DMA: Skuffeprincippet

Søren Eilers
Institut for Matematiske Fag

Oversigt

1. Skuffeprincippet

Skuffeprincippet (Thm. 3.3.1)

(Engelsk: Pigeonhole principle)

Sætning

Hvis n ting lægges i m skuffer og $n > m$, så er der mindst en skuffe med to eller flere ting.

Modstridsbevis:

Bevis.

Antag, at hver skuffe indeholder højst en ting. Så er der højst plads til m ting. Det er i modstrid med at $n > m$, så antagelsen var forkert. Dvs. mindst en skuffe indeholder mindst to ting. $\square$

Eksempel (3.3.2)

Påstand: Hvis man tager 5 forskellige tal mellem 1 og 8, så vil summen af to af dem være 9.

Argument: Definer

$$A_1 = \{1, 8\}, A_2 = \{2, 7\}, A_3 = \{3, 6\} \text{ og } A_4 = \{4, 5\}.$$

Vælg 5 forskellige tal mellem 1 og 8.

Ting: de 5 tal.
Skuffer: de 4 mængder

Af skuffeprincippet følger det, at to af tallene må ligge i samme mængde.

For hver mængde er summen af de to elementer 9.

Det udvidede skuffeprincip

Sætning

Hvis n ting placeres i m skuffer, så findes der en skuffe, som indeholder mindst $\lfloor (n-1)/m \rfloor + 1$ *ting.*

Bevis.

Hvis hver skuffe indeholder højst $\lfloor (n-1)/m \rfloor$ ting, så er der højst

$$m \cdot \lfloor (n-1)/m \rfloor \leqslant m \cdot (n-1)/m = n-1$$

ting i alt. $\square$

Eksempel (3.3.6)

Påstand: Hvis 30 bøger har 61327 sider i alt, så har en af bøgerne mindst 2045 sider.

Argument: Bøgerne er skuffer og siderne er ting, så

$$n = 61327 \text{ og } m = 30.$$

Det udvidede skuffeprincip siger, at det findes en bog med mindst

$$\lfloor (61327 - 1)/30 \rfloor + 1 = \lfloor 2044.33\ldots \rfloor + 1 = 2045$$

sider.