Wiskunde

Als de veelterm $P(x) = x^2 + ax + a$ deelbaar is door $x + b$, met a en b reële getallen, dan geldt

<A> $b \neq 1$ en $a = \dfrac{b^2}{b-1}$

<B> $b \neq 1$ en $a = \dfrac{b}{b-1}$

<C> $b \neq 1$ en $a = -\dfrac{b}{b-1}$

<D> $b \neq 1$ en $a = -\dfrac{b^2}{b-1}$

$$
\begin{array}{r|ccc}
 & 1 & a & a \\
-b & & -b & -ab+b^2 \\
\hline
 & 1 & a-b & \underbrace{(1-b)}_{\hookrightarrow\, b \neq 1} a + b^2
\end{array}
$$

$$(1-b)a + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{-b^2}{1-b} = \frac{b^2}{b-1} \qquad A$$

Gegeven is de functie f met als voorschrift

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \, .$$

Wat is het voorschrift van de afgeleide functie f'?

<A> $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

<B> $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$

<C> $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

<D> $f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$$f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$f'(x) = \frac{1(\cancel{x}+1) - \cancel{x} \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

A

De afgeleide van een functie f, gedefinieerd op $]0, +\infty[$, is gegeven door $f'(x) = \ln x$. Bovendien is $f(e) = e^2$. Dan is $f(e^2)$ gelijk aan

<A> e^2

<B> $2e^2$

<C> $2 + e^2$

<D> e^4

$$f'(x) = \ln x$$

$$\int \ln x \, dx$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$u = \ln x \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$f(x) = x \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{dx}{\cancel{x}} = x \cdot \ln x - x + C$$

$$f(e) = e^2 = e \cdot \underbrace{\ln e}_{1} - e + C \Rightarrow C = e^2$$

$$f(e^2) = e^2 \cdot \ln e^2 - e^2 + e^2 = e^2 \cdot 2 - e + e^2 = 2e^2$$

B

Vier verschillende punten $P(a,p)$, $Q(b,q)$, $R(a,r)$ en $S(b,s)$ liggen in het eerste kwadrant. De punten P en Q liggen op de parabool met als vergelijking $y = x^2$ en de punten R en S liggen op de parabool met als vergelijking $y = \frac{x^2}{4}$. Het lijnstuk $[PQ]$ is dubbel zo lang als het lijnstuk $[RS]$. Bepaal $a + b$.

<A> $\frac{3}{4}$

<B> $\frac{4}{3}$

<C> 2

<D> 3

$$|PQ| = 2|RS| \rightarrow |PQ|^2 = 4|RS|^2$$

$$|PQ|^2 = (b-a)^2 + (b^2-a^2)^2$$

$$|RS|^2 = (b-a)^2 + \left(\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right)^2$$

$$(b-a)^2 + (b^2-a^2) = 4(b-a)^2 + \frac{4}{16}(b^2-a^2)^2$$

$$3(b-a)^2 - \frac{3}{4}(b^2-a^2)^2 = 0 \qquad \times 4$$

$$12(b-a)^2 - 3(b^2-a^2)^2 = 0 \qquad (b-a)(b+a)$$

$$\cancel{3}\left(4(b-a)^2 - (b^2-a^2)(b^2-a^2)\right) = 0$$

$$\left(4(b-a)^2 - (b-a)(b+a)(b-a)(b+a)\right) = 0$$

$$\left(4(b-a)^2 - (b-a)^2 \cdot (b+a)^2\right) = 0$$

$$(b-a)^2\left(4 - (b+a)^2\right) = 0$$

$$4 = (b+a)^2$$

$$2 = b + a$$

C

Judoclub Yuko neemt deel aan een internationale competitie met zeven van haar leden. Op de wedstrijddag worden alle zeven judoka's één voor één gewogen. Tijdens het wegen houdt de manager van de club het gemiddeld gewicht bij van de leden die reeds gewogen werden. Hij observeert dat het gemiddeld gewicht bij elk nieuwe weging met 1 kg toeneemt. Hoeveel weegt de zwaarste van de zeven judoka's meer dan de lichtste?

<A> 7 kg

<B> 10 kg

<C> 12 kg

<D> 14 kg

$$g_1 = x$$

$$\frac{g_1 + g_2}{2} = x + 1 \Rightarrow x + g_2 = 2x + 2$$

$$\Rightarrow g_2 = x + 2$$

$$\frac{g_1 + g_2 + g_3}{3} = x + 2$$

$$\Rightarrow x + x + 2 + g_3 = 3x + 6$$

$$\Rightarrow g_3 = x + 4$$

$+2$

$$x + \underbrace{(x+2)}_{g_2} + \underbrace{(x+4)}_{g_3} + \underbrace{(x+6)}_{g_4} + \underbrace{(x+8)}_{g_5} + \underbrace{(x+10)}_{g_6} + g_7 = 7x + 42$$

$$g_7 = x + 12$$

C

In de wachtkamer van een tandarts staan zes stoelen in een kring. Hierop hebben twee mannen en vier vrouwen in een willekeurige volgorde plaatsgenomen. Hoe groot is de kans dat er onmiddellijk rechts en onmiddellijk links van elke man een vrouw zit?

<A> 50 %

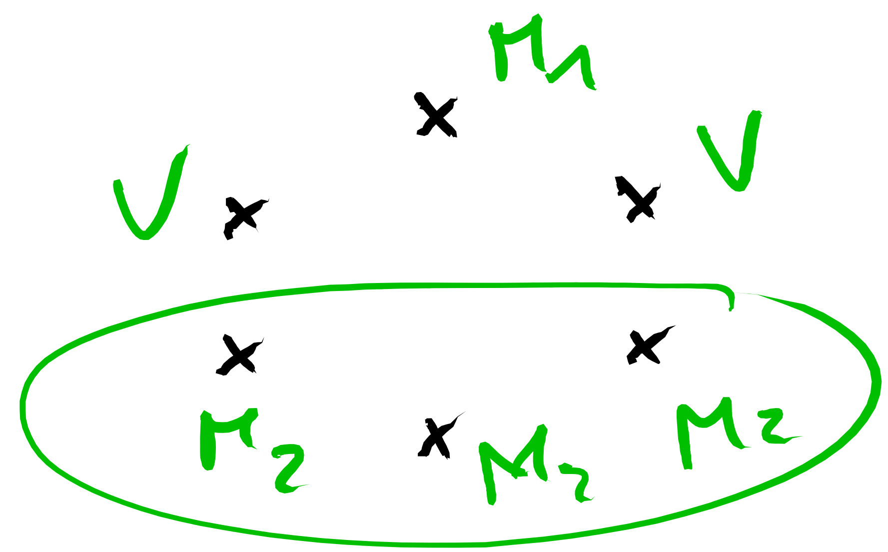
<B> 60 %

<C> 72 %

<D> 75 %

Laplace : $\dfrac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mogelijke}}$

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow 6!$



$M = 6 \cdot 3$

$V = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

$$\frac{\cancel{6} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{3}{5} = 60\%$$

B

Hoeveel bedraagt de oppervlakte van het gebied gelegen boven de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = \sqrt{|4x|}$ en onder de horizontale rechte met vergelijking $y = 4$?

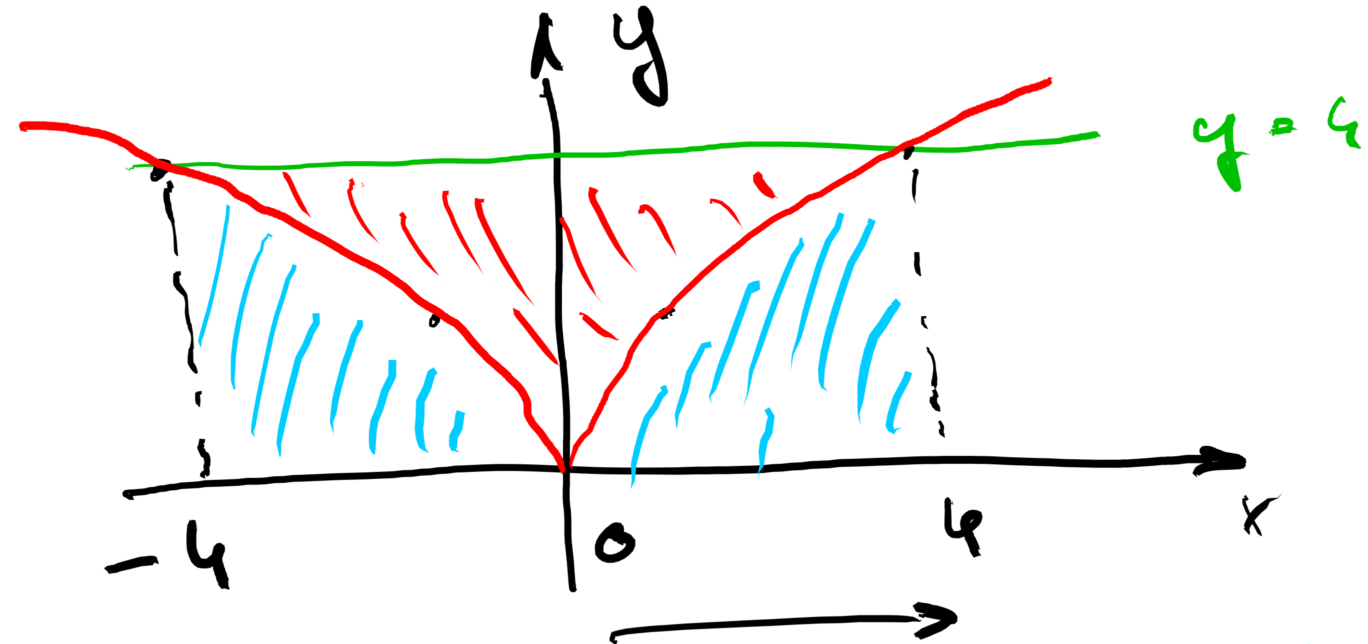
<A> $\frac{28}{3}$

<B> 10

<C> $\frac{32}{3}$

<D> $\frac{34}{3}$

symmetrisch t.o.v. y-as !



$$2\int_0^4 \sqrt{4x}\,dx = 2.2.\int_0^4 x^{1/2}.dx = 2.2.\frac{2}{3}.x^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4$$

$$= \frac{8}{3}\,8 = \frac{64}{3}$$

$$y = 4\Big|_{-4}^{4} = 4.8 = 32$$

$$\frac{32.3}{3} - \frac{32.2}{3} = \frac{32}{3}$$

C

Als $\cos x = \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}$, dan is $\cos^3 x - \sin^3 x$ gelijk aan

<A> $\frac{1}{\sqrt{3}}$

<B> $\frac{2}{\sqrt{3}}$

<C> $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

<D> $\frac{4}{3\sqrt{3}}$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x) \cdot (\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$1$$

$$(\cos x - \sin x)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{1}{3} = 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \sin x \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \cos x \sin x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

D

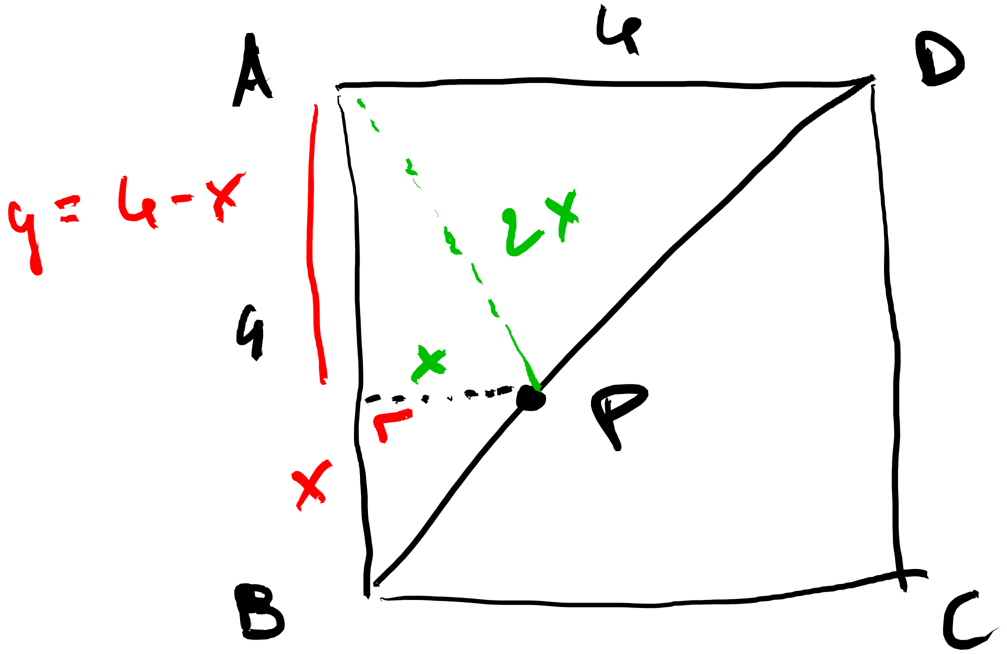
Het punt P ligt op de diagonaal $[BD]$ van een vierkant met zijde 4 en hoekpunten A, B, C en D. De afstand van P tot het hoekpunt A is het dubbele van de afstand van P tot de zijde $[AB]$. Hoeveel bedraagt de afstand van P tot de zijde $[AB]$?

<A> $2\sqrt{2}-1$

<B> $2\sqrt{3}-2$

<C> $4-\sqrt{3}$

<D> $4-2\sqrt{2}$



$$x + y = 4$$

$$y^2 = (2x)^2 - x^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$$

$$4^2 + x^2 - 8x = 3x^2$$

$$2x^2 + 8x - 16 = 0$$

$$x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.(-8)}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{\frac{16+32}{4}}$$

$$= -2 \pm \sqrt{12}$$

$$x = \begin{cases} \cancel{-2 - 2\sqrt{3}} \\ -2 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

B

Gegeven is de functie f met als voorschrift $f(x) = x^3 - 11x^2 - 25x - 13$. De rechte met vergelijking $y = px + q$ raakt aan de grafiek van f in het punt $A(a, f(a))$ en snijdt de grafiek van f in het punt $B(13, 0)$. Als A en B verschillende punten zijn, dan is $p+q$ gelijk aan

<A> -2352

<B> -1

<C> 0

<D> 1

$B \Rightarrow 0 = 13p + q$

$\Rightarrow q = -13p$

$f'(a) = 3a^2 - 22a - 25$

$f'(a).a = 3a^3 - 22a^2 - 25a$

$f(a) = a^3 - 11a^2 - 25a - 13$

$a = -1 \Rightarrow f(a)$

$-1 - 11 + 25 - 13 = 0$

raaklijn in $a = -1$

$y = px + q$

$0 = -p + q \Rightarrow q = p$

$q = -13p$

$f'(x) = 3x^2 - 22x - 25$

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y = \underbrace{f'(a)}_{p}.x \underbrace{- f'(a).a + f(a)}_{q = -13p}$

$-f'(a).a + f(a) = -13 f'(a)$

$-f'(a).a + f(a) + 13 f'(a) = 0$

$-3a^3 + 22a^2 + 25a$

$+ a^3 - 11a^2 - 25a - 13$

$+ 39a^2 - 13.22a - 13.25$

$-2a^3 + 50a^2 - 13.22a - 13.26 = 0$

$\Rightarrow a^3 - 25a^2 + 13.11a + 13^2 = 0$

$f(1) \neq 0$

$f(-1) = -1 - 25 - 143 + 169 = 0$

$a = -1$

$\rightarrow p = q = 0$ C

OF: $B(13, 0) \Rightarrow$ deelbaar $(x - 13)$

$f(x)$	1	-11	-25	-13
13		13	26	13
	1	$+2$	1	0

$(x-13)(x^2 + 2x + 1)$

$(x-13)\underbrace{(x+1)^2}$

$\hookrightarrow \geq 0 \rightarrow$ max.

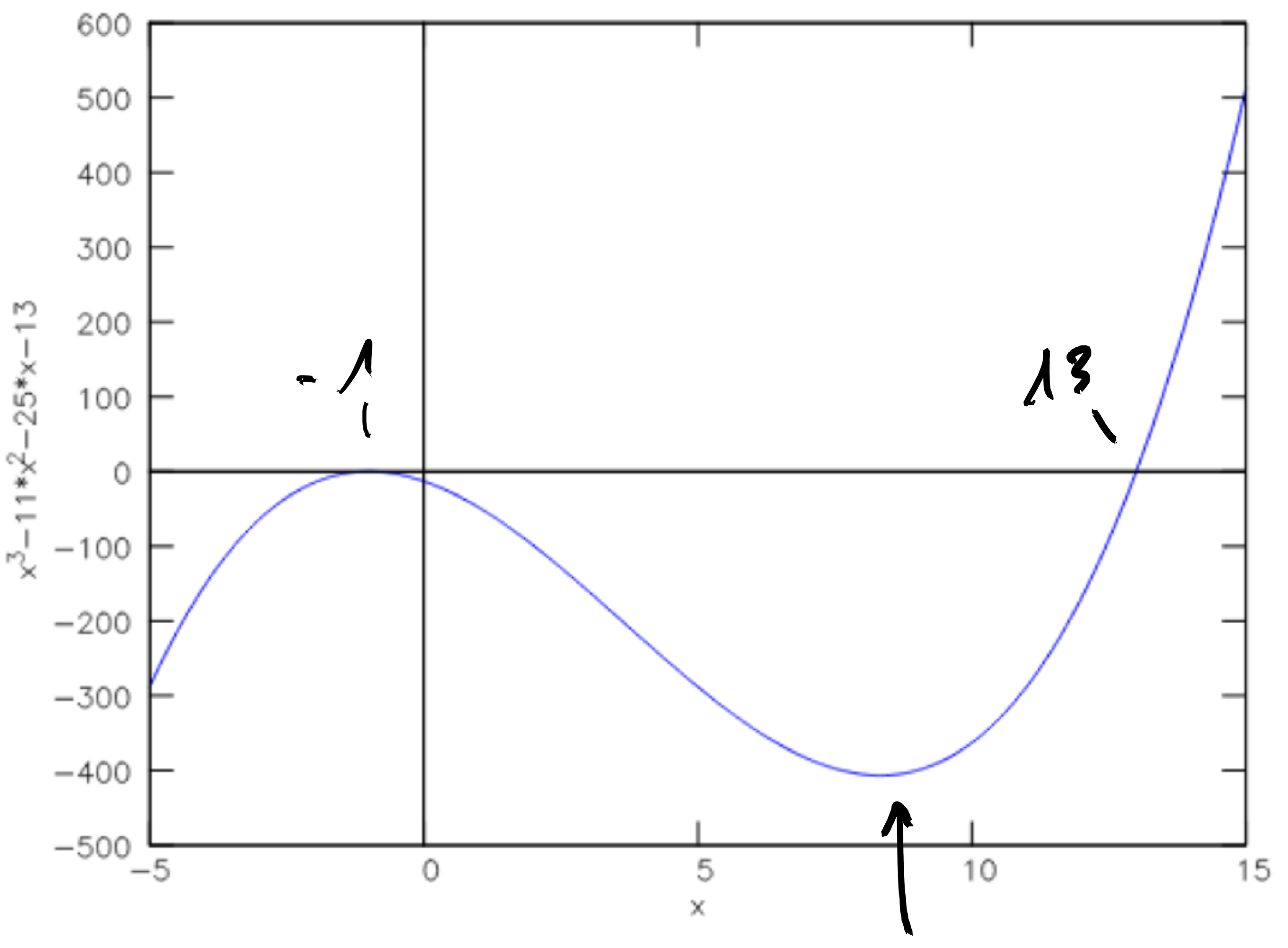
$f'(x) = 3x^2 - 22x - 25$

$\hookrightarrow$ ook deelbaar door $(x+1)$

	3	-22	-25
-1		-3	25
	3	-25	0

$(x+1)\underbrace{(3x - 25)} = 0$

$\hookrightarrow x = \frac{25}{3}$



$x = \frac{25}{3}$

$x =$ raaklijn

$y = 0 = px + q$ ($p = 0$, $q = 0$)

$p + q = 0$

Een persoon wordt blootgesteld aan een schadelijk stof. Deze stof komt terecht in zijn bloed en wordt afgebroken door de lever. Stel dat de hoeveelheid schadelijke stof in het bloed daalt volgens het functievoorschrift Ae^{-bt} (met A en b positieve constanten, en t de tijd uitgedrukt in dagen). Op $t = 0$ bedraagt de hoeveelheid schadelijke stof in het bloed 5 milligram (5 mg). Na twee dagen ($t = 2$) is de hoeveelheid gedaald tot 1 mg. Hoeveel van deze schadelijke stof blijft er in het bloed van deze persoon na zes dagen ($t = 6$)?

<A> 0,02 mg

<B> 0,04 mg

<C> 0,05 mg

<D> 0,20 mg

$t=0 \Rightarrow 5 = A \cdot e^{-b \cdot 0} \Rightarrow A = 5$

$t=2 \Rightarrow 1 = 5 \cdot e^{-b \cdot 2}$

$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -b \cdot 2$

$b = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$b = \frac{1}{2} \ln(5)$

$t = 6 \Rightarrow x = 5 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \ln 5}$

$= 5 \cdot e^{-3 \ln 5} = 5 \cdot e^{\ln 5^{-3}} = 5 e^{\ln \frac{1}{125}}$

$= \frac{5}{125} = \frac{1}{25} = 0{,}04$ mg

B

Het stelsel

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ cx + y = 4 \end{cases}$$

heeft een oplossing (x, y) in het eerste kwadrant als en slechts als

<A> $c > -1$

<B> $0 < c < \frac{4}{3}$

<C> $-1 < c < \frac{4}{3}$

<D> $c > \frac{4}{3}$

$$\begin{array}{r} x - y = 3 \\ cx + y = 4 \\ \hline (1+c)x = 7 \end{array} \Rightarrow x = \frac{7}{1+c}$$

$$\boxed{c > -1}$$

$$\frac{7}{1+c} - y = 3$$

$$7 - y(1+c) = 3(1+c)$$

$$7 - 3 - 3c = y(1+c)$$

$$\Rightarrow y = \frac{4-3c}{1+c}$$

$4 - 3c = 0 \Rightarrow c = \frac{4}{3}$

$\boxed{c < \frac{4}{3}}$

$c > -1$

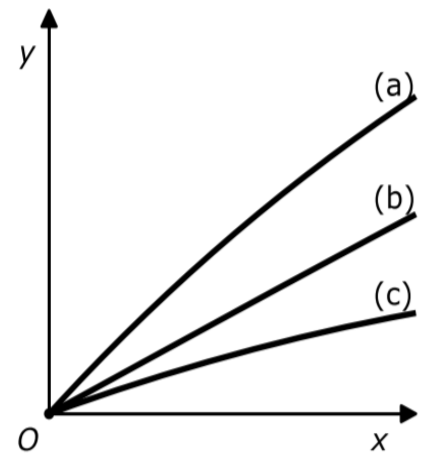
$-1 < c < \frac{4}{3}$

C

Beschouw drie functies f, g en h met functievoorschriften

$$f(x) = \sin(\frac{x}{2}), \qquad g(x) = 1 - e^{-x}, \qquad h(x) = \frac{2x - x^2}{6}.$$

De grafieken van f, g en h gaan door de oorsprong O. De volgende figuur toont de grafieken van deze functies op een gesloten interval waarvan het linkereindpunt de oorsprong is.



Welke grafiek stemt overeen met welke functie?

<A> (a) met f, (b) met g, (c) met h

<B> (a) met g, (b) met f, (c) met h

<C> (a) met g, (b) met h, (c) met f

<D> (a) met f, (b) met h, (c) met g

$f(1) = \sin\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 1 \approx \frac{\pi}{3} : \frac{1}{2} \cong \frac{\pi}{6}$

$\cong \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow b$

$g(1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$

$= \frac{2,7-1}{2,7} = \frac{1,7}{2,7} \simeq \frac{2}{3} \Rightarrow a$

$h(1) = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow c$

$a = g$, $b = f$, $c = h$ B

OF $\Rightarrow$ rico v/d raaklijn in punt $(0,0)$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \leftarrow b$

$g'(x) = +e^{-x} \Rightarrow g'(0) = e^0 = 1 \leftarrow a$

$h'(x) = \frac{1}{6}(2 - 2x) \Rightarrow h'(0) = \frac{1}{3} \leftarrow c$

B

In een woonzorgcentrum lijdt 8 % van de mannen en 4 % van de vrouwen aan de ziekte van Parkinson. Onder de bewoners kiest men lukraak één man en één vrouw. Hoe groot is dan de kans dat precies één van beiden aan de ziekte van Parkinson lijdt?

<A> 3,24 %

<B> 10,32 %

<C> 11,36 %

<D> 12,58 %

$M_P \bar{V} + V_P \bar{M}$

$\frac{1}{100}(8 \cdot 96 + 4 \cdot 92)$

$\frac{1}{100}(800 - 4 \cdot 8 + 400 - 4 \cdot 8)$

$\frac{1}{100}(768 + 368)$

$\frac{1}{100} 1136 = 11,36\,\%$

C

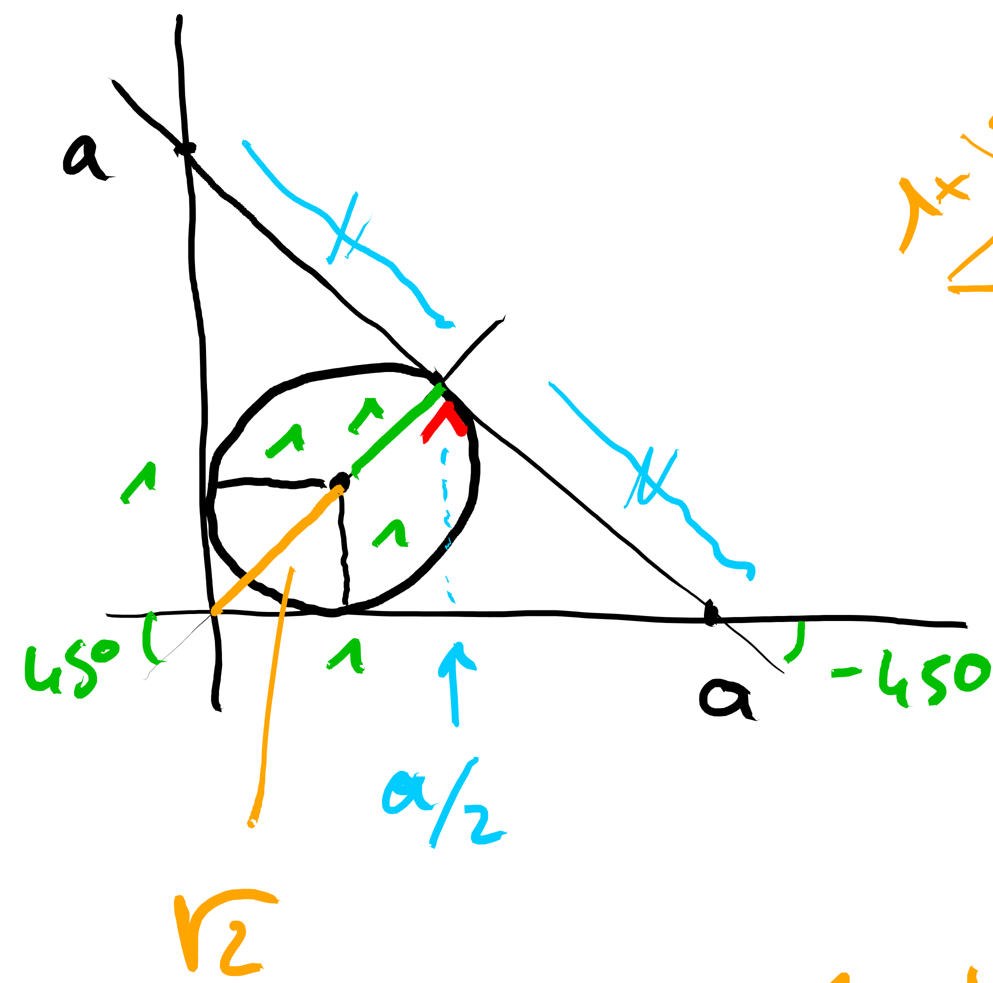
Beschouw de punten $O(0,0)$, $P(a,0)$ en $Q(0,a)$ in een orthonormaal assenstelsel. De cirkel ingeschreven in de driehoek met hoekpunten O, P en Q heeft straal 1. Wat is de oppervlakte van deze driehoek?

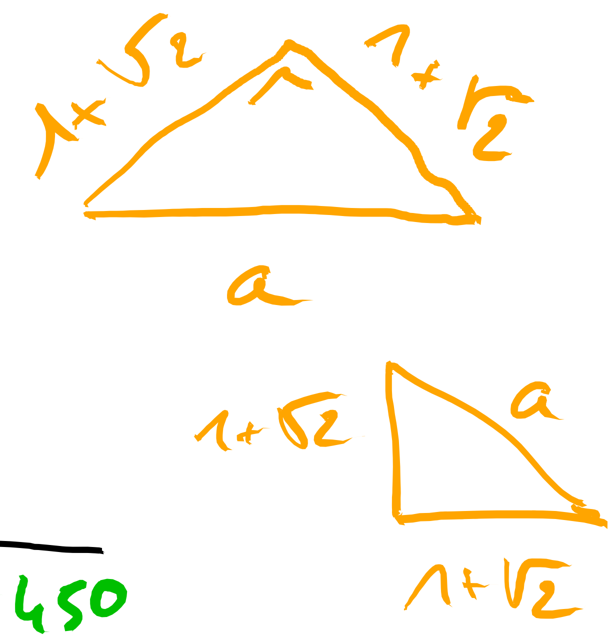
<A> $2+\sqrt{2}$

<B> $3+\sqrt{2}$

<C> $3+2\sqrt{2}$

<D> $6+4\sqrt{2}$





$$\text{Opp } \Delta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+\sqrt{2})^2$$

$$= 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{C}$$