DMA: Relationer

Operationer

Søren Eilers
Institut for Matematiske Fag

6. december 2016

Oversigt

Fællesmængder og foreningsmængder

Husk: Relationer er mængder.

Lad R, S være relationer fra A til B, dvs.

$$R \subseteq A \times B \quad \text{og} \quad S \subseteq A \times B.$$

Definer to nye relationer fra A til B:

$$R \cup S \text{ og } R \cap S$$

Bemærk: For $a \in A$ og $b \in B$

$$a(R \cup S)b \Leftrightarrow aRb \text{ eller } aSb$$
$$a(R \cap S)b \Leftrightarrow aRb \text{ og } aSb$$

Komplement og invers

Lad R være en relation fra A til B.

Den komplementære relation er relationen

$$\overline{R} = \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \notin R\} \text{ fra } A \text{ til } B.$$

Eksempel: Den komplementære til $\geqslant$ er $<$.

Den inverse relation er relationen

$$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\} \text{ fra } B \text{ til } A.$$

Eksempel: Den inverse til $=$ er $=$.

Egenskaber (fra sætn. 4.7.1–4.7.5)

Sætning

Lad R og S være relationer på A.

a) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

b) *Hvis R og S er refleksive, så er $R \cap S$ refleksiv.*

c) *R er symmetrisk, hvis og kun hvis $R = R^{-1}$.*

d) *Hvis R og S er symmetriske, så er $R \cap S$ symmetrisk.*

e) $(R \cap S)^2 \subseteq (R^2 \cap S^2)$

f) *Hvis R og S er transitive, så er $R \cap S$ transitiv.*

g) *Hvis R og S er ækvivalensrelationer, så er $R \cap S$ en ækvivalensrelation.*

Bevis.

Tavle! □

Oversigt

Refleksiv afslutning

Lad R være en relation på A:
Hvilke par fra $A \times A$ skal tilføjes for at få refleksivitet?

Definition: Den refleksive afslutning af R er den mindste refleksive relation $S \subseteq A \times A$, som opfylder, at $R \subseteq S$.

Sætning

Den refleksive afslutning af R er $R \cup \{(a, a) \in A \times A\}$.

Bevis.

Lad S være en refleksiv relation med $R \subseteq S$. Da er $\{(a, a) \in A \times A\} \subseteq S$, fordi S er refleksiv. Dermed er $R \cup \{(a, a) \in A \times A\}$ den mindste refleksive relation, som indeholder R. $\square$

Symmetrisk afslutning

Lad R være en relation på A:
Hvilke par fra $A \times A$ skal tilføjes for at få symmetri?

Definition: Den symmetriske afslutning af R er den mindste symmetriske relation $S \subseteq A \times A$, som opfylder, at $R \subseteq S$.

Sætning

Den symmetriske afslutning af R er $R \cup R^{-1}$.

Dvs. for hvert kant i grafen tilføjes en modsatrettet kant.

Bevis.

Bemærk, hvis $(a, b) \in R$ og $(b, a) \notin R$, så er $(b, a) \in R^{-1}$.
Derfor må en symmetrisk relation, som indeholder R, også indeholde R^{-1}. $\square$

Transitiv afslutning

Lad R være en relation på A:
Hvilke par fra $A \times A$ skal tilføjes for at få transitivitet?

Definition: Den transitive afslutning af R er den mindste transitive relation $S \subseteq A \times A$, som opfylder, at $R \subseteq S$.

Sætning

Den transitive afslutning af R er R^{∞}.

Oversigt

Komposition (sammensætning)

Definition: Lad R være en relation fra A til B, og
lad S være en relation fra B til C, og
Kompositionen $S \circ R$ er relationen fra A til C def. ved

$$a(S \circ R)c \Leftrightarrow \text{der findes } b \in B, \text{ så } aRb \text{ og } bRc.$$

Eksempel: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x, y, z\}$
$R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a)\}$ og
$S = \{(a, x), (a, y), (b, y), (b, z)\}$ giver

$$S \circ R = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, y), (2, z), (3, x), (3, y)\}$$

Komposition og matricer

Lad A, B og C være endelige mængder.
Lad R være en relation fra A til B, og
lad S være en relation fra B til C

Sætning

Matricen for $S \circ R$ er $\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S$

Hvis R er en relation på A, så er $\mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R$.
Sætningen er en generalisering i forhold til i mandags.

Bevis.

Samme fremgansmåde som for R^2. $\square$

Bemærk: Dimensionerne passer!

Associativitet

Lad R være en relation fra A til B,
lad S være en relation fra B til C, og
lad T være en relation fra C til D.

Sætning

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

Definition

En relation R er en funktion når

$$aRb_1 \wedge aRb_1 \implies b_1 = b_2$$

Altså er $R(a) = \emptyset$ hvis $a \notin \mathrm{Dom}(R)$ og $R(a) = \{b\}$ hvis $a \in \mathrm{Dom}(R)$. Vi skriver $R(a) = b$ hvor vi egentlig burde skrive $R(a) = \{b\}$.

Antag at R er en funktion fra A til B og S en funktion fra B til C. Så er $S \circ R$ præcis hvad vi plejer at forstå ved den sammensatte funktion af R og S.

Sætning

Lad R være en funktion. Så gælder

- R *er injektiv* $\iff R^{-1}$ *er en funktion.*
- $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Ran}(R^{-1})$ *og* $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Ran}(R)$.

Sætning

Lad R være en injektiv funktion. Så gælder

- $(R^{-1} \circ R)(x) = x$ *for alle* $x \in \mathrm{Dom}(R)$.
- $(R \circ R^{-1})(y) = y$ *for alle* $y \in \mathrm{Ran}(R)$.