}$ cm (B) $\frac{9}{2}$ cm ✓ (C) 5 cm (D) $3\sqrt{3}$ cm

Oplossing: C
juist beantwoord: 56 %

$$y_2 = 4 - y = 4 - \frac{3}{2} = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{5/2}{x_2} = \frac{3/2}{3}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{5/2}{\frac{3/2}{3}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{3/2} = \frac{5}{2}\cdot 3\cdot\frac{2}{3} = \boxed{5}$$

**Oefening 22**

Gegeven is de (floor)functie $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$. Zo is bijvoorbeeld $\lfloor \pi \rfloor = 3$ en $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
Beschouw de vergelijking in $r \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^r \lfloor x \rfloor \, dx = 11.$$

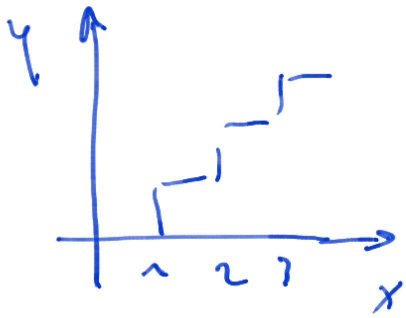
Welke van onderstaande uitspraken is als enige waar?

(A) Deze vergelijking heeft geen oplossingen.

(B) Deze vergelijking heeft meerdere oplossingen.

(C) Deze vergelijking heeft juist één oplossing, $r = \dfrac{17}{4}$.

(D) Deze vergelijking heeft juist één oplossing, $r = \dfrac{26}{5}$.




Oplossing: D
juist beantwoord: 34 %

Opp onder de curve = 11

0 - 1 → 0     0
1 - 2 → 1     1
2 - 3 → 2     2
3 - 4 → 3     3
4 - 5 → 4     4
            10
5 - 6 → 5

15

r tussen 5 en 6

⇒ opp van 5 → x = 1

⇒ x = 1/5

$$r = 5 + x = 5 + \frac{1}{5} = \frac{25+1}{5} = \boxed{\frac{26}{5}}$$

**Oefening 23**

Bij het ontwerp van een cilindervormige boiler met vast volume $V$ wil men de warmteverliezen minimaliseren. Het minimaliseren van de verliezen gebeurt door de totale oppervlakte van de boiler (cilindermantel, het boven- en het ondervlak samen) zo klein mogelijk te maken. Deze minimale oppervlakte wordt bereikt bij een straal $r$ en een hoogte $h$ van de boiler. Welk verband tussen $r$ en $h$ is dan voldaan?

(A) $h = 2r$ (B) $h = r$ (C) $h = 2\pi r$ (D) $h = \pi r$

Oplossing: A

juist beantwoord: 32 %

$$A = 2 \cdot (\pi r^2) + h \cdot 2\pi r$$

$$= 2\pi r^2 + 2h\pi r$$

$$V = \underline{\pi r^2 \cdot h} \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$\Rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{\pi r^2} \cdot \pi r$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$A' = 4\pi r + (-1)\frac{2V}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow V = \underline{2\pi r^3}$$

$$\pi r^2 \cdot h = 2\pi r^3 \Rightarrow h = 2r$$

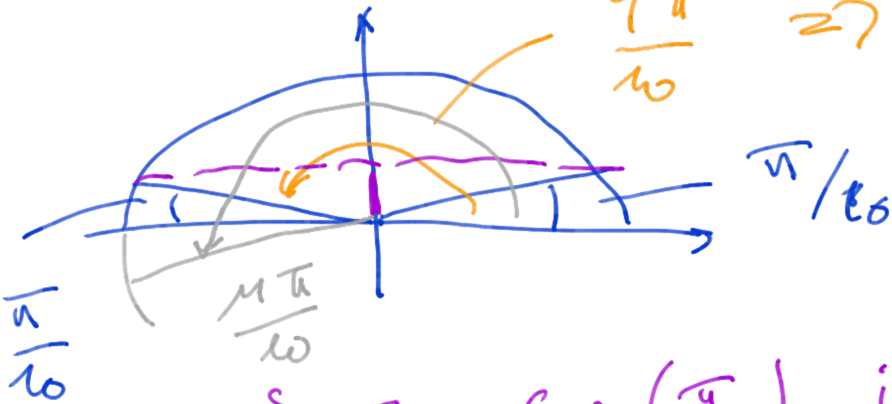
**Oefening 24**

Gegeven is het complex getal $z = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) - i\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)$. We stellen $z^{11}$ voor als $a + ib$, met $a, b \in \mathbb{R}$. Bepaal de tekens van $a$ en $b$.

(A) $a > 0$ en $b > 0$ (B) $a > 0$ en $b < 0$ (C) $a < 0$ en $b > 0$ (D) $a < 0$ en $b < 0$

Oplossing: C
juist beantwoord: 29 %

$\frac{9\pi}{10} \Rightarrow \sin\frac{9\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{10}$




$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$z = 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{10}}$

$\Rightarrow z^{11} = 1^{11} \cdot e^{-i\frac{\pi}{10}\cdot 11}$

$= \underbrace{\cos\left(\frac{11\pi}{10}\right)}_{<0} - i\underbrace{\sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)}_{<0}$

$\times(-1)$

$>0$

$\Rightarrow a < 0$ en $b > 0$

**Oefening 25**

In de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel $xyz$ beschouwen we de driehoek met hoekpunten $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, 3)$, $C(5, 4, 3)$ en het middelloodvlak $\alpha$ van de zijde $AB$ (het vlak loodrecht op en door het midden van $AB$). Noem $Q$ het snijpunt van $\alpha$ met de zijde $BC$. Wat is de som van de coördinaten van $Q$?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

Oplossing: B

juist beantwoord: 50 %

$$M_{AB} = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (0, 1, 2)$$

$$RV\ \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-2, 0, 2)$$

⇒ 'n ook de normaalvector v/h vlak

$$(/-2) \Rightarrow (1, 0, -1) = \vec{n}$$

$$\alpha \Rightarrow \vec{n}\,(x-0, y-1, z-2)$$

$$1x + 0(y-1) + 1(z-2) = 0$$

$$x + 0 - z + 2 = 0$$

$$RV\ \overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (6, 3, 0)$$

Met $\vec{B}$ als SV ⇒ wordt lijn BC
$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 6\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 3 \end{array}\right\}$$

$$-1 + 6\lambda + 0(1 + 3\lambda) - 3 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 6\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/3$$

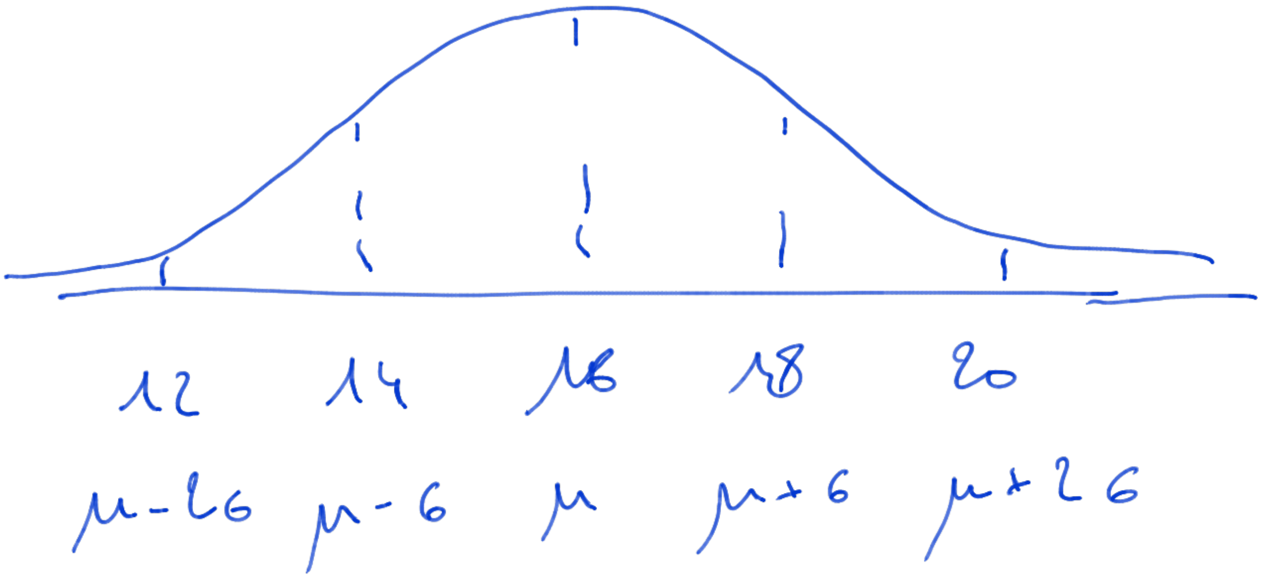
$Q$: $x = -1 + 6 \cdot 1/3 = 1$, $y = 1 + 3 \cdot 1/3 = 2$, $z = 3$ | $1+2+3$ $\boxed{= 6}$

**Oefening 26**

Zij $X$ een normaal verdeelde kansvariabele met verwachtingswaarde 16 en standaardafwijking 2. Welke van de volgende kansen is gelijk aan de kans $P(X > 4)$?

(A) $P(X < 6)$  (B) $P(X < 8)$  (C) $P(X < 20)$  (D) $P(X < 28)$

Oplossing: D
juist beantwoord: 73 %

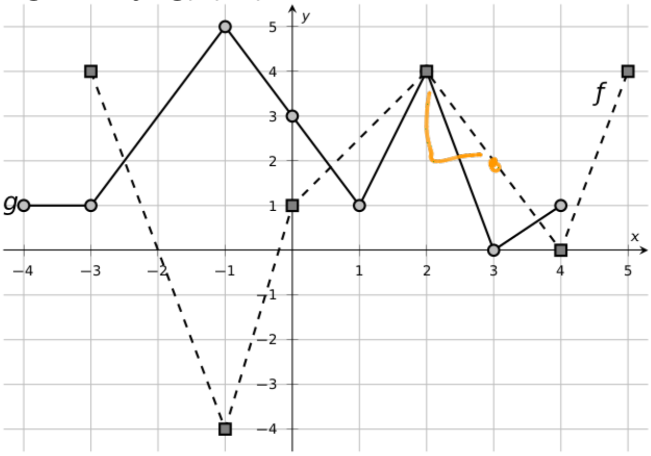



$$4 = 16 - 12 = 16 - 6\sigma$$

$$\Rightarrow 16 + 6\sigma = 16 + 12 = \boxed{28}$$

**Oefening 27**

De figuur hieronder toont de grafiek van de functies $f$ (streepjeslijn, vierkantjes) en $g$ (volle lijn, stippen). De samengestelde functie $f \circ g$ met voorschrift $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ is afleidbaar in het punt $x = -2$. Bepaal de afgeleide $(f \circ g)'(-2)$.




voor $x = -2$

$f(x) \Rightarrow$ rico $= -4$

$x = -2$ : $y - 0 = -4(x-(-2))$

$y = -4x - 8$

(A) $-4$ (B) $-2$ (C) $0$ (D) $4$

$g(x) \Rightarrow$ rico $= 2$

Oplossing: A juist beantwoord: 39 %

$x = -2$ : $y - 3 = 2(x-(-2))$

$y = 2x + 4 + 3 = 2x + 7$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

voor $x = -2$

$\Rightarrow f'(g(-2)) \cdot g'(-2)$

$f'(3) \cdot g'(-2)$

rico voor $x = 3$ $f'(x) = -2$

rico raaklijn

$f'(3) = -2$ $g'(-2) = 2$

$-2 \cdot 2$

$\boxed{= -4}$

**Oefening 28**

Welk van de volgende matrixproducten heeft als resultaat dat in de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

kolom 2 en kolom 3 worden omgewisseld, en rij 2 het tegengesteld teken krijgt?

(A) $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

Oplossing: D

juist beantwoord: 69 %

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a + 0c & 1b + 0d \\ 0a - 1c & 0b - 1d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0a + 1b & 1a + 0b \\ 0c + 1d & 1c + 0d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

**Oefening 29**

Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1$ in het interval $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

$[0, 270°]$

Oplossing: C

juist beantwoord: 38 %

$$(1+\sin x)+(1-\sin x)-2\sqrt{1+\sin x}\sqrt{1-\sin x}=1^2$$

$$2-2\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)}=1$$

$$1-2\sqrt{1^2-\sin^2 x}=0$$

$$1-2\sqrt{\cos^2 x}=0$$

$$1=2\cos x$$

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=60°$$

$$x=-60°$$

$$\Rightarrow \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=60°$$

$$x=120°$$

**Oefening 30**

Beschouw de volgende vergelijking: $12x^3 - 24x^2 + 12x = 1$ . Hoeveel oplossingen $x \in [0, 1]$ heeft deze vergelijking?

(A) geen (B) juist 1 ✓ (C) juist 2 (D) juist 3

Oplossing: C

juist beantwoord: 24 %

$$12x^3 - 12x^2 - 12x^2 + 12x - 1 = 0$$

$$12x^2(x-1) - 12x(x-1) - 1 = 0$$

$$(12x^2 - 12x)(x-1) - 1 = 0$$

$$12x(x-1)(x-1) - 1 = 0$$

$$12x(x-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow \text{dubbel nulpunt}$$

$\rightarrow x = 1 \rightarrow x - 1 = 0$

$\rightarrow x = 0 \rightarrow 12x = 0$

$\rightarrow 12x(x-1)^2 = 0$ voor $x = 0$, $x = 1$

positief tussen 0 en 1

$\rightarrow x = 1/2 : 12 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 > 0$

$-1 \Rightarrow$ alles zakt naar beneden ✓

$\Rightarrow$ dubbel nulpunt $\rightarrow 2 <$ $< 1$ ✓ / $> 1$ ✗

$\Rightarrow 0 \Rightarrow > 0$ ✓