

Лабораторная работа № 1. Датчик БСВ

1. Постановка задачи:

- Требуется реализовать датчик БСВ, при этом необходимо учесть, что значения 0 и 1 никогда не должны возвращаться датчиком.
- Применяя реализованный датчик БСВ, требуется получить выборку и проверить её на согласованность при помощи критерия согласия Колмогорова-Смирнова: для уровней значимости 0.1, 0.05, 0.01 и объема выборки 30, 100, 1000 получить значения критерия с принятием решения о качестве датчика.

Примечание 1: Нулевая гипотеза (H_0) - это утверждение о том, что наблюдаемые данные соответствуют ожидаемому распределению/модели.

Примечание 2: Альтернативная гипотеза (H_1 или H_a) - это утверждение, противоположное нулевой гипотезе - то есть наблюдаемые данные не соответствуют ожидаемому распределению/модели.

2. Математическая составляющая задачи:

- Полученная выборка сортируется для построения эмпирической функции распределения (ЭФР).
- Вычисление ЭФР:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)$$

где $I(x_i \leq x)$ — индикаторная функция, равная 1, если $x_i \leq x$, и 0 в противном случае.

- Вычисление теоретической функции распределения (ТФР): для равномерного распределения, на интервале $[0, 1]$, совпадает с отсортированной выборкой.
- Вычисление максимального отклонения D^+ :

$$D^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{i}{n} - x_i \right|$$

- Вычисление максимального отклонения D^- :

$$D^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{i-1}{n} - x_i \right|$$

- Вычисление статистики критерия D :

$$D = \max(D^+, D^-)$$

- Вычисление критического значения:

$$\text{Критическое значение} \approx \frac{\sqrt{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{n}}$$

- Сравнение статистики критерия и критического значения:
если статистика критерия D превышает критическое значение, то нулевая гипотеза отвергается - альтернативная гипотеза; в противном случае - не отвергается.

3. Результаты выполнения задачи:

В ходе выполнения лабораторной работы была проведена проверка гипотезы о согласованности выборок с равномерным распределением на интервале $[0, 1]$ с использованием критерия согласованности Колмогорова-Смирнова. Проверка проводилась для выборок размером 30, 100, 1000 элементов, а также для уровней значимости 0.1, 0.05, 0.01.

- Размер выборки 30:
для всех уровней значимости (0.1, 0.05, 0.01) статистика критерия D была меньше критического значения. Это свидетельствует о том, что нулевая гипотеза о согласованности выборки с равномерным распределением не отвергается:
Размер выборки: 30
Уровень значимости: 0.1
Статистика критерия: 0.16837623433102256
Критическое значение: 0.2234476923709436
Гипотеза не отвергается - выборка согласуется с равномерным распределением

Уровень значимости: 0.05
Статистика критерия: 0.16837623433102256
Критическое значение: 0.24795427851769825
Гипотеза не отвергается - выборка согласуется с равномерным распределением

Уровень значимости: 0.01
Статистика критерия: 0.16837623433102256
Критическое значение: 0.29716205922436884
Гипотеза не отвергается - выборка согласуется с равномерным распределением
- Размер выборки 100:
аналогично, для всех уровней значимости статистика критерия D была меньше критического значения. Нулевая гипотеза не отвергается, что указывает на согласованность выборки с равномерным распределением:
Размер выборки: 100
Уровень значимости: 0.1
Статистика критерия: 0.05718205595409487
Критическое значение: 0.12238734153404082
Гипотеза не отвергается - выборка согласуется с равномерным распределением

Уровень значимости: 0.05
Статистика критерия: 0.05718205595409487
Критическое значение: 0.13581015157406195
Гипотеза не отвергается - выборка согласуется с равномерным распределением

Уровень значимости: 0.01
Статистика критерия: 0.05718205595409487
Критическое значение: 0.16276236307187292
Гипотеза не отвергается - выборка согласуется с равномерным распределением
- Размер выборки 1000:

для всех уровней значимости статистика критерия D также была меньше критического значения. Нулевая гипотеза не отвергается, что подтверждает согласованность выборки с равномерным распределением:

Размер выборки: 1000

Уровень значимости: 0.1

Статистика критерия: 0.019160185814871833

Критическое значение: 0.038702275602049495

Гипотеза не отвергается – выборка согласуется с равномерным распределением

Уровень значимости: 0.05

Статистика критерия: 0.019160185814871833

Критическое значение: 0.04294694083467376

Гипотеза не отвергается – выборка согласуется с равномерным распределением

Уровень значимости: 0.01

Статистика критерия: 0.019160185814871833

Критическое значение: 0.05146997846583986

Гипотеза не отвергается – выборка согласуется с равномерным распределением

4. Вывод:

На основании проведённых тестов можно сделать вывод, что выборки, сгенерированные с помощью реализованного датчика базовой случайной величины, согласуются с равномерным распределением на всех рассмотренных уровнях значимости и размерах выборок. Это свидетельствует о корректности работы генератора случайных чисел.