**DMA 2016**

**– Ugeseddel 12 –**

# Arbejdsvejledning

I denne uge starter vi på *relationer*, som kommer til at danne fundament for næsten alt hvad vi ellers skal lave af matematik i DMA. Relationer kan anskues på flere vidt forskellige måder:

- som et åbent udsagn om par af elementer $a \in A$ og $b \in B$,
- som en delmængde af produktmængden $A \times B$,

og endvidere, når $A$ og $B$ er endelige mængder,

- som en Boolesk matrix,
- som en orienteret graf (eng.: digraph).

Det kan måske virke lidt voldsomt med 4 beskrivelser af det samme begreb, men det er nyttigt at kunne repræsentere relationer på forskellige måder, så man kan vælge den måde der passer bedst til konteksten.

Undervejs i forløbet i KBR kapitel 4 tager vi en afstikker til KBR 5.1 for at bemærke at funktioner er relationer på en særlig form, og diskuterer begreberne injektive og surjektive funktioner, samt begrebet invers funktion. Herefter er hovedmålet at forstå relationsegenskaberne **refleksiv**, **symmetrisk** og **transitiv** der tilsammen definerer den vigtige familie af **ækvivalensrelationer**. Vi dækker KBR afsnit 5.1 og hele kapitel 4 i løbet af ugen, men afsnit 4.6 indeholder materiale I allerede kender fra algoritmedelen, og afsnit 4.8 er mindre centralt for os, så de to afsnit vil ikke blive diskuteret ved forelæsningerne.

# Program for forelæsninger

## Tirsdag 061216, 0815-0900

Relationer og orienterede grafer. (KBR 4.1–4.2).

### Tirsdag 061216, 1115-1200

Stier i orienterede grafer. Funktioner opfattet som relationer. Injektive [Eng: one-to-one] og surjektive funktioner (KBR 4.3 og 5.1).

### Torsdag 081216, 0915-1000

Refleksitivitet, symmetri og transitivitet (KBR 4.4).

### Torsdag 081216, 1315-1400

Ækvivalensrelationer og operationer på relationer (KBR 4.5 og 4.7).

### Torsdag 081216, 1415-1500

Opsamling på ugens pensum samt spørgetime.

## Program for øvelser

### Tirsdag 061216, 0915-1100

- Regn KBR opgave 4.1.5, 4.1.10, 4.2.4, 4.2.9, 4.2.10, 4.2.23, 4.2.25
- En relation $R$ fra $A$ til $B$ kan repræsenteres som en liste af par i produktmængden $A \times B$ (det er faktisk sådan relationer bliver defineret på side 128 i KBR). Diskuter følgende to opgaver i fællesskab:
  - Producer pseudokode der, givet en sådan liste, finder *billedet* Ran $R$.
  - Tilsvarende, hvordan kan man skrive pseudokode som finder *domænet* Dom $R$?
- En relation $R$ fra $A$ til $B$ kan også beskrives som en Boolesk matrix. Hvordan skal algoritmerne fundet herover tilpasses for at tage en matrix som input i stedet for en liste af elementer i $A \times B$?

### Torsdag 081216, 1015-1200

- Løs KBR opgave 4.2.37, 4.3.1–2, 4.3.4–8, 4.4.1, 4.4.13, 5.1.1, 5.1.11, 5.1.30
- Instruktoren styrer en gennemgang af begreberne *injektiv funktion*, *surjektiv funktion*, *bijektiv funktion*, *omvendt funktion*.

- Diskuter følgende to opgaver i fællesskab:
  - Producer pseudokode der afgør om en relation givet som en delmængde af $A \times B$ er henholdsvis
    - refleksiv
    - irrefleksiv
    - symmetrisk
    - asymmetrisk
    - antisymmetrisk
  - Producer pseudokode der gør det samme for en relation beskrevet som en Boolesk matrix.

### Torsdag 081216, 1415-1600

- Løs KBR opgave 4.5.3, 4.5.4, 4.5.8, 4.5.12

## Fordybelsesopgaver

(1) [*] KBR 4.5.23

(2) [***] Find en funktion $m : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ således at hver gang $A$ er en $n \times n$-matrix med den egenskab at

$$A_{\odot}^{k} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

for et eller andet $k$, så er $A_{\odot}^{m(n)} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{smallmatrix}\right]$.