Хомяков, гр. 932121, УМФ-II, 22.06.2024

Теоретическая часть:

#1. Сингулярные обобщенные функции:

Сингулярные обобщенные функции - это важный класс обобщенных функций, которые имеют особенности (сингулярности) в определённых точках или областях.

Сингулярной обобщённой функцией называется линейный непрерывный функционал, определённый на пространстве основных функций и не являющийся регулярным функционалом.

Примеры:

1) б-функция Дирака: $\delta(\phi) = \phi(0)$, где ϕ-основная функция

2) Функция Хевисайда: $H(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

#2. Операции над обобщёнными функциями:

Операции над обобщенными функциями - это операции, которые позволяют строить новые обобщённые функции из уже известных:

1) Линейная комбинация:

Хомяков, гр. 932121, УМФ-II, 22.06.2024

f и g – обобщённые функции, α и β – константы. $(\alpha f + \beta \cdot g)(\varphi) = \alpha f(\varphi) + \beta g(\varphi)$

2) Замена переменных:

f – обобщённая функция, $x = \lambda y + b$ $(\lambda \neq 0)$ – линейная замена переменных, а $g(y) = f(\lambda y + b)$: $g(\varphi) = \frac{1}{|\lambda|} f\left(\varphi\left(\frac{x-b}{\lambda}\right)\right)$

3) Умножение обобщённых функций:

В общем случае определяется так:

$(f \cdot g)(\varphi) = f(g \cdot \varphi)$ – произведение корректно, если произведение $g \cdot \varphi$ является основной функцией.

Однако, например, умножение для δ-функции Дирака не определено:

$(\delta \cdot \delta)(\varphi) = \delta(\delta \cdot \varphi) = \delta(\varphi(0) \cdot \delta) = \varphi(0) \cdot \delta(\delta) = \varphi(0) \cdot \infty$

Однако, произведение δ-функции Диракана гладкую функции $g(x)$ определено:

$(\delta \cdot g)(\varphi) = \delta(g \cdot \varphi) = g(0) \cdot \varphi(0) = g(0) \cdot \delta(\varphi)$ – корректно, если $g \cdot \varphi$ – основная функция.

Хомяков, гр. 932121, УМФ-II, 22.06.2024

Практическая часть:

#3 (55а).

$$S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$S'(x) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nx}{n}$$

$$S''(x) = -\sum_{n\geqslant 1} \cos nx = -\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} e^{inx} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} + 1 =$$

$$= -2\pi \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n) + \frac{1}{2\pi} \right)$$

$$\begin{cases} S''(x) = 1, \ x \in (0; 2\pi) \\ S(0) = S(2\pi) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \end{cases}$$

$$S(x) = C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2$$

$$S(0) = C_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$S(2\pi) = C_1 2\pi + \frac{\pi^2}{6}$$

$$C_1 = -\frac{\pi}{12}$$

$$S(x) = -\frac{\pi}{12} x + \frac{\pi^2}{6}$$ – ответ.