

DMA 2016

–Ugeopgave 6–

- Hele ugeopgaven skal besvares.
- Ugeopgaven skal afleveres mandag den 24. oktober klokken 23:59 på Absalon.
- Ugeopgaven skal laves **individuel**.
- Besvarelsen skal udarbejdes i L^AT_EX.
- Der lægges ved bedømmelsen vægt på præcision af matematisk argumentation som gennemgået ved forelæsningerne i uge 6, men opgaverne kan løses alene med brug af metoder der var gennemgået ved udgangen af uge 5.

Del 1 Vi ser i denne opgave på Fibonaccitallene defineret rekursivt ved $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ og

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ når } n \geq 2$$

(1) Vis ved induktion, alene ud fra definitionen af F_n , at

$$F_n \leq 2^n$$

for alle $n \in \mathbb{Z}^+$.

(2) Vis ved induktion, alene ud fra definitionen af F_n , at

$$F_n \geq (3/2)^{n-1}$$

for alle $n \in \{6, 7, 8, \dots\}$. [I får nok brug for at $(3/2) + 1 > (3/2)^2$.]

(3) Vis at $\log F_n$ er $\Theta(n)$.

Del 2 I denne opgave betragter vi algoritmen MUL defineret ved pseudokoden

```
MUL(a,b)
  x=a
  y=0
  WHILE x>=b DO
    x=x-b
    y=y+1
  IF x=0 THEN
    RETURN(true)
  ELSE
    RETURN(false)
```

- (1) Forklar i jeres egne ord hvad algoritmen gør når `MUL` kaldes med to tal $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Giv et eller flere illustrative eksempler.
- (2) Bevis ved induktion at hvis x_n og y_n betegner den værdi variablerne x og y har efter n gennemløb af `WHILE`-løkken, så gælder der

$$x_n + by_n = a$$

- (3) Bevis at algoritmen fungerer som beskrevet i delopgave (1).