vraag 01

De parabool met vergelijking $y = x^2 - 8x - 12$ snijdt de x-as in de punten $A(a, 0)$ en $B(b, 0)$ (met $a < b$). Hoeveel gehele getallen liggen in het interval $[a, b]$?

- 9
- 10
- 11
- 12

$x^2 - 8x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4(-12)}}{2}$

$= 4 \pm \sqrt{16 + 12}$

$= 4 \pm \sqrt{28} = 4 \pm 2\sqrt{7}$

$= \begin{cases} 4 + 2\sqrt{7} = b \\ 4 - 2\sqrt{7} = a \end{cases}$

$2\sqrt{7} \approx 5{,}3 \Rightarrow a = 4 - 5{,}3 = -1{,}3$

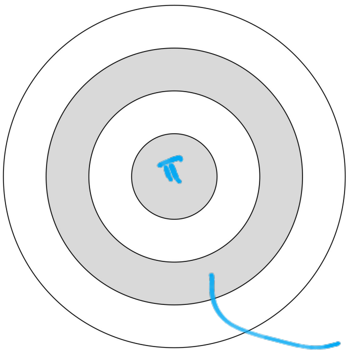
$b = 4 + 5{,}3 = 9{,}3$

$\Rightarrow [-1, 9] \Rightarrow \boxed{11}$

vraag 02

Beschouw vier concentrische cirkels met stralen 1, 2, 3 en 4, zoals in de figuur.

Hoeveel procent van de oppervlakte van de grootste cirkel is grijs gekleurd?



$C_1 : \pi \cdot 1^2 = \pi$

$C_2 : \pi \cdot 2^2 = 4\pi$

$C_3 : \pi \cdot 3^2 = 9\pi$

$C_4 : \pi \cdot 4^2 = 16\pi$

$C_3 - C_2 = 9\pi - 4\pi$
$= 5\pi$

$G = 5\pi + \pi = 6\pi$

$\% = \frac{6\pi}{16\pi} = \frac{3}{8} = 3 \cdot 0{,}125$
$= 0{,}375$
$= \boxed{37{,}5\,\%}$

- ○ 35 %
- ☒ 37,5 %
- ○ 40 %
- ○ 42,5 %

vraag 03

Aan een toets op 10 punten namen 18 leerlingen deel. De gemiddelde score van deze 18 leerlingen is 8 en 6 leerlingen maakten een correcte toets. Hoeveel is de gemiddelde score van de overige 12 leerlingen?

$$x = \frac{\Sigma x_n}{n} = \frac{6 \cdot 10 + 12 \cdot x}{18} = 8$$

$$\Rightarrow 8 \cdot 18 = 60 + 12x$$

$$\frac{144 - 60}{12} = x = 12 - 5 = 7$$

- ○ 6,75
- ○ 7
- ○ 7,25
- ○ 7,5

vraag 04

In deze vraag worden alle hoeken uitgedrukt in radialen.

Het precieze aantal oplossingen voor de onbekende x van de vergelijking

$$(\sin x + \cos x)\left(\sin x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 0$$

in het interval $[-6\pi, 9\pi]$ is

$\cos(90° - x) = \sin(x)$

$(\sin x + \cos x)(\underbrace{\sin x - \sin x}_{0}) = 0$

- ○ 15.
- ○ 30.
- ○ 45.
- ✓ oneindig.

vraag 05

Vooraf: de logaritme met grondtal p van een strikt positief getal x noteren we als ${}^p\log x$.

$${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$$

Als ${}^4\log a = b$, dan is ${}^{\frac{1}{2}}\log a$ gelijk aan

$${}^4\log a = \frac{1}{{}^a\log 4} = \frac{1}{2\,{}^a\log 2} = b$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log a = \frac{1}{{}^a\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{-1\,{}^a\log 2}$$

$\times(-2) \Rightarrow \boxed{-2b}$

- b^2 .
- $2b$.
- $-b^2$.
- $-2b$.

vraag 06

In een bepaalde regio is 2% van de bevolking besmet met tuberculose (TBC). De bewoners van deze regio worden getest op TBC met de Mantoux-test. Deze test werkt niet feilloos: van degenen die met TBC besmet zijn, reageert 98% positief, maar ook een aantal personen die niet besmet zijn reageren positief.

De kans dat iemand met een positieve test effectief ook met TBC besmet is, bedraagt $\frac{10}{11}$.

Wat is de kans dat een bewoner uit deze regio positief reageert als hij niet besmet is?

- 0,1 %
- 0,2 %
- 1 %
- 2 %

$$P(TBC|+) = \frac{P(+|TBC)\,P(TBC)}{P(+|TBC).P(TBC) + P(+|\overline{TBC}).P(\overline{TBC})}$$

$$= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}02}{0{,}98 \cdot 0{,}02 + x \cdot 0{,}98}$$

$$= \frac{\cancel{0{,}98} \cdot 0{,}02}{\cancel{0{,}98}\,(0{,}02 + x)} = \frac{10}{11}$$

$$\Rightarrow 0{,}02 = \frac{0{,}2}{11} + \frac{10}{11}x \Rightarrow \frac{0{,}22 - 0{,}2}{11} = \frac{10}{11}x$$

$$\Rightarrow x = \frac{\cancel{11}}{10} \cdot \frac{0{,}02}{\cancel{11}} = 0{,}002 = \boxed{0{,}2\ \%}$$

OF:

10/11	Besmet	Niet besmet	Totaal
Test +	1960 98%	1/11 196	11/11 2156
Test −	40	97804	97844
Totaal	2000	98000	100000

2%

$$\frac{10}{11} = 1960 \Rightarrow \frac{1}{11} = \frac{1960}{10} = 196$$

$$P = \frac{196}{98000} \cdot 100 = \frac{196}{98} \cdot \frac{100}{1000} = \frac{2}{10} = \boxed{0{,}2\ \%}$$

<u>Vooraf</u>: zoals gebruikelijk stelt e het grondtal van de natuurlijke logaritme voor.

Voor welk reëel getal a geldt dat

$$\int_a^{a+1} \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\,?$$

- $\dfrac{2e-1}{e+1}$
- $\dfrac{2e-1}{1-e}$
- $\dfrac{2e+1}{1-e}$
- $\dfrac{e-1}{1+2e}$

$$\int_a^{a+1} \cancel{\frac{t+1}{t+1}}\,dt - \int_a^{a+1} \frac{1}{t+1}\,d(t+1)$$

$$= t\Big|_a^{a+1} - \ln(t+1)\Big|_a^{a+1}$$

$$= (a+1-a) - (\ln(a+1+1) - \ln(a+1))$$

$$= 1 - \ln\left(\frac{a+2}{a+1}\right)$$

$$= 1 + \ln\left(\frac{a+1}{a+2}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{a+1}{a+2}\right) = 1$$

e e

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a+2} = e$$

$$a+1 = ae + 2e$$

$$a - ae = 2e - 1$$

$$a(1-e) = 2e-1$$

$$\boxed{a = \frac{2e-1}{1-e}}$$

vraag 08

Gegeven de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Als n een natuurlijk getal is dat verschillend is van nul, noteren we

$$A^n = \underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{n \text{ factoren}}.$$

Voor elk natuurlijk getal $n \neq 0$ geldt dat

- ○ $A^n = A$.
- ○ $A^n = 3A$.
- ☒ $A^n = 3^{n-1}A$.
- ○ $A^n = 3^n A$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+3+3 & 3+3+3 & 3+3+3 \\ 3+3+3 & 3+3+3 & 3+3+3 \\ 3+3+3 & 3+3+3 & 3+3+3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} = A^3 = 3^2 . A$$

$$= 3^{n-1} A$$

vraag 09

Een cirkel met straal 2 raakt de parabool met vergelijking $y = x^2$ in precies twee punten, zoals in de figuur. Wat is de coördinaat van het middelpunt van deze cirkel?

⇒ zelfde raaklijn! ⟶ $(x^2)' = 2x$

$(-\sqrt{4-x^2}+a)'$

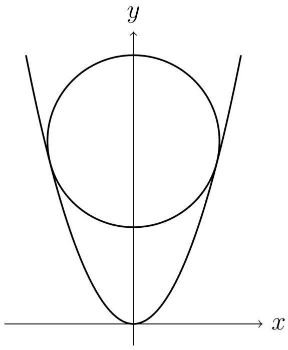
$= -\left[\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

C: $x = 0, y = a$

$x^2 + (y-a)^2 = 2^2$

⇒ $y = \pm\sqrt{4-x^2} + a$



- ✓ $\left(0, \frac{17}{4}\right)$
- $\left(0, \frac{16}{4}\right)$
- $\left(0, \frac{15}{4}\right)$
- $\left(0, \frac{14}{4}\right)$

$2\cancel{x} = \frac{\cancel{x}}{\sqrt{4-x^2}}$ ⇒ $(2\sqrt{4-x^2})^2 = 1^2$

⇒ $4(4-x^2) = 1$ ⇒ $16 - 4x^2 = 1$

⇒ $4x^2 = 15$ ⇒ $x^2 = \frac{15}{4}$ ⇒ $\boxed{x = \frac{\pm\sqrt{15}}{2}}$

⇒ in parabool: $\boxed{y = x^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}}$

$\boxed{\text{rico raaklijn} = f'(x) = 2x = 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}}$

⇒ straal ⊥ op raaklijn en door raakpunt

dus rico $= -\frac{1}{\sqrt{15}}$ $r_1 \cdot r_2 = -1$! als ⊥

vgl: $y - \frac{15}{4} = -\frac{1}{\sqrt{15}}\left(x - \frac{\sqrt{15}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}x + \frac{1}{2}$

⇒ $y = -\frac{1}{\sqrt{15}}x + \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = -\frac{1}{\sqrt{15}}x + \frac{17}{4}$

⇒ voor $x = 0$ ⇒ $\boxed{y = \frac{17}{4}}$ ⇒ $M = \left(0, \frac{17}{4}\right)$

vraag 10

Het punt P ligt op de grafiek van de functie f die bepaald is door het voorschrift

$$f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9.$$

De raaklijn aan de grafiek van f in het punt $P(a, f(a))$ gaat door de oorsprong als en slechts als

- ○ $2a^3 + 13a^2 = 6$.
- ○ $4a^3 + 13a^2 = 6$.
- ○ $2a^3 + 13a^2 = 9$.
- ✓ $4a^3 + 13a^2 = 9$.

$f(a) = 2a^3 + 13a^2 + 5a + 9$

$f'(x) = 6x^2 + 26x + 5$

$f'(a) = 6a^2 + 26a + 5$

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y - 2a^3 - 13a^2 - 5a - 9 = (6a^2 + 26a + 5)(x-a)$

$y = 2a^3 + 13a^2 + 5a + 9 - 6a^3 - 26a^2 - 5a + x(\quad)$

$= \underbrace{-4a^3 - 13a^2 + 0 + 9}_{= 0} + x(\quad)$

$\Rightarrow \boxed{4a^3 + 13a^2 = 9}$