Oefening 1

Bereken volgende limiet: $L = \lim_{x \to 0} \frac{4x^2 + 3x}{2x^2 + 1}$.

✓ (A) $L = 0$ (B) $L = 1$ (C) $L = 2$ (D) $L = 3$

Oplossing: A
juist beantwoord: 75 %
blanco: 4 %

$$\frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 0}{2 \cdot 0 + 1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

Oefening 2

Het punt $R(8, b)$ is gelegen op de rechte door de punten $A(-4, 6)$ en $B(-1, 4)$. Wat is de waarde van b?

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

Oplossing: A
juist beantwoord: 92 %
blanco: 2 %

rico : $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-6}{-1+4} = -\frac{2}{3}$

$$y - y_1 = a(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\cdot 4 = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} + \frac{18}{3} = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

$$f(8) = -\frac{2}{3}\cdot 8 + \frac{10}{3} = -\frac{6}{3} = \boxed{-2}$$

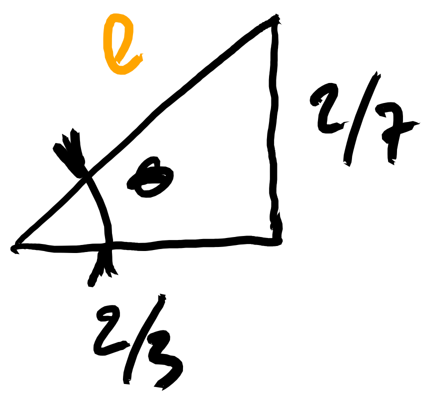
Oefening 3

Gegeven het vlak met een cartesiaans assenstelsel xy en de rechte r met vergelijking $3x - 7y = -2$. De hoek θ is de kleinste hoek die deze rechte maakt met de x-as. Welke van onderstaande uitspraken is waar?

(A) $\cos\theta = 2/7$ (B) $\cos\theta = 3/7$ (C) $\tan\theta = 2/7$ ✓ (D) $\tan\theta = 3/7$

Oplossing: D
juist beantwoord: 76 %
blanco: 14 %

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2/7 \\ y = 0 \Rightarrow x = -2/3 \end{array}\right\} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{7}}$$



$$\ell = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{36+196}{441}}$$

$$\ell = \frac{\sqrt{232}}{441} = \frac{2\sqrt{2\cdot 27}}{3\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{2\cdot 3\cdot 9}}{21} = \frac{2\cdot 3\sqrt{6}}{21} = \frac{6\sqrt{6}}{21} = \frac{3\sqrt{6}}{7}$$

$$\sin\theta = \frac{2}{7}\cdot\frac{7}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} \quad ✗ \qquad \cos\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{3\sqrt{6}} = \frac{21}{9\sqrt{6}} \quad ✗$$

Oefening 4

Zij $\lambda \neq 0$ een reëel getal. Welke van onderstaande uitdrukkingen bepaalt een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan $f''(t) = -\lambda^2 f(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$?

(A) $f(t) = -e^{\lambda t}$ (B) $f(t) = e^{-\lambda t}$ (C) $f(t) = -\frac{\lambda^2 t^2}{2}$ ✓ (D) $f(t) = \sin(-\lambda t)$

Oplossing: D
juist beantwoord: 52 %
blanco: 13 %

A: $-[e^{\lambda t}]' = -\lambda e^{\lambda t} \Rightarrow -\lambda [e^{\lambda t}]' = +\lambda^2 e^{\lambda t}$ ✗

B: $[e^{-\lambda t}]' = -\lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow -\lambda [e^{-\lambda t}]' = +\lambda^2 e^{\lambda t}$ ✗

C: $\left[-\frac{\lambda^2}{2} \cdot t^2\right]' = -\frac{\lambda^2}{2} \cdot 2t \Rightarrow [\lambda^2 \cdot t]' = \lambda^2$ ✗

D: $[\sin(-\lambda t)]' = -\lambda \cos(-\lambda t) \Rightarrow -\lambda [\cos(-\lambda t)] = \lambda^2 \cdot (-\sin(-\lambda t))$

$= \boxed{-\lambda^2 \sin(-\lambda t)}$

Oefening 5

Gegeven de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sin^2(x^3)$. Bepaal $f'(x)$.

(A) $f'(x) = 6x^2 \cos(x^3)$

(B) $f'(x) = 2\cos(3x^2)$

(C) $f'(x) = 2\sin(x^3)\cos(3x^2)$

✓ (D) $f'(x) = 3x^2 \sin(2x^3)$

Oplossing: D
juist beantwoord: 58 %
blanco: 8 %

$u = \sin v$

$v = x^3$

$y = u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u \qquad \frac{du}{dv} = \cos v \qquad \frac{dv}{dx} = 3x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \sin(x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

$$= \underbrace{6}_{2\cdot 3} x^2 \underbrace{\sin(x^3) \cdot \cos(x^3)}_{\sin\alpha \cos\alpha} \Rightarrow 3 \sin(2\alpha)$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 \sin(2x^3)}$$

Oefening 6

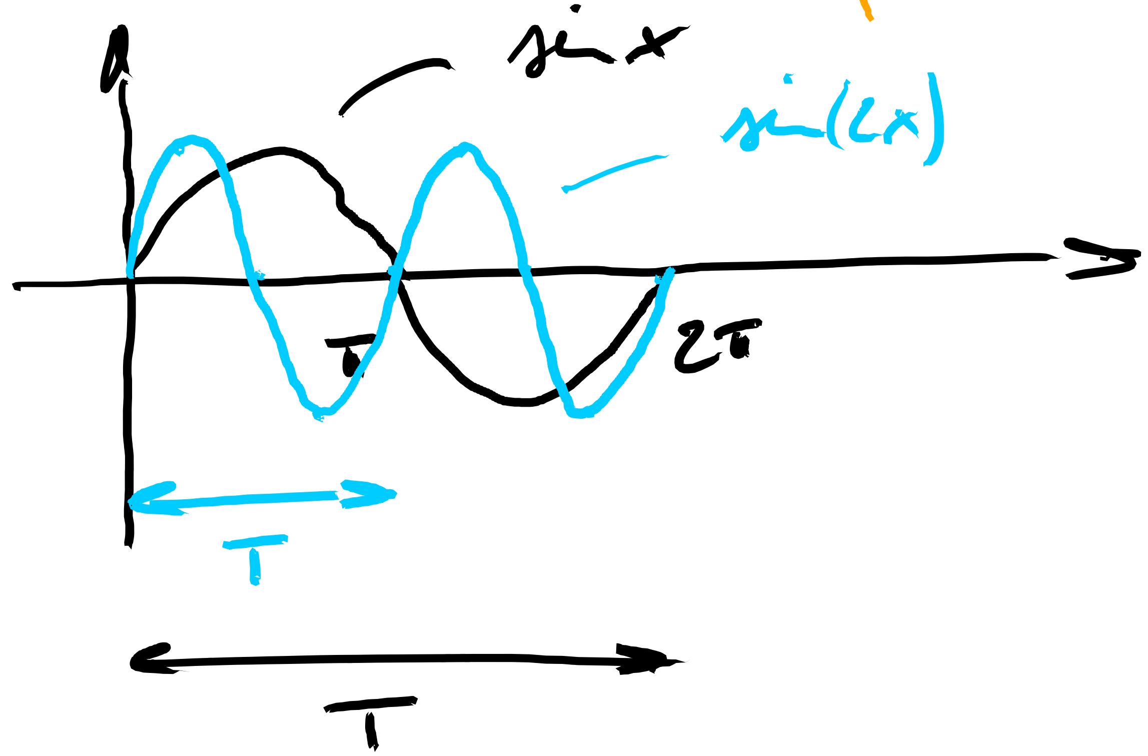
Beschouw de periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met periode T en de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g(t) = f(2t + 3)$. Welke periode heeft de functie g?

↳ verschuiving naar links, geen invloed op de periode!

(A) $\frac{T-3}{2}$ ✓ (B) $\frac{T}{2}$ (C) $2T$ (D) $2T+3$

Oplossing: B
juist beantwoord: 42 %
blanco: 30 %

$$\begin{cases} \sin(x) \to T = 2\pi \\ \sin(2x) \to T = \frac{2\pi}{2} = \pi \end{cases} \to \frac{T}{2}$$



Oefening 7

De reële variabele x voldoet aan $\ln(x^2) \leq e$ als en slechts als

(A) $0 < x \leq e^{\frac{e}{2}}$.

(B) $-1 \leq x \leq 1$ en $x \neq 0$.

(C) $-e^{\frac{e}{2}} \leq x \leq e^{\frac{e}{2}}$ en $x \neq 0$.

(D) $0 < x \leq e^{\sqrt{e}}$.

Oplossing: C
juist beantwoord: 49 %
blanco: 18 %

$$\ln(x^2) \leq e \Rightarrow e^{\ln(x^2)} \leq e^e \Rightarrow x^2 \leq e^e$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{e^e} = e^{e/2}$$

$$\Rightarrow \pm x \leq e^{e/2}$$

$$x \leq e^{e/2}$$

$$-x \leq e^{e/2} \Rightarrow x \geq -e^{e/2}$$

$$\Rightarrow -e^{e/2} \leq x \leq e^{e/2} \text{ en } x \neq 0 \quad (\ln(0) = -\infty)$$

Oefening 8

Als $f(x) = 3x^2$ en $g(x) = 2x^3$, waaraan is $f([g(x)]^2)\, g(x^2)$ dan gelijk?

(A) $2^3\ 3x^{13}$ (B) $2^5\ 3x^{13}$ (C) $2^3\ 3x^{18}$ (D) $2^5\ 3x^{18}$

Oplossing: D
juist beantwoord: 85 %
blanco: 3 %

$$g(x^2) = 2(x^2)^3 = 2 \cdot x^6$$

$$(g(x))^2 = (2x^3)^2 = 4x^6$$

$$f((g(x))^2) = 3(4x^6)^2 = 3 \cdot 16 \cdot x^{12}$$

$$f((g(x))^2) \cdot g(x^2) = 48x^{12} \cdot 2x^6 = 96x^{18} = 3 \cdot 32 \cdot x^{18}$$

$$= \boxed{3 \cdot 2^5 x^{18}}$$

Oefening 9

Beschouw de volgende drie integralen:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^b f(x)\,dx \\
I_2 &= \int_{a+1}^{b+1} f(x)\,dx \\
I_3 &= \int_a^{b+1} f(x)\,dx\ ,
\end{aligned}
$$

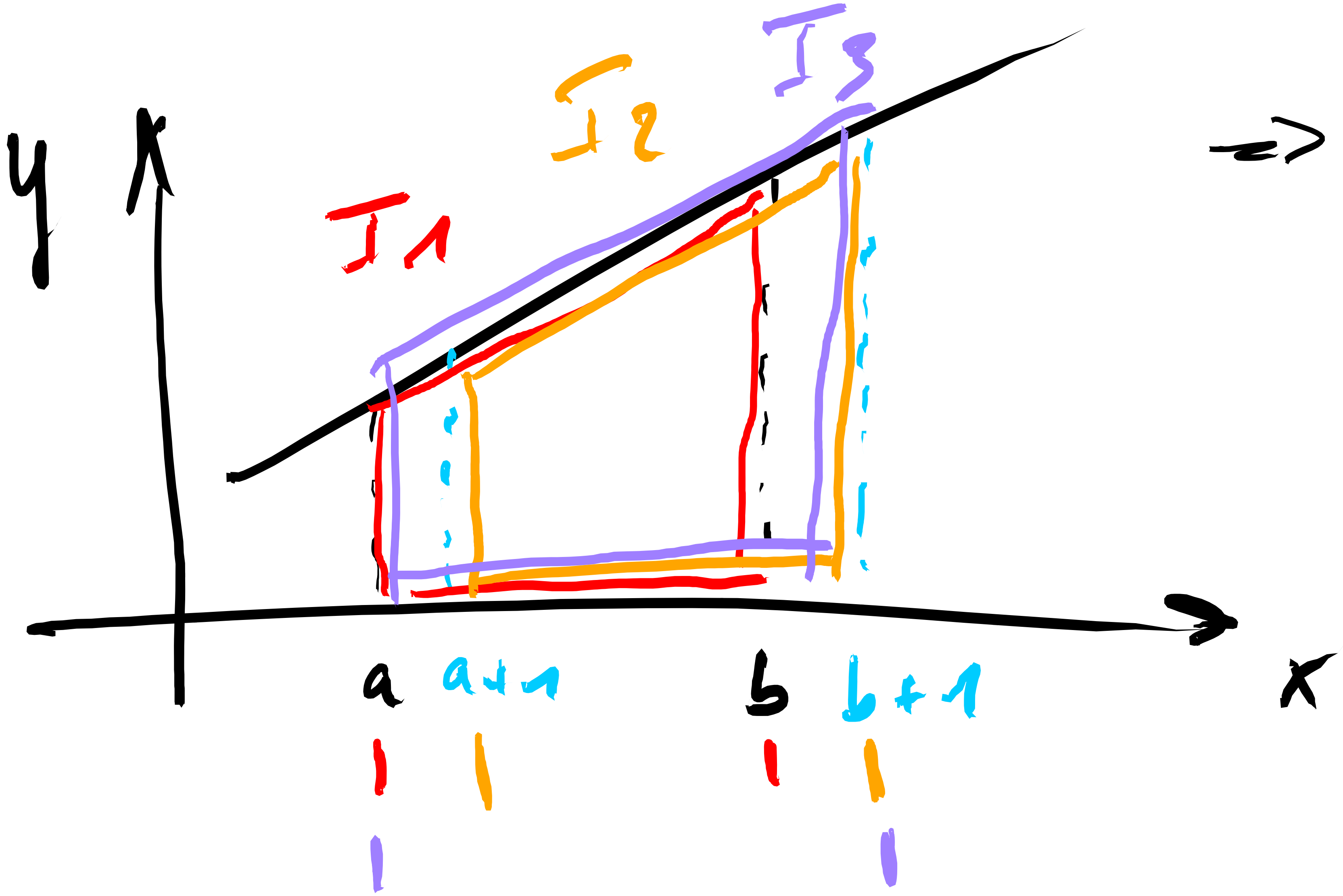
met de functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ een positieve, continue en strikt stijgende functie en a en b vaste reële getallen met $a<b$.
Welke van de volgende beweringen is als enige waar?

(A) $I_1 < I_2 < I_3$

(B) $I_1 = I_2 < I_3$

(C) $I_1 < I_3 < I_2$

(D) $I_3 < I_2 < I_1$



$\Rightarrow I_3 > I_2 > I_1$

$\Rightarrow I_1 < I_2 < I_3$

Oplossing: A
juist beantwoord: 73 %
blanco: 8 %

Oefening 10

Acht stoelen staan naast elkaar op een rij. Op hoeveel verschillende manieren kunnen drie Belgen, drie Nederlanders en twee Fransen plaatsnemen indien de personen van eenzelfde nationaliteit naast elkaar willen zitten?

(A) $2!(3!)^2$ (B) $2^4 3^2$ ✓(C) $2^4 3^3$ (D) $\frac{8!}{2!(3!)^2}$

Oplossing: C
juist beantwoord: 42 %
blanco: 26 %

B	B	B	F	F	N	N	N	3
F	F	B	B	B	N	N	N	
N	N	N	B	B	B	F	F	

× 2 want B en N kunnen van plaats wisselen! ⇒ 3.2

en iedere nationaliteit kan onderling nog van plaats wisselen!

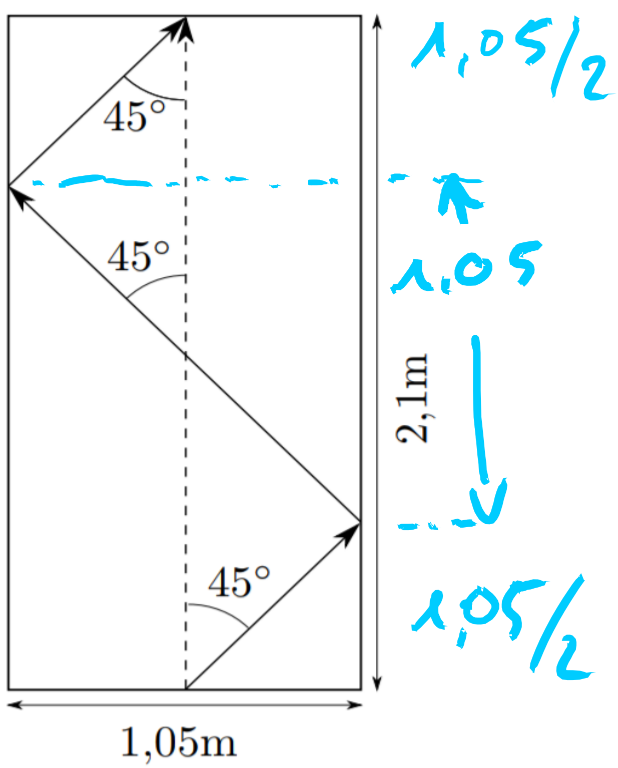
⇒ B: 3! ⇒ 3.2
N: 3! ⇒ 3.2
F: 2! ⇒ 2

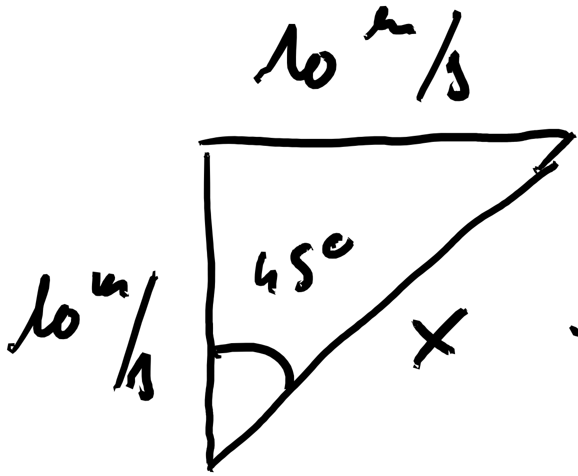
$(3.2).(3.2).(3.2).2$

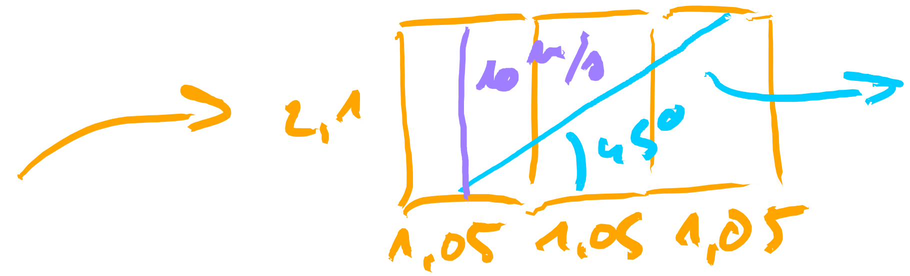
$= \boxed{2^4 . 3^3}$

Oefening 11

Twee vrienden, Younes en Tom, amuseren zich met een partijtje biljart. De biljarttafel heeft een lengte van 2,10 m en een breedte van 1,05 m. Younes stoot de biljartbal in een rechte lijn over de lengte van de tafel met een gemiddelde snelheid van 10 m/s. Tom kiest voor een traject in de vorm van een zigzaglijn die een hoek van afwisselend +45° en −45° maakt met de middellijn, zoals geïllustreerd in de figuur. De bal van Tom heeft evenveel tijd nodig om de andere kant van de biljarttafel te bereiken als de bal van Younes. Wat is dan, bij benadering, de gemiddelde snelheid van de bal van Tom?







zelfde afstand!

$$x = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$$
$$\approx \boxed{14 \text{ m/s}}$$

(A) 14 m/s (B) 16 m/s (C) 18 m/s (D) 20 m/s

Oplossing: A
juist beantwoord: 68 %
blanco: 11 %

Oefening 12

Beschouw een stelsel S met 3 vergelijkingen en 3 onbekenden x, y, z. Na rijherleiden is de uitgebreide coëfficiëntenmatrix van dit stelsel gegeven door (α is een reële parameter):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & e^{2\alpha}-1 & e^{\alpha}+1 \end{array}\right)$$

$\alpha = 0$

Welke uitspraak is dan correct?

(A) Er bestaat een $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor het stelsel S oneindig veel oplossingen heeft.

(B) Het stelsel S heeft voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ een oplossing.

✓ (C) Er bestaat een unieke $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor het stelsel S geen oplossing heeft.

(D) Er bestaan juist twee waarden voor $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor het stelsel S geen oplossing heeft.

$e^0 = 1$

$e^{2\alpha} - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow 0x + 0y + 0z = 2$ ✗

C

Oplossing: C
juist beantwoord: 43 %
blanco: 40 %

Meer formeel:

$e^{2\alpha} - 1 = 0 \Rightarrow \ln(e^{2\alpha}) = \ln(1) \Rightarrow 2\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$

Oefening 13

Welke van de volgende implicaties is als enige correct voor willekeurige van nul verschillende reële getallen x en y?

(A) $x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

(B) $x < y \Rightarrow \frac{1}{2^y} < \frac{1}{2^x}$

(C) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$

(D) $x < y \Rightarrow 1 < \frac{y}{x}$

Oplossing: B
juist beantwoord: 64 %
blanco: 3 %

A: $x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

$2 \quad 3 \qquad \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

$-3 \quad -2 \qquad \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3}$

$-2 \quad 2 \qquad \frac{1}{2} < \frac{1}{-2}$

B: $x < y \Rightarrow \frac{1}{2^y} < \frac{1}{2^x}$

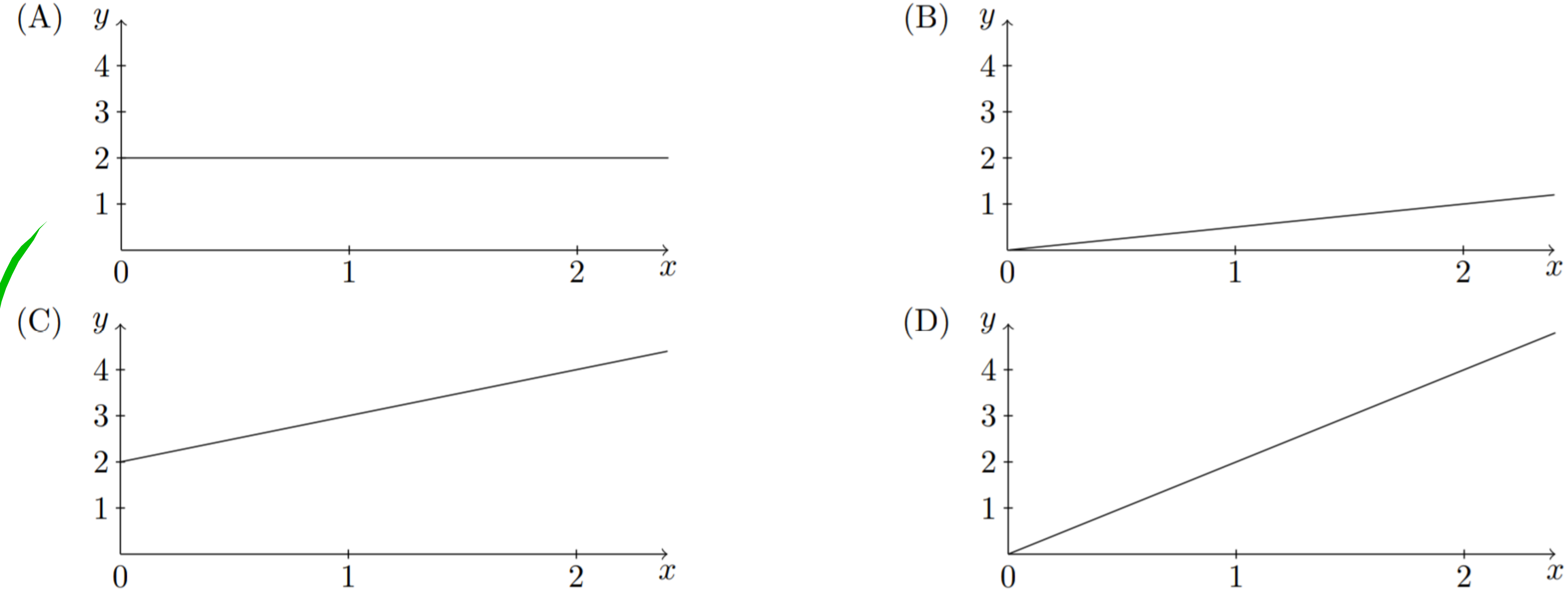
$2 \quad 3 \qquad \frac{1}{2^3} < \frac{1}{2^2}$

$-3 \quad -2 \Rightarrow \frac{1}{2^{-2}} < \frac{1}{2^{-3}} \Rightarrow 2^2 < 2^3$

$-2 \quad 2 \Rightarrow \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2^{-2}} \Rightarrow \frac{1}{4} < 4$

Oefening 14

Welk van onderstaande grafieken geeft het verband weer tussen $x = \log_{10} t$ en $y = \log_{10}(100t)$ met $t \in \mathbb{R}_0^+$?



Oplossing: C
juist beantwoord: 65 %
blanco: 11 %

$$\left.\begin{array}{l} y = \log(100 \cdot t) = \log(100) + \log(t) = 2 + \log(t) \\ x = \log(t) \end{array}\right\} \text{C}$$

Oefening 15

De integraal $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{\cos^2(2x)(1-\tan(2x))}$ kan gebruikmakend van substitutie omgezet worden naar

$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(A) $\int_0^{1-\sqrt{3}/3} \frac{du}{2u}$ (B) $\int_{1-\sqrt{3}/3}^{0} \frac{du}{2u}$ (C) $\int_1^{1-\sqrt{3}/3} \frac{du}{2u}$ ✓ (D) $\int_{1-\sqrt{3}/3}^{1} \frac{du}{2u}$

$(\mathrm{tg}(2x))' = \frac{2}{\cos^2(2x)}$

Oplossing: D
juist beantwoord: 16 %
blanco: 58 %

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\pi/12} \frac{d(\mathrm{tg}(2x))}{1-\mathrm{tg}(2x)} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/12} \frac{d(1-\mathrm{tg}(2x))}{1-\mathrm{tg}(2x)} = +\frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{0} \frac{d(1-\mathrm{tg}(2x))}{1-\mathrm{tg}(2x)}$$

$$u = 1-\mathrm{tg}(2x) \rightarrow x = 0 \rightarrow u = 1$$

$$x = \frac{\pi}{12} \rightarrow u = 1 - \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{1-\sqrt{3}/3}^{1} \frac{du}{u}$$

D

Oefening 16

Twee verschillende cirkels met straal $\sqrt{20}$ raken in de oorsprong aan de rechte met vergelijking $y = 2x$. Welk van de volgende punten ligt op geen enkele van beide cirkels?

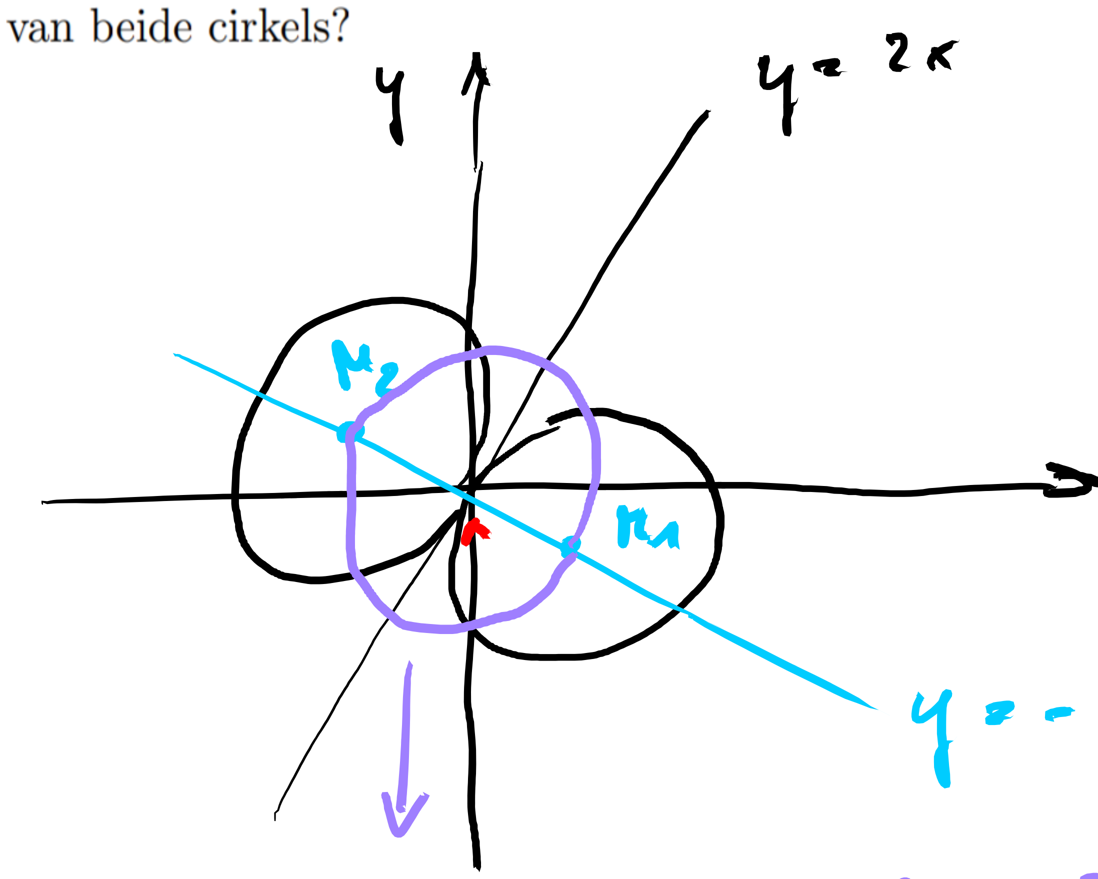
(A) $A(6, -6)$

✓ (B) $B(-6, 4)$

(C) $C(-2, 6)$

(D) $D(0, -4)$

Oplossing: B
juist beantwoord: 32 %
blanco: 47 %



$M_1 = y = -\frac{1}{2}x$

$M_2 = y = -\frac{1}{2}(-x)$

$y = -\frac{1}{2}x \iff (r_1 \cdot r_2 = -1)$

$r = \sqrt{20} \Rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{20})^2 = 20$ snijpunten!

$\Rightarrow y = \sqrt{20 - x^2}$

$-\frac{1}{2}x = \sqrt{20 - x^2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 = 20 - x^2$

$\frac{1}{4}x^2 = 20 - x^2 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{4}x^2 = 20$

$\Rightarrow \frac{5}{4}x^2 = 20$

$\Rightarrow x^2 = \frac{80}{5} = 16$

$\Rightarrow \boxed{x = \pm 4}$

$y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow y = \pm 2$

$M_1 = (4, -2)$ en $M_2 = (-4, 2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 20 \\ C_2: (x+4)^2 + (y-2)^2 = 20 \end{cases}$$

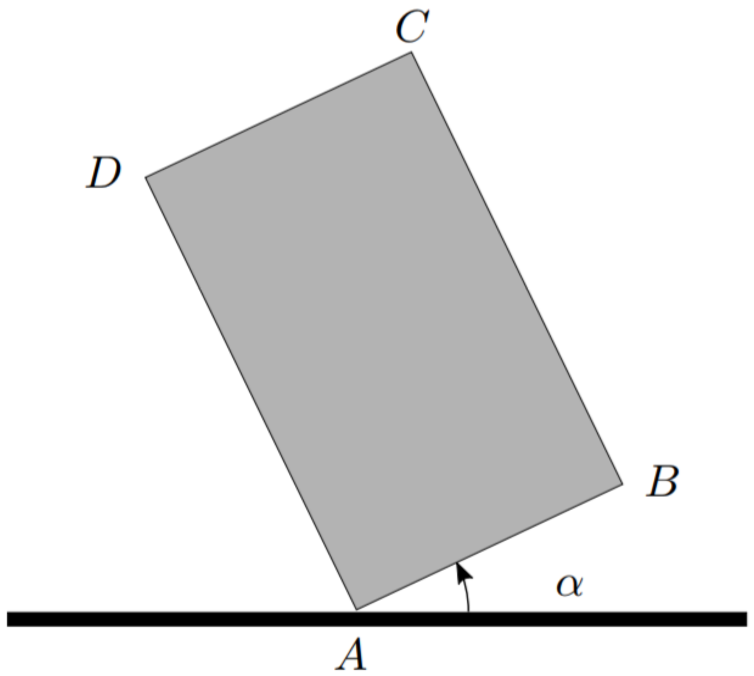
A: $(6, -6) \Rightarrow 2^2 + 4^2 = 20$ ✗

B: $(-6, 4) \Rightarrow 10^2 + 6^2 \neq 20$
$2^2 + 2^2 \neq 20$ ✓

B

Oefening 17

Een rechthoekige plaat $ABCD$ met korte zijde AB en lange zijde BC staat gekanteld zoals aangegeven op de figuur. De hoek α is de hoek tussen de korte zijde AB en de horizontale. Welk van onderstaande voorwaarden is voldaan als AC verticaal staat?

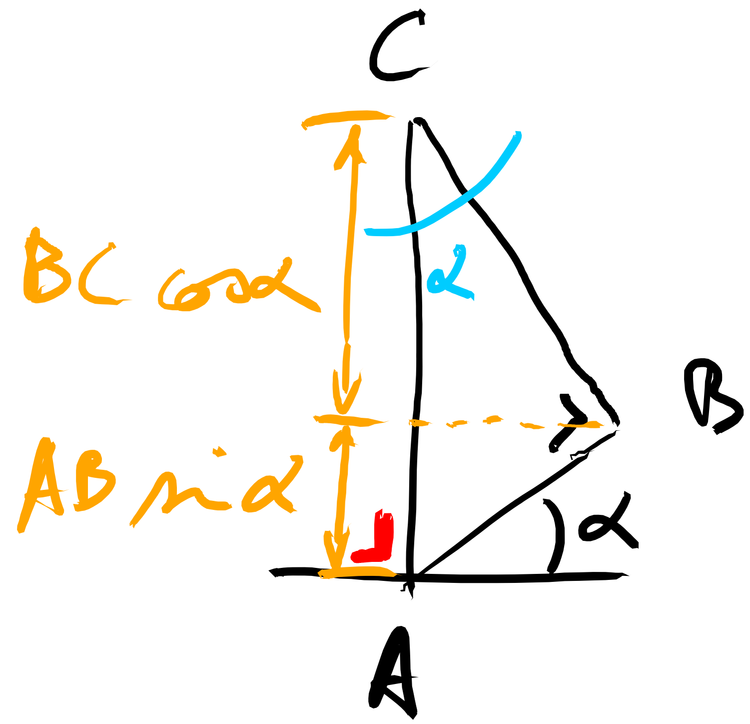


(A) $|AC| = |AB|\cos\alpha + |BC|\sin\alpha$

(B) $|AC| = |AB|\sin\alpha + |BC|\cos\alpha$

(C) $|BC| = |AB|\cos\alpha + |AC|\sin\alpha$

(D) $|BC| = |AB|\sin\alpha + |AC|\cos\alpha$

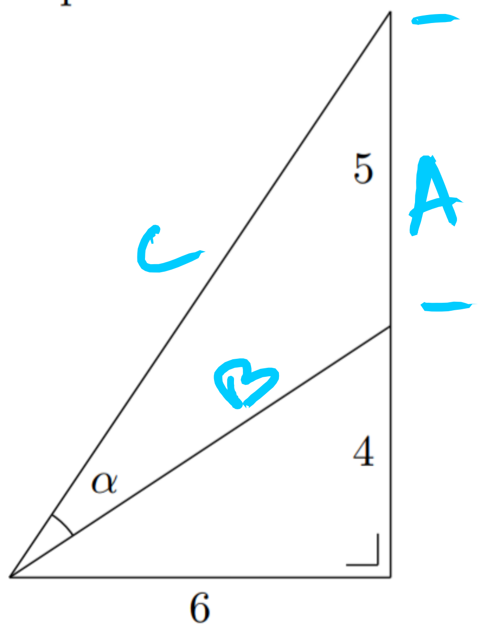


Oplossing: B
juist beantwoord: 59 %
blanco: 33 %

$\Rightarrow |AC| = |AB| \sin\alpha + |BC| \cos\alpha$

Oefening 18

Bepaal $\cos\alpha$ in onderstaande figuur.



$$B = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$C = \sqrt{6^2 + (4+5)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

(A) $\cos\alpha = 9/13$ (B) $\cos\alpha = 10/13$ (C) $\cos\alpha = 11/13$ ✓ (D) $\cos\alpha = 12/13$

Oplossing: D
juist beantwoord: 45 %
blanco: 42 %

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC}$$

$$\cos\alpha = \frac{4 \cdot 13 + 9 \cdot 13 - 25}{2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13}} = \frac{13(4+9) - 25}{12 \cdot 13}$$

$$\cos\alpha = \frac{13^2 - 25}{12 \cdot 13} = \frac{169 - 25}{12 \cdot 13} = \frac{\cancel{144}^{\,12}}{\cancel{12} \cdot 13} = \boxed{\frac{12}{13}}$$

Oefening 19

Het punt $P(a,b)$ ligt op de grafieken van de functies $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto f(x)=4x^2+2x-8$ en $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto g(x)=x^3-x+10$. In dit punt P hebben de grafieken van beide functies dezelfde raaklijn. Bepaal de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn.

(A) 24 ✓ (B) 26 (C) 28 (D) 30

$\hookrightarrow$ = raakpunt!

Oplossing: B
juist beantwoord: 58 %
blanco: 36 %

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 8x+2 \\ g'(x) &= 3x^2-1 \end{aligned}\right\} f'(x)=g'(x) \Rightarrow 8x+2=3x^2-1$$

$$3x^2-8x-3=0$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-4.3(-3)}}{2.3}=\frac{8}{6}\pm\frac{\sqrt{64+36}}{6}$$

$$x=\frac{8}{6}\pm\frac{\sqrt{100}}{6}=\frac{8}{6}\pm\frac{10}{6} \begin{cases} 18/6 = 3 \\ -2/6 = -1/3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f(3) &= 4.3^2+2.3-8 = 36+6-8 = 34 \\ g(3) &= 3^3-3+10 = 27-3+10 = 34 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{raakpunt!} ✓$$

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2.\frac{1}{3}-8 = \frac{4}{9}-\frac{2}{3}-8 = \frac{4}{9}-\frac{6}{9}-\frac{72}{9} = -\frac{74}{9} \\ g\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)+10 = -\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+10 = -\frac{1}{27}+\frac{9}{27}+\frac{270}{27} = \frac{278}{27} \end{cases} \quad \neq \quad \times$$

$$\Rightarrow P(a,b) = (3,34)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(3) = 8.3+2 = 26} \qquad \boxed{g'(3) = 3.3^2-1 = 27-1 = 26}$$

Oefening 20

Beschouw de vergelijking in $x \in \mathbb{R}$: $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$.
Hoeveel oplossingen van deze vergelijking liggen in het interval $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$?

$[90°, 360°]$

(A) 0 ✓ (B) 1 (C) 2 (D) 3

Oplossing: B
juist beantwoord: 44 %
blanco: 26 %

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0$$
$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \longrightarrow u = \cos x \longrightarrow 2u^2 + 3u - 2 = 0$$

$$u = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$$

$$u = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{9 + 16}}{4} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

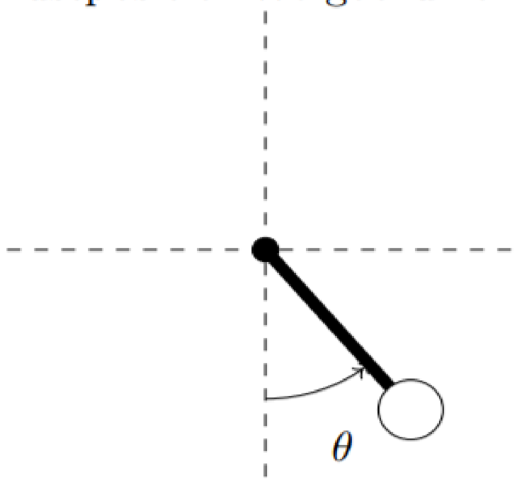
$$u = \begin{cases} 2/4 = 1/2 \ ✓ \\ -8/4 = -2 \ ✗ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \begin{cases} x = 30° \ ✗ \\ x = -30° = 330° \ ✓ \end{cases}$$

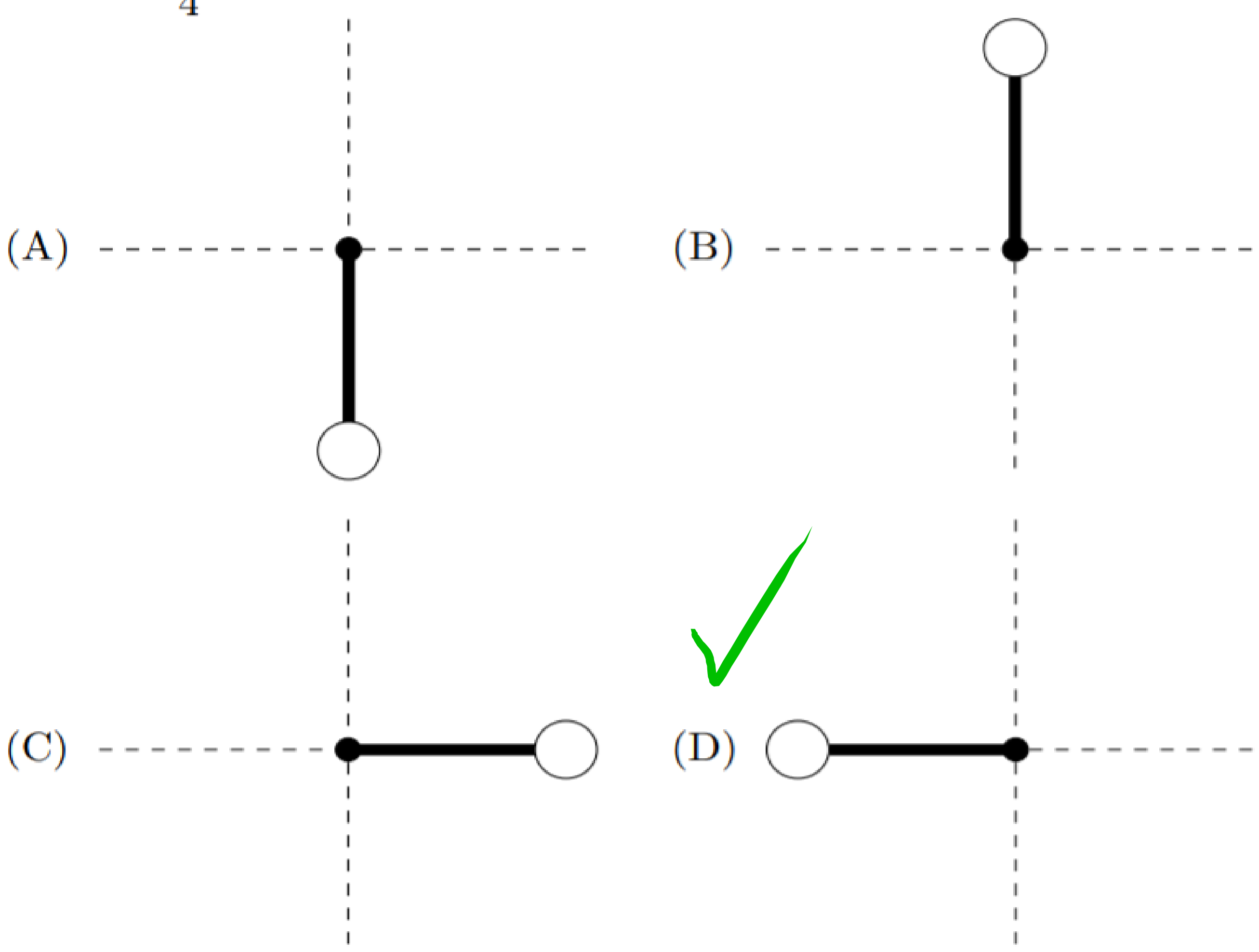
1 oplossing!

Oefening 21

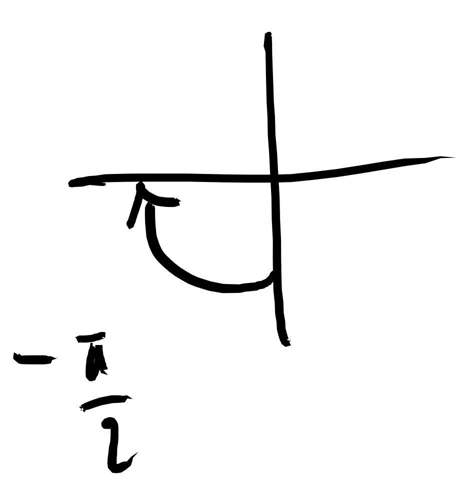
Beschouw de slinger uit onderstaande figuur. De hoek θ is de hoek die de slinger maakt ten opzichte van de verticale rustpositie. We gebruiken de conventie dat deze hoek positief is als deze in tegenwijzerzin georiënteerd is.



Verder weten we dat het verband tussen de hoek θ, gemeten in radialen, en de tijd t, gemeten in seconden (s), gegeven is door $\theta = \theta_{max} \cos[\frac{\pi}{3}(t+1)]$. Hierbij is θ_{max} een constante die zo gekozen is dat op $t = 0$ s de hoek θ gegeven is door $\theta = \frac{\pi}{4}$. Welke figuur komt overeen met de stand op $t = 2$ s?



Oplossing: D
juist beantwoord: 55 %
blanco: 11 %



$t = 0$:

$$\frac{\pi}{4} = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}(0+1)\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \theta_m \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_m = \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}}$$

$t = 2$:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}(2+1)\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 3\right) = \frac{\pi}{2} \cdot (-1)$$

$$\boxed{\theta = -\frac{\pi}{2}}$$

Oefening 22

De veelterm $p(x) = 6x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$ met a, b en c reële constanten is deelbaar door $x^3 - x^2 + x - 1$. Door welke van onderstaande veeltermen is $p(x)$ eveneens deelbaar?

(A) $3x^2 + x + 4$

(B) $3x^2 + x - 4$

(C) $3x^2 - x + 2$

(D) $3x^2 - x - 2$

Oplossing: B
juist beantwoord: 35 %
blanco: 51 %

$$6x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c = (x^3 - x^2 + x - 1)(dx + e)$$

$d = 6$

$e = -c$

$$= (x^3 - x^2 + x - 1)(6x - c)$$

$$= 6x^4 - cx^3 - 6x^3 + cx^2 + 6x^2 - cx - 6x + c$$

$$= 6x^4 + x^3(-c-6) + x^2(c+6) + x(-c-6) + c$$

$2 = -c - 6 \Rightarrow \boxed{c = -8}$

$a = c + 8 \Rightarrow a = -2$

$b = -c - 6 \Rightarrow b = 8 - 6 = 2$

$$\Rightarrow (x^3 - x^2 + x - 1)(6x + 8)$$

$$(x^2 + f)(x + g) = x^3 + gx^2 + fx + f \cdot g$$

$$\begin{cases} g = -1 \\ f = 1 \\ f \cdot g = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x^2 + 1)(x - 1)(6x + 8)$$

$\rightarrow$ oplossingen met x^2 dus : $(x-1)(6x+8)$

$$= 6x^2 + 8x - 6x - 8$$

$$= 6x^2 + 2x - 8$$

$$= 2(3x^2 + x - 4)$$

B

Oefening 23

Beschouw het complex getal $z = 1 + i$, met $i^2 = -1$. Bepaal het reëel deel van z^{2018}.

✓ (A) 0 (B) 1 (C) 2^{1009} (D) 2^{2018}

Oplossing: A
juist beantwoord: 45 %
blanco: 21 %

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z^{2018} = (\sqrt{2})^{2018} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 2018}$

$= 2^{1009} e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= 2^{1009}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \pi \cdot \frac{2018}{4}$

$= \pi \cdot \frac{1009}{2}$

$= \pi\left(504 + \frac{1}{2}\right)$

$= \pi\left(2 \cdot 252 + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z^{2018}) = 0$

Oefening 24

In een escaperoom vindt een groep jongeren een kaartje met daarop de waarde van het getal a. Ze vinden ook volgende procedure:

stap 1 Neem de veelterm $3(x^2+1)-5$.

stap 2 Vervang nu x door x^2-1.

stap 3 Bereken hiervan de afgeleide.

stap 4 Evalueer dit in het punt $x=a$.

stap 5 Kwadrateer ten slotte het resultaat.

Ze besluiten de procedure uit te werken met de waarde voor a die ze vonden op het kaartje. Hierbij vergissen ze zich, en wisselen ze stap 2 en 3 om. Ze vinden toch het correcte resultaat. Welke waarde had het getal a zeker **niet**?

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 ✓ (D) 2

Oplossing: D
juist beantwoord: 50 %
blanco: 26 %

2: $3((x^2-1)^2+1)-5$
$3(x^4-2x^2+1+1)-5$

3: $f'(x)=12x^3-12x$
$=12x(x^2-1)$

4: $f'(a)=12a(a^2-1)$

5: $(12a(a^2-1))^2$
$=144a^2(a^2-1)^2$

3: $f'(x)=6x$

2: $6(x^2-1)$

4: $6(a^2-1)$

5: $(6(a^2-1))^2$
$36(a^2-1)^2$

$144a^2\cancel{(a^2-1)}$
$=36\cancel{(a^2-1)}$

$144a^2=36$

$a^2=\frac{36}{144}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$\boxed{a = \left\langle \begin{array}{l} +1/2 \\ -1/2 \end{array} \right.}$

A en B ✓

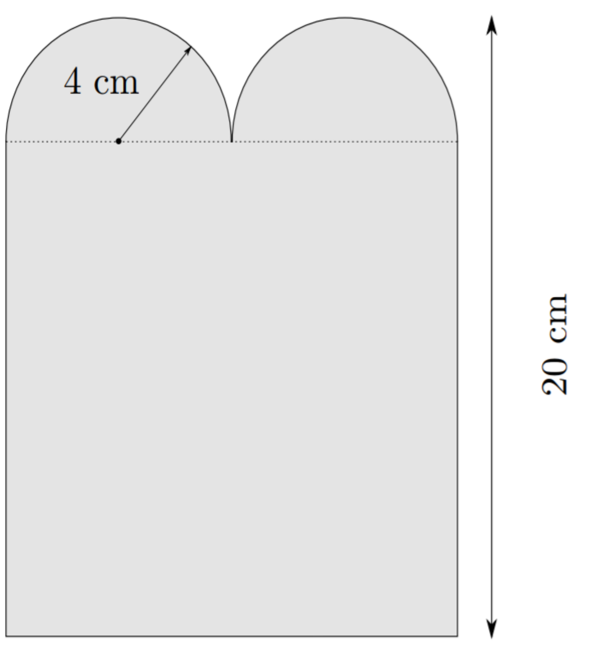
$\Rightarrow$ C : $a=1$ $\rightarrow$ $\begin{cases} 144\cdot 1(1-1)^2=0 \\ 36(1-1)^2=0 \end{cases}$ ✓

$\Rightarrow$ D : $a=2$ $\rightarrow$ $\begin{cases} 144\cdot 2(2-1)^2=288 \\ 36(2-1)^2=36 \end{cases}$ ✗ $\Rightarrow$ a zeker geen 2!

D

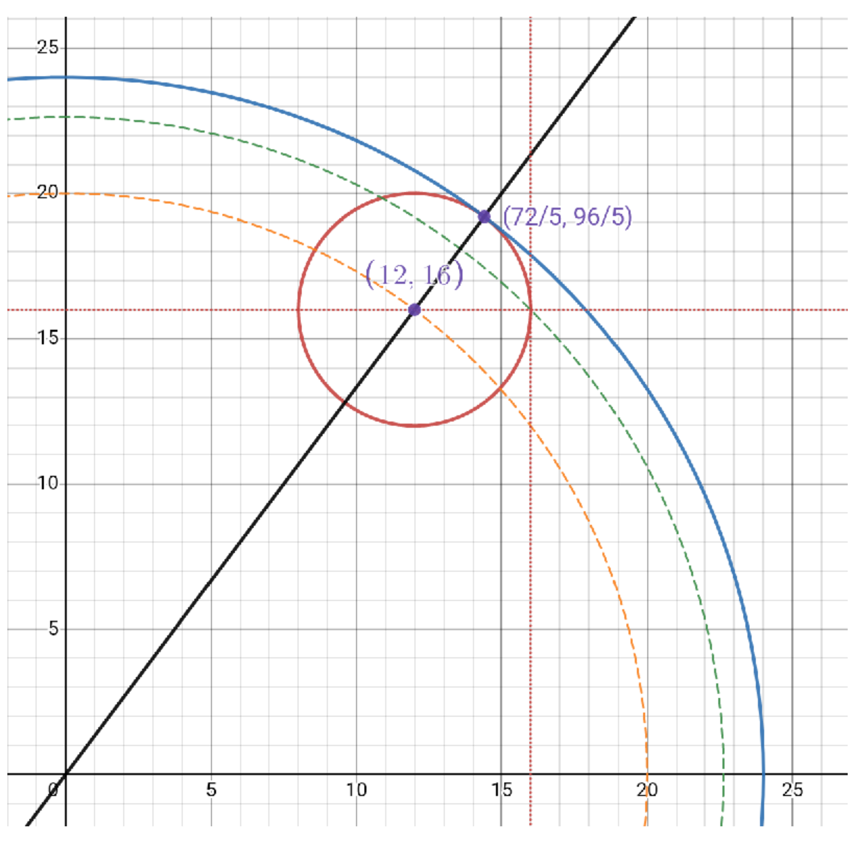
Oefening 25

De bakkersfederatie lanceert een wedstrijd om een brooddoos te ontwerpen. De vorm van de bodem van één van de deelnemende ontwerpen bestaat uit twee halve cirkels en een rechthoek zoals in de figuur hieronder. De cirkels hebben een straal van 4 cm en de totale hoogte bedraagt 20 cm. Het wedstrijdreglement eist dat je een mes plat op de bodem van de brooddoos kan leggen. De jury beschikt over 4 messen van verschillende lengte, respectievelijk 208 mm, 218 mm, 228 mm en 238 mm. Hoeveel van deze messen passen in de brooddoos? Je mag de dikte van de messen in de randen van de brooddoos verwaarlozen.

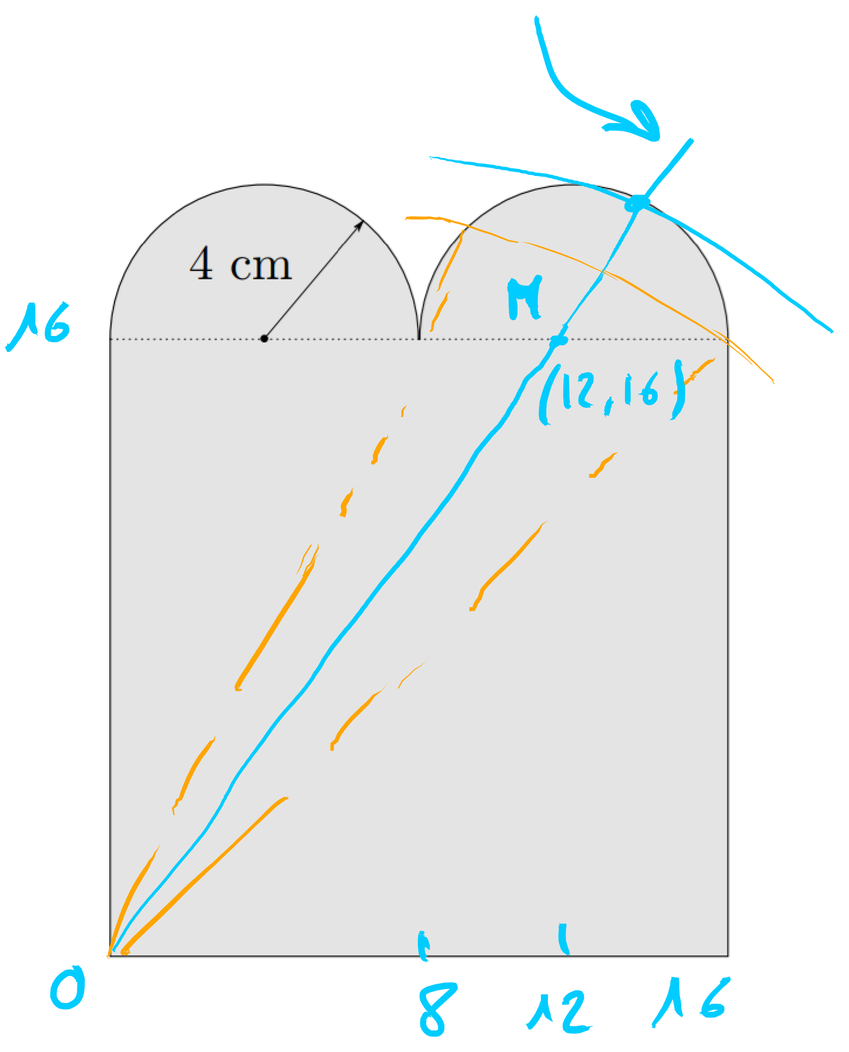


Oplossing: D
juist beantwoord: 54 %
blanco: 21 %

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) allemaal



rechte door M (12,16)



$$\text{rico} = \frac{y}{x} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

$$\text{cirkel}: (x-12)^2 + (y-16)^2 = 4^2 \Rightarrow y = \sqrt{16-(x-12)^2} + 16$$

$$\Rightarrow \text{snijpunt}: \frac{4}{3}x = \sqrt{16-(x-12)^2} + 16$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{3}x - 16\right)^2 = 16 - [x^2 - 24x + 144]$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9}x^2 - \frac{128}{3}x + 256 = -128 - x^2 + 24x$$

$$\Rightarrow \frac{16+9}{9}x^2 - \frac{128+72}{3}x + 384 = 0 \qquad (\times 9)$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 600x + 3456 = 0$$

$$x = \frac{600 \pm \sqrt{600^2 - 4 \cdot 25 \cdot 3456}}{2 \cdot 25} = 12 \pm \frac{\sqrt{14400}}{50} = 12 \pm \frac{120}{50}$$

$$\boxed{x = \frac{60+12}{5} = \frac{72}{5}} \checkmark \qquad x = \frac{60-12}{5} = \frac{48}{5} \times$$

$$\rightarrow y = \frac{4}{3}x = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{72}^{24}}{5} \qquad \boxed{y = \frac{96}{5}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{5}\sqrt{72^2 + 96^2} = \frac{1}{5}\sqrt{5184 + 9216} = \frac{1}{5}\sqrt{14400} = \frac{120}{5}$$

$$\boxed{r = 24 \text{ cm}}$$

24 cm = 240 mm > 238 mm
⇒ alle messen passen!

OF: raakpunt van 2 cirkels: $M_1 = (0,0)$, straal r
$M_2 = (12,16)$, straal 4

gebruik parametercoördinaten!

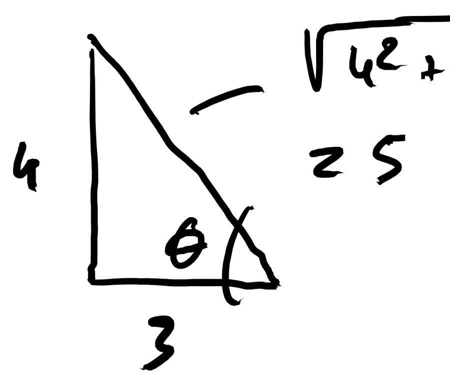
$$C_1: \begin{cases} x_1 = r \cdot \cos\theta \\ y_1 = r \cdot \sin\theta \end{cases} \qquad C_2: \begin{cases} x_2 = 12 + 4 \cdot \cos\theta \\ y_2 = 16 + 4 \sin\theta \end{cases}$$

raakpunt: $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$

$$\begin{cases} r\cos\theta = 12 + 4\cos\theta \\ r\sin\theta = 16 + 4\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (r-4)\cos\theta = 12 \\ (r-4)\sin\theta = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(r-4)}\sin\theta}{\cancel{(r-4)}\cos\theta} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = \operatorname{tg}\theta \longrightarrow y = \frac{4}{3}x$$

voor $y = 16$
$\Rightarrow 16 = \frac{4}{3}x$
$\Rightarrow x_2 = \frac{3 \cdot 16}{4}$
$x = 12$
$\rightarrow$ r door (12,16) M_2



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = \frac{4}{5} \\ \cos\theta = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 12 + 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{60+12}{5} = \frac{72}{5} = x_1 \\ y_2 = 16 + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{80+16}{5} = \frac{96}{5} = y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{72}{5} = r \cdot \frac{3}{5} \\ \frac{96}{5} = r \cdot \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{r} = \frac{72}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{72}{3} = \boxed{24} \\ \boxed{r} = \frac{96}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{96}{4} = \boxed{24} \end{cases} \checkmark$$

OF: Als je door hebt dat de lijn door het middelpunt van de halve cirkel moet gaan, en dat van daar nog de straal erbij komt, dan is het gewoon de afstand tot dat middelpunt plus de straal.

$$\text{Dus}: M = (12,16) \Rightarrow d = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 20 + 4 = 24 \text{ cm}}$$

Oefening 26

De groottes van de vier hoeken van een vierhoek staan in verhouding tot elkaar zoals 3 : 4 : 5 : 6. Wat is het verschil tussen de grootste en de kleinste hoek?

(A) 30° (B) 40° (C) 50° ✓(D) 60°

Oplossing: D
juist beantwoord: 77 %
blanco: 13 %

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{B} = \frac{3}{4} \qquad \frac{B}{C} = \frac{4}{5} \qquad \frac{C}{D} = \frac{5}{6}$$

$$A = \frac{3}{4} B \qquad B = \frac{4}{5} C \qquad C = \frac{5}{6} D$$

$$A = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} C = \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{6} D = \frac{3}{6} D = \boxed{\frac{1}{2} D}$$

$$\Rightarrow \quad A + B + C + D = 360°$$

$$A + \frac{4}{3} A + \frac{5}{3} A + \frac{6}{3} A = 360° = \frac{3+4+5+6}{3} A = \frac{18}{3} A = 6A$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{360°}{6} = 60°}$$

$$\Rightarrow \quad D = 2A = 2 \cdot 60° = 120° \quad \Rightarrow \quad \boxed{D - A = 120° - 60° = 60°}$$

Oefening 27

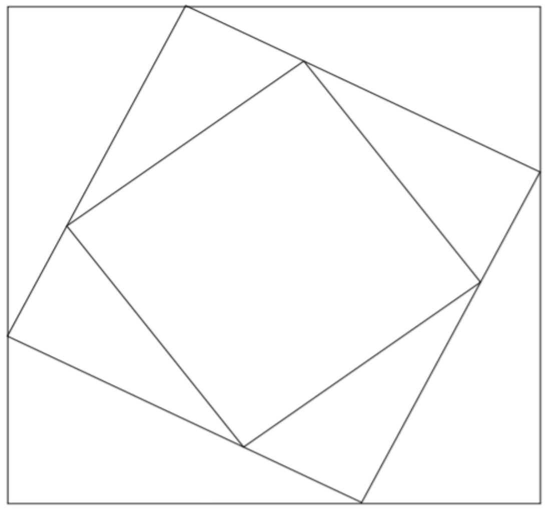
Construeer een rij van vierkanten als volgt:

- Vertrek van een eerste vierkant (rangnummer $n = 1$) met zijde 9, dit is het grootste vierkant.
- De hoekpunten van elk volgende vierkant verdelen de vier zijden van het vorige vierkant telkens volgens de verhouding 1:2.

Een tekening voor de vierkanten met rangnummers $n = 1$, $n = 2$ en $n = 3$ vind je terug in de figuur.

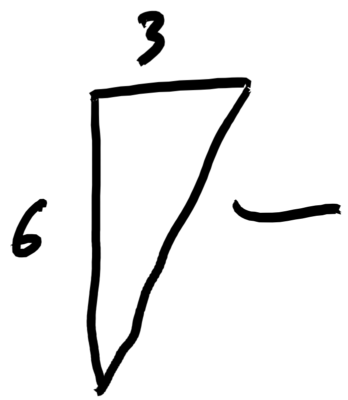
$A_1 = 9^2 = 81$

$A_2 = (3\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5$
$= 45$



$1/3 = 3$

$2/3 = 6$



$\sqrt{9+36} = \sqrt{45}$
$= \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3^2 \cdot \cancel{3^2}}{\cancel{3^2} \cdot 5} = \frac{9}{5}$

$\Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{5}{9} A_1}$

Vanaf welk rangnummer n wordt de oppervlakte van het vierkant kleiner dan 10?

(A) $n = 4$ (B) $n = 5$ (C) $n = 6$ (D) $n = 7$

Oplossing: B
juist beantwoord: 56 %
blanco: 19 %

$\Rightarrow A_3 = \frac{5}{9} A_2 = \frac{5}{9} 45 = 25$

$\Rightarrow A_4 = \frac{5}{9} A_3 = \frac{125}{9} > 10$

$\Rightarrow \boxed{A_5 = \frac{5}{9} A_4 = \frac{625}{81} < 10}$

Oefening 28

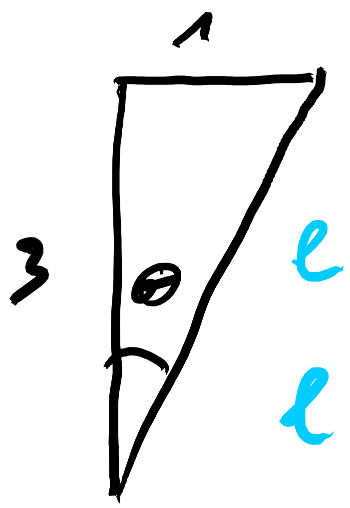
De hoek θ uitgedrukt in radialen, ligt in het interval $]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Verder is $\tan\theta = -\frac{1}{3}$.
Bepaal $\dfrac{1}{\sin(\theta + \frac{\pi}{2})} + \dfrac{1}{\sin(\pi - \theta)}$.

(A) $-\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$ (B) $-\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ ✓(C) $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

Oplossing: C
juist beantwoord: 12 %
blanco: 69 %

$]90°, 180°[$

$tg\,\theta = -\dfrac{1}{3}$



$\ell = \sqrt{3^2 + 1^2}$

$\ell = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

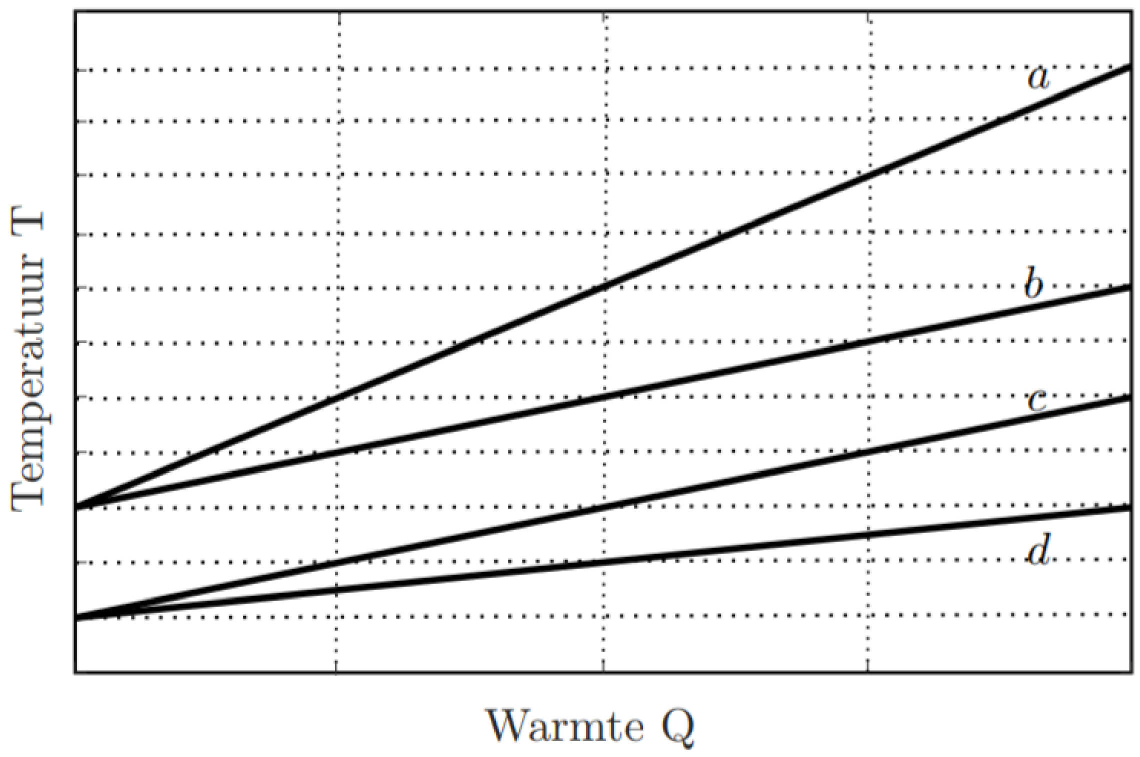
$\Rightarrow \sin(\pi - \theta) = \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\dfrac{1}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} + \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = -\dfrac{\sqrt{10}}{3} + \dfrac{3\sqrt{10}}{3}$

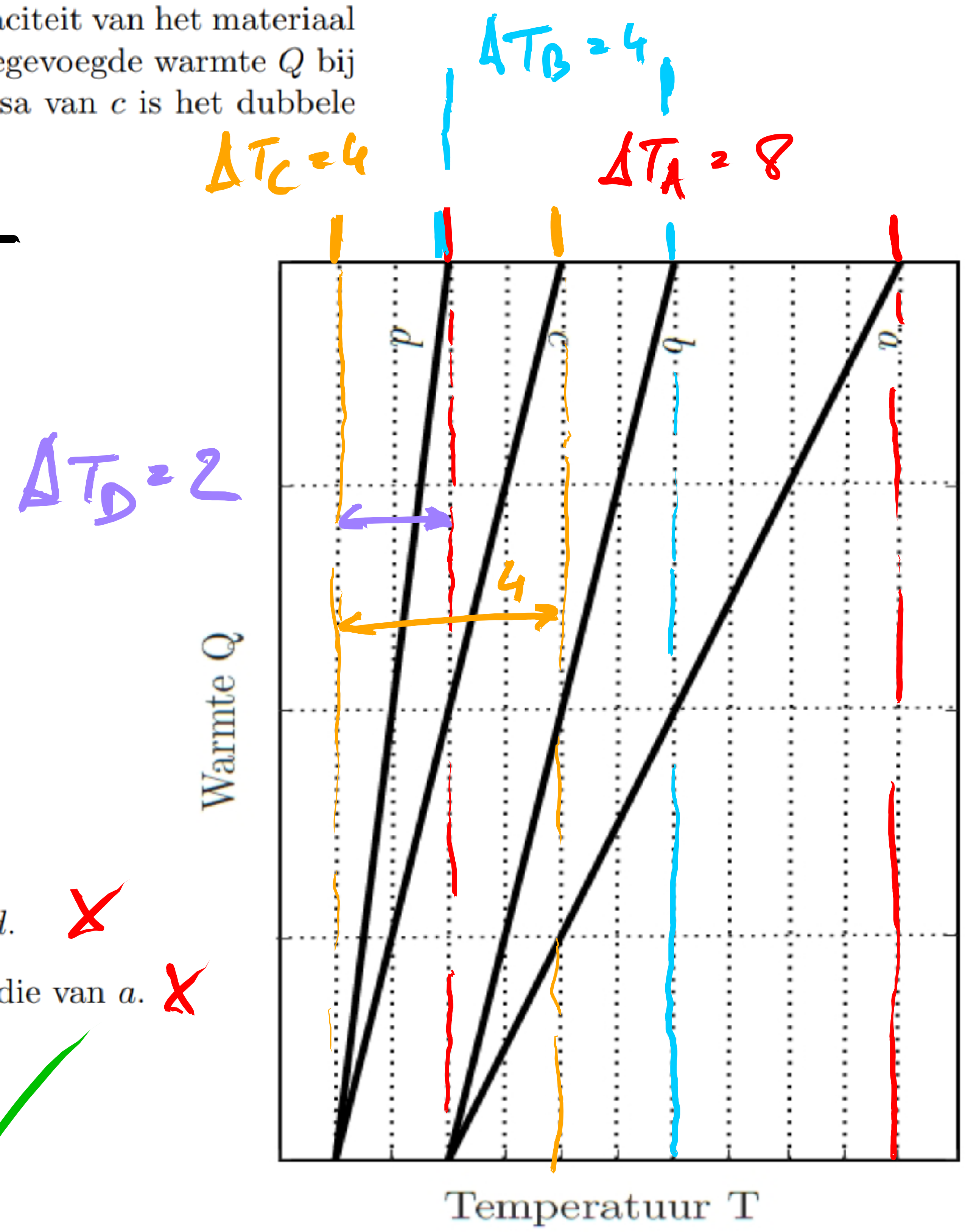
$= \boxed{\dfrac{2\sqrt{10}}{3}}$

Oefening 29

Het verband tussen de opname van een hoeveelheid warmte Q en de temperatuursverandering ΔT van een homogeen voorwerp met massa m, wordt gegeven door $Q = Cm\Delta T$. Hierbij is C de specifieke warmtecapaciteit van het materiaal van het voorwerp. Onderstaande grafiek toont het verband tussen de temperatuur T en de toegevoegde warmte Q bij vier homogene voorwerpen a, b, c en d. De massa's van a en b zijn gelijk aan elkaar, de massa van c is het dubbele van de massa van a, de massa van d is het dubbele van de massa van c.



$Q = 4$ eenheden



Welk van onderstaande uitspraken is waar?

(A) De specifieke warmtecapaciteit van het materiaal van voorwerp a is groter dan die van d.

(B) De specifieke warmtecapaciteit van het materiaal van voorwerp b bedraagt de helft van die van a.

(C) De specifieke warmtecapaciteit van het materiaal van voorwerp b en d zijn gelijk.

(D) De specifieke warmtecapaciteit van het materiaal van voorwerp a, c en d zijn gelijk.

Oplossing: D
juist beantwoord: 46 %
blanco: 14 %

$m_A = m_B$

A: $4 = m_A \cdot C_A\, 8 \Rightarrow m_A \cdot C_A = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_A = \frac{1}{m_A} \cdot \frac{1}{2}$

B: $4 = m_B \cdot C_B\, 4$

$4 = m_A \cdot C_B\, 4 \Rightarrow m_A \cdot C_B = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow C_B = \frac{1}{m_A} \cdot 1$

$2 C_A = C_B$

C: $m_C = 2 m_A \Rightarrow 4 = m_C \cdot C_C\, 4 = 2 m_A \cdot C_C \cdot 4 \Rightarrow C_C = \frac{1}{m_A} \cdot \frac{1}{2}$

D: $m_D = 2 m_C = 4 m_A \Rightarrow 4 = 4 m_A \cdot C_D \cdot 2 \Rightarrow C_D = \frac{1}{m_A} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow C_A = C_C = C_D$

Oefening 30

Gegeven de functie $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{4}{3x-1}$.
A en B zijn twee punten op de grafiek van deze functie met respectievelijke x-coördinaten 1 en 3. Het punt C is een punt op de grafiek van f waarvan de x-coördinaat niet tussen 1 en 3 ligt en waarbij de raaklijn in C aan de grafiek van f evenwijdig is aan de rechte door de punten A en B. Bepaal de y-coördinaat van het punt C.

(A) De y-coördinaat van het punt C is 1.

✓ (B) De y-coördinaat van het punt C is -1.

(C) De y-coördinaat van het punt C is $-\frac{2}{3}$.

(D) Er bestaat zo geen punt C.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Oplossing: B
juist beantwoord: 33 %
blanco: 42 %

$$A: x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{4}{3.1-1} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow A(1, 2)$$

$$B: x = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{4}{3.3-1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow B\left(3, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{rico } AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{3-1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{2}}{2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

evenwijdig!

$$f'(x) = \frac{0 - 4.3}{(3x-1)^2} = \frac{-12}{(3x-1)^2} = -\frac{3}{4}$$

$$-48 = -3(9x^2 - 6x + 1)$$
$$48 = 27x^2 - 18x + 3$$
$$0 = 27x^2 - 18x - 45$$
$$/9 \quad 0 = 3x^2 - 2x - 5 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.3.(-5)}}{2.3}$$

$$x = \frac{2}{6} \pm \frac{\sqrt{64}}{6} = \frac{2}{6} \pm \frac{8}{6}$$

$$x \begin{cases} 2/6 + 8/6 = 10/6 = 5/3 \text{ ✗} \\ 2/6 - 8/6 = -6/6 = -1 \text{ ✓} \end{cases}$$

niet tussen 1 en 3!

$$\boxed{f(-1) = \frac{4}{3.(-1)-1} = \frac{4}{-3-1} = -1}$$