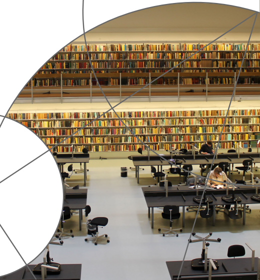
DMA: Kombinatorik

Søren Eilers
Institut for Matematiske Fag



Kombinatorik?

På hvor mange forskellige måder kan man ...

- lave en dansk nummerplade?

Kombinatorik?

På hvor mange forskellige måder kan man …

- lave en dansk nummerplade?
- lave et telefonnummer?

Kombinatorik?

På hvor mange forskellige måder kan man ...

- lave en dansk nummerplade?
- lave et telefonnummer?
- uddele guld, sølv og bronze mellem 10 konkurrencedeltagere?

Kombinatorik?

På hvor mange forskellige måder kan man ...

- lave en dansk nummerplade?
- lave et telefonnummer?
- uddele guld, sølv og bronze mellem 10 konkurrencedeltagere?
- lave et slag med 5 terninger (som i Yatzy)?

Kombinatorik?

På hvor mange forskellige måder kan man ...

- lave en dansk nummerplade?
- lave et telefonnummer?
- uddele guld, sølv og bronze mellem 10 konkurrencedeltagere?
- lave et slag med 5 terninger (som i Yatzy)?
- lave en hånd bestående af 5 kort fra et alm. kortspil?

Oversigt

1. Multiplikationsprincippet
   - Et valg
   - Flere valg
   - Anvendelse: Delmængder
2. Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser
3. Ordnede valg: lister
   - Lister med gentagelser
   - Lister uden gentagelser
   - Anvendelse: Permutationer
4. Uordnede valg: kombinationer
   - Kombinationer uden gentagelser
   - Kombinationer med gentagelser

Multiplikationsprincippet (Thm. 3.3.1)

Eksempel: På hvor mange forskellige måder kan man klæde sig på, hvis man har tre t-shirts (blå, grøn, rød) og to bukser (blå, sort)?

(blå, blå)	(blå,grøn)	(blå, rød)
(sort, blå)	(sort,grøn)	(sort, rød)

Multiplikationsprincippet (Thm. 3.3.1)

Eksempel: På hvor mange forskellige måder kan man klæde sig på, hvis man har tre t-shirts (blå, grøn, rød) og to bukser (blå, sort)?

(blå, blå)	(blå,grøn)	(blå, rød)
(sort, blå)	(sort,grøn)	(sort, rød)

Der er $2 \cdot 3 = 6$ muligheder.

Multiplikationsprincippet (Thm. 3.3.1)

Eksempel: På hvor mange forskellige måder kan man klæde sig på, hvis man har tre t-shirts (blå, grøn, rød) og to bukser (blå, sort)?

(blå, blå)	(blå,grøn)	(blå, rød)
(sort, blå)	(sort,grøn)	(sort, rød)

Der er $2 \cdot 3 = 6$ muligheder.

Sætning

Hvis man skal foretage to uafhængige valg, hvor det første valg træffes mellem n muligheder og det andet træffes mellem m muligheder, så er der $n \cdot m$ muligheder i alt.

Mere end et valg: Tilsvarende regel

Eksempel: Hvor mange nummerplader kan man lave?

$$\boxed{\text{AB 12345}}$$

Mere end et valg: Tilsvarende regel

Eksempel: Hvor mange nummerplader kan man lave?

$$\boxed{\text{AA 10000}}, \boxed{\text{AA 10001}}, \cdots, \boxed{\text{ZZ 99999}}$$

Mere end et valg: Tilsvarende regel

Eksempel: Hvor mange nummerplader kan man lave?

$$\boxed{\text{AA 10000}}, \boxed{\text{AA 10001}}, \cdots, \boxed{\text{ZZ 99999}}$$

Vælg:

- 1. bogstav (24 muligheder – ikke I,Q,Æ, Ø, Å)
- 2. bogstav (23 muligheder – ikke I,O,Q,Æ, Ø, Å)
- 1. tal (9 muligheder)
- 2. tal (10 muligheder)
- 3. tal (10 muligheder)
- 4. tal (10 muligheder)
- 5. tal (10 muligheder)

Muligheder i alt: $24 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 49.680.000$

Anvendelse: Delmængder

Spørgsmål: Hvor mange forskellige delmængder er der af mængden $A = \{1, 2, 3\}$?

Svar: Der er 8:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

Anvendelse: Delmængder

Spørgsmål: Hvor mange forskellige delmængder er der af mængden $A = \{1,2,3\}$?

Svar: Der er 8:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$$

Sætning

Hvis A er en mængde med $n \in \mathbb{N}$ elementer, så er der 2^n forskelige delmængder af A.

Bevis.

For at angive en delmængde af A, skal man for hvert element $a \in A$ angive om a ligger i delmængden eller ej. De giver to mulige valg for hvert $a \in A$, så iflg. multiplikationsprincippet er der 2^n muligheder i alt. $\square$

Oversigt

1. Multiplikationsprincippet
   - Et valg
   - Flere valg
   - Anvendelse: Delmængder
2. Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser
3. Ordnede valg: lister
   - Lister med gentagelser
   - Lister uden gentagelser
   - Anvendelse: Permutationer
4. Uordnede valg: kombinationer
   - Kombinationer uden gentagelser
   - Kombinationer med gentagelser

Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser

På hvor mange forskellige måder kan man ...

1. lave et telefonnummer?
2. uddele guld, sølv og bronze mellem 10 deltagere?
3. lave et slag med 5 terninger (som i Yatzy)?
4. lave en hånd bestående af 5 kort fra et alm. kortspil?

I alle fire tilfælde: Vælg/find r elementer ud af n mulige.

- Har rækkefølgen betydning?
- Kan et element vælges mere end en gang?

Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser

På hvor mange forskellige måder kan man ...

1. lave et telefonnummer?
2. uddele guld, sølv og bronze mellem 10 deltagere?
3. lave et slag med 5 terninger (som i Yatzy)?
4. lave en hånd bestående af 5 kort fra et alm. kortspil?

I alle fire tilfælde: Vælg/find r elementer ud af n mulige.

- Har rækkefølgen betydning?
- Kan et element vælges mere end en gang?

	med gentagelser	uden gentagelser
ordnet		
uordnet		

Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser

På hvor mange forskellige måder kan man ...

1. lave et telefonnummer?
2. uddele guld, sølv og bronze mellem 10 deltagere?
3. lave et slag med 5 terninger (som i Yatzy)?
4. lave en hånd bestående af 5 kort fra et alm. kortspil?

I alle fire tilfælde: Vælg/find r elementer ud af n mulige.

- Har rækkefølgen betydning?
- Kan et element vælges mere end en gang?

	med gentagelser	uden gentagelser
ordnet	1	
uordnet		

Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser

På hvor mange forskellige måder kan man ...

1. lave et telefonnummer?
2. uddele guld, sølv og bronze mellem 10 deltagere?
3. lave et slag med 5 terninger (som i Yatzy)?
4. lave en hånd bestående af 5 kort fra et alm. kortspil?

I alle fire tilfælde: Vælg/find r elementer ud af n mulige.

- Har rækkefølgen betydning?
- Kan et element vælges mere end en gang?

	med gentagelser	uden gentagelser
ordnet	1	2
uordnet		

Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser

På hvor mange forskellige måder kan man ...

1. lave et telefonnummer?
2. uddele guld, sølv og bronze mellem 10 deltagere?
3. lave et slag med 5 terninger (som i Yatzy)?
4. lave en hånd bestående af 5 kort fra et alm. kortspil?

I alle fire tilfælde: Vælg/find r elementer ud af n mulige.

- Har rækkefølgen betydning?
- Kan et element vælges mere end en gang?

	med gentagelser	uden gentagelser
ordnet	1	2
uordnet	3	

Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser

På hvor mange forskellige måder kan man . . .

1. lave et telefonnummer?
2. uddele guld, sølv og bronze mellem 10 deltagere?
3. lave et slag med 5 terninger (som i Yatzy)?
4. lave en hånd bestående af 5 kort fra et alm. kortspil?

I alle fire tilfælde: Vælg/find r elementer ud af n mulige.

- Har rækkefølgen betydning?
- Kan et element vælges mere end en gang?

	med gentagelser	uden gentagelser
ordnet	1	2
uordnet	3	4

Oversigt

1. Multiplikationsprincippet
   - Et valg
   - Flere valg
   - Anvendelse: Delmængder
2. Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser
3. Ordnede valg: lister
   - Lister med gentagelser
   - Lister uden gentagelser
   - Anvendelse: Permutationer
4. Uordnede valg: kombinationer
   - Kombinationer uden gentagelser
   - Kombinationer med gentagelser

Ordnede valg: lister

lad A være en mængde og lad $r \in \mathbb{N}$.

Spørgsmål: Hvor mange forskellige lister af r elementer fra A kan man lave?

Eksempel: Hvis $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $r = 3$,
så er to af de mulige lister $[1, 2, 4]$ og $[2, 1, 4]$
Husk, rækkefølgen har betydning: $[1, 2, 4] \neq [2, 1, 4]$

Her er to forskellige slags tælleproblemer:

- Elementerne i listen kan gentages
  Eks. 1: Cifrene i et telefonnummer kan gentages.
- Elementerne i listen må ikke gentages
  Eks. 2: Man kan ikke både vinde guld og sølv.

Lister med gentagelser (Thm. 3.1.3)

Sætning

Lad A være en mængde med n elementer og lad $r \in \mathbb{Z}^+$. Antallet af lister af r elementer fra A med mulighed for gentagelser er n^r.

Eksempel 1: Hvor mange forskellige 8-cifrede telefonnumre kan man lave?

$$00000000, 00000001, 00000002, \ldots, 99999999$$

Rækkefølgen har betydning, og cifrene kan gentages. Her er $A = \{0, \ldots, 9\}$ og $r = 8$, så der er 10^8 muligheder.

Lister med gentagelser (Thm. 3.1.3)

Sætning

Lad A være en mængde med n elementer og lad $r \in \mathbb{Z}^+$. Antallet af lister af r elementer fra A med mulighed for gentagelser er n^r.

Bevis.

For hvert element i listen kan man frit vælge mellem elementerne fra A. Der er n muligheder i hvert valg, så iflg. multiplikationsprincippet er der n^r muligheder i alt. $\square$

Lister uden gentagelser (Thm. 3.1.4)

Sætning

Lad A være en mængde med n elementer og lad $1 \leqslant r \leqslant n$. Antallet af lister af r elementer fra A uden gentagelser er ${}_nP_r = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$.

Eks. 2: Fordel guld, sølv og bronze mellem

$$\{\text{alice}, \text{bob}, \dots, \text{john}\}.$$

Hver fordeling repæsenteres af en liste:

$[d, a, e]$ betyder guld til d, sølv til a og bronze til e

Ingen gentagelser, rækkefølgen har betydning.
Sætningen siger, at antallet af muligheder er:

$$_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Lister uden gentagelser (Thm. 3.1.4)

Sætning

Lad A være en mængde med n elementer og lad $1 \leqslant r \leqslant n$. Antallet af lister af r elementer fra A uden gentagelser er ${}_nP_r = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$.

Bevis.

På første plads er der n valg, på anden plads er der $(n-1)$ valg osv., så multiplikationsprincippet giver $n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$ muligheder i alt. □

Bemærk, at

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

Anvendelse: Permutationer

Spørgsmål: Hvor mange lister kan man lave, hvor hvert element i A bliver brugt præcis en gang?

Sådan en liste kaldes en permutation af A.
F.eks. er $[2, 3, 1]$ og $[3, 1, 2]$ permutationer af $\{1, 2, 3\}$.

Spørgsmålet er altså: På hvor mange måder kan man omarrangere (eller permutere) elementerne i A.

Anvendelse: Permutationer

Spørgsmål: Hvor mange lister kan man lave, hvor hvert element i A bliver brugt præcis en gang?

Sådan en liste kaldes en permutation af A.
F.eks. er $[2,3,1]$ og $[3,1,2]$ permutationer af $\{1,2,3\}$.

Spørgsmålet er altså: På hvor mange måder kan man omarrangere (eller permutere) elementerne i A.

Svar: Sætningen giver

$${}_nP_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

muligheder.

Oversigt

1. Multiplikationsprincippet
   - Et valg
   - Flere valg
   - Anvendelse: Delmængder
2. Ordnet/uordnet, med/uden gentagelser
3. Ordnede valg: lister
   - Lister med gentagelser
   - Lister uden gentagelser
   - Anvendelse: Permutationer
4. Uordnede valg: kombinationer
   - Kombinationer uden gentagelser
   - Kombinationer med gentagelser

Kombinationer uden gentagelser (3.2.1)

Sætning

Lad A have n elementer og lad $0 \leqslant r \leqslant n$. Antallet af delmængder af A med r elementer er ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Eksempel 4: På hvor mange måder kan man lave en hånd af 5 kort fra et almindeligt kortspil?

Ingen gentagelser, rækkefølgen er uden betydning:

$$\heartsuit 8\ \clubsuit 5\ \spadesuit Q\ \diamondsuit 3\ \heartsuit 9 = \spadesuit Q\ \diamondsuit 3\ \heartsuit 9\ \heartsuit 8\ \clubsuit 5$$

Der er 52 kort, så sætningen siger, at svaret er

$${}_{52}C_5 = \frac{52!}{5!47!} = 2.598.960.$$

Kombinationer uden gentagelser (3.2.1)

Sætning

Lad A have n elementer og lad $0 \leqslant r \leqslant n$. Antallet af delmængder af A med r elementer er ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

De fleste bøger bruger $\binom{n}{r}$ for binomialkoefficienten ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Bevis.

Trick: Brug to forskellige metoder til at tælle hvor mange måder man kan lave en liste med r elementer fra A.

- Forrige sætning siger, det kan gøres på ${}_nP_r$ måder.
- Vælg r uordnede elementer. Lav derefter alle mulige permutationer af disse r elementer.

Kombinationer uden gentagelser (3.2.1)

Sætning

Lad A have n elementer og lad $0 \leqslant r \leqslant n$. Antallet af delmængder af A med r elementer er ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

De fleste bøger bruger $\binom{n}{r}$ for binomialkoefficienten ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Bevis.

Trick: Brug to forskellige metoder til at tælle hvor mange måder man kan lave en liste med r elementer fra A.

- Forrige sætning siger, det kan gøres på ${}_nP_r$ måder.
- Vælg r uordnede elementer. Lav derefter alle mulige permutationer af disse r elementer.

Tid til tavle! □

Kombinationer med gentagelser (3.2.2)

Sætning

Lad A have n elementer, og lad $r \in \mathbb{Z}^+$. Da kan en samling af r uordnede elementer fra A vælges på ${}_{n+r-1}C_r$ måder, når gentagelser er tilladt.

Eksempel 3: Yatzy! Hvor mange forskellige slag kan man lave med 5 terninger?

To terninger kan vise det samme: gentagelser er ok. Rækkefølgen er uden betydning.
$A = \{1, \ldots, 6\}$ og $r = 5$. Antal muligheder:

$$ {}_{6+5-1}C_5 = \frac{10!}{5!5!} = 252. $$

Kombinationer med gentagelser (3.2.2)

Sætning

Lad A have n elementer, og lad $r \in \mathbb{Z}^+$. Da kan en samling af r uordnede elementer fra A vælges på ${}_{n+r-1}C_r$ måder, når gentagelser er tilladt.

Bevis.

Gennemgås ikke. Se eksempel på side 98 i KBR. □

Sammenfatning

På hvor mange måder kan man vælge r elementer fra en mængde med n elementer:

	med gentagelser	uden gentagelser
ordnet	n^r	${}_nP_r$
uordnet	${}_{n+r-1}C_r$	${}_nC_r$

Hvor

$${}_nP_r = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

og

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdots 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$