Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

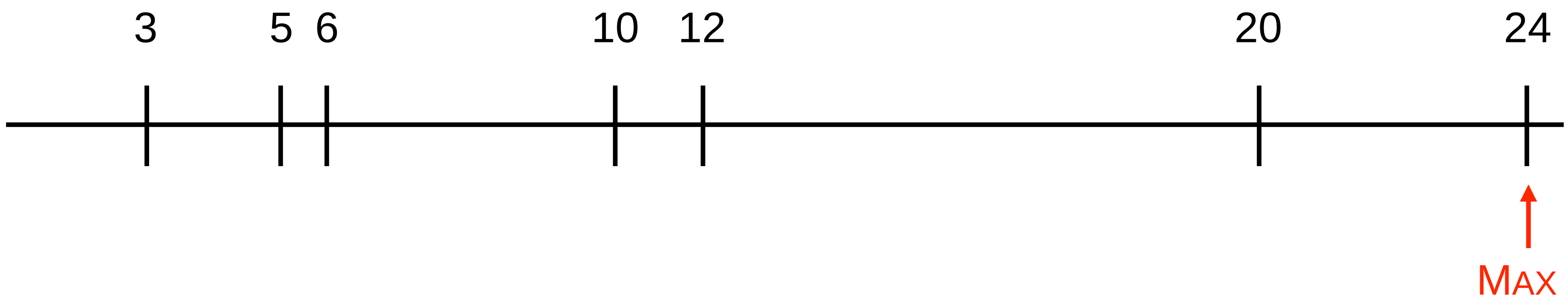
Disse noter er stærkt inspireret af noter af Philip Bille og Inge Li Gørtz til kurset Algoritmer og Datastrukturer, på DTU,
http://www2.compute.dtu.dk/courses/02105+02326/2015/#generelinfo

Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Prioritetskøer

- Prioritetskøer. Vedligehold en dynamisk mængde S af elementer. Hver element x er tilknyttet en nøgle x.key og satellitdata x.data.
  - MAX(): returner element med største nøgle.
  - EXTRACTMAX(): returner og fjern element med største nøgle.
  - INCREASEKEY(x, k): sæt x.key = k. Vi antager k ≥ x.key.
  - INSERT(x): sæt $S = S \cup \{x\}$



Prioritetskøer

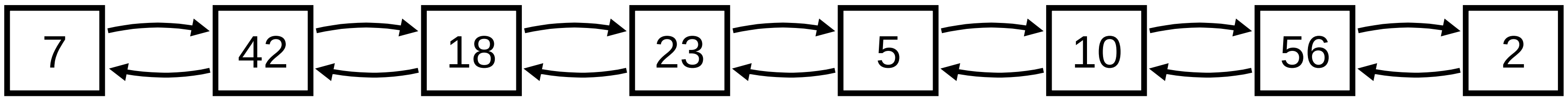
- Anvendelser.
  - Skedulering
  - Korteste veje i grafer (Dijkstras algoritme, o.lign.)
  - Mindste udspændende træer i grafer (Prims algoritme)
  - Kompression (Huffmans algoritme)
  - og meget mere

Prioritetskøer

- Udfordring. Hvordan kan vi løse problemet med de teknikker vi kender?

Prioritetskøer

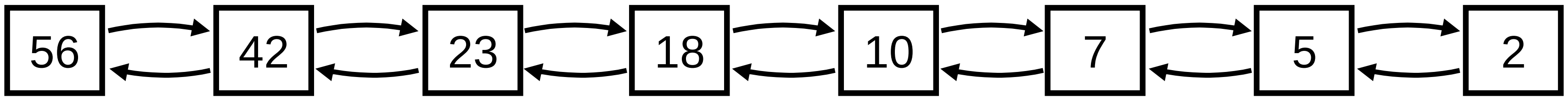
- Løsning med hægtet liste 1. Vedligehold S i en dobbelt-hægtet liste.



- MAX(): lineær søgning efter element med største nøgle.
- EXTRACTMAX(): lineær søgning efter element med største nøgle. Returner og fjern element.
- INCREASEKEY(x, k): sæt x.key = k.
- INSERT(x): tilføj element i start af listen.
- Tid.
  - MAX og EXTRACTMAX i O(n) tid (n = |S|).
  - INCREASEKEY og INSERT i O(1) tid.
- Plads.
  - O(n).

Prioritetskøer

- Løsning med hægtet liste 2. Vedligehold S i en dobbelt-hægtet sorteret liste.



- MAX(): returner første element.
- EXTRACTMAX(): returner og fjern første element.
- INCREASEKEY(x, k): sæt x.key = k. Lineær søgning fremad i listen for at indsætte x på korrekt position.
- INSERT(x): lineær søgning for at indsætte x på korrekt position.
- Tid.
  - MAX og EXTRACTMAX i O(1) tid.
  - INCREASEKEY og INSERT i O(n) tid.
- Plads.
  - O(n).

Prioritetskøer

Datastruktur	MAX	EXTRACTMAX	INCREASEKEY	INSERT	Plads
hægtet liste	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
sorteret hægtet liste	O(1)	O(1)	O(n)	O(n)	O(n)

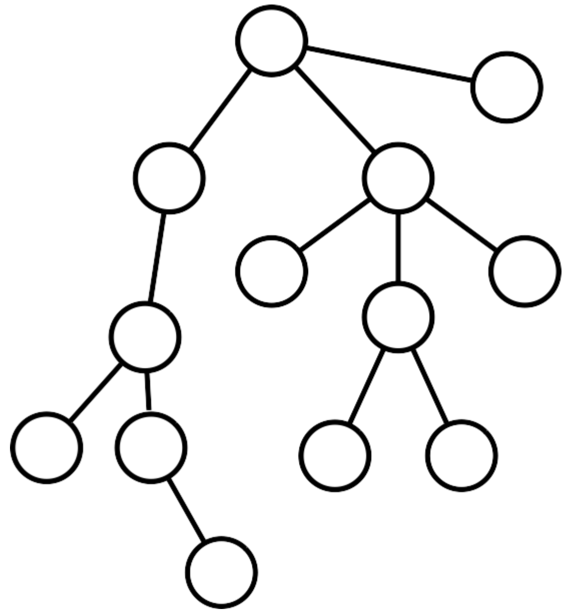
- Udfordring. Kan vi gøre det betydeligt bedre?
  - Kræver ny teknologi.

Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Rodfæstede træer

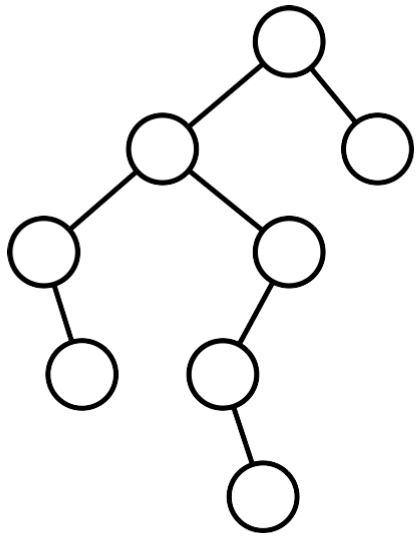
- Rodfæstede træer.
  - Knuder forbundet med kanter.
  - Sammenhængende og uden kredse.
  - En knude udvalgt til at være rod.
  - Speciel type graf.



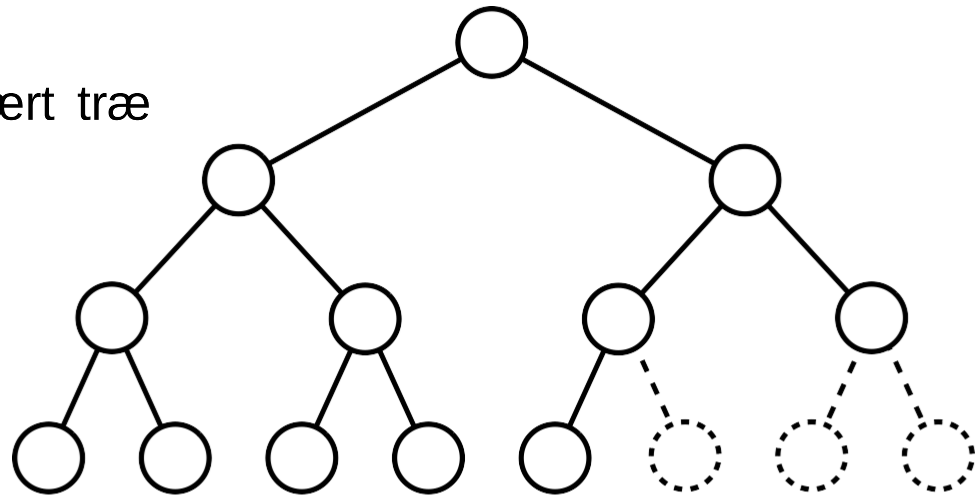
- Terminologi.
  - Børn, forælder, efterkommer, forfader, blade, interne knuder, sti.
- Dybde og højde.
  - Lad v være en knude i træ T.
  - dybden af v = længden af sti fra v til roden.
  - højden af v = længden af længste sti fra v til en bladefterkommer.
  - dybden af T = højden af T = længden af længste sti fra rod til et blad.

Binære træer

- Binært træ. Binært træ er enten
  - Tomt
  - En knude med et venstre og højre barn der begge er binære træer.



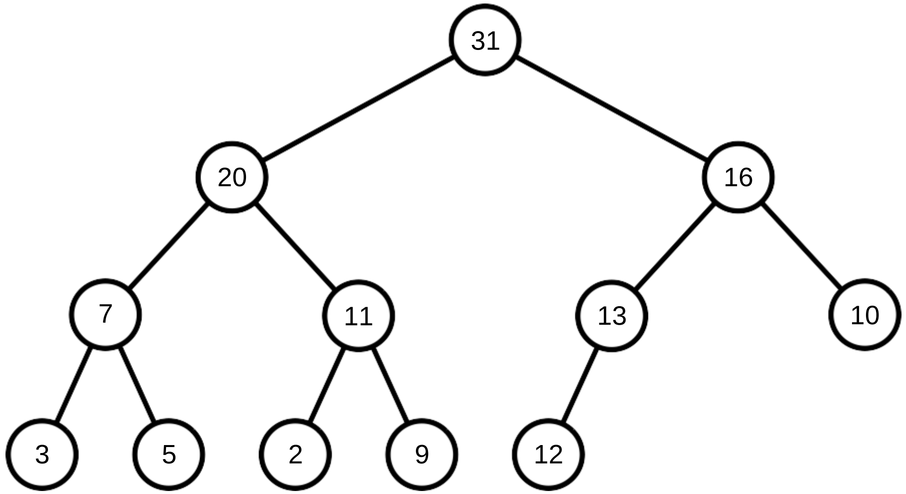
- Komplet binært træ. Binært træ hvor alle interne knuder har præcis to børn.
- Næsten komplet binært træ. Komplet binært træ hvor 0 eller flere blade er fjernet fra højre mod venstre.



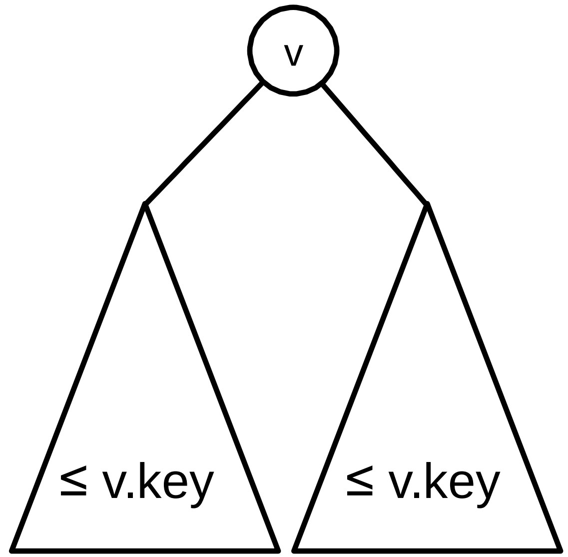
- Lemma. Højden af et (næsten) komplet binært træ med n knuder er $\Theta(\log n)$.
- Bevis. Se ugeseddel.

Hob

- Hob *(heap)*. Næsten komplet binært træ der overholder hob-orden.



- Hob-orden *(heap-order)*.
  - Alle knuder indeholder et element.
  - For alle knuder v:
    - alle nøgler i venstre deltræ og højre deltræ er ≤ v.key.



- Max-hob vs min-hob. Ovenstående er max-hob. Udskift ≤ med ≥ for at få min-hob.

Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

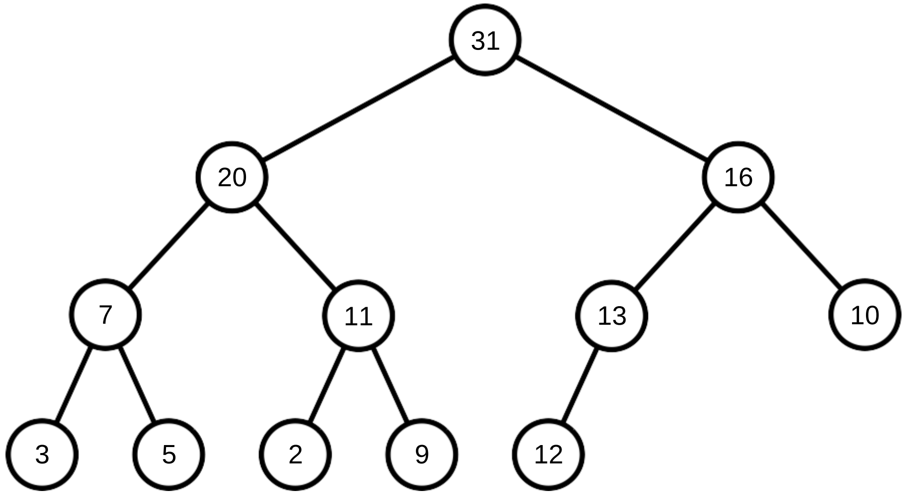
Hob

- Repræsentation. Vi skal bruge følgende navigationsoperationer på en hob:
  - PARENT(x): returner forældreren af x.
  - LEFT(x): returner venstre barn af x.
  - RIGHT(x): returner højre barn af x.

- Udfordring. Hvordan kan vi repræsentere en hob så vi kan understøtte navigation effektivt?

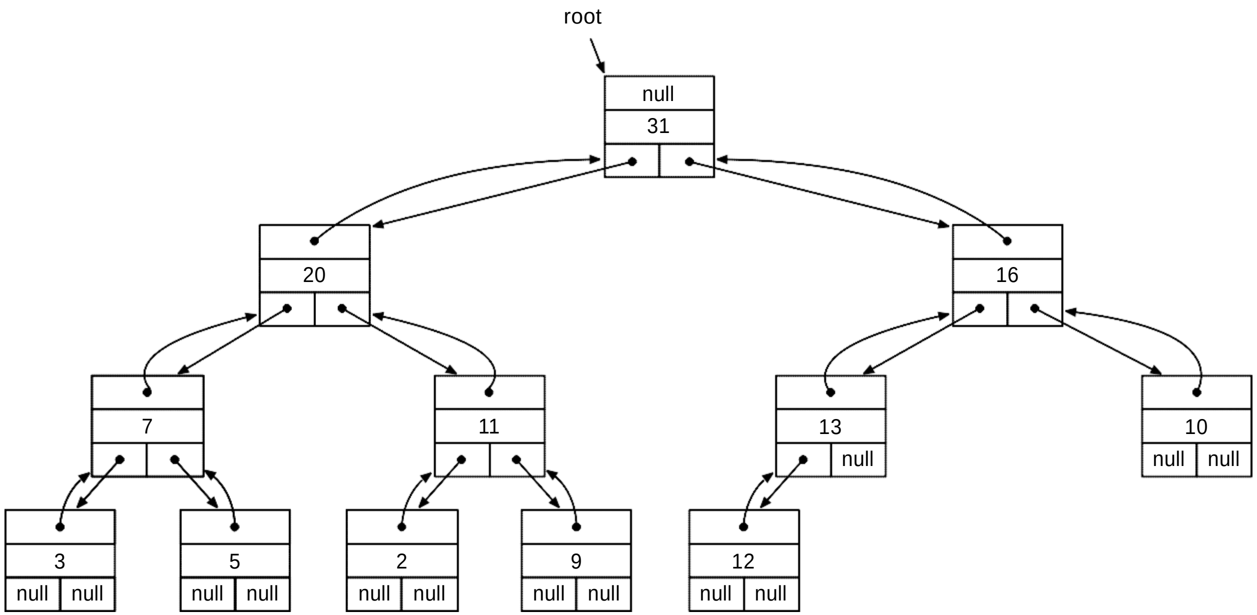
Hob

- Repræsentation med hægter (pointers). Hver knude v består af
  - v.key
  - v.parent
  - v.left
  - v.right



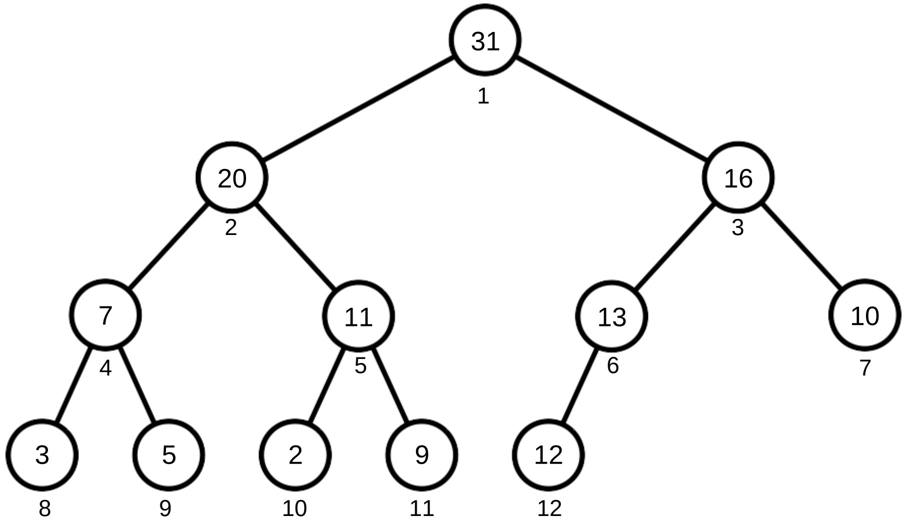
- PARENT, LEFT, RIGHT ved at følge pointer.

- Tid. O(1)
- Plads. O(n)



Hob

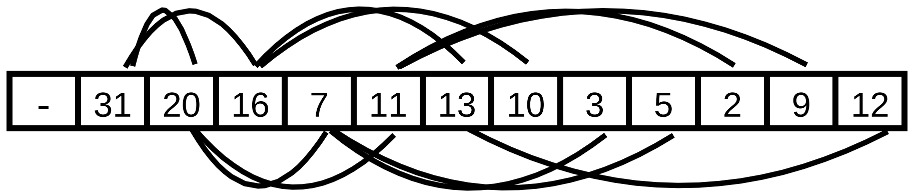
- Repræsentation med tabel.
  - Tabel H[0..n]
  - H[0] bruges ikke.
  - H[1..n] indeholder knuder i niveauorden (level order).



- PARENT(x): returner $\lfloor x/2 \rfloor$
- LEFT(x) : returner 2x.
- RIGHT(x): returner 2x + 1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-	31	20	16	7	11	13	10	3	5	2	9	12

- Tid. O(1)
- Plads. O(n)

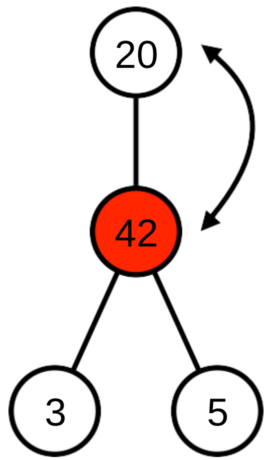


Prioritetskøer

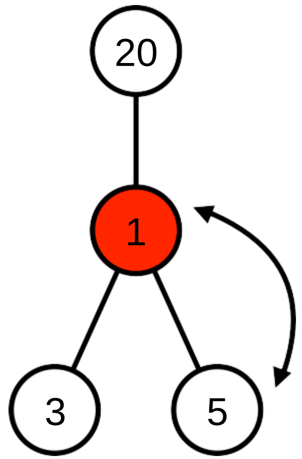
- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Algoritmer på hobe

- BUBBLEUP(X):
  - Hvis hoborden er overtrådt i knude x fordi nøgle i x er > nøgle i PARENT(x).
  - Ombyt x og PARENT(x).
  - Gentag med PARENT(x) indtil hoborden er opfyldt.

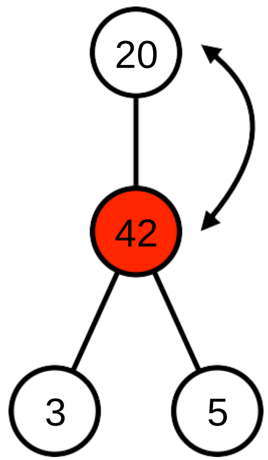


- BUBBLEDOWN(x):
  - Hvis hoborden er overtrådt i knude x fordi nøgle i x er < nøgle i LEFT(x) eller RIGHT(x).
  - Ombyt x og barn b med største nøgle.
  - Gentag med b indtil hoborden er opfyldt.

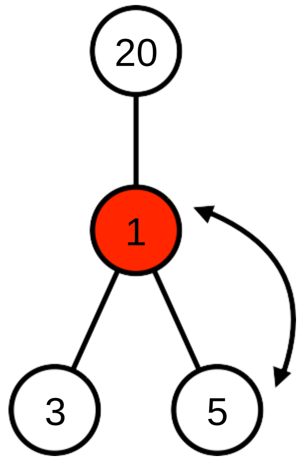


Algoritmer på hobe

- BUBBLEUP(X):
  - Hvis hoborden er overtrådt i knude x fordi nøgle i x er > nøgle i PARENT(x).
  - Ombyt x og PARENT(x).
  - Gentag med PARENT(x) indtil hoborden er opfyldt.



- BUBBLEDOWN(x):
  - Hvis hoborden er overtrådt i knude x fordi nøgle i x er < nøgle i LEFT(x) eller RIGHT(x).
  - Ombyt x og barn b med største nøgle.
  - Gentag med b indtil hoborden er opfyldt.



- Tid. Hvor hurtigt kører de?
  - BUBBLEUP og BUBBLEDOWN i $\Theta(\log n)$ tid.
- Hvordan kan vi bruge dem til implementation af prioritetskøoperationer?

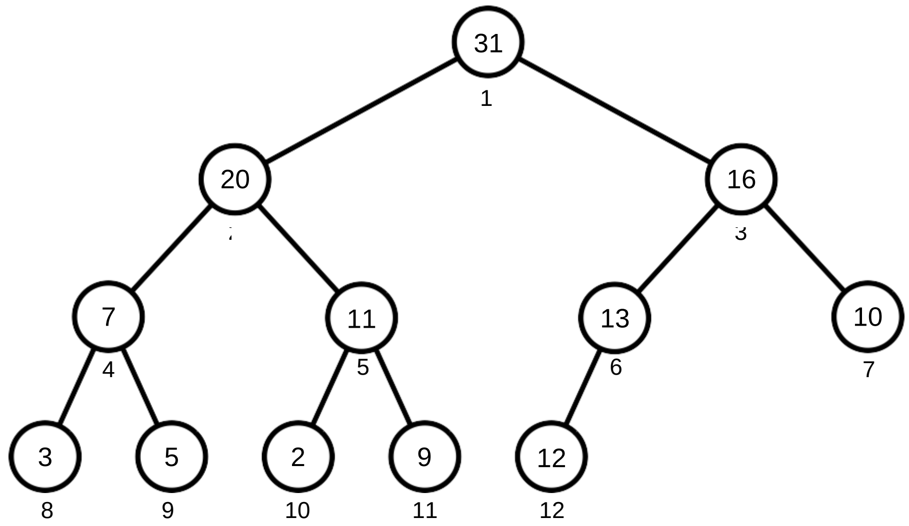
Prioritetskøoperationer

```
MAX()
    return H[1]
```

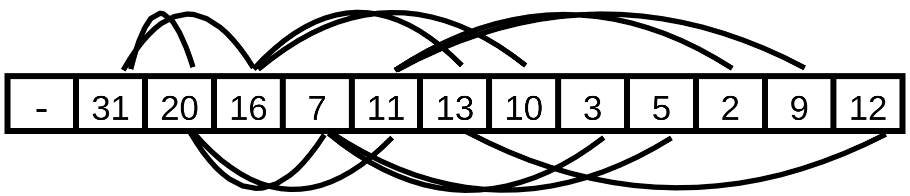
```
EXTRACTMAX()
    r = H[1]
    H[1] = H[n]
    n = n - 1
    BUBBLEDOWN(1)
    return r
```

```
INSERT(x)
    n = n + 1
    H[n] = x
    BUBBLEUP(n)
```

```
INCREASEKEY(x,k)
    H[x] = k
    BUBBLEUP(x)
```



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-	31	20	16	7	11	13	10	3	5	2	9	12



- Opgave. Udfør følgende sekvens i initielt tom hob: 2, 5, 7, 6, 4, E, E
- Tal betyder INSERT og E betyder EXTRACTMAX.

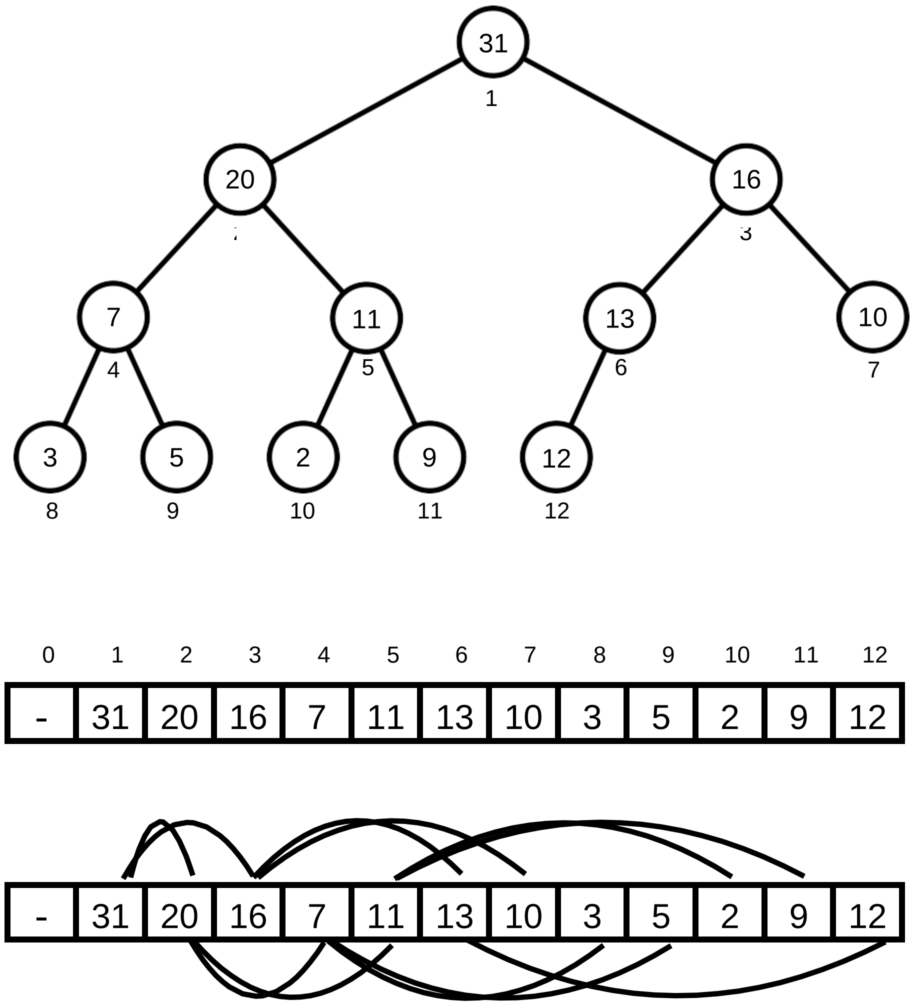
Prioritetskøoperationer

```
MAX()
    return H[1]
```

```
EXTRACTMAX()
    r = H[1]
    H[1] = H[n]
    n = n - 1
    BUBBLEDOWN(1)
    return r
```

```
INSERT(x)
    n = n + 1
    H[n] = x
    BUBBLEUP(n)
```

```
INCREASEKEY(x,k)
    H[x] = k
    BUBBLEUP(x)
```



- Tid. Hvor hurtigt kører de?
  - MAX i Θ(1) tid.
  - EXTRACTMAX, INCREASEKEY og INSERT i Θ(log n) tid.

Prioritetskøer

Datastruktur	MAX	EXTRACTMAX	INCREASEKEY	INSERT	Plads
hægtet liste	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
sorteret hægtet liste	O(1)	O(1)	O(n)	O(n)	O(n)
hob	O(1)	O(log n)	O(log n)	O(log n)	O(n)

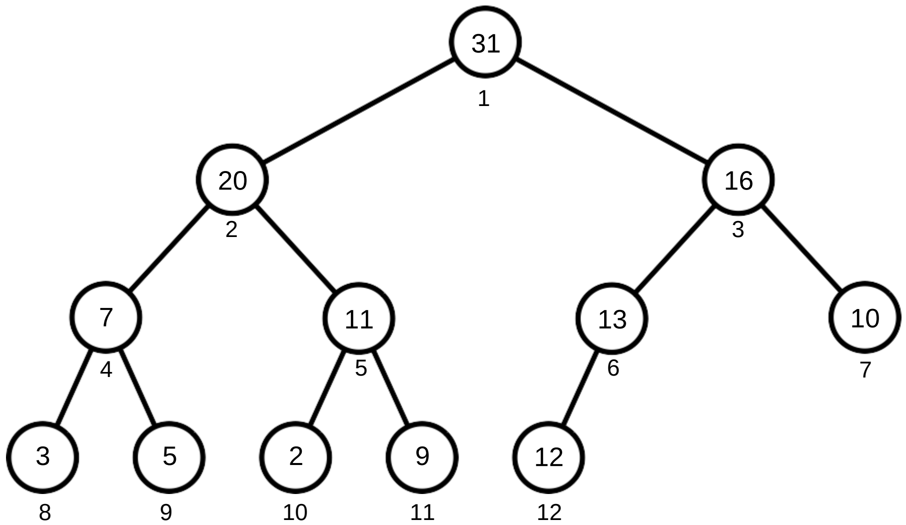
- Hob (med tabelrepræsentation) er eksempel på en implicit datastruktur.

Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Hobkonstruktion

- Hobkonstruktion. Givet n heltal i en tabel H[0..n], byg tabel om til en hob.

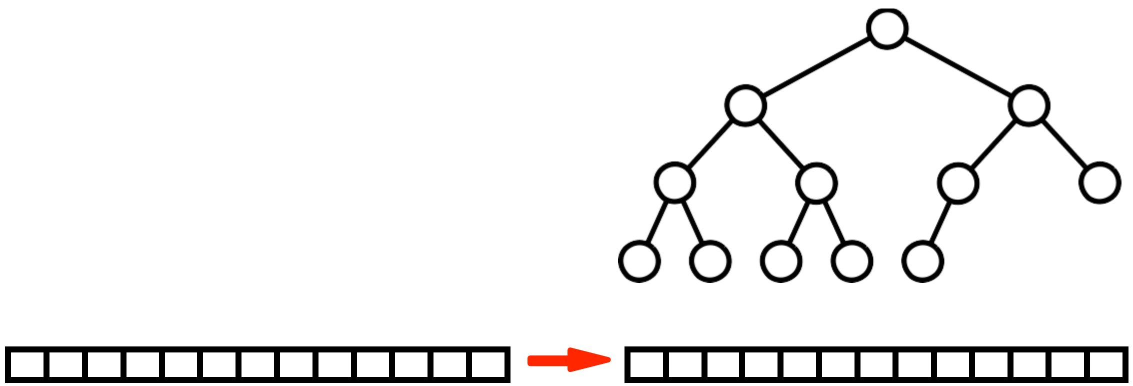


0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-	20	7	16	9	12	13	10	5	3	2	11	31

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-	31	20	16	7	11	13	10	3	5	2	9	12

Hobkonstruktion

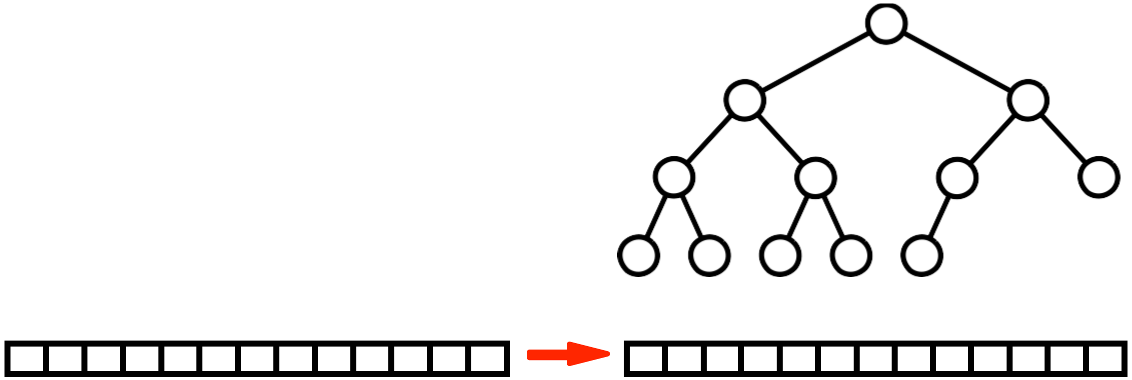
- Algoritme 1.
  - Etabler hoborden oppefra og ned.
  - Roden er en hob af størrelse 1.
  - For alle andre knuder fra venstre til højre brug BUBBLEUP.



- Tid.
  - For hver knude af dybde d bruger vi O(d) tid.
  - ~n/2 knuder af dybde log n, ~n/4 knuder af dybde log n - 1, ~n/8 knuder af dybde log n - 2, …. 2 knuder af dybde 1.
  - $n/2 \cdot \log n + n/4 \cdot (\log n - 1) + n/8 \cdot (\log n - 2) + \ldots + 2 \cdot 1 = \Theta(n \log n)$
  - $\Rightarrow$ O(nlog n) tid.
- Udfordring. Kan vi gøre det bedre?

Hobkonstruktion

- Algoritme 2.
  - Etabler hoborden nedefra og op.
  - Alle blade er allerede hobe af størrelse 1.
  - For hver intern knude fra højre til venstre brug BUBBLEDOWN.



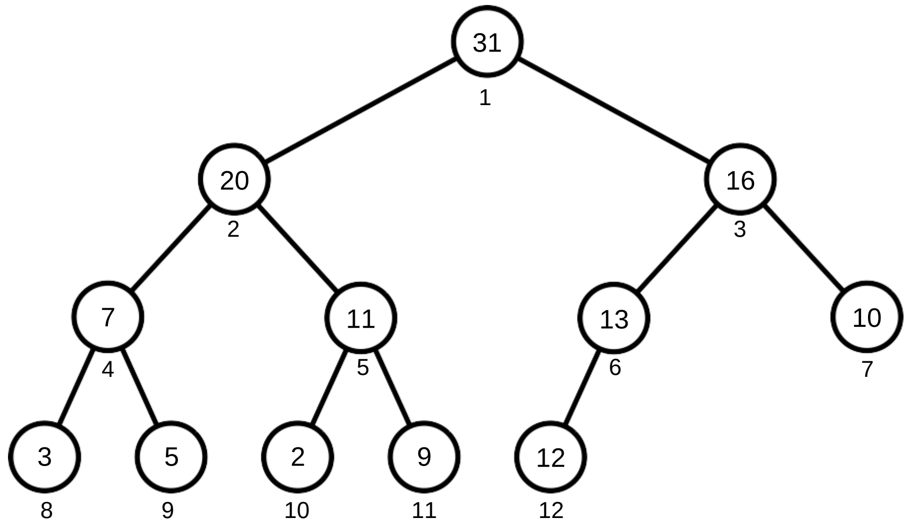
- Tid.
  - For knude af højde h bruger vi O(h) tid.
  - ~ n/4 knuder af højde 1, n/8 knuder af højde 2, n/16 knuder af højde 3, ..., 1 knude af højde h.
  - $n/4 \cdot 1 + n/8 \cdot 2 + n/16 \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot h = O(n)$
  - $\Rightarrow$ O(n) tid

Prioritetskøer

- Prioritetskøer
- Træer og hobe
- Repræsentation af hobe
- Algoritmer på hobe
- Hobkonstruktion
- Hobsortering

Hobsortering

- Sortering. Hvordan man bruge en hob og prioritetskøoperationer til at sortere en tabel H[1..n] af n tal?
- Algoritme.
  - Konstruer en hob for H.
  - Lav n ExtractMax.
    - Indsæt resultater i slutning af tabel.
  - Returner tabel H.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-	31	20	16	7	11	13	10	3	5	2	9	12

- Tid.
  - Hobkonstruktion i Θ(n) tid
  - n ExtractMax i Θ(n log n) tid.
  - i alt Θ(nlog n) tid.

- Theorem. Vi kan sortere en tabel i Θ(n log n) tid.

- Bruger kun O(1) ekstra plads.
- Ækvivalens af sortering og prioritetskøer.