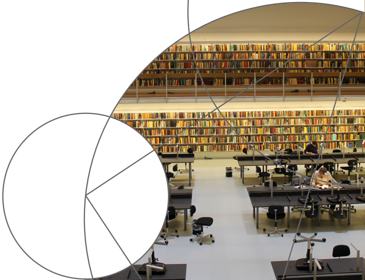
DMA: Relationer

Søren Eilers
Institut for Matematiske Fag



Oversigt

Ordnede par og produktmængder

Et ordnet par er en liste med to elementer: (a, b)

Produktmængden af to mængder A og B er:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ og } b \in B\}$$

Eksempel: For $A = \{x, y\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$ er

$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$$

Ordnede par: $(1, x) \notin A \times B$.

Sætning

$|A \times B| = |A|\,|B|$

Produktmængder af flere mængder

For mængder $A_1, \dots, A_n$ defineres produktmængden som:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

Sætning

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1|\,|A_2| \cdots |A_n|$$

Eksempel: Vektorer

Lad $\mathbb{R}$ være mængden af reelle tal.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: Vektorer i to dimensioner.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: Vektorer i tre dimensioner.

Eksempel: Databaser er produktmængder.

Oversigt

Eksempler på relationer

Mål: Matematiske beskrivelser af relationer mellem elementerne af to mængder A og B.

Eksempler:

- $A = \{\text{kvinder}\}$, $B = \{\text{alle mennesker}\}$
  Relation: a er mor til b.
- $A = B = \{\text{personer i aud. 2}\}$
  Relation: a sidder til venstre for b.
- $A = B = \mathbb{Z}^+$
  Relation: $a \leqslant b$.

For nogle $a \in A$ og $b \in B$ er a relateret til b.

Relationer

Lad A og B være mængder.

En relation fra A til B er en delmængde $R \subseteq A \times B$.

Hvis $(a, b) \in R$, så er a relateret til b. Notation: aRb.

Eksempler:

- $A = \{\text{kvinder}\}$, $B = \{\text{alle mennesker}\}$
  Relation: a er mor til b.
  $R_1 = \{\dots, (\text{Margrethe}, \text{Frederik}), \dots\}$
- $A = B = \{1, 2, 3\}$
  Relation: a er lig med b.
  $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Relation: a går op i b
  $R_3 = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$

Domæne og billede

Lad R være en relation fra A til B, dvs. $R \subseteq A \times B$.

Domænet af R er $\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B : aRb\}$
Billedet af R er $\mathrm{Ran}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A : aRb\}$

Det er de a (hhv. b) hvor der findes b (hhv. a) så $(a, b) \in R$.

Eksempel: For $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og

$$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\}$$

er $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 3\}$ og $\mathrm{Ran}(R) = \{2, 3, 4, 6\}$.

Oversigt

Matrix-repræsentation

Lad $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ og $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, og lad R være en relation fra A til B (dvs. $R \subseteq A \times B$).

Matricen for R er $m \times n$-matricen $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$ defineret ved

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{hvis } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & , \quad \text{hvis } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Eksempel 3.5.17: Lad $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{r, s\}$ og

$$R = \{(1, r), (2, s), (3, r)\}.$$

Matricen for R er en 3×2-matrix:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} r & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} ?1 & ?0 \\ ?0 & ?1 \\ ?1 & ?0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Orienterede grafer

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ og $R \subseteq A \times A$ er en relation på A.

Den orienterede graf for R er en figur, hvor der er:

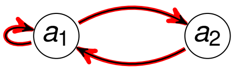
- En knude repræsenteret ved en cirkel for hvert $a_i \in A$.
- En kant repræsenteret ved en pil fra cirklen hørende til a_i til cirklen hørende til a_j for hvert par $(a_i, a_j) \in R$.

Den orienterede graf giver en nyttig visuel repæsentation.

Eksempel:

Lad $A = \{a_1, a_2\}$ og $R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$.

Den orienterede graf for R:



Grafer og matricer

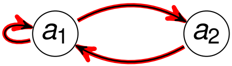
Grafen giver en god intuition om relationen.
Matricen gør det let at lave beregninger.

Tæt forbindelse mellem matricen og den orienterede graf:

Eksempel:
Lad $A = \{a_1, a_2\}$ og $R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$.
Matricen for R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Den orienterede graf for R:



Ind- og udgrader

Lad R være en relation på A og lad $b \in A$.

Ind-graden af b er:

- Antallet af $a \in A$ så $(a, b) \in R$.
- Antallet af kanter i den orienterede graf for R der ender ved knuden svarende til b.
- Antallet af ettaller i søjlen svarende til b i $\mathbf{M}_R$

Ud-graden af $a \in A$ defineres tilsvarende (ender$\to$ begynder, søjle $\to$ række).

Eksempel: $A = \{a, b, c, d\}$ og
$R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, c), (c, a), (c, d), (d, a)\}$.

Tavle!

Oversigt

Stier

Lad R være en relation på A og lad $a, b \in A$.

En sti af længde n i R fra a til b er en liste

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$$

med $x_i \in A$, så

$$aRx_1 \ , \ x_1 R x_2 \ , \ \ldots \ , \ x_{n-1} R b$$

Repræsentation i den orienterede graf:

$$a \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n-1} \rightarrow b$$

Stier og afledte relationer

Lad R være en relation på A og lad $n \in \mathbb{Z}^+$.
Definer en ny relation, R^n, på A ved:

$$aR^n b : \text{Der er en sti af længde } n \text{ fra } a \text{ til } b.$$

Eksempel: Six degrees of separation

$$A = \{\text{mennesker i verden}\}$$

Relation: aRb hvis a kender b.

Påstand: $aR^6 b$ for alle $a, b \in A$.

Definer en anden ny relation, R^∞, på A ved

$$aR^\infty b : \text{Der findes et } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ så } aR^n b.$$

Boolesk produkt

Lad A være en $m \times p$ Boolesk matrix og lad B være en $p \times n$ Boolesk matrix. Det Booleske matrixprodukt er $A \odot B = [c_{ij}]$, hvor

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } a_{ik} = 1 \text{ og } b_{kj} = 1 \text{ for mindst et } k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Almindeligt matrixprodukt:

$$AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}].$$

Boolesk produkt:

$$A \odot B = [(a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj})].$$

Matrixberegninger

Sætning

Lad R være en relation på A. Da er $\mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R$.

Bevis.

Tavle! □

Sætning

Lad R være en relation på A. For $n \geqslant 2$ er

$$\mathbf{M}_{R^n} = \overbrace{\mathbf{M}_R \odot \cdots \odot \mathbf{M}_R}^{n}.$$

Bevis.

Tavle! □

Oversigt

R-relativ mængde

Lad R være en relation fra A til B.

Definition: For $a \in A$ er $R(a) = \{b \in B \mid aRb\}$

Eksempel: Lad $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
Lad R være relationen $\geqslant$ (aRb hvis og kun hvis $a \geqslant b$).

$$R(1) = \{-2, -1, 0, 1\}$$
$$R(2) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$R(3) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

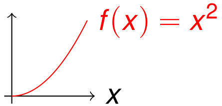
For $A_1 \subseteq A$ defineres:

$$\begin{aligned} R(A_1) &= \{b \in B \mid \exists a \in A : aRb\} \\ &= \bigcup_{a \in A_1} R(a) \end{aligned}$$

Hvad er en funktion?

Matematik i gymnasiet:

$f(x) = x^2$,



Funktioner som relationer

Lad A og B være mængder.

En funktion f fra A til B er en relation, som opfylder:

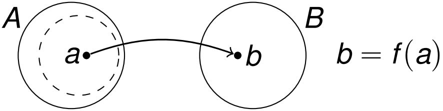
- For hvert $a \in \mathrm{Dom}(f)$ findes præcis et $b \in B$, så $(a, b) \in f$.

Den relative mængde for a er altså $f(a) = \{b\}$.

Notation:

- $f\colon A \to B$ betyder, at f er en funktion fra A til B.
- Vi skriver $f(a) = b$ i stedet for $f(a) = \{b\}$.

Til hvert $a \in \mathrm{Dom}(f) \subseteq A$ knytter f et unikt element $f(a) \in B$.



Eksempler

- Lad $A = \{a, b, c\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$ og lad

  $$f = \{(a, 1), (c, 2)\} \subseteq A \times B$$

  Relationen f er en funktion. $\mathrm{Dom}(f) = \{a, c\}$.
- Lad $A = \{a, b, c\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$ og lad

  $$g = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (c, 3)\} \subseteq A \times B$$

  Relationen g er ikke en funktion. $\mathrm{Dom}(g) = A$
- Lad $A = B = \mathbb{R}$ og lad

  $$h = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

  Relationen h er en funktion. $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$.

Forskrifter

En funktion er karakteriseret ved fire ting:

- En mængde A
- En mængde B.
- Domænet $\mathrm{Dom}(f) \subseteq A$.
- Værdien $f(a)$ for hvert $a \in \mathrm{Dom}(f)$.

En funktion $f\colon A \to B$ kan repræsenteres ved:

- Mængden $\mathrm{Dom}(f)$ og værdien $f(a)$ for $a \in \mathrm{Dom}(f)$, f.eks. vha. en forskrift som angiver værdien $f(a)$ for hvert $a \in \mathrm{Dom}(f)$.

Eksempel: Definer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \text{ og } f(x) = x^2.$$

Grafer

$f\colon A \to B$ kan betragtes som en delmængde af $A \times B$.

Det kaldes grafen for f, og den skal opfylde:

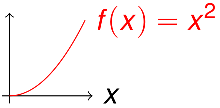
- For hvert $a \in \mathrm{Dom}(f)$: Præcis et par $(a, b) \in f \subseteq A \times B$. Per definition skal der gælde $b = f(a)$.

Dvs. at grafen har formen:

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B.$$

Eksempel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = x^2$ giver

$$\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ dvs.}$$



Oversigt

Egenskaber

En funktion $f\colon A \to B$ siges at være:

- overalt defineret, hvis $\mathrm{Dom}(f) = A$
- surjektiv, hvis $\mathrm{Ran}(f) = B$
- injektiv, hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ når $x_1 \neq x_2$.

Eksempel: Lad $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ og lad

$$f = \{(a, 1), (c, 2)\} \subseteq A \times B$$

Egenskaber:

- $\mathrm{Dom}(f) = \{a, c\}$. Ikke overalt defineret.
- $\mathrm{Ran}(f) = \{1, 2\}$. Ikke surjektiv.
- Injektiv.