DMA 2016

– Ugeseddel 5 –

Arbejdsvejledning

Temaet for denne uge er de hele tal. Vi starter tirsdag med at se på heltallenes fundamentale egenskaber i forhold til division og diskuterer begrebene divisor og multiplum, primtal og største fælles divisor (engelsk: greatest common divisor, GCD) samt mindste fælles multiplum (engelsk: least common multiple, LCM). Vi vil dvæle ved Euklids algoritme, en af menneskehedens første algoritmiske opdagelser, der netop kan beregne GCD af to hele tal på en meget effektiv måde. Herefter ser vi på repræsentationer af de hele tal, dels gennem primfaktorisering og dels gennem base b positionssystemer, hvor vi med $b = 10$ opnår vores standardmetode for at beskrive tal og med $b = 2$ opnår den metode som benyttes internt i computere. Alt dette er godt beskrevet i KBR Afsnit 1.4 som indeholder meget information men ikke burde kræve noget I ikke kan i forvejen.

Torsdag når vi frem til et af de vigtigste emner i DMAs matematikdel: induktionsbeviserne. Disse er vores foretrukne metode til at bevise en følge af udsagn der er nummereret ved hjælp af hele tal, som fx

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

I løbet af ugen vil vi træne hvordan sådanne argumenter opstilles og gennemføres, og vi vil se hvordan de passer særligt godt til at bevise udsagn om såvel rekursivt definerede følger som rekursivt definerede algoritmer. Af hensyn til algoritmeforløbet, der voldsomt efterspørger induktion, afviger vi igen en smule fra rækkefølgen i KBR, og vi udgiver igen kortfattede noter der burde være lettere at læse end lærebogen, og som indeholder det vi skal bruge nu og her. Forskellen er nu ret lille, så I kan med fordel skimme indholdet af KBR 2.4 i løbet af denne uge, men der optræder begreber så som "tautologi" som vi først får på plads i næste uge.

Program for forelæsninger

Tirsdag 041016, 0815-0900

Division med rest, divisorer og multipla, største fælles divisor, mindste fælles multiplum og Euklids algoritme. Primtal.

Tirsdag 041016, 1115-1200

Primfaktorisering. Positionsssystemer base n. Binære, oktale og heksadecimale tal. Relevante algoritmer.

Torsdag 061016, 0915-1000

Induktionsbeviser.

Torsdag 061016, 1315-1400

Eksempler på induktionsbeviser. Stærk induktion.

Torsdag 061016, 1415-1500

Algoritmer om primtalstestning og primfaktorisering. Opsamling på ugens pensum samt spørgetime.

Program for øvelser

Tirsdag 041016, 0915-1100

Løs KBR opgave 1.4.10–13, 1.4.16, 1.4.25, 1.4.35 samt

(1) (a) Redegør for at tidsforbruget af den algoritme der er angivet i KBR til at bestemme om et tal n er et primtal er $O(\sqrt{n})$.
    (b) Redegør for at algoritmen ikke er $O(1)$. Kan I vise at metoden er $\Theta(\sqrt{n})$?

Torsdag 061016, 1015-1200

Løs KBR opgave 1.4.41, 1.4.43, 1.4.44 samt

(2) (a) Redegør for at tidsforbruget af den algoritme der er angivet i KBR til at bestemme en base b repræsentation af et tal n er $O(\log n)$.
    (b) Hvorfor er det klart at algoritmen så er $\Theta(\log n)$?

Torsdag 061016, 1515-1700

Løs KBR opgave 2.4.3, 2.4.6, 2.4.10, 2.4.16, 2.4.23. Tag ugens quiz.

Fordybelsesopgaver

(3) Vi søger en effektiv algoritme der kan bestemme en liste af alle primtal mellem 2 og n.

   (a) [*] Redegør for at den algoritme der gennemløber alle tallene og tester om de er primtal ved hjælp af algoritmen i KBR er $\Theta(n^{3/2})$.

   (b) [*] Læs om Erathosthenes' si (engelsk: sieve of Erathosthenes) på nettet, og producer pseudokode for denne algoritme.

   (c) [***]Vis at si-algoritmen har lavere størrelsesorden end den naive algoritme vi først diskuterede. *[Vink: Vis og benyt at $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}$ er $\Theta(n \log n)$.]*