1. Wiskunde

vraag 01

Het aantal verschillende reële nulwaarden van de functie f met voorschrift

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$$

is gelijk aan

- 0.
- 1.
- 2.
- 4.

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{36}}{2} = 1 \pm 3 \quad \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

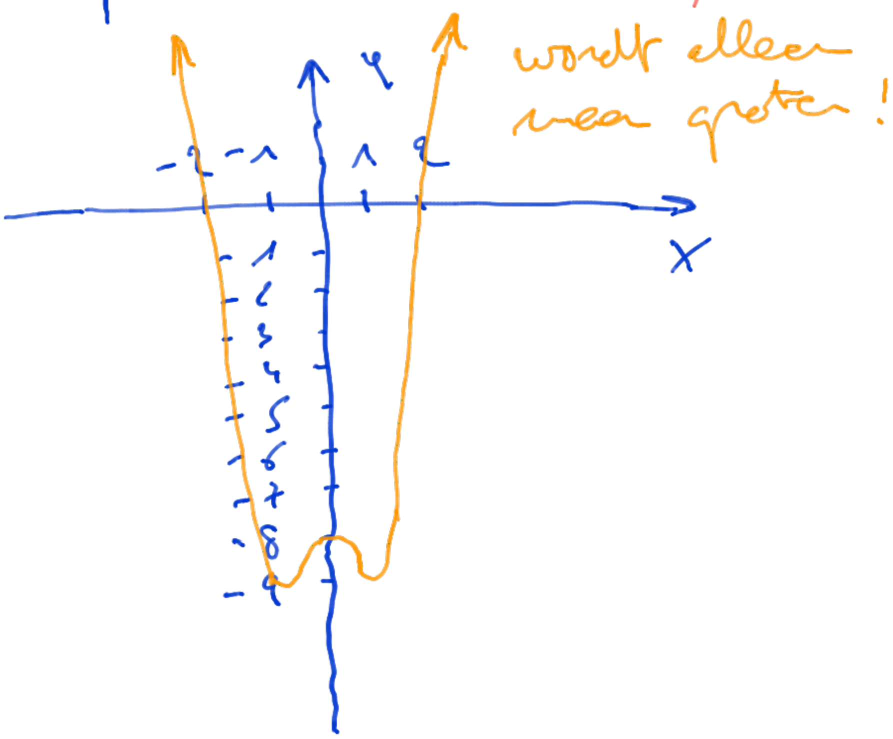
$$(x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$$

$x^2 = 4$

$\rightarrow x = \boxed{\pm 2}$

$x^2 = -2$

$\rightarrow x = \pm i\sqrt{2}$ ✗



$f(0) = -8$

$f(1) = f(-1) = -9$

$f(2) = f(-2) = 0$

$f(3) = f(-3) = 55$

vraag 02

Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2^a & -3^a \\ 3^{-a} & 2^a \end{bmatrix} \text{ en } B = \begin{bmatrix} 3^a & 3^a \\ 3^{-a} & 2^a \end{bmatrix} \text{ waarbij } a \in \mathbb{R}.$$

Dan is het product $A \cdot B$ gelijk aan

- $\begin{bmatrix} 6^a - 1 & 0 \\ 1 + (\frac{3}{2})^a & 1 + 2^{2a} \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 6^a - 1 & 0 \\ 1 + (\frac{2}{3})^a & 1 + 4^a \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 6^a - 1 & 0 \\ 1 - (\frac{2}{3})^a & 1 + 2^{2a} \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 6^a & -9^a \\ 9^{-a} & 4^a \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2^a \cdot 3^a - 3^a \cdot 3^{-a} & 2^a \cdot 3^a - 3^a \cdot 2^a \\ 3^{-a} \cdot 3^a + 2^a \cdot 3^{-a} & 3^{-a} \cdot 3^a + 2^a \cdot 2^a \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6^a - 1 & 0 \\ 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^a & 1 + 2^{2a} \end{bmatrix}$$

$$2^{2a} = (2^2)^a = 4^a$$

vraag 03

De rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek hebben lengtes $\sin(2t)$ en $2\sin^2 t$ waarbij $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Dan is de lengte van de schuine zijde gelijk aan

- $2\sin t$.
- $2\sqrt{1+\cos^2 t}\,\sin t$.
- $2\sqrt{1+\sin^2 t}\,\sin t$.
- $2(1+\sin t)\,\sin t$.

$\sin(2t) = 2\sin t\cos t$

$\sin^2(2t) = 4\sin^2 t\cos^2 t$

$= 4(\sin^2 t)(1-\sin^2 t)$

$= 4\sin^2 t - 4\sin^4 t$

$l = \sqrt{4\sin^2 t - 4\sin^4 t + (2\sin^2 t)^2}$

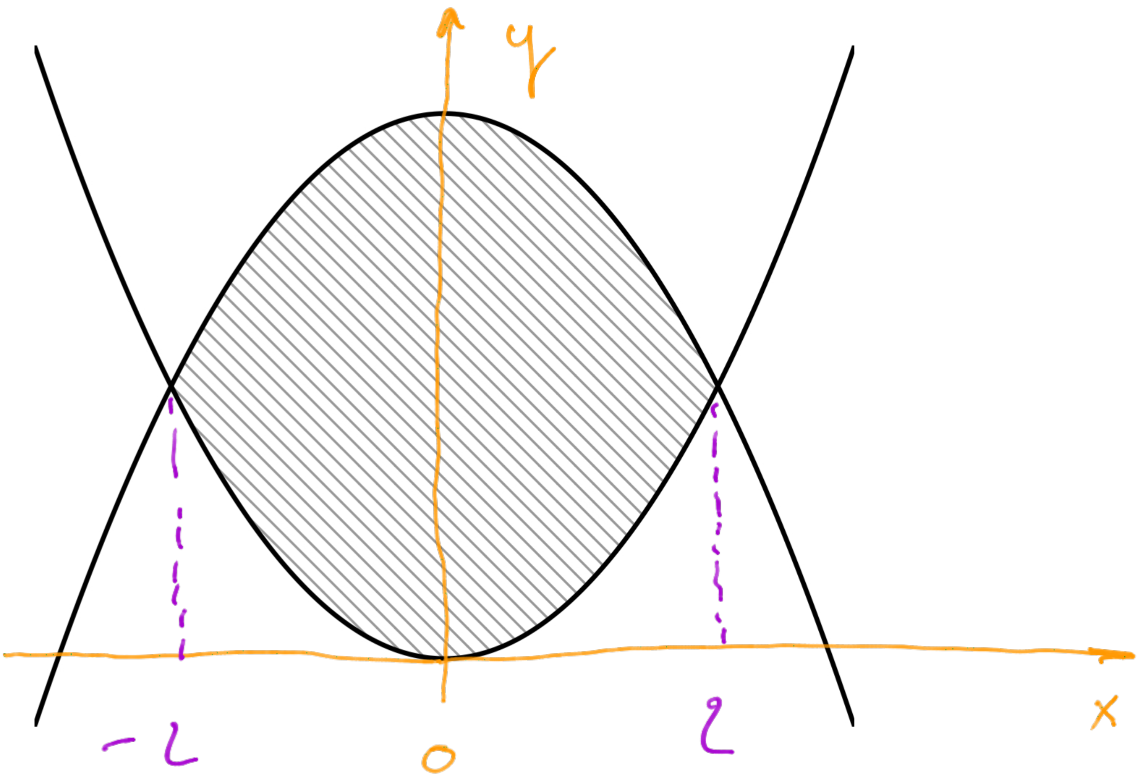
$= \sqrt{4\sin^2 t - 4\sin^4 t + 4\sin^4 t}$

$= \sqrt{4\sin^2 t}$

$= \boxed{2\sin t}$

vraag 04

Beschouw het gearceerde gebied begrensd door de parabool met vergelijking $y = x^2$ en de parabool met vergelijking $y = 8 - x^2$, zoals getoond in de figuur. Wat is de oppervlakte van dat gebied?



- $\frac{8}{3}$
- $\frac{16}{3}$
- $\frac{32}{3}$
- $\frac{64}{3}$

$x^2 = 8 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\frac{A}{2} = \int_0^2 (8 - x^2)\,dx - \int_0^2 x^2\,dx$

$= 8x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2$

$= 16 - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3}$

$= \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3} \rightarrow \boxed{A = \frac{64}{3}}$

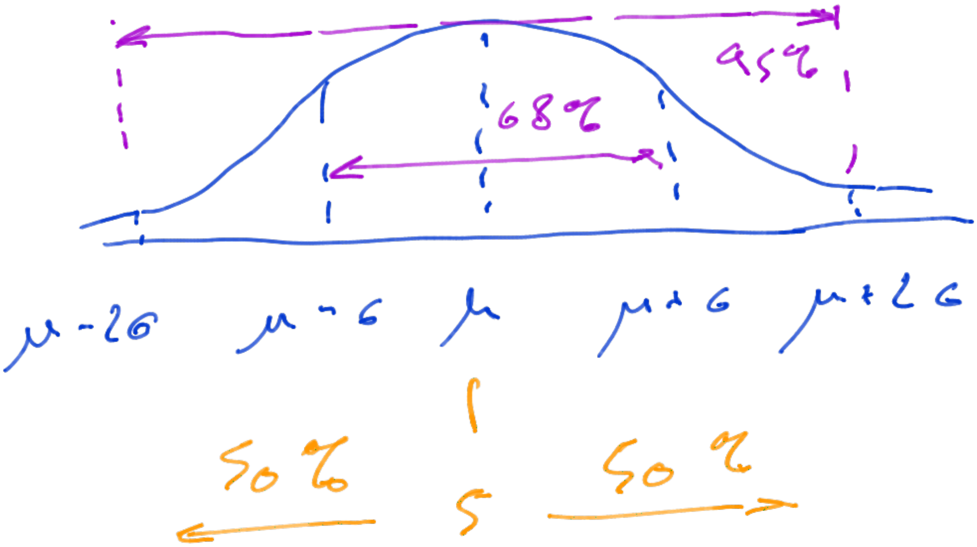
vraag 05

Vooraf: voor een standaard normaal verdeelde toevalsvariabele Z geldt de 68-95-99,7-vuistregel:

$P(-1 < Z < 1) \approx 68\,\%$; $P(-2 < Z < 2) \approx 95\,\%$;
$P(-3 < Z < 3) \approx 99{,}7\,\%$.

In een museum kunnen bezoekers individueel een kort spel spelen. De directie onderzoekt hoeveel tijd bezoekers hieraan besteden. Op basis van een aantal steekproeven besluit ze dat de spelduur normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5 minuten. Drie bezoekers die het spel spelen worden lukraak gekozen. Wat is de kans dat ze alle drie langer dan 5 minuten spelen?

- ○ $\frac{3}{40}$
- ✓ $\frac{1}{8}$
- ○ $\frac{1}{6}$
- ○ $\frac{1}{2}$



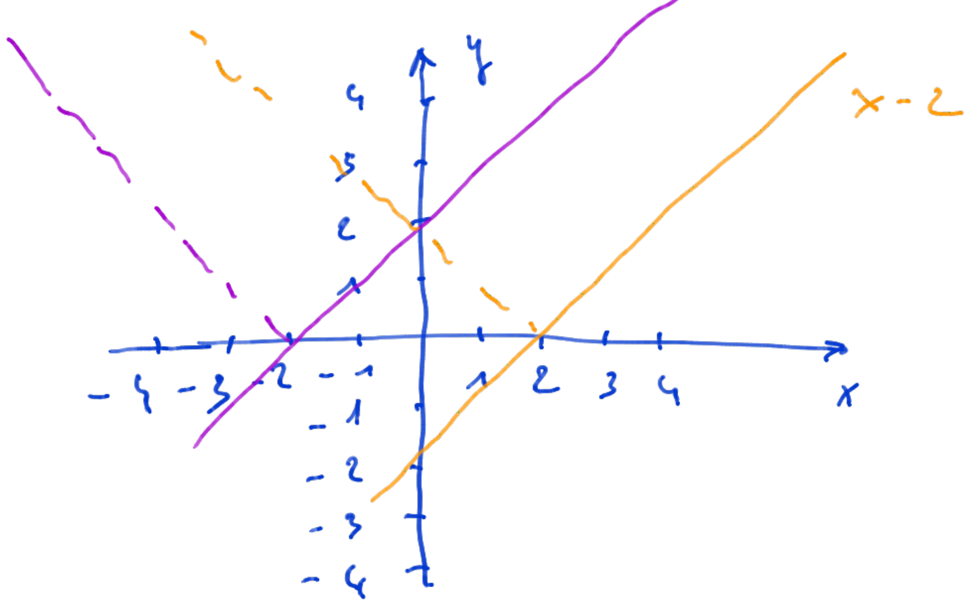
$$\boxed{P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

vraag 06

De verzameling van alle reële getallen x die voldoen aan

$$|x-2| > |x+2|$$

is gelijk aan



- $]-\infty, -2]$.
- $[-2, 0]$.
- $]-\infty, 0[$.
- $]-\infty, 2[$.

$|x-2| > |x+2|$

↳ grafiek ligt boven die

$\Rightarrow \;]-\infty, 0[$

vraag 07

Een veeltermfunctie f met afgeleide functie f' voldoet aan $f(1) = 2$ en $f'(1) = 3$.

De functie g heeft als voorschrift

$$g(x) = \left(f(x^2)\right)^2$$

en heeft als afgeleide functie g'. Waaraan is $g'(1)$ gelijk?

- 3
- 6
- 12
- ~~24~~

$f'(1) = 3 \Rightarrow f'(x) = x + 2$

$f(x) = \int (x+2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x + c$

$f(1) = 2 = \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 + c$

$2 = \frac{1}{2} + 2 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}$

$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dx}\frac{du}{du} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$f(x^2) = \frac{x^4}{2} + 2x^2 - \frac{1}{2}$

$g(x) = (f(x^2))^2 = \left(\underbrace{\frac{x^4}{2} + 2x^2 - \frac{1}{2}}_{u}\right)^2$

$(u^2)' = 2u \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 1$

$\left(\frac{x^4}{2} + 2x^2 - \frac{1}{2}\right)' = \frac{4x^3}{2} + 4x = 2x^3 + 4x$

$g'(x) = (x^4 + 4x^2 - 1)(2x^3 + 4x) \Rightarrow g(1) = 4 \cdot 6 = \boxed{24}$

vraag 08

Beschouw de cirkel met vergelijking

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = a$$

waarbij de parameter a voldoet aan $a > -13$. Deze cirkel raakt aan de x-as als en slechts als

- ○ $a = -4$.
- ○ $a = 0$.
- ○ $a = 2$.
- ○ $a = 4$.

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

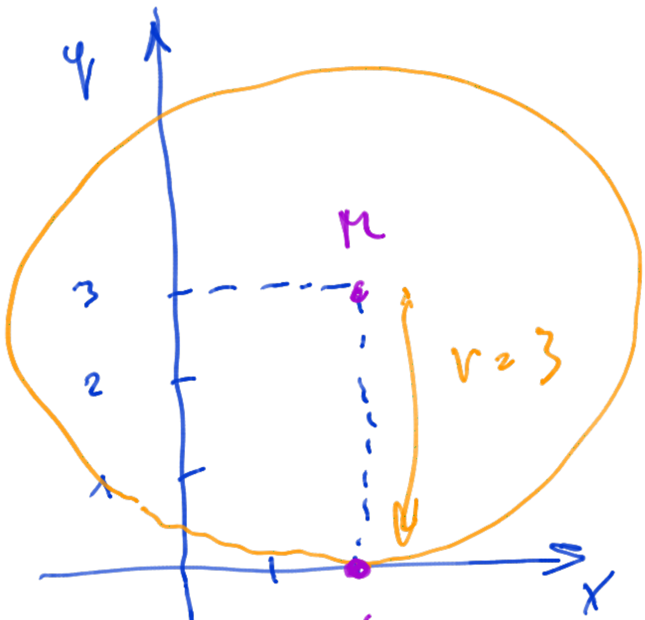
$$y^2 - 6y + 9 = (y-3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 - 13 = a$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 - 13 = a$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = a + 13$$

$$M = (2,3) \text{ en } r = \sqrt{a+13}$$



raakt aan x-as

$$r = 3 \Rightarrow r^2 = 9$$

$$\Rightarrow 9 = a + 13$$

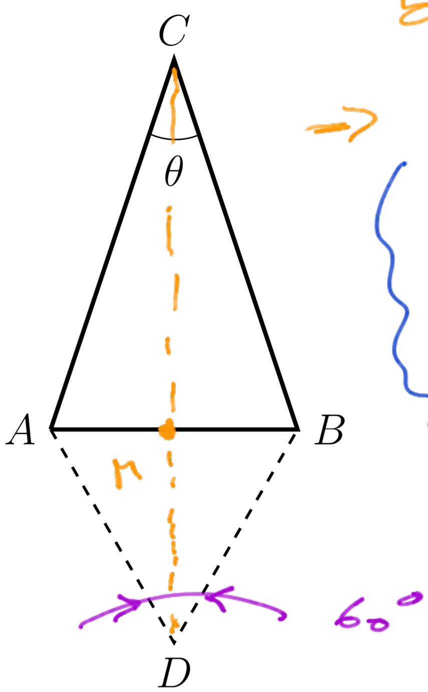
$$\boxed{a = 9 - 13 = -4}$$

vraag 09

De driehoek $\triangle ABC$ is gelijkbenig en heeft tophoek θ. De driehoek $\triangle ADB$ is gelijkzijdig (zie figuur). De oppervlakte van $\triangle ADB$ is de helft van die van $\triangle ABC$.

↳ basis = AB voor beide ⇒ hoogte × 2

Waaraan is $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ gelijk?



$\Rightarrow CM = 2\,DM$

$DM = DB \cdot \cos(30°) = DB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow CM = AB \cdot \sqrt{3}$

- $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$CM = CB \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\frac{AB}{2} = CB \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\cancel{AB}}{2} = \cancel{CB} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{AB} \cdot \sqrt{3} = \cancel{CB} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{1/2}{\sqrt{3}} = \boxed{tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

vraag 10

Uit een album met 10 verschillende songs kiest Kris lukraak drie verschillende songs. Uit hetzelfde album kiest ook Yves lukraak drie verschillende songs. Hoe groot is de kans dat er precies één song gemeenschappelijk is in de keuze van Kris en die van Yves?

- ○ 45,0 %
- ○ 47,5 %
- ○ 50,0 %
- ⊗ 52,5 %

Kris : $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot \cancel{7!}}{(\cancel{3} \cdot \cancel{2}) \cdot \cancel{7!}}$

$= 120 \rightarrow$ mogelijke

$\Rightarrow$ Yves $\Rightarrow$ nog 2 uit 7 vrij te kiesen

$C_{7}^{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot \cancel{6}^{3} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{2} \cdot \cancel{5!}} = 21$

de gemeenschappelijke $= C_{3}^{1} = 3$ keuzes

Dus $3 \times 21 = 63$ keuzes voor Yves

$\hookrightarrow$ gunstige

$P = \frac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mogelijke}} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40} \cdot \frac{2,5}{2,5} = \frac{42 + 10,5}{100} = \frac{52,5}{100}$

$\Rightarrow 52,5\ \%$