DMA 2016

– Noter til uge 5 –

Baggrund

Lad os prøve at bevise at der for hvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{1}$$

og derved bestemme en sumformel for summen af de første n kvadrattal.

En oplagt, men som vi skal se, lidt for naiv, metode er at begynde forfra. Vi ser jo fx ved direkte udregning at

$$\begin{aligned}
1^2 = 1 = \frac{6}{6} &= \frac{1(1+1)(2+1)}{6}, \\
1^2 + 2^2 = 5 = \frac{30}{6} &= \frac{2(2+1)(4+1)}{6}, \\
1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \frac{84}{6} &= \frac{3(3+1)(6+1)}{6},
\end{aligned}$$

Det er fristende at regne et par udsagn mere efter, sætte

$$\vdots$$
$$\textit{osv.}$$

under, og erklære sig færdig med opgaven. Dette er imidlertid ikke matematisk skudsikkert, og næsten på grænsen til det løgnagtige. Betragt for eksempel:

Eksempel 1. *Betragt følgerne defineret eksplicit ved*

$$a_n = \left\lfloor \frac{2n}{\ln 2} \right\rfloor$$

og

$$b_n = \left\lceil \frac{2}{2^{1/n} - 1} \right\rceil$$

som begge starter

$$\begin{gathered}
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 51, 54, 57, \\
60, 63, 66, 69, 72, 75, 77, 80, 83, 86, 89, 92, 95, 98, 100, 103, 106, \\
109, 112, 115, 118, 121, 124, 126, 129, 132, 135, 138, 141, 144
\end{gathered}$$

Faktisk er det ret let at tjekke på computer at de to følger stemmer overens for de første millioner af værdier af n. Det er således fristende at konkludere at der må gælde $a_n = b_n$ for alle n, men det viser sig at

$$a_{777451915729368} = 2243252046704766 \neq 2243252046704767 = b_{777451915729368}$$

Eksemplet herover skulle gerne gøre det klart at selv om vi brugte en computer og fandt at formlen (1) gjaldt for alle n mellem 1 og 100000 var vi ikke blevet meget klogere på de to spørgsmål

(i) Gælder formlen for *alle* $n \in \mathbb{N}$?

(ii) Hvorfor?

der er så tæt bundet sammen, at det er svært at besvare (i) uden at besvare (ii).

Vi prøver derfor en anden metode. Vi definerer en følge (a_n) ved

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(altså formlens højreside) og får den idé at forsøge at bevise udsagnet

$$a_n + (n+1)^2 = a_{n+1} \tag{2}$$

i stedet. Det viser sig at være relativt nemt at checke da vi ved at gange helt ud får

$$\begin{aligned} a_n + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}\left[n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2\right] \\ &= \frac{1}{6}\left[2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\right] \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{6}((n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)) \\ &= \frac{1}{6}\left[2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\right] \end{aligned}$$

Formlen (2) betyder, at **hvis** vi ved at (1) gælder for en eller anden bestemt værdi af n, så kan vi slutte at den også gælder for $n+1$, idet

$$\begin{aligned} 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= a_n + (n+1)^2 && \textit{[Formel (1) gælder for n]} \\ &= a_{n+1} && \textit{[Formel (2)]} \\ &= \frac{[n+1]([n+1]+1)(2[n+1]+1)}{6} && \textit{[Def. af } a_n\textit{]} \end{aligned}$$

Vi har allerede vist at formlen gælder for $n = 3$. Men så gælder den også for $n = 4$ pga. argumentet herover. Men så gælder den også for $n = 5$ pga. argumentet herover. Men så gælder den også for $n = 6$ pga. argumentet herover. Men så gælder den også for $n = 7$ pga. argumentet herover. Men så gælder den også for $n = 8$ pga. argumentet herover... *osv.*

Vi er betydeligt tættere på et troværdigt svar på (i) og (ii) nu. Men som det fremgår er vi stadigvæk nødt til at arbejde med tre prikker og sige "og så videre" eller lignende. Induktionsprincippet, som vi skal beskrive herunder, er den vedtagne metode til at håndtere sådanne "... *osv.*".

Observer hvordan udsagnet (2) viste sig at være en *nøgle* til at finde et bevis. Det er værd at bemærke hvordan man kan få ideen til at opstille denne ligning ud fra en *analyse* af problemstillingen. For **hvis** (1) var sandt, så måtte der også gælde

$$a_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = a_n + (n+1)^2.$$

I de mere avancerede induktionsbeviser er det en væsentlig del af opgaven at ved hjælp af en sådan analyse forsøge at finde udsagn der på samme måde som (2) kan tjene som springbræt til en løsning af opgaven.

Induktionsprincippet

Lad os nu formalisere ideerne herover som *det matematiske induktionsprincip* (engelsk: the principle of mathematical induction).

> Hvis der om en samling af udsagn $P(n)$ indiceret over mængden $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ gælder at
>
> $$P(n_0) \text{ er sand} \tag{S}$$
>
> og at der for alle $n \geq n_0$ gælder at
>
> $$\text{Hvis } P(n) \text{ er sand, så er også } P(n+1) \text{ sand} \tag{T}$$
>
> så er $P(n)$ sand for alle $n \geq n_0$.

Vi kalder udsagnet (S) for *induktionsstarten* og udsagnet (T) for *induktionstrinnet.*

Lad os gennemføre argumentet for (1) formelt i denne ramme. Vi lader

$P(n)$ være udsagnet

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

og ønsker at vise $P(n)$ for alle $n \geq n_0 = 1$.
Induktionsstart: Vi skal vise at $P(1)$ er sand, altså at

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

og det følger fordi begge sider af lighedstegnet evaluerer til 1.
Induktionstrin: Vi skal vise at hvis $P(n)$ er sand, så er $P(n+1)$ også sand. Vi kan derfor antage at

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vi ser

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}\left[n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\right] \\
&= \frac{[n+1]([n+1]+1)(2[n+1]+1)}{6}
\end{aligned}$$

hvilket jo netop betyder at $P(n+1)$ er sand.
Konklusion: Ved hjælp af induktionsprincippet ser vi nu at $P(n)$ gælder for alle $n \geq n_0$.

I nogle situationer er det nødvendigt at benytte det *stærke* induktionsprincip, hvor man i induktionstrinnet antager ikke kun at $P(n)$ er sand, men at alle $P(k)$ med $k \leq n$ er sande. Formelt:

Hvis der om en samling af udsagn $P(n)$ indiceret over mængden $\{n_0, n_0+1, \dots\}$ gælder at

$$P(n_0) \text{ er sand} \tag{S}$$

og at der for alle $n \geq n_0$ gælder at

$$\text{Hvis } P(n_0), \dots, P(n) \text{ alle er sande, så er også } P(n+1) \text{ sand} \tag{T'}$$

så er $P(n)$ sand for alle $n \geq n_0$.

Vi slutter med et eksempel på brugen af det stærke induktionsprincip. Vi definerer en følge b_n rekursivt ved $b_1 = 0$ og

$$b_n = b_{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$$

for alle $n > 1$. Vi ønsker at vise

$$P(n): \qquad b_n = \lfloor \log_2(n) \rfloor$$

Induktionsstart: Vi skal vise at $P(1)$ er sand, altså at

$$b_1 = \lfloor \log_2(1) \rfloor$$

og det følger fordi begge sider af lighedstegnet evaluerer til 0.
Induktionstrin: Vi bruger det stærke induktionsprincip og skal altså vise at hvis alle udsagnene $P(1), P(2), \dots P(n)$ er sande, så er $P(n+1)$ også sand. Vi sætter $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ således at $b_{n+1} = b_m + 1$. Vi skal bruge at $P(m)$ er sand, og fordi $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor \leq n$ er det jo indeholdt i vores antagelse.

Hvis n er ulige er jo $n+1$ lige, og vi har $m = (n+1)/2$ således at vi som ønsket får

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= b_m + 1 \\
&= \lfloor \log_2(m) \rfloor + 1 && \textit{[Her bruges } P(m)\textit{!]} \\
&= \lfloor \log_2(m) + 1 \rfloor \\
&= \lfloor \log_2(m) + \log_2(2) \rfloor \\
&= \lfloor \log_2(2m) \rfloor \\
&= \lfloor \log_2(n+1) \rfloor
\end{aligned}$$

Det viser jo netop at $P(n+1)$ er sand.

Hvis n er lige er jo $n+1$ ulige, og vi har $m = n/2$ således at vi, som herover, får

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_m + 1 \\ &= \lfloor \log_2(m) \rfloor + 1 && \textit{[Her bruges } P(m)\textit{!]} \\ &= \lfloor \log_2(m) + 1 \rfloor \\ &= \lfloor \log_2(m) + \log_2(2) \rfloor \\ &= \lfloor \log_2(2m) \rfloor \\ &= \lfloor \log_2(n) \rfloor \end{aligned}$$

Dette er ikke det samme som $P(n)$. Men fordi $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ er konstant k for alle n mellem det lige tal 2^k og det ulige tal $2^{k+1} - 1$ ser vi at $\lfloor \log_2(n) \rfloor = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor$ for alle lige $n > 0$, og så har vi vist $P(n)$ også i dette tilfælde.
Konklusion: Ved hjælp af det stærke induktionsprincip ser vi nu at $P(n)$ gælder for alle $n \geq 1$.